

## Estudo do Movimento Pendular (T4A)

Nuno Lorente

18/05/2022

### Preparação

PL6, G7

- Para preparar a realização desta atividade, foi feito um estudo rigoroso do protocolo YA, assim como do vídeo introdutório facultado no moodle.
- Foi ainda feito o excel para esta atividade com alguma antecedência, de forma a facilitar a recolha e interpretação de dados.

### Objetivos

- 1- Estudo experimental do movimento pendular
- 2- Determinação do valor da aceleração da gravidade

### Procedimento

1- Verificar que se tem a montagem experimental feita corretamente. Esta deverá consistir de um painel vertical com transferidor e sistema de fixação do pêndulo. É necessário ter ainda disponível várias esferas de massas diferentes, fio de nylon, um cronómetro e uma balança digital.

2- Estudo do efeito da massa no período

2.1- Nesta parte, vai-se estudar a relação entre  $T$  (período) e  $m$  (massa). Como tal,  $L$  (comprimento do pêndulo) e  $\theta_0$  (amplitude) serão mantidos fixos.

2.2- Selecionar 3 esferas diferentes e medir a sua massa na balança. Estas serão  $m_1$ ,  $m_2$  e  $m_3$ .

2.3- Repetir os pontos abaixo para cada esfera

2.3.1- Prender a esfera na extremidade do fio e ajustar o seu comprimento,  $L$ , de modo a garantir que este será constante para as 3 esferas.

2.3.2- Afastar a esfera um ângulo  $\theta_0$  da posição de equilíbrio e largar, começando a contagem do cronómetro.

2.3.3- No momento de largada, garantir que o fio está esticado e paralelo ao painel.

2.3.4- Com o cronómetro, medir o tempo de 10 oscilações ( $t_i$ ) e, com este valor, calcular o período de oscilação ( $T_i$ ).

2.3.5- Repetir este processo um total de 3 vezes.

2.4- Registrar todos os medições feitos em 2.3 em tabelas.

3 - Estudo da variação do período com a amplitude de oscilação

3.1 - Nesta parte, pretende-se estudar a relação entre  $T$  (período) e  $\theta_0$  (amplitude). Assim,  $L$  (comprimento do pêndulo) e  $m$  (massa) deverão ser constantes.

3.2 - Selecionar uma esfera, pendê-la na extremidade do fio e medir  $L$  (entre o ponto de suspensão do fio e o centro da esfera)

3.3 - Medir  $T$  para vários  $\theta_0$ , espaciais a  $5^\circ$  para todos os valores de  $\theta_0$ , fazer os passos acima.

3.3.1 - Afastar a esfera um ângulo  $\theta_0$  em relação à posição de equilíbrio e largar, iniciando a contagem no cronómetro. No momento de largar, garantir que o fio está esticado e paralelo ao painel.

3.3.2 - Medir com o cronómetro o tempo de 10 oscilações ( $t_i$ ) e calcular o período de oscilação ( $T_i$ )

3.3.3 - Fazer um total de 3 ensaios para cada ângulo  $\theta_0$ .

3.4 - Registar as medições feitas em 3.3 numa tabela e representar graficamente  $T(\theta_0)$

4 - Estudo da variação do período com o comprimento do pêndulo

4.1 - Nesta parte da atividade, quer-se estudar a relação entre  $T$  e  $L$ . Como tal,  $m$  e  $\theta_0$  deverão ser constantes. Este estudo permitirá determinar a aceleração da gravidade,  $g$ .

4.2 - Selecionar uma esfera e pendê-la à extremidade da esfera, medindo  $L$

4.3 - Variar  $L$ , entre vários valores espaciais 5 cm. Para cada um destes valores:

4.3.1 - Afastar a esfera da posição de equilíbrio um ângulo  $\theta_0$ , que deverá de ser  $\leq 5^\circ$  e constante para todos os valores de  $L$  usados

4.3.2 - Ao largar, verificar que o fio está esticado e paralelo ao painel e iniciar a contagem no cronómetro.

4.3.3 - Medir o tempo de 10 oscilações ( $t_i$ ) e determinar o período ( $T_i$ )

4.3.4 - Fazer 3 ensaios para cada valor de  $L$

4.4 - Registar todas as medições realizadas em 4.3 numa tabela



4.5 - Representar graficamente  $T^2(L)$ . Fazer um ajuste linear do tipo  $T^2 = aL + b$

4.6 - Determinar a aceleração de gravidade ( $g$ ) e a respectiva incerteza ( $\Delta g$ )

Notas de aula, 20/5/2022

Massas

Massas

$m_1$   
 $m_2$   
 $m_3$

$m_1$

1 -  $(31,34 \pm 0,01) g$

2 -  $(31,34 \pm 0,01) g$

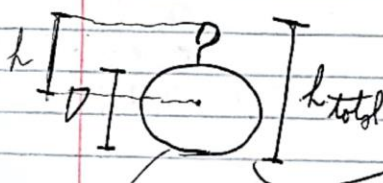
3 -  $(31,34 \pm 0,01) g$

$m_1 \rightarrow$  cilindro  
 $m_2 \rightarrow$  esfera maior  
 $m_3 \rightarrow$  esfera menor

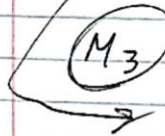
$m_2$  | 1 -  $(68,10 \pm 0,01) g$   
2 -  $(68,10 \pm 0,01) g$   
3 -  $(68,10 \pm 0,01) g$  }  $m_3$  | 1 -  $(43,18 \pm 0,01) g$   
2 -  $(43,18 \pm 0,01) g$   
3 -  $(43,18 \pm 0,01) g$



(M1)  $h_{totol} = (3,570 \pm 0,002) cm$   
 $h_{cil} = (2,330 \pm 0,002) cm$   
 $h_{M1} = \frac{1}{2} h_{cil} + (h_{totol} - h_{cil})$   
 $h_{M1} = (2,405 \pm 0,002) cm$



(M2)  $h_{totol} = (3,542 \pm 0,002) cm$   
 $D = (2,480 \pm 0,001) cm$   
 $h_{M2} = \frac{1}{2} D + (h_{totol} - D)$   
 $h_{M2} = (2,302 \pm 0,002) cm$



(M3)  $h_{totol} = (2,950 \pm 0,002) cm$   
 $D = (1,976 \pm 0,001) cm$   
 $h_{M3} = \frac{1}{2} D + (h_{totol} - D) = (1,962 \pm 0,002) cm$

Passo 2 do Procedimento

$L' = (56,70 \pm 0,05) cm$

$L = L' + h_{M1}$

$M_1 \rightarrow L_1 = L' + h_{M1} = (59,105 \pm 0,050) cm$

$M_2 \rightarrow L_2 = L' + h_{M2} = (59,002 \pm 0,050) cm$

$M_3 \rightarrow L_3 = L' + h_{M3} = (58,662 \pm 0,050) cm$

~~Passo 2~~ Passo 2 do Procedimento  $\rightarrow$  Massa

massa	ensaio	$t_i$ (s)	
$M_1$	1	15,42	$L_1 = 59,105 \text{ cm}$
	2	15,43	
	3	15,42	
$M_2$	1	15,42	$(\theta_0 = 10^\circ)$ $L_2 = 59,002 \text{ cm}$
	2	15,28	
	3	15,23	
$M_3$	1	15,32	$L_3 = 58,662 \text{ cm}$
	2	15,33	
	3	15,48	

~~Passo 4~~ Passo 4 do Procedimento  $\rightarrow$  ~~Componentes~~ Componentes  
Massa escolhida:  $M_2$   $(\theta_0 = 40^\circ)$

$L'$ (cm)	ensaio	$t_i$ (s)	$L'$ (cm)	ensaio	$t_i$ (s)
60	1	16,24	28	1	17,78
	2	16,48		2	17,27
	3	15,87		3	16,99
56	1	15,56	24	1	10,50
	2	15,38		2	10,34
	3	15,54		3	10,50
52	1	15,03	20	1	9,80
	2	15,05		2	9,45
	3	15,17		3	9,81
48	1	14,40			
	2	14,10			
	3	14,33			
44	1	13,76			
	2	13,80			
	3	13,75			
40	1	13,27			
	2	13,19			
	3	13,17			
36	1	12,86			
	2	12,76			
	3	12,81			
32	1	11,95			
	2	12,25			
	3	12,78			



Parte 3 do Procedimento

Moeda enrolada:  $M_2$   
 $L' = 57,1 \text{ cm}$

$\theta_0(^{\circ})$	Amplitude Insaio	$t_i(s)$	Oscilações
	1	15,82	10
2	2	15,78	10
	3	15,86	10
4	1	15,66	10
	2	15,48	10
	3	15,62	10
	1	15,98	10
6	2	15,20	10
	3	15,25	10
	1	15,56	10
8	2	15,74	10
	3	15,53	10
	1	15,33	10
10	2	15,64	10
	3	15,74	10
	1	15,63	10
20	2	15,75	10
	3	15,73	10
	1	15,32	10
30	2	15,27	10
	3	15,51	10
	1	15,99	10
40	2	9,83	6
	3	15,97	10
	1	16,41	10
50	2	16,32	10
	3	16,36	10
	1	6,77	4
60	2	10,34	6
	3		

~~Repetição de medidas~~

✓

Registro dos Instrumentos utilizados

- Cuidados a ter / Notas

- Devido à força de Coriolis, a massa tinha sempre tendência a aproximar-se e até a tocar no painel, especialmente em lançamentos com uma maior amplitude de lançamento. Assim, para tentar reduzir este efeito, ~~lançamos~~ ~~lançamos~~ ~~lançamos~~ a esfera mais próxima do painel.

## Análise de dados

- Monza -

- Assim, efetuou-se a medição das massas, assim como o h (distância do fio ao CM da massa) de cada uma. De notar ainda que as massas foram legendadas da seguinte forma:  $M_1$  = massa cilíndrica,  $M_2$  = massa esférica maior,  $M_3$  = massa esférica menor. Desta forma,  $L'$  corresponde ao comprimento do fio e  $L$  ao comprimento do sistema fio + massa.

- Obtivemos então que

$$M_1 = (37,34 \pm 0,01) \text{ g}$$

$$M_2 = (88, 10 \pm 0, 01) \text{ g}$$

$$M_3 = (43,16 \pm 0,01) \text{ g}$$



$(m \pm 0,01) \text{ g}$	Ensaio	$(t_i \pm 0,1) \text{ s}$	$T_i / \text{s}$	$u(T_i) / \text{s}$	$T_i / \text{s (médio)}$	$u(T_i) / \text{s (médio)}$
$M_1 = 31,34$	1	15,42	1,542	0,001	1,542	0,0003
	2	15,43	1,543	0,001		
	3	15,42	1,542	0,001		
$M_2 = 68,1$	1	15,42	1,542	0,001	1,531	0,0046
	2	15,28	1,528	0,001		
	3	15,23	1,523	0,001		
$M_3 = 43,18$	1	15,32	1,532	0,001	1,538	0,0042
	2	15,33	1,533	0,001		
	3	15,48	1,548	0,001		

Tabela 1 - Dados obtidos no estudo da relação entre a massa e o período de oscilação

- Deve-se notar que  $L_1$ ,  $L_2$  e  $L_3$  (distância ponto suspensa do fio - CM da massa) para as massas 1, 2 e 3) tiveram valores de

$$L_1 = (59,105 \pm 0,050) \text{ cm} \quad L_3 = (58,662 \pm 0,050) \text{ cm}$$

$$L_2 = (59,002 \pm 0,050) \text{ cm}$$

- Por fim, deve-se salientar que para todos os lançamentos desta parte, a amplitude inicial ~~foi~~ de  $10^\circ$ .

- Assim, tendo em conta que  $L$  e  $\theta_0$  foram mantidos constantes em todos os lançamentos, podemos ver que a massa não afeta o período de oscilação, o que já era previsto, pois  $T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$

- Assim, pode-se concluir que algumas motivações para as pequenas variações nos valores de  $T_i$  determinados poderão vir: as diferenças nos comprimentos do fio ( $L_1$ ,  $L_2$  e  $L_3$ ) e, claro, erros na execução da atividade, tais como a largada da massa de forma errada ou demora em parar o cronômetro. Apesar de que as massas esféricas apresentam menor resistência, o seu efeito não deveria de ser suficiente para afetar o valor de  $T_i$ .

### Conclusões

- Em seguida, fizemos o passo 4 do protocolo, em que se pretende ~~o~~ estudar a relação entre o período de oscilação.

- Assim, utilizando a massa  $M_2$  e tendo uma amplitude  $\theta_0$  de  $4^\circ$ , garante-se que a única variável que poderia influenciar o valor de  $T$  seria o comprimento do fio,  $L$ .

$L' / m \pm 0.0005m$	$L / m \pm 0.000500m$	Ensaio	$t_i / s \pm 0.1s$	$T_i / s \pm 0.01s$	$T_i / s$	$u(\bar{T}_i) / s$	$T_i^2$	$u(T_i^2)$		
0,60	0,623020	1	16,24	1,62	1,62	0,02	2,62	0,05		
		2	16,48	1,65						
		3	15,81	1,58						
0,56	0,583020	1	15,56	1,56	1,55	0,00	2,40	0,01		
		2	15,38	1,54						
		3	15,54	1,55						
0,52	0,543020	1	15,03	1,50	1,51	0,00	2,28	0,01		
		2	15,05	1,51						
		3	15,17	1,52						
0,48	0,503020	1	14,40	1,44	1,43	0,01	2,04	0,02		
		2	14,10	1,41						
		3	14,33	1,43						
0,44	0,463020	1	13,78	1,38	1,38	0,00	1,90	0,00		0,0005
		2	13,80	1,38						
		3	13,75	1,38						
0,40	0,423020	1	13,27	1,33	1,32	0,00	1,75	0,01		u(L')
		2	13,19	1,32						
		3	13,17	1,32						
0,36	0,383020	1	12,86	1,29	1,28	0,00	1,64	0,01		u(L)
		2	12,76	1,28						
		3	12,81	1,28						
0,32	0,343020	1	11,95	1,20	1,20	0,01	1,44	0,03		0,023020
		2	12,25	1,23						
		3	11,78	1,18						
0,28	0,303020	1	11,18	1,12	1,11	0,01	1,24	0,01		0,000020
		2	11,21	1,12						
		3	10,99	1,10						
0,24	0,263020	1	10,50	1,05	1,04	0,00	1,09	0,01		h
		2	10,34	1,03						
		3	10,50	1,05						
0,20	0,223020	1	9,80	0,98	0,97	0,01	0,94	0,02		u(h)
		2	9,45	0,95						
		3	9,81	0,98						

Tabela 2 - Dados obtidos para o estudo da relação entre o comprimento do sistema fio+massa ( $L$ ) e o período ( $T_i$ )

- Algumas notas sobre a tabela 2:

-  $L'$  corresponde ao comprimento do fio em si e  $L$  ao comprimento do sistema fio+massa.

- Obtiveram-se os valores de  $u(\bar{T}_i)$  com a fórmula da incerteza na média:  ~~$u(\bar{x}) = \frac{s}{\sqrt{N}}$~~   $u(\bar{x}) = \frac{s}{\sqrt{N}}$

- Os valores de  $u(\bar{T}_i^2)$  foram obtidos através da propagação de incerteza de  $u(\bar{T}_i)$ :

$$u(\bar{T}_i^2) = \sqrt{\left(\frac{\partial \bar{T}_i^2}{\partial \bar{T}_i} u(\bar{T}_i)\right)^2} = \sqrt{(2 \times \bar{T}_i \times u(\bar{T}_i))^2}$$

- Nesta tabela vemos logo que o período de oscilação é fortemente influenciado pelo comprimento do fio, o que poderia ser previsto pela fórmula  $T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$



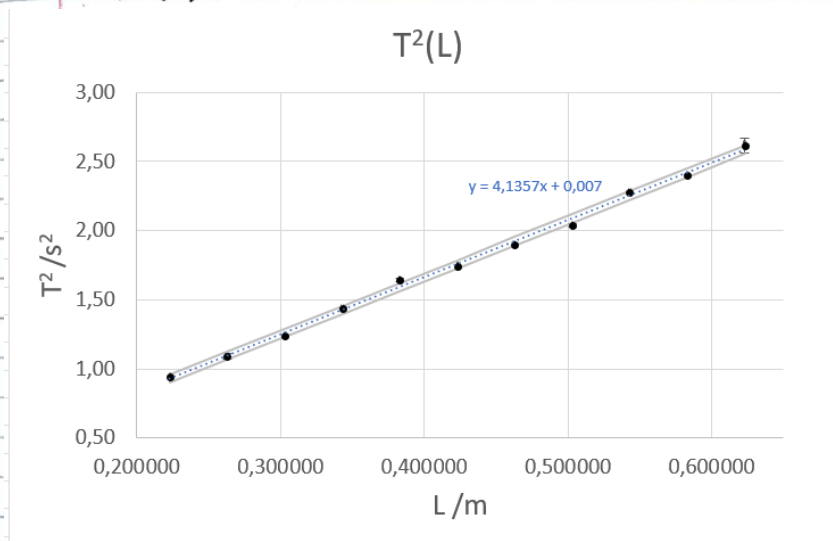
- Ora, além de estudar a relação entre  $L$  e  $T$ , neste ponto da atividade pretende-se ainda determinar a aceleração da gravidade,  $g$ . Assim, a partir da fórmula indicada no ponto anterior temos:

$$T^2 = 4\pi^2 \frac{L}{g}$$

e daí se obtém que

$$g = \frac{4\pi^2 L}{T^2} = \frac{4\pi^2}{m}$$

sendo que  $m$  seria o declive de um gráfico  $T^2(L)$ .



Análise Estatística			
m	4,136	b	0,007
sm	0,072	sb	0,032
r2	0,997	sy	0,030

Gráfico 1- Relação  $T^2(L)$  para o estudo da relação entre  $L$  e  $T$

- Assim, foi feito um gráfico  $T^2(L)$ , em que a regressão linear dos dados é dada pela equação  $y = 4,1357x + 0,007$ , e então  $m = 4,1357$

- Nesta forma:

$$g = \frac{4\pi^2}{m} = \frac{4\pi^2}{4,1357} = 9,55 \text{ m/s}^2$$

tem-se ainda que  $g = \frac{4\pi^2}{m}$  e então:

$$u(g) = \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial m} u(m)\right)^2} = \frac{4\pi^2}{m^2} u(m) = 0,17$$

- Assim, o valor de  $g$  determinado nesta atividade foi:  
 $(9,55 \pm 0,17) \text{ m/s}^2$

- Ora, este valor está associado a um erro de 2,66%  
(face ao valor de referência de  $9,807 \text{ m/s}^2$ )

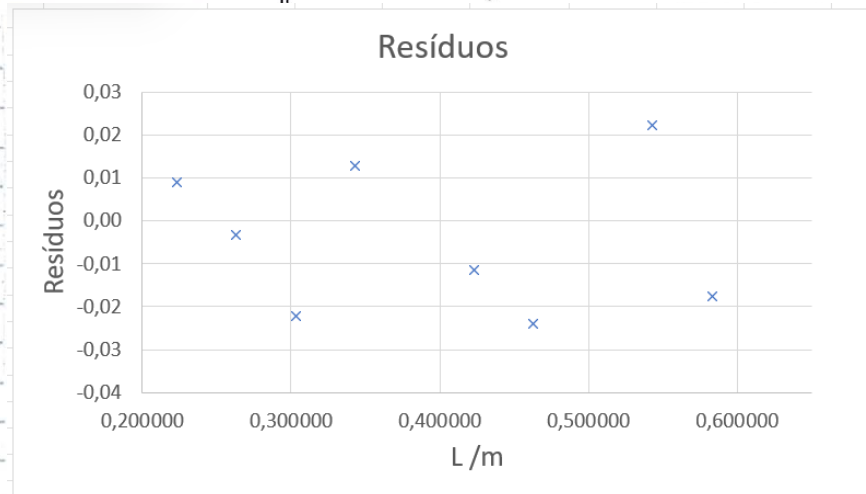


Gráfico 2 - Resíduos do gráfico 1

- Os resíduos no gráfico 2 são aleatórios, pelo que a regressão linear terá sido feita corretamente.

### Amplitude

- Por fim, foi feito o estudo da relação entre a amplitude inicial ( $\theta_0$ ) e o período de oscilação ( $T$ ). Assim, utilizamos sempre a massa 2 ~~de menor~~ (a maior massa esférica) e manteve-se o comprimento do pêndulo ( $L$ ) igual a 57,1 cm em todos os lançamentos.

- Tal com mencionado anteriormente, ~~para~~ em amplitudes maiores, largou-se a massa mais próxima do pivô para contrariar a força de Coriolis. No entanto, mesmo assim nem sempre foi possível fazer 10 oscilações. Assim, para algumas amplitudes, a massa só efetuou 4 e 6 lançamentos (ver tabela 3).



$\theta_0 / ^\circ$	Ensaio	$(t_i \pm 0.1) \text{ s}$	n.º de oscilações	$T_i / \text{s}$	$u(T_i) / \text{s}$	$T_i / \text{s (médio)}$	$u(T_i) / \text{s (médio)}$
2,0	1	15,82	10	1,58	0,01	1,56	
	2	15,18	10	1,52	0,01		
	3	15,86	10	1,59	0,01		
4,0	1	15,66	10	1,57	0,01	1,56	0,004
	2	15,48	10	1,55	0,01		
	3	15,62	10	1,56	0,01		
6,0	1	15,98	10	1,60	0,01	1,55	0,021
	2	15,20	10	1,52	0,01		
	3	15,25	10	1,53	0,01		
8,0	1	15,56	10	1,56	0,01	1,56	0,005
	2	15,74	10	1,57	0,01		
	3	15,53	10	1,55	0,01		
10,0	1	15,33	10	1,53	0,01	1,56	0,010
	2	15,64	10	1,56	0,01		
	3	15,74	10	1,57	0,01		
20,0	1	15,63	10	1,56	0,01	1,57	0,003
	2	15,75	10	1,58	0,01		
	3	15,73	10	1,57	0,01		
30,0	1	15,32	10	1,53	0,01	1,54	0,006
	2	15,27	10	1,53	0,01		
	3	15,51	10	1,55	0,01		
40,0	1	15,99	10	1,60	0,01	1,61	0,011
	2	9,83	6	1,64	0,01		
	3	15,97	10	1,60	0,01		
50,0	1	16,41	10	1,64	0,01	1,64	0,002
	2	16,32	10	1,63	0,01		
	3	16,36	10	1,64	0,01		
60,0	1	6,77	4	1,69	0,01	1,71	0,011
	2	10,34	6	1,72	0,01		

~~Tabela~~ Tabela 3 - Dados recolhidos no estudo da relação entre a amplitude inicial,  $\theta_0$ , e o período,  $T$ .

- De notar que para uma massa que tivesse feito  $n$  oscilações em  $t_i$  s, ~~temos~~ determinamos o período como sendo:  $T_i = \frac{t_i}{n}$

- Mais uma vez,  $u(T_i)$  foi calculado com a fórmula da incerteza na média:  $u(\bar{x}) = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$   
~~Atenção: todos os dados, foi feito o cálculo da incerteza~~

- A partir dos dados da tabela 3, foi feito o gráfico 3:

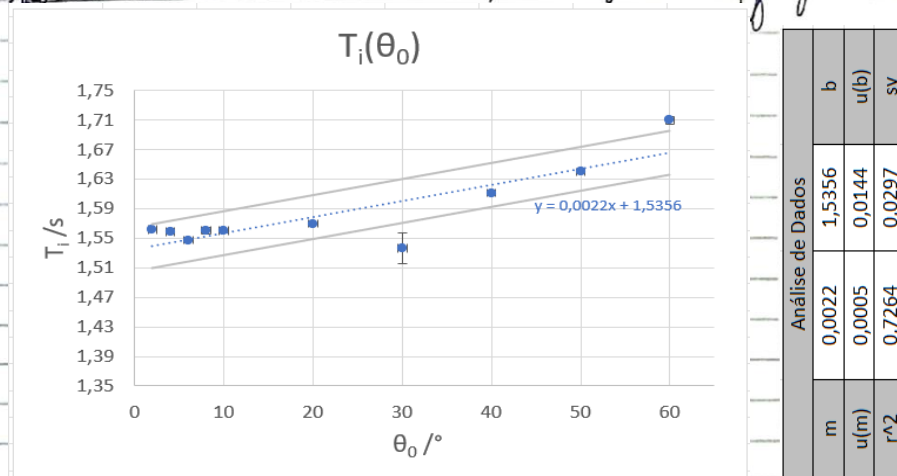


Gráfico 3 - Relação  $T_i(\theta_0)$  da tabela 3. De notar que as barras de incerteza horizontais não são visíveis nesta escala.

- Desde logo, nota-se que  $r^2$  tem um valor relativamente baixo. Do mesmo modo,  $sy$  é demasiado alto, tal como evidenciado pelas duas setas de incerteza (correspondentes a  $\pm sy$ ) no gráfico 3.

- Assim, vê-se ainda que os valores de  $T_i$  para  $\theta_0 = 30^\circ$  e  $\theta_0 = 60^\circ$  são os mais duvidosos. No caso de  $\theta_0 = 30^\circ$ , isto poderá dever-se a erros na execução da atividade. No caso dos  $60^\circ$ , isto estará associado à impossibilidade de efetuar muitas (perto de 10) oscilações para esta amplitude maior.

- É também evidente que  $T_i$  <sup>de forma geral,</sup> aumenta com  $\theta_0$ . No entanto, conforme a fórmula  $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ , isto não deveria de ocorrer. Esta variação do período deverá de ocorrer ~~devido~~ devido à resistência do ar, que varia maior para lançamentos de amplitudes maiores. Ora, ~~a fórmula teórica utilizada não considera o efeito da resistência do ar.~~ a fórmula teórica utilizada não considera o efeito da resistência do ar.

- De qualquer modo, pode-se ver que o declive da regressão linear é igual a 0,0022, que é um valor bastante baixo.



- Por fim, é possível ver no gráfico 3 que o valor de  $T_i$  para amplitudes menores (de  $0^\circ$  a  $10^\circ$ ) é quase constante. Isto mostra a importância de ter usado amplitudes iniciais reduzidas nas outras ~~das~~ partes da atividade experimental.

### Conclusão

- Nesta atividade experimental, foi verificado que a massa do pêndulo não influencia o seu período de oscilação.

- Verificou-se ainda que, contrariamente à fórmula teórica  $T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$ ,  $T_i$  varia (mais especificamente, aumenta) conforme  $L$  aumenta, ainda que pouco. Isto decorre de erros causados por razões mencionadas na análise de dados.

- Por fim, variando o comprimento do pêndulo,  $L$ , foi possível obter um valor de  $g$ , a aceleração da gravidade. Obteve-se  $g = (9,55 \pm 0,17) \text{ m/s}^2$ , o que corresponde a um erro percentual de 2,66%.

- Deve-se ainda ressaltar que esta atividade experimental tem várias fontes de erro:

- Força de Coriolis, especialmente para maiores amplitudes

- Resistência do ar na massa, especialmente para amplitudes maiores

- Amplitude das oscilações nunca é realmente constante nos 10 oscilações, devido a resistência do ar

- ~~Tempo~~ Tempo de reação da pessoa a parar o cronômetro

- Erros na medição de  $L$ , assim como possíveis variações deste valor devido a possíveis "deslizamentos" do fio no sistema de suspensão.

- Possíveis lançamentos em que a velocidade inicial ~~foi~~ não nula.