

## TFA: ESTUDO DA FORMAÇÃO DE IMAGEM COM LENTES FINAS

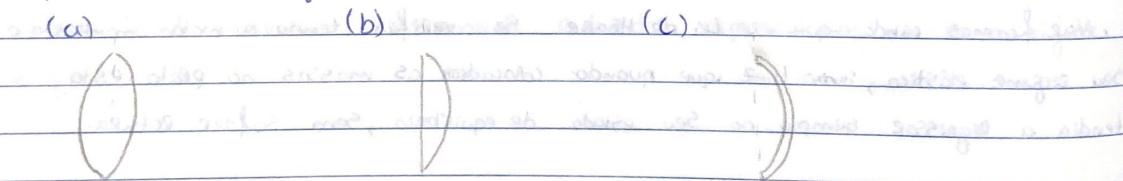
→ INTRODUÇÃO TEÓRICA:

Os raios óticos são refratados nas faces de uma lente, podendo convergir (focagem num ponto) ou divergir. Considerando uma lente simples, num meio de refração limitado por duas superfícies esféricas de raios  $R_1$  e  $R_2$ , com os seus centros, respetivamente, em  $C_1$  e  $C_2$ .

Aplicando as Leis de Snell, desprezando a espessura da lente ( $d \gg R_1$  e  $R_2$ ) e considerando  $\Delta n \ll (R_1$  e  $R_2)$ , obtemos a seguinte expressão:

$$(1) \frac{1}{f} = (n-1) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

↓ Potência da lente (unidade: Dioptria)

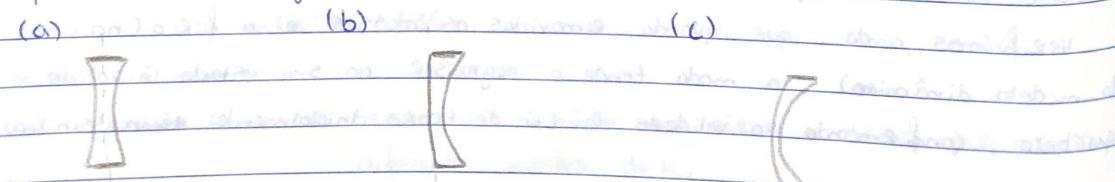
•  $f > 0$  (lente convergente):

Bi-convex

Plano-convex

Menisco-convex

→ A qual será utilizada nesta experiência. (+15)

•  $f < 0$  (lente divergente):

Bi-côncava

Plano-côncava

Menisco-côncava

• Equação de configuração objeto-imagem (Lei de Gauss):

$$(2) \frac{1}{f} = \frac{1}{s_i} + \frac{1}{s_o}$$

$f$  - distância focal.

$s_i$  - distância a que se forma a imagem.

$s_o$  - distância do objeto à lente.

• Equação da associação de lentes (com 2 lentes finas):

$$(3) \frac{1}{f_{eq}} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}$$

↳ distância focal

equivalente

• Ao usar as equações (2) e as regras de geometria obtemos:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{s_i} + \frac{1}{s_o} \quad \text{e} \quad s_o + s_i = D$$



$$f = \frac{s_i s_o}{D} \quad \text{ou} \quad f = s_o - \frac{s_o^2}{D} \quad \text{ou} \quad f = s_i - \frac{s_i^2}{D}$$

$$(\Delta f)^2 = \left[ \left( \frac{\Delta s_i}{s_i} \right)^2 + \left( \frac{\Delta s_o}{s_o} \right)^2 + \left( \frac{\Delta D}{D} \right)^2 \right] f^2$$

$$(\Delta f)^2 = \left( 1 + \frac{\Delta s_o}{s_o} \right)^2 \Delta s_o^2 + \left( \frac{s_o^2}{D^2} \right) \Delta D^2$$

• Desta forma, a distância focal pode ser determinada a partir de uma simples medição de  $s_o$  e  $s_i$ :

$\frac{1}{s_i}$

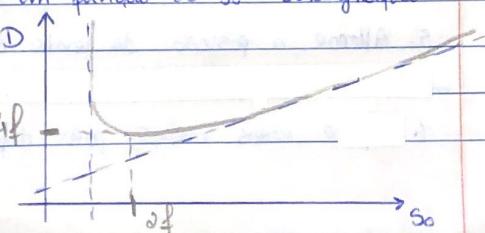
$\frac{1}{f}$

→ Gráfico de  $\frac{1}{s_i}$  em função de  $\frac{1}{s_o}$  para uma lente convergente.

$\frac{1}{s_o}$

• Uma outra forma será traçar o gráfico de  $D$  em função de  $s_o$ . Este gráfico dará origem a uma parábola:

$$f = \frac{s_i s_o}{D} \quad \text{ou} \quad D = -\frac{s_o^2}{f-s_o}$$

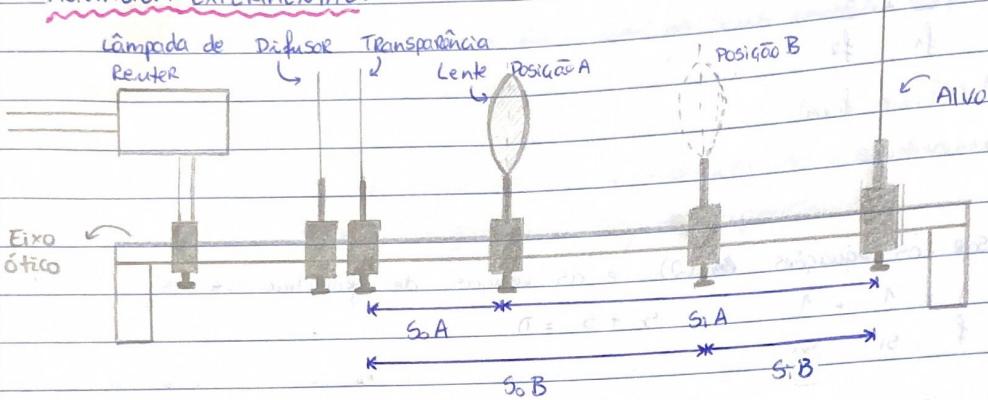


$D$  - distância da transparência ao avo.

→ OBJETIVOS:

- Estudar a formação de imagens por lente finas;
- Observar o efeito da aberração esférica longitudinal.
- Analisar dados em gráficos com funções não lineares.
- Familiarizar-se com o conceito de ampliação de imagem.

→ MONTAGEM EXPERIMENTAL:



→ PROCEDIMENTO EXPERIMENTAL:

1. Montar o esquema experimental representado antes.

ATENÇÃO! Manter um espaço entre a lâmpada e o difusor, para que este não aqueça demais e se deteriora.

2. Medir as dimensões lineares do objeto (horizontal e vertical)

→ convergente → mesma distância focal

3. Colocar a lente convergente (+15) num dos suportes e ajustar a posição até obter uma imagem nítida no alvo.

4. Medir as distâncias transparência-lente ( $S_o$ ), transparência - alvo ( $D$ ), lente - alvo ( $S_i$ ) e as dimensões lineares da imagem.

5. Alterar a posição da lente de modo a obter uma nova imagem nítida, sem mover a transparência e o alvo. Repetir as medições de (4).

6. Repetir estas medições para diferentes  $D$ .

7. Calcular a distância focal da lente:

- Tracar o gráfico da reta  $\frac{1}{s_i}$  em função de  $\frac{1}{s_0}$  (com  $D$  variável) e determinar  $f$ .

- Tracar gráfico de  $D$  em função de  $s_0$  e determinar  $f$ .

- Estimar as incertezas de  $f$ .

- Determinar a ampliação transversal. ( $M_T$ )  $\rightarrow M_T = \frac{h'}{h} = \frac{s_i}{s_0}$

8. Colocar a lente +10 a cerca de 15cm do objeto, deslocando o alvo até ter uma ~~reto~~ imagem nítida e registar o valor.

Colocar a máscara que deixa passar a luz na zona central  
a luz nos pelos lados

e determinar a nova posição de imagem, registando o valor.

9. Comparar a incerteza da determinação de  $f$  a partir de uma única linha da tabela com a obtida pelos métodos gráficos.



**Imagen 1:** Montagem experimental.

→ NOTAS DE AULA:

• Optamos por não usar o difusor porque dificultava a visualização do objeto ( $0^{\circ}F$ ).

• Medimos ( $D$ ,  $s_0$  e  $s_i$ ) entre os centros dos suportes, pelo que as medições apresentam ainda a incerteza da espessura do alvo, das lentes e do objeto.

A

$$\text{mede } s_0 = 1 \quad \Rightarrow \quad A = f/20.0 = 1$$

## → ANÁLISE DE DADOS:

Posição	D ( $\pm 0,05$ ) cm	S <sub>o</sub> ( $\pm 0,05$ ) cm	$\frac{1}{S_o}$ ( $\pm 0,000004$ ) cm <sup>-1</sup>	S <sub>i</sub> ( $\pm 0,05$ ) cm	$\frac{1}{S_i}$ ( $\pm 0,000004$ ) cm <sup>-1</sup>	2h ( $\pm 0,05$ ) cm	2h' ( $\pm 0,05$ ) cm	M <sub>z</sub> ( $\pm 0,03$ )	Tabela 1 - Lente convergente +15				
									$f = \frac{S_{oi}}{B}$ ( $\pm 0,04$ ) cm	$f = S_{oi} - \frac{S_{oi}^2}{D}$ ( $\pm 0,07$ ) cm	$f = S_{oi} - \frac{S_{oi}^2}{D}$ ( $\pm 0,13$ ) cm		
A	121,20	14,30	0,069930	106,90	0,009355	2,30	8,70	7,48	12,61	12,61	12,61		
A	121,30	12,10	0,082645	109,20	0,009158		7,30	9,02	10,89	10,89	10,89		
A	121,10	11,00	0,090909	110,10	0,009083		6,10	10,01	10,00	10,00	10,00		
A	121,00	9,00	0,111111	112,00	0,008929		5,20	12,44	8,33	8,33	8,33		
A	87,70	16,00	0,062500	72,10	0,013870		10,40	4,51	13,15	13,08	12,83		
A	87,70	70,20	0,014245	17,20	0,058140		0,55	0,25	13,77	14,01	13,83		
A	70,95	17,80	0,056180	53,20	0,018797		6,60	2,99	13,35	13,33	13,31		
A	70,95	52,20	0,019157	18,80	0,053191		0,75	0,36	13,83	13,79	13,82		
A	120,70	15,50	0,064516	105,20	0,009506		8,50	6,79	13,51	13,51	13,51		
B	50,50	24,75	0,040404	25,80	0,038760		3,50	1,04	12,64	12,62	12,62		
B	57,30	20,40	0,049020	37,10	0,026954		4,10	1,82	13,21	13,14	13,08		
B	57,30	36,20	0,027624	21,50	0,046512		1,30	0,59	13,58	13,33	13,43		
B	65,40	40,00	0,025000	25,40	0,039370		1,20	0,64	15,54	15,54	15,54		
B	65,50	27,10	0,036900	38,40	0,026042		3,40	1,42	15,89	15,89	15,89		
B	65,00	22,50	0,044444	42,50	0,023529		4,10	1,89	14,71	14,71	14,71		
B	65,60	39,20	0,025510	26,40	0,037879		3,40	0,67	15,78	15,78	15,78		
B	65,90	53,50	0,018692	12,40	0,080645		1,80	0,23	10,07	10,07	10,07		
Médias ( $s$ / pontos duvidosos)													

**Tabela 1:** Dados e medições experimentais. (Os pontos duvidosos foram assinalados a vermelho, tendo sido excluídos na análise mais aprofundada dos dados experimentais).

Gráfico 1 -  $1/S_i$  em função de  $1/S_o$  (c/ ajuste)

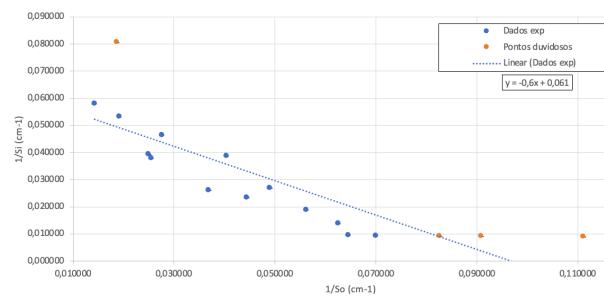


Tabela 2 de ajuste

m	-0,6	b	
sm	0,1	0,006	sb
r²	0,7	0,01	sy

**Gráfico 1:**  $1/S_i$  em função de  $1/S_o$  com todos os dados experimentais, incluindo os pontos considerados como duvidosos e respectiva matriz de ajuste (**Tabela 2**).

Gráfico 2 -  $1/S_i$  em função de  $1/S_o$  (c/ ajuste)

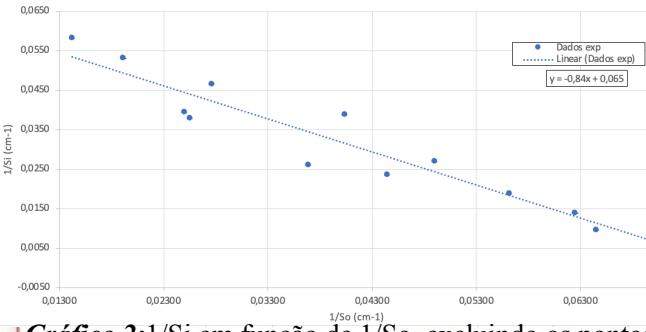


tabela 3 de ajuste

m	-0,84	b	
sm	0,08	0,004	sb
r²	0,91	0,005	sy

Tabela 4- Linha ajuste gráfico 2

0,00684
0,01307
0,05348
0,01836
0,04937
0,01138
0,03157
0,02436
0,04227
0,04447
0,03451
0,02819
0,04404
0,06541

**Gráfico 2:**  $1/S_i$  em função de  $1/S_o$ , excluindo os pontos duvidosos para obter uma melhor aproximação ao real, respectiva matriz de ajuste (**Tabela 3**) e dados da linha de ajuste do gráfico 2 (**Tabela 4**).

- Aprendendo a equação de ajuste obtida, excluindo os pontos considerados como duvidosos:  $y(x) = -0,8375x + 0,06541$  (sendo que teoricamente o declive deveria ser  $-1$ ) podemos concluir que o valor é bastante satisfatório.

- Sabendo que  $y_f$  corresponde à intersecção do gráfico  $y(x)$  com o eixo das coordenadas:

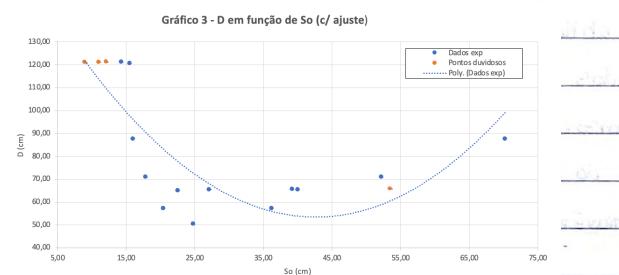
$$y(0) = 0,06541 = \frac{1}{f} \rightarrow f = (15,29 \pm 0,08) \text{ cm}$$

$$g(n) = 0 \Leftrightarrow -0,8375n + 0,0654n = 0 \Leftrightarrow n = 0,07810 = 1 \rightarrow f = h_2,80 \pm 0,08 \text{ cm}$$

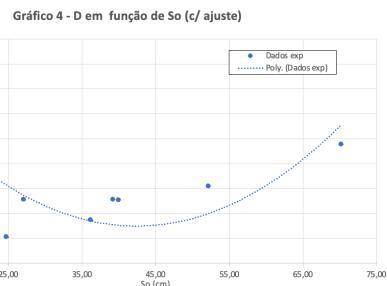
- Os valores obtidos diferem em 2,49, um valor um pouco elevado, contudo, ainda representando uma aproximação satisfatória. Isto pode ter-se dado devido ~~desconhecimento~~ a alguns erros experimentais cometidos durante o processo.

- Por fim, comparando os valores médios de  $f$  obtidos com base nos dados da tabela 1 e nos dados recolhidos pela análise gráfica, verificamos que estes são relativamente próximos ( $f$  (tabela) =  $13,44 \pm 0,08$  cm;  $f$  (gráfico) =  $14,05 \pm 0,08$  cm), pelo que podemos concluir que os resultados foram bastante precisos.

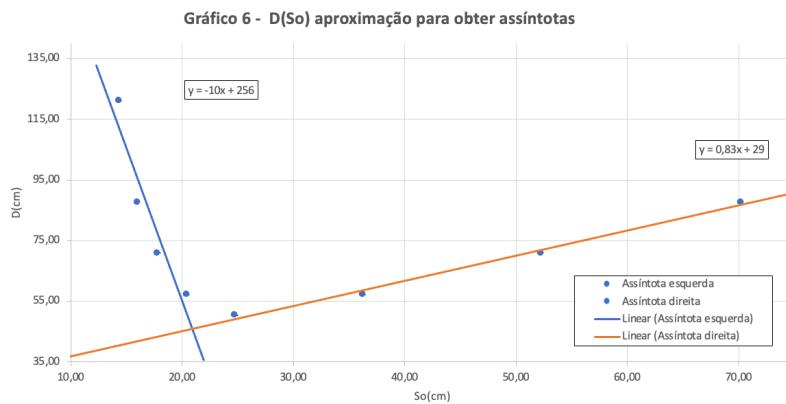
É de notar que foram colocadas barras de erro em ambos os gráficos acima representados, com um valor fixo de  $0.000004 \text{ cm}^{-1}$ , correspondente à incerteza associada a  $1/\text{Si}$ .



**Gráfico 3:** D em função de So com todos os dados experimentais, incluindo pontos duvidosos.



**Gráfico 4:** D em função de So, excluindo os pontos duvidosos, de modo a obter uma melhor aproximação



**Gráfico 6:** D em função de So com a aproximação das assíntotas e respetivas matrizes de ajuste (Tabelas 6 e 7).

**Nota:** Mais uma vez, os graficos 3,4, 6 e 5 (mais à frente) apresentam barras de erro com valor fixo de  $0.05 \text{ cm}$ , correspondente à incerteza de D.

Tabela 6 - Assíntota Esquerda			
$m$	-10	257	$b$
$sm$	2	39	$sb$
$r^2$	0,91	10	$sy$

Tabela 7 - Assíntota Direita			
$m$	0,83	29	$b$
$sm$	0,05	2	$sb$
$r^2$	0,993	2	$sy$

- Analisando o gráfico 6 obtemos, na gama experimental escolhida, as equações das assintotas à direita e à esquerda, respetivamente:

$$\bullet y = 0,8287x + 28,626$$

$$\bullet y = -10,06x + 256,57$$

- Os pontos onde estas retas intersejam os eixos ~~esquerdos~~ coordenados, dos yy e dos xx, respetivamente, correspondem, tecnicamente ao valor de f. Na assintota à direita temos:

$$x=0 \rightarrow y = 28,63 \approx (29 \pm 2) \text{ cm} = f$$

No assintota à esquerda temos:

$$y=0 \Rightarrow 10,06x = 256,57 \Rightarrow x = 25,50 = (25,5 \pm 0,5) \text{ cm} = f$$

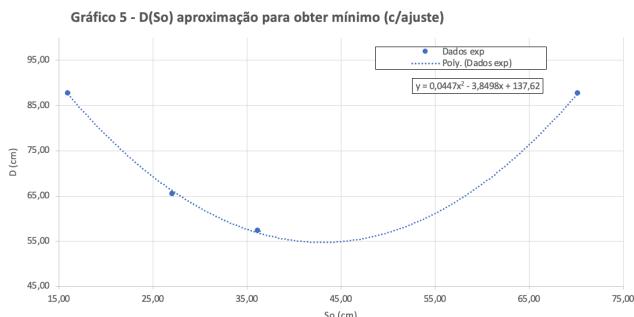
- Como podemos verificar os valores obtidos pelo cruzamento das assintotas com os eixos foram muito afastados dos obtidos pelo 1º método, sendo, ~~o~~ aproximadamente, o dobro destes últimos.

- Assim, uma vez conhecendo o valor da ~~distância~~ distância focal da lente utilizada (15 cm), os resultados obtidos ~~foram~~ através do primeiro método serão ~~considerados~~ como os mais próximos do real.

~~Resolução do problema~~

Gráfico 5: D em função de So.

Reduziu-se a gama experimental inicial, de modo a tornar mais fácil a obtenção do mínimo desta função.



- Analisando agora o ajuste obtido para o gráfico 5:

$$y = 0,0447x^2 - 3,8498x + 137,62 \rightarrow h(x)$$

- Sabemos que, em teoria, o mínimo desta função corresponde ao ponto de coordenadas (2f, 4f)

$$h'(x) = 0,0894x - 3,8498$$

$$\hookrightarrow h'(x) = 0 \Leftrightarrow 0,0894x = 3,8498 \Leftrightarrow x = 43,06 \rightarrow h(43,06) = 54,73$$

$$x = 43,06 \rightarrow 2f = 43,06 \Leftrightarrow f = (21,53 \pm 0,08) \text{ cm}$$

$$y = 54,73 \rightarrow 4f = 54,73 \Leftrightarrow f = (13,68 \pm 0,08) \text{ cm}$$

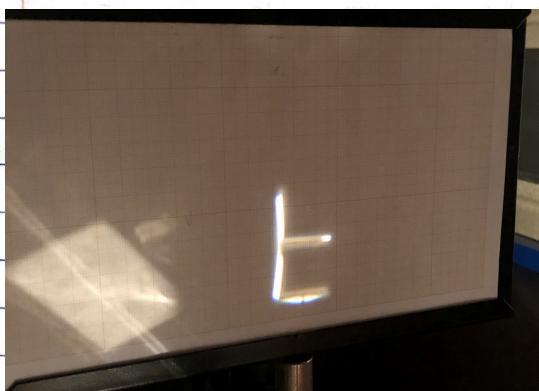
- O valor obtido para  $f$  a partir das coordenadas do mínimo da função  $h$  foram bastante diferentes entre si. Contudo, o resultado obtido a partir da coordenada  $y$  foi muito parecido aos obtidos pelo primeiro método de estudo e ao valor teórico conhecido.

- Porém, mais uma vez, o valor de  $f$  resultante da abscissa do ponto mínimo diferem muito do esperado, podendo ter ocorrido alguns erros experimentais nas medições das várias grandezas.

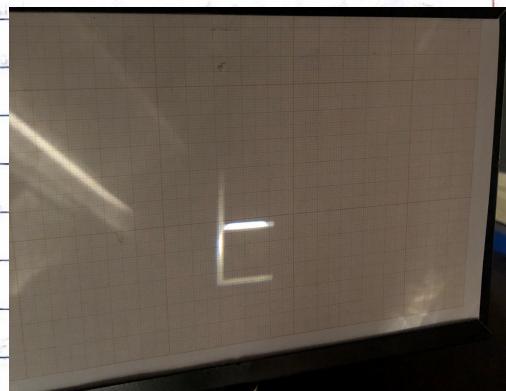
- Diagrama Lente convergente +10:

Análise e comparação de luz à volta e no centro:

- Devido à falta de tempo provocada pela necessidade de aumentar a gama experimental, não foi possível o registo de dados e medições para esta parte da experiência. Contudo, foi ainda possível a captura de algumas fotografias ilustrativas da situação.



**Imagen 2:** Lente +10 com máscara que deixa passar a luz pelas laterais.



**Imagen 3:** Lente +10 com máscara que deixa passar a luz pelo centro.

- Podemos, assim, concluir que a imagem é mais nítida e melhor definida quando é aplicado à lente a máscara que permite passar luz pela lateral, em comparação com a máscara que apenas deixa passar luz pelo centro (2)

→ INCERTEZAS:

$$\cdot f = \frac{s_i - s_o}{D} \rightarrow \Delta f = \left[ f^2 \left( \left( \frac{\Delta s_i}{s_i} \right)^2 + \left( \frac{\Delta s_o}{s_o} \right)^2 + \left( \frac{\Delta D}{D} \right)^2 \right) \right]^{1/2} = 0,04 \text{ cm}$$

$$\cdot f = s_o - \frac{s_o^2}{D} \rightarrow \Delta f = \left[ \left( 1 + \frac{\Delta s_o}{s_o} \right)^2 \Delta s_o^2 + \left( \frac{s_o^2}{D^2} \right)^2 \Delta D^2 \right]^{1/2} = 0,07 \text{ cm}$$

$$\cdot f = s_i - \frac{s_i^2}{D} \rightarrow \Delta f = \left[ \left( 1 + \frac{\Delta s_i}{s_i} \right)^2 \Delta s_i^2 + \left( \frac{s_i^2}{D^2} \right)^2 \Delta D^2 \right]^{1/2} = 0,13 \text{ cm}$$

Sendo  $\Delta s_i = \Delta s_o = \Delta D = 0,05 \text{ cm}$ ;  $D = 87,70 \text{ cm}$ ;  $s_o = 16,00 \text{ cm}$ ;  $s_i = 72,10 \text{ cm}$ .

• incerteza  $\Delta f$  obtida graficamente:

$$- Gráfico de \frac{1}{s_i} \left( \frac{1}{s_o} \right) \rightarrow \Delta f = s_m = 0,08$$

- Gráfico de  $D(s_o) \rightarrow$  incerteza associada às assintotas esquerda e direita, respectivamente: 2,28 e 0,048.

→ CONCLUSÕES:

. Tal como esperado, ao ser utilizada uma lente biconvexa, a transformação da imagem do objeto ("F") aparece no alvo invertida.

. Analisando os gráficos obtidos de  $\frac{1}{s_i}$  ( $\frac{1}{s_o}$ ) e  $D(s_o)$  verificamos a obtenção de diferentes resultados para  $f$ , dependendo dos diversos métodos usados.

Assim, vemos resultados de  $f = 15,09 \text{ cm}$  e  $f = 12,80 \text{ cm}$  para o gráfico de  $\frac{1}{s_i}$  ( $\frac{1}{s_o}$ );  $f = 21,53 \text{ cm}$  e  $f = 13,68 \text{ cm}$  para o mínimo do gráfico de  $D(s_o)$ ;  $f = 28,63 \text{ cm}$  e  $f = 25,50 \text{ cm}$  para a intersecção das assintotas com os eixos.

• Como vemos os valores obtidos pela intersecção das assintotas foram muito elevados e bastante diferentes do resto dos resultados, pelo que foi considerado melhor descartá-los.

• Desta forma, fazendo a média entre ~~os resultados~~ os valores de  $f = 15,29$ ;  $12,80$ ;  $21,53$ ;  $13,68$ , obtemos  $f_{MED} = 15,83\text{ cm}$  e uma potência da lente  $\gamma f_{MED} = 0,0658\text{ cm}^{-1}$ , para a lente utilizada de ~~15~~ dioptria +15.

Posto isto, verificamos que o valor médio obtido experimental é muito próximo do real, tendo um erro relativo de:

$$ER(\gamma) = \frac{|15 - 15,83|}{15} \times 100 = 5,5\%$$

• Verificamos que, dependendo das distâncias de transparências (alvo e transparência lente) o fator de ampliação pode ser menor que 1 (dimensões da imagem são menores que as dimensões originais) ou superior ou igual a 1 (dimensões da imagem são maiores ou iguais à do ~~objeto~~ objeto original).

• Para a lente convergente +15, rotineando os valores duvidosos, obteve-se um valor médio de  $f = 15,83\text{ cm}$  ( $\gamma f = 0,0658\text{ cm}^{-1}$ ), muito próximo do ~~valor~~ valor real esperado, tendo um erro de apenas 5,5%.

• Mais uma vez, como foi necessário o aumento da gama experimental para a lente +15, não houve tempo suficiente para registar dados para a lente +10, contudo ~~para~~ foram registadas algumas fotografias comprovativas das conclusões tiradas anteriormente, ~~que demonstram~~ que com o uso de ~~delas~~ máscaras que deixam passar a luz pelos lados e pelo centro.