

## Trabalho 2B

### Estudo do Rolamento dum Cilindro numa Superfície Horizontal

gente Santos, G1, Turma PL1

28/03/2022 ; Lab 119

#### Objetivos

- Estimar velocidade do centro de massa, velocidade angular, velocidade mínima e máxima;
- Avaliar validade do Princípio de sobreposição, da condição de rolagem sem escorregamento;
- Verificar velocidade do ponto no topo : 2 Vcm;
- Aprender técnicas de processamento de vídeo e imagem.

#### Introdução teórica

O movimento em estudo será o rolagem, pelo que se espera verificar a condição de rolagem:  $V_{CM} = \omega r \Leftrightarrow V_{CM} = 2\pi r / T$ . Espera-se também que a equação do movimento dos pontos circundantes do cilindro seja:

$$x_A(t) = v_{CM}(t + \frac{1}{w} \sin \omega t)$$

sendo:

$v_{CM}$  - velocidade do centro de massa

$\frac{1}{w} \sin \omega t$  - movimento de um ponto relativamente ao centro de massa

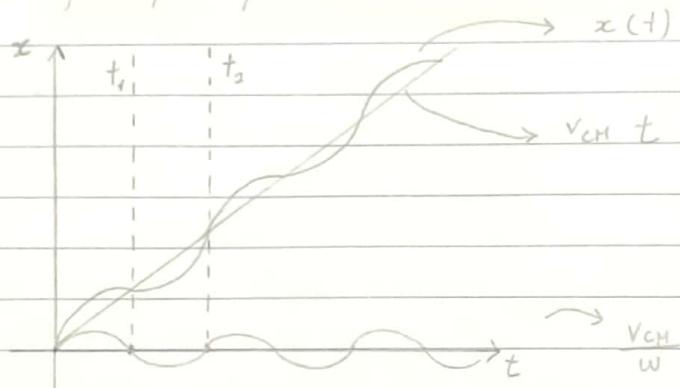
As variáveis que queremos medir são:

- $x_{CM}$
- $x_A(t)$
- $d$  cilindro

A partir da análise gráfica, queremos determinar:

- $v_{CM}$  (declive do gráfico  $x_{CM}$  / tempo)
- $T$  (ponto A toca no chão quando  $x_A(t) = x_{CM}(t)$  se intersejam, o ponto médio entre esses instantes será T)
- $\omega$  ( $\omega = 2\pi / T$ )
- $x_A$  ajuste (a partir de valores de  $v_{CM}$  e  $\omega$ )

Grafo que esperamos obter:



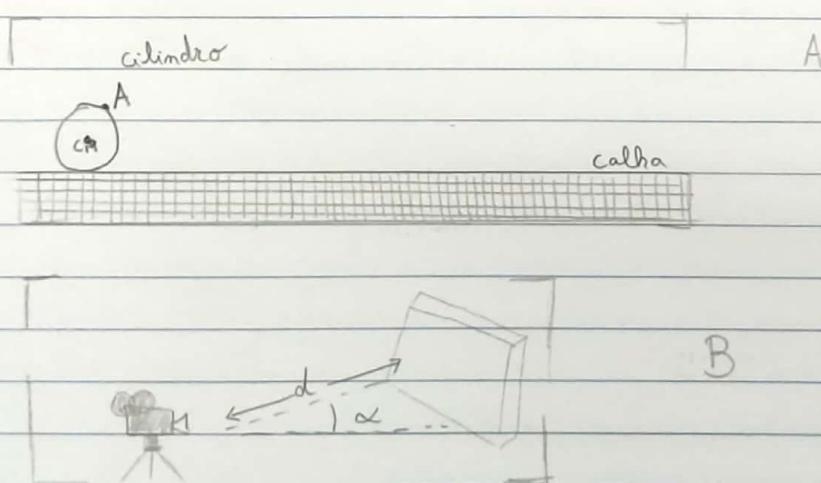
Fase do movimento de rotacao!

$$\frac{v_{cm}}{\omega} = \sin(\omega t + \rho_0)$$

### Material

- Software:
  - Freemarker (MTS para AVI)
  - Tracker (análise de resultados)
- Cilindro
- Calha
- Travessa
- Câmera de vídeo

### Procedimento experimental



### Etapas

1. Assegurar a montagem da figura 1
2. Medir diâmetro do cilindro

colocar para q1 não sirva o ultimo

3. Nivelar a calha (mesma vez em sentidos contrários);
4. Assegurar uma boa iluminação;
5. Montar a câmara e o tripé de forma a maximizar a resolução da visualização e minimizar erros de paralaxe;
6. Iniciar lançamentos do cilindro (manualmente) (assegurar alinhamento com placa de alumínio);
7. Garantir:
  - a. mº suficiente de pontos (câmara a 25 fps) (garantir 14 a 19 pontos);
  - b. movimento próximo do uniforme;
  - c. no CM, o ponto é o centro da pinta; no A, o ponto é o extremo junto à superfície lateral.

#### Registros / Dados para registrar:

1. Preparar câmara digital:
  - a. Ligar, abrir monitor lateral, escolher modo filme (premindo sucessivamente "Func");
  - b. Desligar a barra inferior até que o valor do obturador seja 1/2000 (Nota: maior denominador, maior iluminação necessária);
  - c. Iniciar gravações;
2. Transferir vídeo para o computador
  - a. conectar câmara e pc com cabo USB;
  - b. escolher comp / impres;
  - c. Aparece janela no monitor. Escolher: AVCHD, BDMV, Stream;
  - d. Copiar para a pasta "Por converter" (Atenção!);
3. Converter com Freemake
  - a. Abrir software, selecionar vídeo, selecionar "convert" na "barra de ferramentas" e "AVI";
  - b. Guardar conversão;
4. Analisar dados AVIMECA
  - a. Selecionar "avimeca", "avimeca 2.pt", "Ficheiros" e "abrir clip"
  - b. Escolher o clip, selecionar calibração e selecionar: "Projéctis / Queda", "Roloamento direita esquerda" ou "Roloamento esquerda direita"

4. c. Selecionar "escala vertical" , definir diâmetro de referência;
- d. Selecionar o ponto " (segundo...) e defini-lo ;
- e. Ver "propriedades do elo" ;
- f. Na janela "Hedder" escolher pontor elo com o ponto da parafina;
- g. Analisar caixas restantes com um ponto . Ver "ponto / imagem" ( centro inferior seguido no menu lateral);
- h. Selecionar "desenhar" para desenhar ponto mais montagem seguintes ;
- i. Guardar arquivo de dador (mota : "cotação" );

## 5. Software Tracker

- a. Importar vídeo AVI ;
- b. Visualizar eixos : "Trajetória", "eixo", "nível" ;
- c. Definir origem: shift e rato
- d. Tabular sistema: "Trajetória", "Fotogrametros de calib.", "Balanço de calib."
2. Extrair dador :
- i. Selecionar "Trajetória", "Novo", "Mota puntual". Repetir processo para o com (mama A) e ponto de referência (mama B)
- ii. Selecionar pontos desejados : shift e rato , ajustando posição p/ frame
- iii. Exportar dador : adiciona tabela e copiar para excel

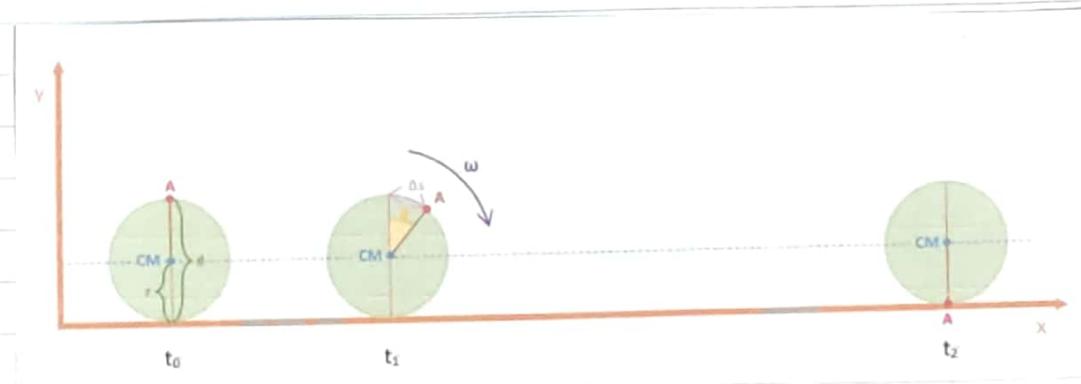
Nota: apagar arquivo dora ponto 4 e 5

## Execução

$$\text{Hedder} \text{ do diâmetro do cilindro : } (68,30 \pm 0,05) \text{ mm}$$

No nulo, verificou-se que a calha estava nivelada e ligámos a lug de filmagens ligamos a câmara digital, baixámos o tripé para que a lente ficasse ao nível da calha, de forma a captar a base do cilindro para evitar erros de paralelo. Também evitámos este erro colocando a câmara afastada e fazendo o zoom.

### Exemplo



#### Legenda:

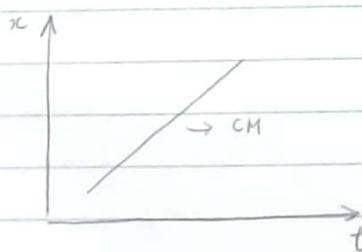
- CM – Centro de Massa
- A – Ponto da Periferia do Cilindro
- $\omega$  – Velocidade Angular do Cilindro
- $\Delta s$  – Deslocamento do Ponto A
- d – Diâmetro do Cilindro
- r – Raio do Cilindro
- $\theta$  – Ângulo do Deslocamento do Cilindro

Considerando a seguinte ordem de acontecimentos  $t_0 < t_1 < t_2$ .

Em  $t = t_2$ :

$$\vec{v}_A = \vec{v}_{CM} + \vec{\omega} \times \vec{r}, \text{ mas no ponto de contacto } \vec{v}_A = \vec{0}$$

$$\bullet v_{CM} = \omega r \Leftrightarrow v_{CM} = \omega \frac{d}{2} \rightarrow \text{Queremos verificar esta condição}$$

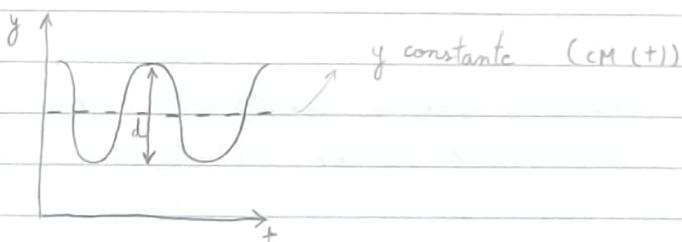
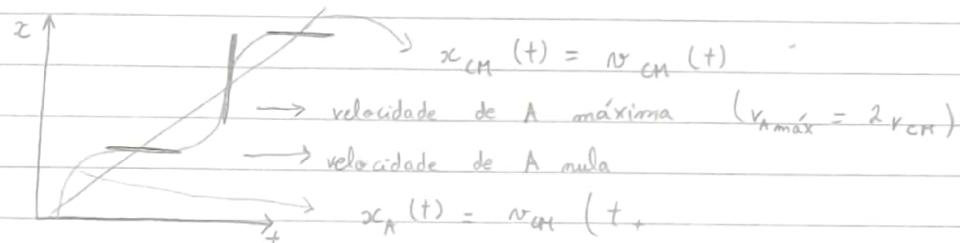


E' esperado que o CM  
tenha movimento retílineo  
uniforme

Também na posição mais alta, a velocidade do ponto A deverá ser o dobro da velocidade do centro de massa.

Para evitar erros de paralelaxe, posicionámos a câmara de forma a que a lente ficasse paralela à face do cilindro e afastámos-la da calha, para conseguirmos um ângulo de abertura ( $\alpha$ ) pequeno. Para aproximar a imagem, fizemos zoom nas ferramentas da câmara digital. Iluminámos bem o local para que, depois, quando passássemos o vídeo para o computador e trabalhássemos usando os softwares já referidos, fosse possível identificar todos os pontos desejados.

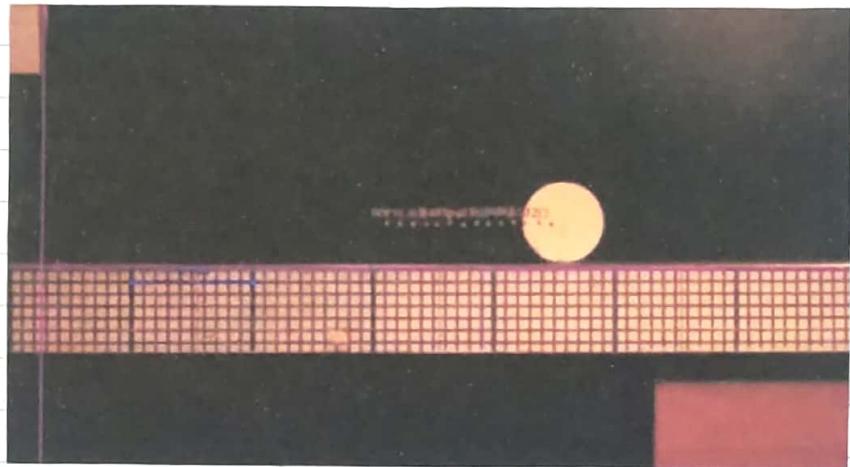
Esperamos obter os gráficos:



Análise dos dados recolhidos com o software Tracker

| Massa A  |          | Massa B  |          |          |          |          |          |          |          |          |          |  |
|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|--|
| t (s)    | x (m)    | y (m)    | t (s)    | x (m)    | y (m)    |          |          |          |          |          |          |  |
| 2,20E+00 | 9,49E-03 | 3,71E-02 | 2,20E+00 | 1,47E-03 | 3,92E-03 | 3,64E+00 | 3,99E-01 | 3,85E-02 | 3,60E+00 | 4,19E-01 | 2,42E-02 |  |
| 2,24E+00 | 2,16E-02 | 3,62E-02 | 2,24E+00 | 3,16E-03 | 8,14E-03 | 3,68E+00 | 4,11E-01 | 3,85E-02 | 3,64E+00 | 4,24E-01 | 1,57E-02 |  |
| 2,28E+00 | 3,19E-02 | 3,71E-02 | 2,28E+00 | 6,54E-03 | 1,57E-02 | 3,72E+00 | 4,21E-01 | 3,77E-02 | 3,68E+00 | 4,29E-01 | 9,83E-03 |  |
| 2,32E+00 | 4,31E-02 | 3,71E-02 | 2,32E+00 | 1,24E-02 | 2,33E-02 | 3,76E+00 | 4,31E-01 | 3,85E-02 | 3,72E+00 | 4,30E-01 | 6,45E-03 |  |
| 2,36E+00 | 5,69E-02 | 3,62E-02 | 2,36E+00 | 2,17E-02 | 3,60E-02 | 3,80E+00 | 4,41E-01 | 3,85E-02 | 3,76E+00 | 4,30E-01 | 8,14E-03 |  |
| 2,40E+00 | 6,73E-02 | 3,62E-02 | 2,40E+00 | 3,52E-02 | 4,69E-02 | 3,84E+00 | 4,52E-01 | 3,85E-02 | 3,80E+00 | 4,31E-01 | 9,83E-03 |  |
| 2,44E+00 | 7,85E-02 | 3,54E-02 | 2,44E+00 | 5,21E-02 | 5,54E-02 | 3,88E+00 | 4,61E-01 | 3,85E-02 | 3,84E+00 | 4,30E-01 | 1,40E-02 |  |
| 2,48E+00 | 8,88E-02 | 3,54E-02 | 2,48E+00 | 7,06E-02 | 6,30E-02 | 3,92E+00 | 4,71E-01 | 3,94E-02 | 3,88E+00 | 4,33E-01 | 1,91E-02 |  |
| 2,52E+00 | 1,02E-01 | 3,62E-02 | 2,52E+00 | 9,00E-02 | 6,89E-02 | 3,96E+00 | 4,82E-01 | 3,77E-02 | 3,92E+00 | 4,39E-01 | 3,01E-02 |  |
| 2,56E+00 | 1,11E-01 | 3,54E-02 | 2,56E+00 | 1,14E-01 | 6,97E-02 | 4,00E+00 | 4,92E-01 | 3,85E-02 | 3,96E+00 | 4,49E-01 | 3,94E-02 |  |
| 2,60E+00 | 1,22E-01 | 3,71E-02 | 2,60E+00 | 1,36E-01 | 6,63E-02 | 4,04E+00 | 5,03E-01 | 3,85E-02 | 4,00E+00 | 4,61E-01 | 5,03E-02 |  |
| 2,64E+00 | 1,35E-01 | 3,79E-02 | 2,64E+00 | 1,56E-01 | 6,13E-02 | 4,08E+00 | 5,13E-01 | 3,68E-02 | 4,04E+00 | 4,73E-01 | 6,04E-02 |  |
| 2,68E+00 | 1,44E-01 | 3,54E-02 | 2,68E+00 | 1,74E-01 | 5,28E-02 | 4,12E+00 | 5,24E-01 | 3,85E-02 | 4,08E+00 | 4,92E-01 | 6,63E-02 |  |
| 2,72E+00 | 1,56E-01 | 3,62E-02 | 2,72E+00 | 1,88E-01 | 4,36E-02 | 4,16E+00 | 5,33E-01 | 3,77E-02 | 4,12E+00 | 5,10E-01 | 6,89E-02 |  |
| 2,76E+00 | 1,67E-01 | 3,62E-02 | 2,76E+00 | 1,99E-01 | 3,34E-02 | 4,20E+00 | 5,42E-01 | 3,85E-02 | 4,16E+00 | 5,30E-01 | 7,22E-02 |  |
| 2,80E+00 | 1,76E-01 | 3,71E-02 | 2,80E+00 | 2,08E-01 | 2,16E-02 | 4,24E+00 | 5,52E-01 | 3,85E-02 | 4,20E+00 | 5,51E-01 | 7,14E-02 |  |
| 2,84E+00 | 1,88E-01 | 3,79E-02 | 2,84E+00 | 2,12E-01 | 1,40E-02 | 4,28E+00 | 5,63E-01 | 3,85E-02 | 4,24E+00 | 5,71E-01 | 6,63E-02 |  |
| 2,88E+00 | 1,98E-01 | 3,79E-02 | 2,88E+00 | 2,15E-01 | 8,14E-03 | 4,32E+00 | 5,71E-01 | 3,77E-02 | 4,28E+00 | 5,87E-01 | 6,04E-02 |  |
| 2,92E+00 | 2,10E-01 | 3,79E-02 | 2,92E+00 | 2,16E-01 | 6,45E-03 | 4,36E+00 | 5,81E-01 | 3,77E-02 | 4,32E+00 | 6,03E-01 | 5,28E-02 |  |
| 2,96E+00 | 2,21E-01 | 3,79E-02 | 2,96E+00 | 2,16E-01 | 6,45E-03 | 4,40E+00 | 5,93E-01 | 3,77E-02 | 4,36E+00 | 6,14E-01 | 4,44E-02 |  |
| 3,04E+00 | 2,42E-01 | 3,77E-02 | 3,00E+00 | 2,16E-01 | 8,98E-03 | 4,44E+00 | 6,05E-01 | 3,77E-02 | 4,40E+00 | 6,23E-01 | 3,43E-02 |  |
| 3,08E+00 | 2,52E-01 | 3,68E-02 | 3,04E+00 | 2,19E-01 | 1,49E-02 | 4,48E+00 | 6,13E-01 | 3,77E-02 | 4,44E+00 | 6,30E-01 | 2,42E-02 |  |
| 3,12E+00 | 2,64E-01 | 3,77E-02 | 3,08E+00 | 2,24E-01 | 2,16E-02 | 4,52E+00 | 6,21E-01 | 3,94E-02 | 4,48E+00 | 6,36E-01 | 1,57E-02 |  |
| 3,16E+00 | 2,74E-01 | 3,68E-02 | 3,12E+00 | 2,31E-01 | 3,09E-02 | 4,56E+00 | 6,32E-01 | 3,85E-02 | 4,52E+00 | 6,37E-01 | 9,83E-03 |  |
| 3,20E+00 | 2,85E-01 | 3,77E-02 | 3,16E+00 | 2,41E-01 | 4,36E-02 | 4,60E+00 | 6,41E-01 | 3,77E-02 | 4,56E+00 | 6,40E-01 | 8,98E-03 |  |
| 3,24E+00 | 2,96E-01 | 3,77E-02 | 3,20E+00 | 2,56E-01 | 5,37E-02 | 4,64E+00 | 6,51E-01 | 3,77E-02 | 4,60E+00 | 6,41E-01 | 9,83E-03 |  |
| 3,28E+00 | 3,07E-01 | 3,77E-02 | 3,24E+00 | 2,71E-01 | 6,21E-02 | 4,68E+00 | 6,61E-01 | 3,77E-02 | 4,64E+00 | 6,41E-01 | 9,83E-03 |  |
| 3,32E+00 | 3,18E-01 | 3,77E-02 | 3,28E+00 | 2,90E-01 | 6,55E-02 | 4,72E+00 | 6,71E-01 | 3,85E-02 | 4,68E+00 | 6,42E-01 | 1,32E-02 |  |
| 3,36E+00 | 3,26E-01 | 3,77E-02 | 3,32E+00 | 3,09E-01 | 7,06E-02 | 4,76E+00 | 6,81E-01 | 3,85E-02 | 4,72E+00 | 6,43E-01 | 2,00E-02 |  |
| 3,40E+00 | 3,37E-01 | 3,85E-02 | 3,36E+00 | 3,32E-01 | 6,97E-02 | 4,80E+00 | 6,91E-01 | 3,85E-02 | 4,76E+00 | 6,48E-01 | 2,75E-02 |  |
| 3,44E+00 | 3,48E-01 | 3,68E-02 | 3,40E+00 | 3,53E-01 | 6,63E-02 | 4,84E+00 | 6,98E-01 | 3,94E-02 | 4,80E+00 | 6,57E-01 | 3,60E-02 |  |
| 3,48E+00 | 3,59E-01 | 3,85E-02 | 3,44E+00 | 3,73E-01 | 6,13E-02 | 4,88E+00 | 7,08E-01 | 3,94E-02 | 4,84E+00 | 6,38E-01 | 9,83E-03 |  |
| 3,52E+00 | 3,68E-01 | 3,77E-02 | 3,48E+00 | 3,87E-01 | 5,37E-02 | 4,92E+00 | 7,18E-01 | 4,02E-02 | 4,88E+00 | 6,80E-01 | 5,71E-02 |  |
| 3,56E+00 | 3,79E-01 | 3,85E-02 | 3,52E+00 | 4,00E-01 | 4,44E-02 | 4,96E+00 | 7,28E-01 | 3,85E-02 | 4,96E+00 | 7,12E-01 | 7,06E-02 |  |
| 3,60E+00 | 3,89E-01 | 3,94E-02 | 3,56E+00 | 4,11E-01 | 3,43E-02 | 5,00E+00 | 7,47E-01 | 4,02E-02 | 5,00E+00 | 7,29E-01 | 7,14E-02 |  |

Neste programa, tivemos de ir selecionando frame a frame os pontos cujo movimento queríamos estudar. Primeiramente, abrimos o vídeo do roloamento de cilindro que fizemos com a câmera digital, já convertido, e selecionamos e posicionamos os eixos de modo a facilitar a nossa análise.



Eixo  $Ox$ : plano horizontal onde o cilindro roda, sentido do movimento

Eixo  $Oy$ : perpendicular ao eixo  $Ox$ , origem do referencial coincide (quase) com o ponto em que a massa B (ponto da periferia A) foi ponto de contacto

Considerámos que esta seria a forma mais prática de estudar o movimento e identificar o período,  $T$ , do roloamento do cilindro, quanto tempo leva o ponto A a dar uma volta completa.

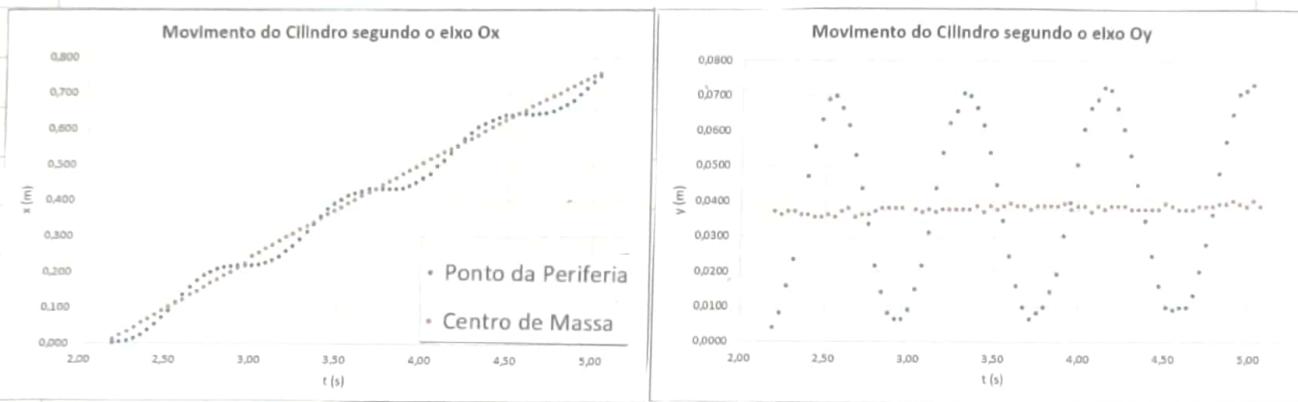
Tivemos também que estabelecer uma escala. Para isso, servimo-nos da malha quadrículada da calha. Medimos a distância entre os traços mais largos com uma régua:

$$(10,00 \pm 0,05) \text{ cm}$$

Desta forma, cada quadricula tem sensivelmente 1 cm de lado. Registarmos estas informações no software

## Análise de Dados

Depois de termos feito a recolha de dados referente ao movimento da massa A (centro de massa) e ao movimento B (ponto A) copiamos as tabelas feitas automaticamente pelo software para uma folha Excel. De seguida, passámos à análise gráfica desses dados.



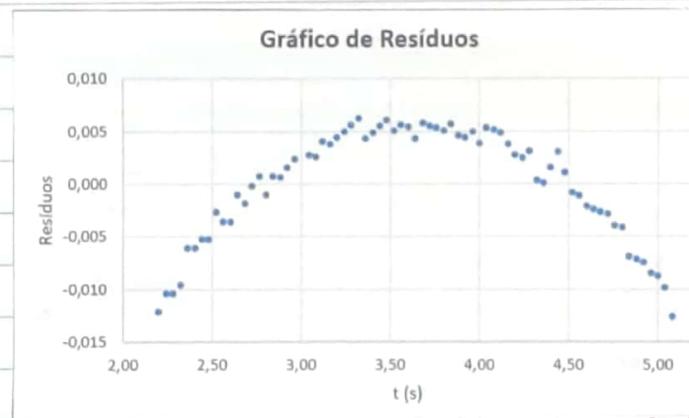
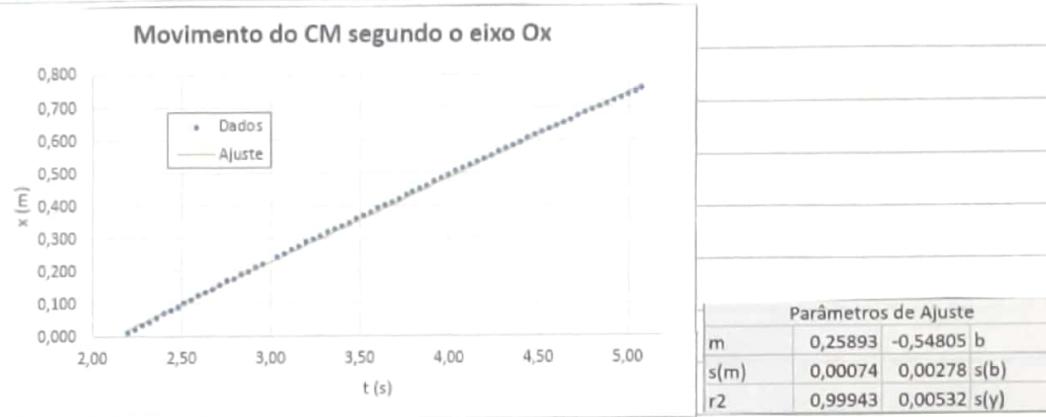
Ao analisar os dados acima, verificamos que os resultados estão dentro daquilo que era esperado. Uma vez que tentámos que o cilindro rolasse com movimento uniforme sobre um plano horizontal, o seu centro de massa deveria também descrever um movimento uniforme, em que a sua velocidade fosse constante. Melhor digendo, a componente tangencial da velocidade deveria ser constante diferente de 0, o que se verifica com o 1º gráfico em que o declive da reta tangente em cada ponto dá o módulo de  $v_{cm}(x)$ , neste caso, velocidade tangente do CM.

No 2º gráfico vemos que a posição do CM em relação ao eixo Oy ao longo do tempo praticamente não varia e, deste modo, a reta tangente em cada ponto do gráfico terá declive aproximadamente nula, ou seja,  $v_{cm}(y)$  é constante igual a zero, componente normal da velocidade nula.

De forma a chegarmos a melhores conclusões, passámos a uma análise mais de talhada e cuidadosa.

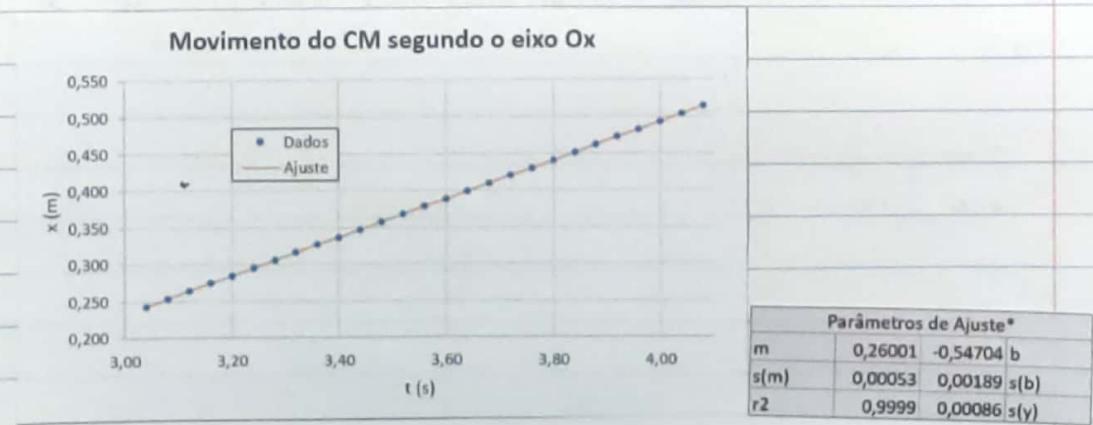
• Análise do movimento do centro de massa (CM)

Depois de termos feito o gráfico que traduz a relação linear prevista, trazemos uma reta de ajuste com os seguintes parâmetros:

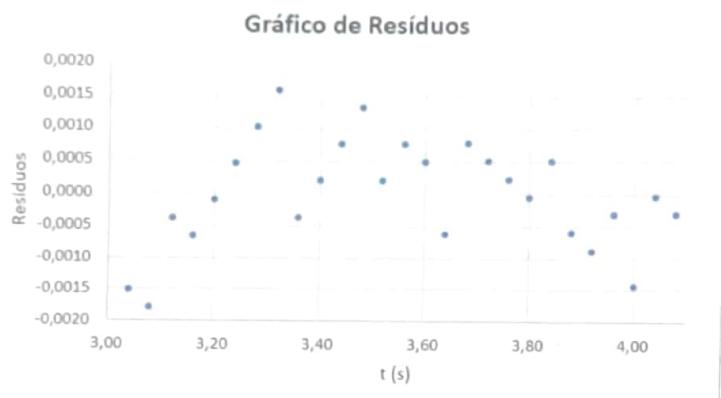


que significa?

Com a análise do gráfico de resíduos, podemos observar uma tendência parabólica na distribuição dos resíduos. Por isso, selecionámos uma gama de dados com o objetivo de conseguir um melhor ajuste. Deste modo, reduzimos a gama experimental para os dados que se encontram entre os instantes  $t = 3,04\text{ s}$  e  $t = 4,08\text{ s}$ .



$$\begin{aligned}\mu(y) &= 2 \times s(y) \\ &= 2 \times 0,00086 \\ &= 0,00017\end{aligned}$$



Conseguimos perceber que houve uma diminuição da tendência parabólica do gráfico de resíduos anterior para este, embora ainda exista, só que muito mais attenuada. Por isso, podemos concluir que houve um abrandamento no movimento do CM, provavelmente devido à presença de forças dissipativas que realizam trabalho. **OK**

Contudo, esse abrandamento não é muito significativo, uma vez que os resíduos variam entre  $-0,0020 \text{ m}$  e  $0,0020 \text{ m}$ , podendo ser desprezado.

$$E (\%) = \frac{|\text{resíduo máximo}|}{\text{declive ajuste linear}} \times 100$$

$$= \frac{|-0,0019|}{0,26001} \times 100$$

$$= 0,688 \% \rightarrow \text{erro muito pequeno}$$

Compare  $\Delta x$   
com velocidade  
não faz sentido

Desta forma, podemos considerar que o movimento do CM é uniforme.

Tomo o gráfico traduz uma relação linear e a velocidade é a derivada temporal da posição, então, aqui, a velocidade do CM será a declive da reta de ajuste.

$$\bullet v_{CM}(x) = (0,26001 \pm 0,00053) \text{ m/s}$$

$$\bullet x_{CM}(t) = 0,26001 t - 0,54704 \text{ (SI)}$$

Analisando apenas ligeiramente o movimento do CM segundo o eixo  $y$ :



| Parâmetros de Ajuste |         |                |
|----------------------|---------|----------------|
| $m$                  | 0,00091 | 0,03449 $b$    |
| $s(m)$               | 0,0001  | 0,00039 $s(b)$ |
| $r^2$                | 0,51799 | 0,00075 $s(y)$ |



subi o resultado de digitalização

Pela análise do gráfico de resíduos obtido através do ajuste feito, podemos notar uma certa tendência linear em alguns pontos, o que se deve a erros na marcação da posição do ponto A, frame a frame, quando usámos o software (falta de precisão).

Verificámos também pelos parâmetros de ajuste que a declive da recta de ajuste é praticamente nula, ou seja, podemos considerar a  $v_y$  nula.

compatível com 0

Assim, podemos dizer que  $\vec{v}_{CM}(+) = 0,26001 \hat{i}_x$ .

- Análise da condição de roolamento sem escorregamento

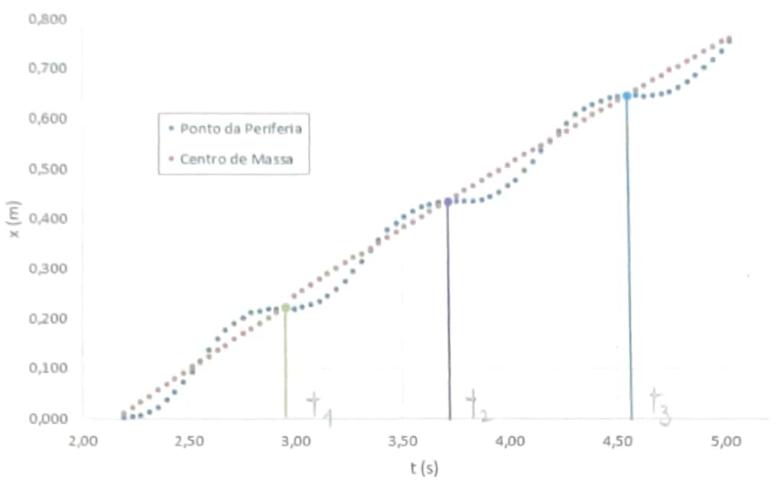
$$t_2 - t_1 = 3,72 - 2,96 = 0,76 s$$

$$t_3 - t_2 = 4,60 - 3,72 = 0,88 s$$

$$T = \frac{t_3 - t_1}{2} = \frac{4,60 - 2,96}{2} = 0,82 s$$

(graf. na pág. seguinte)

Movimento do Cilindro segundo o eixo Ox



$$u(t) = |x_{CM}(t) - x_A(t)|$$

$$u(t_1) = |2,21 - 2,16| \times 10^{-1} = 0,005 \text{ m}$$

$$u(t_3) = |6,41 - 6,40| \times 10^{-1} = 0,001 \text{ m}$$

$$\begin{aligned} \mu(T) &= \sqrt{\left(\frac{d\pi}{dt_1}\right)^2 \times \mu^2(t_1) + \left(\frac{d\pi}{dt_3}\right)^2 \times \mu^2(t_3)} \\ &= \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 \times (0,005)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times (0,001)^2} \\ &= 0,002 \text{ rad/s} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow T = (0,820 \pm 0,002) \text{ s}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Leftrightarrow \omega = \frac{2\pi}{0,820} \Leftrightarrow \omega = 7,76 \text{ rad/s}$$

$$\begin{aligned} \mu(\omega) &= \sqrt{\left(\frac{d\omega}{dT}\right)^2 \times \mu^2(T)} \\ &= \sqrt{\left(-\frac{2\pi}{T^2}\right)^2 \times \mu^2(T)} \\ &= 0,02 \text{ rad/s} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \omega = (7,76 \pm 0,02) \text{ rad/s}$$

Com isto, já temos os dados necessários para verificar a condição de rolemento sem escorregamento:

$$v_{cm} = \frac{w \cdot d}{2} = \frac{7,76 \times 0,06830}{2} = 0,265 \text{ m/s}$$

$$\begin{aligned} \mu(v_{cm}) &= \sqrt{\left(\frac{dv_{cm}}{dd}\right)^2 \cdot \mu^2(d) + \left(\frac{dv_{cm}}{dw}\right)^2 \cdot \mu^2(w)} \\ &= \sqrt{\left(\frac{w}{2}\right)^2 \times \mu^2(d) + \left(\frac{d}{2}\right)^2 \times \mu^2(w)} \\ &= \sqrt{\left(\frac{7,76}{2}\right)^2 \times (0,0005)^2 + \left(\frac{0,0683}{2}\right)^2 \times (0,02)^2} \\ &= 0,001 \text{ m/s} \end{aligned}$$

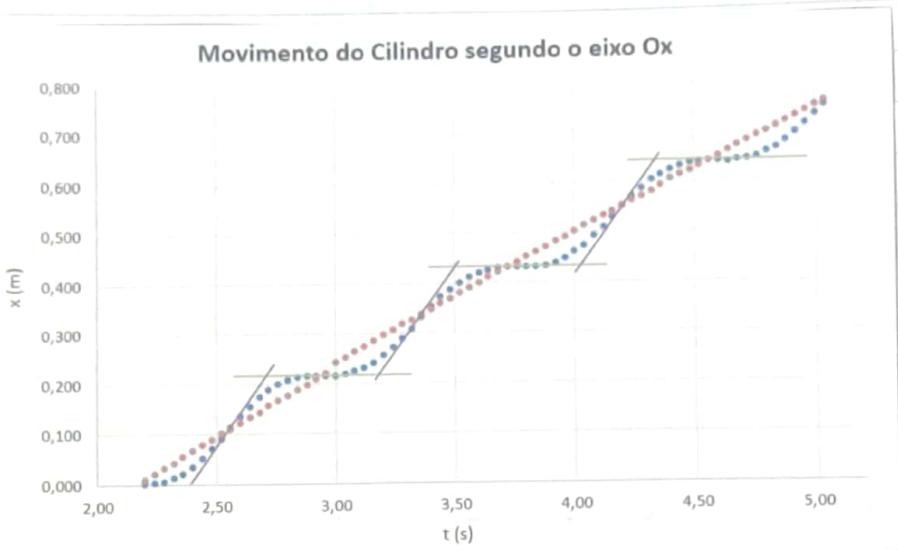
$$\Rightarrow v_{cm} = (0,265 \pm 0,001) \text{ m/s}$$

$$\begin{aligned} E_x (\%) &= \frac{|v_{cm}(\text{teórico}) - v_{cm}(\text{exp})|}{v_{cm}(\text{teórico})} \times 100 \\ &= \frac{|0,265 - 0,260|}{0,265} \times 100 \\ &= 1,89 \% \end{aligned}$$

Desta forma verificámos a condição de rolemento sem escorregamento com erro de 1,89% um erro baixo, logo conseguimos uma elevada exatidão.

#### • Verificação da velocidade do Ponto A

Com recurso às capacidades gráficas do excel determinámos a velocidade de A nos pontos de altura máxima (topo) e de altura mínima (ponto de contacto).



Com uma reta de ajuste ao gráfico que traduz a posição do ponto A em relação ao eixo Ox em função do tempo, identificámos os pontos de intersecção das duas curvas e fizemos passar por esses pontos segmentos de reta tangentes.

Para determinar o declive de cada segmento fizemos uma análise linear com alguns pontos da vizinhança do ponto da intersecção (cerca de 4/5 pontos) e, assim, ficámos a conhecer o declive e respetivo desvio padrão.

**Nota:** a partir dos dados da análise linear, poderíamos inserir a reta de ajuste que seria tangente, porém, quando o fizemos, essas retas, segmentos de reta na verdade, ficaram pouco perceptíveis.

**VERDE:** quando o ponto A atinge a altura mínima:

| m         | s(m)    |
|-----------|---------|
| 1 0,02109 | 0,00878 |
| 2 0,03585 | 0,0135  |
| 3 0,01687 | 0,01265 |
|           | 0,0246  |
|           | 0,01165 |

$$v_{\min} = (0,02 \pm 0,01) \text{ m/s}$$

Tendo em conta o valor desta incerteza, podemos considerar que a velocidade no ponto A é nula, no ponto de contacto. O que está de acordo com o previsto.

Velocidade média e desvio padrão médio dos 3 rolementos completos  
A incerteza só terá um algarismo significativo porque fizemos menor de 50 medições

ROXO: quando o ponto A atinge a altura máxima:

| m | s(m)    |
|---|---------|
| 1 | 0,53985 |
| 2 | 0,52298 |
| 3 | 0,48502 |
|   | 0,51595 |
|   | 0,00911 |
|   | 0,00808 |
|   | 0,01218 |
|   | 0,00979 |

$$\bullet v_{\text{max}} = (0,52 \pm 0,01) \text{ m/s}$$

Conforme referido na parte inicial do relatório, neste ponto (topo), é esperado que a velocidade de A seja o dobro da velocidade do CM:

$$v_A(\text{esperado}) = 2 \times v_{\text{CM}} = 2 \times 0,265 = 0,530 \text{ m/s}$$

$$E (\%) = \frac{|v_A(\text{esperado}) - v_A(\text{exp})|}{v_A(\text{esperado})} \times 100$$

$$= \frac{|0,530 - 0,51|}{0,530} \times 100 = 1,9 \%$$

Verificámos então que a velocidade de A no topo é 2 v<sub>CM</sub>, com um erro de 1,9%.

### • Verificação do Princípio de Sobreposição

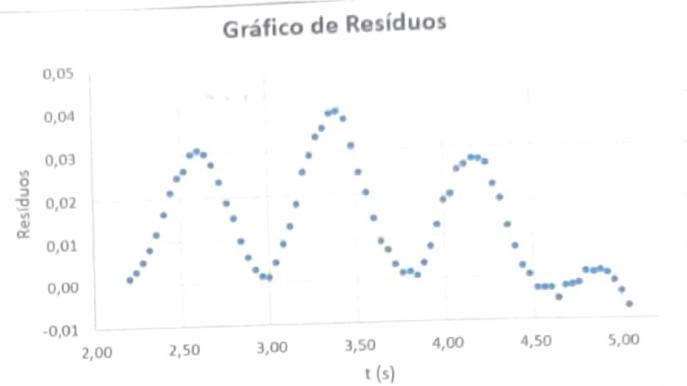
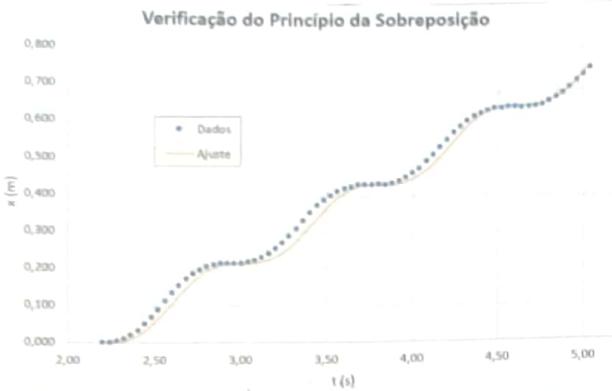
Utilizando a expressão do protocolo:

$$x(t) = v_{\text{CM}} \left( t + \frac{\sin(\omega t)}{\omega} \right)$$

$$\Rightarrow x(A) = 0,265 \left( t + \frac{\sin(7,76t)}{7,76} \right)$$

Verificámos um desfasamento na fase, devido a termos utilizados um  $\theta$  inicial igual a  $\pi$  e instante e posições iniciais considerados. Para que pudermos analisar melhor o gráfico:

$$x_A(t) = 0,265 \left( (t - 2,20) + \frac{\sin(\pi + 7,76(t - 2,20))}{7,76} \right)$$



Pelo gráfico de resíduos verifica-se que existem diferenças entre  $x_A(t)$  e  $x_A$  ajuste ( $\hat{x}_A$ ), inferiores a 0,005 m. Isto deve-se a aproximações feitas pela fórmula teórica usada.

Como a expressão obtida permite uma considerável sobreposição dos dados experimentais, podemos concluir que há sobreposição dos movimentos de translação do CM a rotação do ponto A

### • Análise dos dados recolhidos com o software AVIMECA

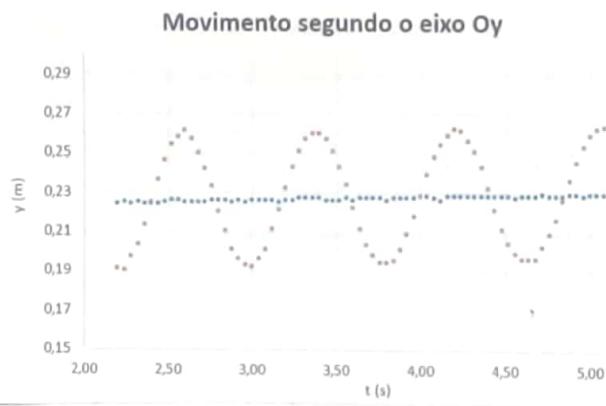
| AVIMECA  |          |          |          |          |
|----------|----------|----------|----------|----------|
| t (s)    | x1 (m)   | y1 (m)   | x2 (m)   | y2 (m)   |
| 2,20E+00 | 4,53E-02 | 2,24E-01 | 4,88E-02 | 1,91E-01 |
| 2,24E+00 | 5,65E-02 | 2,25E-01 | 4,88E-02 | 1,90E-01 |
| 2,28E+00 | 6,82E-02 | 2,24E-01 | 4,94E-02 | 1,97E-01 |
| 2,32E+00 | 7,94E-02 | 2,25E-01 | 5,41E-02 | 2,03E-01 |
| 2,36E+00 | 9,06E-02 | 2,24E-01 | 6,00E-02 | 2,13E-01 |
| 2,40E+00 | 1,02E-01 | 2,24E-01 | 6,88E-02 | 2,25E-01 |
| 2,44E+00 | 1,14E-01 | 2,24E-01 | 8,18E-02 | 2,36E-01 |
| 2,48E+00 | 1,25E-01 | 2,25E-01 | 9,76E-02 | 2,46E-01 |
| 2,52E+00 | 1,36E-01 | 2,26E-01 | 1,17E-01 | 2,54E-01 |
| 2,56E+00 | 1,47E-01 | 2,26E-01 | 1,36E-01 | 2,58E-01 |
| 2,60E+00 | 1,58E-01 | 2,25E-01 | 1,59E-01 | 2,61E-01 |
| 2,64E+00 | 1,69E-01 | 2,25E-01 | 1,82E-01 | 2,57E-01 |
| 2,68E+00 | 1,79E-01 | 2,25E-01 | 2,01E-01 | 2,50E-01 |
| 2,72E+00 | 1,91E-01 | 2,25E-01 | 2,19E-01 | 2,42E-01 |
| 2,76E+00 | 2,02E-01 | 2,26E-01 | 2,35E-01 | 2,33E-01 |
| 2,80E+00 | 2,14E-01 | 2,26E-01 | 2,45E-01 | 2,20E-01 |
| 2,84E+00 | 2,24E-01 | 2,26E-01 | 2,54E-01 | 2,10E-01 |
| 2,88E+00 | 2,35E-01 | 2,25E-01 | 2,59E-01 | 2,01E-01 |
| 2,92E+00 | 2,45E-01 | 2,26E-01 | 2,61E-01 | 1,96E-01 |
| 2,96E+00 | 2,56E-01 | 2,25E-01 | 2,62E-01 | 1,93E-01 |
| 3,00E+00 | 2,67E-01 | 2,26E-01 | 2,62E-01 | 1,92E-01 |
| 3,04E+00 | 2,78E-01 | 2,26E-01 | 2,61E-01 | 1,96E-01 |
| 3,08E+00 | 2,88E-01 | 2,26E-01 | 2,64E-01 | 2,01E-01 |
| 3,12E+00 | 2,98E-01 | 2,26E-01 | 2,69E-01 | 2,11E-01 |
| 3,16E+00 | 3,09E-01 | 2,25E-01 | 2,77E-01 | 2,21E-01 |
| 3,20E+00 | 3,21E-01 | 2,26E-01 | 2,88E-01 | 2,32E-01 |
| 3,24E+00 | 3,31E-01 | 2,26E-01 | 3,01E-01 | 2,43E-01 |
| 3,28E+00 | 3,41E-01 | 2,27E-01 | 3,17E-01 | 2,51E-01 |
| 3,32E+00 | 3,52E-01 | 2,27E-01 | 3,35E-01 | 2,57E-01 |
| 3,36E+00 | 3,61E-01 | 2,27E-01 | 3,56E-01 | 2,60E-01 |
| 3,40E+00 | 3,72E-01 | 2,27E-01 | 3,76E-01 | 2,60E-01 |
| 3,44E+00 | 3,82E-01 | 2,26E-01 | 3,98E-01 | 2,57E-01 |
| 3,48E+00 | 3,93E-01 | 2,26E-01 | 4,15E-01 | 2,51E-01 |
| 3,52E+00 | 4,03E-01 | 2,26E-01 | 4,32E-01 | 2,43E-01 |
| 3,56E+00 | 4,14E-01 | 2,27E-01 | 4,45E-01 | 2,34E-01 |
| 3,60E+00 | 4,25E-01 | 2,26E-01 | 4,56E-01 | 2,22E-01 |

Neste programa, também teremos de selecionar o frame a frame, os pontos que pretendímos analisar. Abrimos o vídeo já convertido para AVI neste software.

Na calibração, seleccionamos "projéteis / queda" e escolhemos a orientação adequada, "Rodamento esquerda-direita" e, novamente, definimos a nova escala como fizemos para o programa anterior.

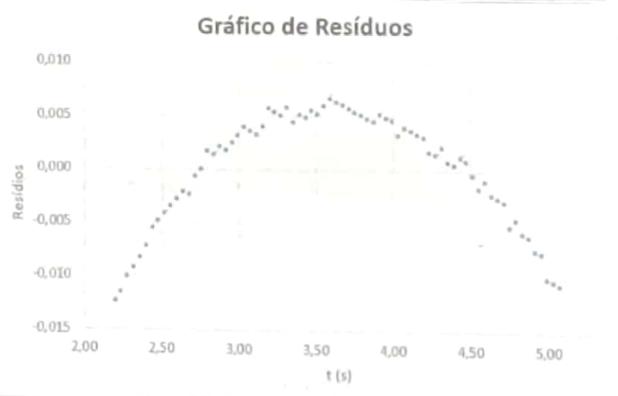
Iniciámos a recolha dos dados, seleccionando os pontos desejados, frame a frame, primeiro o centro de massa ( $x_1, y_1$ ) e depois para o ponto A ( $x_2, y_2$ ).

Depois, copiamos a tabela criada para o Excel e procedemos à análise gráfica dos dados:



Novamente, os dois graficos estão dentro do que era esperado. São bastante semelhantes aos que fizemos com os dados do software Tracker.  
(Para este software, os procedimentos que vamos seguir serão os mesmos que tivemos em conta na análise anterior)

Passando à análise do movimento do CM:

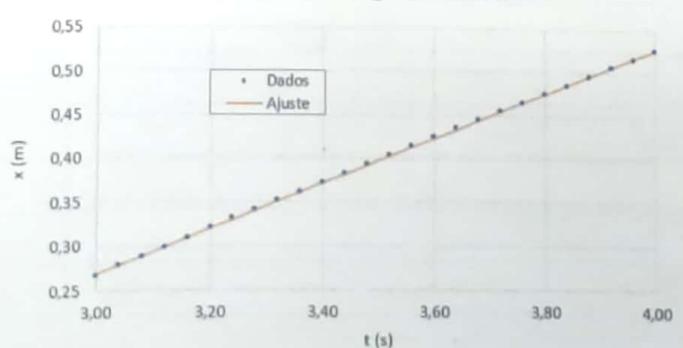


O 1º gráfico traduz a relação linear entre os dados experimentais e a reta de ajuste que traçamos segundo os parâmetros.

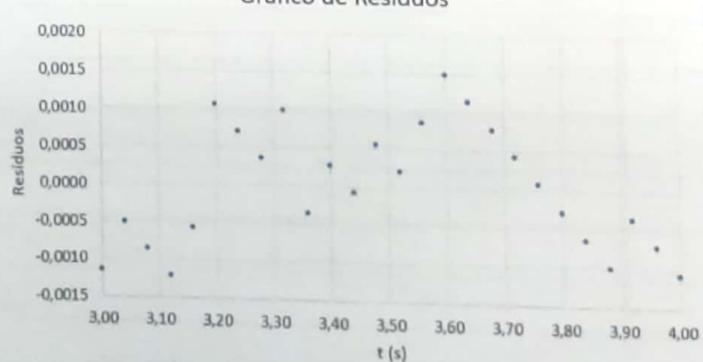
Pela análise gráfica dos resíduos verificámos uma tendência parabólica na distribuição dos resíduos.

Para conseguir um melhor ajuste, seleccionámos uma gama de dados entre os instantes  $t = 3,00\text{ s}$  e  $t = 4,00\text{ s}$ .

**Movimento do CM segundo o eixo Ox**



**Gráfico de Resíduos**



| Parametros de Ajuste * |         |          |
|------------------------|---------|----------|
| m                      | 0,25892 | -0,50862 |
| s(m)                   | 0,00053 | 0,00187  |
| r2                     | 0,9999  | 0,00081  |
| s(b)                   |         | s(y)     |

Constata-se uma diminuição da tendência parabólica, porém, esta ainda existe. O que nos leva a concluir que houve um abrandamento do movimento do CM, devido ao trabalho das forças dissipativas. Note-se que o abrandamento pode ser desprezado, visto que os resíduos variam apenas entre  $-0,0015\text{ m}$  e  $0,0015\text{ m}$ .

$$\epsilon (\%) = \frac{| \text{resíduo máx.} |}{\text{declive ajuste linear}} \times 100$$

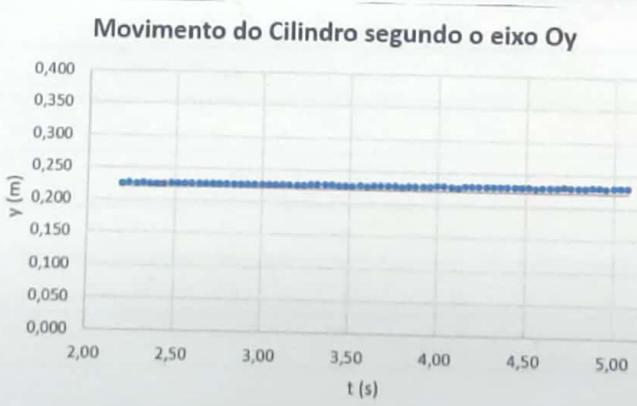
$$\epsilon (\%) = \frac{0,00149}{0,25892} \times 100 = 0,575\%$$

Considerando então que o centro de massa tem movimento uniforme, sabendo que o declive da reta de ajuste é a velocidade do CM:

- $v_{CM}(x) = (0,2589 \pm 0,005) \text{ m/s}$
- $x_{CM}(t) = (0,25892 t - 0,50862) \text{ (SI)}$

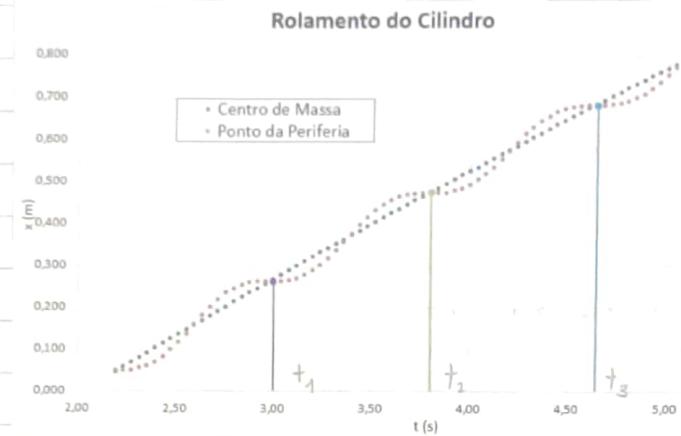
NOTA: 1 algarismo significativo da incerteza porque o ajuste linear conta apenas com alguns pontos (menor de 50)

Analizando levemente o movimento do CM segundo o eixo Oy:



Pelos parâmetros da reta de ajuste vemos que o declive da reta é praticamente nulo, pelo que podemos considerar  $v_y$  nula  
 $\rightarrow \vec{v}_{CM}(t) = 0,2589 \cdot t \hat{e}_x \text{ (SI)}$

- Analise da condição de rolagem sem escorregamento



$$t_2 - t_1 = 3,80 - 3,00 = 0,80 \text{ s}$$

$$t_3 - t_2 = 4,64 - 3,80 = 0,84 \text{ s}$$

$$\bar{T} = \frac{t_3 - t_1}{2} = \frac{4,64 - 3,00}{2} = 0,82 \text{ s}$$

$$\mu(t_1) = |2,67 - 2,62| \times 10^{-1} = 0,005 \text{ s}$$

$$\mu(t_3) = |6,84 - 6,83| \times 10^{-1} = 0,001 \text{ s}$$

$$\mu(\bar{T}) = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot (0,005)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot (0,001)^2} = 0,002 \text{ s}$$

As fórmulas utilizadas para determinar estes erros não as já apresentadas na análise anterior.

$$\Rightarrow \bar{T} = (0,820 \pm 0,002) \text{ s}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0,820} = 7,76 \text{ rad/s}$$

$$\mu(\omega) = 0,02 \text{ rad/s}$$

$$\Rightarrow \omega = (7,76 \pm 0,02) \text{ rad/s}$$

$$v_{cm} = \frac{\omega \cdot d}{2} = \frac{7,76 \cdot 0,006830}{2} = 0,265 \text{ m/s}$$

$$\mu(v_{cm}) = \sqrt{\left(\frac{\omega}{2}\right)^2 \mu(d) + \left(\frac{d}{2}\right)^2 \mu^2(\omega)} = 0,001 \text{ m/s}$$

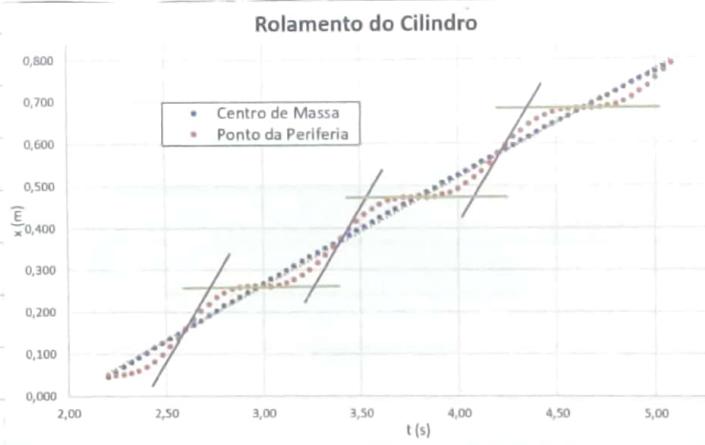
$$\Rightarrow v_{cm} = (0,262 \pm 0,001) \text{ m/s}$$

$$\varepsilon (\%) = \frac{|0,265 - 0,259|}{0,265} \times 100 = 2,26 \%$$

Verificámos a condição de roolamento sem escorregamento com um erro de 2,26 %.

Para ambas as softwares chegámos aos mesmos valores de  $T, w$  e  $v_{CM}$ .

### • Verificação da velocidade do ponto A



**VERDE** (ponto A atinge altura mínima)

|   | m      | s(m)    |
|---|--------|---------|
| 1 | 0,0025 | 0,00382 |
| 2 | 0,01   | 0,019   |
| 3 | 0,0175 | 0,0025  |
|   | 0,01   | 0,00844 |

$$v_{m\min}(A) = (0,010 \pm 0,008) \text{ m/s}$$

Pode ser considerado nula, tendo em conta a incerteza tal como era esperado.

Incerteza apresentada com 1 casa decimal pelo motivo já referido

**ROXO** (ponto A atinge o topo)

|   | m      | s(m)    |
|---|--------|---------|
| 1 | 0,535  | 0,01155 |
| 2 | 0,505  | 0,0108  |
| 3 | 0,4975 | 0,15155 |
|   | 0,5125 | 0,05797 |

$$v_{m\max}(A) = (0,51 \pm 0,06) \text{ m/s}$$

No ponto de altura máxima esperava-se que:

$$v_A = 2 v_{CM} = 2 \times 0,265 = 0,530 \text{ m/s}$$

$$\varepsilon (\%) = \frac{|0,530 - 0,51|}{0,530} \times 100 = 3,8 \%$$

Verificámos que a  $v_{(A)}$  no ponto de altura máxima é  $2 v_{CM}$ , com um erro de 3,8 %.

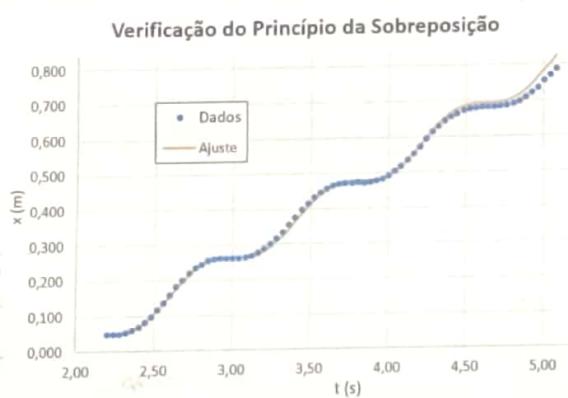
• Verificação do princípio de sobreposição

Pela expressão do protocolo temos que:

$$x_A(t) = 0,265 \left( \frac{t + \sin(\pi + 7,76t)}{7,76} \right)$$

Reajustando as condições iniciais:

$$x_A(t) = 0,265 \left( \frac{(t - 2,20) + \sin(\pi + 7,76(t - 2,20))}{7,76} \right) + 0,0488$$



Pelo gráfico de resíduos vermos uma diferença entre o  $x_A(t)$  e o  $x_A(\text{ajuste})(t)$ , menor comparativamente à análise anterior.

Essa diferença provém das aproximações feitas quando usamos a fórmula teórica.

Podemos considerar que há uma boa aproximação, uma boa sobreposição dos dados experimentais, o que nos leva a concluir que há sobreposição dos movimentos de translação do CM e rotação do ponto A.

- Gráficos das trajetórias

Gráfico das Trajetórias com os dados do Tracker

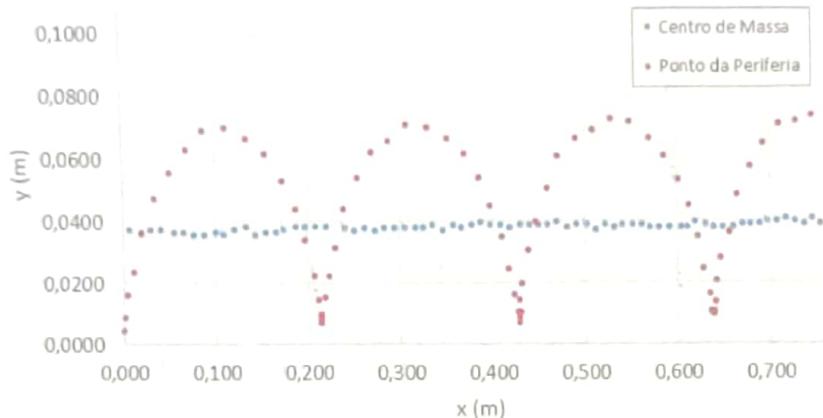
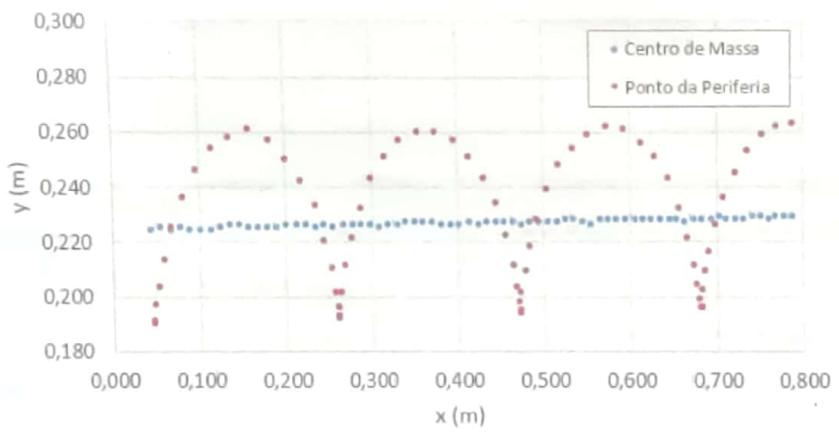


Gráfico das Trajetórias com os dados do AVIMECA



Os gráficos obtidos para as trajetórias do CM e do ponto de periferia A são muito semelhantes e vão de encontro ao que era esperado.

O centro de massa desloca-se segundo "uma linha", paralelamente ao plano horizontal.

Já o ponto A descreve uma trajetória parabólica, onde os máximos do gráfico correspondem ao topo e os mínimos correspondem a quando o ponto A se torna ponto de contacto.

## Conclusão e Discussão

Conseguimos atingir os objetivos desta atividade:

| Grandezas                   | Resultados<br>(software Tracker) | Resultados<br>(software AVIMECA) |
|-----------------------------|----------------------------------|----------------------------------|
| $V_{CM}$ (ajuste) ( $m/s$ ) | $(0,26001 \pm 0,00053)$          | $(0,25892 \pm 0,00053)$          |
| $V_{CM}$ (exp.) ( $m/s$ )   | $(0,265 \pm 0,001)$              | $(0,265 \pm 0,001)$              |
| $V_{min}$ (A)               | $(0,02 \pm 0,01)$                | $(0,010 \pm 0,008)$              |
| $V_{max}$ (A)               | $(0,52 \pm 0,01)$                | $(0,51 \pm 0,06)$                |

- Mesmo que durante a análise se tenha verificado uma pequena diminuição da velocidade do CM, podemos considerar a aproximação do movimento do CM a um movimento uniforme aceitável.
- Os valores obtidos para a velocidade do CM foram bastante exatos, visto que, para ambos os casos, tivemos erros percentuais baixos, 1,8% para o Tracker e 2,26% para o AVIMECA.
- Para a verificação da condição de rolemento sem escorregamento, obtivemos erros percentuais baixos: 1,9% para Tracker e 3,8% para o AVIMECA. Portanto, grande exatidão.
- A experiência permitiu verificar condições que já eram esperadas, tal como a velocidade do ponto de periferia A no ponto de contacto ser nula. Por isso, acreditamos ter tido bons resultados.
- Podemos, por fim, dizer que o software que permitiu chegar a resultados mais exatos foi o Tracker, embora os valores sejam muito próximos.

josefa Santor  
nº 202106964  
G1, PL1, Lab 11