

13/03/2024

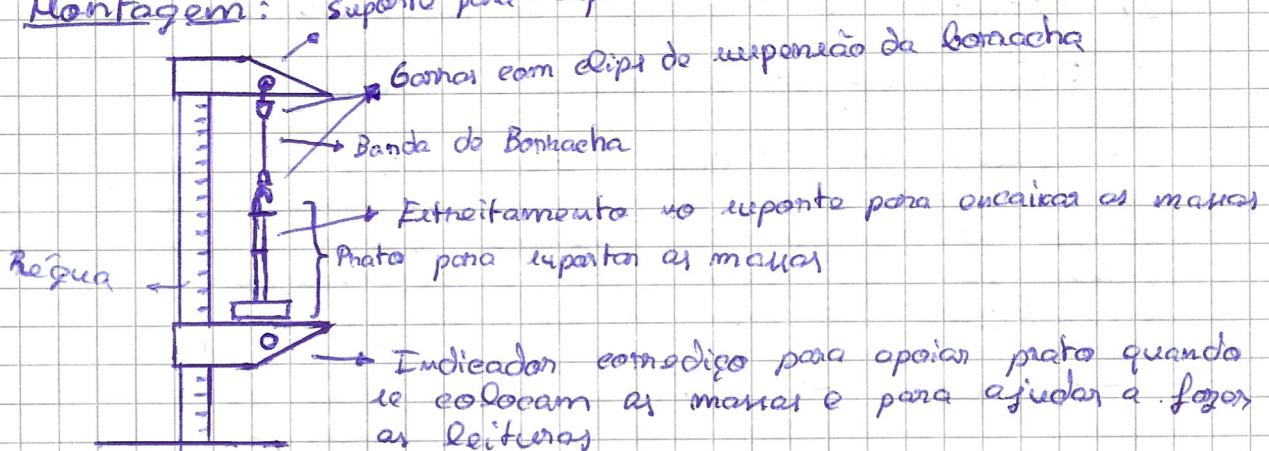
Estudo do comportamento viscoelástico

Tiago Catarino, Grupo 8, PL7, 202400809

Objetivos:

- Verificar que ocorrem 3 comportamentos viscoelásticos numa banda de borracha vulcanizada, sujeita a tensões de tração: histerese elástica, "creep" e relaxação temporal;
- Calcular a energia dissipada no processo carga-descarga;
- Identificar o tipo de perfil: (1) tensão / deformação relativa, $\gamma(t)$, nos casos tanto da carga como na descarga no âmbito do estudo da histerese; (2) da evolução temporal da deformação relativa, $\dot{\gamma}(t)$, nos casos de ocorrência de "creep" e de relaxação temporal;
- Determinar os valores representativos do módulo de Young, apenas no caso da carga.

Montagem: suporte para suspender a borracha



Procedimento Experimental:

- 1) Assegurar a montagem em eima;
- 2) Medir o comprimento da banda de borracha entre os suportes (L_0) e fazer as medições necessárias para calcular a área da secção reta do fio (S);
- 3) Suspender um pequeno prato (~10g) no fio;

4) Iniciar a experiência, colocar as massas uma a uma e retirar da mesma forma, recomendando à escala vertical que está disponível na bancada;

5) Ao colocar e retirar as massas, garantir que não há oscilações verticais ou pendulares do prato. Caso contrário, repetir a experiência;

6) Para colocar cada massa:

- Segurar no prato com uma das mãos enquanto com a outra encaixa a massa de 10 g;

- Não subir o prato durante o processo!

- Ou usar um apoio para o prato, o que evita que haja oscilações verticais.

7) Proceder de modo semelhante na descarga, tendo o cuidado de não parar o processo na passagem da canga para a descarga. O resultado é lançar suavemente o prato, acompanhado parte da redução de tamanho da bohnacha depois de retirada a massa;

8) Registar e organizar os dados em uma tabela;

9) Fazer o estudo da ocorrência de:

13/05
prep

- "creep" → colocar 80 + 100 g sobre a bohnacha e estudar a deformação ao longo do tempo da mesma gravando um vídeo da bohnacha até a deformação estabilizar (à volta de 15 a 20 minutos).

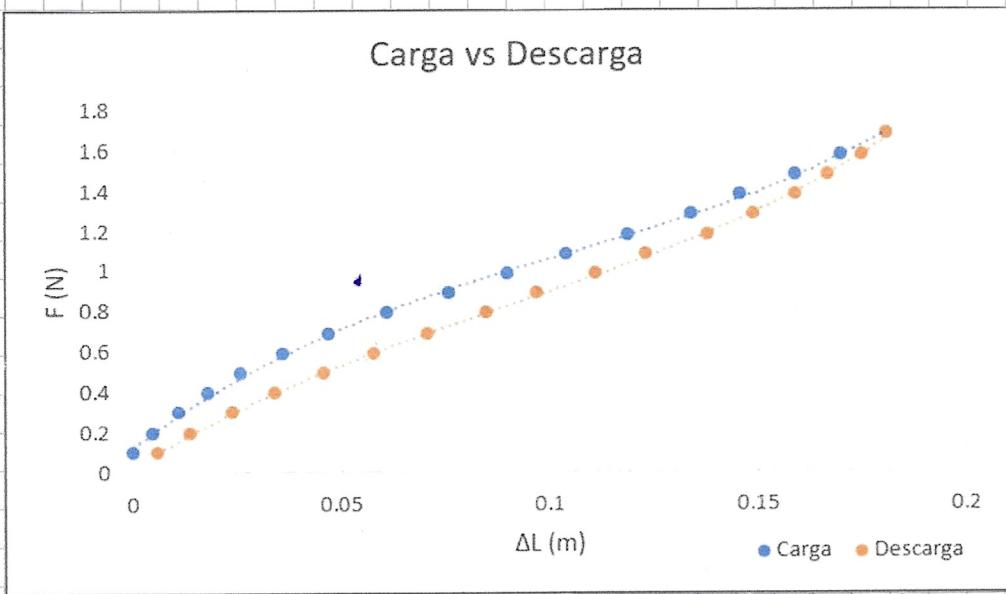
- Relaxação → Após a realização do "creep", podemos retirar os pesos e obtermos a bohnacha a voltar ao seu comprimento inicial, este processo demora 15 ~ 20 minutos e podemos gravá-lo em vídeo de forma a estudá-lo.

Análise de dados - carga e descarga

Após a realização da experiência obtemos os seguintes dados:

m (kg)	F (N)	L _c (m)	u(L _c) (m)	ΔL _c (m)	L _d (m)	u(L _d) (m)	ΔL _d (m)	a (m)	b (m)	S (m ²)	
0.0103	0.101043	0.376	0.0005	0	0.382	0.0005	0.006		0.0013	0.00165	2.15E-06
0.0203	0.199143	0.381	0.0005	0.005	0.39	0.0005	0.014				
0.0303	0.297243	0.387	0.0005	0.011	0.4	0.0005	0.024				
0.0403	0.395343	0.394	0.0005	0.018	0.41	0.0005	0.034				
0.0503	0.493443	0.402	0.0005	0.026	0.422	0.0005	0.046				
0.0603	0.591543	0.412	0.0005	0.036	0.434	0.0005	0.058				
0.0703	0.689643	0.423	0.0005	0.047	0.447	0.0005	0.071				
0.0803	0.787743	0.437	0.0005	0.061	0.461	0.0005	0.085				
0.0903	0.885843	0.452	0.0005	0.076	0.473	0.0005	0.097				
0.1003	0.983943	0.466	0.0005	0.09	0.487	0.0005	0.111				
0.1103	1.082043	0.48	0.0005	0.104	0.499	0.0005	0.123				
0.1203	1.180143	0.495	0.0005	0.119	0.514	0.0005	0.138				
0.1303	1.278243	0.51	0.0005	0.134	0.525	0.0005	0.149				
0.1403	1.376343	0.522	0.0005	0.146	0.535	0.0005	0.159				
0.1503	1.474443	0.535	0.0005	0.159	0.543	0.0005	0.167				
0.1603	1.572543	0.546	0.0005	0.17	0.551	0.0005	0.175				
0.1703	1.670643	0.557	0.0005	0.181	0.557	0.0005	0.181				

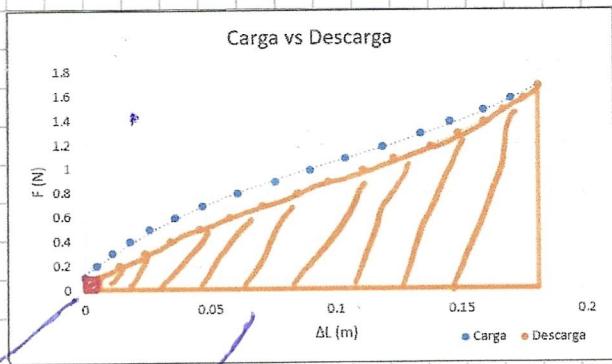
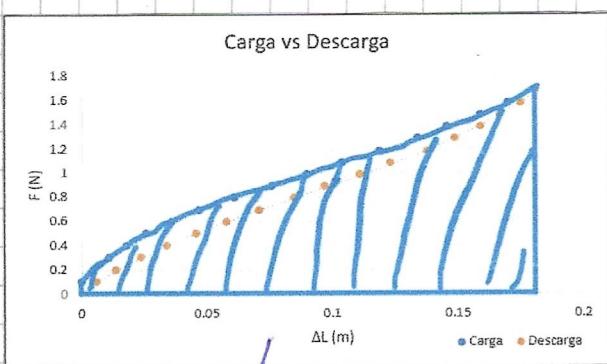
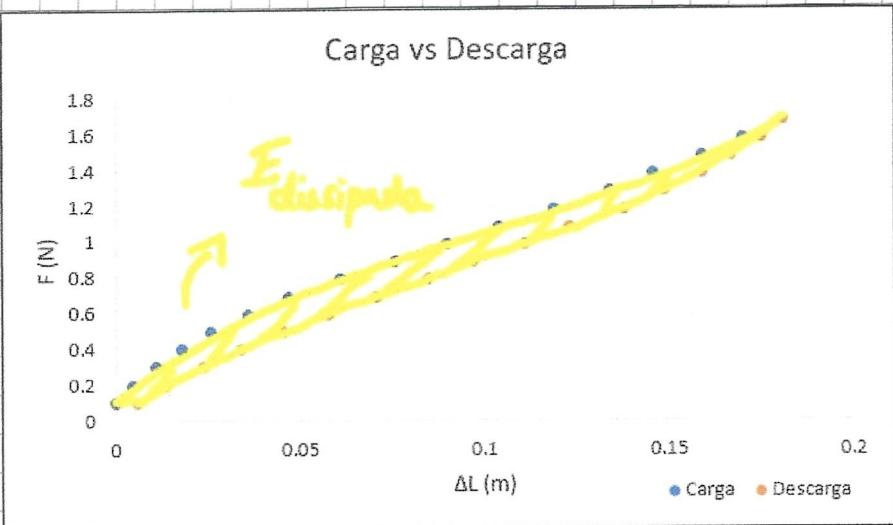
JL 13/05
gráfico
elástica



E como podemos ver, o gráfico F vs. ΔL está como esperado tanto para a carga como para a descarga, e podemos também que os valores de ΔL_d (da descarga) são menores que os valores de ΔL_c (da carga) para cada F , a conclusão que podemos tirar é que houve dissipação de energia no processo da carga e descarga.

elástica

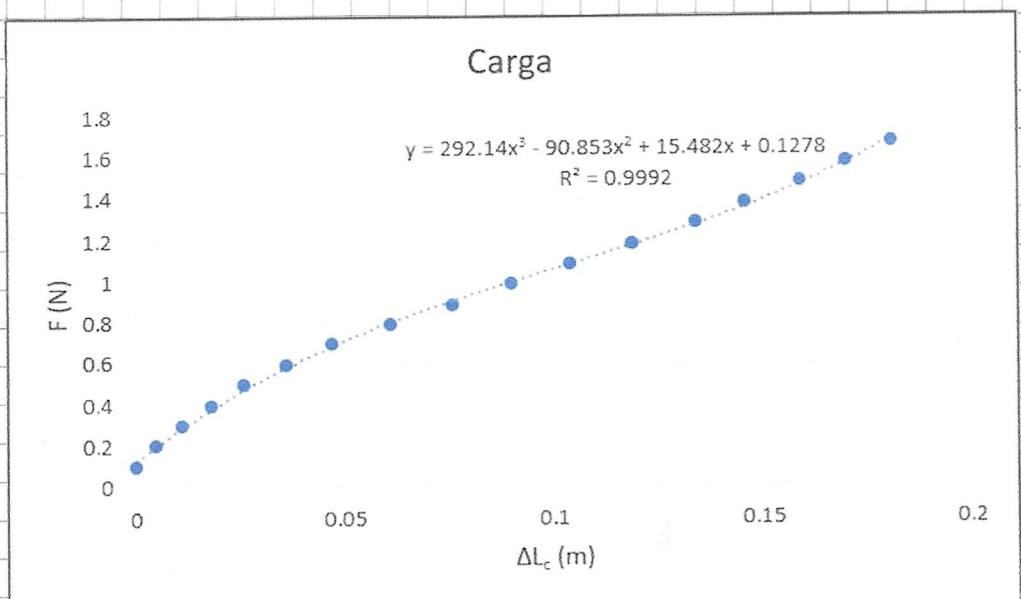
Para calcular a energia total dissipada podemos pensar nas áreas debaixo dos gráficos de carga e descarga:



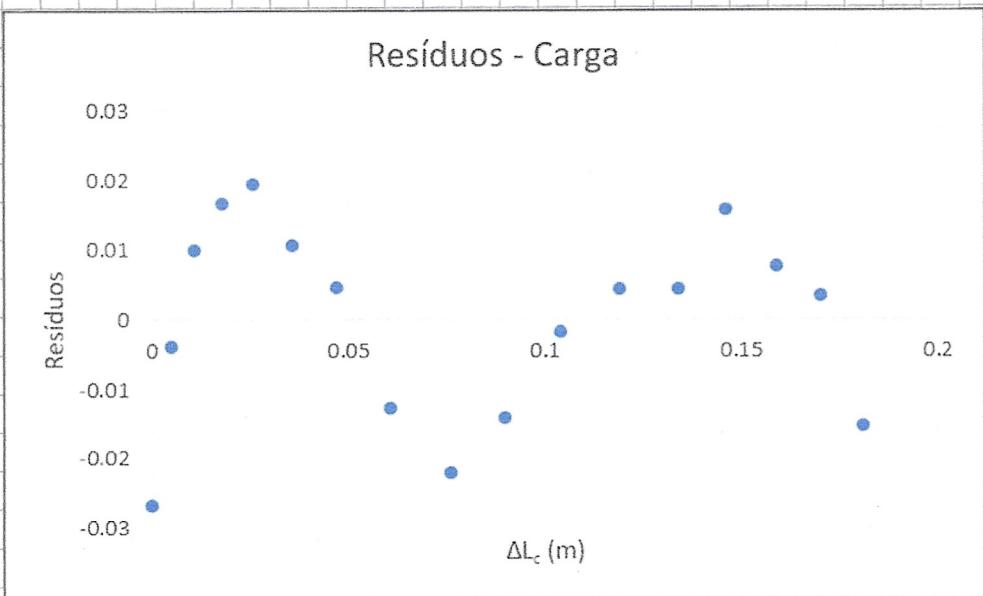
$$= \int_0^{0,187} F(\Delta L_c) d\Delta L_c - \left(F_0 \times \Delta L_{d0} + \int_{0,006}^{0,187} F(\Delta L_d) d\Delta L_d \right)$$

Como podemos obter as equações de $F(\Delta L_c)$ e $F(\Delta L_d)$?

↳ Apontar de um ajuste polinomial!



	x^3	x^2	x^1	x^0
m	292.1416	-90.8531	15.48161	0.127766
u(m)	28.50394	7.749876	0.57086	0.010031

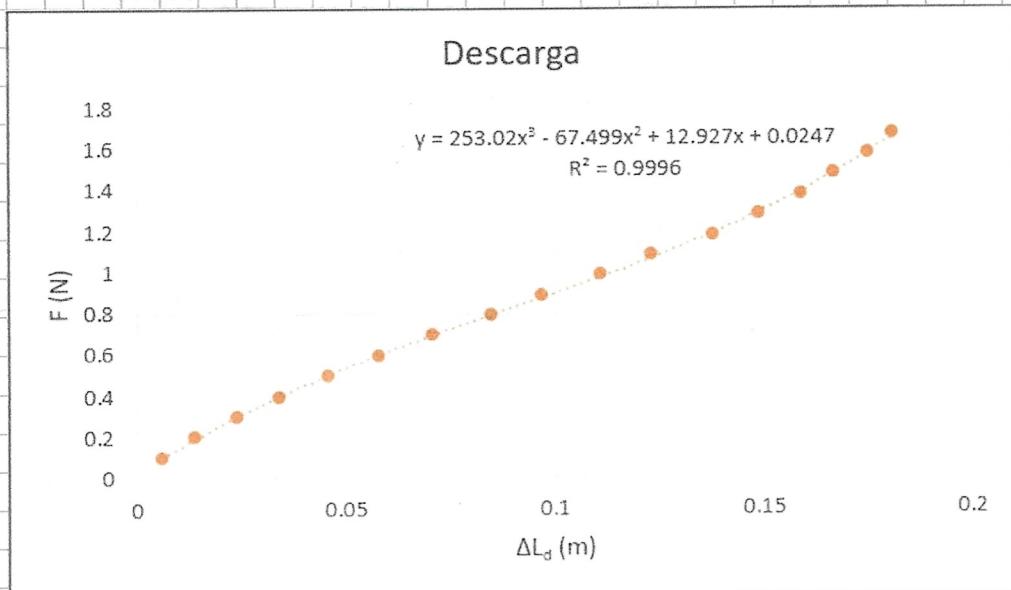


E então temos uma aproximação para $F(\Delta L_c)$:

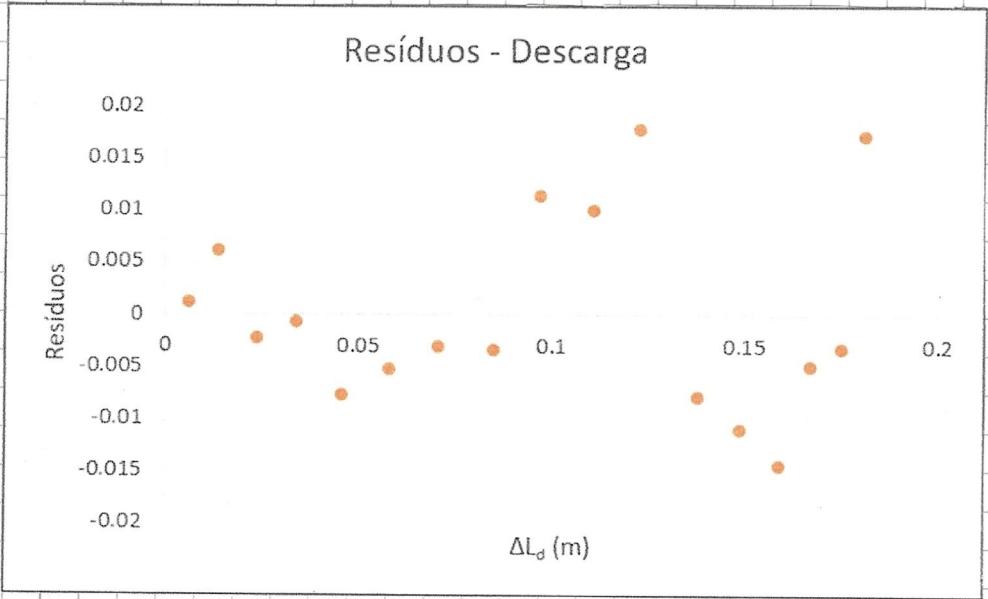
$$y = 292.14x^3 - 90.853x^2 + 15.482x + 0.1278$$

$$\hookrightarrow y = F, \quad x = \Delta L_c$$

Os resíduos parecem ter tendência curvilinear, mas não é suficiente para tirar alguma conclusão por isso irei considerá-los aleatórios.



	x^3	x^2	x^1	x^0
m	253.0173	-67.4986	12.92664	0.024678
u(m)	21.45428	6.114127	0.488282	0.010054



Resíduos
Aleatórios!

E então obtemos uma aproximação para $F(\Delta L_d)$:

$$y = 253.02x^3 - 67.499x^2 + 12.927x + 0.0247$$

$$\hookrightarrow y = F, \quad x = \Delta L_d$$

Poderemos então calcular os valores da energia dissipada no processo de carga e descarga:

$$\begin{aligned} & \int_0^{0.184} F(\Delta L_c) d\Delta L_c = \int_0^{0.184} (292.14x^3 - 90.853x^2 + 15.482x + 0.1278) dx \\ &= \left[\frac{292.14}{4} x^4 - \frac{90.853}{3} x^3 + \frac{15.482}{2} x^2 + 0.1278 x \right] \Big|_0^{0.184} \\ &\approx 0,1755 \text{ J} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int_{0.006}^{0.184} F(\Delta L_d) d\Delta L_d = \int_{0.006}^{0.184} (253.02x^3 - 67.499x^2 + 12.927x + 0.0247) dx \\ &= \left[\frac{253.02}{4} x^4 - \frac{67.499}{3} x^3 + \frac{12.927}{2} x^2 + 0.0247 x \right] \Big|_{0.006}^{0.184} \\ &\approx 0,1491 \text{ J} \end{aligned}$$

$$F_0 \times \Delta L_{d0} = 0,101 \times 0,006 \approx 0,0006$$

$$\begin{aligned}
 E_{diminuída} &= 0,1755 - (0,0006 + 0,1491) \\
 &= 0,1755 - 0,1497 \\
 &= 0,0258 \text{ N} \\
 &= 2,58 \times 10^{-2} \text{ N}
 \end{aligned}$$

*₁ Tabela de resíduos para a aproximação polinomial da carga *

ΔL_c (m)	F (N)	Regressão	Resíduos
0	0.101043	0.1278	-0.026757
0.005	0.199143	0.202975	-0.003832
0.011	0.297243	0.287498	0.0097454
0.018	0.395343	0.378743	0.0165996
0.026	0.493443	0.47405	0.019393
0.036	0.591543	0.581037	0.0105064
0.047	0.689643	0.685091	0.0045524
0.061	0.787743	0.800448	-0.012705
0.076	0.885843	0.907908	-0.022065
0.09	0.983943	0.998241	-0.014298
0.104	1.082043	1.08388	-0.001837
0.119	1.180143	1.175891	0.004252
0.134	1.278243	1.273951	0.0042922
0.146	1.376343	1.360729	0.0156141
0.159	1.474443	1.466892	0.0075507
0.17	1.572543	1.569372	0.0031709
0.181	1.670643	1.685921	-0.015278

ΔL_d (m)	F (N)	Regressão	Resíduos
0.006	0.101043	0.099887	0.001156312
0.014	0.199143	0.193142	0.006000517
0.024	0.297243	0.299566	-0.00232332
0.034	0.395343	0.396134	-0.00079085
0.046	0.493443	0.501142	-0.00769907
0.058	0.591543	0.596767	-0.0052236
0.071	0.689643	0.692813	-0.00317018
0.085	0.787743	0.791201	-0.00345763
0.097	0.885843	0.874445	0.011397569
0.111	0.983943	0.97398	0.009963183
0.123	1.082043	1.064365	0.017677803
0.138	1.180143	1.18813	-0.00798682
0.149	1.278243	1.289255	-0.01101196
0.159	1.376343	1.39071	-0.01436696
0.167	1.474443	1.479461	-0.00501768
0.175	1.572543	1.575797	-0.00325419
0.181	1.670643	1.653495	0.017147671

*₂ Tabela de resíduos para a aproximação polinomial da descarga

Cálculo experimental do módulo de Young

Para calcular o módulo de Young invertemos a relação:

$$Y = \frac{E\Delta}{S} \rightarrow \text{Módulo de Young}$$

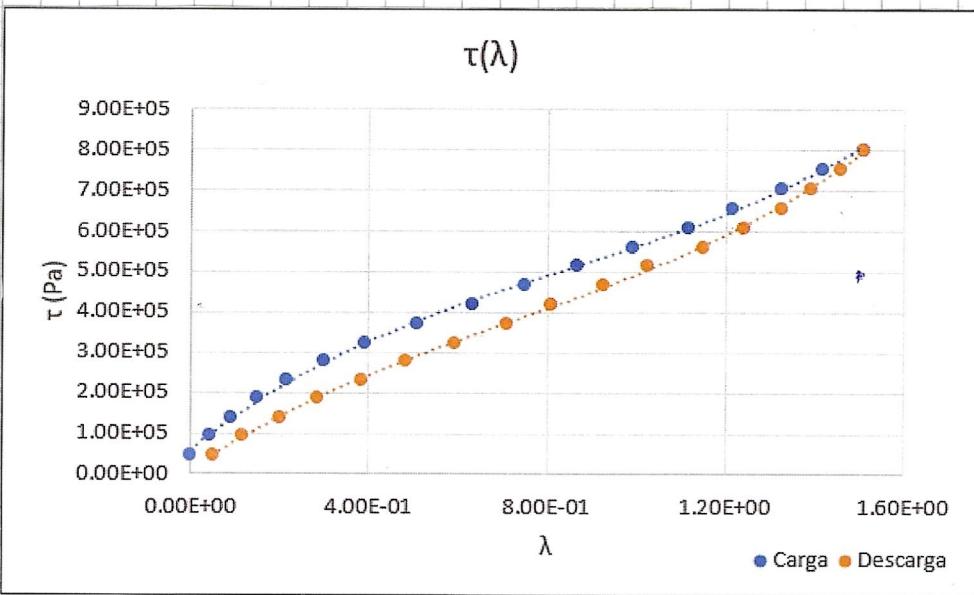
$$\text{Tensão: } \frac{\Delta}{S} = \frac{E}{L}$$

$$\text{Deformação: } \Delta = \frac{\Delta L}{L_0}$$

L_0 foi medido antes da experiência e $= 12 \text{ cm}$

Atenção! Esta relação apenas acontece quando a borracha se encontra no regime perfeitamente elástico (onde se verifica a Lei de Hooke), e para proceder os cálculos é bem admitível que este regime se verifique pelo procedimento da experiência. Sendo assim precisamos apenas de fazer um ajuste linear.

Graficos de τ vs. λ :



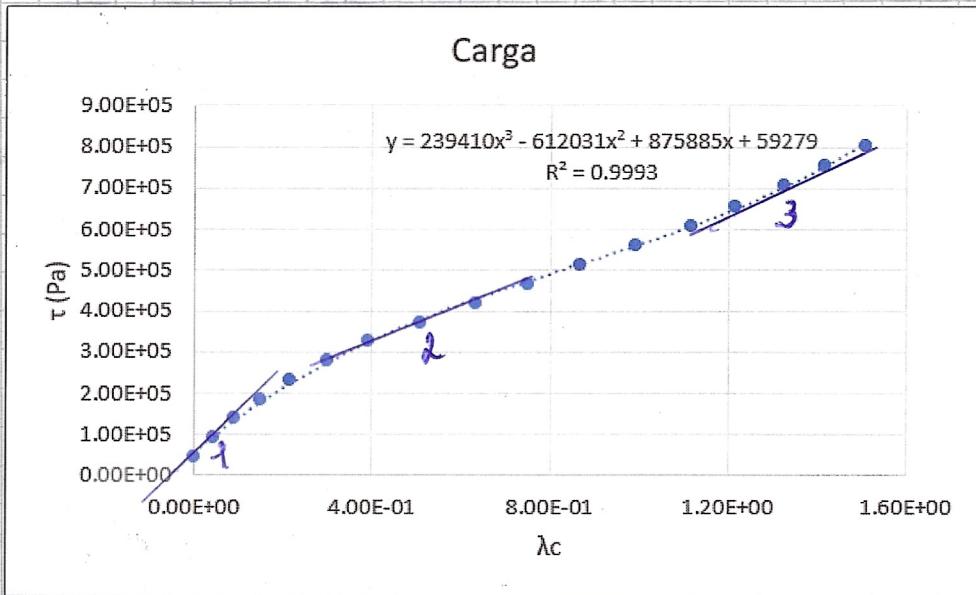
O gráfico comporta-se como é esperado de uma borracha vulcanizada, mas não apresenta um comportamento minimamente linear, logo ~~obtido~~, em vez de um ajuste linear, irei escolher três pontos e calcular o módulo de Young ~~obtido~~ usando a derivada de um ajuste polinomial.

F (N)	ΔL_c (m)	ΔL_d (m)	S (m^2)	λ_c	λ_d	τ (Pa)
0.101043	0	0.006	2.146E-06	0.00E+00	5.00E-02	4.71E+04
0.199143	0.005	0.014	2.142E-06	4.17E-02	1.17E-01	9.30E+04
0.297243	0.011	0.024	2.138E-06	9.17E-02	2.00E-01	1.39E+05
0.395343	0.018	0.034	2.134E-06	1.50E-01	2.83E-01	1.85E+05
0.493443	0.026	0.046	2.13E-06	2.17E-01	3.83E-01	2.32E+05
0.591543	0.036	0.058	2.126E-06	3.00E-01	4.83E-01	2.78E+05
0.689643	0.047	0.071	2.122E-06	3.92E-01	5.92E-01	3.25E+05
0.787743	0.061	0.085	2.118E-06	5.08E-01	7.08E-01	3.72E+05
0.885843	0.076	0.097	2.114E-06	6.33E-01	8.08E-01	4.19E+05
0.983943	0.09	0.111	2.11E-06	7.50E-01	9.25E-01	4.66E+05
1.082043	0.104	0.123	2.106E-06	8.67E-01	1.03E+00	5.14E+05
1.180143	0.119	0.138	2.102E-06	9.92E-01	1.15E+00	5.62E+05
1.278243	0.134	0.149	2.098E-06	1.12E+00	1.24E+00	6.09E+05
1.376343	0.146	0.159	2.094E-06	1.22E+00	1.33E+00	6.57E+05
1.474443	0.159	0.167	2.09E-06	1.33E+00	1.39E+00	7.06E+05
1.572543	0.17	0.175	2.086E-06	1.42E+00	1.46E+00	7.54E+05
1.670643	0.181	0.181	2.082E-06	1.51E+00	1.51E+00	8.03E+05

→ Estes valores foram obtidos a partir de um modelo linear

Para o restante procedimento irei considerar apenas os valores da carga tendo que é a parte do procedimento em que menos energia foi dissipada.

Ajuste polinomial do gráfico T vs. λ_c :



	x^3	x^2	x^1	x^0
m	239410.2	-612031	875884.92	59278.74
u(m)	22600.82	51207.41	31433.048	4602.639

Podemos então derivar o ajuste polinomial para obter uma aproximação das derivadas do gráfico

$$Y'(\lambda_c) = (239410\lambda_c^3 - 612031\lambda_c^2 + 875885\lambda_c + 59279)$$

$$\Rightarrow Y'_1(\lambda_c) = 718230\lambda_c^2 - 1224062\lambda_c + 875885$$

↳ A derivada de $Y(\lambda_c)$ é o módulo de Young para um dado λ_c .

λ_c	Derivada
4.17E-02	8.26E+05
5.08E-01	4.39E+05
1.33E+00	5.15E+05

$$E_1 = 8,26 \times 10^5 \left[\frac{N}{m^2} \right], E_2 = 4,39 \times 10^5 \left[\frac{N}{m^2} \right]$$

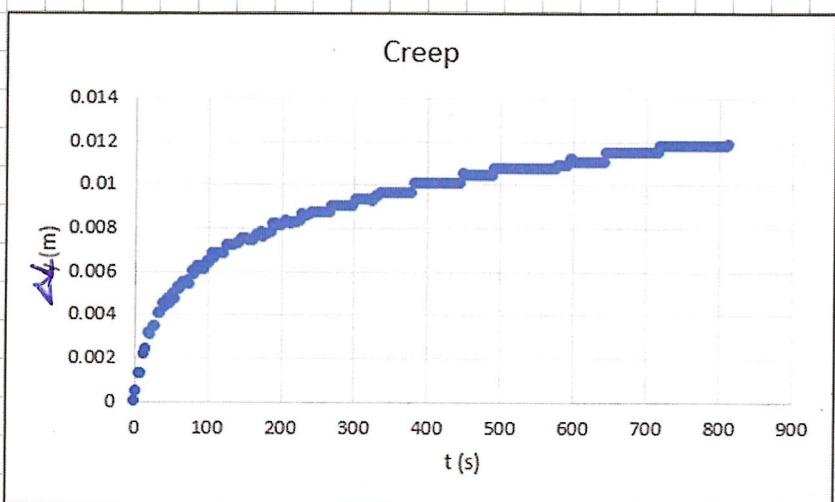
$$E_3 = 5,15 \times 10^5 \left[\frac{N}{m^2} \right]$$

* O modelo linear é feito apartir do S medida com F_0 e o S medida com F_{final} , mas devida à auséncia de $S(F_{final})$ usamos \max o declive do modelo linear criado por outros colegas de forma a proceder com a análise.

Análise de dados - "creep"

! Tabela de dados no final

Gráfico dos dados obtidos:



Os dados ~~só~~ foram obtidos
analizando o
vídeo no
software "Tracken"

Queremos encontrar uma equação do tipo

$\Delta L = \Delta L_0(1 - e^{-kt})$ que melhor represente os dados obtidos, e usaremos o seguinte método:

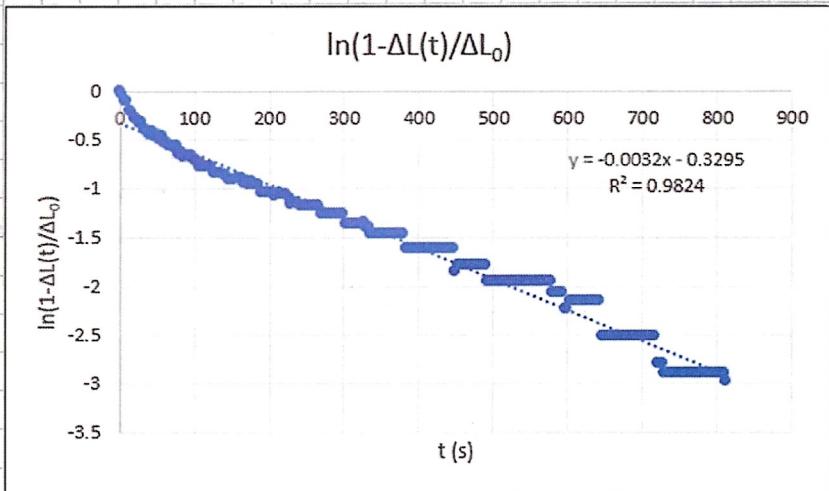
1) Reestruturar a equação:

$$\frac{\Delta L}{\Delta L_0} = 1 - e^{-kt} \Leftrightarrow 1 - \frac{\Delta L}{\Delta L_0} = e^{-kt} \Leftrightarrow \ln\left(1 - \frac{\Delta L}{\Delta L_0}\right) = kt$$

2) Representar o gráfico $\ln\left(1 - \frac{\Delta L}{\Delta L_0}\right)$ vs t ~~versus t~~ e encontrar o valor de ΔL_0 que provoque o comportamento mais linear possível.

3) Fazer um ajuste linear e apontar o declive obtém o valor de k .

Após várias tentativas encontramos que $\Delta L_0 = 0,01248$ provoca a função a ser o mais linear possível, e podemos então fazer o ajuste linear:

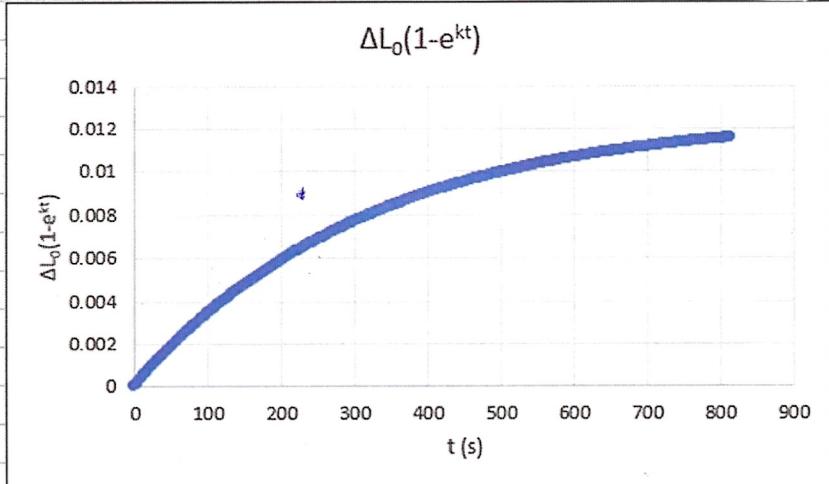


E então obtemos que $K = -0,00318 \pm 2,7 \times 10^{-5}$

Logo, podemos representar os resultados obtidos experimentalmente pela equação:

~~$$\Delta L(t) = 0,01248(1 - e^{-0,00318t})$$~~

E, representando esta equação num gráfico obtemos:

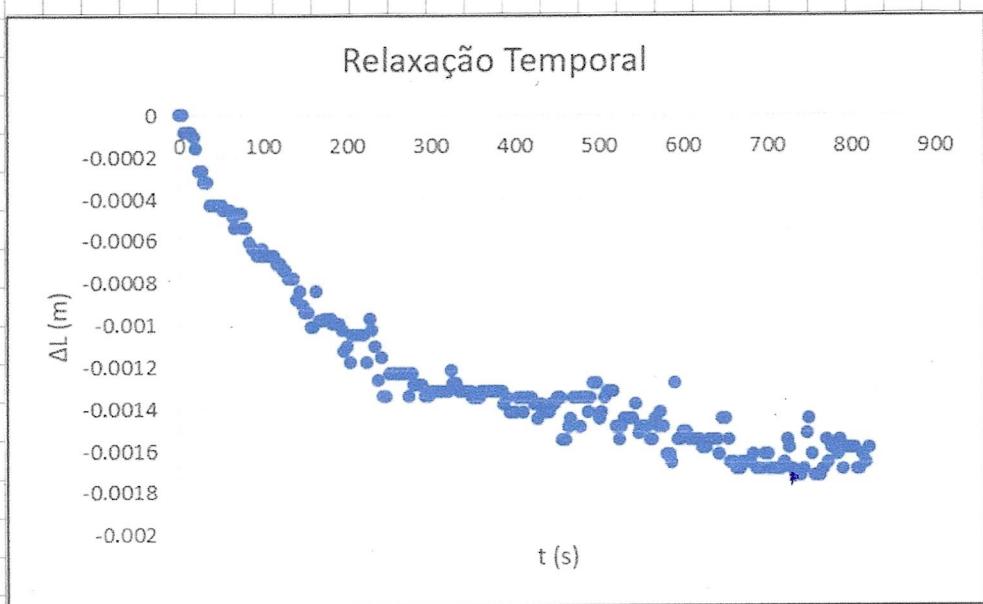


~~Análise de dados - Relaxação temporal~~

Análise de dados - Relaxação Temporal

! Tabela de dados no final

Gráfico dos dados obtidos:



Tal como na "eneop", foi usado o software "Track" para retirar dados

Queremos encontrar uma equação do tipo

$\Delta L = \Delta L_0 e^{kt}$ que melhor represente os dados obtidos, e usaremos o seguinte método:

1) Reescrever a equação:

$$\frac{\Delta L}{\Delta L_0} = e^{kt} \Leftrightarrow \ln\left(\frac{\Delta L}{\Delta L_0}\right) = kt$$

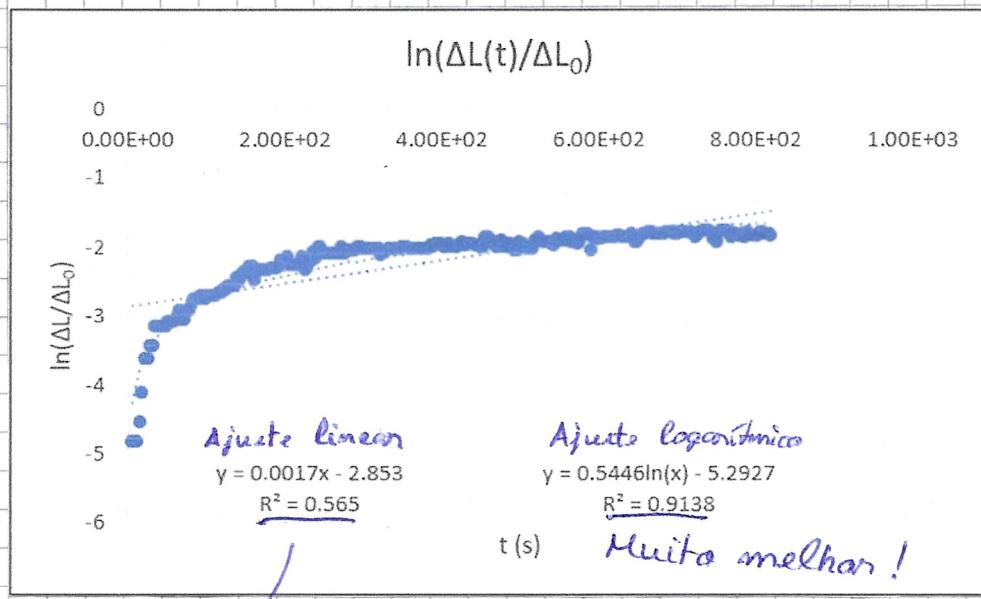
2) Representar o gráfico $\ln\left(\frac{\Delta L}{\Delta L_0}\right)$ vs t e encontrar o valor de ΔL_0 que provoque o comportamento mais linear possível.

3) Fazer um ajuste linear e apontar o declive obtém o valor de k .

Neste caso chegamos à conclusão que o valor de ΔL_0 não afeta a "linearidade" da gráfica pois:

$$\ln\left(\frac{\Delta L}{\Delta L_0}\right) = \ln(\Delta L) - \ln(\Delta L_0) \rightarrow \text{apenas dá um "shift" do gráfico no eixo } y$$

e percebemos que seria mais adequado um ajuste logarítmico do que um linear



Muito pouco para considerar satisfatório!

E então obtemos que $k_t = 0,5446 \ln(t) - 5,2927$

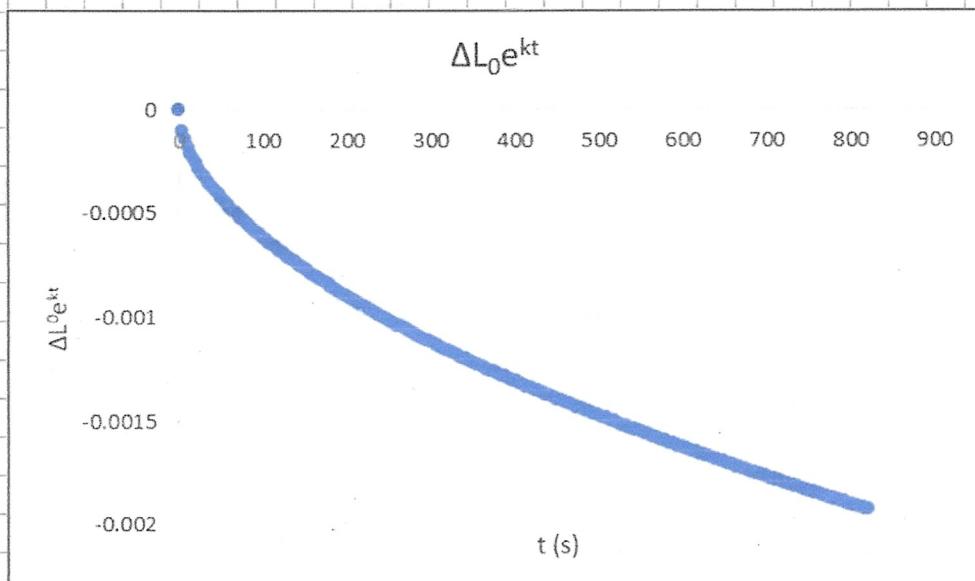
Logo, podemos representar os resultados obtidos experimentalmente pela equação

$$\Delta L(t) = -0,01 e^{0,5446 \ln(t) - 5,2927}$$

$$(1) \Delta L(t) = -0,01 e^{0,5446 \ln(t)} \\ e^{-5,2927}$$

$$(2) \Delta L(t) = -5 \times 10^{-5} t^{0,5446}$$

E, representando esta equação num gráfico obtemos:



Conclusão

Os dados obtidos mostraram o comportamento esperado, tal como os cálculos experimentais. E, embora durante a realização da experiência não foram tomadas as medidas de precaução recomendadas com muito rigor, estes não pareceram ter uma influência que desfigurasse o comportamento esperado dos dados.

Esta experiência foi também uma excelente introdução à complexidade da elasticidade nos materiais, que não é tão linear quanto se pensaria intuitivamente e varia imensamente de acordo com a ~~qualquer~~ força em que lhe atua. Foi também uma excelente introdução ao conceito do módulo de Young e a técnicas de análise como o ajuste polinomial e logarítmico.

Questionário

- 1) A borracha ~~mostrou~~ não apresenta um comportamento perfeitamente elástico durante o processo de carga completa, como foi aparente pelos graficos obtidos, apenas com valores de F pequenos e que é considerável um comportamento ^{initial} perfeitamente elástico.
- 2) O facto de $F(x)$ apresentar um comportamento de descarga dar -se à energia que foi dissipada ao longo do processo carga - descarga. A este fenómeno dá -se o nome de histerese. Na carga, o perfil é elástometrico pré - tensionado.
- 3) Pois dá -nos uma visão direta do comportamento elástico, em vez de uma relação entre conceitos matemáticos.
- 4) A Lei de Hooke representa uma relação linear entre a força elástica e o deslocamento ~~da~~ à sua posição de equilíbrio, neste caso - se para valores muito pequenos de F é possível ver tal relação, ao qual se chama o "regime perfeitamente elástico".

5) Após ter pesquisado os valores de γ e t associados com borracha vulcanizada verifiquei que os resultados estão como esperados mas não apresentam ~~versaz~~ apenas uma pequena parada ($0,32\%$) da relação completa entre γ e t de uma borracha vulcanizada.

Tabela de dados

Creep

t	L (m)	ΔL (m)	$\ln(1-\Delta L(t)/\Delta L_0)$
0	-8.38E-02	0	0
3.33E+00	-8.43E-02	0.000448	-0.036587516
6.67E+00	-8.50E-02	0.001217	-0.102601682
1.00E+01	-8.50E-02	0.001217	-0.102601682
1.33E+01	-8.60E-02	0.002178	-0.191764074
1.67E+01	-8.62E-02	0.00237	-0.21059145
2.00E+01	-8.69E-02	0.003139	-0.289661595
2.33E+01	-8.68E-02	0.00301	-0.276041751
2.67E+01	-8.73E-02	0.003459	-0.324545566
3.00E+01	-8.72E-02	0.003395	-0.317470741
3.33E+01	-8.78E-02	0.004035	-0.390578864
3.67E+01	-8.78E-02	0.004035	-0.390578864
4.00E+01	-8.83E-02	0.004484	-0.445133421
4.33E+01	-8.81E-02	0.004291	-0.421388083
4.67E+01	-8.85E-02	0.004676	-0.469456343
5.00E+01	-8.83E-02	0.004484	-0.445133421
5.33E+01	-8.87E-02	0.004932	-0.502836786
5.67E+01	-8.85E-02	0.004676	-0.469456343
6.00E+01	-8.90E-02	0.005188	-0.537368705
6.33E+01	-8.89E-02	0.005124	-0.528623291
6.67E+01	-8.93E-02	0.005444	-0.573137281
7.00E+01	-8.92E-02	0.00538	-0.564074833
7.33E+01	-8.93E-02	0.005508	-0.582282609
7.67E+01	-8.92E-02	0.00538	-0.564074833
8.00E+01	-8.98E-02	0.005957	-0.648756178
8.33E+01	-8.96E-02	0.005829	-0.629309025
8.67E+01	-9.00E-02	0.006213	-0.688823209
9.00E+01	-8.98E-02	0.006021	-0.65862344
9.33E+01	-9.00E-02	0.006213	-0.688823209

Total de 245 pontos

Relaxação Temporal

t	L (m)	ΔL (m)	$\ln(\Delta L/\Delta L_0)$
0	-2.07E-02	0	#NÚM!
3.33E+00	-2.07E-02	0.00E+00	#NÚM!
6.67E+00	-2.06E-02	-8.08E-05	-4.818735
1.00E+01	-2.06E-02	-8.08E-05	-4.818735
1.33E+01	-2.06E-02	-8.08E-05	-4.818735
1.67E+01	-2.06E-02	-1.08E-04	-4.530991
2.00E+01	-2.05E-02	-1.62E-04	-4.125588
2.33E+01	-2.04E-02	-2.69E-04	-3.614737
2.67E+01	-2.04E-02	-2.69E-04	-3.614737
3.00E+01	-2.04E-02	-3.23E-04	-3.432409
3.33E+01	-2.04E-02	-3.23E-04	-3.432409
3.67E+01	-2.03E-02	-4.31E-04	-3.144743
4.00E+01	-2.03E-02	-4.31E-04	-3.144743
4.33E+01	-2.03E-02	-4.31E-04	-3.144743
4.67E+01	-2.03E-02	-4.31E-04	-3.144743
5.00E+01	-2.03E-02	-4.31E-04	-3.144743
5.33E+01	-2.02E-02	-4.58E-04	-3.084105
5.67E+01	-2.02E-02	-4.58E-04	-3.084105
6.00E+01	-2.02E-02	-4.58E-04	-3.084105
6.33E+01	-2.02E-02	-4.85E-04	-3.026955
6.67E+01	-2.02E-02	-5.38E-04	-2.922947
7.00E+01	-2.02E-02	-4.70E-04	-3.05782
7.33E+01	-2.02E-02	-4.70E-04	-3.05782
7.67E+01	-2.02E-02	-5.38E-04	-2.922947
8.00E+01	-2.02E-02	-5.38E-04	-2.922947
8.33E+01	-2.01E-02	-6.06E-04	-2.804137
8.67E+01	-2.01E-02	-6.40E-04	-2.749638
9.00E+01	-2.01E-02	-6.40E-04	-2.749638

| Pontos
ignorados

Total de 247 pontos