

Estudo do Movimento de Projéteis

Diogo Gonçalves

Departamento de Física e Astronomia,
Faculdade de Ciências da Universidade do Porto

Junho 2022

Abstract

Neste trabalho estudou-se e analisou-se a dependência do alcance de um projétil relativamente ao seu ângulo inicial para iguais níveis de lançamento e impacto. Determinou-se também a velocidade (média) de lançamento e o alcance máximo, com erros de 11% e 19%, respetivamente.

1 Introdução

Na realização da atividade experimental foi usado um lançador de projéteis com ângulo ajustável, fixado a uma secção da bancada. (figura 1)

Utilizou-se também uma bola de reduzidas dimensões considerada como uma massa pontual m que foi lançada inúmeras vezes ao longo da experiência através do lançador. O impacto da mesma deu-se numa plataforma colocada estrategicamente na bancada sendo que a altura desta coincidia exatamente com a altura da boca do lançador. (figura 2)



Figura 1: Lançador



Figura 2: Lançador e plataforma de embate

A massa pontual m percorre a sua trajetória estando sujeita apenas à aceleração gravítica, \vec{g} , que se supõe constante. Sendo \vec{r} o vetor de posição do projétil num instante t .

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{g} \quad (1)$$

O projétil parte do ponto inicial $\vec{r}_0 = (x_0, y_0)$ com velocidade $\vec{v}_0 = (v_0 \cos \theta, v_0 \sin \theta)$ sendo θ a amplitude do ângulo de lançamento, em graus.

Aplicando duas vezes integração obtém-se as componentes de $\vec{r}_{(t)} = (x(t), y(t))$:

$$x(t) = x_0 + v_0 \cos \theta t \quad (2)$$

$$y(t) = y_0 + v_0 \sin \theta t - \frac{gt^2}{2} \quad (3)$$

E como o ponto inicial coincide com a origem do referencial:

$$x(t) = v_0 \cos \theta t \quad (4)$$

$$y(t) = v_0 \sin \theta t - \frac{gt^2}{2} \quad (5)$$

Obter v_0 : (para $y=0$)

$$\begin{aligned} \begin{cases} x(t) = v_0 \cos \theta t \\ y(t) = v_0 \sin \theta t - \frac{gt^2}{2} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{x}{v_0 \cos \theta} \\ 0 = v_0 \sin \theta t - \frac{gt^2}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{v_0 \sin \theta x}{v_0 \cos \theta} = \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \theta} \end{cases} \\ 2v_0^3 \sin \theta \cos^2 \theta x &= v_0 \cos \theta gx^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2v_0^2 \sin \theta \cos \theta &= gx \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow v_0 &= \sqrt{\frac{gx}{2 \sin \theta \cos \theta}} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow v_0 &= \sqrt{\frac{gx}{\sin 2\theta}} \end{aligned} \quad (6)$$

v_0 é, portanto, a velocidade de lançamento a um ângulo θ necessária para se conseguir atingir um dado alcance x .

Deduzir para o alcance x :

$$\begin{aligned}2v_0^3 \sin \theta \cos \theta^2 x &= v_0 \cos \theta g x^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x g &= 2v_0^2 \sin \theta \cos \theta \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x &= \frac{2v_0^2 \sin \theta \cos \theta}{g} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x &= \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}\end{aligned}\tag{7}$$

Assim é fácil entender que o alcance máximo se dá para $\theta = 45^\circ$.

Nestas duas últimas deduções considerou-se que $y = 0$ já que os pontos de lançamento e de embate se encontram ao mesmo nível.

2 Experiência

2.1 Método experimental

2.1.1 Determinação do valor da velocidade inicial da esfera

- Montou-se o lançador sobre a mesa, alinhado com o alvo de embate, e ajustou-se o ângulo de lançamento para $\theta = 45^\circ$.
- Disparou-se uma vez a esfera para localizar o ponto de embate. Para tal, segurou-se no lançador com a mão esquerda e puxou-se o cordel com a mão direita, de maneira a minimizar deslocamentos/vibrações.
- Colocou-se por cima da plataforma de embate uma folha de papel milimétrico alinhada com os bordos da mesa e, por cima desta, uma folha de papel químico.
- Variou-se a amplitude do ângulo de lançamento de 3 em 3 graus, alternando-se para cima como para baixo dos 45° . Para cada ângulo efetuaram-se 5 lançamentos.
- Ao fim de cada lançamento, numerou-se o respetivo ensaio no papel milimétrico.
- Mediu-se, com a ajuda de um fio de prumo e da régua presa à bancada, a distância x entre o ponto de lançamento na boca do lançador e o ponto de impacto da esfera. Se estes dois pontos estivessem perfeitamente alinhados, bastaria fazer $x = d_1 + d_2$. Tal não aconteceu, por isso foi necessário efetuar Teorema de Pitágoras, sendo $d_1 + d_2$ o cateto maior e h o cateto menor. " h " representa a distância entre o ponto de embate e a reta imaginária que sai da boca do lançador e atravessa a plataforma. (figura 3)

$$x = \sqrt{(d_1 + d_2)^2 + h^2}\tag{8}$$

- Determinou-se $v_0 \pm u(v_0)$ para cada um dos ângulos estudados.
- Representou-se graficamente v_0 em função de θ .

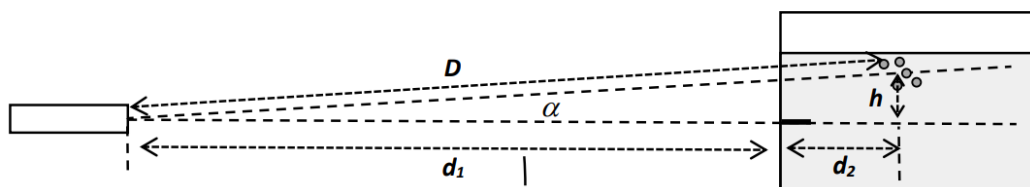


Figura 3: Alcance $x = D \neq d_1 + d_2$ proporcionado por um desvio α do lançador.

2.1.2 Determinação do alcance máximo

- Após efetuar os lançamentos, representou-se graficamente os resultados experimentais para $x(\theta)$.
- Representou-se graficamente $x(\sin 2\theta)$ e obteve-se a equação da reta que melhor se ajustava aos dados experimentais.

2.2 Resultados e Análise

2.2.1 Resultados: Determinação do valor da velocidade inicial da esfera

Ao longo da atividade, d_1 não se manteve constante para cada ângulo, como é óbvio, e o maior valor desta grandeza foi atingido para $\theta = 45^\circ$. Isto faz sentido já que o alcance costuma ser máximo para tal amplitude.

Tendo em conta que $x = \sqrt{(d_1 + d_2)^2 + h^2}$, obteve-se a tabela 1, que fornece registos do ângulo θ , do alcance x e do Seno do dobro do ângulo θ .

θ	x	$\text{Sen}(2\theta)$
24.0	1.7607	0.74
27.0	1.7632	0.81
30.0	1.7941	0.866
33.0	1.8174	0.914
36.0	1.9003	0.951
39.0	1.9481	0.978
42.0	2.0058	0.995
45.0	2.0271	1
48.0	2.0303	0.995
51.0	2.0323	0.978
54.0	1.9994	0.951
57.0	1.9503	0.914
60.0	1.8852	0.866
63.0	1.8717	0.81
66.0	1.6668	0.74

Tabela 1: Resultados de θ , x e $\sin 2\theta$

No cálculo de $\sin 2\theta$ utilizaram-se os ângulos convertidos para radianos. Foi feita tal escolha porque ao utilizar θ em graus, alguns valores de $\sin 2\theta$ seriam negativos, o que impossibilitaria o posterior cálculo de v_0 visto $v_0 = \sqrt{\frac{gx}{\sin 2\theta}}$, isto porque a calculadora do Excel está formatada para fazer cálculos em radianos.

As restantes medições encontram-se registadas no Anexo.

Considerando que $g = 9,80665m/s^2$ e $v_0 = \sqrt{\frac{gx}{\sin 2\theta}}$ obteve-se os valores de v_0 referentes a cada ângulo θ , bem como as respetivas incertezas. Obteve-se também a representação gráfica de $v_0(\theta)$.

V0	u (V0)
4.459	0.002
4.474	0.005
4.447	0.004
4.514	0.009
4.419	0.009
4.54	0.01
4.43	0.01
4.58	0.02
4.42	0.02
4.62	0.02
4.51	0.03
4.76	0.03
4.62	0.03
4.69	0.04
4.82	0.04

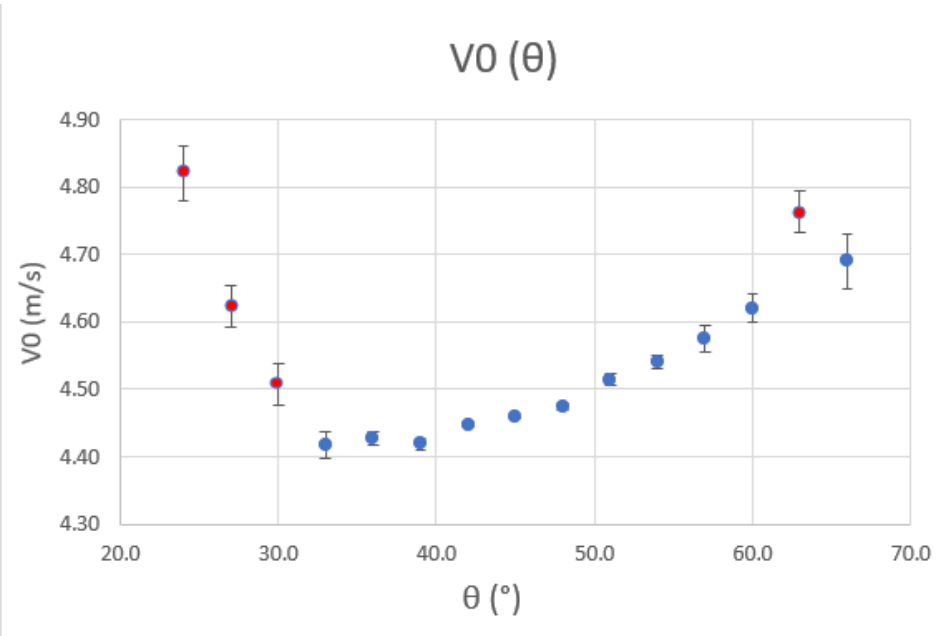


Tabela 2: v_0 e incertezas

Figura 4: Velocidade inicial (v_0) em função do ângulo de lançamento (θ)

Os pontos vermelhos representam os pontos duvidosos, pontos esses que não foram utilizados para o ajuste linear, ao contrário dos restantes a azul que apresentam uma gama experimental mais ou menos dentro do esperado.

Foram inseridas barras de erro experimentais, tal como é possível observar no gráfico, tendo em conta as incertezas associadas às medições da velocidade inicial de lançamento. As barras apresentam, no geral, reduzidas dimensões para ângulos que estão mais próximos dos 45° . O mesmo não acontece para ângulos com amplitudes à volta de 65° e 25° . A verdade é que é notável a tendência de o tamanho das barras de erro aumentar à medida que a amplitude se afasta dos 45° . Tal acontece devido à fórmula de propagação de incerteza utilizada (ver Anexo) e isto significa que para θ com amplitudes mais afastadas de 45° há uma menor probabilidade de se ter o valor real.

De qualquer das maneiras, também é notável que na gama de pontos não duvidosos apresentada existe uma certa tendência linear entre v_0 e θ .

Após ajuste linear (ferramenta do Excel “Proj.Lin”):

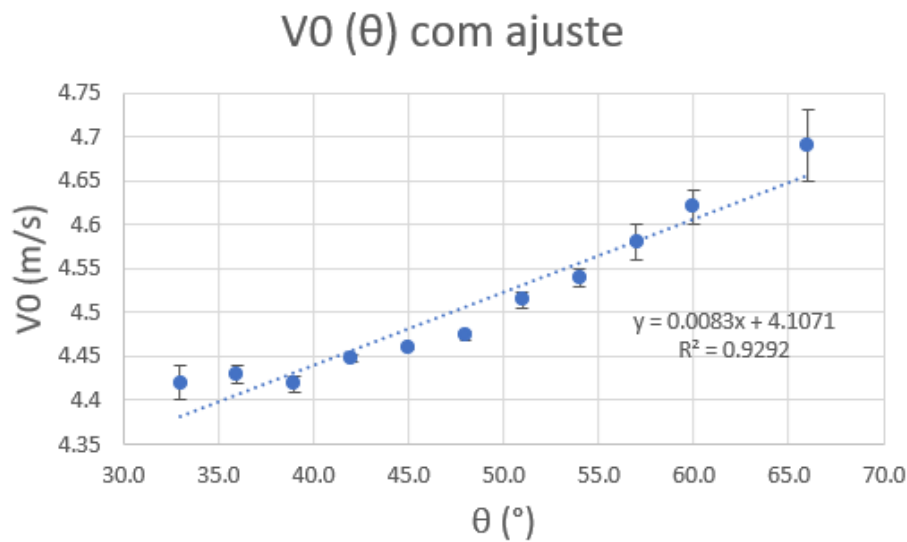


Figura 5: Ajuste linear efetuado a $v_0(\theta)$

m	0.0083	4.11	b
u(m)	0.0008	0.04	u(b)
r^2	0.93	0.03	u(y)

Tabela 3: Declive e ordenada na origem bem como outros parâmetros obtidos através do Proj.Lin

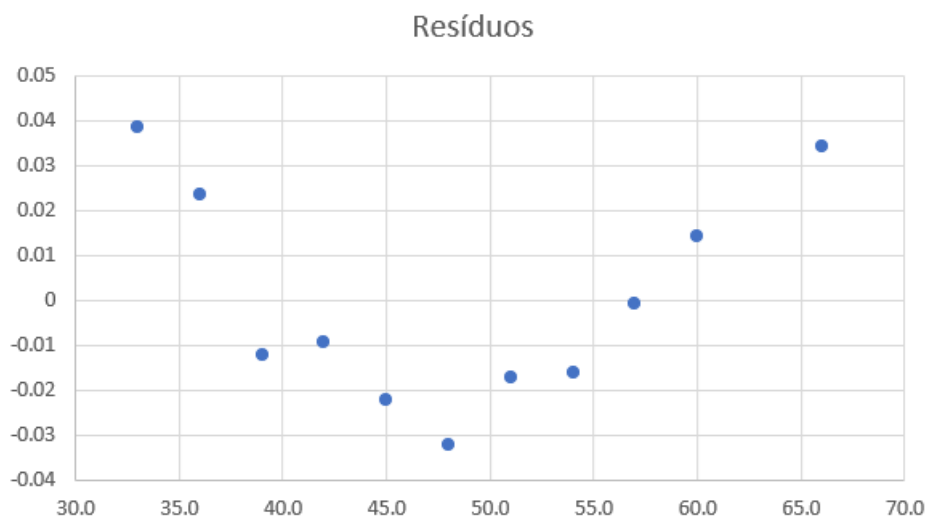


Figura 6: Gráfico de resíduos de v_0 em função de θ .

Como é possível observar no gráfico da figura 7, os resíduos estão mais ou menos espalhados, chegando a demonstrar uma leve tendência, mesmo com a remoção no ajuste dos 4 pontos duvidosos. Tal resultou, provavelmente, de erros aleatórios aquando da realização da atividade, que fizeram com que os dados de $v_0(\theta)$ não tivessem uma tendência totalmente linear.

Analisando a tabela 1 localizada algumas páginas atrás, é fácil entender que à medida que θ aumenta até 45° , x e $\sin 2\theta$ também aumentam chegando a atingirem (ou deveriam atingir) valores máximos nessa amplitude.

A verdade é que tal acontece para $\sin 2\theta$. Para 45° , $\sin 2\theta = 1$ (valor máximo) e para os restantes θ este parâmetro comporta-se na perfeição (até 45° aumenta; valor máximo em 45° ; a partir de 45° decresce).

O mesmo já não se pode dizer do alcance x . Tal como $\sin 2\theta$, x aumenta até 45° (correto), mas depois desta amplitude, x aumenta ligeiramente nos dois ângulos θ seguintes (48° e 51°), chegando a atingir valor máximo em $\theta = 51^\circ$. Isto não deveria acontecer.

Apesar de os aumentos em $\theta = 48^\circ$ e $\theta = 51^\circ$ serem muito pequenos, a verdade é que acontecem. x deveria ter o seu valor máximo em $\theta = 45^\circ$ e tal não aconteceu. Depois de $\theta = 51^\circ$ os dados de x comportam-se corretamente indo decrescendo até atingir o valor mínimo em $\theta = 66^\circ$ (1,6668).

A existência dos pontos duvidosos poderá ter a sua causa em fatores como:

- Erros nas medições e registo das distâncias (d_1 e d_2)
- Erros nos alinhamentos dos ângulos no lançador (entre ensaios do mesmo ângulo ou a mudar de ângulo)

Esta última causa é viável, mas no contexto da atividade desempenhada é a menos provável, visto ter havido um enorme cuidado na seleção dos ângulos a cada lançamento.

Determinação de v_0 médio e respetiva incerteza

$$v_0 = \frac{4,459 + 4,474 + 4,447 + (...) + 4,69 + 4,82}{15} = 4,553 \text{ m/s}$$

A incerteza da média é dada pela expressão:

$$u(v_0) = \frac{s}{\sqrt{N}} \quad (9)$$

Na equação (9) “s” representa o desvio padrão e “N” representa o número de dados da amostra.

$$u(v_0) = \frac{0,1272}{\sqrt{15}} = 0,03$$

Obteve-se então:

$$v_0 = (4,55 \pm 0,03) \text{ m/s}$$

A incerteza associada à média das velocidades iniciais é baixa (0,03). A incerteza relativamente a cada v_0 varia, ao longo da tabela, e toma valores geralmente inferiores à incerteza da média.

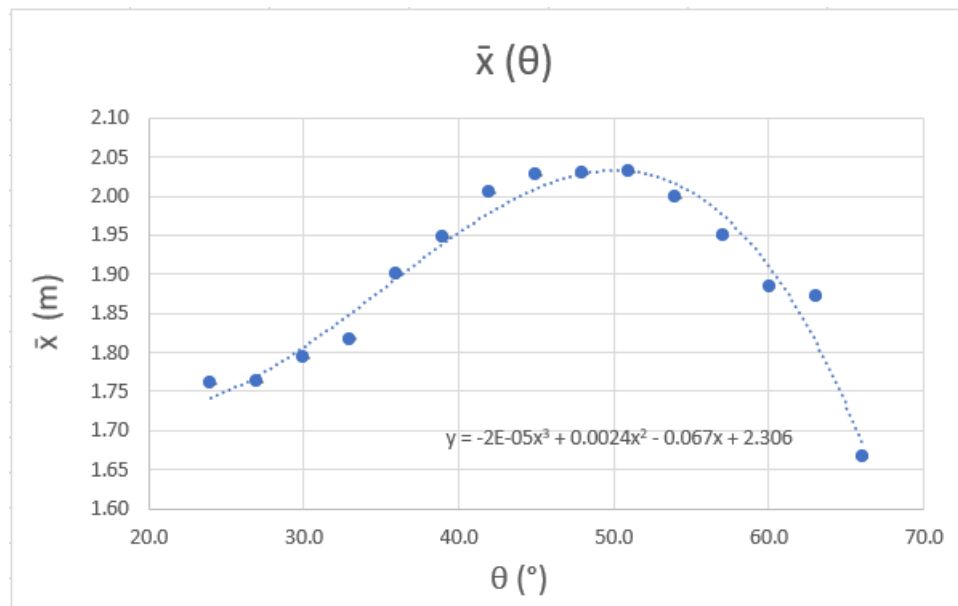


Figura 7: Alcance (x) em função do ângulo de lançamento (θ)

Tal como já foi referido anteriormente, o alcance máximo deveria ocorrer para $\theta = 45^\circ$. Isto não acontece, já que os valores do alcance para $\theta = 48^\circ$ e $\theta = 51^\circ$ são ligeiramente superiores (é agora mais fácil de visualizar pela figura 7). A curva obtida apresenta um formato mais ou menos dentro do que se esperava (parábola), contudo, não só o máximo atingido não corresponde ao esperado como também faltou a existência de uma certa simetria relativamente ao ângulo central (45°), já que ângulos com amplitudes a distarem o mesmo de 45° deveriam apresentar alcances semelhantes.

Obteve-se uma linha de tendência polinomial de grau 3 para melhor se analisar o conteúdo do gráfico e o seu comportamento.

Coeficientes obtidos: -0,00002; 0,0024; -0,067

Termo adicional: 2,306

Inseriu-se barras de erro verticais no gráfico da figura 7, mas como a incerteza relativa aos valores de \bar{x} é sempre constante e de reduzida dimensão (0,0003), as barras ficaram tão pequenas que nem se conseguem ver.

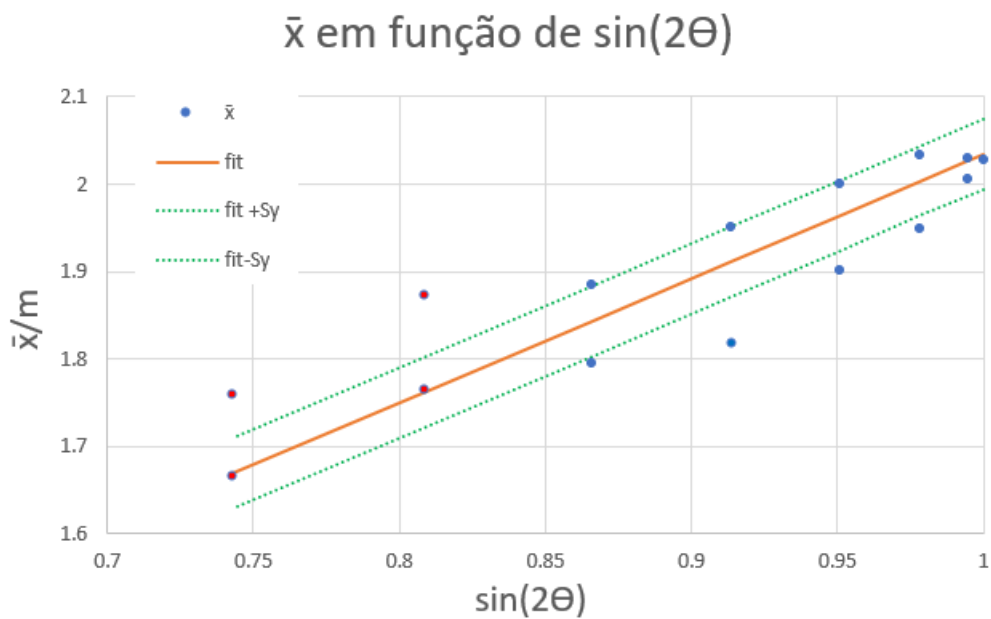


Figura 8: Alcance x em função de $\sin 2\theta$

m	1.7	0.3	b
u(m)	0.3	0.3	u(b)
r^2	0.86	0.04	u(y)

Tabela 4: Declive e ordenada na origem bem como outros parâmetros obtidos através do Proj.Lin

fit - u(y)	fit + u(y)
1.9884	2.0725
1.9789	2.0630
1.9789	2.0630
1.9506	2.0347
1.9506	2.0347
1.9038	1.9879
1.9038	1.9879
1.8391	1.9231
1.8391	1.9231
1.7570	1.8410
1.7570	1.8410
1.6585	1.7426
1.6585	1.7426
1.5447	1.6288
1.5447	1.6288

Tabela 5: “Retas fit” auxiliares

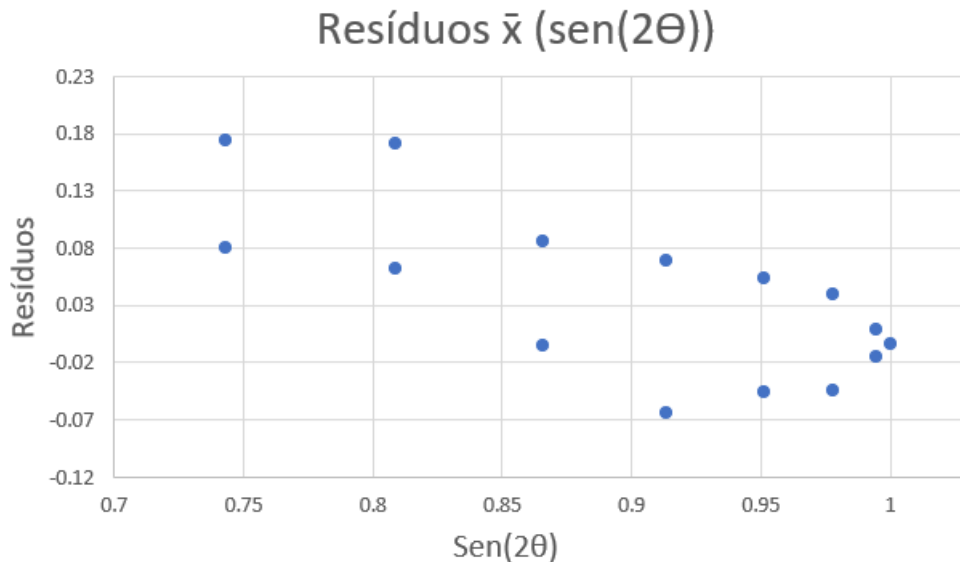


Figura 9: Gráfico de resíduos de \bar{x} em função de $\sin 2\theta$.

No ajuste linear (fit) deixaram-se de parte, mais uma vez, os pontos duvidosos marcados a vermelho. A escolha dos pontos duvidosos foi feita tendo em conta o comportamento dos dados experimentais num todo. Para $\sin 2\theta = 0.74$ e $\sin 2\theta = 0.81$ os alcances obtidos encontravam-se muito desfasados relativamente aos restantes pontos, daí a escolha feita.

Foi gerada a reta fit a laranja que demonstra a tendência dos pontos. Também se geraram as retas fit+u(y) e fit-u(y) para se ter uma noção da zona do gráfico onde se deveriam encontrar os dados experimentais. (gama esperada)

A equação da reta que melhor se ajusta aos dados experimentais é:

$$\bar{x} = 1,7 \sin 2\theta + 0,3 \quad (10)$$

O critério usado para a determinação da equação da reta foi, simplesmente, utilizar a ferramenta “Proj.Lin” sem contabilizar os pontos duvidosos e assim obter o declive (m) e a ordenada na origem (b), bem como os restantes parâmetros. O valor de r^2 obtido deveria ser um pouco maior para se poder considerar um bom e fidedigno ajuste linear. A verdade é que perante os dados experimentais obtidos tornou-se difícil a tarefa de obter um bom ajuste já que estes não são perfeitos e apresentam falhas.

Os resíduos encontram-se arbitrariamente espalhados, não demonstrando qualquer tendência.

A partir da análise de $\bar{x}(\sin 2\theta)$ conclui-se:

- A tal simetria referida anteriormente que deveria haver em relação ao alcance quando $\theta = 45^\circ$ não é verificada pelo gráfico. A verdade é que para o mesmo $\sin 2\theta$ obtém-se alcances diferentes. O par de ângulos cujo $\sin 2\theta$ é o mesmo e apresenta alcances mais próximos é o par constituído por 48° e 42° .

Determinação de v_0 teórico e erro percentual

$$v_0 = \sqrt{\frac{gx}{\sin 2\theta}} \Leftrightarrow x = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\theta, \text{ logo } \frac{v_0^2}{g} \text{ é o declive (m) do gráfico } \bar{x}(\sin 2\theta).$$

$$m = \frac{v_0^2}{g} \Leftrightarrow v_0 = \sqrt{mg} \Leftrightarrow v_0 = \sqrt{1.7 * 9.80665} \Leftrightarrow v_0 = 4.08 \text{ m/s (valor teórico)}$$

$$u(v_0) = \sqrt{\left(\frac{9.80665}{2 * \sqrt{9.80665 * m}} * u(m)\right)^2} = 0.4$$

$$v_0 = (4.1 \pm 0.4) \text{ m/s}$$

$$\text{Erro}(\%) = \frac{|4.55 - 4.1|}{4.1} * 100 \simeq 11 \%$$

2.2.2 Resultados: Determinação do alcance máximo

Obter \bar{x}_{max} experimental:

Pela análise da tabela 1 percebe-se que o alcance máximo é atingido para $\theta = 51^\circ$ e toma o valor de 2.0323 m.

$$\bar{x}_{\max (\text{exp.})} = (2.0323 \pm 0.0003) \text{ m}$$

Obter \bar{x}_{max} teórico:

Como o valor máximo de x deveria ocorrer para $\theta = 45^\circ$, e para este ângulo $\sin 2\theta = 1$, então $\bar{x} = m \sin 2\theta + b$ resume-se a $\bar{x} = m$ (considerando também que $b \simeq 0$)

Então, o valor teórico é:

$$\bar{x}_{\max (\text{teo.})} = (1.7 \pm 0.3) \text{ m}$$

Determinar erro percentual:

$$Erro(\%) = \frac{|2.0323 - 1.7|}{1.7} * 100 \simeq 19 \%$$

Os erros percentuais obtidos, tanto para a velocidade de lançamento como para o alcance máximo, não são nada baixos e provam que houve falhas ao longo da atividade experimental. De entre essas falhas está por exemplo o facto de muito provavelmente o lançador ter estado com uma certa inclinação na horizontal. Ou seja, não ter estado totalmente alinhado com a plataforma de embate e ter efetuado lançamentos cujas bolas embatiam em pontos da superfície que se encontravam bastante afastados da linha imaginária que sai da boca do lançador. Este acontecimento foi comprovado pela folha de papel milimétrico, que demonstrou que os pontos de embate se encontravam todos à direita da linha, sendo que alguns bastante afastados da mesma.

Outra possível falha pode ter sido a medição das distâncias. Estas medições não eram diretas nem nada triviais, já que $x = \sqrt{(d_1 + d_2)^2 + h^2}$, o que poderia, muito facilmente, levar a uma certa discrepância entre o valor obtido e o valor real, e portanto, constituir uma importante e relevante fonte de erro.

Relativamente à seleção dos ângulos θ no lançador, considera-se que esta tarefa não constituiu provavelmente uma significativa fonte de erro, já que houve um enorme cuidado e uma constante confirmação de que as amplitudes não variavam entre lançamentos do mesmo ângulo.

Por fim, há que ter em conta também o estado e qualidade do lançador, parâmetros extremamente relevantes para o sucesso de uma atividade experimental e que os docentes da disciplina confirmavam e lembravam que não eram, sem dúvida, os melhores.

A verdade é que o lançador utilizado na atividade apresentava já um certo desgaste e incapacidade de efetuar lançamentos totalmente fidedignos. Uma prova disso foi o facto de para um mesmo ângulo, a bola ter sido projetada a diferentes alcances (bastante diferentes aliás) se se colocasse a mão esquerda na parte de trás do lançador ao invés de a colocar por cima do mesmo. (foi feito esse teste aquando da atividade)

Um aspeto a ter em conta também, relativamente ao lançador, quer ele seja recém-construído ou antigo, é a existência de forças de atrito aplicadas à bola, dentro do lançador, pelas paredes do mesmo, logo após se puxar o cordel de lançamento. Isto, sem dúvida, afeta o alcance que a bola depois terá.

2.3 E se $x = d_1 + d_2$?

Experimentou-se usar $x = d_1 + d_2$ e não $x = \sqrt{(d_1 + d_2)^2 + h^2}$.

Constata-se, surpreendentemente, que as diferenças entre valores são insignificantes, pelo que os gráficos obtidos são praticamente iguais aos iniciais.

Tal acontece porque o valor d_1 é muito maior que a distância h de desvio.

$$(d_1 + d_2 \gg h)$$

É possível ver as enormes semelhanças na figura 10, que representa graficamente $x(\theta)$ obtido através de $x = d_1 + d_2$.

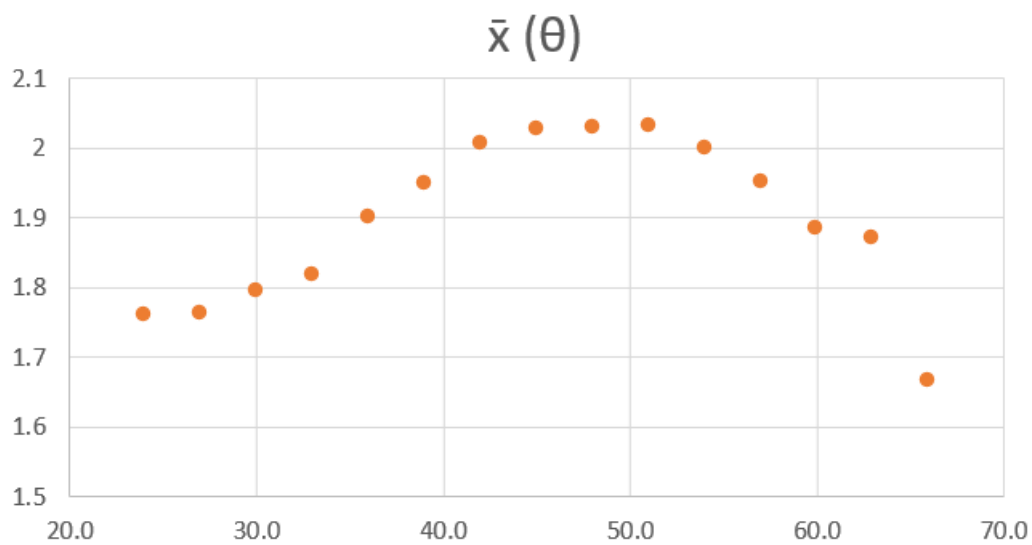


Figura 10: $x(\theta)$ para $x = d_1 + d_2$

3 Conclusão

- O alcance do projétil depende do ângulo inicial de lançamento e toma o seu valor máximo à volta de $\theta = 45^\circ$, quando os níveis de lançamento e impacto são iguais.
- O alcance máximo foi de (2.0323 ± 0.0003) m com um ângulo inicial $\theta = 51^\circ$.
- A velocidade de lançamento média obtida foi de (4.55 ± 0.03) m/s.
- As incertezas referentes aos dois parâmetros determinados são bastante baixas.
- Apesar de vários valores inesperados terem causa em possíveis erros aleatórios aquando da experiência, conclui-se que o lançador está longe de ser perfeito, o que proporcionou alguns desvios das gamas esperadas.

Referências

[1] Responsáveis pela unidade curricular FIS1005. Trabalho 6b: Estudo do Movimento de Projéteis. 2021/2022

Anexo

Cálculo de incertezas

Alcance (x)

$$u(x) = \sqrt{((d_1 + d_2) * ((d_1 + d_2)^2 + h^2)^{-0.5} * u(d_1))^2 + ((d_1 + d_2) * ((d_1 + d_2)^2 + h^2)^{-0.5} * u(d_2))^2 + (h * ((d_1 + d_2)^2 + h^2)^{-0.5} * u(d_1))^2}$$

Média dos alcances (\bar{x})

$$u(\bar{x}) = \sqrt{(\frac{1}{5} * u(x_1))^2 + (\frac{1}{5} * u(x_2))^2 + (\frac{1}{5} * u(x_3))^2 + (\frac{1}{5} * u(x_4))^2 + (\frac{1}{5} * u(x_5))^2}$$

Seno ($\sin 2\theta$)

$$u(\sin 2\theta) = \left| \frac{\sin(2\theta + \Delta\theta) - \sin(2\theta - \Delta\theta)}{2} \right|$$

Velocidade inicial (v_0)

$$u(v_0) = \sqrt{\left(\frac{\left(\frac{\bar{x}g}{\sin 2\theta}\right)^{-0.5} * 4.903325}{\sin 2\theta} * u(\bar{x})\right)^2 + \left(-\left(\frac{\bar{x}g}{\sin 2\theta^2} * 0.5 * \left(\frac{\bar{x}g}{\sin 2\theta}\right)^{-0.5}\right) * u(\sin 2\theta)\right)^2}$$

Tabelas

θ (°)	d1 (m)	1º d2 (m)	2º d2 (m)	3º d2 (m)	4º d2 (m)	5º d2 (m)	h1 (m)	h2 (m)	h3 (m)	h4 (m)	h5 (m)
(± 0.5)	(±0.0003)	(± 0.0005)	(± 0.0005)	(± 0.0005)	(± 0.0005)	(± 0.0005)	(± 0.0005)	(± 0.0005)	(± 0.0005)	(± 0.0005)	(± 0.0005)
45.0	1.9425	0.0890	0.0930	0.0800	0.0760	0.0820	0.0590	0.0520	0.0430	0.0420	0.0490
48.0	1.8025	0.2180	0.2340	0.2340	0.2260	0.2240	0.0510	0.0450	0.0510	0.0420	0.0540
42.0	1.8025	0.2120	0.2030	0.2000	0.2020	0.1970	0.0300	0.0450	0.0430	0.0620	0.0440
51.0	1.7900	0.2270	0.2610	0.2390	0.2320	0.2480	0.0660	0.0510	0.0720	0.0500	0.0570
39.0	1.8013	0.1640	0.1330	0.1450	0.1510	0.1400	0.0240	0.0250	0.0350	0.0360	0.0270
54.0	1.7875	0.1980	0.2320	0.2170	0.1870	0.2210	0.0730	0.0560	0.0480	0.0630	0.0600
36.0	1.7875	0.1080	0.1060	0.1240	0.1130	0.1110	0.0330	0.0430	0.0360	0.0390	0.0310
57.0	1.7763	0.1170	0.1720	0.2020	0.1930	0.1840	0.0540	0.0420	0.0310	0.0440	0.0370
33.0	1.7575	0.0840	0.0310	0.0780	0.0470	0.0580	0.0380	0.0350	0.0410	0.0270	0.0210
60.0	1.7494	0.1210	0.1200	0.1550	0.1480	0.1300	0.0490	0.0620	0.0970	0.0420	0.0500
30.0	1.6788	0.0960	0.1370	0.1710	0.1360	0.0360	0.0270	0.0200	0.0300	0.0240	0.0260
63.0	1.6788	0.2160	0.1700	0.1880	0.2110	0.1760	0.0550	0.0570	0.0610	0.0620	0.0160
27.0	1.6300	0.1160	0.1270	0.1560	0.1280	0.1380	0.0220	0.0280	0.0210	0.0320	0.0070
66.0	1.6163	0.0150	0.0410	0.0960	0.0710	0.0280	0.0060	0.0270	0.0250	0.0410	0.0450
24.0	1.5150	0.2450	0.2210	0.2340	0.2500	0.2780	0.0020	0.0220	0.0160	0.0130	0.0240

x1	x2	x3	x4	x5	\bar{x}	Sen(2θ) (rad)	u (Sen(2θ))	V0	u (V0)
(± 0.0006)	(± 0.0006)	(± 0.0006)	(± 0.0006)	(± 0.0006)	(± 0.0003)				
2.0324	2.0362	2.0230	2.0189	2.0251	2.0271	1	-	4.459	0.002
2.0211	2.0370	2.0371	2.0289	2.0272	2.0303	0.995	0.002	4.474	0.005
2.0147	2.0060	2.0030	2.0055	2.0000	2.0058	0.995	0.002	4.447	0.004
2.0181	2.0516	2.0303	2.0226	2.0388	2.0323	0.978	0.004	4.514	0.009
1.9654	1.9344	1.9466	1.9526	1.9414	1.9481	0.978	0.004	4.419	0.009
1.9868	2.0203	2.0051	1.9755	2.0094	1.9994	0.951	0.005	4.54	0.01
1.8958	1.8940	1.9118	1.9009	1.8988	1.9003	0.951	0.005	4.43	0.01
1.8940	1.9487	1.9785	1.9697	1.9606	1.9503	0.914	0.007	4.58	0.02
1.8419	1.7888	1.8360	1.8047	1.8156	1.8174	0.914	0.007	4.42	0.02
1.8710	1.8704	1.9068	1.8978	1.8800	1.8852	0.866	0.009	4.62	0.02
1.7750	1.8159	1.8500	1.8149	1.7149	1.7941	0.866	0.009	4.51	0.03
1.8955	1.8496	1.8677	1.8908	1.8548	1.8717	0.81	0.01	4.76	0.03
1.7461	1.7572	1.7861	1.7583	1.7680	1.7632	0.81	0.01	4.62	0.03
1.6313	1.6575	1.7124	1.6877	1.6449	1.6668	0.74	0.01	4.69	0.04
1.7600	1.7361	1.7491	1.7650	1.7932	1.7607	0.74	0.01	4.82	0.04

fit	Resíduos
1.5813	0.1794
1.7022	0.0610
1.7990	-0.0049
1.8819	-0.0645
1.9458	-0.0455
1.9924	-0.0443
2.0218	-0.0160
2.0304	-0.0033
2.0218	0.0085
1.9924	0.0399
1.9458	0.0536
1.8819	0.0684
1.7990	0.0862
1.7022	0.1695
1.5813	0.0855

fit - u(y)	fit + u(y)
1.9945	2.0748
1.9867	2.0670
1.9867	2.0670
1.9634	2.0436
1.9634	2.0436
1.9248	2.0050
1.9248	2.0050
1.8713	1.9516
1.8713	1.9516
1.8036	1.8838
1.8036	1.8838
1.7223	1.8026
1.7223	1.8026
1.6285	1.7087
1.6285	1.7087

Papel milimétrico e pontos de embate

