

21/3/2022

Salomé Gomes, Grupo 6

## Trabalho 6B

~~Teoria~~ Teoria

Ao lançar um projétil sujeito apenas à aceleração gravítica,  $\vec{g}$ , com um ângulo inicial  $\theta$  com a horizontal, temos as seguintes equações cartesianas para o seu movimento (considerando a origem no ponto inicial da trajetória):



$$x(t) = v_0 \cos \theta \cdot t$$

$$y(t) = v_0 \sin \theta \cdot t - \frac{gt^2}{2}$$

$$\Downarrow$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{gx}{\sin(2\theta)}} \quad \text{em que } x \text{ é o alcance do projétil}$$

$$\Rightarrow x = \frac{v_0^2 \sin(2\theta)}{g}$$

Alcance máximo:  $\sin(2\theta) = 1 \Rightarrow \theta = 45^\circ$

Objetivos:

- Estudar o lançamento de projéteis para iguais níveis de lançamento e de impacto, relacionando o ângulo de lançamento com o alcance dos projéteis (para uma mesma velocidade inicial, a ser calculada).
- ~~Calcular~~ Determinar o alcance máximo, verificando que ocorre para  $\theta = 45^\circ$ .

Materiais necessários

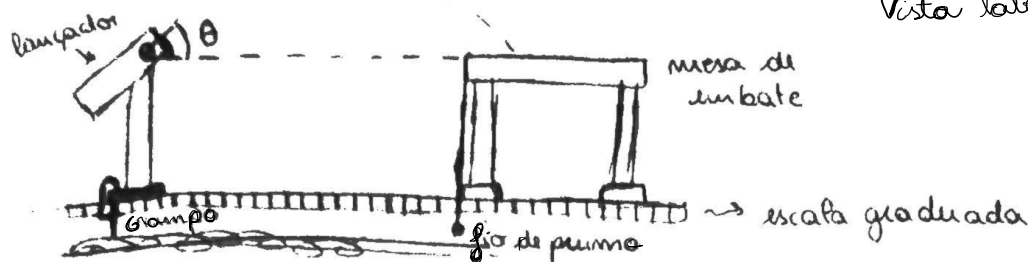
- lançador e grampo de fixação
- tubo de armação
- óculos de proteção
- papel químico e milimétrico
- esfera de teste
- mesa de embate
- esquadro, fita métrica e fio de prumo

Lançador: Pasco

ME-6800

## Montagem

Vista lateral



Vista de cima

mesa de embate

- Sobre a mesa de embate posicionamos <sup>(e fixamos)</sup> o papel milimétrico e, por cima deste, o papel químico, de forma a que, a cada lançamento, o local de embate fique marcado no papel milimétrico.
- ~~Para saber onde posicionar a mesa~~
- No papel milimétrico, marcamos o plano ideal (<sup>próximo</sup> ~~à mesa~~ do qual devem cair as esferas)

## Cuidados

- Devido ao desvio  $\alpha$  marcado na figura,  $x \neq d_1 + d_2$  (na verdade,  $x = \sqrt{h^2 + (d_1 + d_2)^2}$ ).
- Para evitar ~~alteração do ângulo de lançamento~~, coloque uma mão em cima <sup>do lançador</sup> e, em cada lançamento, confirme se não se alterou.
- Cuidado com janelas!
- Usar óculos de proteção.
- Apertar bem o grampo do lançador.
- As mãos que prendem o papel milimétrico e o papel químico <sup>à mesa de embate</sup> devem ser colocadas do mesmo lado do lançador, para que o papel não se desloque com os embates.

## Procedimento

- Efetuar um 1º lançamento para determinar a posição da mesa de embate (com  $\theta = 10^\circ$ ); marcar, no papel milimétrico, o plano ideal, antes de posicionar a mesa de embate na posição determinada.
- ~~Realizar~~ Efetuar 5 lançamentos para cada ângulo na tabela 1, numerando-os sequencialmente.

Nota: Para movermos a mesa (desde o lançador ~~para a mesa de embate~~ até à posição determinada inicialmente) sem que o plano ideal se desloque relativamente ~~à sua marca~~ à sua marca, devemos alinhar os discos que elevam o nível da mesa com a beira da bancada.

Tabela 1:

Ensaio	$\theta$						
	10°	20°	30°	35°	40°	45°	50°
1	74,3	139,4	192,1	210,9	222,4	229,9	232,1
2	77,3	135,4	188,1	211,8	226,1	231,9	231,8
3	77,0	140,0	189,8	212,5	226,4	232,9	231,6
4	80,5	140,8	192,1	212,3	226,2	234,1	231,3
5	73,4	140,5	191,4	211,6	227,3	229,8	231,2

Ensaio	$\theta$			
	55°	60°	70°	80°
1	222,2	207,6	151,6	83,6
2	224,3	206,1	150,6	80,9
3	223,1	205,7	147,7	76,1
4	223,6	205,8	154,8	74,5
5	222,8	206,1	147,5	74,2

Após analisar as marcas na folha de papel milimétrico, vemos que os desvios de mão tem ~~uma~~ <sup>uma</sup> ~~grande~~ <sup>grande</sup> influência no resultado, uma vez que

$$\sqrt{h^2 + (d_1 + d_2)^2} \approx d_1 + d_2$$

para todos os valores de  $\theta$  que podemos considerar  $x = d_1 + d_2$

Na obtenção dos dados da tabela 1, foram tidos em conta os cuidados anteriormente referidos.

~~Após análise~~

### Análise de dados:

Os dados da Tabela 1 foram passados para uma tabela excel, calculando-se, para cada valor de  $\theta$ , ~~os dados~~  $\bar{x}$  (x média),  $s(\bar{x})$  (desvio padrão) e  $u(\bar{x})$  (incerteza de  $\bar{x}$ ). Calculou-se ainda a velocidade de lançamento ( $\bar{v}_0$ ) ~~usando a fórmula anteriormente indicada~~ e  $u(\bar{v}_0)$ , a sua incerteza, utilizando as seguintes expressões:

$$\bar{v}_0 = \sqrt{\frac{g \bar{x}}{\sin(\theta)}}$$

$$u(\bar{v}_0) = \sqrt{\left(\frac{\partial \bar{v}_0}{\partial \bar{x}}\right)^2 (u(\bar{x}))^2}$$

$$\text{com } g = 9,81 \text{ m/s}^2$$

	Ensaio	$\theta$										
		10	20	30	35	40	45	50	55	60	70	80
x (m)	1	0.7630	1.3970	1.9270	2.1090	2.2240	2.2990	2.3210	2.2220	2.0760	1.5160	0.8360
	2	0.7730	1.3570	1.8870	2.1180	2.2610	2.3190	2.3180	2.2480	2.0610	1.5060	0.8090
	3	0.7700	1.4000	1.8980	2.1250	2.2640	2.3290	2.3160	2.2310	2.0570	1.4770	0.7610
	4	0.8050	1.4080	1.9210	2.1230	2.2620	2.3410	2.3130	2.2360	2.0580	1.5480	0.7450
	5	0.7340	1.4050	1.9170	2.1160	2.2730	2.2980	2.3120	2.2280	2.0610	1.4750	0.7420
$\bar{x}$ (m)		0.7690	1.3934	1.9100	2.1182	2.2568	2.3172	2.3160	2.2330	2.0626	1.5044	0.7786
s( $\bar{x}$ ) (m)		0.0254	0.0208	0.0168	0.0063	0.0189	0.0188	0.0037	0.0098	0.0077	0.0302	0.0418
u( $\bar{x}$ ) (m)		0.0113	0.0093	0.0075	0.0028	0.0085	0.0084	0.0016	0.0044	0.0034	0.0135	0.0187
$\bar{v}_0$ (m/s)		4.6965	4.6115	4.6514	4.7025	4.7414	4.7678	4.8032	4.8282	4.8337	4.7916	4.7257
u( $\bar{v}_0$ ) (m/s)		0.0346	0.0154	0.0092	0.0031	0.0089	0.0086	0.0017	0.0047	0.0040	0.0215	0.0568
sen(2 $\theta$ )		0.3420	0.6428	0.8660	0.9397	0.9848	1.0000	0.9848	0.9397	0.8660	0.6428	0.3420

Tabela 2

Utilizando estes valores, construímos o gráfico 1, de  $\bar{v}_0$  em função de  $\theta$ , com barras de erro correspondentes a  $u(\bar{v}_0)$ .

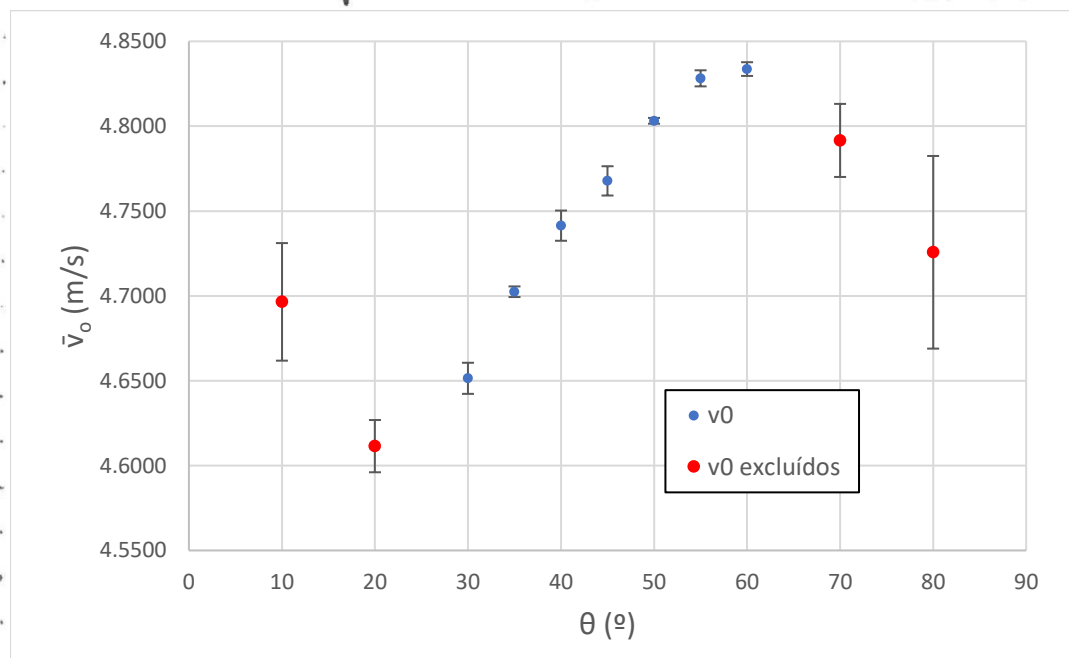


Gráfico 1

Excluindo os valores ~~de~~ de  $v_0$  com incertezas mais elevadas ( $> 0.0100$  m/s), representados a vermelho, vemos que os restantes valores têm uma tendência crescente, ao invés de terem um valor constante, como seria de esperar. No entanto, a variação entre o valor máximo e mínimo é de 3,9% do valor mínimo, bastante abaixo dos 8% que, segundo o fabricante,  $v_0$  pode variar desde o lançamento horizontal a vertical.

Esta ~~tendência~~ <sup>tendência</sup> deve-se ao facto de que, para ângulos maiores, a ~~força~~ <sup>componente</sup> componente do peso da bala que atua sobre a mola do lançador é maior, pelo que a mola ~~se~~ <sup>é</sup> também exercida uma força maior sobre a ~~ela~~ <sup>ela</sup> esfera no lançamento e, portanto,  $v_0$  é maior.

~~Assim, os valores referidos vão ser excluídos~~  
~~Assim, os valores referidos vão ser excluídos~~ não só no cálculo de ~~o~~ <sup>o</sup> ~~respetiva~~ <sup>o</sup> ~~respetiva~~ incerteza, mas também ao calcular a reta de ajuste para ~~o~~ <sup>o</sup> ~~respetiva~~ <sup>o</sup> ~~respetiva~~  $x(\sin(2\theta))$ . ~~Assim, através da média entre os restantes valores,~~  
 vamos então calcular ~~o~~ <sup>o</sup> ~~respetiva~~ <sup>o</sup> ~~respetiva~~ e a incerteza associada a esta.

$$\bar{v}_0 = 4,761 \text{ m/s}$$

$$u(\bar{v}_0) = 0,026 \text{ m/s}$$

$$v_0 = (4,761 \pm 0,026) \text{ m/s} = \del{4,761 \pm 0,026} \\ = 4,761 \pm 0,55\%$$

Construímos também o gráfico 2, para  $\bar{x}(\theta)$ , <sup>em</sup> que, tal como espere-  
 do, ~~o~~ a dispersão de pontos se assemelha a uma para-  
 bola com concavidade virada para baixo.

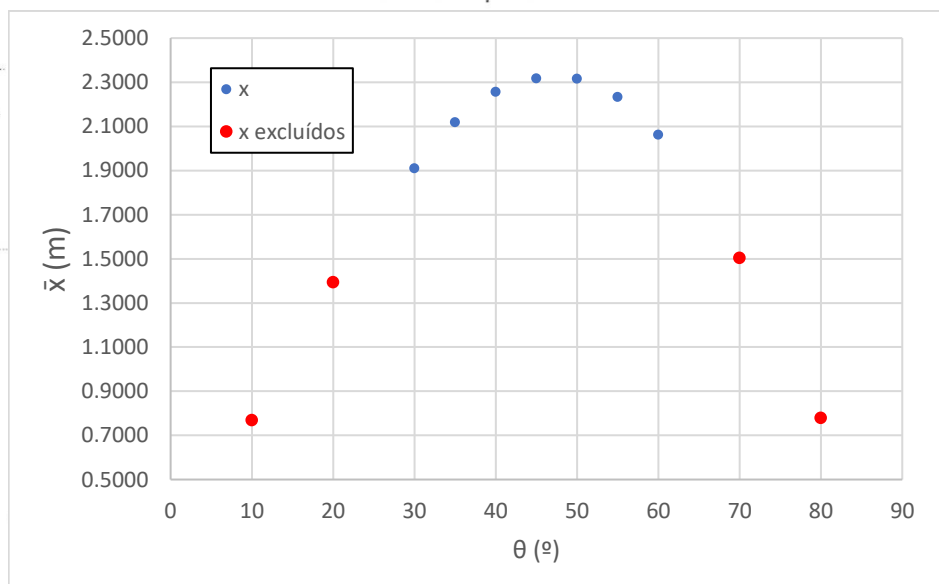


Gráfico 2

Mais uma vez, os pontos excluídos foram representados a vermelho.  
~~Assim, a este conjunto não se juntou mais nenhum valor, uma vez~~  
 que, como esperado o alcance máximo se verifica para  $\theta = 45^\circ$ . No entan-  
 to podemos observar que, ~~para os~~ <sup>para os</sup> pares de ângulos complementares,  
 ao invés de se obter o mesmo alcance para ambos, como esperado,  
~~obtemos um alcance maior para o ângulo maior, o que~~  
 pode ser ~~apoiado~~ justificado pelo mesmo motivo que ~~apoiado~~  
 a tendência crescente observada no gráfico 1.

Utilizando os ~~restantes pontos~~ valores que não foram excluídos, construímos o gráfico 3 para  $x(\sin(2\theta))$ , obtendo-se ~~um~~ uma reta de ajuste ~~para~~ para estes pontos cujos parâmetros estão representados na ~~tabela~~ tabela 3. Pela diferença entre os valores de  $\bar{x}$  obtidos experimentalmente e os ~~os~~ valores previstos através dos ~~parâmetros~~ parâmetros de ajuste, ~~os~~ calculamos os resíduos, representados no gráfico 4 em função de  $\sin(2\theta)$

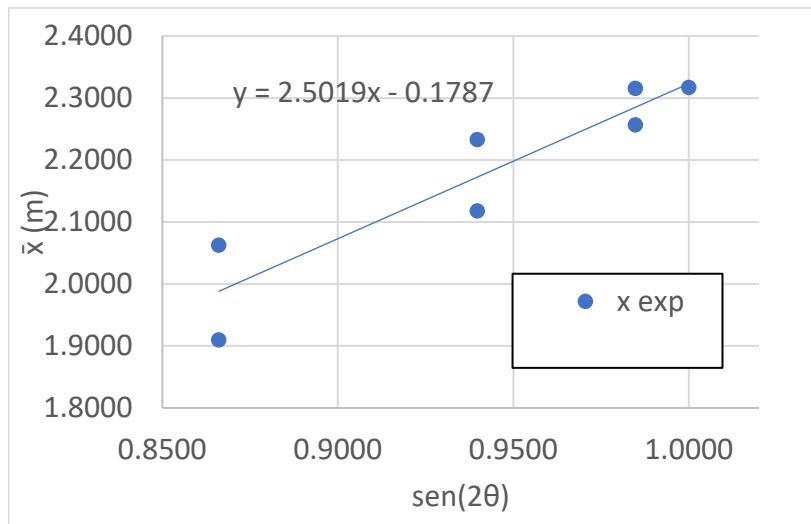


Gráfico 3

Parâmetros de ajuste:			
m	2.501861	-0.17873	b
$s_m$	0.464836	0.437671	$s_b$
$r^2$	0.852805	0.063327	$s_y$

Tabela 3

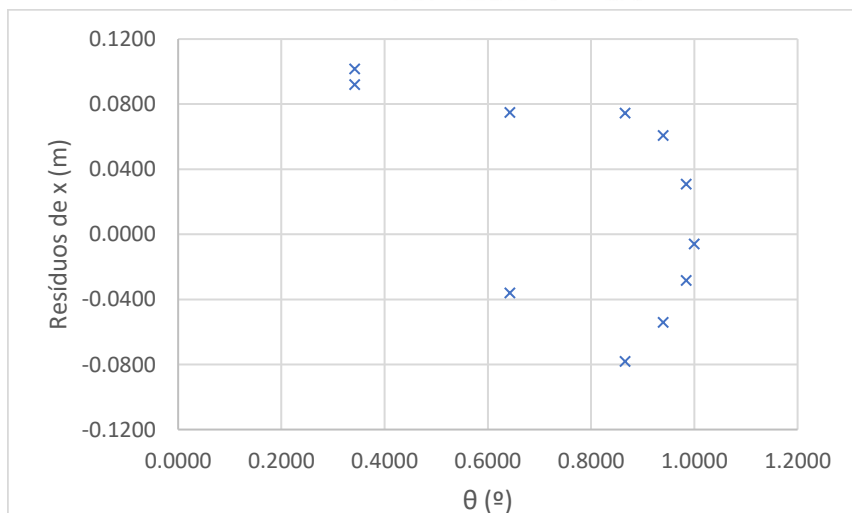


Gráfico 4



Podemos também acrescentar ao gráfico de  $x(\theta)$  os valores de  $x$  previstos com os parâmetros do ajuste, obtendo o gráfico 5.

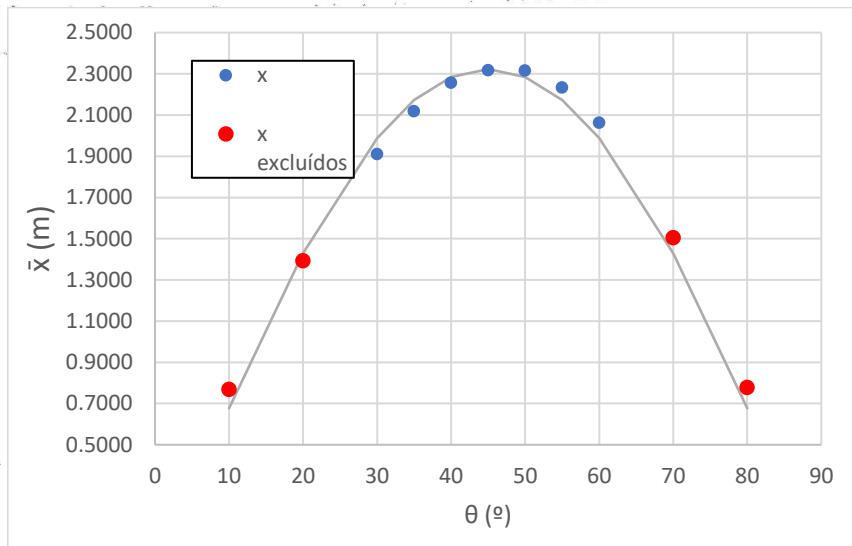


Gráfico 5

Como já vimos,  $x = \frac{v_0^2}{g} \sin(2\theta) \Rightarrow m = \frac{v_0^2}{g}$

$v_{0 \text{ ajuste}} = \sqrt{g m} = 4,954 \text{ m/s}$

$u(v_{0 \text{ ajuste}}) = \sqrt{\left(\frac{\partial v_{0 \text{ ajuste}}}{\partial m}\right)^2 (u(m))^2} = 0,460 \text{ m/s}$

$v_{0 \text{ ajuste}} = (4,954 \pm 0,460) \text{ m/s}$

$= 4,954 \text{ m/s} \pm 9,2\%$

O erro de  $v_0$  é dado por:

$Er.(\%) = \frac{14,761 - 4,954}{4,954} \times 100 = 3,9\%$

~~Para determinar o valor teórico para o alcance máximo, poderíamos considerar o  $45^\circ$~~

~~Para um bom ajuste deveríamos ter  $b=0$~~

Como  $\bar{x} = \frac{v_0^2}{g} \sin(2\theta)$ , deveríamos ter  $b=0$ , o que não é o caso.

No entanto,  $b \ll m$ , pelo que temos um bom ajuste.

Como ~~se  $b=0$~~   $\bar{x}_{\max}$  é obtido para  $\theta = 45^\circ$ , se considerarmos  $b=0$ , podemos ~~calcular~~ prever  $x_{\max} = m = 2,502 \text{ m}$

~~já o~~  $\bar{x}_{\max}$  já o alcance máximo obtido experimentalmente foi  $\bar{x}_{\max} = (2,317 \pm 0,008) \text{ m}$ .

Logo, o erro ~~para~~ para o alcance máximo é:

$$E_{\%}(\bar{x}_{\max}) = \frac{|2,317 - 2,502|}{2,502} \times 100 = 7,4\%$$

### Conclusão

Assim, foram obtidos os seguintes valores:

$$\bar{v}_0 = (4,761 \pm 0,026) \text{ m/s}, \quad E_{\%}(\bar{v}_0) = 3,9\%$$

$$\bar{x}_{\max} = (2,317 \pm 0,008) \text{ m}, \quad E_{\%}(\bar{x}_{\max}) = 7,4\%$$

Como podemos ver, o erro para o alcance máximo é  $> 5\%$ .

~~se  $v_0 = 4,761 \text{ m/s}$  e  $\theta = 45^\circ$ , o valor teórico para o alcance máximo é  $x_{\max} = 2,502 \text{ m}$ . No entanto, como o valor teórico para o alcance máximo não está no intervalo calculado experimentalmente  $[2,309; 2,325] \text{ m}$ , o que pode indicar um erro sistemático.~~