

Estudo do rolagamento de um cilindro

Tiago Catarino, Grupo 8, PL 7

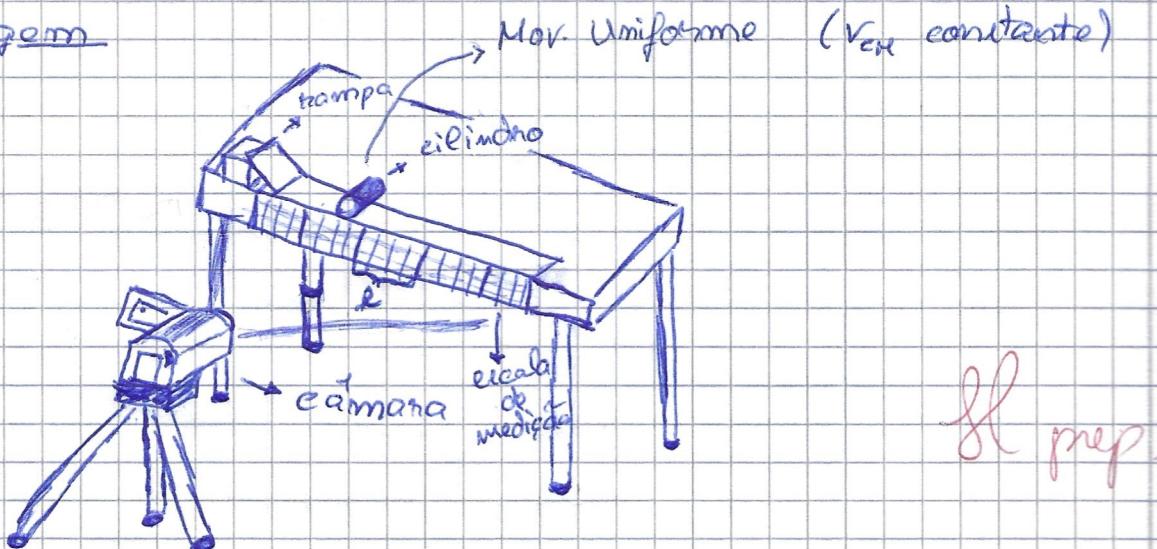
Objetivos:

- Verificam a validade com considerar um rolagamento sem escorregamento ($V_{ex} = w_t$).
- Estudam a velocidade de um ponto nos extremos da base do cilindro.
- Familiarizam com o uso de câmaras de vídeo como utensílio para experiências.

Procedimento experimental:

- 1) Medir o diâmetro do cilindro.
- 2) Nivelar a calha assegurando que V_{ex} é a mesma sendo o cilindro lançado de ambos os lados.
- 3) Iluminar o local de experiência de forma a obter a melhor imagem.
- 4) Preparar a câmera de acordo com o protocolo.
- 5) Alinhar o cilindro usando uma placa de alumínio.
- 6) Lançar o cilindro.
- 7) Analisar os dados.

Montagem



Cuidados a ter:

- Ter a câmara afastada da zona de experiência de forma a reduzir erros do paralelo.
- Ter a câmara à mesma altura que a moia.
- Assegurar ambos a câmara e a moia estão nivelados.
- Lançar o cilindro com velocidade o mais perpendicular possível à edmara para melhores resultados.
- Garantir que a velocidade do cilindro não é muito rápida de forma a ter mais frases do rolamento.

Medições

- Usando uma régua:

Uma divisão na escala de medição tem:

$$10 \text{ cm} \pm 0,05 \text{ cm}$$

O diâmetro do cilindro é de:

$$6,74 \text{ cm} \pm 0,05 \text{ cm}$$

fl não vi
graf.

Dados do centro de massa

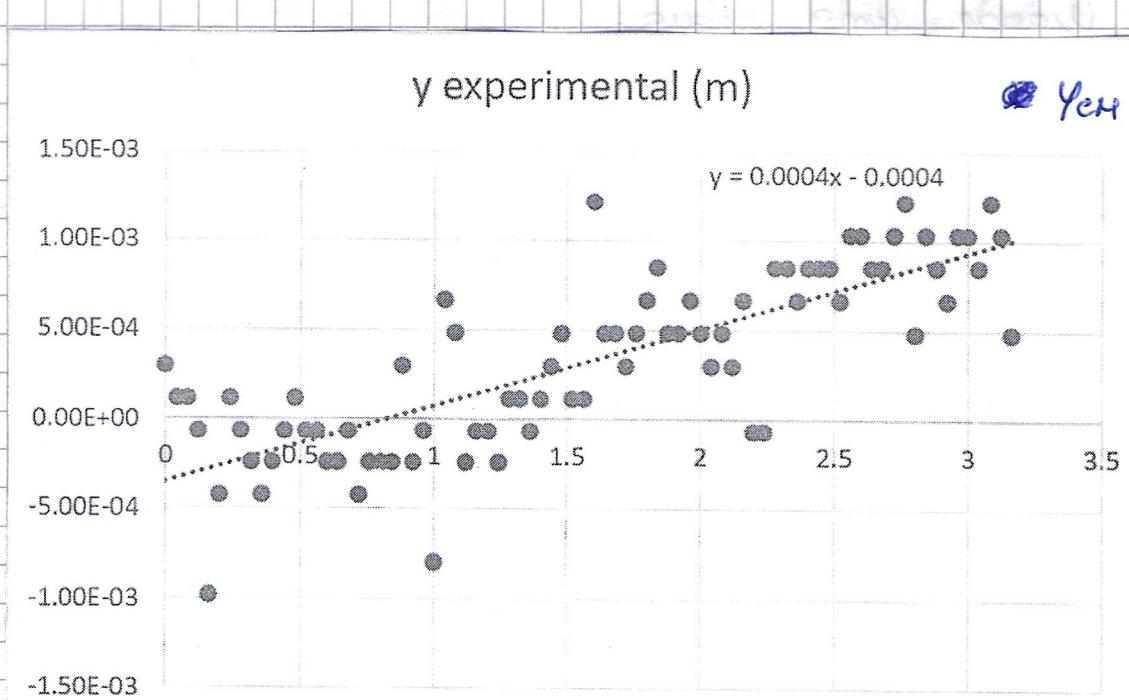
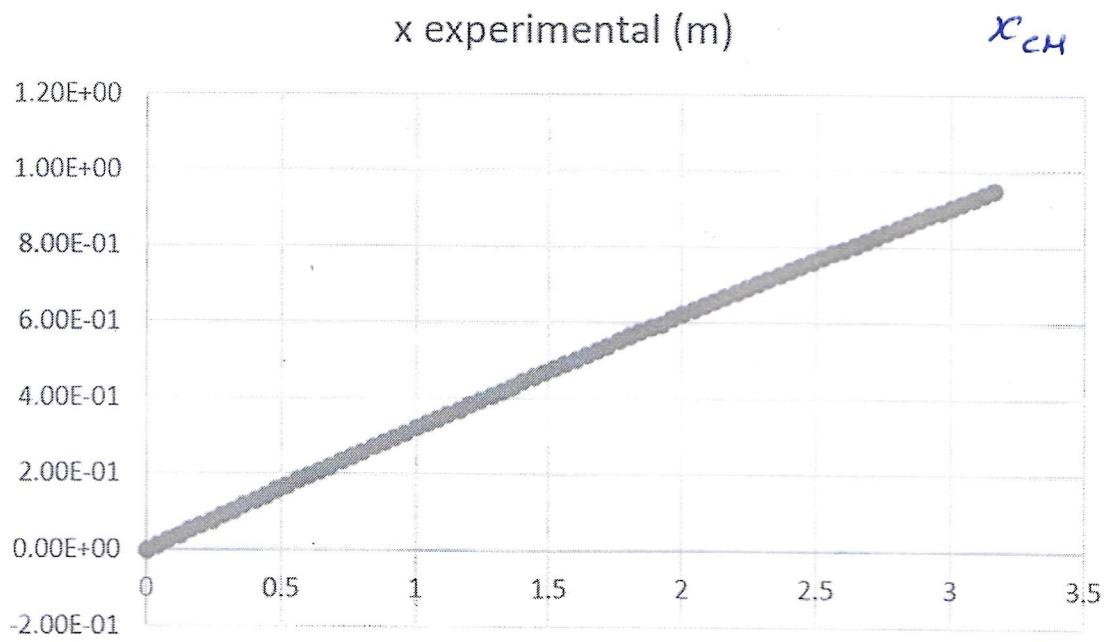
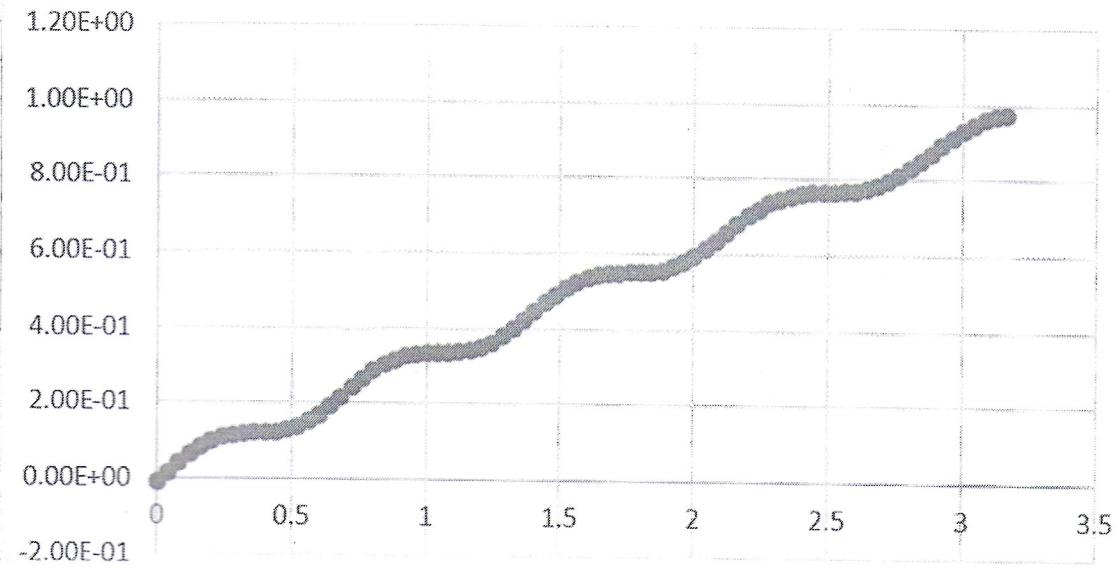


gráfico de x é uma reta, como esperado, que indica movimento uniforme no centro de massa, mas o gráfico de y indica valores dispersos (na escala em que os vemos), em que, se fizermos uma regressão linear obtemos $Vety = 0,0004 \text{ m/s}$, o qual não podemos considerar pois é desprezável comparado com $Vext$. A conclusão que podemos tirar é que ou a mesa ou a cânhamo não estavam perfeitamente nivelados na realização da experiência.

Dados do ponto na extremidade do cilindro

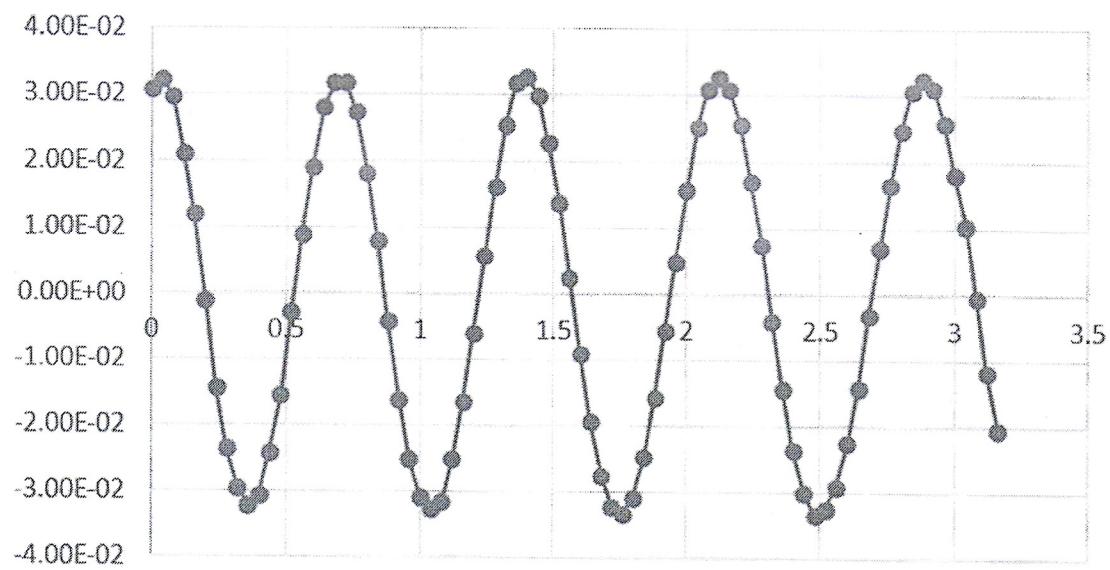
x experimental (m)

x_A



y experimental (m)

y_A

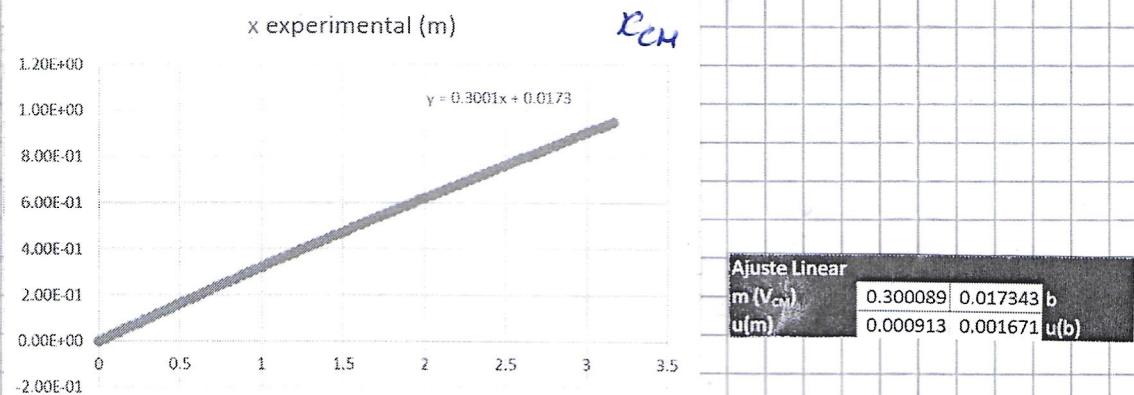


O gráfico de x e y estão como esperados, sendo $x_A(t) = x_0 + n \sin(\omega t)$

$$e \quad y_A(t) = n \cos(\omega t)$$

e após obter o valor de ω podemos verificar se quais autênticas são estas equações comparando com os valores reais de x e y .

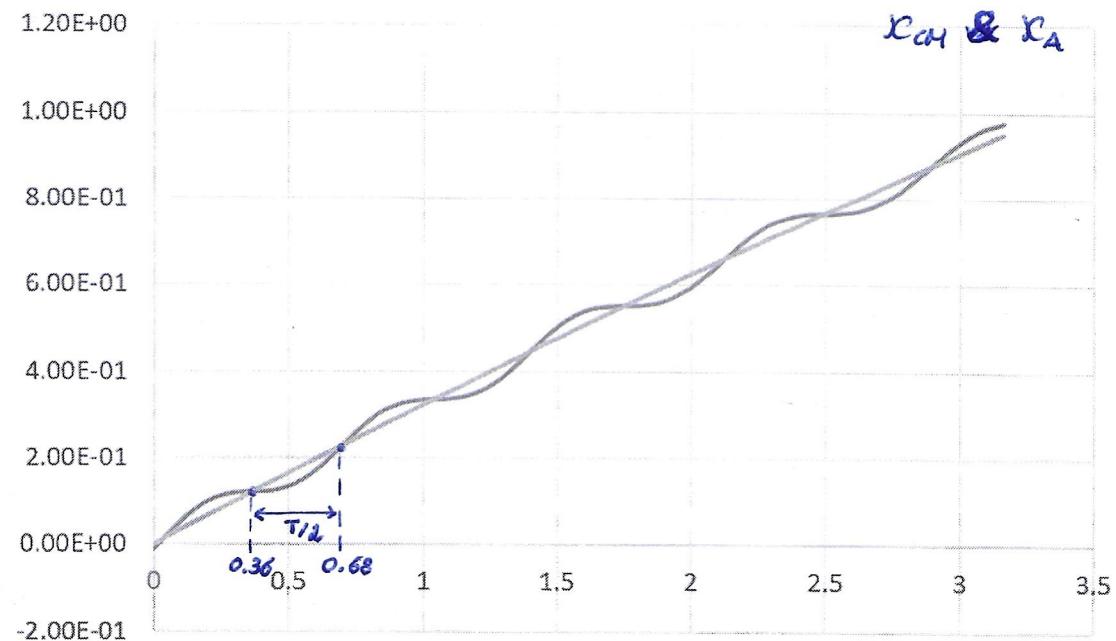
Velocidade do centro de massa



Fazendo uma ~~ajuste~~ linear conseguimos obter
Vem apartir do declive da reta, tal como a
uma integração:

$$(V_{CM})_a = 0,300 \text{ m/s} \pm 0,001 \text{ m/s}$$

Velocidade angular



Representando o gráfico de x_{CM} e x_A (ponto na extremidade do cilindro), podemos encontrar dois pontos de integração de forma a calcular $T \&$ (período de rotação).

Nota! Os pontos de intersecção foram escolhidos comparando as tabelas de X_{CM} e X_A , por isso está apenas fui considerado uma incerteza de $\pm 0,04$ s que é o intervalo entre medições.

$$t_1 = 0,361 \pm 0,041 \quad t_2 = 0,681 \pm 0,041$$

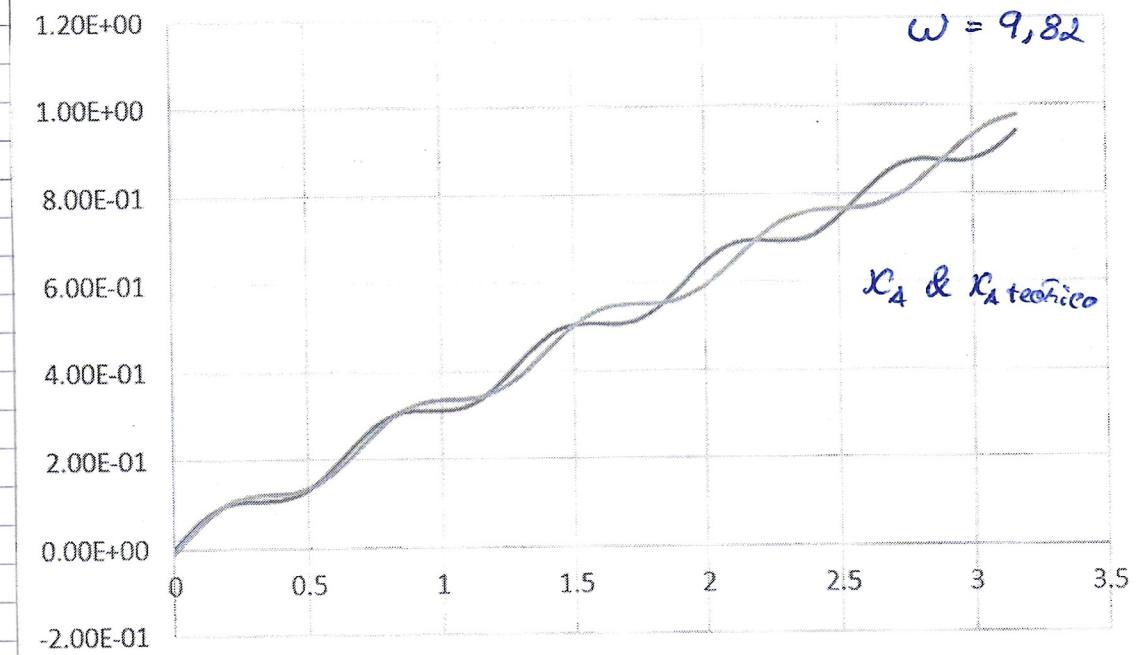
$$\frac{T}{2} = t_2 - t_1 \quad (\Rightarrow) T = 0,641 \pm 0,111$$

$$[\Delta T = \sqrt{(2 \times 0,04)^2 + (-2 \times 0,04)^2} \approx 0,11]$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad (\Rightarrow) \omega_{aj} \approx 9,82 \text{ rad/s} \pm 1,69 \text{ rad/s}$$

$$[\Delta \omega = \sqrt{\left(\frac{2\pi}{0,64}\right)^2 \times 0,11} \approx 1,69]$$

Se usarmos $\omega = 9,82$ e substituirmos na equação $X_A(t) = X_{CM}(t) + n \sin(\omega t)$ obtemos o gráfico:

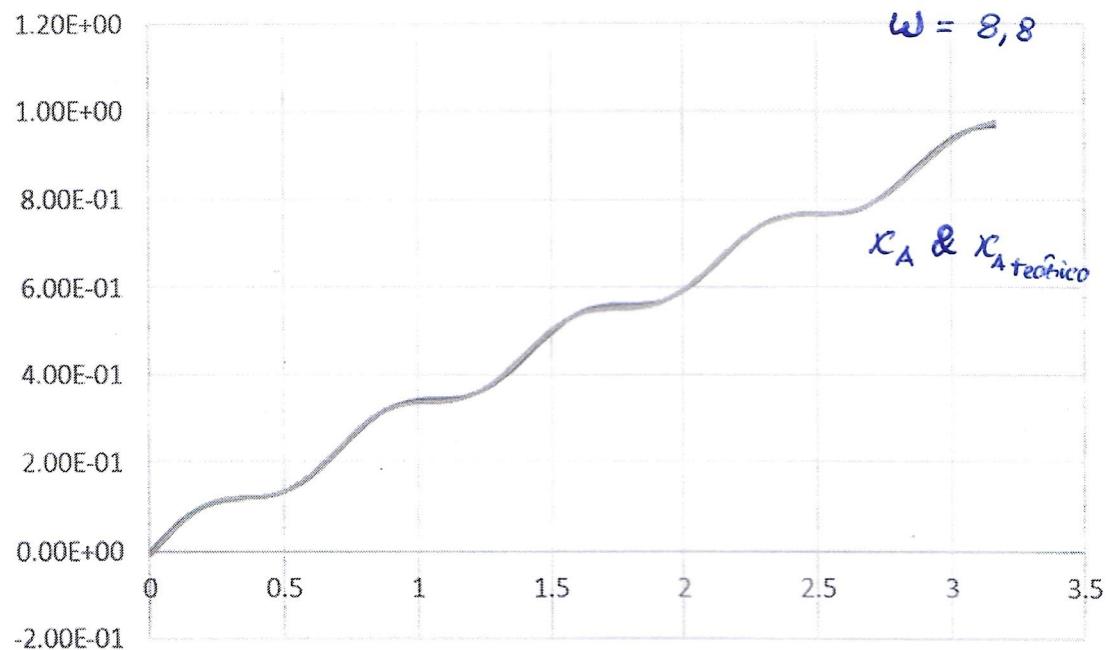


$$n = \frac{d}{2}$$

↑
 $d = 0,0674 \text{ m}$

Existe claramente uma grande margem de erro entre o ω óptimo e o ω real, isto também se dá à grande incerteza que obtemos com o resultado.

Através de tentativa e erro conclui que o valor que queremos obter é à volta de $\omega \approx 8,8 \text{ rad/s}$.



Então para obter um melhor resultado hei adoptar um método diferente.

Re-cálculo da velocidade angular

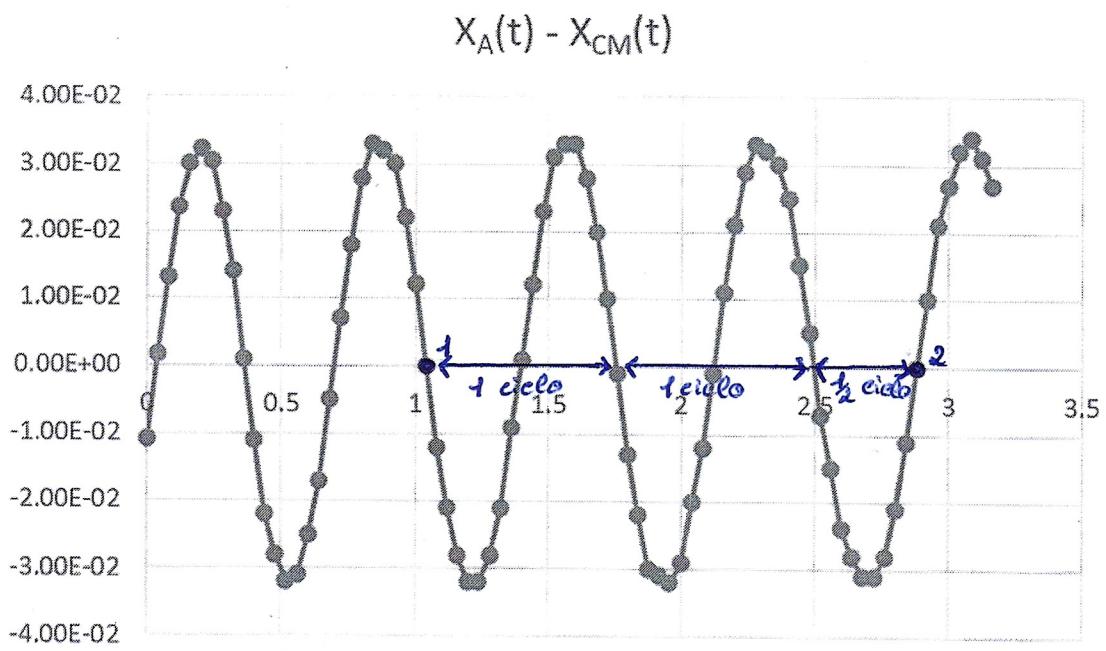
O novo método consiste em re-estruturar a equação de X_A :

$$X_A(t) = X_{CM}(t) + n \sin(\omega t)$$

$$\Leftrightarrow X_A(t) - X_{CM}(t) = n \sin(\omega t)$$

E então o plano é criar uma tabela com os valores de t e os valores de $X_A(t) - X_{CM}(t)$ correspondentes, o que nos deve dar uma onda sinusoidal, e então para calcular T precisamos apenas de encontrar pontos na tabela em que $y = 0$.

Grafico do $X_A(t) - X_{CM}(t)$:



Olhando na tabela selecionamos dois pontos de $y = 0$:

$$\Rightarrow y \text{ no gráfico} \Leftrightarrow X_A(t) - X_{CM}(t) = 0$$

$t (s)$	$ X_A(t) - X_{CM}(t) $
ponto 1)	1.04 0.00E+00
ponto 2)	2.88 0.00E+00

Sendo que de t_1 a t_2 são $\frac{5}{2}$ ciclos, temos que:

$$\frac{5}{2}T = t_2 - t_1$$

$$\Delta t_2, t_1 = 0,011$$

$$(1) T = 0,736 s \pm 0,006 s$$

$$[\Delta T = \sqrt{\left(\frac{2}{5} \times 0,01\right)^2 + \left(-\frac{2}{5} \times 0,01\right)^2} \approx 0,006]$$

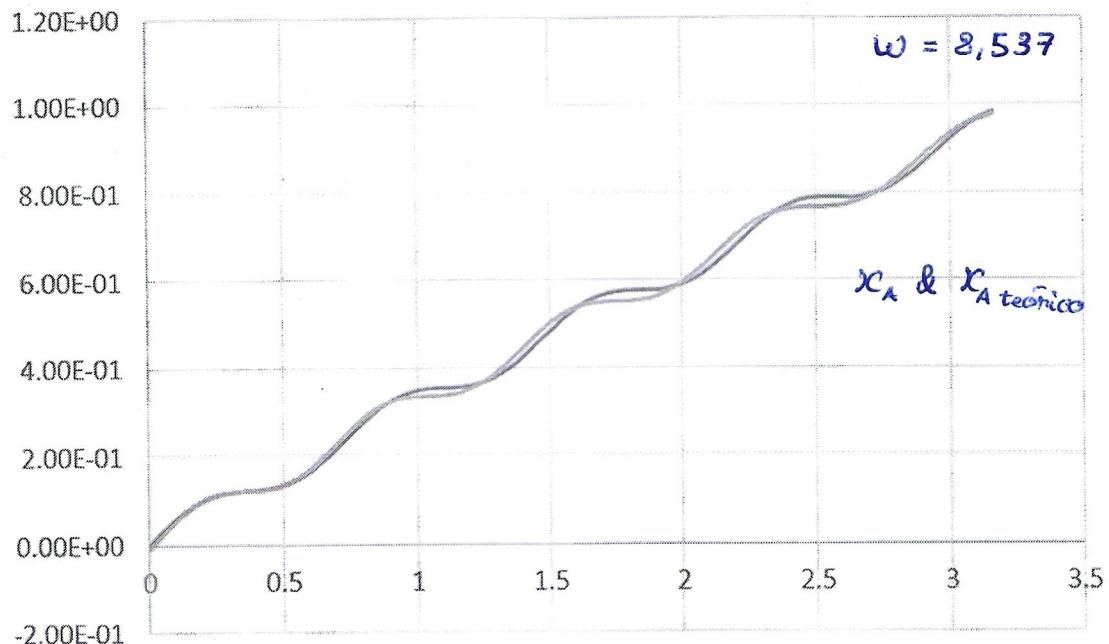
E então temos que:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \approx 8,537 \text{ rad/s} \pm 0,006 \text{ rad/s}$$

$$[\Delta \omega = \sqrt{\left(-\frac{2\pi}{(0,736)^2}\right) \times (0,006)^2} \approx 0,070]$$

E então não só obtivemos um resultado mais satisfatório como também obtivemos uma incerteza muito mais aceitável.

E usando o valor obtido temos o seguinte gráfico:



Velocidade máxima e mínima

Para a velocidade do A temos:

$$V_A = V_{CM} + \omega r \cos(\omega t)$$

E para obter os pontos da velocidade máxima e mínima podemos derivar a equação (aceleração) e igualar a zero:

$$(V_A)' = \cancel{\omega^2 r} \bullet -\omega^2 \sin(\omega t)$$

$$(V_A)' = 0 \Leftrightarrow 0 = \omega^2 \sin(\omega t)$$

$$\Leftrightarrow \sin(\omega t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{k\pi}{\omega}, k \in \mathbb{Z}$$

~~$$t: 0; \frac{\pi}{\omega}; \frac{2\pi}{\omega}; \frac{3\pi}{\omega}; \dots$$~~

$$V_{CM} = \omega r$$

$$V_A(0) = V_{CM} + \omega r \cos(0) = V_{CM} + \omega r = 2V_{CM}$$

$$V_A\left(\frac{\pi}{\omega}\right) = V_{CM} + \omega r \cos\left(\omega \cdot \frac{\pi}{\omega}\right) = V_{CM} + \omega r \cdot (-1) = V_{CM} - V_{CM} = 0$$

Então temos que, teoricamente:

$$\text{Velocidade máxima} = 2V_{\text{em}}$$

$$\text{em } t : 0 ; \frac{2\pi}{\omega} ; \frac{4\pi}{\omega} ; \dots$$

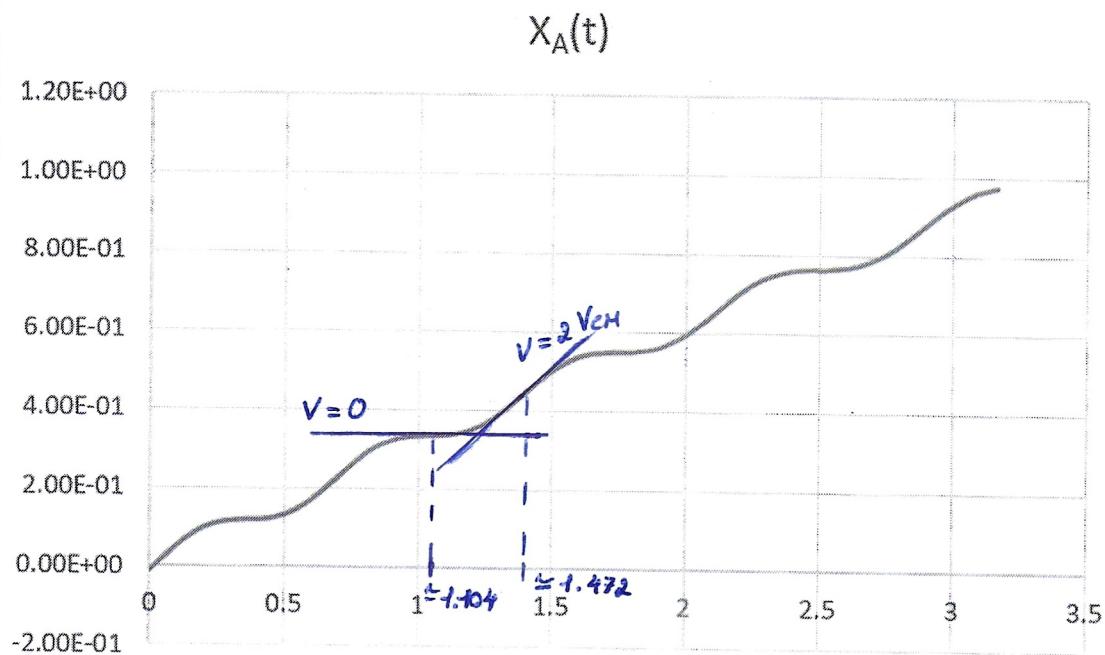
$$\text{Velocidade mínima} = 0$$

$$\text{em } t : \frac{\pi}{\omega} ; \frac{3\pi}{\omega} ; \frac{5\pi}{\omega} ; \dots$$

Usando $\omega = 8,537$:

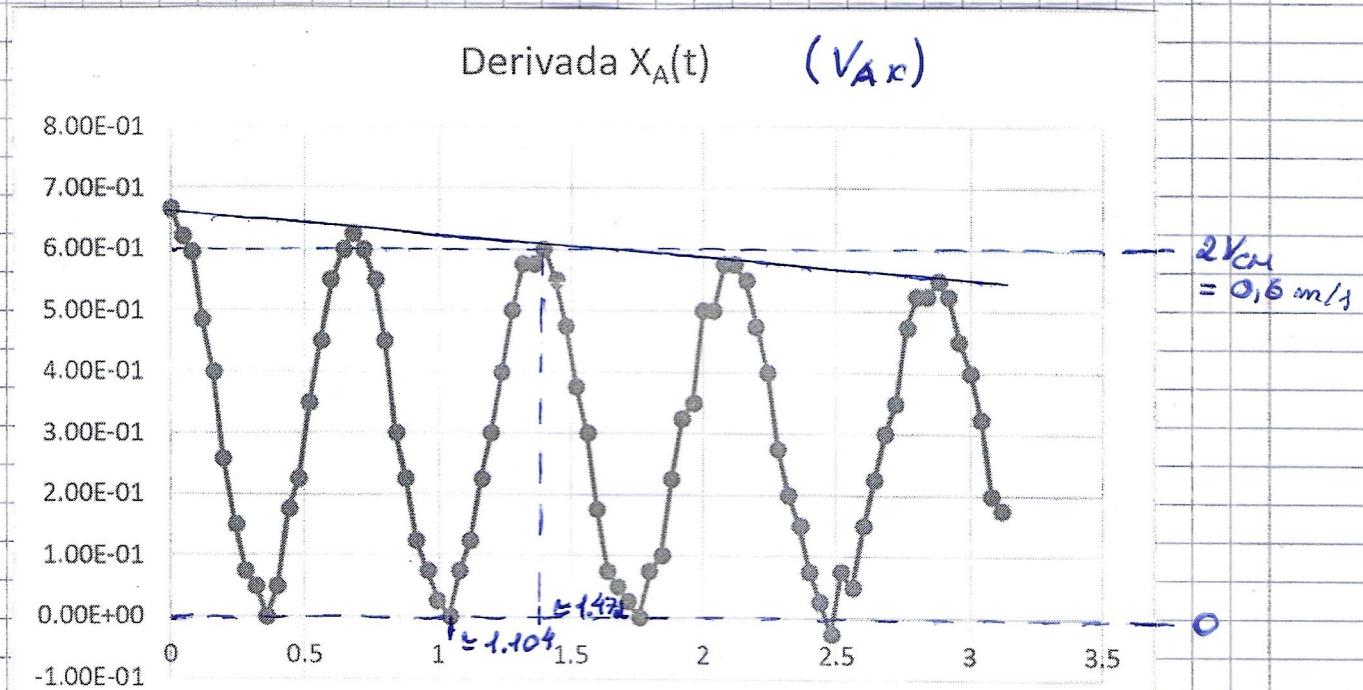
$$V_{\text{máx}} \rightarrow t : 0 ; 0,736 ; 1,472$$

$$V_{\text{mín}} \rightarrow t : 0,368 ; 1,104 ; 1,84$$



Para verificar os resultados podemos fazer um gráfico aproximado da derivada de $X_A(t)$ calculando para um ponto qualquer o declive que faz com o seu ponto sucedente e antecedente, e fazer as médias das dois declives. Nós apenas podemos confiar neste método para ter uma boa aproximação porque temos imensos pontos, caso contrário não seria um método fiável.

Grafico da derivada aproximada (V_{AX}):



Apartir desse gráfico podemos concluir que os valores estão dentro dos esperados, mas percebemos também apartir da reta desenhada que os valores máximos de velocidade estão lentamente a cair, a conclusão que podemos tirar disso é que a velocidade do cilindro foi desacelerando lentamente ao longo da experiência.

Discussão

Após os resultados obtidos verificamos que a condição $V_{CM} = wR$ é verdadeira, mas assume um rolamento perfeito do cilindro com ~~deslizar~~ deslizar, por outras palavras, quanto mais atrito houver entre o cilindro e o plano, mais fiável é a condição $V_{CM} = wR$.

A visualização do gráfico aproximado de V_{AX} também nos levou à conclusão que a velocidade do cilindro desacelerou ao longo do rolamento, com isto faz sentido esponhar que o comportamento de X_{CM} deve-se de uma evolução linear, sendo que V_{CM} desacelera lentamente, embora no nosso caso a desaceleração foi muito pequena, não sendo visível no gráfico de X_{CM} .

Tabelas de dados

Centro de massa

t(s)	xexperimental (m)	yexperimental (m)			
0	-7.15E-05	3.03E-04			
0.04	1.40E-02	1.20E-04	1.6	0.506	1.22E-03
0.08	2.75E-02	1.20E-04	1.64	0.518	4.86E-04
0.12	4.07E-02	-6.25E-05	1.68	0.529	4.86E-04
0.16	5.37E-02	-9.77E-04	1.72	0.541	3.03E-04
0.2	6.74E-02	-4.28E-04	1.76	0.553	4.86E-04
0.24	7.95E-02	1.20E-04	1.8	0.565	6.69E-04
0.28	9.30E-02	-6.25E-05	1.84	0.577	8.52E-04
0.32	0.105	-2.45E-04	1.88	0.589	4.86E-04
0.36	0.12	-4.28E-04	1.92	0.599	4.86E-04
0.4	0.132	-2.45E-04	1.96	0.613	6.69E-04
0.44	0.145	-6.25E-05	2	0.624	4.86E-04
0.48	0.158	1.20E-04	2.04	0.635	3.03E-04
0.52	0.171	-6.25E-05	2.08	0.647	4.86E-04
0.56	0.184	-6.25E-05	2.12	0.659	3.03E-04
0.6	0.196	-2.45E-04	2.16	0.67	6.69E-04
0.64	0.21	-2.45E-04	2.2	0.682	-6.25E-05
0.68	0.222	-6.25E-05	2.24	0.693	-6.25E-05
0.72	0.235	-4.28E-04	2.28	0.705	8.52E-04
0.76	0.248	-2.45E-04	2.32	0.717	8.52E-04
0.8	0.26	-2.45E-04	2.36	0.727	6.69E-04
0.84	0.273	-2.45E-04	2.4	0.738	8.52E-04
0.88	0.286	3.03E-04	2.44	0.751	8.52E-04
0.92	0.297	-2.45E-04	2.48	0.762	8.52E-04
0.96	0.31	-6.25E-05	2.52	0.773	6.69E-04
1	0.323	-7.94E-04	2.56	0.784	1.04E-03
1.04	0.336	6.69E-04	2.6	0.795	1.04E-03
1.08	0.348	4.86E-04	2.64	0.805	8.52E-04
1.12	0.36	-2.45E-04	2.68	0.817	8.52E-04
1.16	0.372	-6.25E-05	2.72	0.829	1.04E-03
1.2	0.385	-6.25E-05	2.76	0.84	1.22E-03
1.24	0.397	-2.45E-04	2.8	0.852	4.86E-04
1.28	0.409	1.20E-04	2.84	0.863	1.04E-03
1.32	0.422	1.20E-04	2.88	0.873	8.52E-04
1.36	0.433	-6.25E-05	2.92	0.885	6.69E-04
1.4	0.446	1.20E-04	2.96	0.895	1.04E-03
1.44	0.459	3.03E-04	3	0.907	1.04E-03
1.48	0.47	4.86E-04	3.04	0.918	8.52E-04
1.52	0.481	1.20E-04	3.08	0.929	1.22E-03
1.56	0.494	1.20E-04	3.12	0.94	1.04E-03
			3.16	0.951	4.86E-04

Ponto na extremidade

t(s)	x _{experimental} (m)	y _{experimental} (m)
0	-1.09E-02	3.08E-02
0.04	1.58E-02	3.22E-02
0.08	4.06E-02	2.96E-02
0.12	6.44E-02	2.10E-02
0.16	8.37E-02	1.19E-02
0.2	9.97E-02	-1.05E-03
0.24	0.11	-1.45E-02
0.28	0.116	-2.36E-02
0.32	0.119	-2.95E-02
0.36	0.121	-3.21E-02
0.4	0.121	-3.06E-02
0.44	0.123	-2.41E-02
0.48	0.13	-1.56E-02
0.52	0.139	-2.96E-03
0.56	0.153	8.91E-03
0.6	0.171	1.90E-02
0.64	0.193	2.82E-02
0.68	0.217	3.18E-02
0.72	0.242	3.20E-02
0.76	0.266	2.75E-02
0.8	0.288	1.82E-02
0.84	0.306	8.03E-03
0.88	0.318	-4.16E-03
0.92	0.327	-1.63E-02
0.96	0.332	-2.51E-02
1	0.335	-3.08E-02
1.04	0.336	-3.26E-02
1.08	0.336	-3.16E-02
1.12	0.339	-2.52E-02
1.16	0.344	-1.64E-02
1.2	0.353	-6.05E-03
1.24	0.365	5.82E-03
1.28	0.381	1.61E-02
1.32	0.401	2.54E-02
1.36	0.424	3.18E-02
1.4	0.447	3.28E-02
1.44	0.471	2.99E-02
1.48	0.493	2.28E-02
1.52	0.512	1.37E-02
1.56	0.527	2.33E-03

1.6	0.539	-9.07E-03
1.64	0.546	-1.94E-02
1.68	0.549	-2.75E-02
1.72	0.551	-3.21E-02
1.76	0.552	-3.34E-02
1.8	0.552	-3.08E-02
1.84	0.555	-2.46E-02
1.88	0.559	-1.58E-02
1.92	0.568	-5.52E-03
1.96	0.581	4.79E-03
2	0.595	1.56E-02
2.04	0.615	2.51E-02
2.08	0.635	3.10E-02
2.12	0.658	3.28E-02
2.16	0.681	3.09E-02
2.2	0.703	2.57E-02
2.24	0.722	1.71E-02
2.28	0.738	7.52E-03
2.32	0.749	-4.14E-03
2.36	0.757	-1.45E-02
2.4	0.763	-2.36E-02
2.44	0.766	-3.00E-02
2.48	0.767	-3.34E-02
2.52	0.766	-3.24E-02
2.56	0.769	-2.90E-02
2.6	0.771	-2.26E-02
2.64	0.777	-1.43E-02
2.68	0.786	-3.19E-03
2.72	0.798	7.12E-03
2.76	0.812	1.67E-02
2.8	0.831	2.49E-02
2.84	0.852	3.08E-02
2.88	0.873	3.25E-02
2.92	0.895	3.12E-02
2.96	0.916	2.60E-02
3	0.934	1.82E-02
3.04	0.95	1.04E-02
3.08	0.963	-5.08E-04
3.12	0.971	-1.19E-02
3.16	0.978	-2.05E-02