

TRABALHO FB: PONTE DE WHEATSTONE EM EQUILÍBRIO E FORA DO EQUILÍBRIO:
Maria do Pilar de Gomes Teixeira - PLB - GA

MB

→ INTRODUÇÃO TEÓRICA:

P.F. ver nota! ✓
P.F. ver log^{bo} (cotação a gruP)

- Determinação de resistências com a ponte de Wheatstone em equilíbrio:

$$(1) \quad R_3 = \frac{R_a}{R_b} R_4$$

→ Sendo R_a e R_b escolhidas numa caixa de resistências e R_4 noutra e é pretendido medir R_3 .

- Leis de associação de resistências em série e em paralelo:

Série: $R_s = R_a + R_b + R_c$

Paralelo: $\frac{1}{R_p} = \frac{1}{R_a} + \frac{1}{R_b} + \frac{1}{R_c}$

- Ponte fora do equilíbrio:

Ao aquecer R_3 passamos a ter: $R_3 = R + \Delta R$

Aplicando as leis de Kirchhoff obtemos, também que:

$$\left\{ \begin{array}{l} i_1 = \frac{E_s}{R_1 + R_2} \\ i_2 = \frac{E_s}{R_3 + R_4} \end{array} \right. \rightarrow \text{Para } E_s - \text{fonte de tensão de corrente contínua}$$

Com o aquecimento de R_3 deixamos de ter equilíbrio, o voltmetro deteta uma diferença de potencial e se considerarmos que a ponte inicialmente se encontrava equilibrada e que $\Delta R \ll R_4$, então temos que:

$$\Delta V = \frac{\Delta R E_s}{4 R_4} \quad (6)$$

$$\Delta V = \frac{\Delta R E_s}{4 R_4 + 2 \Delta R} \quad (5)$$

→ OBJETIVOS:

- Medir resistências e verificar as leis de associação em série e paralelo, com a Ponte de Wheatstone em equilíbrio (equações (1), (2) e (3)).
- Determinar o comportamento térmico da resistência de um termômetro de platina, com a Ponte de Wheatstone fora do equilíbrio (equações (4), (5) e (6)).

→ EXECUÇÃO EXPERIMENTAL:

- Determinação de resistências com a ponte de Wheatstone em equilíbrio:

1. Ligar o voltmetro e ohmímetro para estabilizarem a temperatura de funcionamento.

↳ A só desligar no fim do trabalho!

Verificar, após alguns minutos, se o zero está ajustado.

↓ Como?

Escolher uma escala sensível e verificar o valor de zero

amperímetro → desligado do circuito

voltímetro/ohmímetro → (com as entradas em curto-círculo)

2. Registrar os valores das resistências da placa das resistências (R_a , R_b , R_c)

↳ pelo código de cores

com o ohmímetro

3. Montar o circuito do esquema (1), escolhendo os valores de R_a e R_b mais favoráveis.

↳ Atender aos valores disponíveis na caixa de resistências

↳ Atender ao cálculo da incerteza do resultado final

$$\mu(R_3) = \frac{R_1 \mu(R_1)}{R_2} \quad \rightarrow \text{para que } \mu(R_3) \text{ seja o mais pequeno possível,}$$

pretendemos que $\frac{R_1}{R_2} \ll 1$, sendo $\mu(R_1) \approx \mu(R_2) \approx 0$.

• Escolher uma resistência R_3 da placa de resistências.

ATENÇÃO!! Não exceder os 5V na fonte de tensão, se esta for variável.

4. Escolher R_4 para a qual a ponte ficou equilibrada e abrir rapidamente o circuito → Garantir que a passagem de corrente se faz durante pouco tempo.

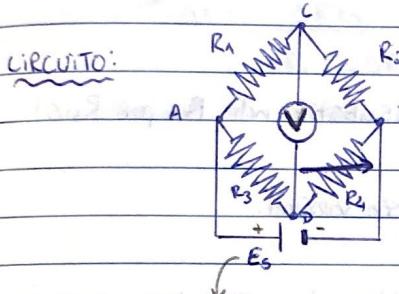
5. Atuar nos botões da caixa de resistências, começando por valores mais elevados e procurar o valor para o qual a diferença de potencial (ddp) se anula.

6. Repetir para outras resistências e para associações de resistências em série e paralelo.

7. Calcular R_3 para cada situação: $R_3 = \frac{R_1 \times R_4}{R_2}$ e calcular incerteza e exatidão.

NOTA: Deverá ser usado o valor de referência o valor medido com o ohmímetro. Isto porque, as resistências utilizadas na experiência podem já ter sofrido algumas transformações, ou até estarem ligeiramente danificadas, pelo que o seu valor pode já ser diferente do sugerido pelo código de cores. Além disso a incerteza associada ao ohmímetro é menor que a do código.

- ESQUEMA EXPERIMENTAL ①:



① - voltímetro → Não foi utilizado o galvanômetro uma vez que este permite detectar variações de corrente da ordem dos $0,1 \mu A$, o que corresponde a $0,3 mV$ de ddp → Muito inferior à sensibilidade do voltímetro.

Es - fonte de tensão de corrente contínua.

Não exceder os $5V$ durante a experiência!

- Determinação do comportamento térmico da resistência de um termômetro de platina:

• Material:

- termômetro de resistência de platina (PT1000 classe B):
 $R(\theta) = 1000 (1 + 3,9083 \times 10^{-3} \theta - 5,775 \times 10^{-7} \theta^2)$ (R : ohm; θ : $^{\circ}C$)

$$\Delta . \text{Tolerância do termômetro} = 0,3 + 0,0051\theta$$

$$\Delta . \theta = 10^{-5} R^2 + 0,2358R - 245,77$$

- Bloco de alumínio, com uma resistência de aquecimento inserida ($\sim 20 \Omega$) para aquecer os termômetros.

- Tabela de conservação da resistência de platina em graus centígrados, para controlar a evolução da temperatura.

- 2 multímetros → 1 para funcionar como voltímetro V (esquema ②)

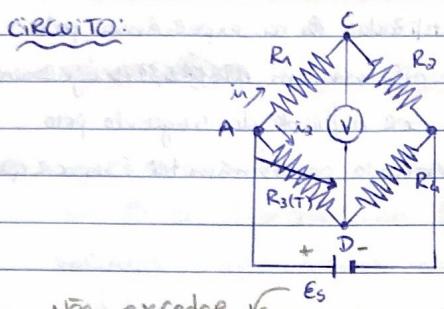
→ 1 para funcionar como ohmímetro → para medir resistência de 1 dos termômetros.

- 2 fontes de energia → 1 para alimentar a parte de Wheatstone
 → outra para alimentar o aquecedor do bloco

- placa suporte do bloco, com terminais de ligação para 2 termômetros e para a resistência de aquecimento.

• ESQUEMA EXPERIMENTAL ②:

CIRCUITO:



Não exceder $\sqrt{E_S}$

os $\approx V$!

• EXECUÇÃO:

1. UTILIZAR o circuito da primeira experiência, apenas substituindo R_3 por $R_3(\theta)$.

USAR $R_1 = R_2 = 1000\ \Omega$

Ligar a resistência de aquecimento à fonte de tensão variável.

2. Δ Verificar se os termômetros de platina estão devidamente inseridos no orifício do bloco metálico criado para esse fim. Estes termômetros têm uma pasta de contacto térmico de forma a otimizá-lo, e estão alojados numa barra de cobre passa para assegurar o maior equilíbrio térmico.

3. Ligar o outro termômetro ao multimetro (ohmímetro).

4. Registrar o valor de $E_S \rightarrow$ que deve ser o menor possível para evitar o "self-heating" do termômetro ligado à ponte de wheatstone $\rightarrow E_S \leq 1V$.

5. Decidir se usar $R_4 = 1000\ \Omega$ ou se equilibra a ponte à temperatura ambiente.

Neste caso, registrar o valor de R_4 e da temperatura ambiente.

7. Aquecer o bloco, ligando a fonte de tensão que alimenta a resistência de aquecimento. (Tensão $\approx 30V$) (corrente $100-300\ mA$)

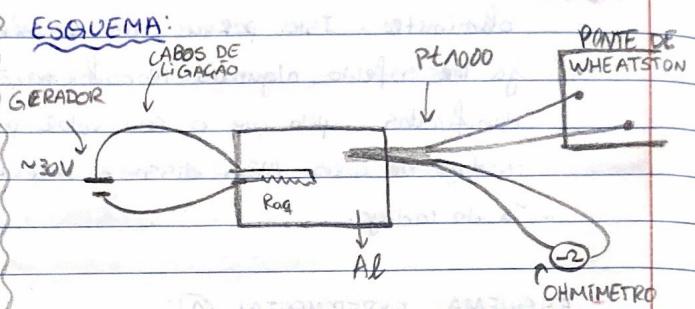
Registrar os pontos numa gama de temperatura $\approx 5^\circ C$

- Δ Antes de ligar a fonte, colocar a tensão no mínimo (botão todo rodado para esquerda) / ajustar a tensão para 30V

Fonte de tensão: 30V

Resistência de aquecimento: 1000-3000Ω

Termômetros: 100Ω a 1000Ω



8. Registrar periodicamente ($t; \Delta V; R_3(e)$) → GRAVAR

t - instante de registo

ΔV - tensão lida no voltmetro

$R_3(e)$ - resistência do termômetro de platina lida no ohmímetro.

9. Construir um gráfico de ΔV em função de $R_3(e)$ ($R_3 = R + \Delta R \Rightarrow \Delta R = R_3 - 1000 \Omega$)

10. Comparar o comportamento obtido com o esperado pelas equações

equação exata $\Delta V = \frac{\Delta R E_s}{4R_4 + 2\Delta R}$ (5) $\Delta V = \frac{\Delta R E_s}{4R_4}$ (6) → equação aproximada

e comentar a exatidão e precisão.

MLST

NOTAS DE AULA:

$E = 6,263 \text{ V} \rightarrow$ gerador ligado ao multímetro (15 V) → nº parte da experiência.

VALORES DE R_4 :

2ª parte:

$$E = 0,567 \text{ V}$$

$$(E \in ru) \rightarrow$$

(A) $\rightarrow 11980,900 \Omega$

$$\mu(R_4) = 0,002 \Omega$$

(B) $\rightarrow 2164,000 \Omega$

$$R_n = R_2 = 1000 \Omega$$

→ a redução da incerteza depende de 2 aparelhos:

- multímetro (V) (usado em vez do Galvanômetro por ter maior sensibilidade)

- $R_4 \rightarrow$ (+) algoritmos significativos (maior precisão desta)

→ Para 1ª exp.) mede R_3 → 1º começamos na escala (+) adequada (10 V) e, à medida que alterarmos valor de R_4 , mudamos a escala para uma ainda (+) adequada.

MLST
MB

MONTAGENS EXPERIMENTAIS:

Fonte de tensão variável



Voltímetro

Ohmímetro

Fonte de tensão

Ponte de Wheatstone

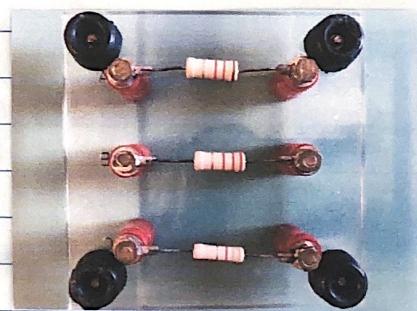
Caixa de Resistências

(R4)

IMAGEM 1: Resistências

A, B e C.

IMAGEM 1: Montagem da 2ª parte
da experiência



ANÁLISE DE DADOS E DISCUSSÃO DE RESULTADOS:

- Determinação de resistências com a ponte de wheatstone em equilíbrio:

Tabela 1 - Dados experimentais da primeira parte da experiência

	R3(código de cores) ($\pm 5\% \Omega$)	(ohmímetro) (Ω)		Ponte W.	
		R3	u(R3)	R4(Ω)	U(R4) / Ω
R _A	1200	1 193	1	1198,900	0,002
R _B	2200	2120	10	2164,000	0,002
R _C	3300	3240	10	3297,200	0,002
R _{s exp}		6 553	10	6659,900	0,002
R _{p exp}		618	1	625,500	0,002

Tabela 2

R1 (Ω)	1000
R2 (Ω)	1000
$\epsilon_{\text{S}} (\text{V})$	0,903

Tabela 3 - Cálculo do valor de R3 através da eq 1

Ponte W.	
R3 ($\pm 0,002 \Omega$)	Erro Percentual (%)
1198,900	0,5
2164,000	2,1
3297,200	1,8
6659,900	1,6
625,500	1,2

$$R_3 = \frac{R_1 \times R_4}{R_2}$$

$$\text{ERRO} (\%) - R_3 = \frac{|\Delta R_3|}{R_3} \times 100 \quad \Delta R_3 = R_3^{\text{exp}} - R_3^{\text{referência}}$$

R_3^{ref} → Valor de R_3 lido no ohmímetro.

• Com a análise das tabelas anteriores verificamos que $R_3 \approx 1$, pelo que $R_4 = 1$.

R_2

• Estando a ponte de Wheatstone em equilíbrio, sabemos que $R_3 = \frac{R_1 \times R_4}{R_2}$.

Assim, admitindo que o grau de precisão das resistências R_1 e R_2 é elevado, vamos ter que:

$$u(R_3) = \frac{R_1}{R_2} u(R_4) \quad \text{e como } R_1 = R_2 \rightarrow u(R_3) = u(R_4)$$

• Como já foi referido (ver NOTA da execução experimental) vai ser usado como valor de referência para as resistências A, B e C o valor registado pelo ohmímetro, pelo que temos:

$$\text{ERRO}(A,B,C) (\%) = \frac{R_{\text{ohm.}} - R_{\text{ponte}}}{R_{\text{ohm.}}} \rightarrow R_{A,B,C} \text{ tem um erro máximo de}$$

2,1%. → Relativamente baixo, pelo

que estes valores apresentam elevada exatidão.

∴ Podemos, assim, considerar a ponte de Wheatstone como um método fiável de medição de resistências, com alto grau de exatidão.

- Verificação das leis de associação de resistências em Série e paralelo:

- Tendo em consideração os valores obtidos para as resistências A, B e C através da ponte, será feita a verificação destes com os valores medidos pela associação da ponte.

$$R_s = R_A + R_B + R_C = 6660,100 \Omega$$

↓

$$u(R_s) = \sqrt{u^2(R_A) + u^2(R_B) + u^2(R_C)} = \sqrt{3 \times (0,002)^2} = \pm 0,003 \Omega$$

$$R_p = \left(\frac{1}{R_A} + \frac{1}{R_B} + \frac{1}{R_C} \right)^{-1} = 625,1982 \Omega$$

↓

$$u(R_p) = \sqrt{\left(\frac{\left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C} \right)^{-2}}{A^2} \cdot u(A) \right)^2 + \left(\frac{\left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C} \right)^{-2}}{B^2} \cdot u(B) \right)^2 + \left(\frac{\left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C} \right)^{-2}}{C^2} \cdot u(C) \right)^2} = 0,0006 \Omega$$

Tabela 4 - Valores de resistência das associações fornecidas pelas leis de associações

série (Ω)	u (série) Ω	Paralelo (Ω)	u (paralelo) Ω
6660,100	0,003	625,1982	0,0006

- Como podemos ver, o erro obtido na ~~determinação~~ medição das resistências em Série e em paralelo com base em R_A , R_B e R_C foi, respetivamente, de 1,2% e 1,6%, pelo que se verificam as leis de associação em de resistências em Série e em paralelo, com a ponte em equilíbrio.

- Determinação do comportamento térmico da resistência de um termômetro de platina:

- Considerando a ponte de Wheatstone inicialmente em equilíbrio, teríamos um valor inicial de R_4 de 1000Ω (ponte à temperatura ambiente). Este valor corresponderia ao valor de R_3 quando $\Delta V = 0$.

• Contudo, foi cometido o erro de se ter ligado a resistência R_4 apenas algum tempo depois de se ter ligado todos os outros dispositivos do circuito, tendo-se iniciado o registo de dados só depois de R_4 ter sido ligada.

• Desta modo, como se verifica na tabela (5) e nos gráficos a seguir, no instante $t = 0,005$ temos $\Delta V = 0,0250 \text{ mV}$ e $R_3 = 1125,39 \Omega$



valor muito diferente des

1000 Ω esperados (Erro(V)=12,5%)

concluimos, por isso, que a ponte de Wheatstone não se encontrava ~~aten~~
em equilíbrio durante esta parte da experiência.

Ponto considerado como
duvidoso.

Tabela 5

$t (\pm 0,01)\text{s}$	$\Delta V (\pm 0,0001) \text{ mV}$	$R_3 (\pm 0,01) \Omega$	$\Delta R (\pm 0,01) \Omega$	$\Delta V \text{ ajuste} (\pm 0,002) \text{ mV}$	Resíduos de $\Delta V (\pm 0,02) \text{ mV}$
0,00	0,0250	1125,39	125,39	0,0266	0,0016
30,08	0,0269	1125,72	125,72	0,0267	-0,0002
60,29	0,0271	1126,52	126,52	0,0269	-0,0002
91,48	0,0273	1127,44	127,44	0,0271	-0,0002
120,38	0,0275	1128,33	128,33	0,0273	-0,0002
150,40	0,0277	1129,25	129,25	0,0275	-0,0002
180,69	0,0279	1130,21	130,21	0,0277	-0,0002
210,01	0,0280	1131,11	131,11	0,0279	-0,0001
240,69	0,0282	1132,07	132,07	0,0281	-0,0001
270,40	0,0284	1133,02	133,02	0,0283	-0,0001
300,52	0,0286	1133,99	133,99	0,0285	-0,0001
330,39	0,0288	1134,90	134,90	0,0287	-0,0001
360,15	0,0290	1135,79	135,79	0,0289	-0,0001
390,49	0,0292	1136,71	136,71	0,0291	-0,0001
420,09	0,0293	1137,62	137,62	0,0293	0,0000
450,47	0,0295	1138,54	138,54	0,0295	0,0000
480,67	0,0297	1139,42	139,42	0,0297	0,0000
510,82	0,0299	1140,30	140,30	0,0299	0,0000
540,09	0,0301	1141,14	141,14	0,0301	0,0000
570,98	0,0302	1142,00	142,00	0,0303	0,0001
600,28	0,0304	1142,82	142,82	0,0305	0,0001
630,69	0,0306	1143,66	143,66	0,0307	0,0001
660,35	0,0307	1144,45	144,45	0,0308	0,0001
688,16	0,0309	1145,19	145,19	0,0310	0,0001

Gráfico 1 - ΔV em função de ΔR

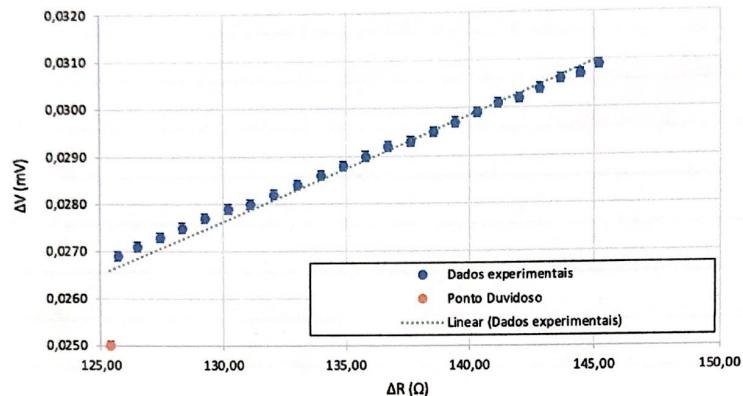


Tabela 6 - Matriz de ajuste ao gráfico 1

m	0,00022	-0,001	b
s_m	0,00001	0,002	s_b
r^2	0,94	0,0004	s_y

Gráfico de ΔV em função de ΔR com todos os dados experimentais, incluindo o ponto considerado duvidoso (ponto a laranja) e respetiva matriz de ajuste.

Gráfico 2 - ΔV em função de ΔR (excluindo o ponto duvidoso)

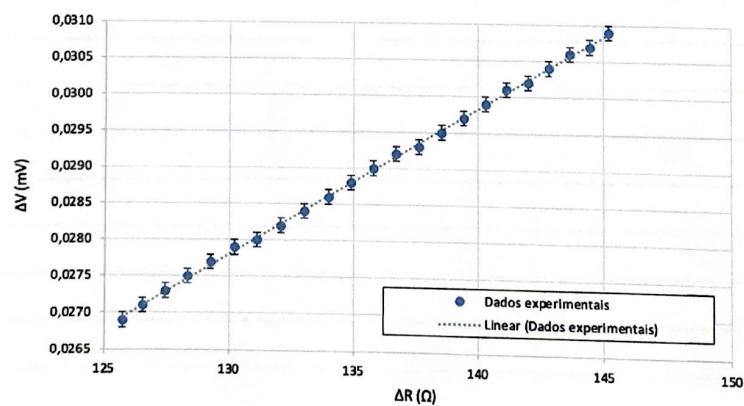


Tabela 7 - Matriz de ajuste ao gráfico 2

m	0,000202	0,0015	b
s_m	0,000001	0,0001	s_b
r^2	0,9994	0,00003	s_y

Gráfico de ΔV em função ΔR , sem o ponto duvidoso, e respetiva matriz de ajuste.

Mais uma vez, pela análise dos dados, verificamos que, de facto, a ponte de Wheatstone não se encontrava em equilíbrio.

Para $\Delta V = 0 \rightarrow R_3$ deveria ser $1000\ \Omega$

Contudo o R_3 inicial = $1135,39\ \Omega$ (ΔR inicial = $135,39\ \Omega$), pelo que a resistência do termômetro estava a uma temperatura acima dos 25° .



Claro que o facto de a ponte não estar em equilíbrio irá afetar os resultados.

Com a análise do gráfico 3 verifica-se uma tendência linear, por parte dos dados experimentais, tal como era esperado. Além disto, a ordenada na origem apresenta um valor diferente de 0, que também era esperado para uma temperatura diferente de $0^\circ C$.

$$\Delta V (mV) \rightarrow \Delta R (\Omega)$$

$$y = 0,000202x + 0,0015$$



Considerando $\Delta V = 0 \rightarrow 0 = 0,000202x + 0,0015 \Leftrightarrow x = -7,4 \pm 0,7\ \Omega$.

$R_3 = \bar{R}_3 - \Delta R = 1132,7 \pm 0,7\ \Omega \rightarrow$ A ponte não estava, de facto, em equilíbrio

$$u(\Delta R) = \sqrt{\left(\frac{1}{m} \cdot u(\Delta V)\right)^2 + \left(-\frac{1}{m} \cdot u(b)\right)^2 + \left(-\left(\frac{\Delta V - b}{m^2}\right) \cdot u(m)\right)^2} = \pm 0,7\ \Omega$$

94% de incerteza percentual

$$u(R_3) = \sqrt{(1 \times u(\bar{R}_3)) + (-1 \times u(\Delta R))} = 0,7\ \Omega \rightarrow$$

com 0,06% de incerteza percentual

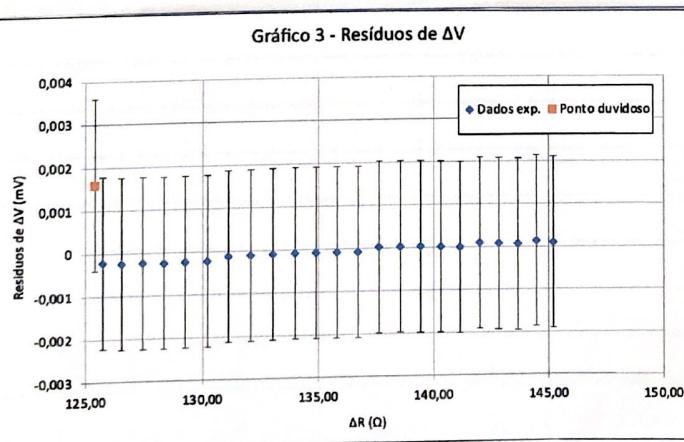
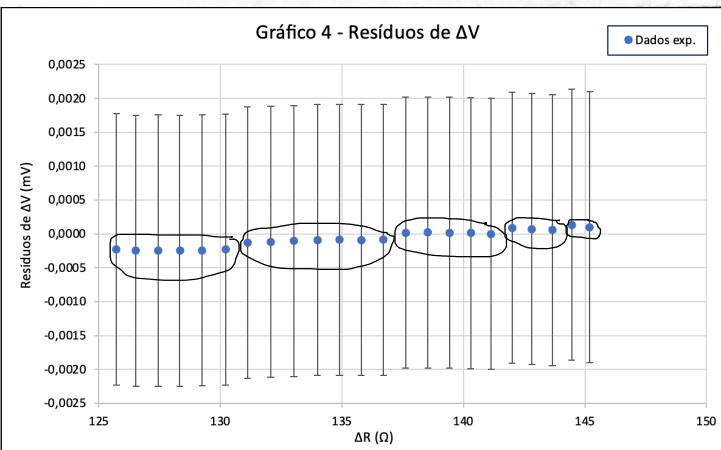


Gráfico do ΔV

Resíduos de
 ΔV , sem o
 ponto duvidoso.

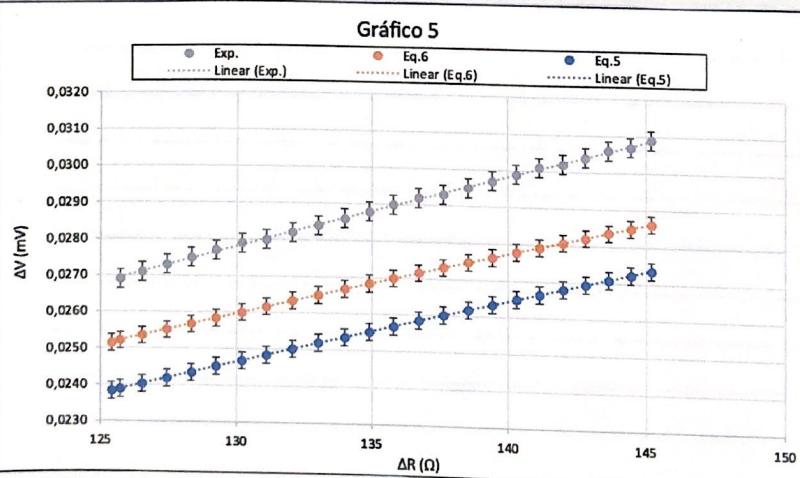


Podemos dividir os
resíduos em 5
grupos.

• Como podemos verificar pelos gráficos (3) e (4) o resíduo máximo absoluto é da ordem de grandeza da incerteza de ΔV do ajuste.

• Observamos que estes gráficos de ~~resíduos~~ apresentam uma tendência crescente na distribuição dos dados, podendo inclusivamente ser divididos em 5 grupos. Apesar disso, todos os valores, com a excepção do ponto considerado como duvidoso, se encontram bastante próximos do zero.

• Concluímos que, apesar do erro cometido, que faz com que a ponte não estivesse em equilíbrio no início da experiência, foi possível ~~realizar~~ verificar que os ajustes técnicos realizados a partir das equações (5) e (6) são relativamente próximos dos ajustes obtidos experimentalmente, como podemos verificar a seguir.



- Nos dados das equações (5) e (6) foram colocadas barras de incerteza de $\pm 0,0003$ mV.
• Nos dados experimentais foram colocadas barras de incerteza de $\pm 0,0001$ mV.

Tabela 6 - Determinação de ΔV através das eq 5 e 6	
ΔV ($\pm 0,00003$) mV (eq.5)	ΔV ($\pm 0,00003$) mV (eq.6)
0,02383	0,02515
0,02388	0,02521
0,02403	0,02535
0,02419	0,02552
0,02435	0,02568
0,02452	0,02584
0,02469	0,02601
0,02485	0,02617
0,02502	0,02634
0,02519	0,02650
0,02537	0,02667
0,02553	0,02683
0,02569	0,02699
0,02585	0,02715
0,02602	0,02731
0,02618	0,02747
0,02634	0,02762
0,02649	0,02778
0,02664	0,02792
0,02679	0,02807
0,02694	0,02821
0,02709	0,02836
0,02723	0,02849
0,02736	0,02862

Tabela 8 - Matriz de ajuste à eq 5			
m	0,00017852	0,001446	b
sm	0,00000008	0,000011	sb
r^2	0,999995	0,000003	sy

Tabela 9 - Matriz de ajuste à eq 6			
m	0,0001752	0,00319	b
sm	0,0000002	0,00002	sb
r ²	0,99998	0,000005	sy

Matrizes de ajuste da retas
correspondentes às retas respectivas
às equações (5) e (6).

Dados de ajuste dos dados experimentais com base nas equações (5) e (6).

- Pelo análise do gráfico (5) verificamos que as relações obtidas através dos declives das duas equações são semelhantes ao obtido experimentalmente.

Desta forma, comparando os valores ~~absolutos~~ dos declives obtidos pelos diferentes métodos obtemos:

\rightarrow equation (5)

$$m_S = 0.00017052 = 0.000017 \text{ m} \text{ v t s}^2 \quad \text{equation (5)}$$

$$m_6 = 0,0001752 \pm 0,000\,0002 \text{ mV} / \Omega \rightarrow \text{equation (6)}$$

Obtendo os respetivos erros: $\text{fator}_1 = 0.0001$, $\text{fator}_2 = 0.0002$, $\text{fator}_3 = 0.0003$

- $\text{ERRO}(5)(Y) = 13\%$. \rightarrow obtido comparando os dados com a equação 5.
 - $\text{ERRO}(6)(Y) = 15\%$. \rightarrow obtido comparando os dados com a equação 6.

→ RESULTADOS FINAIS:

1ª Parte da experiência:

$$R_A = 1198,900 \pm 0,002 \Omega \rightarrow \text{ERRO} (\%) = 0,5\%$$

$$R_B = 2164,000 \pm 0,002 \Omega \rightarrow \text{ERRO} (\%) = 2,1\%$$

$$R_C = 3297,300 \pm 0,002 \Omega \rightarrow \text{ERRO} (\%) = 1,8\%$$

$$R_S = 6659,900 \pm 0,002 \Omega \rightarrow \text{ERRO} (\%) = 1,6\%$$

$$R_P = 625,500 \pm 0,002 \Omega \rightarrow \text{ERRO} (\%) = 1,2\%$$

2ª Parte da experiência:

$$\Delta V (\Delta R)_{\text{exp}} = 0,000202 \pm 0,000007 \text{ mV/}\Omega$$

$$\text{ERRO (5)} (\%) = 13\%$$

$$\text{ERRO (6)} (\%) = 15\%$$

→ CONCLUSÃO:

• No que diz respeito à primeira parte da experiência, tendo em conta os valores adquiridos, foi possível confirmar os valores previamente esperados, quer pelo código de cores, quer pelo registado com o ohmímetro. Tendo sido obtidos, inclusivamente, erros relativamente pequenos, de 0,5% e 2,1%.

• Foram ainda confirmadas as leis de associação em série e paralelo, tendo sido obtidos erros de apenas 1,6% (em série) e 1,2% (em paralelo).

• No que diz respeito à segunda parte da experiência, foi possível verificar que a diferença de potencial aumenta com o aumento da resistência do termômetro, causado pelo aumento da temperatura, conforme o esperado pelas expressões teóricas.

• Mais uma vez, visto que a ponte de Wheatstone não se encontrava em equilíbrio nesta parte da experiência foram obtidos erros relativamente elevados quando comparados com os valores previstos pelas equações teóricas ((5) - 13%, (6) - 15%).

• Sabemos, também, que a equação (6) é resultante de uma aproximação da equação (5) para uma temperatura 0°C, ^{ambientais} condições diferentes das ^{em} que se realizou a experiência.