

TRABALHO 6B: ESTUDO DO MOVIMENTO DE PROJÉTEIS PIB - Grupo 6

Maria do Pilar de Gomes Teixeira -

→ INTRODUÇÃO TEÓRICA:

(considerando um projétil de massa m apenas sujeito à aceleração gravitacional \vec{g} (tomada como constante)).

As equações do seu movimento são dadas por:

$$(1) \cdot x(t) = v_0 \cos \theta t \quad (\text{considerando o ponto de partida do projétil como a origem do referencial}).$$
$$(2) \cdot y(t) = v_0 \sin \theta t - \frac{1}{2} g t^2$$

A velocidade inicial pode ser dada por:

$$(3) \cdot v_0 = \sqrt{\frac{gx}{2 \sin \theta \cos \theta}} \quad \rightarrow \text{com } y=0, \text{ o ângulo inicial de lançamento } \theta \text{ e-} \\ \text{impacto a uma distância } x \text{ da origem do referencial.}$$

(Pretendemos obter $v_0 \pm u(v_0)$ para cada θ)

Obtem-se, ainda, o valor de θ para o qual (o alcance x é máximo) da seguinte forma:

$$(4) \cdot x = \frac{2 v_0^2 \sin \theta \cos \theta}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}$$

Máximo para $\theta = 45^\circ (\pi/4 \text{ Rad})$

→ OBJETIVOS:

- Analisar a dependência do alcance do projétil com o ângulo de lançamento quando os níveis de lançamento e impacto são iguais ($x(\theta)$)
- Ajustar a qualidade do lançador (calcular $v_0 \pm u(v_0)$ para os vários ângulos θ)
- Determinar o alcance máximo.

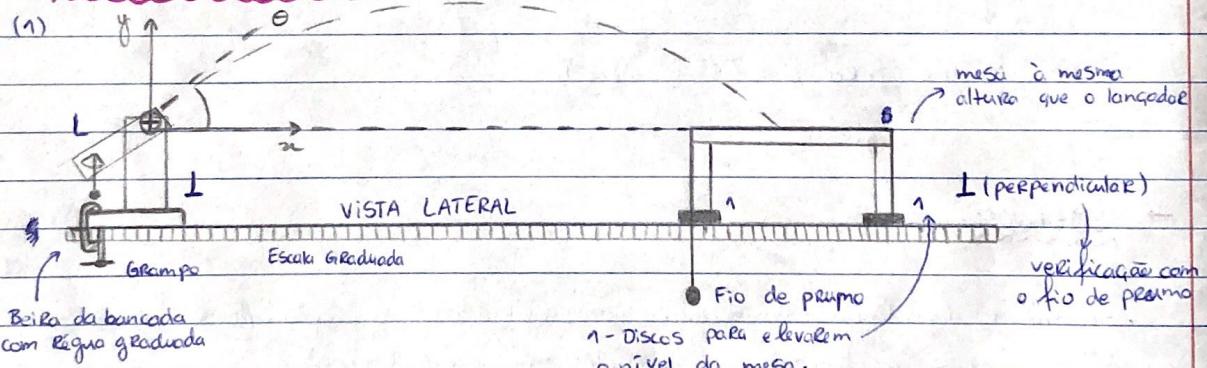
→ MATERIAIS E CUIDADOS:

- Lançador e respetivo grampo de fixação
- Esfera de teste
- Tubo de armarção (para empurrar a esfera dentro do lançador)
- Mesa com superfície de embate + fio de prumo
- Óculos de proteção
- Papel milimétrico
- Papel químico
- Esquadro + fita métrica

~~Detalhes~~

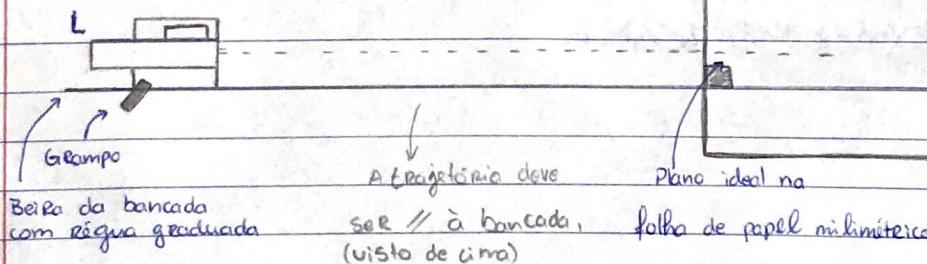
- Usar óculos de proteção sempre quando junto da mesa de embate.
- Assegurar que o grampo do lançador fica bem apertado.
- Assegurar que não há risco de choque com as janelas.
- Ao efetuar os lançamentos, numerar a sequência de ensaios, assim como o respetivo ângulo. Isto porque poderá acontecer ^{que} para diferentes ângulos, obtemos a mesma posição x . (Esquema (3))
- Evitar ao máximo desvios do plano da trajetória, resultantes do deslizamento e rotação do lançador. (Esquema (4))

→ MONTAGEM EXPERIMENTAL:

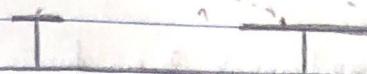


(2)

VISTA DO TOPO

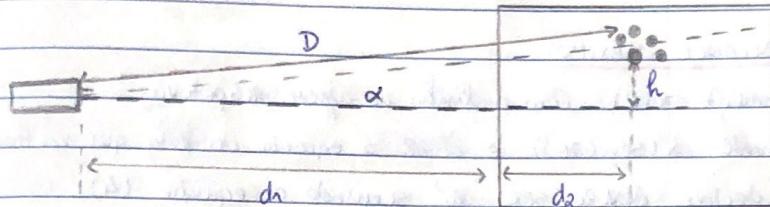


(3)



→ 1 e 2 têm ângulos (\neq) e posições de embate (\equiv)!

(4)



O desvio α vai resultar num alcance $x = D \neq d_1 + d_2$

→ PROCEDIMENTO EXPERIMENTAL:

• PREPARAÇÃO:

1. Montar o esquema (1) ajustando o ângulo de lançamento para $\theta = 10^\circ$.
2. Alinhar o lançador e o alvo de embate (esquema (2)).
3. Disparar uma vez uma esfera para localizar o ponto de embate.
(Segurar o disparador com a mão esquerda e puxar o cordel, para disparar, com a mão direita - de modo a evitar desvios /deslocamentos)
4. Colocar a superfície de embate de forma a maximizar a posição escalhada para embates de diferentes ângulos.

5. Fixar nesta posição a folha de papel milimétrico e alinhá-la com os bordos da mesa. Colocar sobre esta a folha de papel químico para marcar.

↳ (com a face impressora virada para baixo)

6. Marcar na folha um ponto de referência para medir a posição do impacto da direção perpendicular.

• DETERMINAÇÃO DO VALOR DA VELOCIDADE INICIAL DA ESFERA:

1. Executar os lançamentos necessários e as correspondentes medições
 - Verificar se entre o início e o fim dos lançamentos não houve alteração do ângulo
 - Medir a distância $x = d_1 + d_2$ entre o ponto de lançamento e o ponto de impacto.
 - Levar em conta a posição na direção perpendicular à distância ao lançador (h)

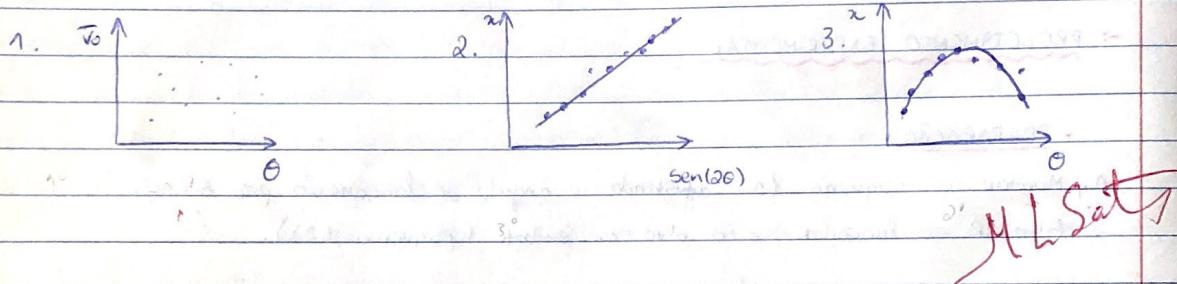
$$\hookrightarrow x = D \neq d_1 + d_2$$

2. Determinar $\bar{v}_0 \pm u(\bar{v}_0)$ para cada ângulo estabelecido.
 3. Escolher a gama experimental e representar graficamente \bar{v}_0 em função de θ (com as barras de erro $\rightarrow u(v_0)$).

• DETERMINAÇÃO DO ALCANCE MÁXIMO:

1. Representar graficamente $x(\theta)$, com a linha de ajuste respetiva.
2. Representar graficamente $x(\sin(\theta))$ e obter a equação da reta que melhor se ajusta aos dados \rightarrow declive deverá ser v_0^2/g segundo a equação (4).

Os gráficos finais ~~deverão ser~~ deverão ser dos tipos seguintes:



→ EXPRESSÕES:

Tendo em conta que $n = dn + da$, temos que:

$$\begin{aligned} u(n) &= \sqrt{\left(\frac{\partial n}{\partial dn}\right)^2 \times u^2(dn) + \left(\frac{\partial n}{\partial da}\right)^2 \times u^2(da)} = \sqrt{u^2(dn) + u^2(da)} \\ &= \sqrt{(0,0005)^2 + (0,0005)^2} = \pm 0,0007 \text{ m} \quad (\text{ver dados da tabela (3)}) \end{aligned}$$

$$u(\theta) = \pm 0,5^\circ = \frac{0,5 \times \pi}{180} = 0,009 \text{ Rad}$$

$$\bar{n} = \left(\sum_{i=1}^5 n_i \right) \div 5 \rightarrow u(\bar{n}) = \frac{u_{\text{amostra}} \times 2}{\sqrt{5}}$$

$$\bar{v}_0 = \sqrt{\frac{g \bar{n}}{\sin(\theta)}} \quad (\text{equação (3)}) \rightarrow u(\bar{v}_0) = \sqrt{\left(\frac{\partial \bar{v}_0}{\partial n}\right)^2 \times u^2(\bar{n}) + \left(\frac{\partial \bar{v}_0}{\partial \theta}\right)^2 \times u^2(\theta)}$$

$$= \pm \sqrt{\frac{g}{4 \bar{n} \sin(\theta)} \times u^2(\bar{n}) + \frac{g \bar{n} \cos^2(\theta)}{\sin^3(\theta)} \times u^2(\theta)} \text{ m/s}$$

NOTAS DA AULA:

• Os valores obtidos para os ângulos de 10° , 20° , 30° e 80° foram muito inconstantes \rightarrow provavelmente não serão considerados na gama experimental

• As medições devem ser feitas da seguinte forma:

$$1^\circ - 45^\circ, 2^\circ - 40/50, 3^\circ - 35/55 \dots$$



Porquê? É mais prático (para mover a mesa...) e por causa do material em si.

• Alturas inicial + final \rightarrow 25,3 cm (medido com o esquadro)

\downarrow

Lançador

\downarrow

Mesa

ML So TS
w gráficos
MB

ANÁLISE DOS RESULTADOS:

$u(d_1)$ (m)	0,0005
$u(d_2)$ (m)	0,0005
$u(x)$ (m)	0,0007

	Ensaios	θ (Degree)										
		10	20	30	35	40	45	50	55	60	70	80
x (m)	1	0,8380	1,2980	1,9130	2,1010	2,2050	2,2950	2,2965	2,2040	2,0790	1,4969	0,816
	2	0,8730	1,3445	2,0115	2,0850	2,2390	2,3040	2,2360	2,1865	2,0530	1,5090	0,814
	3	0,8730	1,3540	1,8995	2,0950	2,2500	2,3430	2,3135	2,1890	2,0295	1,5160	0,807
	4	0,9200	1,3765	1,8980	2,0935	2,2410	2,3375	2,2800	2,2010	2,0545	1,5010	0,795
	5	0,8590	1,3700	1,8805	2,1110	2,2430	2,2775	2,2830	2,1925	1,9550	1,5195	0,772
\bar{x} (m)		0,873	1,349	1,921	2,097	2,236	2,311	2,282	2,195	2,034	1,508	0,801
$u(\bar{x})$ (m)		0,011	0,012	0,021	0,004	0,007	0,011	0,012	0,003	0,019	0,004	0,007
\bar{v}_0 (m/s)		5,00	4,54	4,66	4,68	4,718	4,761	4,77	4,79	4,80	4,80	4,79
$u(\bar{v}_0)$ (m/s)		0,10	0,07	0,08	0,01	0,023	0,036	0,04	0,01	0,07	0,02	0,07

Tabela 1: Dados recolhidos durante a experiência.

Posições finais do projétil para os diferentes ângulos e a média destas posições.

Incertezas destas médias.

Velocidades médias para cada ângulo e a respetiva incerteza.

Ensaios		θ (Degree)										
		10	20	30	35	40	45	50	55	60	70	80
1	d1	0,71	1,126	1,8860	1,9920	2,1710	2,23	2,23	1,9920	1,8790	1,4810	0,746
	d2	0,13	0,17	0,0270	0,1090	0,0340	0,06	0,07	0,2120	0,2000	0,0159	0,07
2	d1	0,71	1,126	1,8860	1,9920	2,1710	2,23	2,17	1,9920	1,8790	1,4810	0,746
	d2	0,16	0,22	0,1255	0,0930	0,0680	0,07	0,07	0,1945	0,1740	0,0280	0,068
3	d1	0,71	1,126	1,7520	1,9920	2,1710	2,23	2,17	1,9920	1,8790	1,4810	0,746
	d2	0,21	0,23	0,1475	0,1030	0,0790	0,1120	0,14	0,1970	0,1505	0,0350	0,061
4	d1	0,71	1,126	1,7520	1,9920	2,1710	2,23	2,17	1,9920	1,8790	1,4810	0,746
	d2	0,15	0,25	0,1460	0,1015	0,0700	0,1065	0,11	0,2090	0,1755	0,0200	0,049
5	d1	0,71	1,126	1,7520	1,9920	2,1710	2,23	2,17	1,9920	1,8790	1,4810	0,746
	d2	0,20	0,24	0,1285	0,119	0,0720	0,05	0,11	0,2005	0,0760	0,0385	0,026

Tabela 2: Várias medições de d1 e d2 para os diferentes ângulos.

- Avaliação da qualidade do lançador (objetivo (2)):

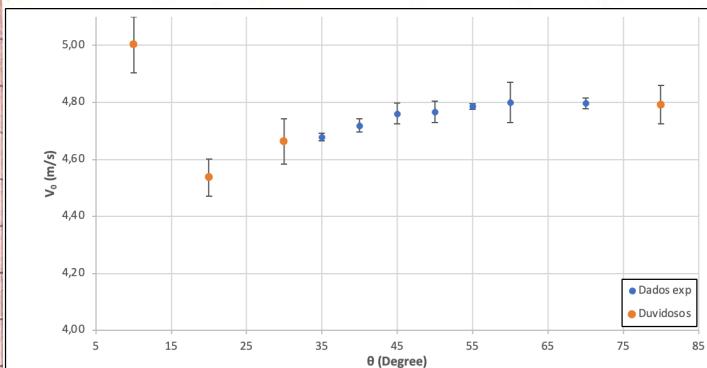


Gráfico 1: Velocidade média para cada ângulo.

- Pela análise do gráfico verificamos uma tendência de queda entre os valores 35° e 70° .
- Foram considerados como duvidosos os pontos correspondentes aos ângulos de 10° , 20° , 30° e 80° , tendo-se escolhido uma gama experimental para a análise, entre os valores de 35° e 70° .
- Vemos, também que o ponto de 35° foge um pouco à tendência da gama e, contudo foi decidido incluí-lo na análise uma vez que a sua incerteza era relativamente baixa.

De modo a efectivamente avaliar a qualidade do lançador teremos de calcular o desvio padrão de \bar{v}_0 , sem a contribuição dos pontos considerados anteriormente como duvidosos.

$$\text{Variação} = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1} \times 100 \rightarrow \text{Sem pontos duvidosos} = 2\%.$$

$$\rightarrow \text{com pontos duvidosos} = 6\%.$$

Calculando a média de todos os \bar{v}_0 dos diferentes ângulos (excluindo os duvidosos) obtemos:

$$\bar{v}_{0\text{MED}} = 4,76 \text{ m/s}$$

$$\downarrow$$

$$u(\bar{v}_{0\text{MED}}) = \pm 0,02 \text{ m/s}$$

$$\left. \right] \bar{v}_{0\text{MED}} = (4,76 \pm 0,02) \text{ m/s}$$

Como podemos verificar, o lançador apresenta um variação inferior a 8%, tal como referido no protocolo.

Podemos, assim confirmar que a velocidade se mantém aproximadamente constante na gama experimental selecionada ($30^\circ - 70^\circ$).

- Dependência do alcance do projétil com o ângulo de lançamento (com os níveis de lançamento e impacto iguais) (objetivo (1)):

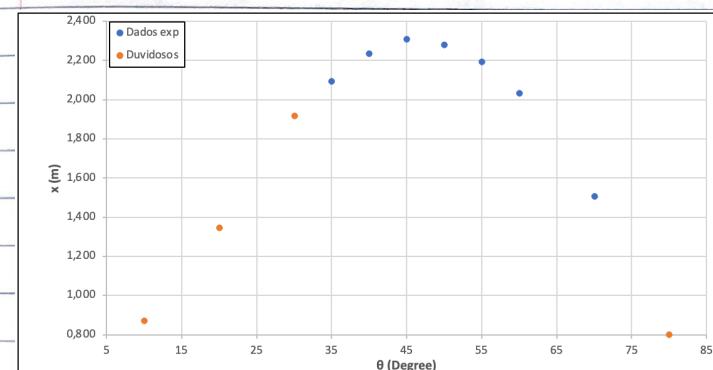


Gráfico 2: Gráfico da posição em função do ângulo de lançamento.

sen(2θ)	0,342	0,643	0,866	0,940	0,985	1,000	0,985	0,940	0,866	0,643	0,342
Ajuste x(sen2θ)	0,856	1,51	2,00	2,16	2,26	2,30	2,26	2,16	2,00	1,51	0,856
Resíduos	-0,016	0,17	0,08	0,07	0,03	-0,02	-0,02	-0,03	-0,03	0,01	0,056

Tabela 3: Tabela com dados de ajuste e resíduos, incluindo os pontos duvidosos.

Os dados experimentais aqui obtidos para os lançamentos são baseados na expressão teórica de que $x = \frac{v_0^2}{g} \sin(2\theta) + b$ (equação (4)) → considerar-se a ordenada na origem $b = 0$. Contudo, isto não acontece na realidade, pelo que na verdade $b = 0,11$, tendo-se obtido os seguintes parâmetros de ajuste:

Parâmetros de ajuste			
m	2,2	0,11	b
s_m	0,1	0,12	s_b
r^2	0,98	0,04	s_y

Tabela 3: Tabela com os parâmetros de ajuste.

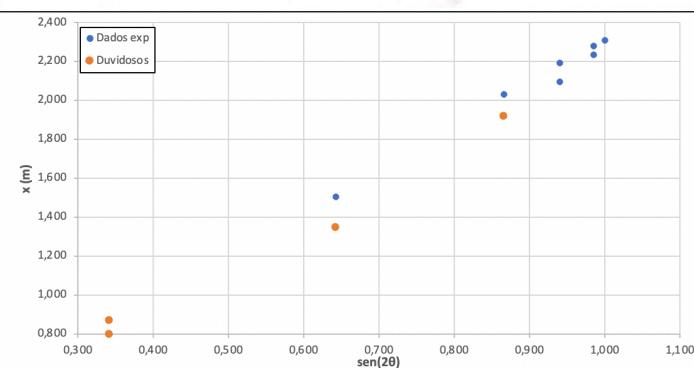


Gráfico 3: Gráfico da posição em função de $\sin(2\theta)$. Segundo a expressão teórica de x , considerando $\sin(2\theta)$ obtemos um ajuste com declive v_0^2/g .

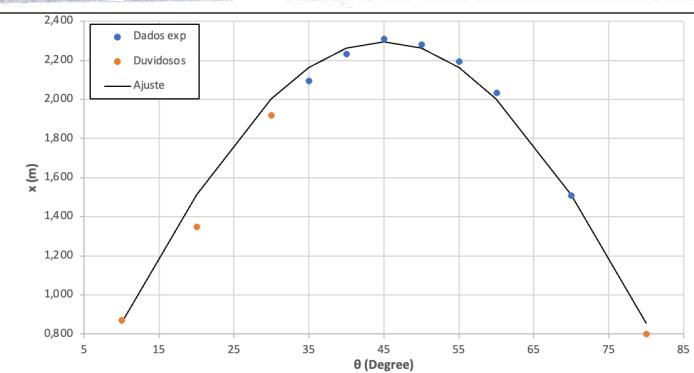


Gráfico 4: Gráfico da posição em função de θ . É de notar que, tal com esperado, os pontos considerados como duvidosos, na maioria fogem ao ajuste definido.

Sabemos pela informação da tabela (3) que $m = (2,2 \text{ m} \pm 0,5)\text{m}$
e também que $m = \frac{v_0^2}{g}$



Desta forma, é possível calcular v_0 de ajuste da seguinte forma:

$$m = \frac{v_0^2}{g} \quad (\Rightarrow v_0^2 = m \times g \quad (\Rightarrow v_0 = \sqrt{m \times g}) = 4,632 \text{ m/s})$$

$$\Delta(v_0 \text{ ajuste}) = \sqrt{\frac{980 \times 2 \times m^2(\text{m})}{4 \text{ m}}} \times 0,01 = \pm 0,005 \text{ m/s}$$

$$\therefore v_0 \text{ ajuste} = (4,632 \pm 0,005) \text{ m/s}$$

Tomando este valor como o mais correto e próximo do real

Vamos ter um erro de:

$$\text{ERRO} (\%) = \left| \frac{v_0 \text{ ajuste} - v_0 \text{ MED}}{v_0 \text{ MED}} \right| \times 100 = 3\%$$

$v_0 \text{ ajuste}$

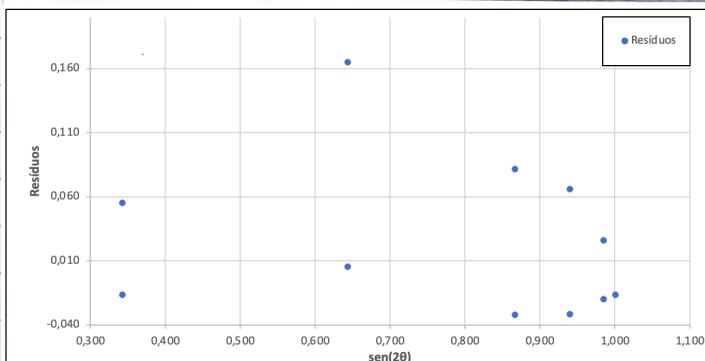


Gráfico 5: Gráfico dos resíduos obtidos a partir dos dados experimentais.

O lançador não tem a capacidade de manter uma velocidade inicial constante nos vários lançamentos, facto que se verifica pela análise deste gráfico. Vemos também uma pequena semelhança entre o gráfico do gráfico 3 e 5.

→ DISCUSSÃO E CONCLUSÕES:

Podemos verificar que cíngulos mais pequenos, o atrito sofrido durante o lançamento é maior, pelo que, neste caso, a esfera é lançada com menos velocidade. A massa da esfera também poderá ter algum efeito neste facto.

Por sua vez, para ângulos maiores, o lançamento é quase feito na vertical, pelo que o atrito será menor e a velocidade maior.

Devemos, no entanto, ter também em atenção outros erros experimentais, como o facto de o lançador poder ~~deslocar-se~~ mover-se ligeiramente, alterando o ângulo de lançamento predefinido, contribuindo para o erro da variação da velocidade.

Foram obtidos, assim, os seguintes valores:

$$\cdot v_0 \text{ MED} = (4,76 \pm 0,02) \text{ m/s}$$

$$\cdot v_0 \text{ ajuste} = (4,632 \pm 0,005) \text{ m/s}$$

$$\cdot n = 2,2 \times \sin(\alpha\theta) + b \rightarrow m = 2,2 = \frac{v_0^2}{g}$$

↓

Mostre a dependência do alcance do projétil com o ângulo de lançamento

→ Cálculo do Alcance Máximo (n_{\max}):

Para $n = m \sin(\alpha\theta) \rightarrow n$ é máximo quando $\sin(\alpha\theta) = 1$, ou seja, quando $\theta = 45^\circ$

$$n_{\max} = m \times 1 = 2,2 \text{ m} \rightarrow \text{Valor considerado como o mais próximo do real.}$$

Valor experimental:

$$n_{\max} = n(45^\circ) = 2,311 \text{ m} \rightarrow \text{Pela análise da tabela (1).}$$

$$\text{ERRO (\%)} = \frac{|x_{\text{teórico}} - x_{\text{exp}}|}{x_{\text{teórico}}} \times 100 = 5\%$$

$x_{\text{teórico}}$

→ O lançador utilizado nesta experiência pode ser considerado de confiança, uma vez que foi obtido um valor de variação da velocidade inicial de apenas 2%. (utilizando apenas a gama experimental), ou seja, inferior a 8%, tal como sugerido no protocolo.

→ Verificamos, também, a dependência do alcance com o ângulo de lançamento, como vemos no gráfico (2).

→ Vemos, por fim, que tal como o gráfico (2) sugere, o alcance máximo do projétil ocorre para $\theta = 45^\circ$, e que existe, tal como esperado, alguma simetria para os restantes valores ($n(40^\circ) \approx n(60^\circ)$, $n(35^\circ) \approx n(55^\circ)$, ...).