Trabalho 6A

Estudo de um Movimento Harmónico Simples - Determinação da Constante Elástica de uma Mola

1. Objetivos

- Determinação do valor da constante elástica de uma mola pelo método estático e pelo método dinâmico
- Estudo das condições de validade da lei de Hooke para o sistema massa-mola estático
- Estudo da dinâmica de um sistema massa-mola nas condições em que o movimento é harmónico simples sendo a mola homogênea.

2. Método Experimental

Antes de começar recorde que deve incluir nos seus registos as incertezas e as unidades (SI) para cada grandeza medida

2.1 Método estático

1. Retire cuidadosamente a mola do seu suporte e meça a sua massa com uma balança adequada;

2. Meça cada uma das massas m_i que vai colocar no prato e ordene-as por ordem crescente $(m_{i+1} > m_i)$;

3. Meça a massa do prato, m_{prato};

4. Coloque cuidadosamente a mola no seu suporte e coloque o prato na sua extremidade;

5. Leia a posição extrema do prato L_0 (sem colocar massa m_i no prato);

6. Inicie o processo de carga, isto é, coloque a massa mais pequena (m_i) e leia a posição L_i relativa à posição extrema do prato. De seguida, coloque também a massa m_{i+1} e leia a posição L_{i+1};

7. Distribua o mais uniformemente as massas m_i pela base do prato; utilize um esquadro para reduzir os erros de paralaxe (note que, i) o prato deve estar estático quando fizer a medição de cada L_i, e ii) não retirar a massa anterior antes de colocar a nova);

8. Registe os dados obtidos na operação 6 numa tabela como a seguinte, preenchendo as 2 colunas da esquerda;

Tabela I – método estático

m_i	$L_{i\ carga}$	$L_{i\ descarga}$
0	L_0	L'_0
…	…	…

9. Inicie o processo de descarga, isto é, retire cuidadosamente as massas m_i por ordem inversa da que colocou na operação da carga e leia o L_i respetivo;

10. Registe os dados obtidos na operação 8 preenchendo a última coluna da Tabela I (não esqueça que a vai preencher no sentido decrescente das massas m_i);

11. Traçando o gráfico de m_i versus x:

- determine K e a respetiva incerteza ΔK em unidades SI (ver secção *Introdução Teórica*);
- Determine a ordenada na origem da dependência linear observada e indique qual o seu significado físico;
- Conclua se F é do tipo elástico justificando.

2. 2. Método dinâmico

1. Coloque a massa mais pequena (m_i) no prato e leia a posição L_i relativa à sua posição extrema; distenda-a cuidadosamente de cerca de 2 cm e largue o sistema sem velocidade inicial; garanta que a oscilação ocorre ao longo do eixo da mola e evite efeitos de torção; meça o tempo de 20 oscilações completas, isto é, $20T\ (m_i)$;

2. De seguida, coloque também m_{i+1} e proceda como no ponto anterior medindo $20T\ (m_{i+1})$; notar que não se retira a massa anterior antes de colocar a nova;

3. Preencher uma tabela como a seguinte

Tabela II – método dinâmico

m_i	*20T*
..	..
..	..

4. Traçando o gráfico de $T^2(m_i)$ versus m_i:

- Determine K e a respetiva incerteza ΔK em unidades SI;
- Determine a ordenada na origem da dependência linear observada e indique qual o seu significado físico;
- Conclua se a Eq.(11) da secção *Introdução Teórica* é válida, justificando;
- Compare os valores de K determinados para cada método e discuta os resultados (note que não existe valor de referência para K para nenhum dos métodos).

3 – Introdução Teórica

O movimento harmónico simples (MHS) é o movimento mais fundamental dos movimentos oscilatórios. Ocorre quando um corpo de massa M é deslocado de x da sua posição de equilíbrio (x_0) sob ação de uma força $\boldsymbol{F}$ restauradora, proporcional ao deslocamento e orientada no sentido contrário a este[1]. Um exemplo de MHS é o movimento oscilatório da extremidade livre de uma mola fixa sob ação de uma força $\boldsymbol{F}$ do tipo elástico que, de acordo com a lei de Hooke, se escreve como $\boldsymbol{F} = -K\boldsymbol{x}$, com K a constante elástica da mola. Neste trabalho vamos utilizar dois métodos para determinar K. No método estático a mola está estática e na vertical, tendo comprimento L_0. Depois de suspendermos a massa M, o sistema massa-mola distende-se de ΔL na vertical sob a ação da gravidade até atingir uma posição de equilíbrio estático ($x=0$ na Fig.1).

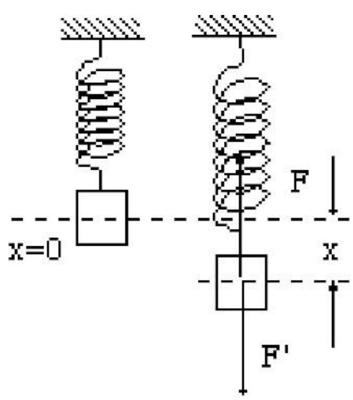

Figura1 – Definição de grandezas associadas à deformação de uma mola.

Nesta posição a força elástica compensa a força gravítica. Assim,

[1] Nesta secção segue-se a convenção de que uma grandeza é vetorial quando está a **negrito**.

$$Mg = K\Delta L \tag{3.1}$$

No método dinâmico aplicamos uma "pequena" força externa ***F*´** que provoca um "pequeno" deslocamento x em relação à posição de equilíbrio estático. Quando retiramos a força ***F'*** o sistema massa-mola vai oscilar à frequência f em torno de x_0 demorando o tempo T a executar uma oscilação completa.

Usando a 2ª lei de Newton vem que o deslocamento $x(t)$ da massa M é descrito pela equação diferencial:

$$M\frac{d^2x}{dt^2} = -Kx \tag{3.2}$$

A solução geral desta equação é:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi) \tag{3.3}$$

com A e φ constantes e desde que

$$K = M\omega^2 \tag{3.4}$$

A é a amplitude do movimento e corresponde ao valor máximo de $x(t)$; φ é a fase inicial da oscilação, e ω é a sua frequência angular, relacionada com a frequência linear f por $\omega=2\pi f$, ou com o período T por $\omega=2\pi/T$. Ou seja:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{K}M \tag{3.5}$$

Na prática vamos comprovar esta relação utilizando várias massas m_i e medindo o tempo de 20 oscilações completas $(20T)$ largando o sistema massa-mola no instante inicial sem velocidade (portanto $\varphi=0$) e com "pequeno" deslocamento ($A \approx 2\ cm$).

Note que o sistema massa-mola com a massa m_i colocada no prato de massa m_{prato} oscila como se fosse uma massa M com:

$$M = m_i + m_{prato} + \frac{m_{mola}}{3} \tag{3.6}$$

onde apenas 1/3 da massa da mola (m_{mola}) contribui para a frequência de oscilação (como indicado em anexo). O período de oscilação de todo o sistema é então dado por:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{K}\left(m_i + m_{prato} + \frac{m_{mola}}{3}\right) \tag{3.7}$$

5. Bibliografia

R. A. Serway and J. W. Jewett, *Physics for Scientists and Engineers*, Brooks/Cole (2013).

Anexo

Contribuição da massa da mola para a frequência de oscilação

Num sistema *massa+mola*, temos que a mola tem uma contribuição importante para a massa total do sistema e não pode ser desprezada na determinação da frequência de oscilação e, posteriormente, da constante elástica da mola. Para calcularmos a contribuição efetiva, começamos por considerar uma mola homogénea com comprimento L_0 e massa por unidade de comprimento μ, pelo que a massa da mola é $m_{mola}= \mu L_0$. A energia cinética dE_c do elemento da mola de massa dm que se move com velocidade v é:

$$dE_c = \frac{1}{2}v^2 dm$$

O elemento de massa *dm* pode ainda ser escrito como

$$dm = \mathrm{\mu dx} = \frac{m_{\mathrm{mola}}}{L_0}dx$$

Temos então

$$dE_c = \frac{1}{2}v^2\frac{m_{\mathrm{mola}}}{L_0}dx$$

Para além disso, sabemos que a velocidade de cada elemento de massa *dm* vai ser diretamente proporcional a sua posição, onde o elemento *dm* na ponta por onde a mola está presa tem velocidade nula, enquanto que o elemento *dm* na outra extremidade da mola tem velocidade máxima. Assim, é natural escrevermos que

$$v = \frac{v_{L_0}x}{L_0}$$

Substituindo na equação anterior obtém-se:

$$dE_c = \frac{1}{2}\left(\frac{v_{L_0}x}{L_0}\right)^2\frac{m_{\mathrm{mola}}}{L_0}dx$$

A integração em *x* permite obter

$$E_c = \frac{1}{2}\frac{m_{\mathrm{mola}}}{3}v_{L_0}^2$$

Concluímos assim que a mola contribuí com 1/3 da sua massa total para a oscilação do sistema.