

Atividade 6B - Estudo do Movimento de Projéteis

Maria Helena Nunes de SIlva, PLG, Grupo 3

OBJETIVOS

- Análise da dependência do alcance do projétil com o ângulo de lançamento quando os módulos de lançamento e de impacto são iguais
- Determinação do alcance máximo
- Determinação da velocidade de lançamento.

MATERIAL

- Lançador e respulso grampo de fixação
- Esfera de tóta
- Bastão cilíndrico (tubo de amarras) para empurrar a esfera dentro do lançador
- Mesa com superfície de embate e fio de ferro amarrado, para indicação de distâncias
- Óculos de proteção
- Enquadrado e folhas de papel químico
- Fita métrica (já ~~estava~~ colada à bancada)
- Folhas de papel milimétrico

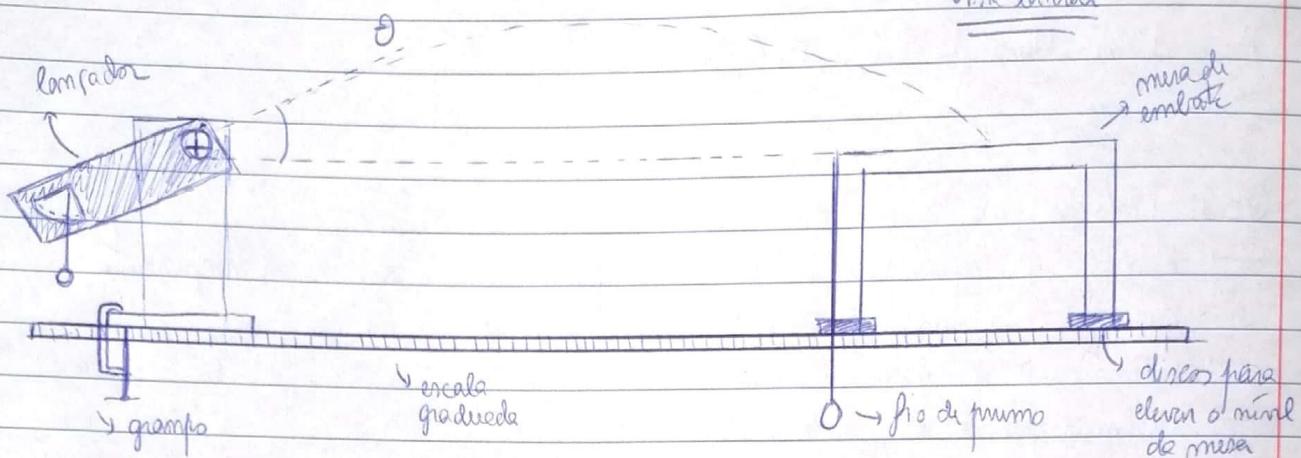
~~INDICAÇÕES~~ INDICAÇÕES DE SEGURANÇA

- Obrigatório usar óculos de proteção caso haja impacto de mesa de embate
- Assegurar que o grampo do lançador fica bem apertado
- Assegurar que não há qualquer risco de choque das esferas com janelas, protegendo-as com uma placa de poliestireno ou equivalente

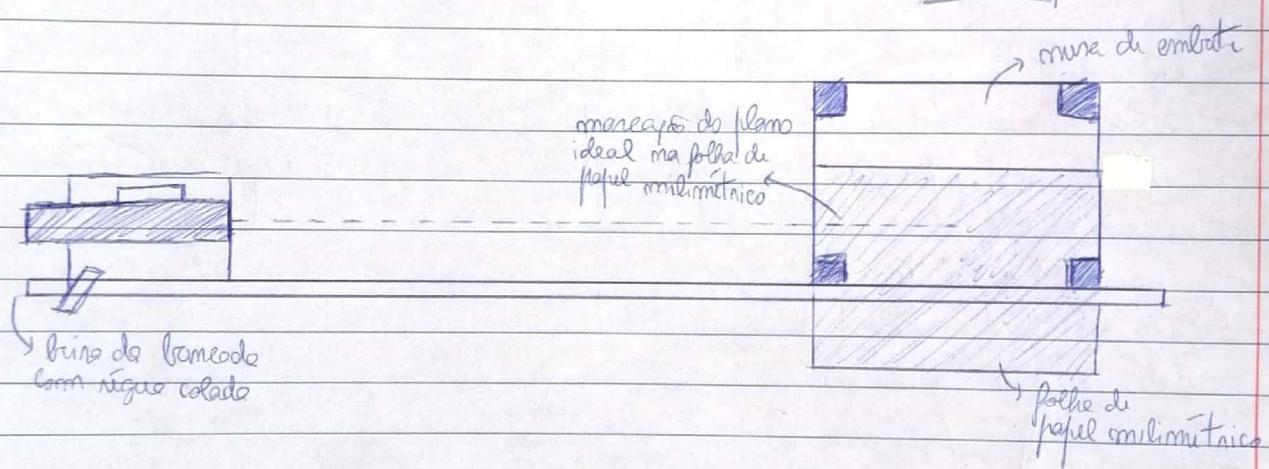


PROCEDIMENTO

Vista lateral



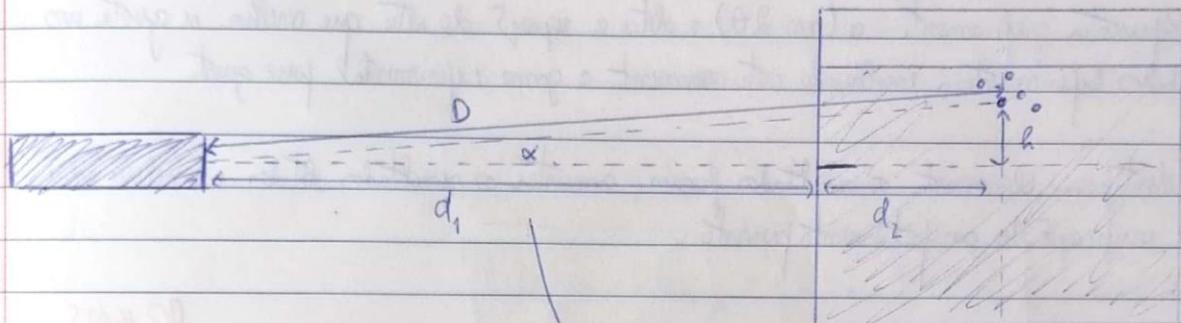
Vista de topo



1. Manter o rampador sobre a mesa e ajustar o ângulo da rampagem para $\theta = 10^\circ$
2. Alinhar o rampador à altura da embalagem, ou seja, alinhar superfície da embalagem com ponto de rampamento ($(+)$ no esquema acima)
3. Disparar uma vez cada vez que localizar os pontos de embalagem
 - Colocar uma esfera no topo do rampador; empurrá-la até à posição "medium range", utilizando o tubo de arremesso e a visualização através dos canhais laterais
 - Acionar o gatilho, tirando o cordel, mas segurando no disparador com a mão exposta, para minimizar deslocamento / vibração deste
4. Colocar a superfície de embalagem no ponto determinado no topo anterior, maximizando a utilização da posição esférica para embalagem dos ângulos seguintes e mantendo a superfície de embalagem segura

5. Nesse projeto, fixar com c牢牢 disponibilizar uma folha de papel milimétrico (com os bordos brancos cortados) e alinhá-la com os lados da base do embolo. Sobre este coloca-se uma folha de papel ~~químico~~ químico, com c face impressa virada para baixo. Quando a esfera emolata, deixará uma mancha.

6. Marcar na folha de papel milimétrico um ponto de referência para medir, também, a distância do impacto de direção perpendicular à da lançamento, como indicado no esquema abaixo:



dentro α do lançador, resultando num valor para o alcance $a = D \neq d_1 + d_2$; dentro do plano de trajetória muita de deslizamentos em rotas de lançada

7. Ao efectuar os lançamentos, munir a reunião de ensaios, assim como o ângulo que digram respeito



Determinar o valor da velocidade inicial da esfera

8. Executar os lançamentos necessários e registar os dados em tabela: realizar 5 ensaios para cada um dos 11 ângulos, confirmando a , entre o inicio e o fim da cada lançamento, nas suas alterações de ângulos de disparo; medir a distância $a = d_1 + d_2$ entre o ponto de lançamento na base do lançador $\text{---} (+)$ e o ponto de impacto da esfera.

Nota: talvez seja necessário levar em conta a posição na direção perpendicular à distância ao lançador (distância h no esquema do ponto b)

9. Determinar $\bar{v}_0 + u(\bar{v}_0)$ para cada um dos ângulos estudados; representar graficamente \bar{v}_0 em função de θ ; maximizando as funções de v_0 correspondentes a $u(\bar{v}_0)$

10. Em face dos resultados obtidos, comentar e interpretar associado a v_0 e a hipótese de que

este valor é constante.

Nota: Especificação técnica do lançador: n° pole voador 8% desde lançamento horizontal
a lançamento vertical, isto é, entre $0 - 90^\circ$, dependendo da variação escolhida

Determinar o alcance máximo (máximo de lançamento e embate igual)

11. Reproduzir graficamente os resultados experimentais para $\alpha = \theta$
12. Reproduzir graficamente a ($\alpha = 2\theta$) e obter o valor de θ que melhora a ajuste aos dados experimentais, escolhendo criteriosamente a forma experimental para ajuste
13. Identificar claramente os resultados finais, comentar os resultados obtidos e concluir sobre a significância do comportamento proposto

BP 16/05
mcp - Tab.
e/graf no PC

BP 16/05
graf PC

ANÁLISE DE DADOS

		$(\theta \pm 0.5)^\circ$											
		Ensaios	25	30	35	38	42	45	48	51	54	60	65
$(d_1 \pm 5E-04) \text{ m}$	---	1.4600	1.6730	1.9760	1.8700	1.9620	2.0305	2.1330	2.2065	2.0210	1.8810	1.6730	
	1	0.0330	0.1350	0.0610	0.2645	0.2280	0.1940	0.1060	0.0280	0.2115	0.1315	0.1470	
$(d_2 \pm 5E-04) \text{ m}$	2	0.0985	0.1470	0.0770	0.2520	0.2125	0.1950	0.1275	0.0265	0.1660	0.1395	0.1270	
	3	0.1760	0.0930	0.0640	0.2310	0.2100	0.2180	0.1030	0.0275	0.1710	0.1545	0.1080	
	4	0.1680	0.2005	0.0580	0.2740	0.2395	0.1975	0.1170	0.0160	0.1995	0.1620	0.1260	
	5	0.1340	0.1240	0.0590	0.2575	0.2110	0.1750	0.1175	0.0370	0.1345	0.1370	0.1355	
$(x \pm 7E-04) \text{ m}$		1	1.4930	1.8080	2.0370	2.1345	2.1900	2.2245	2.2390	2.2345	2.2325	2.0125	1.8200
		2	1.5585	1.8200	2.0530	2.1220	2.1745	2.2255	2.2605	2.2330	2.1870	2.0205	1.8000
	3	1.6360	1.7660	2.0400	2.1010	2.1720	2.2485	2.2360	2.2340	2.1920	2.0355	1.7810	
	4	1.6280	1.8735	2.0340	2.1440	2.2015	2.2280	2.2500	2.2225	2.2205	2.0430	1.7990	
	5	1.5940	1.7970	2.0350	2.1275	2.1730	2.2055	2.2505	2.2435	2.1555	2.0180	1.8085	
$\bar{x} (\text{m})$		1.5819	1.8129	2.0398	2.1258	2.1822	2.2264	2.2472	2.2335	2.1975	2.0259	1.8017	
$u(\bar{x}) (\text{m})$		0.0261	0.0176	0.0035	0.0072	0.0058	0.0068	0.0044	0.0033	0.0135	0.0057	0.0064	
$\bar{v}_0 (\text{m/s})$		4.5001	4.5309	4.6138	4.6352	4.6387	4.6726	4.7073	4.7321	4.7602	4.7897	4.8026	
$u(\bar{v}_0) (\text{m/s})$		0.0372	0.0220	0.0039	0.0079	0.0062	0.0072	0.0046	0.0035	0.0146	0.0068	0.0085	
$\text{sen}(2\theta)$		0.7660	0.8660	0.9397	0.9703	0.9945	1.0000	0.9945	0.9781	0.9511	0.8660	0.7660	
Ajuste $\bar{x}(\theta)$	1.5671	1.8339	2.0333	2.1205	2.1992	2.2299	---	---	2.1764	2.0194	1.8145		
Resíduos $\bar{x}(\theta)$	0.0148	-0.0210	0.0065	0.0053	-0.0170	-0.0035	---	---	0.0211	0.0065	-0.0128		
Ajuste $\bar{x}(\text{sen}(2\theta))$	1.6941	1.9183	2.0834	2.1520	2.2063	2.2186	---	---	2.1089	1.9183	1.6941		
Resíduos $\bar{x}(\text{sen}(2\theta))$	-0.1122	-0.1054	-0.0436	-0.0262	-0.0241	0.0078	---	---	0.0886	0.1076	0.1076		
Ajuste $\bar{v}_0(\theta)$	4.5136	4.5527	4.5918	4.6152	4.6465	4.6700	---	---	4.7403	4.7873	4.8263		
Resíduos $\bar{v}_0(\theta)$	-0.0135	-0.0218	0.0220	0.0200	-0.0078	0.0027	---	---	0.0198	0.0024	-0.0238		

Tabela 1: Medidas de d_1 e d_2 ; cálculos de n e de \bar{n} (média dos 5 ensaios realizados para cada ângulo), \bar{v}_0 , $\bar{v}_0(\theta)$ e $\bar{v}_0(2\theta)$ e respectivos incertezas; valores para ajuste e resíduos de $\bar{n}(\theta)$, $\bar{n}_0(\theta)$ e $\bar{n}(2\theta)$

- O alcance da foi determinado por $d_1 + d_2$, uma vez que o denro, representado no ~~esquema~~ esquema do ponto 6 do procedimento, é irrelevante. Tal se comprova pelo ~~o~~ medidos do 1º ensaio de $\theta = 51^\circ$ (este é o ponto onde o denro poderia ter mais influência pois tem o menor d_2 e o maior h de todos os pontos, como se vê na figura ~~anterior~~ anexada). Tudo entrou para (1,51).

$$d_1 = 2.20 \cancel{.65} \text{ m}$$

$$d_2 = 0.0280 \text{ m}$$

$$\cancel{h} = 0.0280 \text{ m}$$

Logo

$$D = \sqrt{(d_1 + d_2)^2 + h^2} \approx 2.2347 \text{ m}$$

Comparando com $m = d_1 + d_2$, temos:

$$\text{Diferença relativa} (\gamma) = \frac{|m - D|}{D} \times 100 \\ \approx 0.01\%.$$

Assim, a diferença não é ainda muito insignificante, para outros fatores, pelo que é preferível ter $m = d_1 + d_2$.

- Incertezas:

$$u(d_1) = u(d_2) = 0.5 \times 10^{-3} \text{ m} = 5 \times 10^{-4} \text{ m}$$

$$u(m) = \sqrt{\left(\frac{\partial m}{\partial d_1} u(d_1)\right)^2 + \left(\frac{\partial m}{\partial d_2} u(d_2)\right)^2} \\ = \sqrt{(u(d_1))^2 + (u(d_2))^2} \quad (\text{m})$$

$$u(\bar{m}) = \text{desvio-padrão} (m_1, m_2, m_3, m_4, m_5) \quad (\text{m})$$

$$u(\theta) = 0.5^\circ$$

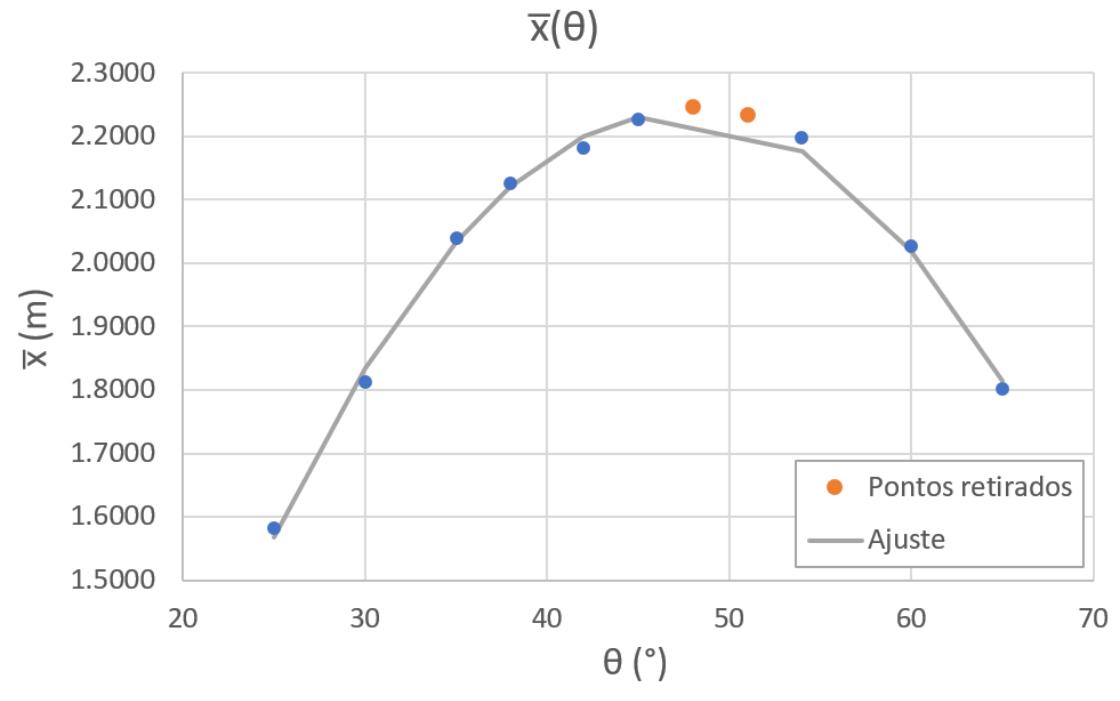


Grafico 1

Coeficientes	Ajuste $\bar{x}(\theta)$		
	-0.001347603	0.127468248	-0.77732
Incógnitas	3.81113E-05	0.003487811	0.07489
r^2 e s(y)	0.99569461	0.016743168	

Tabela 2

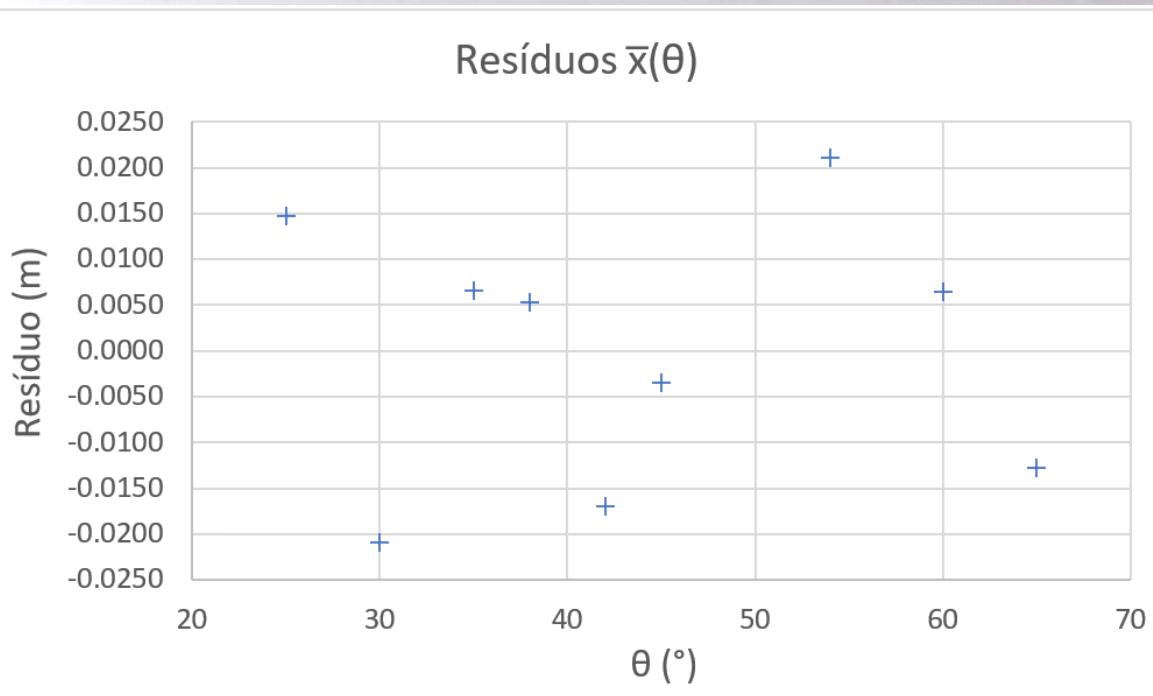


Grafico 2

- Teoricamente, o alcance máximo (m_{\max}) ocorre para $\theta = 45^\circ$. Com tal, os pontos $m(48)$ e $m(51)$ não foram considerados para o ajuste parabólico.
 $m(48) > m(45)$ e $m(51) > m(45)$. Por esta razão, os dois ângulos referidos também não foram utilizados para os seguintes ajustes.
- Os resíduos nos aleatórios, pelo que o ajuste realizado foi o adequado.

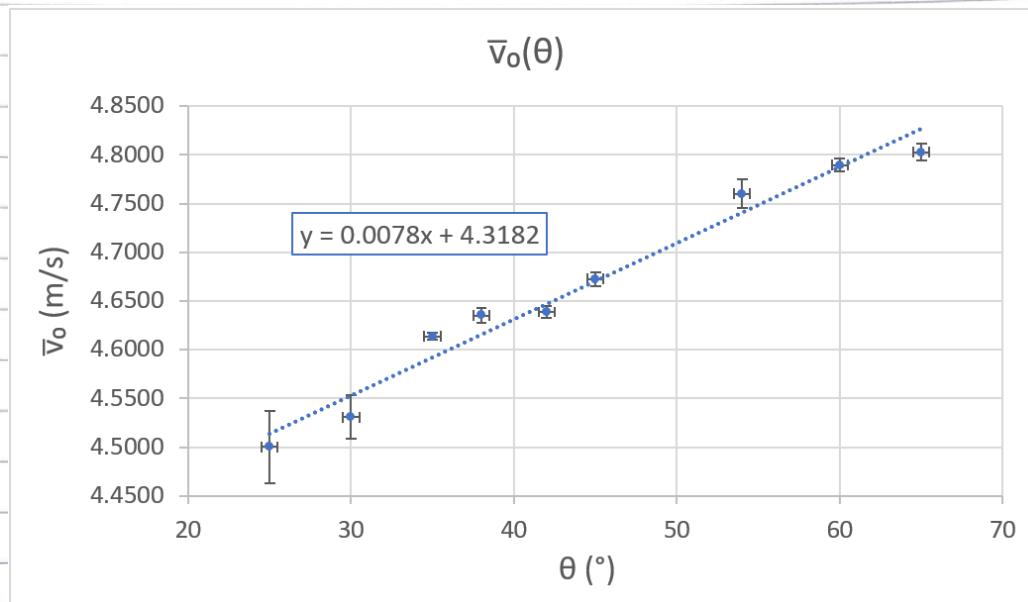


Gráfico 3

Ajuste $\bar{v}_0(\theta)$			
m	0.0078	4.3182	b
$s(m)$	0.0005	0.0228	$s(b)$
r^2	0.9723	0.0192	$s(y)$

Tabela 3

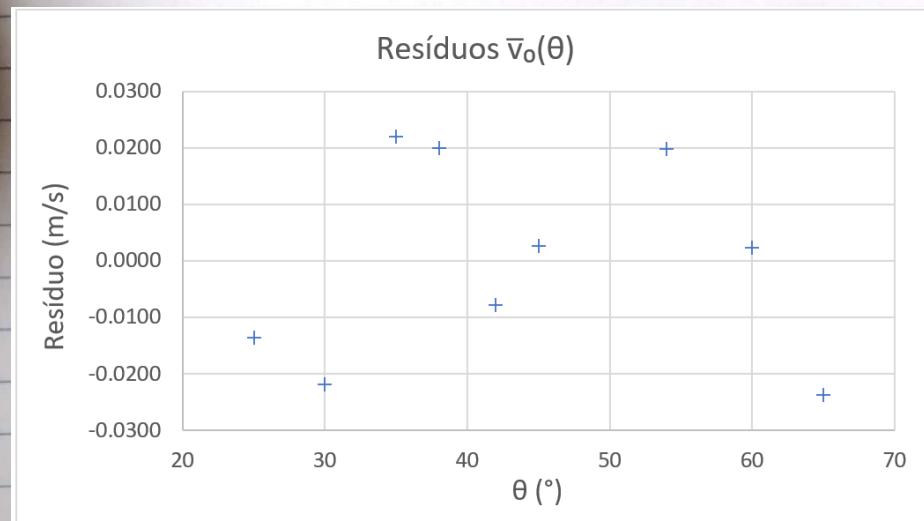


Gráfico 4

- Cálculo da \bar{v}_0 (tabela 1 e gráfico 3):

Sabemos que o movimento do projétil pode ser descrito pelas equações:

$$\text{[redacted]} \quad x(t) = v_0 \cos(\theta)t$$

$$y(t) = v_0 \sin(\theta)t - \frac{gt^2}{2}$$

Logo, para $y = 0$, [redacted] termos v_0 (velocidade de lançamento) a um ângulo θ necessário para se conseguir um dado alcance x como o ponto de embutir à mesma altura que o ponto de lançamento):

$$v_0 = \sqrt{\frac{gx}{2 \sin \theta \cos \theta}} \Rightarrow \bar{v}_0 = \sqrt{\frac{g \bar{x}}{\sin(2\theta)}} \quad (\text{com } g = 9.80665 \text{ ms}^{-2})$$

- Assim, no gráfico 3, as barras de erro horizontais correspondem à incerteza do ângulo, $u(\theta) = 0.5^\circ$, enquanto as barras de [redacted] erros verticais são a incerteza de \bar{v}_0 :

$$u(\bar{v}_0) = \sqrt{\left(\frac{\partial \bar{v}_0}{\partial \bar{x}} u(\bar{x})\right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{v}_0}{\partial \sin(2\theta)} u(\sin(2\theta))\right)^2}$$

$$= \frac{g \cdot u(\bar{x})}{\sin(2\theta)} \quad (\text{m s}^{-1})$$

$$= \frac{2}{2} \sqrt{\frac{g \cdot \bar{x}}{\sin(2\theta)}}$$

- Vemos que as incertezas de \bar{v}_0 são bastante reduzidas [redacted], pelo que não ocorrem erros grosseiros significativos, tais como:

- Não alinhar corretamente o ângulo no lançador, seja a mudar o ângulo, seja entre enunciados de um mesmo ângulo [redacted]
- Não ler corretamente o valor da d_x no papel milimétrico

- Comparando \bar{v}_0 (65) com \bar{v}_0 (25), (diferença relativa), obtem - se que \bar{v}_0 varia cerca de 7% como o ângulo, valor correspondente aos fôrmas 8% referidos mas especificações técnicas do lampião. Assim, o lampião é utilizada em dispositivo de confiança. A variação mínima da \bar{v}_0 também é obtida pelo declive constante reduzido do ajuste (gráfico 3 e Tabela 3), pelo que é possível concluir que \bar{v}_0 é praticamente constante.
- O gráfico 4 demonstra vários ajustes, para o ajuste realizado para $\bar{v}_0(\theta)$ foi:

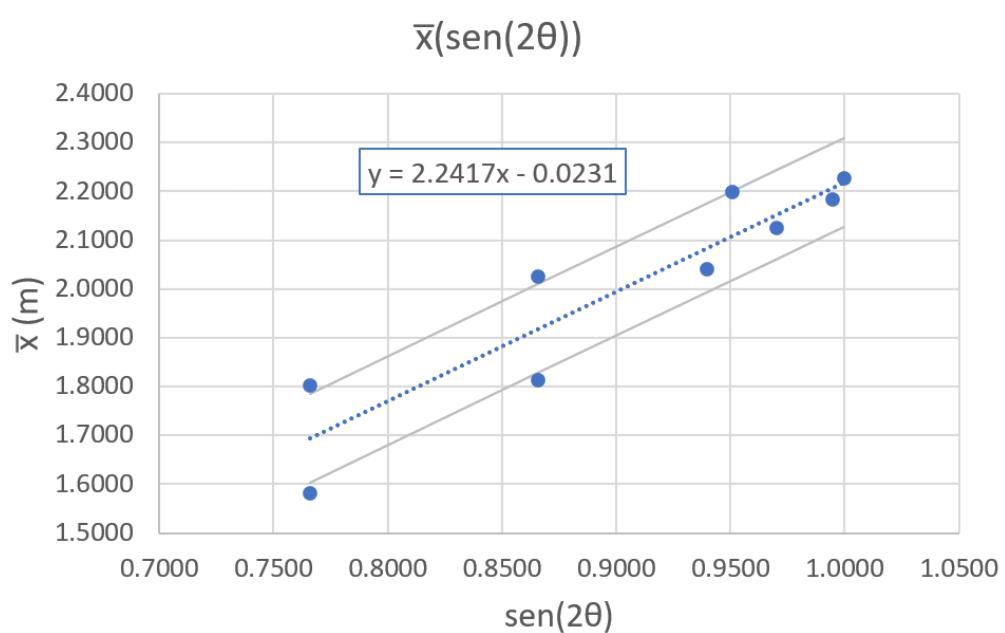


Gráfico 5

Ajuste $\bar{x}(\text{sen}(2\theta))$			
m	2.2417	-	0.0231
$s(m)$	0.3536		0.3204
r^2	0.8517		0.0910
		b	
		$s(b)$	
		$s(y)$	

Tabela 4

Resíduos $\bar{x}(\operatorname{sen}(2\theta))$

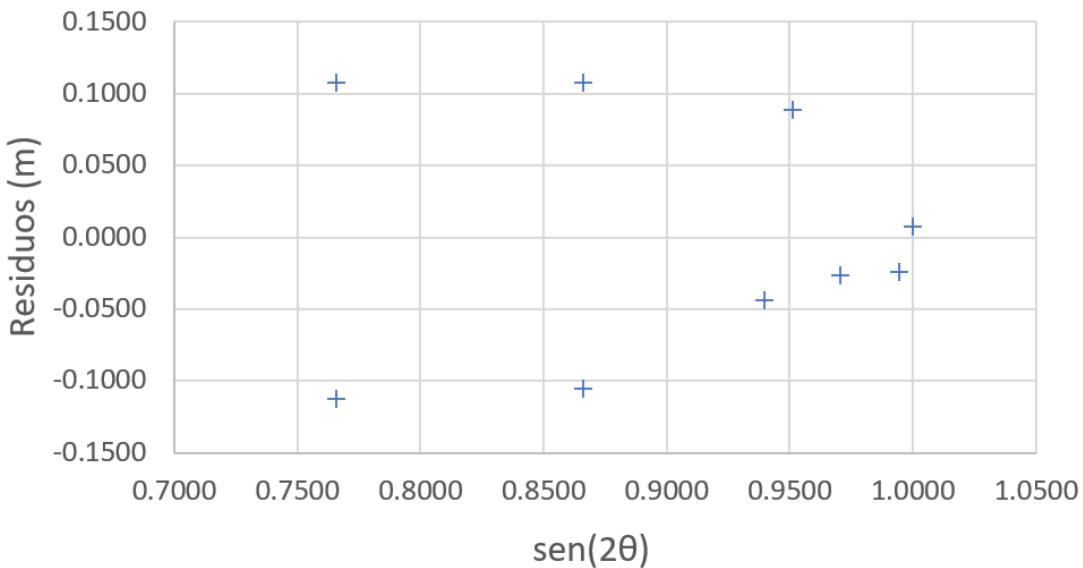


Gráfico 6

- No gráfico 5, os resíduos a cingente têm de equações $y = mn + b + \alpha(y)$ e $y = mn + b - \alpha(y)$. Os pontos encontram-se dentro dos intervalos designados pelas retas cingentes ou apenas ligeiramente fora, pelo que ajuste é adequado.
- Os gráficos 5 e 6 apontam para a simetria de algumas medições, nomeadamente, $\bar{m}(25) \approx \bar{m}(65)$ e também $\bar{m}(30) \approx \bar{m}(60)$, em relação à reta de ajuste. No entanto, não podemos afirmar que $\bar{m}(25) \sim \bar{m}(65)$ e $\bar{m}(30) \sim \bar{m}(60)$, como seria de esperar, dado o resíduo relativamente elevado destas medições (como se vi no gráfico 6). ~~Também é verdade que a diferença entre estes angulos é de 45°, igualmente distanciados de 65°~~ ~~também é verdade que~~ A diferença entre o ângulo \bar{m} ^{dots} Vângulos "simétricos" em relação a $\theta = 45^\circ$ também é igual ao gráfico 1.
~~A simetria é devido ao mesmo resultado (ou mesmo igualdade) de alemanes m de ângulos igualmente distanciados de 45° também não fazem~~
~~ser comprovada para ângulos mais próximos de 45° (isto é, para $\theta > 30^\circ$, $\theta < 60^\circ$)~~
~~uma vez que os ângulos medidos estão numa escala linearmente distorcida uniformemente intervalados,除了 $\bar{m}(51) + \bar{m}(48)$ nem utilizados~~
~~pelo razão referida anteriormente.~~

Determinação de \bar{v}_0 (velocidade de lançamento)

- Temos que a declinação, m , do gráfico 5 é dada por $\frac{\bar{m}}{m(2\theta)}$, logo:

$$\bar{v}_0 \text{ (ajuste)} = \sqrt{\frac{g \bar{m}}{m(2\theta)}} \cdot \sqrt{m \cdot g} = \sqrt{2.2417 \cdot 9.80665} \\ \sim 4.6887 \text{ ms}^{-1}$$

A incerteza nenhuma é dada para:

$$u(\bar{v}_0 \text{ (ajuste)}) = \sqrt{\left(\frac{\partial \bar{v}_0}{\partial m} \cdot u(m) \right)^2}$$

$$= \frac{g}{2\sqrt{m \cdot g}} \cdot u(m)$$

$$= \frac{9.80665}{2\sqrt{2.2417 \cdot 9.80665}} \cdot 0.3536$$

$$\sim 0.0377 \text{ ms}^{-1}$$

- Podemos calcular \bar{v}_0 pela média das veloces para cada círculo (excluindo \bar{v}_0 (48) e \bar{v}_0 (51) pois não foram considerados para o ajuste):

$$\bar{v}_0 \text{ (média)} \sim 4.6604 \text{ ms}^{-1}$$

Este valor tem a incerteza:

$$u(\bar{v}_0 \text{ (média)}) = \frac{\text{desvio-padrão dos valores de } \bar{v}_0}{\sqrt{9}} = 0.0359 \text{ ms}^{-1}$$

- Assim, temos:

$$\bar{v}_0 \text{ (ajuste)} \sim (4.6887 \pm 0.0377) \text{ ms}^{-1}$$

$$\bar{v}_0 \text{ (média)} \sim (4.6604 \pm 0.0359) \text{ ms}^{-1}$$

Usando o valor de \bar{r}_0 obtido com o ajuste como referência, temos vez que este é o valor mais próximo do valor real:

$$E_r (\%) = \frac{|\bar{r}_0 (\text{média}) - \bar{r}_0 (\text{ajuste})|}{\bar{r}_0 (\text{ajuste})} \times 100 \approx 0,60\%$$

O erro relativo é bastante baixo, ~~considerando que a curva é de terceira ordem~~ pelo que os dois métodos demonstrados são válidos para o cálculo desta grandeza.

Determinação do alcance máximo

Determinação de \bar{r}_{\max} (alcance máximo)

- Mais uma vez podemos usar a declinação do ajuste do gráfico 5. Temos que:

$$\bar{r} = rm(2\theta)m + b$$

Sabemos que o alcance máximo ocorre para $\theta = 45^\circ$, isto é, $m(2\theta) = 1$. Logo:

$$\bar{r}_{\max} = rm + b$$

Como $|b| = 0,0231 \ll 1$, podemos ~~despregar~~ despregar este valor, pelo que obtemos:

$$\bar{r}_{\max} (\text{ajuste}) = rm = 2,2417 \text{ m}$$

e

$$u(\bar{r}_{\max} (\text{ajuste})) = u(rm) = 0,3536 \text{ m}$$

- Experimentalmente, \bar{r}_{\max} ocorreu para $\theta = 45^\circ$:

$$\bar{r}_{\max} (\text{exp}) = \bar{r}(45) = 2,2264 \text{ m}$$

c

$$u(\bar{r}_{\max} (\text{exp})) = u(\bar{r}(45)) = 0,0068 \text{ m}$$

- Anomalias:

$$\bar{m}_{\max} (\text{ajuste}) = (2.2417 \pm 0.3536) \text{ m}$$

$$\bar{m}_{\max} (\text{exp}) = (2.2264 \pm 0.0068) \text{ m}$$

Usando o valor de \bar{n}_0 - obtido com o ajuste, como referência, uma vez que este é o valor mais próximo do valor real:

$$E_r (\%) = \frac{|\bar{m}_{\max} (\text{exp}) - \bar{m}_{\max} (\text{ajuste})|}{\bar{m}_{\max} (\text{ajuste})} \times 100 \approx 0.68\%$$

O erro relativo é bastante baixo, fato que os dados obtidos referidos são válidos para o cálculo desta grandeza, obtendo um alcance máximo para $\theta = 45^\circ$.

CONCLUSÃO

→ Foi possível observar que o alcance de um projétil (cosseno mísil de lançamento e mísil de impacto iguais) depende do ângulo de lançamento, havendo simetria do alcance para ângulos ~~equidistantes~~ equidistantes de 45°

→ Ainda que tenham sido obtidos valores de alcance maiores para ângulos diferentes de 45° , estes valores ~~foram~~ não foram incluídos no ajuste, fato que \bar{m}_{\max} ocorreu para $\theta = 45^\circ$ como mísil esperado, ~~deveria~~ sendo que o valor experimental ficou bastante próximo do valor final dado pelo ajuste.

→ A velocidade de lançamento, \bar{n}_0 , apresentou variações com o ajuste, de ângulos de lançamento, mas que se devem exclusivamente a características intrínsecas ao lançador. Como tal, \bar{n}_0 é praticamente constante, como esperado, estando o valor obtido experimentalmente em concordância com o valor obtido pelo ajuste, considerado mais final.

ANEXO - papel milimétrico

