

21/03/2022

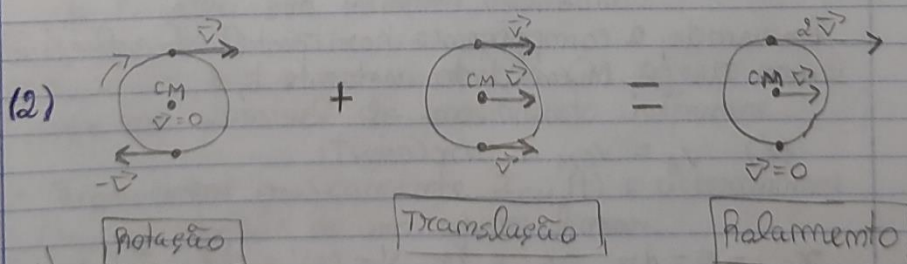
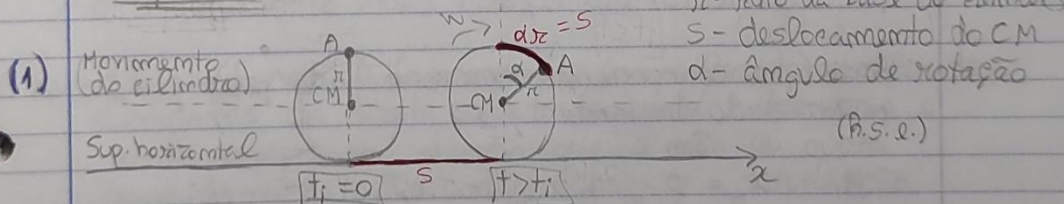
Trabalho 2B

Estudo do Rolamento dum cilindro numa superfície horizontal

Objetivos

- Estudar o movimento de um cilindro numa calha horizontal resultante da sobreposição de um movimento de translação e outro de rotação, em que se verifica a condição de rolamento sem escorregamento, ou seja, $V_{CM} = \omega r$
- Determinar o valor mínimo e máximo da velocidade do ponto da periferia da circunferência exterior e em que situações é que é atingida.
- Familiarização com as técnicas de processamento de vídeo e imagem.

Esquemas:



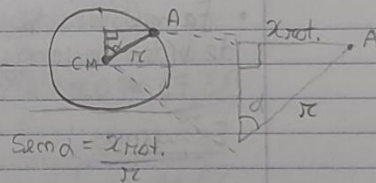
Rolamento sem escorregamento

- O esquema (1) representa, no fundo, o nosso trabalho experimental. É nos apresentado um cilindro a rolar sem escorregar com um ângulo de rotação α para um determinado intervalo de tempo t ($t > t_i$). Sabemos que $v_{CM} = \omega r$ visto não haver escorregamento e é por causa disto também que se pode inferir que o comprimento do arco correspondente ao deslocamento efetuado pelo ponto A é igual ao deslocamento do C.M. ($s = d\pi$)

- O esquema (2) evidencia o princípio de sobreposição envolvendo movimento de translação e movimento de rotação referente ao rolamento do cilindro, bem como os vetores velocidade que estão em jogo.

Equações importantes

$$\omega = \frac{d\alpha}{dt}, \text{ logo } d = \omega t$$



Assim, a componente horizontal do vetor posição de A, num dado instante t , é:

$$(1) \quad x_A = x_{CM} + x_{rot.} = x_{CM} + r \text{Sen}(\omega t)$$

Derivando, a componente horizontal da velocidade linear de A, num dado instante t , é:

$$(2) \quad v_A = v_{CM} + \omega r \cos(\omega t)$$

$$v = \omega r$$

$$x_{CM} = s = d\pi, \quad v_{CM} = (x_{CM})' = (s)' = \frac{ds}{dt} = \omega r, \quad \pi = \frac{v_{CM}}{\omega}$$

$$\frac{x_{CM}}{t} = v_{CM}$$

$$x_{CM} = v_{CM} t$$

$$(1)^* \quad x_A(t) = \underbrace{v_{CM} t}_\downarrow + \frac{v_{CM}}{\omega} \text{Sen}(\omega t) = \boxed{v_{CM} \left(t + \frac{1}{\omega} \text{Sen}(\omega t) \right)}$$

> Só é possível escrever desta maneira se v_{CM} for constante!

$$V_{CM} = \omega R$$

$$(2)^* \quad V_A(t) = V_{CM} + V_{CM} \cos \omega t = V_{CM} (1 + \cos \omega t)$$

Procedimento

- Montar a calha na horizontal (nivelada o melhor possível) para que o cilindro role sobre ela.
- Colocar a câmera de vídeo e o respectivo tripé a uma distância que possibilite uma visualização com o máximo de resolução e com os erros de paralaxe minimizados.
- Promover uma boa iluminação no local da experiência, de maneira a facilitar a posterior visualização dos elips.
- Medir e registrar o diâmetro do cilindro com o instrumento mais apropriado (cravette).
- Efetuar vários lançamentos (manualmente) a diferentes velocidades, da direita para a esquerda e vice-versa, e tendo sempre em atenção que a mão ou outra parte do corpo não podem obstruir a visualização do cilindro em nenhum momento.
- Garantir que o movimento do CM seja o mais próximo possível do movimento uniforme.
- Representar graficamente $x_{CM}(t)$ e determinar $(V_{CM})_{aj.}$ através de um ajuste linear.
- Representar graficamente $x_A(t)$ e identificar as suas interseções com $x_{CM}(t)$.
- Calcular o período de rotação e a velocidade angular $\omega_{aj.}$ com a respectiva incerteza.

- Com os valores de ω_{aj} e $(V_{cm})_{aj}$, calcular a linha de ajuste $x_{aj}(t)$ referente à equação (1)* e comparar com os resultados $x_A(t)$ (medidos experimentalmente).
(os 2 conjuntos devem aparecer sobrepostos)
- Verificar que o ponto de contacto do cilindro com a calha tem velocidade nula, e que quando o ponto A se encontra no topo atinge-se uma velocidade máxima de $2V_{cm}$.
- Commentar a existência de eventuais desvios do comportamento de $x_{cm}(t)$ a uma evolução linear.

Notas/Cuidados a ter:

- De maneira a deixar a calha o mais possível mais horizontal deve-se assegurar que V_{cm} tem aproximadamente o mesmo valor nos lançamentos em sentidos contrários.
- É possível utilizar uma placa de alumínio para assegurar um bom alinhamento da direção do movimento do cilindro com o bordo da escala quando do lançamento.
- Para garantir um movimento do CM praticamente uniforme deve-se registar e comparar os tempos correspondentes ao primeiro e último realçamento do cilindro na calha.
- Para analisar as situações de velocidade máxima e mínima (nula) deve-se traçar tangentes à curva experimental de $x_A(t)$.

J

Diâmetro cilindro $\Rightarrow \left. \begin{array}{l} (68,40 \pm 0,05) \text{ mm} \\ (68,30 \pm 0,05) \text{ mm} \\ (68,30 \pm 0,05) \text{ mm} \end{array} \right\} \text{ média}$

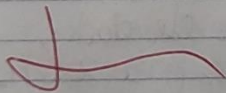
velocidade do obturador $\rightarrow 1/500$

Utilizamos holofotes para iluminar a calha!

A maior parte das lâmpadas afetadas foram sem rampa de alumínio, tendo apenas os últimos sido com este utensílio.

Aplicamos diferentes velocidades ao cilindro e a velocidade máxima atingida foi proporcionada pela rampa.

Calha $\Rightarrow \text{126,6} \pm 0,05 \text{ cm}$



$$\bar{d} = \frac{68,40 + 68,30 + 68,30}{3} = (68,33 \pm 0,03) \text{ mm} =$$

$$\approx (6,8 \pm 0,3) \text{ cm}$$

$$r = \frac{d}{2} = (3,4 \pm 0,2) \text{ cm}$$

$$(v(\bar{d})) = \frac{s}{\sqrt{n}} = \frac{0,04774}{\sqrt{3}}$$

• Com a ajuda do software Tracker, obtém-se os pontos (t, x) referentes ao movimento do CM do cilindro e ao ponto A da periferia.

A coluna com as coordenadas de y foi ignorada, visto não interessar para a atividade experimental.

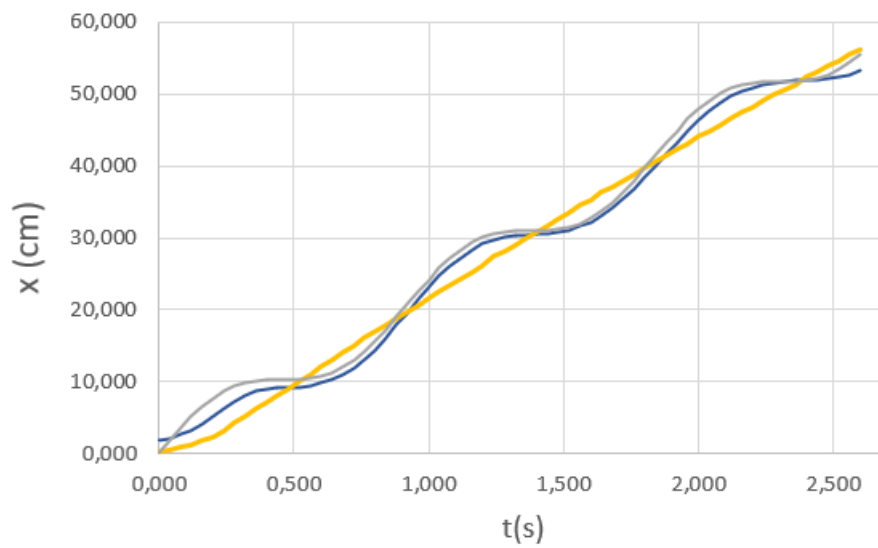
De notar que a grandeza temporal se apresenta em segundos (s) e o x em cm!

Vídeo 00143

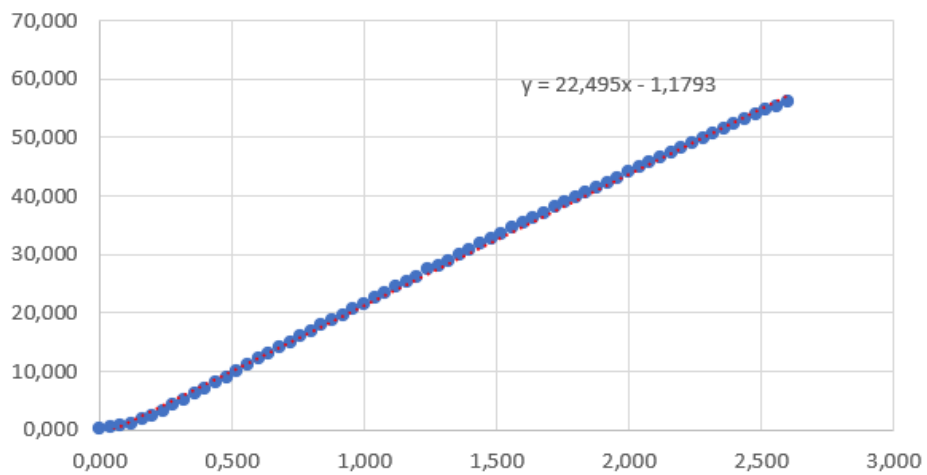
Ponto A		CM		
t (s)	x (cm)	t (s)	x (cm)	x _A (t) aj.
0,000	1,833	0,000	0,223	0
0,040	2,112	0,040	0,536	1,788468
0,080	2,670	0,080	0,849	3,511019
0,120	3,228	0,120	1,162	5,106627
0,160	4,030	0,160	1,749	6,52368
0,200	5,251	0,200	2,336	7,723813
0,240	6,227	0,240	3,197	8,684748
0,280	7,274	0,280	4,293	9,401952
0,320	7,971	0,320	5,194	9,88897
0,360	8,669	0,360	6,211	10,17642
0,400	8,948	0,400	7,151	10,30972
0,440	9,157	0,440	8,129	10,34574
0,480	9,227	0,480	9,069	10,34853
0,520	9,227	0,520	10,165	10,38465
0,560	9,331	0,560	11,026	10,51814
0,600	9,785	0,600	12,122	10,80586
0,640	10,203	0,640	13,022	11,29321
0,680	10,901	0,680	14,040	12,01078
0,720	11,808	0,720	14,940	12,97209
0,760	13,063	0,760	16,036	14,17257
0,800	14,389	0,800	16,936	15,58993
0,840	16,028	0,840	17,836	17,18577
0,880	17,842	0,880	18,815	18,90847
0,920	19,516	0,920	19,715	20,69699
0,960	21,329	0,960	20,615	22,4854
1,000	23,143	1,000	21,555	24,20781
1,040	24,678	1,040	22,494	25,80318

1,080	26,178	1,080	23,433	27,21993
1,120	27,329	1,120	24,373	28,41971
1,160	28,305	1,160	25,312	29,38028
1,200	29,212	1,200	26,056	30,09712
1,240	29,700	1,240	27,348	30,5838
1,280	30,014	1,280	28,052	30,87098
1,320	30,258	1,320	28,913	31,00409
1,360	30,363	1,360	29,853	31,04
1,400	30,502	1,400	30,714	31,0428
1,440	30,502	1,440	31,731	31,07902
1,480	30,781	1,480	32,671	31,21271
1,520	31,095	1,520	33,571	31,5007
1,560	31,584	1,560	34,549	31,98838
1,600	32,177	1,600	35,332	32,70631
1,640	33,049	1,640	36,311	33,66799
1,680	34,165	1,680	37,133	34,86882
1,720	35,385	1,720	37,994	36,28648
1,760	36,746	1,760	38,816	37,88256
1,800	38,280	1,800	39,794	39,60541
1,840	39,954	1,840	40,499	41,39398
1,880	41,629	1,880	41,517	43,18234
1,920	43,303	1,920	42,260	44,9046
1,960	44,837	1,960	43,082	46,49973
2,000	46,302	2,000	44,100	47,91618
2,040	47,697	2,040	44,883	49,11561
2,080	48,744	2,080	45,744	50,0758
2,120	49,685	2,120	46,527	50,79228
2,160	50,383	2,160	47,388	51,27864
2,200	50,941	2,200	48,171	51,56554

2,240	51,255	2,240	48,953	51,69846
2,280	51,604	2,280	49,893	51,73427
2,320	51,743	2,320	50,676	51,73707
2,360	51,848	2,360	51,380	51,77338
2,400	51,918	2,400	52,320	51,90727
2,440	51,953	2,440	53,141	52,19553
2,480	52,162	2,480	54,042	52,68354
2,520	52,406	2,520	54,707	53,40184
2,560	52,720	2,560	55,412	54,36389
2,600	53,313	2,600	56,194	55,56507

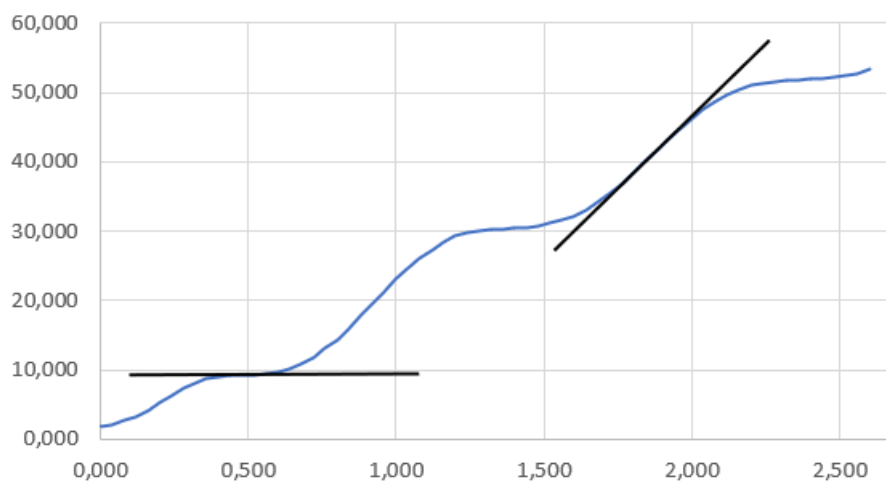


xCM (t) e Linearização



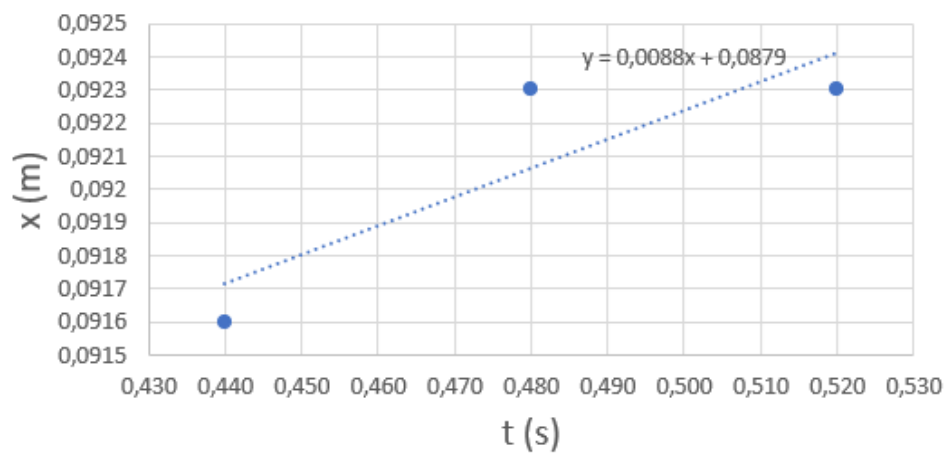
	m	22,50	-1,2	b		
	u(m)	0,09	0,1	u(b)		
	r^2	0,999	0,5	u(y)		

Tangentes

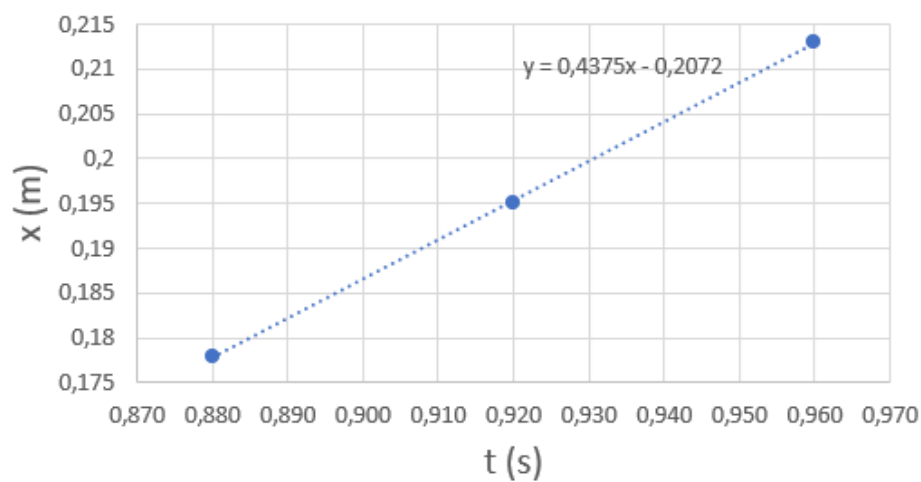


TANGENTE 1ª		TANGENTE 2ª	
t(s)	x(m)	t(s)	x(m)
0,440	0,0916	0,880	0,178
0,480	0,0923	0,920	0,195
0,520	0,0923	0,960	0,213

Tangente aproximada da 1ª interseção



Tangente aproximada da 2ª interseção



Vídeo 00143.avi

~~Após a coleta de dados, o experimento elab. 14 e 19 foram
elaborados uma terceira experiência de elab. 19, por segu-
rimento de dados, de duas em duas, com pontos de
gráficos, após a qual foram gerados os gráficos.~~

Depois de sobpor um gráfico os dados experimentais
de $x_A(t)$ e $x_{CM}(t)$, determinou-se $(v_{CM})_{aj.}$ através
de um ajuste linear.

A velocidade do CM correspondendo ao declive
do gráfico de ajuste de posição do CM e torna
o valor de:

$$(v_{CM})_{aj.} = m = (22,50 \pm 0,09) \text{ cm/s}$$

$$\frac{22,50 \text{ cm}}{1 \text{ s}} = \frac{22,50 \times 10^{-2} \text{ m}}{1 \text{ s}} = 0,2250 \text{ m/s}$$

$$(v_{CM})_{aj.} = (0,2250 \pm 0,0009) \text{ m/s}$$

Após uma análise dos conjuntos de dados,
fica visual que as interseções de $x_A(t)$ e $x_{CM}(t)$
se dão para $t_1 \approx 0,420 \text{ s}$; $t_2 \approx 0,820 \text{ s}$; $t_3 \approx 1,400 \text{ s}$; $t_4 \approx 1,840 \text{ s}$

Nos instantes t_1 e t_3 o ponto A está em
contato com a calha, daí possuir um valor de
 x muito próximo do CM.

Nos instantes t_2 e t_4 o ponto A encontra-se
na zona de altura máxima, estando alinhado
com o CM, daí possuir um valor de x muito
próximo do mesmo.

Efetuarando $t_3 - t_1$ ou $t_4 - t_2$ obtém-se o período
de uma rotação:

$$T = t_3 - t_1 = t_4 - t_2 = 0,920 \text{ s} \quad T = (0,920 \pm 0,001) \text{ s}$$

$$v(t_1) = 0,001 \quad v(t_2) = 0,001$$

$$v(t_3) = 0,0015 \quad v(t_4) = 0,001$$

$$T = (0,92 \pm 0,001) s$$

~~Período de oscilação:~~

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0,92} = 6,83 \text{ Rad/s}$$

~~Período de oscilação:~~

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0,92} = 6,83 \text{ Rad/s}$$

~~Período de oscilação:~~

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0,92} = 6,83 \text{ Rad/s}$$

$$\omega = (6,830 \pm 0,007) \text{ Rad/s}$$

$$x_A(t) = V_{CM} t + \frac{V_{CM}}{\omega} \sin \omega t$$

$$r = (3,4 \pm 0,2) \text{ cm}$$

$$(V_{CM})_{\text{máx}} = (22,50 \pm 0,02) \text{ cm/s}$$

$$\Rightarrow x_A(t) = 22,50 t + \frac{22,50}{6,830} \sin(6,830 t)$$

• Como já foi visto, nos instantes $t \approx 0,480 \text{ s}$ e $t \approx 1,400 \text{ s}$ o ponto A está em contacto com o plano, e como o movimento é semi-espiral, a velocidade no ponto de contacto deveria ser nula.

E de facto, isso é verificado no gráfico. Nos instantes considerados a tangente ao gráfico é praticamente horizontal (máx) o que confirma que a velocidade de A quando está em contacto é praticamente nula.

$$(V_A)_{\text{cont.}} \approx 0 \text{ cm/s}$$

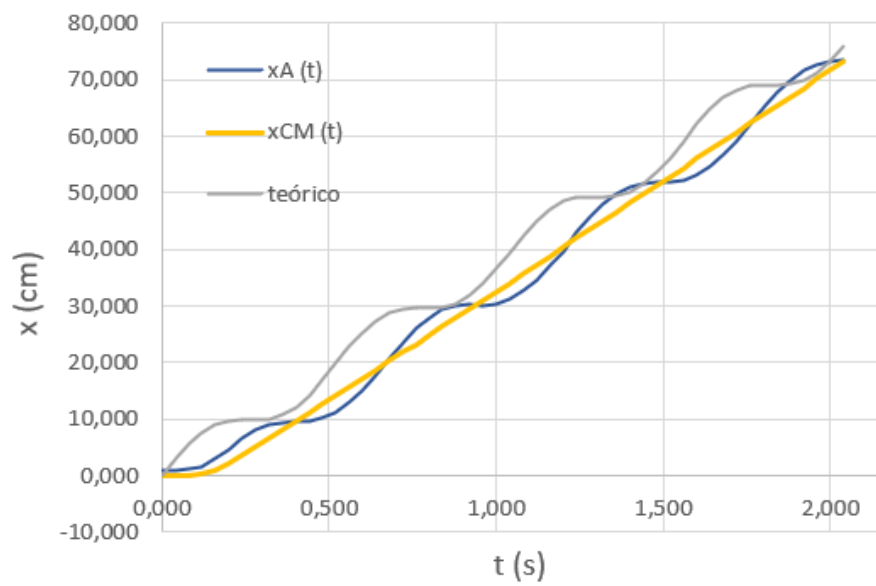
$$x'(t) = v(t)$$

• Como também já foi visto, nos instantes $t \approx 0,920 \text{ s}$ e $t \approx 1,840 \text{ s}$ o ponto A encontra-se no topo e como o movimento é semi-espiral, a velocidade nesse ponto deveria ser máxima, como é evidenciado no esquema (2) no início.

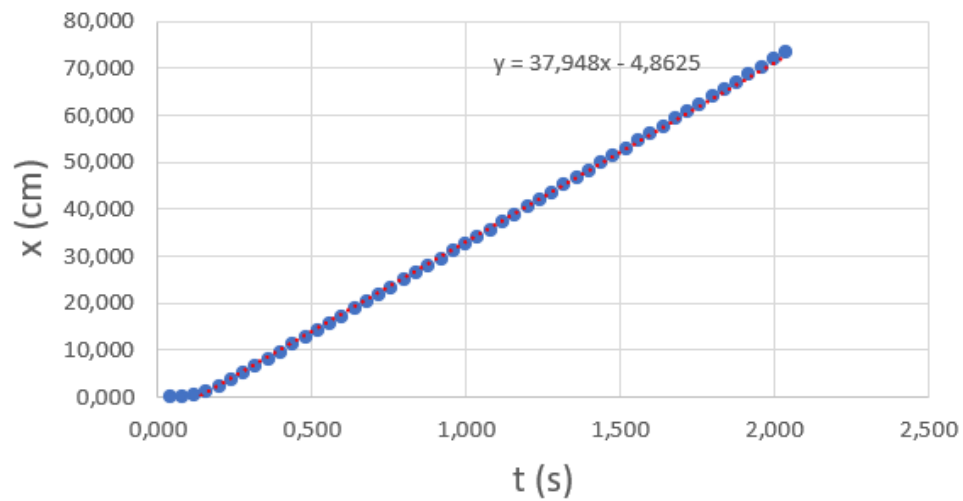
Vídeo 00170

Ponto A		CM		
t (s)	x (cm)	t (s)	x (cm)	xA(t) aj.
0,000	0,834	0,000	-0,022	0
0,040	0,996	0,040	0,087	2,977458
0,080	1,254	0,080	0,160	5,62056
0,120	1,642	0,120	0,414	7,671545
0,160	2,935	0,160	1,068	9,008299
0,200	4,485	0,200	2,231	9,672328
0,240	6,549	0,240	3,539	9,85925
0,280	8,092	0,280	5,029	9,873981
0,320	9,088	0,320	6,629	10,06089
0,360	9,470	0,360	8,010	10,72488
0,400	9,597	0,400	9,610	12,0616
0,440	9,697	0,440	11,136	14,11255
0,480	10,158	0,480	12,626	16,75563
0,520	11,204	0,520	14,043	19,73307
0,560	12,799	0,560	15,678	22,71054
0,600	15,074	0,600	17,169	25,35367
0,640	17,801	0,640	18,768	27,40469
0,680	20,650	0,680	20,331	28,74148
0,720	23,398	0,720	21,821	29,40554
0,760	26,014	0,760	23,238	29,59248
0,800	28,011	0,800	24,838	29,60721
0,840	29,394	0,840	26,328	29,7941
0,880	30,130	0,880	27,964	30,45806
0,920	30,319	0,920	29,454	31,79474
0,960	30,029	0,960	31,052	33,84566
1,000	30,294	1,000	32,507	36,48871
1,040	31,336	1,040	34,070	39,46615

1,080	32,608	1,080	35,632	42,44363
1,120	34,498	1,120	37,230	45,08678
1,160	37,226	1,160	38,830	47,13783
1,200	39,689	1,200	40,393	48,47466
1,240	42,829	1,240	41,956	49,13875
1,280	45,641	1,280	43,482	49,32571
1,320	47,931	1,320	45,081	49,34044
1,360	49,831	1,360	46,536	49,52731
1,400	50,954	1,400	48,243	50,19125
1,440	51,530	1,440	49,842	51,52789
1,480	51,785	1,480	51,406	53,57877
1,520	51,980	1,520	52,969	56,22179
1,560	52,277	1,560	54,459	59,19922
1,600	53,064	1,600	55,985	62,17671
1,640	54,498	1,640	57,621	64,81989
1,680	56,580	1,680	59,184	66,87098
1,720	59,145	1,720	60,746	68,20785
1,760	62,191	1,760	62,309	68,87197
1,800	65,037	1,800	63,907	69,05894
1,840	67,752	1,840	65,434	69,07367
1,880	69,977	1,880	66,996	69,26053
1,920	71,651	1,920	68,560	69,92443
1,960	72,646	1,960	70,231	71,26103
2,000	73,157	2,000	71,759	73,31187
2,040	73,381	2,040	73,358	75,95488

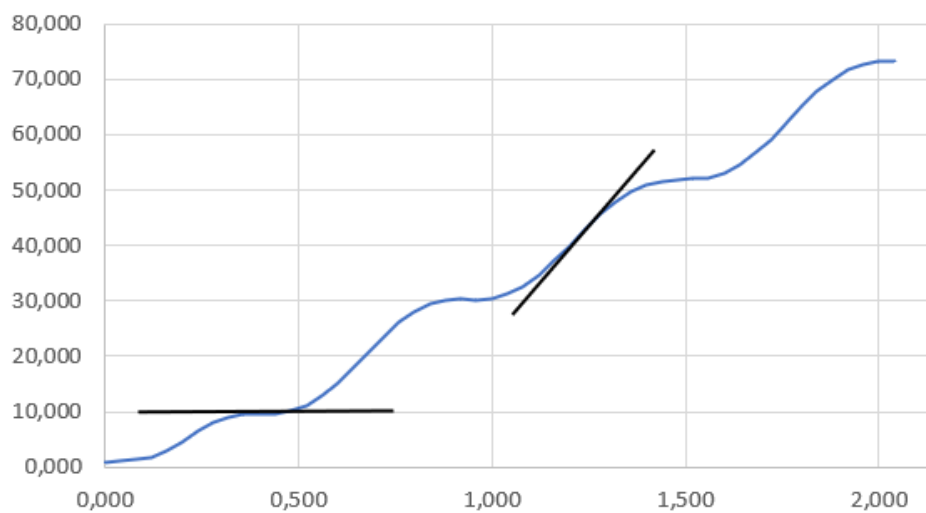


$x_{CM}(t)$ e Linearização



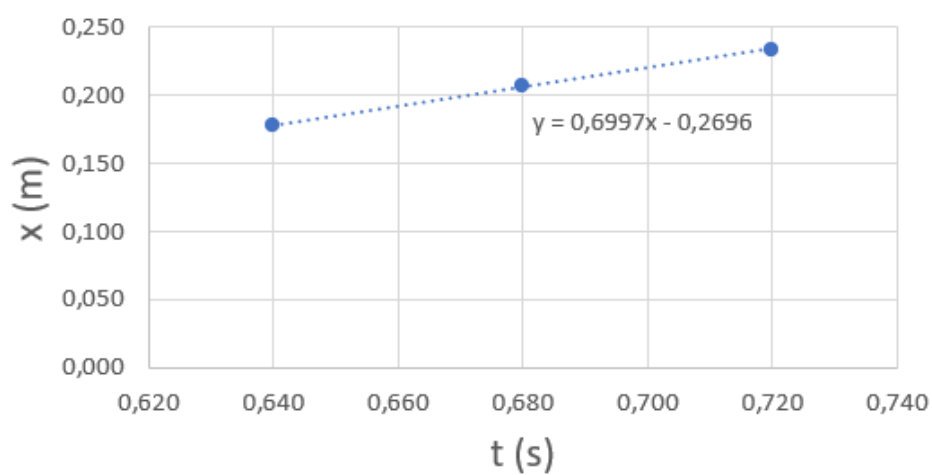
	m	37,9	-4,9	b	
	u(m)	0,2	0,3	u(b)	
	r ²	0,998	1,0	u(y)	

Tangentes

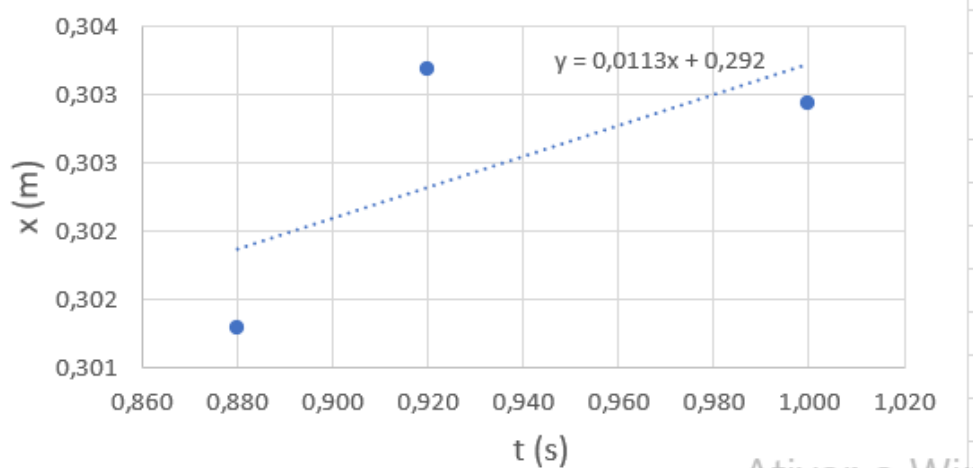


TANGENTE 3ª		TANGENTE 2ª	
t(s)	x(m)	t(s)	x(m)
0,880	0,301	0,640	0,178
0,920	0,303	0,680	0,207
1,000	0,303	0,720	0,234

Tangente aproximada da 2ª interseção



Tangente aproximada da 3ª interseção



De facto, isso é verificado no gráfico. Nos instantes considerados a tangente ao gráfico possui o maior declive, logo maior velocidade do ponto A. ($2V_m$)

Nota: As tangentes ao gráfico estão representadas a preto!

Video 00170.avi

$$(V_m)_{aj.} = m = (37,9 \pm 0,2) \text{ cm/s}$$

$$37,9 \text{ cm/s} = 0,379 \text{ m/s}$$

$$(V_m)_{aj.} = (0,379 \pm 0,002) \text{ m/s}$$

Após uma análise dos conjuntos de dados fica visível que as ^{primeiras 4} interseções de $x_A(t)$ e $x_m(t)$ se dão para $t_1 \approx 0,400 \text{ s}$; $t_2 \approx 0,620 \text{ s}$; $t_3 \approx 0,920 \text{ s}$; $t_4 \approx 1,200 \text{ s}$

$$V(t_1) = V(t_2) = V(t_3) = V(t_4) = 0,001 \text{ s}$$

t_1 e t_3 ocorrem quando A está em contacto com o solo

t_2 e t_4 ocorrem quando A está no topo.

$$T = t_3 - t_1 = t_4 - t_2 = 0,520 \text{ s}$$

$$(0,920 - 0,400 = 0,520) \quad (1,200 - 0,620 = 0,520)$$

$$T = (0,520 \pm 0,001) \text{ s}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0,520} \approx 12,02 \text{ rad/s}$$

$$\omega = (12,08 \pm 0,02) \text{ rad/s}$$

$$x_A(t) = V_{cm}t + \frac{V_{cm}}{\omega} \sin(\omega t)$$

$$\Rightarrow x_A(t) = 37,9t + \frac{37,9}{12,08} \sin(12,08t)$$

$$\Rightarrow x_A(t) = 37,9t + 3,137 \sin(12,08t)$$

- Como já foi visto, nos instantes $t \approx 0,400 \text{ s}$ e $t \approx 0,920 \text{ s}$ o ponto A está em contacto com o plano, e como o rolamento é sem deslizamento, a velocidade no ponto de contacto deveria ser nula.

E de facto, isso é verificado no gráfico. Nos instantes considerados a tangente ao gráfico é praticamente horizontal ($m \approx 0$) o que confirma que a velocidade de A quando está em contacto é praticamente nula.

$$(V_A)_{\text{cont.}} \approx 0 \text{ m/s}$$

$$x'(t) = v(t)$$

- Como também já foi visto, nos instantes $t \approx 0,620 \text{ s}$ e $t \approx 1,200 \text{ s}$ o ponto A encontra-se no topo e como o rolamento é sem deslizamento a velocidade nesse ponto deveria ser máxima, como é evidenciado no esquema (2) no início.

De facto, isso é verificado no gráfico. Nos instantes considerados a tangente ao gráfico possui o maior declive, logo maior velocidade do ponto A ($2V_{cm}$).

NOTA: As tangentes no gráfico estão representadas a preto!

Prova das velocidades:

- Quando o ponto A se encontra no topo a velocidade deveria ser $2v_{CM}$. Veremos se tal acontece.

Video 00143.AVI

Após escolher 3 pontos do gráfico de $x_A(t)$ muito próximos referentes ao instante de interseção em que o ponto A passa no topo, obteve-se o seguinte declive da tangente:

$$m = 0,4375$$

~~Se dividirmos por 2:~~

$$m/2 = 0,21875$$

Como foram utilizadas distâncias em m,
o valor da velocidade no topo é então
 $43,75 \text{ cm/s}$

$$2v_{CM} = 43,75 \text{ cm}$$

$\Rightarrow v_{CM} \approx 21,9 \text{ cm/s}$, que é muito próximo do valor de v_{CM} obtido anteriormente ($22,5 \text{ cm/s}$)

Confirma-se então que $v_{\text{topo}} \approx 2v_{CM}$!

Video 00170.AVI

Efetua-se o mesmo processo.

(...)

$$m = 0,6997$$

Como foram utilizadas distâncias em m, o valor da velocidade no topo é então $69,97 \text{ cm/s}$

$$2V_{CM} = 69,97 \text{ cm/s}$$

$\Rightarrow V_{CM} \approx 35 \text{ cm/s}$, que é muito próximo do valor de V_{CM} obtido anteriormente (37,9 cm/s)

O valor poderia até estar mais próximo, contudo, devido a alguns arredondamentos, ocorreu a tal pequena discrepância.

Confirma-se então que $V_{topo} \approx 2V_{CM}$!

- Quando o ponto A se encontra em contacto com a calha a velocidade deveria ser nula. Vejamos se tal acontece.

Video 00143.AVI

Após escolher 3 pontos do gráfico de $x_A(t)$ muito próximos referentes ao instante de interseção em que o ponto A toca na calha, obteve-se o seguinte declive da tangente:

$$m = 0,0088 \approx 0 \text{ m/s}$$

Confirma-se então que $V_{contacto} \approx 0 \text{ m/s}$!

Video 00170.AVI

Efetua-se o mesmo processo.
(...)

$$m = 0,0113 \approx 0 \text{ m/s}$$

Confirma-se então que $V_{cont.} \approx 0 \text{ m/s}$!

Conclusões

Discussão

- Eventuais desvios do comportamento de $x_{cm}(t)$ a uma evolução linear podem ser explicados dando a vários fatores tais como: a calha não estar totalmente na horizontal; a calha apresentar alguma rugosidade; a superfície do cilindro não estar totalmente polida apresentando irregularidade e rugosidade; a existência de fendas externas que provocam dissipação de energia; mau funcionamento da câmara de vídeo...

De maneira a não apresentar desvios de uma evolução linear, ou seja, impondo que v_{cm} é mesmo constante, teríamos que ter tido em conta todos estes aspetos corrigindo o erro de mesmo assim não nos livrarmos dos desvios, visto, em parte, eles serem inevitáveis.

- A curva teórica da posição de A foi obtida e disposta nos gráficos referentes a ambos os vídeos. Para o vídeo 143, em que o cilindro se desloca da esquerda para a direita, a curva teórica ficou muito próxima da experimental (praticamente sobreposta em quase todo o intervalo de tempo), tendo resultado num sucesso, já para o vídeo 170, em que o cilindro se desloca da direita para a esquerda, a curva teórica ficou um bocado desfazada em relação à experimental, tendo uma das causas possíveis sido provavelmente o arredondamento em certos cálculos intermédios.
- As tangentes efetuadas comprovaram o que já se esperava: a velocidade no ponto de contacto com o solo é nula e a velocidade no ponto de altura máxima é também ela máxima e com um valor de $2v_{cm}$, aproximadamente. (isto para o caso de rolamento sem escorregamento)