

# Trabalho 4A - Estudo do Movimento Pendular

Sérgio Quelhas Ferreira de Sousa

Departamento de Física e Astronomia da Faculdade de Ciências da  
Universidade do Porto

20 de Maio de 2022

## Abstract

Nesta experiência foi estudado o movimento pendular e foi determinada a aceleração da gravidade. Deste modo obtivemos um valor experimental de  $9,55 \text{ m/s}^2$  para a aceleração gravítica, que corresponde a um erro relativo percentual de 2,66% e a uma incerteza relativa percentual de 1,75%.

## 1 Introdução

Um pêndulo simples é um corpo suspenso que se encontra fixo de tal modo que o mesmo pode balançar para a frente e para trás através da influência da força da gravidade. O pêndulo de massa  $m$  deve ser fixo na extremidade de um fio de comprimento  $l$  e deve ter massa e espessura desprezável. O movimento do pêndulo é periódico e oscilatório. Aplicando a 2.<sup>a</sup> Lei de Newton podemos assim descobrir a equação de movimento da massa do pêndulo. Considerando que as forças que atuam na massa são: a tensão provocada pelo fio ( $\vec{T}$ , na direção do fio) e o peso ( $\vec{P}$ ). Assim temos que o movimento do pêndulo está condicionado apenas pelo comprimento do fio, pela massa do corpo  $m$  e pela aceleração gravítica.

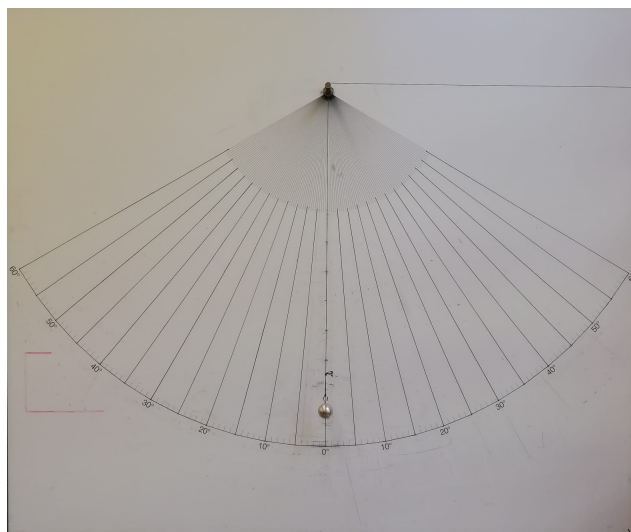


Figure 1: Montagem Experimental

Podemos, deste modo, decompor as forças que atuam sobre o corpo nas suas componentes normal e tangencial:

$$\vec{T} + \vec{P} = 0 \quad (1)$$

Normal:

$$T - P\cos(\theta) = ma_n = m\omega^2 L \quad (2)$$

Tangencial:

$$-P\sin(\theta) = ma_t = m\alpha L \quad (3)$$

Sendo  $\omega = \frac{d\theta}{dt}$  a velocidade angular e  $\alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2}$  a aceleração angular.

Deste modo, podemos reescrever a segunda equação substituindo os termos conhecidos.

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\sin(\theta) = 0 \quad (4)$$

Como não é possível reescrever esta equação de forma usual, iremos usar uma aproximação de modo a facilitar os cálculos. Para valores de  $\theta$  pequenos (inferiores a  $5^\circ$ ) podemos considerar  $\sin(\theta) \approx \theta$ . Consequentemente, temos que, para pequenas oscilações a equação diferencial do movimento é aproximada por:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\theta = 0 \quad (5)$$

Ao analisarmos a equação 5 percebemos que a mesma se assemelha a um movimento do tipo harmónico, tal como a de uma mola com massa na extremidade:

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega t + \phi) [1] \quad (6)$$

Sendo  $\theta_0$  a amplitude angular de oscilação,  $\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$  a frequência angular da oscilação,  $\phi$  a fase inicial e, consequentemente,  $\theta t + \phi$  a fase no instante  $t$ . Sabemos ainda que  $\phi$  e  $\theta_0$  são constantes e podem ser facilmente determinados pelas condições iniciais do movimento.

Assim, é fácil perceber que este movimento apresenta um período( $T$ ) de tal modo que:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \quad (7)$$

Assim sendo, tendo em conta que a força de atrito provocada pela resistência oferecida pelo ar á passagem da massa, podemos tirar algumas conclusões que devemos concluir experimentalmente:

1. O período de oscilação do pêndulo é independente da massa do mesmo;
2. O período de oscilação do pêndulo é independente da amplitude para ângulos semelhantes ou inferiores a  $5^\circ$ ;
3.  $T^2$  é linearmente dependente de  $L$ .

## 2 Experiência

### 2.1 Método Experimental

#### 2.1.1 Estudo do efeito da massa no período do pêndulo.

Nesta fase da experiência pretendeu-se confirmar a conclusão **1.** feita anteriormente na **1 Introdução**. Deste modo, mantiveram-se fixos os valores de  $L$  (comprimento do fio) e os valores de  $\theta$  (ângulo do fio com o equilíbrio [ $\theta$  de equilíbrio =  $0^\circ$ ]), fazendo variar apenas alterações nas massas.

- Foram selecionados e pesados 3 pesos de massas diferentes ( $m_1$ ,  $m_2$  e  $m_3$ ).



Figure 2: Pesos utilizados [ $m_1$ ,  $m_2$  e  $m_3$ ].

- Afastamos o peso da posição de equilíbrio e registamos o ângulo que foi usado. Usando o mesmo ângulo largamos o peso e registamos o tempo correspondente a 10 oscilações garantindo que o pêndulo estivesse paralelo ao painel do transferidor e que o fio se encontrava completamente esticado. Repetimos este ensaio mais 2 vezes.
- Repetimos o passo anterior para as outras 2 massas confirmando que o comprimento total do pendulo ( $L = l(\text{fio}) + \frac{\text{Altura}_m}{2}$ ) se manteve e que as medições começaram a ser efetuadas meio período após o pêndulo ser largado (isto permite reduzir o erro atribuído a alguma força inicial que seja aplicada sobre o peso).

### 2.1.2 Estudo da variação do período com a amplitude de oscilação.

Nesta segunda fase, pretendemos confirmar a conclusão **2.** feita anteriormente na **1 Introdução** e estudar a variação do período com a amplitude de oscilação para ângulos superiores a  $5^\circ$ . Deste modo, mantiveram-se fixos os valores de  $L$  (comprimento total do pêndulo) e foi usada a mesma massa em todas as medições (massa constante), alterando apenas os valores de  $\theta$ .

- Seleccionamos um dos pesos e prendemô-la na extremidade do fio, registando o valor do comprimento total do pêndulo.
- Afastamos a esfera da posição de equilíbrio até ao ângulo desejado e largamos o peso e registamos o tempo correspondente a 10 oscilações, bem como do ângulo usado em cada medição, garantindo que o pêndulo esteja paralelo ao painel do transferidor e que o fio se encontrava completamente esticado.
- Repetimos o passo anterior para diferentes valores de  $\theta$ , registando sempre no mínimo 3 ensaios para cada amplitude e assegurando que as medições começaram a ser efetuadas meio período após o pêndulo ser largado.

### 2.1.3 Estudo da variação do período com o comprimento do pêndulo.

Nesta terceira fase, pretendemos confirmar a conclusão **3.** feita anteriormente na **1 Introdução** e calcularemos através dos dados obtidos a aceleração gravítica. Deste modo, manteve-se fixo o valor de  $\theta \leq 5^\circ$  e foi usado o mesmo peso (massa constante), fazendo variar apenas o comprimento do fio ( $l$ ).

- Escolhendo um qualquer valor para  $l$ , afastamos a esfera num ângulo dentro do limite escolhido em relação à posição de equilíbrio e largamos o peso, registando os valores de período para 10 oscilações e confirmando que o fio está esticado e que o pêndulo está paralelo ao painel do transferidor. Repetimos este passo mais 2 vezes de modo a obter 3 ensaios para cada  $l$ .
- Variamos o comprimento de  $l$ , registando sempre no mínimo 3 ensaios para cada  $l$  e assegurando que os valores de período começam a ser efetuados após meio período após o pêndulo ser largado.

## 2.2 Resultados e Análise.

### 2.2.1 Resultados: Estudo do efeito da massa no período do pêndulo.

Na figura 3 podemos ver uma tabela com os resultados obtidos nesta parte da experiência.

(m ± 0,01) g	Ensaio	(t <sub>i</sub> ± 0.10) s	T <sub>i</sub> /s	u(T <sub>i</sub> ) /s	T <sub>i</sub> /s (médio)	u(T <sub>i</sub> ) /s (médio)	Desvio Padrão Relativo
M1=31,34	1	15,42	1,542	0,001	1,542	0,00027	0,539%
	2	15,43	1,543	0,001			
	3	15,42	1,542	0,001			
M2=68,10	1	15,42	1,542	0,001	1,531	0,00464	
	2	15,28	1,528	0,001			
	3	15,23	1,523	0,001			
M3=43,18	1	15,32	1,532	0,001	1,538	0,00423	
	2	15,33	1,533	0,001			
	3	15,48	1,548	0,001			

Figure 3: Valores registados

Como podemos ver através dos dados obtidos, apesar de os valores das massas se alterarem bastante (mais que duplicaram entre M1 e M2), os valores para o período de oscilação ( $T_i$ ) permanecem muito semelhantes tendo se obtido um desvio padrão relativo de apenas 0,539%. É de se notar que se mantiveram constantes o comprimento total do pêndulo ( $L = 0,59$ ) e a amplitude de largada ( $\theta_0 = 10^\circ$ ). Assim, é possível confirmar a nossa preposição : A massa não tem influência direta sobre o período de oscilação.

### 2.2.2 Resultados: Estudo da variação do período com a amplitude de oscilação.

Como vimos anteriormente nesta experiência, o período de oscilação não é influenciado pela massa. Deste modo, usaremos o corpo m2 pois este é o mais fácil de visualizar, por ser brilhante, e porque possui uma superfície do tipo esférica o que diminui a força criada pela resistência que o ar tem a passagem da esfera. Com os dados obtidos foi construído, usando os valores obtidos, um gráfico que nos demonstra como varia o período em função da amplitude de oscilação escolhida. A tabela com os valores obtidos pode ser encontrado no anexo.

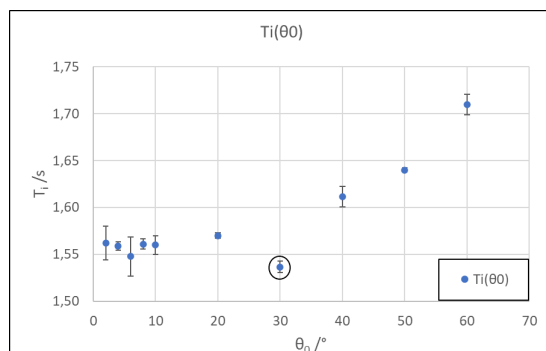


Figure 4: Gráfico do período de oscilação em função da amplitude de oscilação.

O ponto assinalado parece desviar-se da tendência apresentada pois está muito abaixo do esperado, isto pode dever-se a erros de medição efetuados durante a realização da experiência. Deste modo, o ponto não foi considerado na análise que se segue. Para amplitudes pequenas (entre 0 e  $10^\circ$ ) podemos perceber que os valores para o período se mantêm aproximadamente constantes, o que vai de encontro a aproximação feita na introdução teórica. No entanto, tendo em conta a totalidade do gráfico é possível observar uma clara tendência polinomial. Esta tendência é confirmada pelo valor real de amplitude que corresponde a[2]:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\left[1 + \frac{1}{16}\theta^2 + \frac{11}{3072}\theta^4\right] \quad (8)$$

Com  $g=9,807 \text{ m/s}^2$  e  $L=0,59 \text{ m}$ .

No conjunto das figuras seguintes é possível observar a comparação entre os valores experimentais e os valores calculados usando a expressão acima.

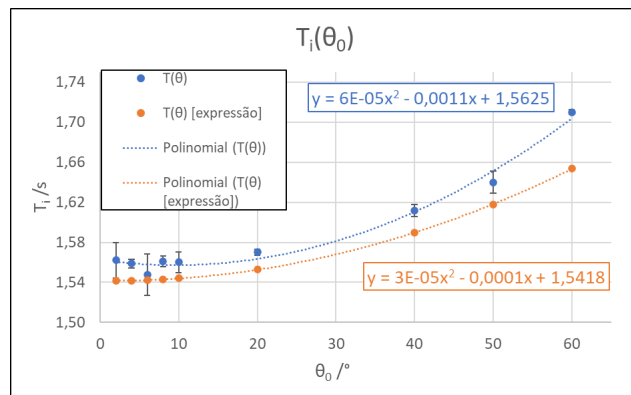


Figure 5: Gráfico do periodo de oscilação em função da amplitude de oscilação.

Análise de Dados Experimentais			
	Coef(x²)	Coef(x)	b
	5,747E-05	-1,100E-03	1,563E+00
u()	9,612E-06	5,830E-04	5,281E-03
r²	9,852E-01	7,539E-03	#N/D

Figura 6 : Análise da regressão polinomial dos valores experimentais.

Análise de Dados usando a Expressão			
	Coef(x²)	Coef(x)	b
	3,279E-05	-1,111E-04	1,542E+00
u()	4,439E-07	2,692E-05	2,439E-04
r²	9,999E-01	3,482E-04	#N/D

Figura 7 : Análise da regressão polinomial dos valores da expressão.

Como podemos ver pela figura 5,6 e 7, os valores obtidos comportam-se de forma semelhante aos valores exatos. Deste modo podemos concluir que o ajuste feito foi o mais acertado.



### 2.2.3 Resultados: Estudo da variação do período com o comprimento do pêndulo.

Nesta fase da experiência mantiveram-se constantes os valores de  $\theta=4^\circ$  e foi escolhida e usada apenas uma massa (M2). Usando os valores. Deste modo a todos os valores de  $l$  (comprimento do fio) foi adicionado o valor que corresponde a "altura" da esfera M2 que corresponde a 0,023 metros. Com os dados obtidos foi contruido o gráfico do periodo de oscilação ao quadrado ( $T_i^2$ ) em função do comprimento total total do pêndulo ( $L$ ). A tabela com todos os valores obtidos pode ser consultada no anexo.

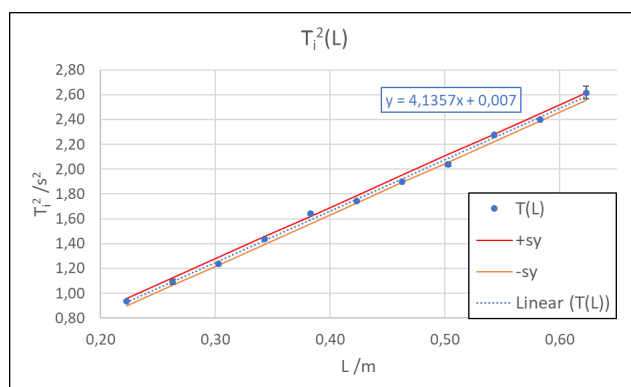


Figure 8: Gráfico com do quadrado do período de oscilação em função do comprimento total do pêndulo.

Análise Estatística			
m	4,136	0,007	b
sm	0,072	0,032	sb
r2	0,997	0,030	sy

Figure 9: Análise da regressão linear efetuada com os dados experimentais.

Usando os valores obtidos foi possível calcular o valor da aceleração gravítica:

$$g = 4\pi^2/L \quad (9)$$

Com  $L = 4,136 \text{ s}^2/m$  (Declive da Figura 9)

Deste modo foi possível obter um valor de gravidade  $9,55 \text{ m/s}^2$ , isto corresponde a um erro relativo percentual de 2,55% (valor referência:  $9,807 \text{ m/s}^2$  [3]) e a uma incerteza relativa percentual de 1,75%.

Resultados Finais	
$g$	9,55
$u(g)$	0,17
Erro %	2,65%
$u(g) (\%)$	1,75%

Figure 10: Resultados Finais.

### 3 Conclusões

Foram cumpridos os objetivos propostos para esta experiência. Desta forma, foi possível observar o movimento pendular descrito pelo pêndulo e foi também possível calcular a aceleração gravítica a que o corpo se encontrava sujeita. Obtivemos o valor de  $9,55 \text{ m/s}^2$  para a aceleração gravítica, que correspondem a um erro relativo percentual de 2,66% e a uma incerteza relativa percentual de 1,75%. Apesar dos valores descritos parecerem satisfatórios, podemos perceber que o erro relativo percentual é superior à sua incerteza. Isto pode dever-se a erros na medição dos valores experimentais, entre os quais se encontram:

- erros na medição dos valores experimentais;
- o tempo de reação necessário para parar o cronómetro;
- a existência da força de Coriolis que produz efeito sobre a direção do pêndulo fazendo o período variar.

### References

- [1] Docentes da unidade curricular FIS1005 FCUP. Trabalho 4a - estudo do movimento pendular. pages 1–6, 2022.
- [2] 2017 HyperPhysics ©C.R. Nave. Large amplitude pendulum. Consultado a 26/05/2022.
- [3] Beijing WDC for Geophysics. Standart value for gravity. Consultado a 26/05/2022.

### Anexo

$\theta_0 / ^\circ$	Ensaio	$(t_i \pm 0.1) \text{ s}$	n.º de oscilações	$T_i / \text{s}$	$u(T_i) / \text{s}$	$T_i / \text{s}$ (médio)	$u(T_i) / \text{s}$ (médio)
2,0	1	15,82	10	1,58	0,01	1,56	0,018
	2	15,18	10	1,52	0,01		
	3	15,86	10	1,59	0,01		
4,0	1	15,66	10	1,57	0,01	1,56	0,004
	2	15,48	10	1,55	0,01		
	3	15,62	10	1,56	0,01		
6,0	1	15,98	10	1,60	0,01	1,55	0,021
	2	15,20	10	1,52	0,01		
	3	15,25	10	1,53	0,01		
8,0	1	15,56	10	1,56	0,01	1,56	0,005
	2	15,74	10	1,57	0,01		
	3	15,53	10	1,55	0,01		
10,0	1	15,33	10	1,53	0,01	1,56	0,010
	2	15,64	10	1,56	0,01		
	3	15,74	10	1,57	0,01		
20,0	1	15,63	10	1,56	0,01	1,57	0,003
	2	15,75	10	1,58	0,01		
	3	15,73	10	1,57	0,01		
30,0	1	15,32	10	1,53	0,01	1,54	0,006
	2	15,27	10	1,53	0,01		
	3	15,51	10	1,55	0,01		
40,0	1	15,99	10	1,60	0,01	1,61	0,011
	2	9,83	6	1,64	0,01		
	3	15,97	10	1,60	0,01		
50,0	1	16,41	10	1,64	0,01	1,64	0,002
	2	16,32	10	1,63	0,01		
	3	16,36	10	1,64	0,01		
60,0	1	6,77	4	1,69	0,01	1,71	0,011
	2	10,34	6	1,72	0,01		

Figure 11: Tabela dos valores registados referentes à parte 2.2.2

$\theta_0 / ^\circ$	$T_i / \text{s}$ (experimental)	$T_i / \text{s}$ (expressão)
2	1,562	1,541
4	1,559	1,542
6	1,548	1,542
8	1,561	1,543
10	1,560	1,544
20	1,570	1,553
40	1,611	1,589
50	1,640	1,618
60	1,710	1,654

Figure 12: Tabela dos valores utilizados para a construção do gráfico da figura 5

$L' / m \pm 0.0005m$	$L / m \pm 0.000500m$	Ensaio	$t_i / s \pm 0.1s$	$T_i / s \pm 0.01s$	$T_i / s$	$u(T_i) / s$	$T_i^2$	$u(T_i^2)$
0,60	0,623020	1	16,24	1,62	1,62	0,02	2,62	0,05
		2	16,48	1,65				
		3	15,81	1,58				
0,56	0,583020	1	15,56	1,56	1,55	0,00	2,40	0,01
		2	15,38	1,54				
		3	15,54	1,55				
0,52	0,543020	1	15,03	1,50	1,51	0,00	2,28	0,01
		2	15,05	1,51				
		3	15,17	1,52				
0,48	0,503020	1	14,40	1,44	1,43	0,01	2,04	0,02
		2	14,10	1,41				
		3	14,33	1,43				
0,44	0,463020	1	13,78	1,38	1,38	0,00	1,90	0,00
		2	13,80	1,38				
		3	13,75	1,38				
0,40	0,423020	1	13,27	1,33	1,32	0,00	1,75	0,01
		2	13,19	1,32				
		3	13,17	1,32				
0,36	0,383020	1	12,86	1,29	1,28	0,00	1,64	0,01
		2	12,76	1,28				
		3	12,81	1,28				
0,32	0,343020	1	11,95	1,20	1,20	0,01	1,44	0,03
		2	12,25	1,23				
		3	11,78	1,18				
0,28	0,303020	1	11,18	1,12	1,11	0,01	1,24	0,01
		2	11,21	1,12				
		3	10,99	1,10				
0,24	0,263020	1	10,50	1,05	1,04	0,00	1,09	0,01
		2	10,34	1,03				
		3	10,50	1,05				
0,20	0,223020	1	9,80	0,98	0,97	0,01	0,94	0,02
		2	9,45	0,95				
		3	9,81	0,98				

Figure 13: Tabela dos valores registados referentes à parte 2.2.3

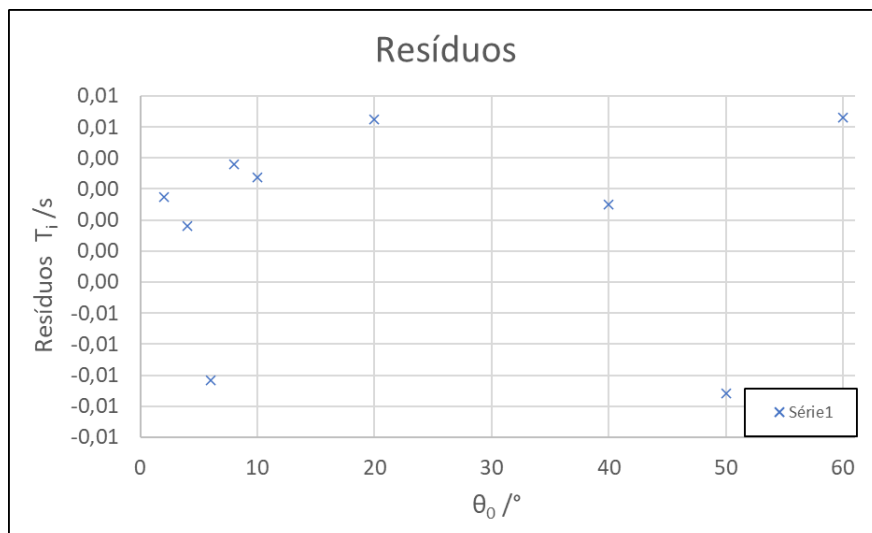


Figure 14: Resíduos referentes à polinomearização do gráfico da figura 5

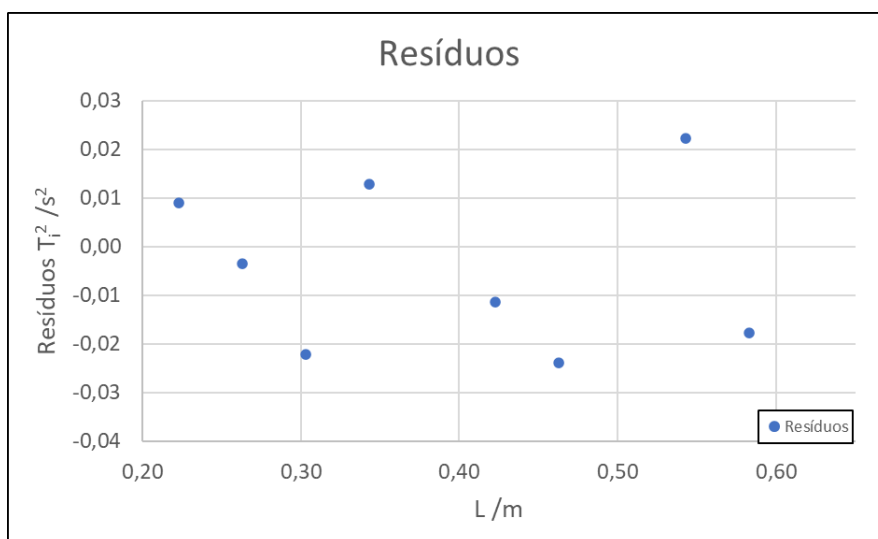


Figure 15: Resíduos referentes à linearização feita no gráfico da figura 8