

20/05/2022 Estudo do momento de inércia de sólidos AF

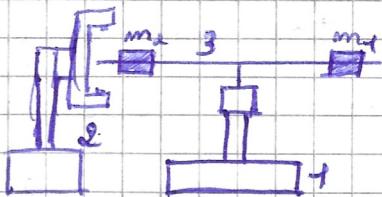
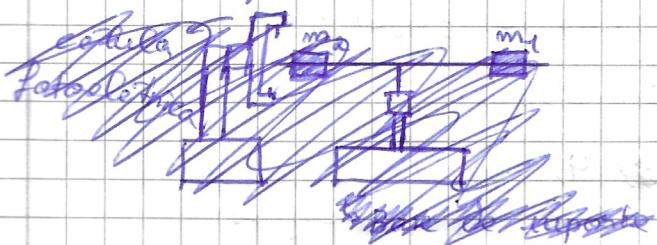
Tiago Catarino, Grupo 8, PL7, 202106809

Objetivos:

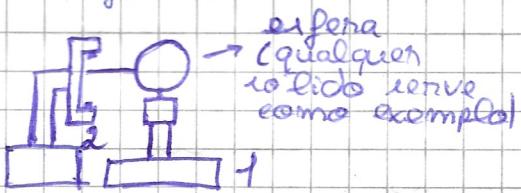
- Definir e calcular o momento de inércia de alguns sólidos;
- Familiarizar com o uso de ferramentas como o enómetro e a célula fotoelétrica para a obtenção experimental de dados;
- Verificar ~~se~~ o teorema de Steiner.

Montagem:

Montagem 1:



Montagem 2:



① Base do suporte principal com mola associada

② Célula fotoelétrica ligada ao contador de tempo de oscilações
Vareta

③ Barras com massas deslocáveis: m_1 e m_2

Procedimento experimental

1º Ponto - Momento de um sistema de partículas e teorema de Steiner (associado com a Montagem 1)

1) Obter e registar os valores de:
- as massas m_1 e m_2 ;
- a massa da vareta;

- o comprimento L da vareta;

2) Colocar as massas m_1 e m_2 a distâncias de c e c equivalentes (preferir uma distância maior possível);
Registar d_1 e d_2 (distâncias entre o centro da vareta e o centro de massa de m_1 e m_2 , respetivamente);

- 3) Alinhar o sistema para a sua posição de equilíbrio;
- 4) Rodar a vareta um ângulo inferior a 180° (Recomendado usar 90°) no sentido contrário dos ponteiros de relógio (sentido direto D) e registar o período T_d correspondente a uma oscilação direta completa;
- 5) Rodar a vareta o mesmo ângulo no sentido inverso e registar o ~~valor~~ período T_i correspondente a uma oscilação inversa completa;
- 6) Repetir os três últimos ~~três~~ ^{pontos} pelo menos duas vezes;
- 7) Escolher uma nova distância e repetir o procedimento; \rightarrow (procedimento de obtenção de T_d e T_i pontos 3), 4) e 5)
- 8) Repetir o 8. ponto anterior quantas vezes necessário, tendo em conta o ajuste linear de $I'(T^2)$ que será necessário fazer;
- 9) Registar os dados numa tabela;
- 10) Repetir os pontos 3) a 9) mas usando distâncias de e de ~~difer~~ não equivalentes em cada ~~largamento~~ medição;
- 11) Usar os dados obtidos no ponto anterior para testar o teorema de Steiner.

2º Parte - Momentos de Inércia de Sólidos (associado com a montagem 2)

- 1) Substituir a vareta pelo sólido a estudar (começar por escolher o cilindro oco) e repetir os pontos 3) a 8) da 1ª parte de forma a registar os valores de T_d e T_i para o sólido escolhido;
- 2) Registar os dados obtidos numa tabela;
- 3) Se possível, repetir os pontos 1) e 2) para outros sólidos à escolha.

Registo dos dados

$$L_{varata} = 69 \text{ cm} \pm 0,05$$

$$m_1 = 212,44 \text{ g} \pm 0,01$$

$$m_2 = 210,81 \text{ g} \pm 0,01$$

Diametros	T _D	T _E	#
23,1 em	1 6.806	6.809	
	2 6.810		- 6.806
19,9 em	1 6.026	6.023	
	2 6.026	6.022	
18 em	1 5.385	5.388	
	2 5.385	5.387	
16 em	1 5.117	5.117	
	2 5.119	5.115	
14 em	1 4.642	4.641	
	2 4.640	4.642	

Tabela 1

d ₁ (em)	d ₂ (em)	T _D	T _E
26,0	30,8	8,201	8,216
		8,209	8,205
23,5	33,2	8,305	8,300
		8,298	8,299
20,7	36,0	8,436	8,487
		8,430	8,486
18,4	38,5	8,690	8,705
		8,695	8,704
15,7	41,1	8,997	8,999
		8,991	8,997

Tabela 2

Sólido	T _D	T _E
Cilindro	1,181	1,181
Ovo	1,181	1,181
Esfera	1,943	1,960
	1,958	1,957
Disco	1,476	
Disco	1,460	1,459
Disco	1,460	1,459

Tabela 3

Nota! Todos os taloraios de períodos registados foram registados largando o objecto a um ângulo de 90° do ponto de equilíbrio.

Nota! O cronómetro tem 3 modos de contagem: Gate, Pulse e Pend, e decidimos usar o modo Pend pois registou um período inteiro e rendeu que conta mais tempo que os outros modos também reduz a influência de ~~as~~ incertezas que ocorrem durante a medição.

$$m_{círculo\ ovo} = 320,06 \text{ g} \pm 0,01$$

Dimensões círculo ovo:

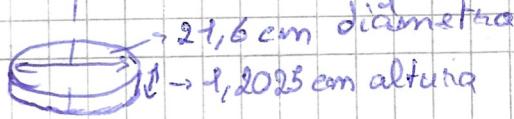


$$m_{esfera} = 1011,2 \text{ g} \pm 0,01$$



Medida com fita métrica

$$m_{disco} = 231,82 \text{ g} \pm 0,01$$



Medidas com escavina de palmeira (altura) e transferidor (diâmetro)

Análise de dados - 1^a parte

A 1^a parte desta experiência envolve o tratamento de dados de duas tabelas diferentes, a primeira tabela, em que as distâncias d_1 e d_2 são iguais, tem o propósito de obter o valor de D (constante característica do sistema), e a tabela 2, em que as distâncias d_1 e d_2 são diferentes, tem o propósito de usar o teorema de Steiner para obter valores para o eixo de simetria e comparar com os valores obtidos usando o D .

Iniciamos começando por usar a tabela 1 para obter o valor de D :

d (m)	T_D (s)	T_1 (s)	T (s)	$u(T)$
0.231	6.806	6.809	6.80775	0.0010308
	6.806	6.81		
0.199	6.022	6.023	6.02175	0.0006292
	6.02	6.022		
0.18	5.585	5.588	5.58625	0.00075
	5.585	5.587		
0.16	5.117	5.117	5.1175	0.0005
	5.119	5.117		
0.14	4.642	4.641	4.64125	0.0004787
	4.64	4.642		

Tabela 1.1

E usando a equação $I' = m_1 d_1^2 + m_2 d_2^2 + \frac{m_{\text{vareta}} L_{\text{vareta}}}{12}$,

podemos calcular o momento de inércia associado a cada período T , após isso podemos fazer um ajuste linear no gráfico de $I'(T^2)$, e, apartir do declive, obter o valor de $\frac{D}{4\pi^2}$.

d (m)	T^2 (s ²)	$u(T^2)$	I' (kg m ²)	$u(I')$
0.231	46.34546	0.014035	0.0266856	9.839E-05
0.199	36.261473	0.007577	0.0208617	8.495E-05
0.18	31.206189	0.008379	0.0178138	7.698E-05
0.16	26.188806	0.005117	0.0149357	6.861E-05
0.14	21.541202	0.004444	0.0123962	6.027E-05

Tabela 1.2

$$u(T^2) = 2T u(T)$$

$$u^2(I') = 2(d^2 u(m))^2$$

$$+ (2d(m_1 + m_2) u(d))^2$$

$$+ \left(\frac{L_{\text{vareta}}}{12} u(m)\right)^2 + \left(\frac{m_{\text{vareta}} L_{\text{vareta}}}{12} u(L)\right)^2$$

L_{vareta} (m)	m_{vareta} (kg)	m_1 (kg)	m_2 (kg)	$u(m_i)$	$u(L_i/d_i)$	$u(T_i)$
0.61	0.13224	0.21244	0.21081	0.00001	0.0005	0.001

Tabela 1.3

Nota! Todas as incertezas foram calculadas usando a propagação de incertezas $\rightarrow u^2(a, x, y, \dots) = \left(\frac{\partial a}{\partial x}\right)^2 u^2(x) + \left(\frac{\partial a}{\partial y}\right)^2 u^2(y) + \dots$

excepto as incertezas $u(T) \rightarrow u(T) = \sqrt{(T_{D1}-T)^2 + (T_{D2}-T)^2 + (T_{D3}-T)^2 + (T_{D4}-T)^2}$

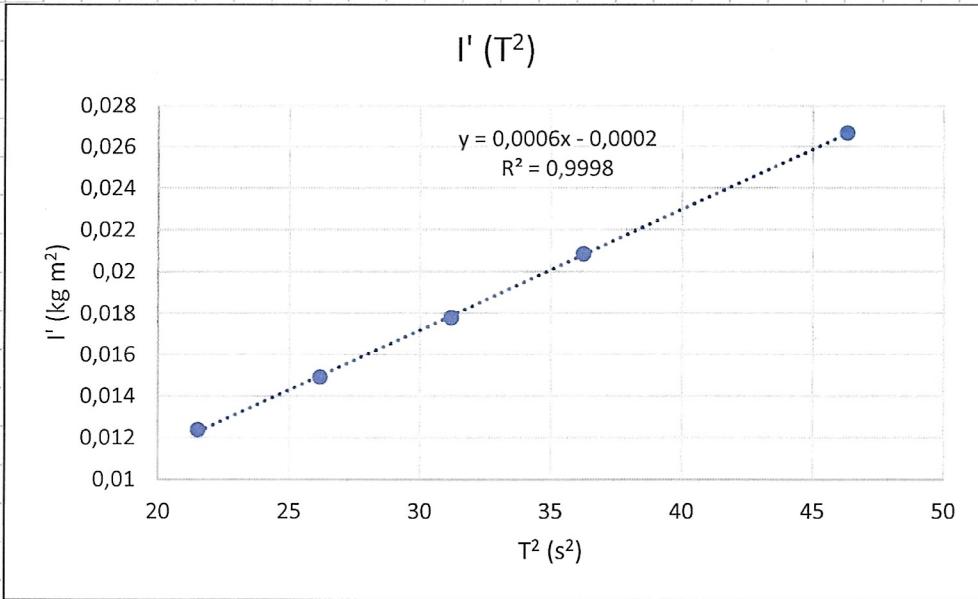


Grafico 1.1

Ajuste Linear

m	0.000579	-0.00016	b
u(m)	4.37E-06	0.000146	u(b)
R ²	0.999829	8.37E-05	u(y)

Tabela 1.4

E usando os valores do ajuste linear, obtemos o seguinte valor para o D:

D	u(D)
0.022845181	0.000172

$$\cdot u(D) = 4I^2 u(m)$$

Tabela 1.5

$$\hookrightarrow I = \frac{D}{4\pi^2} T^2 \xrightarrow{\text{desolve}} m = \frac{D}{4\pi^2} \Leftrightarrow D = 4\pi^2 m$$

E agora que temos o valor de D, podemos usar a equação técnica $I = \frac{D}{4\pi^2} T^2$ para calcular o momento de inércia a partir de D (I_D) e comparar com os valores obtidos ~~experimentalmente~~ tecnicamente (I').

I_D (kg m ²)	$u(I_D)$	$ I' - I_D /I'$
0.026819	0.000202	0.004998
0.0209836	0.000158	0.005846
0.0180582	0.000136	0.01372
0.0151548	0.000114	0.014668
0.0124654	9.41E-05	0.005576

Tabela 1.6

O maior desvio é de 1,5%!

$$\cdot u(I_D) = \sqrt{(m u(T^2))^2 + (T^2 u(m))^2}$$

$$\hookrightarrow I_D = \frac{D}{4\pi^2} T^2 = \frac{m}{4\pi^2} T^2$$

↳ desolve

Resíduos (Aj. Linear)

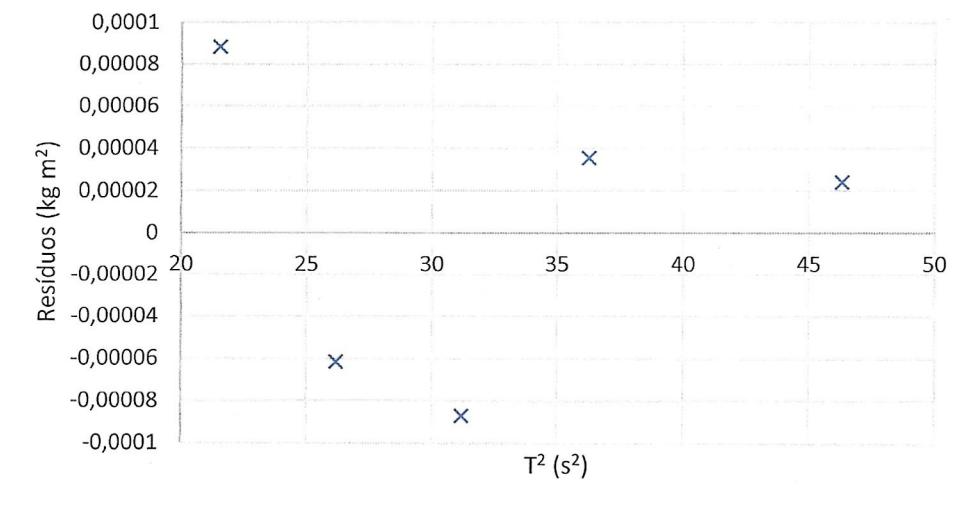


Gráfico 1.2

→ Resíduos Aleatórios !

Edu

Podemos prosseguir para a validação do Teorema de Steiner usando os dados da tabela 2:

d_1 (m)	d_2 (m)	T_D (s)	T_I (s)	T (s)	$u(T)$
0.26	0.308	8.201	8.216	8.20775	0.0031983
		8.209	8.205		
0.235	0.332	8.305	8.3	8.3005	0.0015546
		8.298	8.299		
0.207	0.36	8.476	8.487	8.48225	0.0025941
		8.48	8.486		
0.184	0.385	8.69	8.705	8.6985	0.0036171
		8.695	8.704		
0.157	0.411	8.997	8.999	8.996	0.0017321
		8.991	8.997		

Tabela 2.1

Para testar o Teorema de Steiner podemos calcular o momento de inércia ~~para~~ para o eixo de rotação I (Figura 1) usando os valores de $T(d_1, d_2)$ e D e a equação $I_D = \frac{D}{4\pi^2} T^2$, e, usando o Teorema de Steiner, obtemos experimentalmente os valores para o momento de inércia para o eixo de simetria I_S correspondentes a variáveis $d_1 = d_2 = \frac{d_1 + d_2}{2}$ (Figura 1), e comparar com valores para o mesmo obtidos teoricamente (I'), usando a equação teórica $I' = m_1 d_1^2 + m_2 d_2^2 + \frac{m_1 + m_2}{2} d_{\text{rota}}^2$.

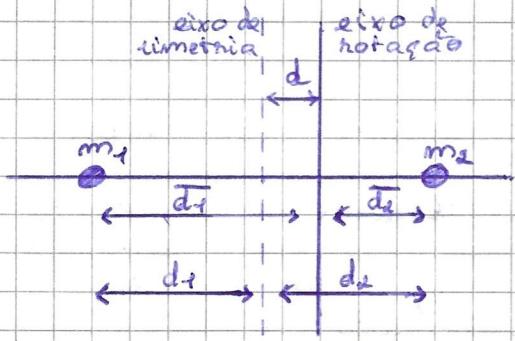


Figura 1

E então ficamos com a seguinte tabela:

d_1 (m)	d_2 (m)	T^2 (s ²)	$u(T^2)$	I_D (kg m ²)	$u(I_D)$	I_s (kg m ²)	$u(I_s)$
0.26	0.308	67.36716	0.0525018	0.0389837	0.0002957	0.038664	0.000316
0.235	0.332	68.8983	0.0258073	0.0398697	0.0003012	0.038563	0.000321
0.207	0.36	71.94857	0.044007	0.0416349	0.0003151	0.038384	0.000334
0.184	0.385	75.6639	0.0629265	0.0437848	0.0003323	0.038174	0.000351
0.157	0.411	80.92802	0.0311631	0.046831	0.0003538	0.037872	0.000371

Tabela 2.2

$$I_D = \frac{D}{4\pi^2} T^2 \rightarrow \text{eixo de rotação}$$

Teorema de Steinor:

$$I_{\text{eixo paralelo}} = I_{\text{eixo simetria}} + M d^2$$

$$\hookrightarrow I_s = I_D - (m_1 + m_2 + m_{\text{varota}}) \left(\frac{d_1 - d_2}{2} \right)^2$$

$$u(I_D) = \sqrt{\left(\frac{D}{4\pi^2} u(T^2) \right)^2 + \left(\frac{T^2}{4\pi^2} u(D) \right)^2}$$

$$u^2(I_s) = u^2(I_D) + 3 \left(\frac{d_1 - d_2}{2} \right)^2 u^2(m) + 2 \left((m_1 + m_2 + m_{\text{varota}})(d_1 - d_2) \right)^2 u^2(d)$$

Foram usadas para m_1 , m_2 e m_{varota} os valores da tabela 1.3, tal como os seus incertezas $u(m_i)$.

I' (kg m ²)	$u(I')$	$ I' - I_s / I'$
0.038238	9E-05	0.011129
0.038118	9E-05	0.011674
0.038118	9E-05	0.006975
0.038359	9E-05	0.004804
0.038238	9E-05	0.009589

$$I' = (m_1 + m_2) \left(\frac{d_1 + d_2}{2} \right)^2 + \frac{m_{\text{varota}} l_{\text{varota}}^2}{12}$$

$$u^2(I') = 2 \left(\frac{d_1 + d_2}{2} \right)^2 u^2(m_i) + 2 \left((m_1 + m_2)(d_1 + d_2) \right)^2 u^2(d)$$

$$+ \left(\frac{l_{\text{varota}}^2}{12} \right)^2 u^2(m_i) + \left(\frac{m_{\text{varota}} l_{\text{varota}}}{6} \right)^2 u^2(l_i)$$

Tabela 2.3
Maior Desvio
de 1,2 %

Análise de dados - 2ª Parte

A 2ª parte da experiência consiste em medir o período de um sólido, e usando o valor de D , podemos obter experimentalmente o momento de inércia do sólido, e a seguir comparar com o valor usando a equação teórica correspondente ao sólido adequado:

Sólido	T_D (s)	T_I (s)	T (s)	$u(T)$
Cilindro Oco	1.182	1.181	1.18125	0.00025
	1.181	1.181		
Esfera	1.948	1.96	1.95575	0.0026575
	1.958	1.957		
Disco	1.46	1.459	1.4595	0.0002887
	1.46	1.459		

Tabela 3.1

• Cilindro Oco

Sólido	T^2 (s ²)	$u(T^2)$	I (kg m ²)	$u(I)$	I_D (kg m ²)	$u(I_D)$	$ I - I_D /I$
Cilindro Oco	1.3953516	0.000591	0.0008499	1.247E-07	0.0008075	6.1E-06	4.989%

Tabela 3.2

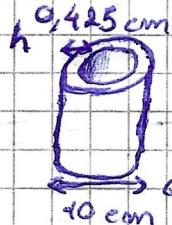
$$\hookrightarrow I_D = \frac{D}{4\pi^2} T^2 \quad u(I_D) = \sqrt{\left(\frac{D}{4\pi^2} u(T^2)\right)^2 + \left(\frac{I^2}{4\pi^2} u(D)\right)^2}$$

$$I = \frac{1}{2} M (r_{int}^2 + r_{ext}^2)$$

$$r_{ext} = \frac{d}{2}; r_{int} = \cancel{M} \frac{d}{2} - h$$

$$\hookrightarrow I = \frac{1}{2} M \left(\left(\frac{d}{2} - h\right)^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 \right)$$

~~(d/2)^2~~ ~~(d/2)^2~~ ~~(d/2)^2~~ ~~(d/2)^2~~



de h
foram converti-
da a metro

$$M = 0,37006 \pm 0,00001 \text{ kg}$$

$$u(d, h) = 0,001 \text{ cm}$$

$$u^2(I) = \left(\left(\frac{d}{2} - h\right)^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 \right)^2 u^2(M) \\ + \left(\left(\frac{cm(d-h)}{2}\right)^2 + \left(cm\left(\frac{d}{2}-h\right)\right)^2 \right) u^2(d, h)$$

• Esfera

Sólido	T^2 (s ²)	$u(T^2)$	I (kg m ²)	$u(I)$	I_D (kg m ²)	$u(I_D)$	$ I - I_D /I$
Esfera	3.8249581	0.010395	0.0021493	2.125E-08	0.0022134	1.77E-05	2.984%

Tabela 3.3

$$\hookrightarrow I_D = \frac{D}{4\pi^2} T^2 \quad u(I_D) = \sqrt{\left(\frac{D}{4\pi^2} u(T^2)\right)^2 + \left(\frac{I^2}{4\pi^2} u(D)\right)^2}$$

$$I = \frac{2}{5} M r^2$$

$$\text{meio perímetro} \\ d = 2d,9 \text{ cm} \pm 0,05$$

$$M = 1,0492 \pm 0,00001 \text{ kg}$$

$$I = \frac{2}{3} M \left(\frac{d}{R}\right)^2$$

$$u^2(I) = \left(\frac{4M}{5\pi^2}\right)^2 u^2(d) + \left(\frac{2d^2}{5\pi^2}\right)^2 u^2(M)$$

d foi convertido para metros

• Disco

Sólido	T^2 (s ²)	$u(T^2)$	I (kg m ²)	$u(I)$	I_D (kg m ²)	$u(I_D)$	$ I - I_D /I$
Disco	2.1301403	0.000843	0.001352	6.259E-06	0.0012327	9.31E-06	8.825%

Tabela 3.4

$$\hookrightarrow I_D = \frac{D}{4\pi^2} T^2$$

$$u(I_D) = \sqrt{\left(\frac{2}{\pi^2} 4(T^2)\right)^2 + \left(\frac{T^2}{4\pi^2} u(D)\right)^2}$$

$$I = \frac{1}{2} Mn^2$$

$$\therefore I = \frac{1}{2} M \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{1}{8} M d^2$$

$$u^2(I) = \left(\frac{d^2}{8}\right)^2 u^2(M) + \left(\frac{Md}{4}\right)^2 u^2(d)$$

$$M = 0,23182 \text{ kg} \\ \pm 0,00001$$

$$\text{---} \textcircled{1} \text{---} \\ \text{diâmetro} \\ d = 21,6 \text{ cm} \pm 0,05$$

d foi convertido para metros

• Conclusão:

• Usando o valor do D característico do sistema obtido ~~na tabela 1.5~~, na tabela 1.5, conseguimos obter valores experimentais do momento de inércia para comparar com os valores teóricos obtidos usando o Teorema de Steiner, e dessa maneira obtemos um erro percentual máximo de $\approx 1,2\%$, o que nos leva a confirmar a validação do Teorema de Steiner, sendo que os ~~erros~~ outros erros obtidos foram ainda menores;

• A segunda parte da experiência focou-se em determinar o momento de inércia de alguns sólidos, no qual neste usamos um cilindro vazio, uma esfera e um disco, medindo o seu período de oscilação e o valor de D obtido na 1^a parte da experiência (tabela 1.5) para calcular os seus momentos de inércia, e usando as equações teóricas para os seus momentos de inércia de forma a comparar os valores. O sólido que teve menor erro percentual foi a esfera, com erro de $\approx 2,98\%$, e isto pode ser pois a esfera é, dos três objetos, o que tem formato mais aerodinâmico; sendo assim que ao mudar o período de oscilação, não houve tanta dissipação de energia pela resistência do ar.