

# T6A - Movimento Harmônico Simples: determinação da constante elástica de uma mola

Data: 11.05.2021

Autora: Maria Inês Alves Ferreira

- Objetivos:
- determinação do valor da constante elástica de uma mola pelo método estático e pelo método dinâmico através da análise gráfica da força gravitacional do sistema ( $Mg$ ) em função da variação de comprimento da mola ( $\Delta L$ ) e da análise gráfica do quadrado do período ( $T^2$ ) em função da massa do sistema ( $M$ ) respetivamente
  - estudo das condições de validade da lei de Hooke para o sistema massa-mola clássico
  - estudo da dinâmica de um sistema massa-mola nas condições em que o movimento é harmônico simples sendo a mola homogênea

Esquema:

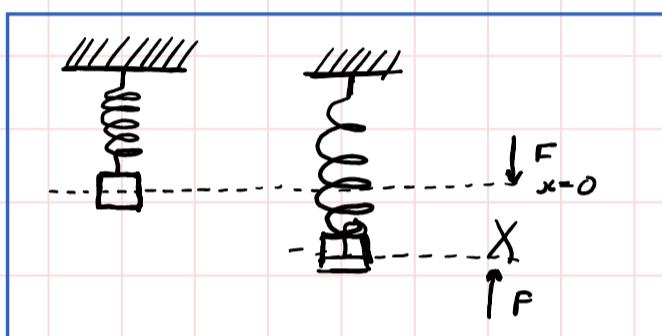


Figura 1: Esquema gráfico do movimento elástico da mola e forças aplicadas

Plano: Método Estático

1. Retirar cuidadosamente a mola do suporte e medir a massa da mola ( $m_{mola}$ ); a massa de cada uma das massas  $m_i$  (ordenando-as por ordem crescente ( $m_1; m_{i+1}; \dots$ )) e a massa do prato ( $m_{prato}$ )
2. Colocar cuidadosamente a mola no suporte e colocar prato na sua extremidade
3. Ler posição extrema do prato ( $L_0$  (✓ sem massas)) e de seguida gradualmente adicionar as massas ( $m_{i+n}$ ) mais pequenas e ler a respetiva posição ( $L_{i+n}$ )
  - ✓ distribuir uniformemente as massas  $m_i$  pela base do prato e utilizar um esquadro para reduzir erros de paralaxe:
    - o prato deve estar estático durante as medições de  $L_{i+n}$  e não retirar massa anterior antes de colocar nova massa

Método Dinâmico:

4. Colocar massa mais pequena ( $m_1$ ) no prato e ler a posição  $L_1$  relativa à sua posição extrema; deslendar cerca de 2cm e largar sistema (✓ sem velocidade inicial; garantir que a oscilação ocorre ao longo do eixo da mola e evitar efeitos de forcão)
5. Medir tempo de 20 oscilações completas ( $20T$ )
6. Adicionar massas  $m_{i+n}$  e repetir processo

# Anexo : Equações

$$Mg = k \Delta L \quad (\text{Eq. 1})$$

$$T^2 = \frac{k}{4\pi^2} M \quad (\text{Eq. 2})$$

$$M = M_{\text{prato}} + \frac{m_{\text{mola}}}{3} + \sum_i m_i$$

## Registo e Análise de Dados

Data: 18.05.2021

→ Estudo do método estático

Tabela 1												
<i>mi</i>	<i>Li carga</i>	<i>Li descarga</i>	<i>X carga</i>	<i>X descarga</i>	<i>Linha ajuste carga</i>	<i>Linha ajuste descarga</i>	<i>Resíduos carga</i>	<i>Resíduos descarga</i>	<i>k carga</i>	<i>er(%) k carga</i>	<i>k descarga</i>	<i>er(%) k descarga</i>
<i>kg (+/- 0,02g)</i>	<i>m (+/- 0,05cm)</i>											
0	0,570	0,569	0	-0,00100	0,00219	0,000586	-0,00219	-0,000586	#DIV/0!	#DIV/0!	0	100%
0,049	0,585	0,586	0,0155	0,0160	0,0497	0,0524	-0,000261	-0,00305	31,2	4%	30,3	1%
0,0976	0,601	0,601	0,0315	0,0310	0,0987	0,0982	-0,00106	-0,000608	30,4	1%	30,9	3%
0,1491	0,616	0,617	0,0465	0,0475	0,145	0,149	0,00450	0,000556	31,4	5%	30,8	3%
0,1994	0,635	0,632	0,0655	0,0625	0,203	0,194	-0,00339	0,00510	29,8	1%	31,3	5%
0,2482	0,649	0,650	0,079	0,0800	0,244	0,248	0,00406	0,000508	30,8	3%	30,4	2%
0,2986	0,666	0,666	0,0965	0,0960	0,298	0,297	0,000863	0,00210	30,3	1%	30,5	2%
0,3465	0,682	0,682	0,112	0,113	0,345	0,347	0,00129	-0,000339	30,3	1%	30,2	1%
0,3996	0,701	0,701	0,131	0,131	0,403	0,403	-0,00380	-0,00368	29,9	0%	29,9	0%

<i>m(mola) g(+/- 0,1)</i>	0,141
<i>m(prato) g(+/- 0,1)</i>	0,0931
<i>m1</i>	0,143
<i>m2</i>	0,191
<i>m3</i>	0,242
<i>m4</i>	0,293
<i>m5</i>	0,341
<i>m6</i>	0,392
<i>m7</i>	0,440
<i>m8</i>	0,493

Tabela 2

Info para de ajuste gráfico 1 carga			
<i>m</i>	3,06	0,00219	b
<i>sm</i>	0,0253	0,00194	sb
<i>r^2</i>	1,00	0,00319	sy

Tabela 3

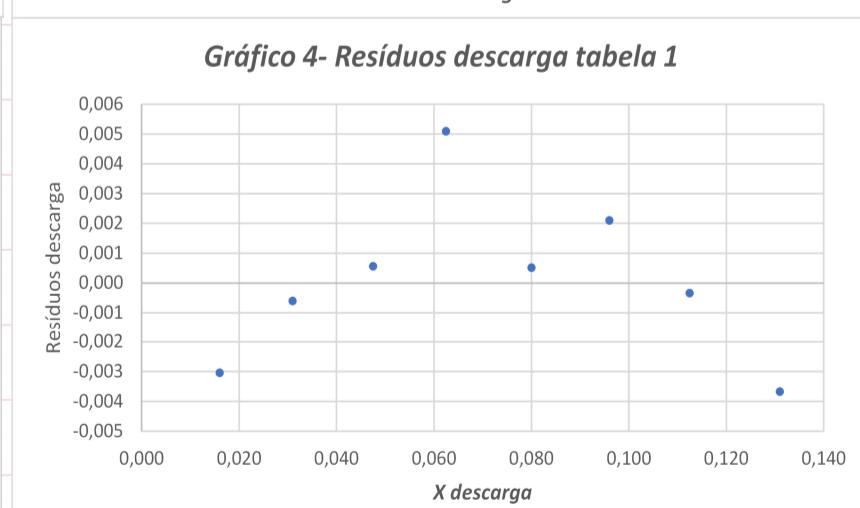
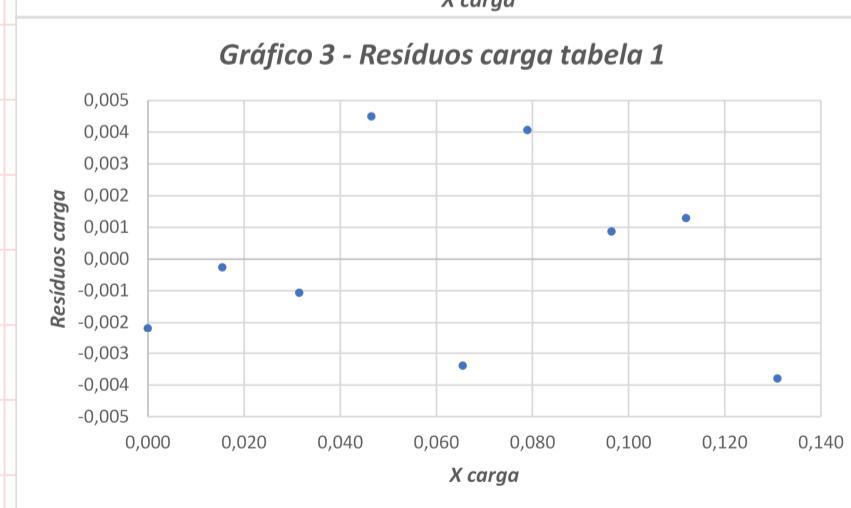
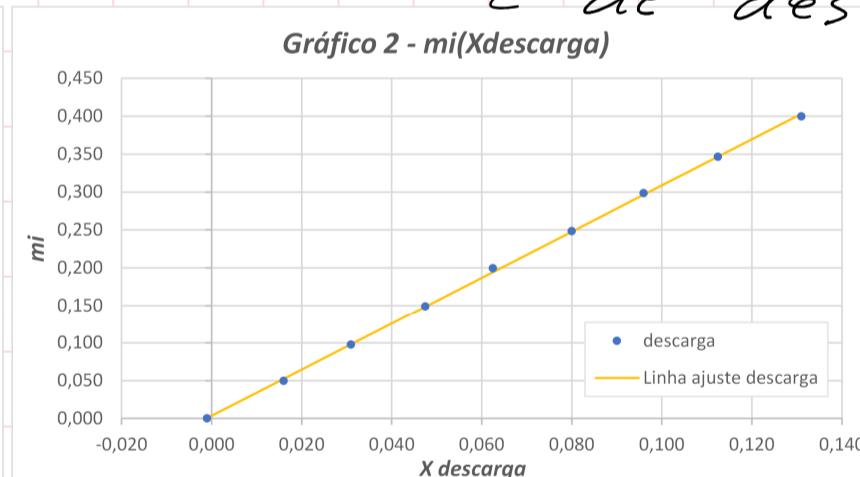
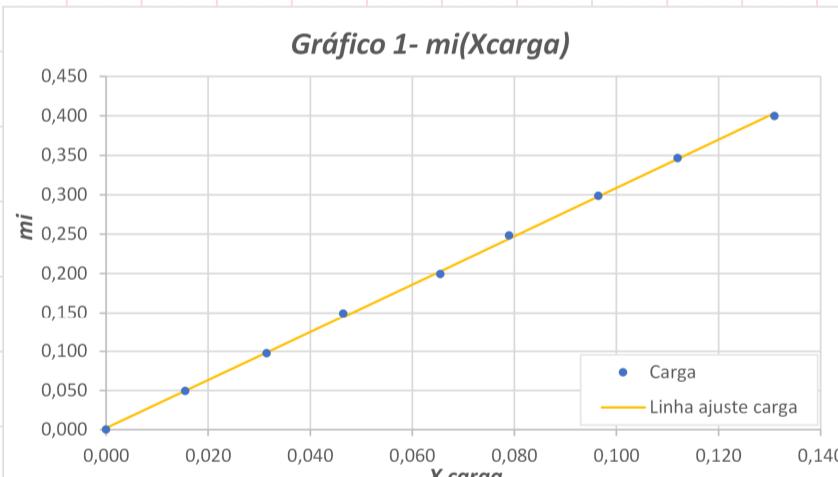
$$\sqrt{\sum M_i} = M_{\text{prato}} + \sum_{i=0}^8 m_i \text{ em que } m_i \text{ é o peso das massas}$$

Info para de ajuste gráfico 2 descarga			
<i>m</i>	3,05	0,00364	b
<i>sm</i>	0,0221	0,00169	sb
<i>r^2</i>	1,00	0,00279	sy

Tabela 4

(\*) Considerando  $k'$  a média dos  $k'$  de carga e de descarga

Tabela 5



→ Tanho os resíduos relativos do gráfico 1 de  $M_i$  ( $X_{carga}$ ) como os resíduos relativos do gráfico 2 de  $M_i$  ( $X_{descarga}$ ) são de baixo valor aleatoriamente distribuídos à volta de zero sem aparentar seguir qualquer tendência pelo que o ajuste obtido é uma boa aproximação.

✓ Numa segunda tentativa adicionámos agora as massas em ordem crescente de peso:

Tabela 6	$m_i$	$L_i$ carga		$L_i$ descarga		$X$ carga		$X$ descarga		Linha ajuste		Resíduos		Resíduos								
		kg (+/- 0,02g)	m (+/- 0,05cm)	carga	descarga	k	carga	er(%)	k	carga	descarga	er(%)	k	descarga	er(%)	k	descarga	er(%)				
	0	0,565	0,567	0,000	0,00200	-0,00512	-0,00475	0,00512	0,00475	#DIV/0!	#DIV/0!	0	100%									
	0,0479	0,582	0,584	0,0170	0,0190	0,0459	0,0477	0,00200	0,000163	27,6	6%	24,7	18%									
	0,0961	0,600	0,600	0,0350	0,0350	0,0999	0,0971	-0,00382	-0,00104	26,9	9%	26,9	11%									
	0,145	0,615	0,615	0,0500	0,0500	0,145	0,143	-0,000136	0,00135	28,4	4%	28,4	6%									
	0,195	0,632	0,635	0,0670	0,0700	0,196	0,205	-0,000755	-0,0100	28,6	3%	27,3	10%									
	0,245	0,650	0,649	0,0850	0,0840	0,250	0,248	-0,00528	-0,00372	28,2	4%	28,5	6%									
	0,295	0,669	0,663	0,104	0,0980	0,307	0,292	-0,0120	0,00335	27,8	5%	29,5	3%									
	0,346	0,680	0,680	0,115	0,115	0,340	0,344	0,00639	0,00226	29,5	0%	29,5	2%									
	0,400	0,697	0,697	0,132	0,132	0,391	0,397	0,00847	0,00288	29,7	1%	29,7	2%									

Info para de ajuste gráfico 5 carga			
$m$	3,00	-0,00512	b
$sm$	0,0534	0,00426	sb
$r^2$	1,00	0,00686	sy

Info para de ajuste gráfico 6 descarga			
$m$	3,09	-0,0109	b
$sm$	0,0387	0,00306	sb
$r^2$	1,00	0,00484	sy

$k'$ (carga)	29,4
$k'$ (descarga)	30,3
$k'$	29,8
$u(k$ carga)	0,865
$u(k$ descarga)	0,797
$u(k)$	0,453

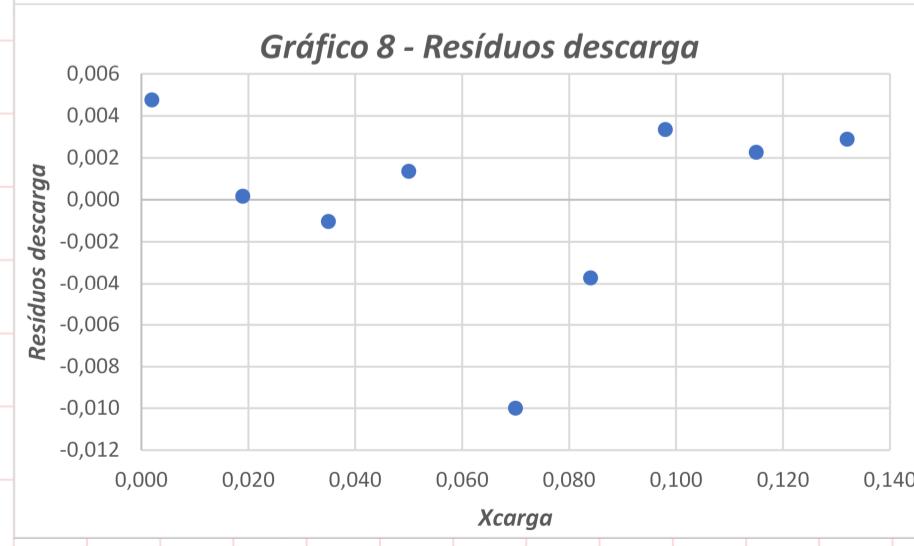
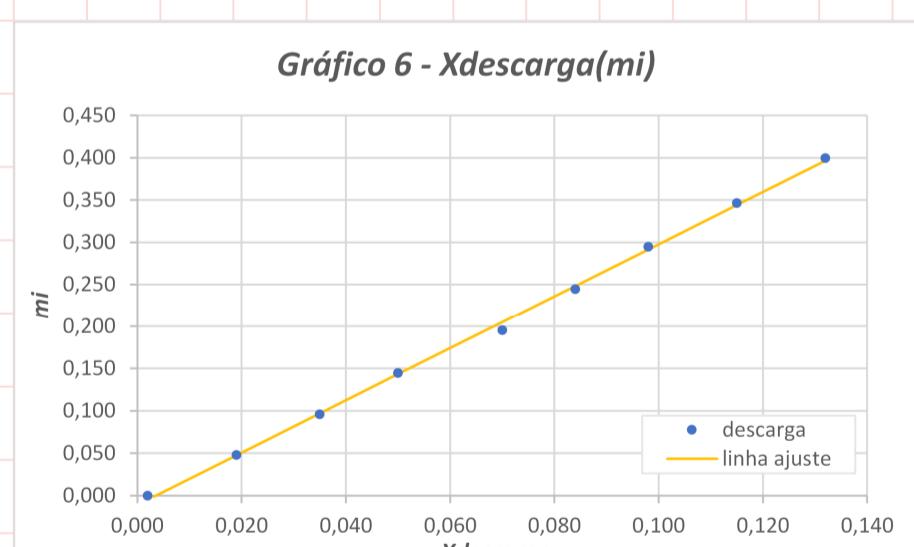
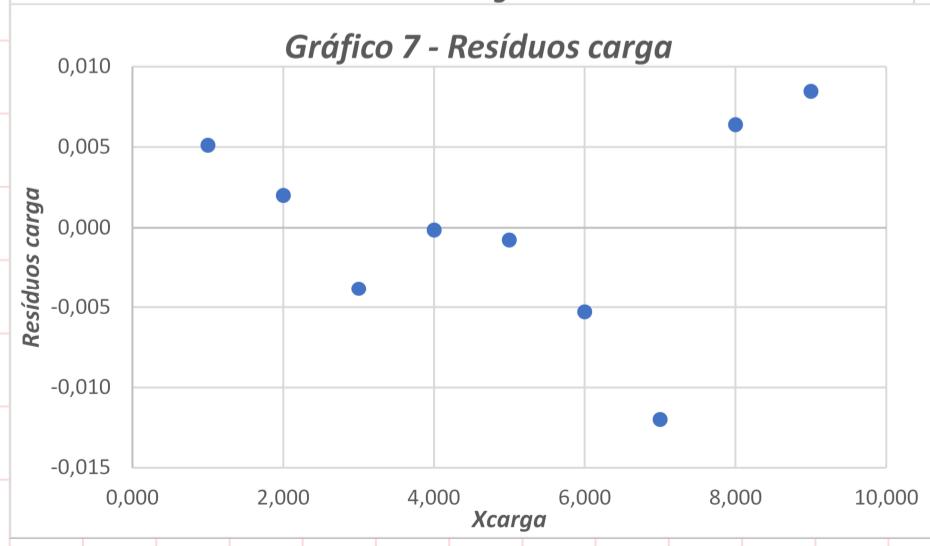
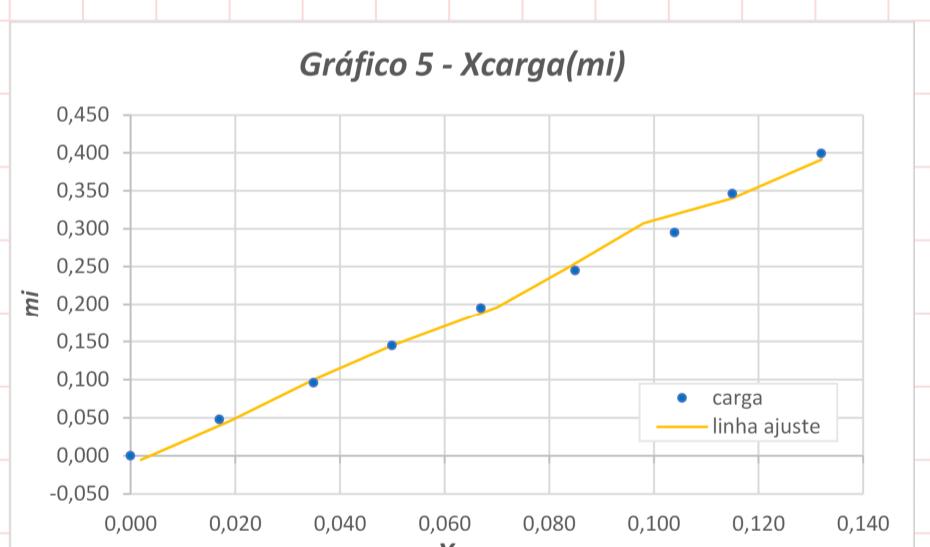
Considerando  $k'$  a média dos  $k'$  de carga e descarga

Tabela 7

$$\nabla M_i = M_{prato} + \sum_{i=0}^8 m'_i \text{ em que } m'_i \text{ é o peso das massas}$$

Tabela 8

Tabela 9



- Novamente verificamos que os resíduos relativamente aos gráficos  $m_i$  ( $X_{carga}$ ) e  $m_i$  ( $X_{descarga}$ ) são baixos e estão aleatoriamente distribuídos à volta de zero sem parecer seguir qualquer tendência pelo que o ajuste linear obtido foi uma boa aproximação.
- Novos resíduos são da mesma ordem de grandeza dos resíduos obtidos quando as massas foram colocadas na ordem incorreta.
- Os factores obtidos para os gráficos  $m_i$  ( $X_{carga}$ ) e  $m_i$  ( $X_{descarga}$ ) para quando as massas não foram colocadas na ordem correta e para quando as massas foram colocadas na ordem correta foram muito semelhantes tendo uma diferença máxima de 0,06.

## → Estudo do método dinâmico

Tabela 9					Linha de ajuste	Resíduos		
$m_i$	$20T$	$T$	$T^2$				$k$	$er(\%) k$
$g (+/- 0,02)$	$s (+/- 0,01)$	$s (+/- 0,0005)$						
0,190	9,84	0,492	0,242	0,253	-0,01049	30,91115	6%	
0,238	11,21	0,5605	0,3142	0,310	0,00368	29,87436	9%	
0,289	12,23	0,6115	0,3739	0,372	0,00156	30,53621	7%	
0,340	13,44	0,6718	0,4512	0,433	0,0184	29,70481	10%	
0,388	13,74	0,6870	0,4720	0,491	-0,0195	32,48261	1%	
0,439	14,97	0,7485	0,5603	0,552	0,0082	30,91553	6%	
0,487	15,76	0,7880	0,6209	0,610	0,0113	30,93921	6%	
0,540	16,25	0,8125	0,6602	0,673	-0,0133	32,27693	2%	
$20T$	$s (+/- 0,01)$	$m_1$	$m_2$	$m_3$	$m_4$	$m_5$	$m_6$	$m_7$
Medida 1		9,66	10,98	12,43	13,73	14,13	15,09	15,82
Medida 2		10,02	11,44	12,03	13,14	13,35	14,85	15,70
Média		9,84	11,21	12,23	13,44	13,74	14,97	15,76
								16,25

Tabela 10

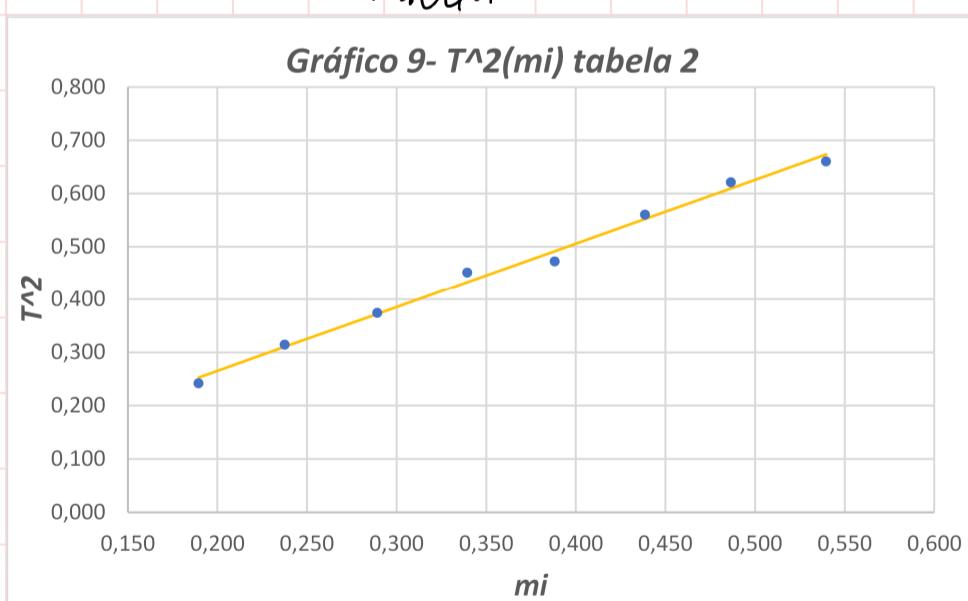


Gráfico 9-  $T^2(m_i)$  tabela 2

Info para linha de ajuste do gráfico 9			
$m$	1,20	0,0248	<b>b</b>
$sm$	0,0440	0,0168	<b>sb</b>
$r^2$	0,992	0,0142	<b>sy</b>

Tabela 13

$m_1 \text{ kg } (+/- 0,02\text{g})$	0,143
$m_2 \text{ kg } (+/- 0,02\text{g})$	0,191
$m_3 \text{ kg } (+/- 0,02\text{g})$	0,242
$m_4 \text{ kg } (+/- 0,02\text{g})$	0,293
$m_5 \text{ kg } (+/- 0,02\text{g})$	0,341
$m_6 \text{ kg } (+/- 0,02\text{g})$	0,392
$m_7 \text{ kg } (+/- 0,02\text{g})$	0,440
$m_8 \text{ kg } (+/- 0,02\text{g})$	0,493

Tabela 11

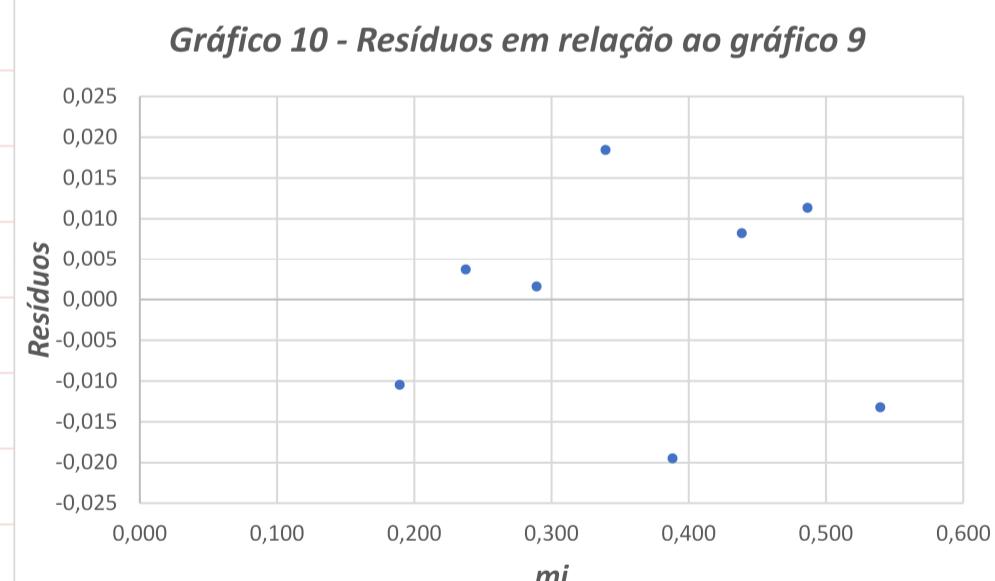


Gráfico 10 - Resíduos em relação ao gráfico 9

- Os resíduos relativamente ao gráfico 9 estão também aleatoriamente distribuídos à volta de zero sem apresentar seguir qualquer tendência e são de baixo valor pelo que novamente temos um bom ajuste ao gráfico.
  - Considerando então a constante da mola como a média dos diferentes  $K'$ :
- $$K = (30,0 + 29,8 + 32,9)/3 = 30,9$$

## Análise:

- O valor de  $K$  obtido pelo modo estático durante a carga foi 30,0 quando as massas não foram adicionadas na ordem certa e 29,8 quando foram, sendo ambas as incertezas iguais a 0,453
- O valor de  $K$  obtido pelo modo dinâmico foi 32,9 com uma incerteza de 0,000348 - note-se que a incerteza obtida pelo método dinâmico é muito inferior às obtidas pelo método estático
- Considerando a constante do mola como a média dos diferentes valores temos  $K = 30,9$
- Vemos que em todos os gráficos de resíduos relativos às aproximações lineares feitas os valores obtidos são baixos; aleatoriamente distribuídos à volta de zero sem apresentar seguir qualquer tendência - três indicadores que as ajustes feitos são boas aproximações, que por sua vez é também um indicador de que o valor obtido experimentalmente para a constante do mola será próximo do real (que desconhecemos)
- Apesar de a forma correta de adicionar as massas ser na ordem crescente de peso - pois assim a variação da carga / descarga seria cada vez mais notável - os resíduos e erros percentuais obtidos por aproximação foram, de modo geral menores quando as massas foram adicionadas aleatoriamente (tendo depois sido removidas na ordem inversa)
- Vemos que a Lei de Hooke se verificou tendo a mola se mantido em regime elástico pois a mola com as massas tendia sempre para o seu estado original de equilíbrio e não sofreu ruptura

## Conclusão:

Como conclusão inferimos experimentalmente que a constante da mola usada nesta experiência é  $K = 30,9$ . Para além disso vemos que quando removido o estímulo - massas e força no caso do método dinâmico - a mola tende para o seu estado original pelo que se verifica a Lei de Hooke em regime elástico.