

8/06/2024

Estudo de circuitos resistência-condensador

Tiago Catarino, Grupo 8, PL7, 202406809

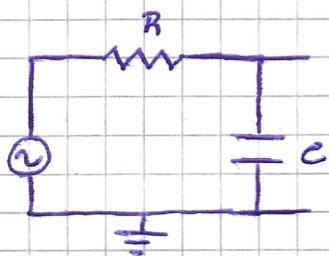
Objetivos

- Estudar a influência que um circuito RC tem em uma onda sinusoidal de diferentes frequências.
- Familiarizar com o uso de circuitos eletrônicos e osciloscópio como utensílios para experiências.

Procedimento experimental

- ~~Passo 1~~ Começar por ligar o gerador de onda sinusoidal à entrada do filtro RC* e em paralelo ao primeiro canal do osciloscópio, e ligar a saída do filtro RC ao segundo canal do osciloscópio.
* passo - baixo
 - Escolher as escalas adequadas no osciloscópio para uma boa visualização das ondas.
 - Escolher uma frequência de onda de 30 Hz e medir a voltagem pico-a-pico das duas ondas no osciloscópio.
 - Medir o tempo de diferença entre as duas ondas t_d (também no osciloscópio), de forma a calcular a diferença de fase usando a equação $\Delta\phi = 2\pi f t_d$ ($f \rightarrow$ frequência da onda do gerador).
 - Organizar uma tabela com os dados obtidos e acrescentar na tabela o valor $A_c = \frac{V_{op}}{V_{so}} = \frac{\Delta V_{op}}{\Delta V_{so}}$. (ΔV_{op} e ΔV_{so} são as voltagens pico-a-pico da onda de entrada e de saída)
 - Medir os valores da resistência e do condensador que foram usados.
- ~~Materiais e métodos~~
- Repetir as medições feitas no osciloscópio para diferentes frequências.
 - Repetir a obtenção de dados para um filtro RC passo - alto.

Circuito RC passa-baixo



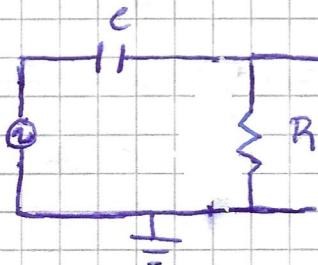
Usando um multímetro:

$$R = 3230 \Omega \pm 10 \Omega$$

~~$$C = \dots$$~~

$$86.7 \mu F \pm .1 mF$$

Circuito RC passa-alto



$$R = 3230 \Omega \pm 10 \Omega$$

~~$$C = \dots$$~~

$$88.6 \mu F \pm .1 mF$$

~~Testes de dados~~

Analise de dados - Filtro passa-baixo

Tabela de dados:

f(Hz)	Log[f(Hz)]	2V _{g0} (V)	2V _{c0} (V)	A _c	t _d (us)	α _c (rad)
30	3.401197	14.6	14.6	1	360	0.06786
50	3.912023	14.6	14.4	0.98630137	350	0.10996
100	4.60517	14.6	14.2	0.97260274	340	0.21363
150	5.010635	14.6	13.8	0.945205479	330	0.31102
160	5.075174	14.6	13.7	0.938356164	330	0.33175
200	5.298317	14.6	13.3	0.910958904	320	0.40212
250	5.521461	14.6	12.7	0.869863014	310	0.48695
300	5.703782	14.6	12.2	0.835616438	300	0.56549
400	5.991465	14.6	11	0.753424658	276	0.69366
500	6.214608	14.6	9.92	0.679452055	252	0.79168
750	6.620073	14.6	7.84	0.536986301	208	0.98018
1000	6.907755	14.6	6.56	0.449315068	180	1.13097
2000	7.600902	14.6	3.6	0.246575342	106	1.33204
5000	8.517193	14.6	1.68	0.115068493	48.8	1.5331
7500	8.922658	14.6	1.04	0.071232877	33.2	1.56451
10000	9.21034	14.6	0.784	0.05369863	25.2	1.58336
12500	9.433484	14.6	0.64	0.043835616	20.8	1.63363
15000	9.615805	14.6	0.536	0.036712329	17.6	1.65876
17000	9.740969	14.6	0.48	0.032876712	15.6	1.66663
19000	9.852194	14.6	0.432	0.029589041	14	1.67133

Cálculo teórico da frequência de corte (f_c)

Temos que tanto para o filtro passa-baixo como o passa-alto, a frequência de corte é dada por:

$$f_c = \frac{1}{2\pi RC}$$

E, quando os valores de R e C usados no circuito, obtemos que:

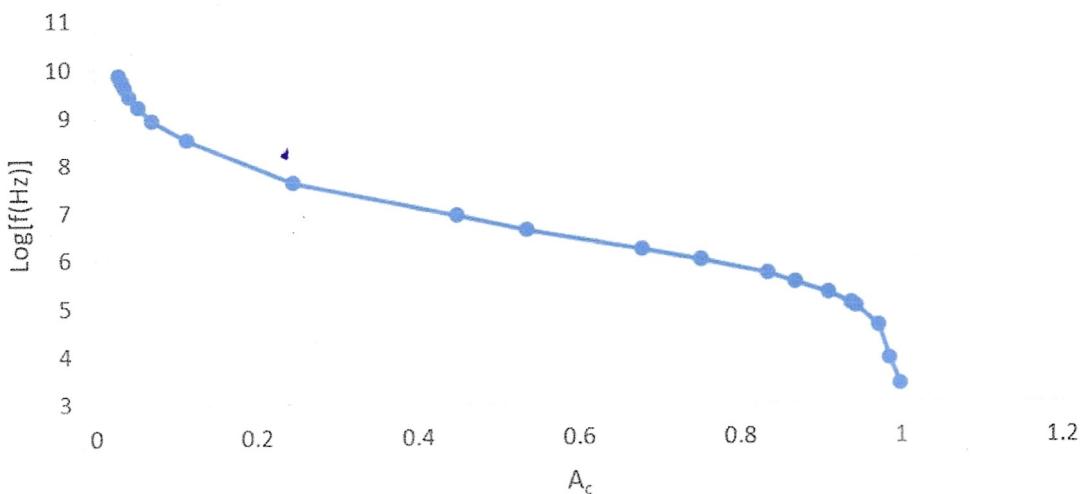
$$\left. \begin{array}{l} R = 3230 \Omega \pm 10 \Omega \\ C = 8,67 \times 10^{-8} F \pm 1 \times 10^{-10} F \end{array} \right\} f_c \approx 572 \text{ Hz} \pm 2 \text{ Hz}$$

$$\left[u(f_c) = \sqrt{\left(-\left(\frac{\pi}{2\pi RC} \times 2\pi f_c \right) \times u(R) \right)^2 + \left(-\left(\frac{\pi}{2\pi RC} \times 2\pi f_c \right) \times u(C) \right)^2} \right]$$

Determinação experimental de f_c

Comecemos por analisar o gráfico A_c versus $\log(f)$:

A_c vs $\log[f(\text{Hz})]$



Podemos observar que os dados estão como esperado e não existe nenhuma anomalia nas medições.

Para calcular f_c experimentalmente vamos usar o método:

Para A_e temos que:

$$A_e = \frac{1}{\sqrt{1 + (2\pi f R E)^2}}$$

E reestruturando a equação temos:

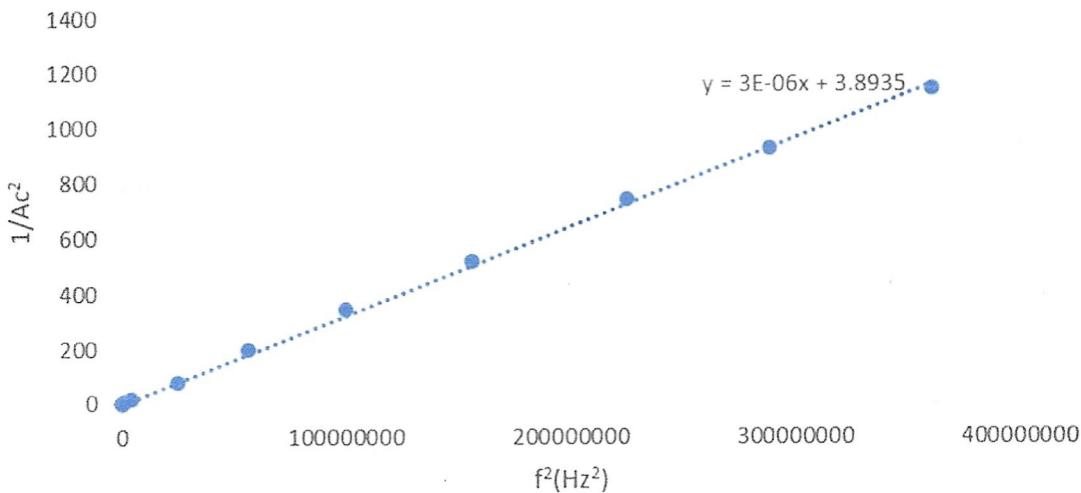
$$\Leftrightarrow \frac{1}{A_e} = \sqrt{1 + (2\pi f R E)^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{A_e^2} = 1 + (2\pi f R E)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{A_e^2} = \left(\frac{1}{f_c^2}\right) f^2 + 1$$
$$\underbrace{\frac{1}{A_e^2}}_y = \underbrace{\left(\frac{1}{f_c^2}\right)}_m \cdot \underbrace{f^2}_x + b$$

Queremos representarmos o gráfico f^2 vs $\frac{1}{A_e^2}$ e fizemos uma regressão linear, obtemos apontando o declive o valor de $\frac{1}{f_c^2}$.

f^2 vs $1/A_e^2$



Regressão Linear

m	3.2077E-06	3.893464966	b
u(m)	2.0539E-08	2.52677817	u(b)

$\begin{cases} b = 1 \text{ está dentro do} \\ \text{intervalo de incerteza} \end{cases}$

Então obtemos f_c experimentalmente:

$$f_c = \frac{1}{\sqrt{3.2077 \times 10^{-6}}} \approx 558 \text{ Hz}$$

Que faz um erro percentual de 2,45% com o valor teórico.

Resultado muito satisfatório!

Para testar a validade do resultado teórico podemos calcular o A_c correspondente (teórico) a f_c e representar esse valor como uma abscissaria num gráfico f vs A_c para mostrar que corresponde ao valor de f_c obtida teoricamente:

$$A_c = \frac{1}{\sqrt{1 + (2\pi f_c R C)^2}}, \quad f_c = \frac{1}{2\pi R C}$$

$$\Leftrightarrow A_c = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{2\pi R C}{2\pi R C}\right)^2}}$$

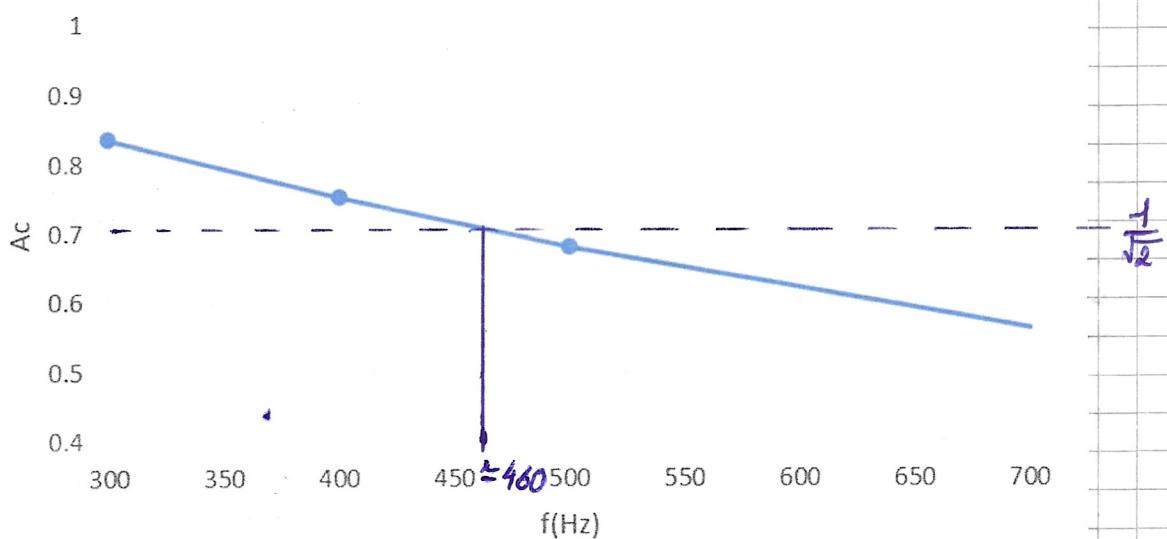
$$\Leftrightarrow A_c = \frac{1}{\sqrt{1 + 1}}$$

$$\Leftrightarrow A_c = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ para } f = f_c$$

$$A_c = \left[\frac{V}{V} \right] = [1]$$

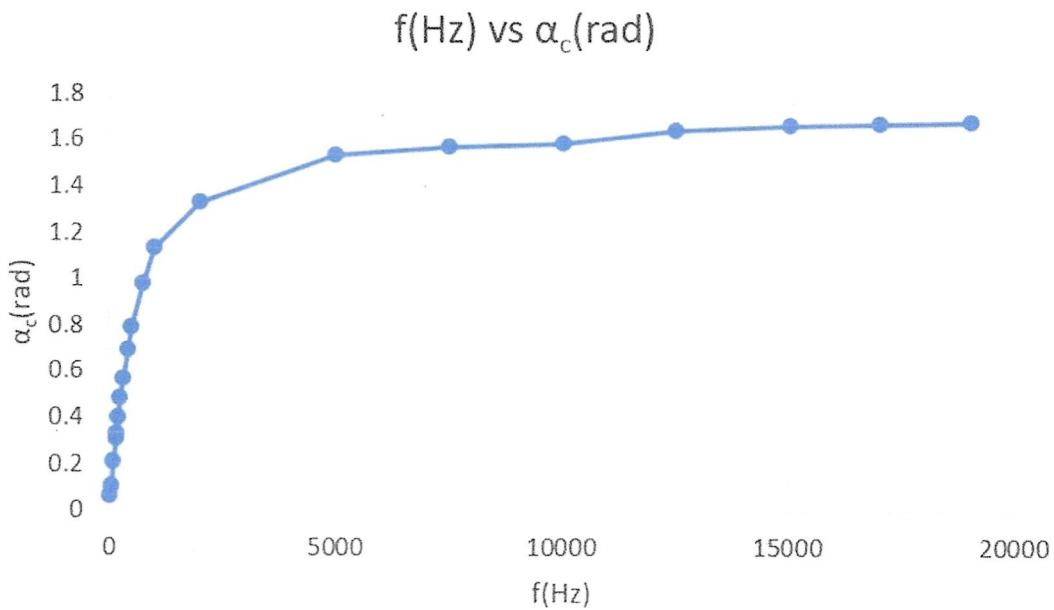
adimensional

~~Resposta~~ f (Hz) vs A_c



Embora 460 seja um valor perto do teórico, quando visto na escala de medidas $[20 - 20 \times 10^3]$ Hz, não considero um resultado satisfatório tendo que faz um erro percentual de $\approx 20\%$ com o valor teórico, então terei de adaptar um método diferente de validar o resultado.

Para isso irei considerar o gráfico f vs α_c (resposta de fase):



E temos para α_c que:

$$\alpha_c = \arctan\left(\frac{1}{2\pi f R C}\right) - \frac{\pi}{2}$$

Tal como com α_e , podemos calcular o valor teórico de α_c correspondente a f_e e traçar uma assimetria horizontal no gráfico f vs α_c para mostrar que corresponde ao valor teórico de f_e .

$$\alpha_c = \arctan\left(\frac{1}{2\pi f_e R C}\right) - \frac{\pi}{2}, \quad f_e = \frac{1}{2\pi R C}$$

$$\Leftrightarrow \alpha_c = \arctan\left(\frac{2\pi R C}{2\pi R C}\right) - \frac{\pi}{2}$$

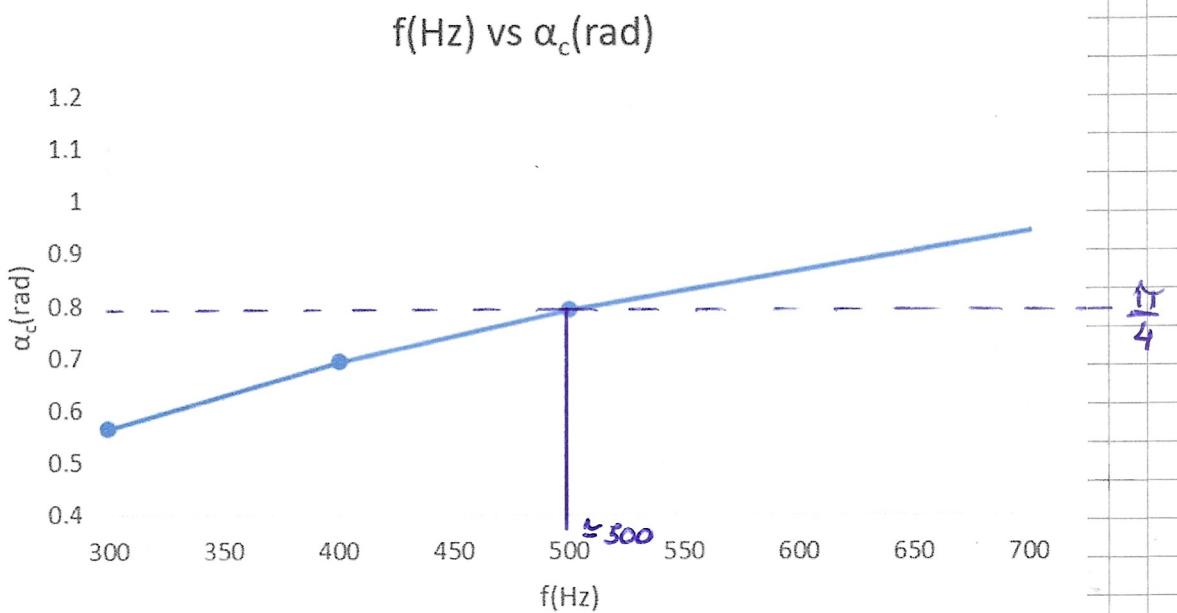
$$\Leftrightarrow \alpha_c = \arctan(1) - \frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow \alpha_c = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow \alpha_c = -\frac{\pi}{4} \text{ para } f = f_e$$

Nota! Podemos reparar que os valores de α_c são todos positivos não havendo qualquer correspondência a $\alpha_c = -\frac{\pi}{4}$, isto é explicado por as medições de t_d (tempo de atraso) foram ~~fixas~~ anotadas

como valores positivos, sendo que devem ser negativos para $t_d = t_{\text{final entrada}} - t_{\text{final saída}} \quad (\text{ } t_d < 0)$, felizmente a volta a este problema é apenas considerar $\alpha_c = \frac{\pi}{4}$ para $f = f_e$.



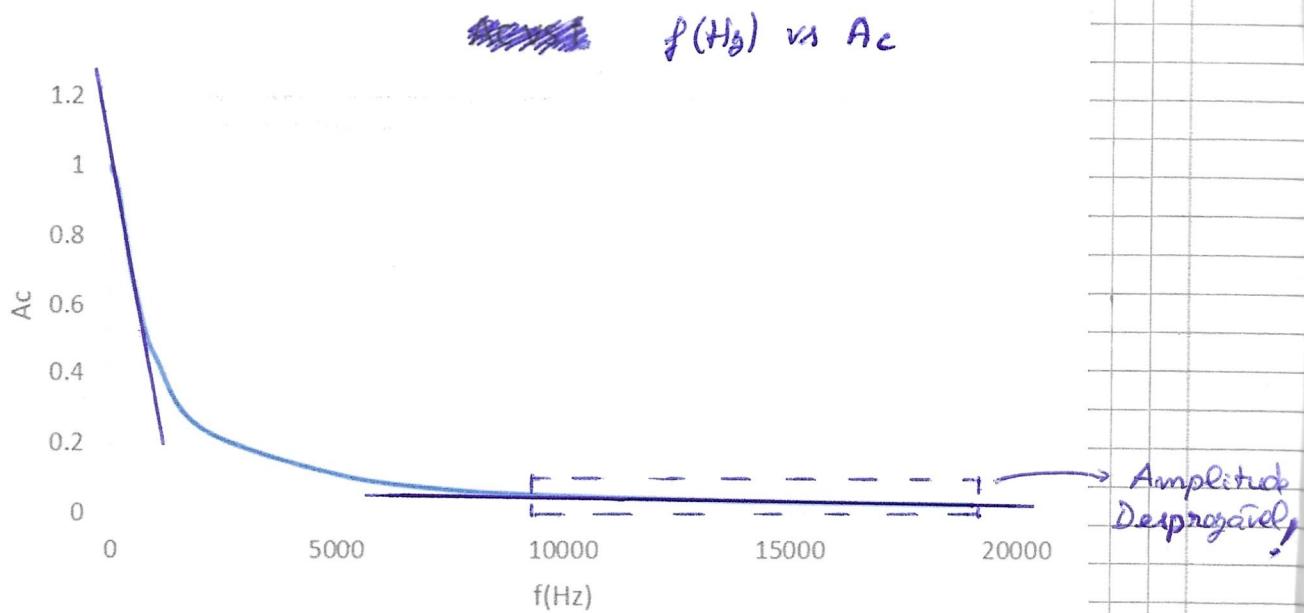
Embora o valor $f_e = 500\text{Hz}$ ainda represente um erro percentual de 12,6% com o valor teórico, é evidentemente um melhor resultado que o obtido na metade anterior.

Refletindo nos resultados obtidos, o facto de a análise direta dos gráficos não dar resultados muito satisfatórios poderia ter sido resolvido tiverem sido tiradas mais medições, o que resultava em gráficos mais completos.

Análise do comportamento de A_c

Visualizando o gráfico f vs A_c podemos fazer sentido dos resultados tendo em mente que a funcionalidade de f um filtro passa-baixo é cortar os sinais de frequência alta e deixar passar apenas os de frequência baixa, tal como diz o nome.

[Nota! A_c é a razão entre a amplitude de saída e de entrada.]



Poncebemos pelo gráfico que à medida que a frequência aumenta e chega a tentativa de alta frequência (KHz) (caixa a tracejado) a amplitude do sinal é tão pequena que pode ser considerada inexistente, o que confirma que o circuito está a fazer a sua função.

Podemos também reparar que quando $A_c \approx 0$ e $A_c \approx 1$, o comportamento gráfico dos pontos é (aproximadamente) a de uma reta.

Resposta de todos os filtros passa-alta

Análise de dados - filtro passo-alto

Tabela de dados

f(Hz)	Ln[f(Hz)]	2V _{g0} (V)	2V _{r0} (V)	A _r	t _d (ms)	α _r (rad)
30	3.401197	14.6	0.976	0.06685	25.4	4.78779
50	3.912023	14.6	1.58	0.10822	15.4	4.83805
100	4.60517	14.6	3.12	0.2137	7.92	4.97628
150	5.010635	14.6	4.56	0.31233	5.36	5.05168
160	5.075174	14.6	4.8	0.32877	5.08	5.10697
200	5.298317	14.6	5.84	0.4	4.12	5.17734
250	5.521461	14.6	6.88	0.47123	3.32	5.21504
300	5.703782	14.6	7.84	0.53699	2.78	5.24018
400	5.991465	14.6	9.44	0.64658	2.14	5.37841
500	6.214608	14.6	10.5	0.71918	1.76	5.5292
750	6.620073	14.6	12.2	0.83562	1.21	5.70199
1000	6.907755	14.6	12.9	0.88356	0.93	5.84336
2000	7.600902	14.6	14.2	0.9726	0.48	6.03186
5000	8.517193	14.6	14.6	1	0.197	6.18894
7500	8.922658	14.6	14.6	1	0.132	6.22035
10000	9.21034	14.6	14.6	1	0.1	6.28319
12500	9.433484	14.6	14.6	1	0.0796	6.25177
15000	9.615805	14.6	14.6	1	0.0664	6.25805
17000	9.740969	14.6	14.6	1	0.0584	6.23795
19000	9.852194	14.6	14.6	1	0.0524	6.25554

Nota! apartir da frequência 3000Hz a amplitude máxima é atingida, sendo que A_r e α_r estabelecem mesmos valores, podemos ignorá-los para ser irrelevantes para a análise.

Nova Tabela de dados

f(Hz)	Ln[f(Hz)]	2V _{g0} (V)	2V _{r0} (V)	A _r	t _d (ms)	α _r (rad)
30	3.401197	14.6	0.976	0.06685	25.4	4.78779
50	3.912023	14.6	1.58	0.10822	15.4	4.83805
100	4.60517	14.6	3.12	0.2137	7.92	4.97628
150	5.010635	14.6	4.56	0.31233	5.36	5.05168
160	5.075174	14.6	4.8	0.32877	5.08	5.10697
200	5.298317	14.6	5.84	0.4	4.12	5.17734
250	5.521461	14.6	6.88	0.47123	3.32	5.21504
300	5.703782	14.6	7.84	0.53699	2.78	5.24018
400	5.991465	14.6	9.44	0.64658	2.14	5.37841
500	6.214608	14.6	10.5	0.71918	1.76	5.5292
750	6.620073	14.6	12.2	0.83562	1.21	5.70199
1000	6.907755	14.6	12.9	0.88356	0.93	5.84336
2000	7.600902	14.6	14.2	0.9726	0.48	6.03186
5000	8.517193	14.6	14.6	1	0.197	6.18894

y podo re-dar
Isto explica
da recomendação
no protótipo de
que uma voltagem
pico-a-pico de
10 V ten sido
ignorada.

Cálculo teórico da frequência de corte (f_c)

O cálculo de f_c é feito da mesma maneira que foi feito para o filtro passo-baixo, sendo que a equação é a mesma para ambos os filtros.

$$f_c = \frac{1}{2\pi RC}$$

E, quando os valores de R e C usados no circuito, obtemos que:

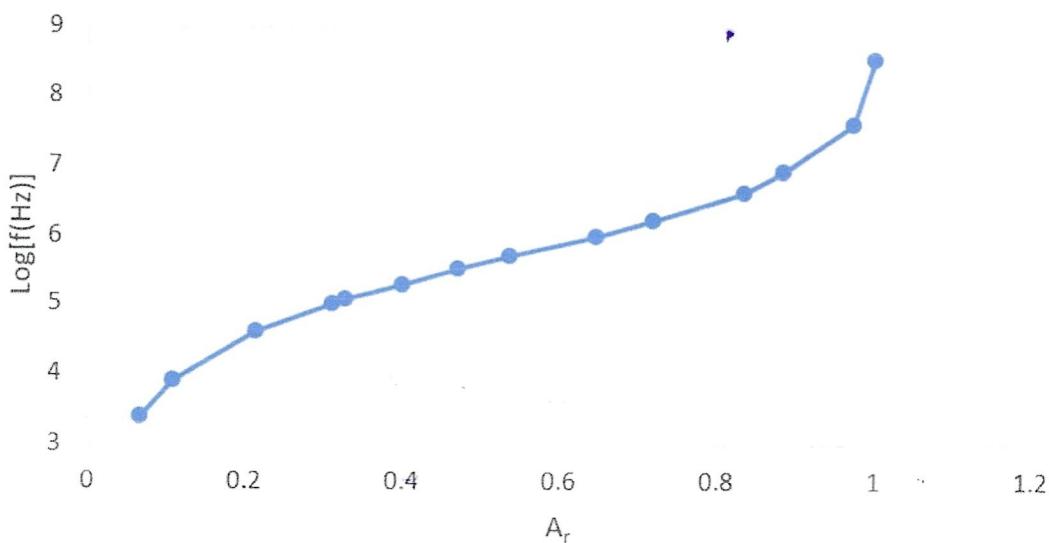
$$\left. \begin{array}{l} R = 3230 \Omega \pm 10 \Omega \\ C = 8,86 \times 10^{-8} F \pm 1 \times 10^{-10} F \end{array} \right\} f_c \approx 556 \text{ Hz} \pm 2 \text{ Hz}$$

$$[u(f_c) = \sqrt{\left(-\left(\frac{\pi}{(2\pi RC)^2} \times 2 \times C\right) \times u(R)\right)^2 + \left(-\left(\frac{\pi}{(2\pi RC)^2} \times 2 \times R\right) \times u(C)\right)^2}]$$

Determinação experimental de f_c

Conseguimos para analisar o gráfico A_r vs $\log(f)$:

A_r vs $\log(f \text{ (Hz)})$



Podemos observar que os dados estão como esperado e não existe nenhuma anomalia nas medições.

Procedemos então ao cálculo experimental de f_c :

Para A_n temos que:

$$A_n = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{2\pi f_c R C}\right)^2}}$$

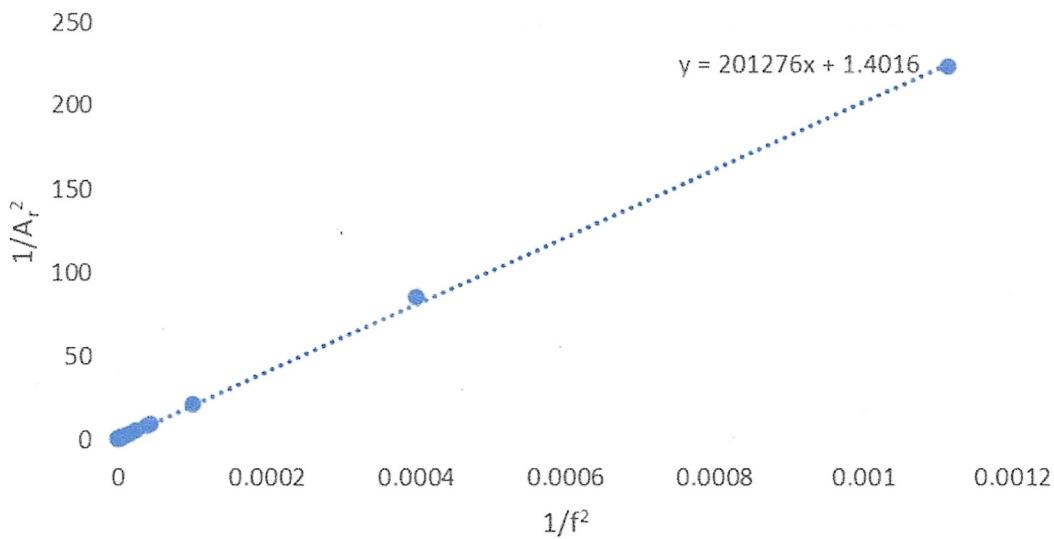
$$(1) \frac{1}{A_n^2} = \frac{1}{(2\pi f_c R C)^2} + 1$$

$$\text{G) } \underbrace{\frac{f}{A_r^2}}_{A_r} = \underbrace{(f_e)^2}_{\gamma} \underbrace{\left(\frac{1}{p^2}\right)}_{\text{constante}} + f$$

$$\gamma = m \times 10 + b$$

Ou seja, se representarmos o gráfico $\frac{1}{f^2}$ vs $\frac{1}{A_r^2}$ e fizermos uma regressão linear, obtemos f_e apontando o declive e o valor de $(f_e)^2$.

$1/f^2$ vs $1/A_r^2$



Regressão Linear

m	201276	1.40157	b
u(m)	1011.68	0.32096	u(b)

$b = f$ não está no intervalo
de incerteza com 8%
(cerca percentual)

E então obtemos f_e experimentalmente:

$$f_e = \sqrt{201276} \approx 449 \text{ Hz}$$

Que faz um erro percentual de 19% com o valor teórico. Este resultado não pode ser considerado satisfatório e a razão pela qual temos um erro tão grande pode se dar pela escassez de pontos para o trabalho.

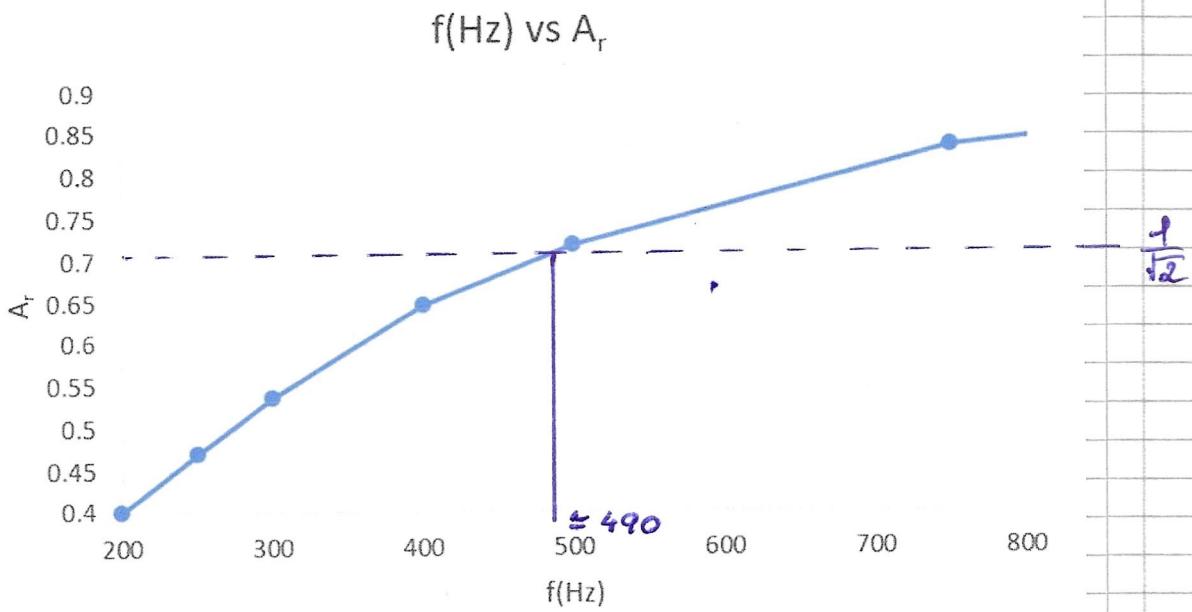
Para testar a validade do resultado teórico podemos usar os mesmos métodos para com o filtro passa-baixo.

Comecemos por considerar o comportamento de A_r :

$$A_n = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{2\pi f_e R C}\right)^2}}, \quad f_e = \frac{1}{2\pi R C}$$

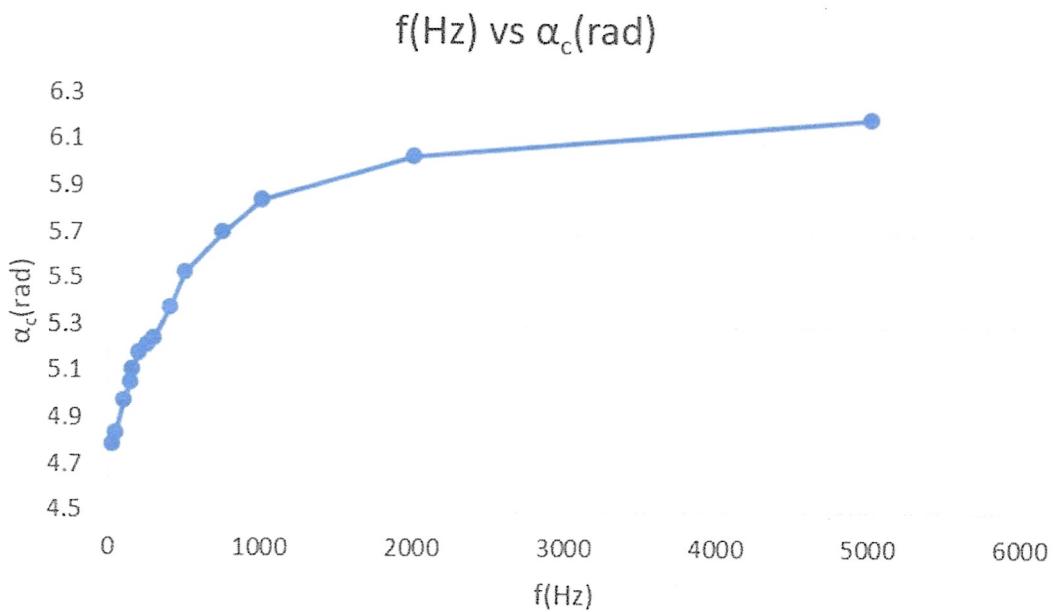
$$\text{G) } A_n = \frac{1}{\sqrt{1+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{para } f = f_e$$

Tendo o valor de A_n correspondente a f_e , podemos representar uma assimetria no gráfico f vs A_n com o valor $A_n = \frac{1}{\sqrt{2}}$ e verificar que corresponde ao valor de f_e obtido teoricamente.



Observação: o valor 490 faz um erro percentual de 12% com o valor teórico que é consideravelmente melhor do que os 19% obtidos anteriormente.

Tal como foi feito na análise do filtro passa-alta, podemos também considerar o gráfico f vs X_n :



Para α_n temos que:

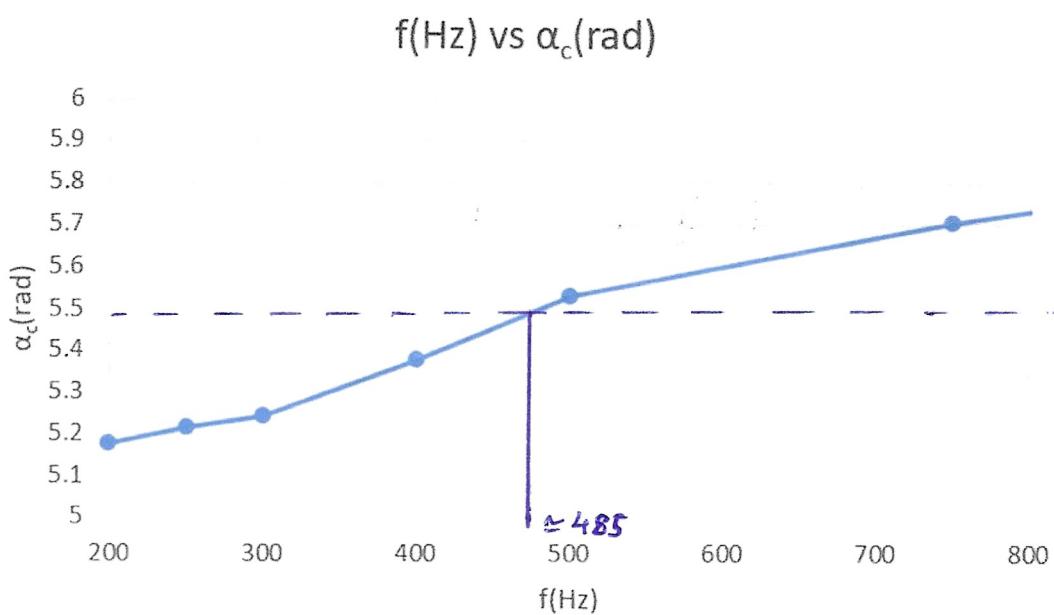
$$\alpha_n = -\arctan(2\pi f_c R C) + \frac{\pi}{2}, \quad f_c = \frac{1}{2\pi R C}$$

$$\Leftrightarrow -\alpha_n = \arctan(-1) + \frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow -\alpha_n - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \quad \text{para } f = f_c$$

O valor do conjunto α_n que corresponde ao mesmo intervalo de medições é $\alpha_n = -\frac{3\pi}{4}$.

Nota! Podemos reparar que os valores de α_n que temos, não todos positivos nem qualquer correspondência a $\alpha_n = -\frac{3\pi}{4}$; a razão pela qual isto acontece é a mesma explicada na análise do filtro passa-baixo, e tal como foi feito nessa análise, vamos considerar $\alpha_n = \frac{7\pi}{4}$.



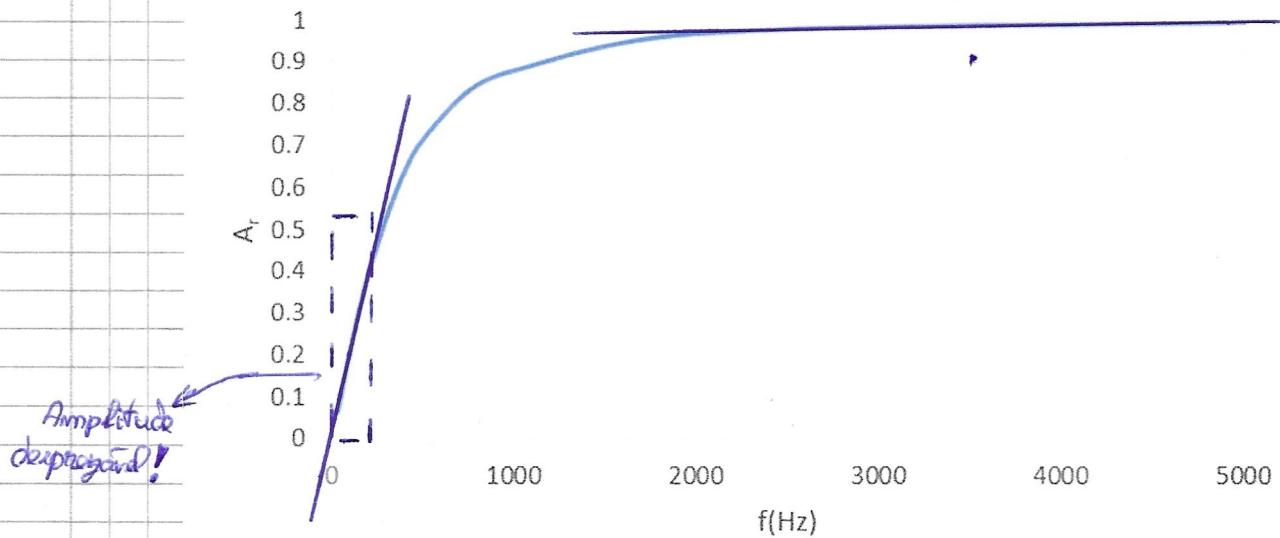
O valor 485 faz um erro percentual ~~de~~ de 13% que é praticamente o mesmo que foi obtido com o gráfico de A_n .

Análise do comportamento de A_n

Visualizando o gráfico f vs A_n , podemos fazer sentido do resultado tendo em mente que a funcionalidade de um filtro pass-alto é cortar os sinal de frequência baixa deixar passar apenas os ~~sinal~~ de frequência alta, tal como diz o nome.

[Nota! A_n é a razão entre a amplitude de saída e entrada]

$f(\text{Hz})$ vs A_n



Podemos observar que à medida que a frequência diminui para à volta do $0 \rightarrow 200 \text{ Hz}$, a amplitude do sinal de saída é tão pequena que pode ser considerada inexistente, mas para maiores frequências o sinal de saída é de mesma amplitude que o de entrada, e então concluímos que o circuito está a funcionar como esperado.

Podemos também reparar que quando $A_n = 0$ e $A_n = 1$, o comportamento gráfico dos pontos é (aproximadamente) o de uma reta.

Conclusão

Embora os resultados comportaram-se como previsto, os cálculos experimentais de fe mostraram resultados muitos , isto pode se dar à execução do ponto, principalmente na análise do filtro para -altas visto que tivemos de ignorar medições que seriam irrelevantes à análise de dados.

Esta experiência foi uma oportunidade de apreciar como um circuito de tanta simplicidade consegue ter tanta utilidade e considerá-la bem sucedida.