

22/04/2022

## Trabalho SA Determinação de Momentos de Inércia utilizando um método oscilatório

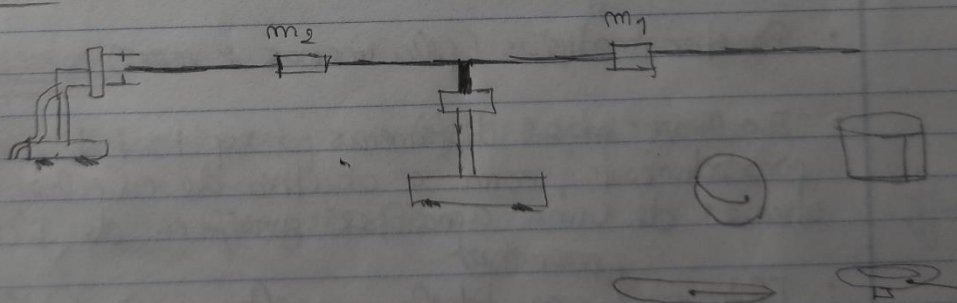
### Objetivos:

- Determinação do momento de inércia de alguns sólidos.
- Verificação do teorema de Steiner:  $I_{\text{paralela}} = I_{\text{cm}} + Md^2$

### Material:

- Base de suporte principal com mala associada
- base para cilindros
- fotogate ligada ao contador de tempo das oscilações
- barra com massas deslocáveis,  $m_1$  e  $m_2$ .

### Esquema:



### Procedimento:

1ª Parte

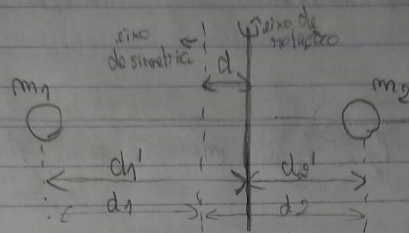
- ~~Utilizar~~ Utilizar vareta e as duas massas  $m_1$  e  $m_2$  (em primeiro lugar iguais) que mala encicixam.
- Pesar e registrar os valores das massas  $m_1$ ,  $m_2$  e da massa da vareta

- Medir o comprimento da vareta ( $L$ )
- Posicionar as duas massas  $m_1$  e  $m_2$  a distâncias  $d_1$  e  $d_2$  iguais do centro da vareta (escolher maior distância possível)
- Medir e registrar a distância do centro das massas ao ponto central da vareta - ponto do eixo de rotação e eixo de simetria.
- Alinhar o sistema para a sua posição de equilíbrio.
- Rodar o sistema um ângulo inferior a  $180^\circ$  no sentido contrário aos ponteiros do relógio (sentido direto D) e registrar o período  $T_D$  correspondente a uma oscilação direta completa.
- Rodar o sistema com o mesmo ângulo no sentido oposto - sentido dos ponteiros do relógio (sentido inverso I) e registrar o tempo  $T_I$  correspondente a uma oscilação inversa completa.
- Repetir medições (pelo menos 2 vezes)
- Escolher novas distâncias e repetir todo o procedimento, com o objetivo de calcular  $D$  através de uma análise gráfica de  $I(r^2)$
- Elaborar <sup>preencher</sup> uma tabela semelhante à tabela 1 do protocolo experimental.

[2ª Parte]  $\rightarrow$  eixo de simetria não coincide com eixo de rotação

- Repetir os últimos passos da 1ª Parte, mas com o cuidado das alterações que foram efetuadas, em termos de distâncias. (ver fig. na página seguinte)
- Preencher Tabela 2.

- Testar o Teorema de Steiner
- Calcular diferença entre o valor do momento de inércia relativo ao eixo paralelo e relativo ao eixo de simetria.
- Comparar com o valor previsto pelo Teorema de Steiner.



$$d_1 = d_2$$

$$d_1 + d_2 = d_1' + d_2'$$

3º Parte

- Substituir a vareta pelo sólido a estudar (começar pelo cilindro oco) e pesá-lo para obter  $M$ .
- Medir as suas dimensões características ( $h$ ,  $D_{int}$ ,  $D_{ext}$ )
- Proceder como anteriormente para determinar o período de movimento.
- Preencher a tabela 3 com os vários sólidos analisados, se der tempo.

Massas:

$$m_1 = (210,81 \pm 0,01) \text{ g} \quad m_2 = (212,42 \pm 0,01) \text{ g}$$

$$m_{\text{vareta}} = (132,25 \pm 0,01) \text{ g}$$

- Vamos usar o modo Pêndulo do contador de tempo

$m_v \Rightarrow$  massa da vareta

$$L = (60,90 \pm 0,05) \text{ cm}$$



$m_1, m_2$

$$l_1 = (27,20 \pm 0,05) \text{ cm} \quad l_2 = (27,20 \pm 0,05) \text{ cm}$$

Sentido Direto

$$T_1 = 7,801 \text{ ms} \quad T_2 = 7,800 \text{ ms} \quad T_3 = 7,799 \text{ ms}$$

Sentido Inverso

$$T_1 = 7,798 \text{ ms} \quad T_2 = 7,800 \text{ ms} \quad T_3 = 7,797 \text{ ms}$$

$$l_1 = l_2 = (29,00 \pm 0,05) \text{ cm}$$

S.D.

S.I.

$$T_1 = 6,548 \text{ ms}$$

$$T_1 = 6,545 \text{ ms}$$

$$T_2 = 6,551 \text{ ms}$$

$$T_2 = 6,548 \text{ ms}$$

$$T_3 = 6,550 \text{ ms}$$

$$T_3 = 6,548 \text{ ms}$$

$$l_1 = l_2 = (17,20 \pm 0,05) \text{ cm}$$

S.D.

S.I.

$$T_1 = 5,330 \text{ ms}$$

$$T_1 = 5,322 \text{ ms}$$

$$T_2 = 5,330 \text{ ms}$$

$$T_2 = 5,323 \text{ ms}$$

$$T_3 = 5,329 \text{ ms}$$

$$T_3 = 5,323 \text{ ms}$$

$$l_1 = l_2 = (12,30 \pm 0,05) \text{ cm}$$

S.D.

S.I.

$$T_1 = 4,213 \text{ ms}$$

$$T_1 = 4,206 \text{ ms}$$

$$T_2 = 4,211 \text{ ms}$$

$$T_2 = 4,206 \text{ ms}$$

$$T_3 = 4,209 \text{ ms}$$

$$T_3 = 4,207 \text{ ms}$$

$$l_1 = l_2 = (7,00 \pm 0,05) \text{ cm}$$

S.D.

S.I.

$$T_1 = 3,294 \text{ ms}$$

$$T_1 = 3,293 \text{ ms}$$

$$T_2 = 3,293 \text{ ms}$$

$$T_2 = 3,292 \text{ ms}$$

$$T_3 = 3,293 \text{ ms}$$

$$T_3 = 3,290 \text{ ms}$$

$$l_1 = l_2 = (28,40 \pm 0,05) \text{ cm}$$

S.D.

S.I.

$$T_1 = 8,111 \text{ ms}$$

$$T_1 = 8,121 \text{ ms}$$

$$T_2 = 8,115 \text{ ms}$$

$$T_2 = 8,124 \text{ ms}$$

$$T_3 = 8,118 \text{ ms}$$

$$T_3 = 8,121 \text{ ms}$$

$$l_1 = l_2 = (29,30 \pm 0,05) \text{ cm}$$

S.D.

S.I.

$$T_1 = 6,866 \text{ ms}$$

$$T_1 = 6,874 \text{ ms}$$

$$T_2 = 6,871 \text{ ms}$$

$$T_2 = 6,878 \text{ ms}$$

$$l_1 = l_2 = (18,40 \pm 0,05) \text{ cm}$$

S.D.

S.I.

$$T_1 = 5,646 \text{ ms}$$

$$T_1 = 5,644 \text{ ms}$$

$$T_2 = 5,647 \text{ ms}$$

$$T_2 = 5,645 \text{ ms}$$

$$l_1 = l_2 = (13,20 \pm 0,05) \text{ cm}$$

S.D.

S.I.

$$T_1 = 4,478 \text{ ms}$$

$$T_1 = 4,477 \text{ ms}$$

$$T_2 = 4,482 \text{ ms}$$

$$T_2 = 4,475 \text{ ms}$$

$$l_1 = l_2 = (8,30 \pm 0,00) \text{ cm}$$

S.D.

S.I.

$$T_1 = 3,491 \text{ ms}$$

$$T_1 = 3,487 \text{ ms}$$

$$T_2 = 3,492 \text{ ms}$$

$$T_2 = 3,489 \text{ ms}$$

$$l_1 = l_2 = (3,00 \pm 0,05) \text{ cm}$$

S.D.

S.I.

$$T_1 = 2,827 \text{ ms}$$

$$T_1 = 2,824 \text{ ms}$$

$$T_2 = 2,826 \text{ ms}$$

$$T_2 = 2,825 \text{ ms}$$

$$l_1 = l_2 = (25,50 \pm 0,05) \text{ cm}$$

S.D.

S.I.

$$T_1 = 7,519 \text{ ms}$$

$$T_1 = 7,515 \text{ ms}$$

$$T_2 = 7,514 \text{ ms}$$

$$T_2 = 7,518 \text{ ms}$$

$$l_1 = l_2 = (9,50 \pm 0,05) \text{ cm}$$

S.D.

S.I.

$$T_1 = 3,089 \text{ ms}$$

$$T_1 = 3,087 \text{ ms}$$

$$T_2 = 3,088 \text{ ms}$$

$$T_2 = 3,087 \text{ ms}$$

$$l_1 = l_2 = (10,50 \pm 0,05) \text{ cm}$$

S.D.

S.I.

$$T_1 = 3,893 \text{ ms}$$

$$T_1 = 3,892 \text{ ms}$$

$$T_2 = 3,894 \text{ ms}$$

$$T_2 = 3,890 \text{ ms}$$

$$l_1 = l_2 = (19,70 \pm 0,05) \text{ cm}$$

S.D.

S.I.

$$T_1 = 6,054 \text{ ms}$$

$$T_1 = 6,054 \text{ ms}$$

$$T_2 = 6,055 \text{ ms}$$

$$T_2 = 6,056 \text{ ms}$$



# Teste de Stern

(Lado Esquerdo da Voz)

$$d = (5,00 \pm 0,05) \text{ cm}$$

SD

SI

$$T_1 = 8,590 \text{ ms}$$

$$T_1 = 8,583 \text{ ms}$$

$$T_2 = 8,587 \text{ ms}$$

$$T_2 = 8,575 \text{ ms}$$

$$d = (9,80 \pm 0,05) \text{ cm}$$

SD

SI

$$T_1 = 9,541 \text{ ms}$$

$$T_1 = 9,466 \text{ ms}$$

$$T_2 = 9,488 \text{ ms}$$

$$T_2 = 9,457 \text{ ms}$$

$$d = (15,30 \pm 0,05) \text{ cm}$$

SD

SI

$$T_1 = 10,817 \text{ ms}$$

$$T_1 = 10,726 \text{ ms}$$

$$T_2 = 10,804 \text{ ms}$$

$$T_2 = 10,738 \text{ ms}$$

$$d = (20,20 \pm 0,05) \text{ cm}$$

SD

SI

$$T_1 = 12,324 \text{ ms}$$

$$T_1 = 12,140 \text{ ms}$$

$$T_2 = 12,337 \text{ ms}$$

$$T_2 = 12,160 \text{ ms}$$

△△

$$d = (7,50 \pm 0,05) \text{ cm}$$

SD

SI

$$T_1 = 8,182 \text{ ms}$$

$$T_1 = 8,121 \text{ ms}$$

$$T_2 = 8,158 \text{ ms}$$

$$T_2 = 8,167 \text{ ms}$$

$$d = (2,50 \pm 0,05) \text{ cm}$$

SD

SI

$$T_1 = 8,381 \text{ ms}$$

$$T_1 = 8,314 \text{ ms}$$

$$T_2 = 8,313 \text{ ms}$$

$$T_2 = 8,316 \text{ ms}$$

$$d = (8,70 \pm 0,05) \text{ cm}$$

[SD]

[SI]

$$T_1 = 8,955 \text{ ms}$$

$$T_2 = 8,959 \text{ ms}$$

$$T_1 = 9,030 \text{ ms}$$

$$T_2 = 9,018 \text{ ms}$$

$$d = (4,80 \pm 0,05) \text{ cm}$$

[SD]

[SI]

$$T_1 = 7,991 \text{ ms} \quad T_2 = 8,012 \text{ ms}$$

$$T_2 = 7,959 \text{ ms} \quad T_2 = 8,018 \text{ ms}$$

[SD]

$$d = (10,00 \pm 0,05) \text{ cm}$$

[SI]

$$T_1 = 7,999 \text{ ms}$$

$$T_2 = 8,012 \text{ ms}$$

$$T_1 = 8,029 \text{ ms}$$

$$T_2 = 8,035 \text{ ms}$$

$$d = (15,40 \pm 0,05) \text{ cm}$$

[SD]

[SI]

$$T_1 = 8,120 \text{ ms}$$

$$T_2 = 8,120 \text{ ms}$$

$$T_1 = 8,149 \text{ ms}$$

$$T_2 = 8,098 \text{ ms}$$

$$d = (8,50 \pm 0,05) \text{ cm}$$

[SD]

[SI]

$$T_1 = 8,913 \text{ ms}$$

$$T_2 = 8,499 \text{ ms}$$

$$T_1 = 8,439 \text{ ms}$$

$$T_2 = 8,454 \text{ ms}$$

$$d = (12,70 \pm 0,05) \text{ cm}$$

[SD]

[SI]

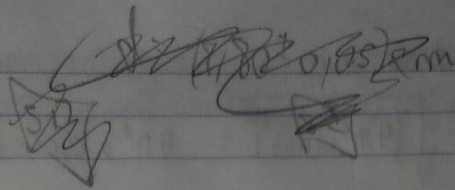
$$T_1 = 8,150 \text{ ms}$$

$$T_2 = 8,132 \text{ ms}$$

$$T_1 = 8,274 \text{ ms}$$

$$T_2 = 8,227 \text{ ms}$$





1ª Parte



(momento de inércia teórico)

$$I' = m_1 d_1^2 + m_2 d_2^2 + \frac{m_{\text{varata}} L_{\text{varata}}^2}{12}$$

$$T = \frac{T_D + T_I}{2}$$

$$I = \frac{D}{4\pi^2} T^2$$

(momento de inércia experimental)

Vamos determinar  $D$ !

$$I = \frac{D}{4\pi^2} T^2 \quad \text{declive} \rightarrow \frac{D}{4\pi^2} \quad d_1 = d_2 = d$$

$$I' = 0,21081 \times d^2 + 0,21242 \times d^2 + \frac{0,13225 \times 0,6090^2}{12} \quad (d \text{ vai variar})$$

(kg m<sup>2</sup>)

(parâmetros calculado no excel e apresentado na tabela 1)

$$U(I') = \sqrt{(d^2 \times v(m_1))^2 + (2 \times (m_1 + m_2) \times d \times v(d))^2 + (d^2 \times v(m_2))^2 + \left(\frac{L_{\text{varata}}^2}{12} \times v(m_{\text{varata}})\right)^2 + \left(\frac{2 m_{\text{varata}} \times L_{\text{varata}} \times v(L_{\text{varata}})}{12}\right)^2}$$

• Após elaborado o gráfico de  $I'$  em função de  $T^2$ , realizou-se um ajuste linear (forçadamente Proj. lin) e obteve-se o valor do declive:

$$m = 0,000575$$

$$v(m) = 0,000005$$

Posto isto, procede-se ao cálculo de  $D$ :

$$m = \frac{D}{4\pi^2} \Leftrightarrow 0,000575 = \frac{D}{4\pi^2} \Leftrightarrow \boxed{D \approx 0,0227}$$

já que  $I = \frac{D}{4\pi^2} T^2$

$$v(m) = 0,000005$$

E a sua incerteza é:

$$v(D) = \sqrt{(4\pi^2 v(m))^2} = 4\pi^2 \times 0,000005 \approx 0,0002$$

Assim,

$$D = (0,0227 \pm 0,0002) \text{ kg m}^2/\text{s}^2$$

Como já se tem o valor de  $D$ , já é possível calcular os valores dos momentos de inércia experimentais ( $I$ ) para cada distância entre o CM e o centro da vareta.

$$I = \frac{D}{4\pi^2} T^2$$

• Está preenchida a coluna referente a  $I$  na tabela 1!

• Calculou-se a diferença relativa ao valor  $I'$  ( $|I - I'|/I'$ ), estando os valores exibidos numa coluna de Excel.

• Calculou-se o erro percentual ( $\text{Erro}(\%)$ ) dos valores experimentais ( $I$ ) e constatou-se o seguinte:

$\Rightarrow$  As percentagens de erro são na geral bastante baixas, o que indica que o método experimental usado para determinar momentos de inércia é eficaz

$\Rightarrow$  O maior erro (%) obtido foi de 2,92% e o menor foi de 0,00686%.

$\Rightarrow$  Não se consegue obter uma relação direta entre o erro e a distância ao centro da vareta.

Os resíduos referentes ao gráfico  $I'(T^2)$  estão dispostos aleatoriamente, o que indica que o ajuste linear obtido é aceitável.

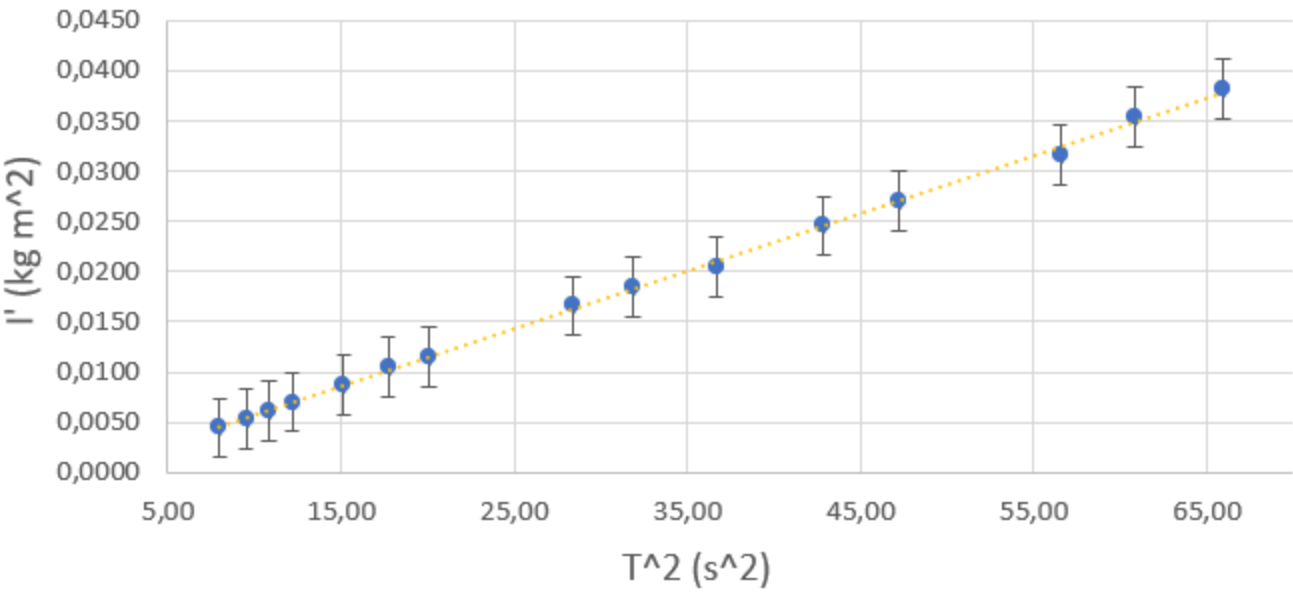
**Tabela 1**

Distâncias( $\pm 0,05$ ) (cm)	Distâncias( $\pm 0,0005$ ) (m)	TD ( $\pm 0,001$ ) (s)	TI ( $\pm 0,001$ ) (s)	T( $\pm 0,0007$ ) (s)
27,20	0,2720	7,800	7,798	7,7990
22,00	0,2200	6,550	6,547	6,5485
17,20	0,1720	5,330	5,323	5,3265
12,30	0,1230	4,211	4,206	4,2085
7,00	0,0700	3,293	3,292	3,2925
28,40	0,2840	8,115	8,122	8,1185
23,30	0,2330	6,869	6,876	6,8725
18,40	0,1840	5,647	5,645	5,6460
13,20	0,1320	4,480	4,476	4,4780
8,30	0,0830	3,492	3,488	3,4900
3,00	0,0300	2,827	2,825	2,8260
25,50	0,2550	7,519	7,517	7,5180
5,50	0,0550	3,089	3,087	3,0880
10,50	0,1050	3,894	3,891	3,8925
19,70	0,1970	6,055	6,055	6,0550

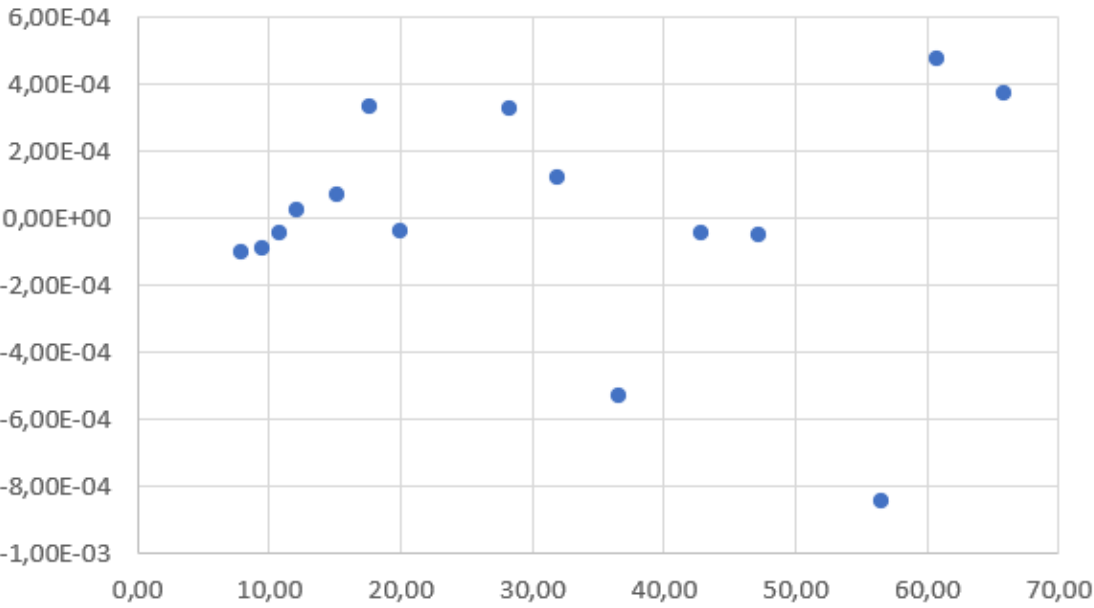
$T^2$ (s <sup>2</sup> )	$u(T^2)$	$I$ (kg m <sup>2</sup> )	$u(I)$	$I'$ (kg m <sup>2</sup> )	$u(I')$
60,82	0,01	0,0350	0,0003	0,0354	0,0001
42,883	0,009	0,0247	0,0002	0,02457	0,00009
28,372	0,007	0,0163	0,0001	0,01661	0,00007
17,711	0,006	0,01018	0,00009	0,01049	0,00005
10,841	0,005	0,00623	0,00005	0,00616	0,00003
65,91	0,01	0,0379	0,0003	0,0382	0,0001
47,23	0,01	0,0272	0,0002	0,0271	0,0001
31,877	0,008	0,0183	0,0002	0,01842	0,00008
20,052	0,006	0,0115	0,0001	0,01146	0,00006
12,180	0,005	0,00700	0,00006	0,00700	0,00004
7,986	0,004	0,00459	0,00004	0,00447	0,00001
56,52	0,01	0,0325	0,0003	0,0316	0,0001
9,536	0,004	0,00548	0,00005	0,00537	0,00002
15,152	0,005	0,00871	0,00008	0,00875	0,00004
36,663	0,008	0,0211	0,0002	0,02051	0,00008



I teórico em função do quadrado do período



Resíduos



fit	Resíduos
3,49E-02	4,75E-04
2,46E-02	-4,47E-05
1,63E-02	3,29E-04
1,02E-02	3,37E-04
6,21E-03	-4,48E-05
3,78E-02	3,76E-04
2,71E-02	-5,07E-05
1,83E-02	1,23E-04
1,15E-02	-3,71E-05
6,98E-03	2,73E-05
4,57E-03	-9,78E-05
3,25E-02	-8,44E-04
5,46E-03	-8,87E-05
8,68E-03	7,05E-05
2,10E-02	-5,30E-04

$ I' - I /I'$	Erro (%)
0,012028	1,202763563
0,003492	0,349150806
0,017741	1,774102691
0,029208	2,920826339
0,011694	1,169413207
0,008511	0,851133739
0,003463	0,346263826
0,004719	0,471911693
0,005964	0,596376241
6,86E-05	0,006861831
0,027698	2,769847535
0,028193	2,819255536
0,021488	2,148831762
0,004732	0,473159852
0,02772	2,771985448

	g	kg	incerteza (kg)
m1	210,81	0,21081	0,00001
m2	212,42	0,21242	0,00001
mv	132,25	0,13225	0,00001
	cm	m	incerteza (m)
L	60,90	0,6090	0,0005
m	0,000575	-2,25E-05	b
u(m)	0,000005	1,74E-04	u(b)
r^2	0,9991	0,0004	u(y)

## Teorema de Steiner

2ª Parte

$I_{oo'}$   $\Rightarrow$  momento de inércia em torno do eixo de simetria  
 $I_{zz'}$   $\Rightarrow$  ~~||~~ || || || || || || || paralelo

$$I_{oo'} = m_1 d_1^2 + m_2 d_2^2 + \frac{m_{varata} L_{varata}^2}{12}, \text{ oo' é o eixo de simetria}$$

$$d_1 = d_2 = 29,45 \text{ cm} = 0,2945 \text{ m}$$

$$I_{zz'} = \frac{D}{4\pi} T^2, \text{ visto } zz' \text{ ser um eixo fixo paralelo ao eixo de simetria}$$

$$D = 0,0227$$

Este valor de  $I_{zz'}$  é o valor teórico, daí na tabela de excel aparecer " $I_{zz'}(\text{teó})$ "

O valor experimental de  $I_{zz'}$  será apresentado na tabela como " $I_{zz'}(\text{exp})$ " e calcula-se através de:

$$I_{zz'} = I_{oo'} + M d^2$$

M = massa total do sistema

$$M = m_1 + m_2 + m_{varata} = 0,21081 + 0,21848 + 0,13229 = 0,55548 \text{ kg}$$

(d vai variando ao longo da tabela)

$$\text{Erro}(\%) = \frac{|I_{zz'}(\text{teó}) - I_{zz'}(\text{exp})| \times 100}{I_{zz'}(\text{teó})}$$

(ver tabela)

• Os valores percentuais tanto são pequenos como muito grandes. ~~Os valores percentuais obtidos anteriormente pelo outro método eram muito inferiores relativamente a estes.~~

• Verifica-se que, geralmente, o momento de inércia aumenta com a distância entre os eixos de simetria e paralelo (d).

# Teorema de Steiner

Tabela 2

d ( $\pm 0,05$ ) cm	d ( $\pm 0,0005$ ) m	d1' ( $\pm 0,0005$ ) m	d2' ( $\pm 0,0005$ ) m	TD ( $\pm 0,001$ ) (s)	TI ( $\pm 0,001$ ) (s)	T ( $\pm 0,0007$ ) (s)
5,00	0,0500	0,2445	0,3445	8,589	8,579	8,584
9,80	0,0980	0,1965	0,3925	9,515	9,462	9,4885
15,30	0,1530	0,1415	0,4475	10,812	10,732	10,772
20,20	0,2020	0,0925	0,4965	12,331	12,150	12,2405
7,50	0,0750	0,2195	0,3695	8,168	8,944	8,556
2,50	0,0250	0,2695	0,3195	8,391	8,315	8,353
8,70	0,0870	0,2075	0,3815	8,956	9,024	8,99
4,80	0,0480	0,2465	0,3425	7,955	8,015	7,985
10,00	0,1000	0,1945	0,3945	8,006	8,032	8,019
15,40	0,1540	0,1405	0,4485	8,115	8,114	8,1145
17,50	0,1750	0,1195	0,4695	8,506	8,447	8,4765
12,70	0,1270	0,1675	0,4215	8,141	8,218	8,1795

T <sup>2</sup> (s <sup>2</sup> )	I (kg m <sup>2</sup> )	loo'	lzz' (teó.)	M*d <sup>2</sup>	lzz' (exp.)
73,685056	0,042369	0,0408	0,042369	0,0014	0,0422
90,03163225	0,051768	0,0408	0,051768	0,0053	0,0461
116,035984	0,06672	0,0408	0,06672	0,0130	0,0538
149,8298403	0,086152	0,0408	0,086152	0,0227	0,0635
73,205136	0,042093	0,0408	0,042093	0,0031	0,0439
69,772609	0,040119	0,0408	0,040119	0,0003	0,0411
80,8201	0,046471	0,0408	0,046471	0,0042	0,0450
63,760225	0,036662	0,0408	0,036662	0,0013	0,0421
64,304361	0,036975	0,0408	0,036975	0,0056	0,0463
65,84511025	0,037861	0,0408	0,037861	0,0132	0,0540
71,85105225	0,041314	0,0408	0,041314	0,0170	0,0578
66,90422025	0,03847	0,0408	0,03847	0,0090	0,0498

lzz'(exp.)-loo'	Erro(%) (lzz')
0,0014	0,438477989
0,0053	10,89262392
0,0130	19,36878103
0,0227	26,33925762
0,0031	4,338155013
0,0003	2,548276833
0,0042	3,169012214
0,0013	14,76216759
0,0056	25,35290308
0,0132	42,54332203
0,0170	39,91762871
0,0090	29,3316629

	g	kg	incerteza (kg)
m1	210,81	0,21081	0,00001
m2	212,42	0,21242	0,00001
mv	132,25	0,13225	0,00001
	cm	m	incerteza (m)
L	60,90	0,6090	0,0005



## Sólidos

3º Parte  
Sólidos

Medições cilindro oco:

$$D_{int} = (9,00 \pm 0,02) \text{ cm} = 0,0900 \pm 0,0002 \text{ m} \quad D_{ext} = (9,10 \pm 0,02) \text{ cm} = 0,0910 \pm 0,0002 \text{ m}$$

$$h = (18,22 \pm 0,02) \text{ cm} = 0,1822 \pm 0,0002 \text{ m} \quad M = (370,04 \pm 0,01) \text{ g} = 0,37004 \pm 0,00001 \text{ kg}$$

$$I_{(teórico)} = \frac{1}{2} M (r_{int}^2 + r_{ext}^2) = \frac{1}{2} \times 0,37004 \times \left( \left( \frac{0,0900}{2} \right)^2 + \left( \frac{0,0910}{2} \right)^2 \right) = 0,0008372 \text{ kg m}^2$$

$$I_{(teórico)} = (0,000837 \pm 0,000003) \text{ kg m}^2$$

O valor experimental para o cilindro oco é

$$I_{exp} = (0,000802 \pm 0,000007) \text{ kg m}^2$$

$$\text{Erro (\%)} = \frac{|0,000837 - 0,000802|}{0,000837} \times 100 \approx 4,2\%$$

• O erro (%) é pequeno tendo em conta a ordem de grandeza das medições o que indica que foi feita uma boa aproximação do valor teórico do momento de inércia.

Tabela 3

Sólido	TD ( $\pm 0,0001$ ) (s)	TI ( $\pm 0,0001$ ) (s)	T ( $\pm 0,00007$ ) (s)	T <sup>2</sup> ( $\pm 0,0002$ ) (s)	I (kg m <sup>2</sup> )	u(I)
Cilindro oco	1,1817	1,1806	1,18115	1,3951	0,000802	0,000007
Cilindro esferovite	0,7912	0,7937	0,79245	0,6280	0,000361	0,000003
Esfera	1,9556	1,9481	1,95185	3,8097	0,00219	0,00002

### Medições cilindro maciço

$$M = (0,37487 \pm 0,00001) \text{ Kg} \quad \rho_{\text{ext}} = (0,1000 \pm 0,0002) \text{ cm}$$

$$I_{\text{(teórica)}} = \frac{1}{2} M r^2 = \frac{1}{2} \times 0,37487 \times \left(\frac{0,1000}{2}\right)^2 =$$

$$\approx 0,0004686 \text{ Kg m}^2$$

$$I_{\text{(teórica)}} = (0,000469 \pm 0,000002) \text{ Kg m}^2$$

O valor experimental para o cilindro maciço é  $I_{\text{(exp)}} = (0,000361 \pm 0,000003) \text{ Kg m}^2$

$$\text{Erro (\%)} = \frac{|0,000469 - 0,000361|}{0,000469} \times 100 \approx \underline{\underline{23\%}}$$

- O erro (%) não é de todo pequeno tendo em conta a ordem de grandeza das medições. Um fator que pode estar ligado a esta discrepância será a ocorrência de erros aleatórios aquando das medições das características do objeto.

Ainda foram medidos experimentalmente os tempos de oscilações completas no sentido direto e inverso da esfera maciça. Contudo, devido a falta tempo, ficou por medir a massa da mesma e o seu raio, sendo impossível determinar o valor teórico. O valor experimental encontra-se registado na tabela 3 do Excel.

Atenção: O momento de inércia do suporte foi eliminado, de maneira a não afetar os resultados!

### Conclusões:

- Pode-se concluir que na 1ª Parte a obtenção dos momentos de inércia foi bastante eficaz, sendo os erros percentuais associados muito baixos.
- Na 1ª Parte constata-se que quanto maior a distância ao eixo de simetria/rotação maior será o momento de inércia, o que faz todo o sentido perante a equação usada para o cálculo experimental ( $I = \frac{D}{4\pi^2} T^2$ ).
- Na 2ª Parte, as percentagens de erro obtidas variaram muito, chegando a por em causa a validade do Teorema de Steiner. Contudo, tais discrepâncias foram atingidas devido a erros de medição de comprimentos (erros abstratos).
- Também na 2ª Parte constata-se que o momento de inércia é tanto maior quanto maior for a distância, contudo, desta vez a distância falada não é entre o CM das massas e o eixo de simetria, mas sim entre o eixo de simetria e o eixo paralelo (rotação) que difere neste caso.
- Na obtenção dos momentos de inércia dos sólidos (3ª Parte) a discrepância entre o valor teórico e experimental foi baixa para o cilindro oco (erro de 4,2%) e alta para o cilindro maciço (erro de 23%).