

T5A - Determinação de Momentos de Inércia

Nuno Borges
PL6 67

2022/05/26

- Introdução -

- Para preparar esta atividade, ~~foi~~ foi feito um estudo aprofundado do protocolo T5A, assim como do vídeo facultado no moodle.

- O ficheiro excel da atividade foi também preparado com antecedência.

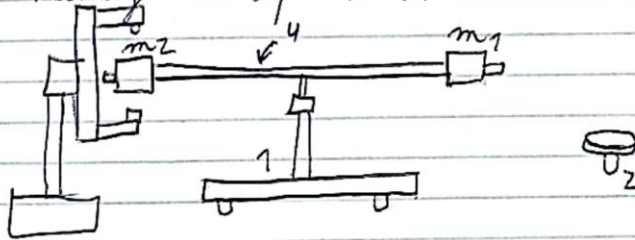
- Objetivos -

1- Determinação do momento de inércia de alguns sólidos

2- Verificação do teorema de Steiner

- Procedimento -

0 - Montagem experimental



Legenda: 1 - Base de suporte principal com mola ^{oscilante}
2 - Base para cilindros
3 - Fotogate ligado ao contador de tempo
4 - Barra com massas deslizáveis, m_1 e m_2 .

- Nesta montagem, considera-se que a mola em 1 cria um movimento oscilatório com a direção do eixo de rotação, proporcional ao ângulo θ . A constante de proporcionalidade desta relação permite utilizar a equação

$$T^2 = 4\pi^2 \frac{I_{cc'}}{D} \quad (1)$$

para determinar momentos de inércia.

7- Momento de inércia de sistema de partículas e teorema de Steiner

1.1- Utilizar a vareta e as massas m_1 e m_2

1.2- Registrar o valor das massas m_1 , m_2 e a massa da vareta

1.3- Medir o comprimento, L , da vareta

1.4- Colocar as massas m_1 , m_2 a distâncias d_1 , d_2 iguais e o maior possíveis. Medir a distância entre os centros das massas e o ponto central da vareta (eixo de rotação)

1.5- Alinhar o sistema para a sua posição de equilíbrio

1.6- Rodar o sistema um ângulo inferior a 180° (90° é recomendado) no sentido contrário aos ponteiros do relógio e medir o período de uma oscilação completa.

1.7- Rodar o sistema ao mesmo ângulo no sentido dos ponteiros do relógio (sentido inverso I) e registrar o tempo de uma oscilação inversa completa, T_I .

1.8- Repetir cada medição pelo menos 2 vezes

1.9- Medir a distância das ~~massas~~ massas ao eixo e repetir o procedimento acima

1.10- Repetir 1.9 para várias posições distintas tendo em vista o cálculo de D através de uma análise gráfica $I'(T^2)$

1.11- Fazer tabela com

- distâncias $d_1 = d_2$

- T_D , T_I , $T = \frac{T_D + T_I}{2}$

- I e I'

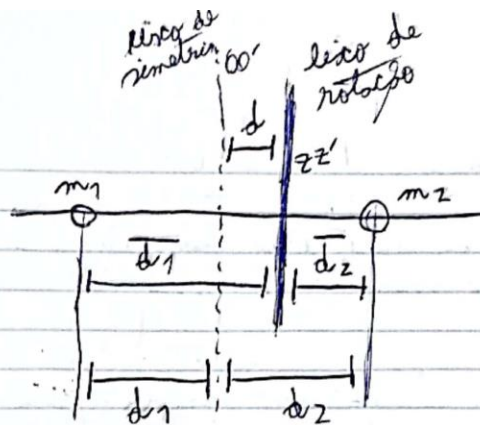
[Nota: Na tabela, I depende de D , pelo que esta constante depende do sistema e deverá ser calculada experimentalmente com o gráfico $I'(T^2)$]

1.12- Considerar o caso em que o eixo de simetria da vareta não coincide com o eixo de rotação do sistema.

1.13- ~~Considerar~~ Considerar diferentes de d (ver figura anexa), repetir os passos 1.5 a 1.8 para determinar os períodos dos movimentos

1.14- Fazer tabela com d , d_1 , d_2 , T_D , T_I , T e I

1.15- Testar o teorema de Steiner



2 - Momentos de Inércia de sólidos

2.1 - Substituir a vareta pelos sólidos, começando pelo cilindro. oco. Registrar a sua massa, assim como as suas dimensões. Proceder como anteriormente para determinar o período do movimento.

2.2 - Fazer uma tabela em que se identifica os sólidos e se ~~registra~~ indicia T_0 , T_1 , T e I .

Medição das massas

$$m_1 = (212,44 \pm 0,07) \text{ g}$$

$$m_2 = (210,81 \pm 0,07) \text{ g}$$

$$m_{\text{vareta}} = (132,22 \pm 0,01) \text{ g}$$

$$L_{\text{vareta}} = (61,70 \pm 0,05) \text{ cm}$$



$$d_1 = d_2 (\pm 0,05 \text{ cm}) \quad T_1 (\pm 0,001 \text{ s}) \quad T_0 (\pm 0,001 \text{ s}) \quad d_1 = d_2$$

$$\begin{array}{c} 25 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{c} 7,812 \\ 7,814 \end{array} \quad \begin{array}{c} 7,804 \\ 7,814 \end{array}$$

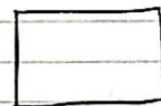
$$\begin{array}{c} 24 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{c} 7,554 \\ 7,548 \end{array} \quad \begin{array}{c} 7,548 \\ 7,547 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} 23 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{c} 7,306 \\ 7,299 \end{array} \quad \begin{array}{c} 7,294 \\ 7,299 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} 22 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{c} 7,044 \\ 7,046 \end{array} \quad \begin{array}{c} 7,038 \\ 7,042 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} 21 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{c} 6,808 \\ 6,807 \end{array} \quad \begin{array}{c} 6,812 \\ 6,810 \end{array}$$

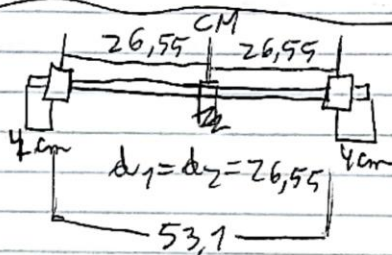
$$\begin{array}{c} 20 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{c} 6,547 \\ 6,549 \end{array} \quad \begin{array}{c} 6,555 \\ 6,555 \end{array}$$



$$L_{\text{massas}} \\ \downarrow \\ L_1 = L_2 = 0 \\ = (2,000 \pm 0,005) \text{ cm}$$

$d_1 = d_2$	T_i	T_o
19	6,292 6,290	6,296 6,298
18	6,069 6,066	6,072 6,073
17	5,802 5,799	5,807 5,807
16	5,584 5,584	5,591 5,592
15	5,331 5,331	5,339 5,343
10	4,225 4,224	4,233 4,233 4,232

Steuer



d_2	T_i	T_o
23,5	7,595	7,603
22	7,552	7,567
21 21	7,531	7,537
20	7,530	7,540
19	7,532	7,544
18	7,524	7,546
17	7,546	7,586

Sólidos

Cilindro oro
 $m = (370,05 \pm 0,01) \text{ g}$
 $D = (10,71 \pm 0,02) \text{ cm}$
 $D = (10,90 \pm 0,02) \text{ cm}$
 Espesura = $(0,450 \pm 0,002) \text{ cm}$

Disco
 $m = (237,79 \pm 0,01) \text{ g}$
 $h = (1,240 \pm 0,002) \text{ cm}$
 $D = (27,75 \pm 0,05) \text{ cm}$

	T_I	T_D
cilindro oco	1,181	1,180
	1,182	1,180
	1,181	1,187
Disco	1,465	1,465
	1,464	1,469
	1,466	1,464

Análise de Dados

- ~~Resumo~~ - Momento de Inércia de Sistema de massas pontuais.
- Na tabela 1, abaixo, temos os valores determinados na primeira parte da experiência, em que se estuda o momento de inércia de um sistema com 2 massas pontuais.

$(T \pm 0,001)s$	$(T \pm 0,0005)s$	$T^2 (s^2)$	$u(T^2) (s^2)$	$I' (kg m^2)$	$u(I') (kg m^2)$	$I (kg m^2)$	$u(I) (%)$	Desvio de I e $I' (%)$
7,812	7,811	61,012	7,811E-03	3,497E-02	8,109E-05	3,505E-02	0,24158%	0,22869%
7,814								
7,554	7,549	56,991	7,549E-03	3,273E-02	7,811E-05	3,274E-02	0,24161%	0,04152%
7,548								
7,306	7,300	53,283	7,300E-03	3,057E-02	7,513E-05	3,061E-02	0,24163%	0,13682%
7,299								
7,044	7,043	49,597	7,043E-03	2,849E-02	7,215E-05	2,849E-02	0,24166%	0,00568%
7,046								
6,808	6,808	46,345	6,808E-03	2,650E-02	6,917E-05	2,662E-02	0,24169%	0,45245%
6,801								
6,547	6,552	42,922	6,552E-03	2,460E-02	6,619E-05	2,466E-02	0,24172%	0,23585%
6,549								
6,292	6,294	39,614	6,294E-03	2,278E-02	6,321E-05	2,276E-02	0,24176%	0,09716%
6,290								
6,069	6,070	36,845	6,070E-03	2,104E-02	6,024E-05	2,117E-02	0,24180%	0,58085%
6,066								
5,802	5,804	33,684	5,804E-03	1,939E-02	5,726E-05	1,935E-02	0,24186%	0,22255%
5,799								
5,584	5,588	31,223	5,588E-03	1,783E-02	5,429E-05	1,794E-02	0,24191%	0,61365%
5,584								
5,331	5,336	28,473	5,336E-03	1,635E-02	5,132E-05	1,636E-02	0,24197%	0,06727%
5,331								
4,225	4,228	17,878	4,228E-03	1,021E-02	3,654E-05	1,027E-02	0,24240%	0,60661%
4,224								

Tabela 1 - Valores medidos e calculados na primeira parte da experiência

- Algumas coisas a notar:

- Os valores de d_1 e d_2 correspondem à distância do centro de massa das massas ao eixo de simetria do sistema. Assim, todos os valores de d_1/d_2 acrescentamos metade do comprimento das massas (que medimos como sendo 4 cm).

- Os valores de T_D e T_I foram medidos para as oscilações, respetivamente em sentido direto e inverso, utilizando o fotogate no modo pêndulo, para que houvesse menor incerteza.

- Os valores de T correspondem à média dos ~~dois~~ ^{quatro} valores de períodos medidos, 2 em cada sentido. Assim, por propagação de incerteza obtive-se que

$$u(T) = \sqrt{\left(\frac{\partial T}{\partial d_1} u(d_1)\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial d_2} u(d_2)\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial T_{i1}} u(T_{i1})\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial T_{i2}} u(T_{i2})\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{u(T_{d1})}{4}\right)^2 + \left(\frac{u(T_{d2})}{4}\right)^2 + \left(\frac{u(T_{i1})}{4}\right)^2 + \left(\frac{u(T_{i2})}{4}\right)^2}$$

Assim, $u(T)$ é constante, dependendo apenas da incerteza de T_{d1} , T_{d2} , T_{i1} e T_{i2} .

- Desta forma, também para T^2 se utilizar propagação de incertezas e u obtive que

~~$$u(T^2) = \sqrt{\left(\frac{\partial(T^2)}{\partial T} u(T)\right)^2} = 2 \times T \times u(T)$$~~

$$u(T^2) = \sqrt{\left(\frac{\partial(T^2)}{\partial T} u(T)\right)^2} = 2 \times T \times u(T)$$

- O valor de I' foi calculado utilizando a fórmula teórica $I' = m_1 d_1^2 + m_2 d_2^2 + m_{\text{eixo}} l_{\text{eixo}}^2$. Assim, por propagação de incertezas se I' obtive que

$$u(I') = \sqrt{\left(\frac{\partial I'}{\partial m_1} u(m_1)\right)^2 + \left(\frac{\partial I'}{\partial m_2} u(m_2)\right)^2 + \left(\frac{\partial I'}{\partial d_1} u(d_1)\right)^2 + \left(\frac{\partial I'}{\partial d_2} u(d_2)\right)^2 + \left(\frac{\partial I'}{\partial m_{\text{eixo}}} u(m_{\text{eixo}})\right)^2 + \left(\frac{\partial I'}{\partial l_{\text{eixo}}} u(l_{\text{eixo}})\right)^2}$$

- Em seguida, fez-se o gráfico $I'(T^2)$, representado pelo gráfico 1:

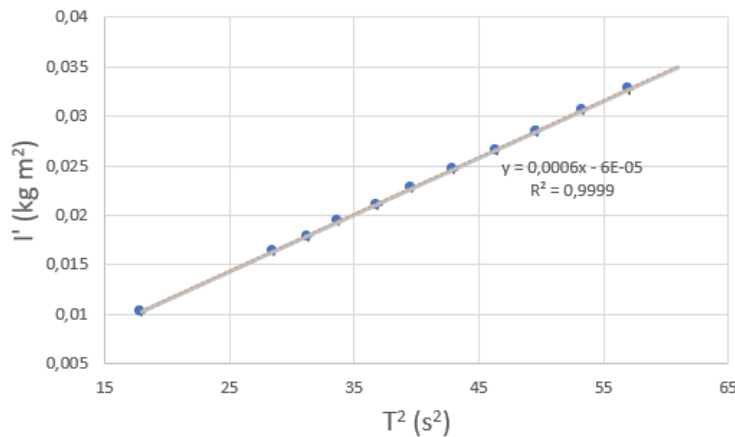


Gráfico 1 - Relação $I'(T^2)$ obtida para determinar D
(Barras de Incerteza não são visíveis)

- Ora, vemos que o r^2 encontra-se bastante próximo de 1 e temos no gráfico 2 (abaixo) os resíduos da regressão linear, que são aleatórios:

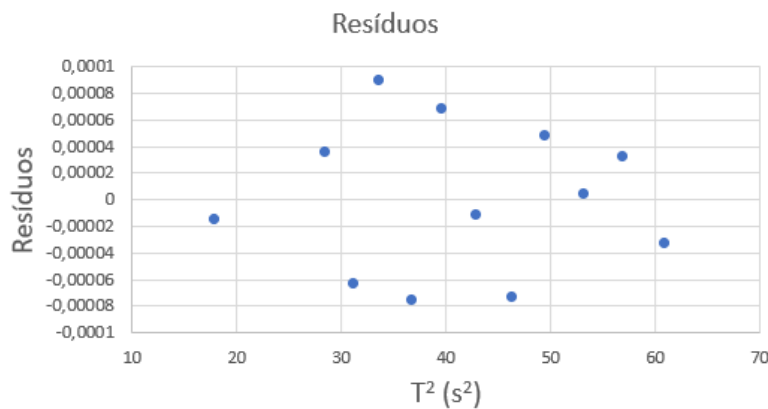


Gráfico 2 - Resíduos do gráfico 1

- Assim, podemos concluir que a regressão terá sido bem feita.

- Desta forma, como temos que $I = \frac{D}{4\pi^2} T^2$, fez-se a aproximação que $I' = \frac{D}{4\pi^2} T^2$ presumindo que $D = m \times 4\pi^2$ (m é o declive da regressão linear feita).

- Note-se que este gráfico tem barras de incerteza, mas elas não são visíveis.

- Deste forma, obtém-se que $D = (0,022670 \pm 0,000055) \text{ Nm}$.

~~De fato, obtém-se que $D = (0,022670 \pm 0,000055) \text{ Nm}$.~~

- De notar que no valor de D indicado acima, a incerteza foi obtida pela propagação de incerteza de $D = 4\pi^2 m$:

$$u(D) = \sqrt{(2\pi^2 u(m))^2} = 4\pi^2 u(m)$$

- Assim, utilizando a fórmula $I = \frac{D}{4\pi^2} T^2$, obtém-se os valores de I indicados na tabela 1. Poderemos ainda ver que as incertezas relativas percentuais (obtidas por propagação de incertezas) são baixas, rondando sempre os 0,2%.

- Por fim, podemos ver que os valores de I e I' obtidos são bastante próximos, sendo que os desvios de I em relação a I' estão na gama de 0,005% a 0,674%. Isto leva a concluir que a aproximação feita antes ($I = \frac{D}{4\pi^2} T^2 = I'$) estava correta.

Teorema de Steiner

- Na seguinte parte da atividade, colocou-se as massas como indicado na figura abaixo:

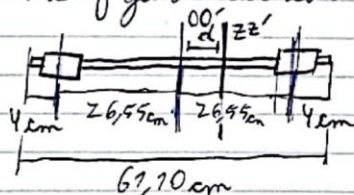


Fig 2 - Montagem na verificação do teorema de Steiner

- Assim, montamos o sistema vert+massas no suporte, mantendo as distâncias ~~entre as massas e o eixo de rotação~~ massa-eixo de simetria ^{do sistema} a 26,55 cm. Conforme o valor I_z e mediu T_1 e T_0 obtém-se a tabela 2:

$d (\pm 0,0005) \text{ m}$	$\bar{d}_1 (\pm 0,0005) \text{ (m)}$	$\bar{d}_2 (\pm 0,0005) \text{ (m)}$	$T_0 (\pm 0,001) \text{ (s)}$	$T_1 (\pm 0,001) \text{ (s)}$	$(T \pm 0,0007) \text{ (s)}$	$T^2 \text{ (s}^2\text{)}$	$u(T^2) \text{ (s}^2\text{)}$	$I_{ZZ'} \text{ (E) (kg m}^2\text{)}$	$u(I_{ZZ'} \text{ (E) (kg m}^2\text{)})$	$I_{ZZ'} \text{ (S) (kg m}^2\text{)}$	Erro (%)
0,0305	0,2960	0,2350	7,6030	7,5950	7,5990	57,7448	0,0106	0,0332	8,03E-05	0,0345	3,75%
0,0455	0,3110	0,2200	7,5610	7,5520	7,5565	57,1007	0,0106	0,0328	7,94E-05	0,0351	6,54%
0,0555	0,3210	0,2100	7,5370	7,5310	7,5340	56,7612	0,0105	0,0326	7,89E-05	0,0357	8,56%
0,0655	0,3310	0,2000	7,5410	7,5300	7,5355	56,7838	0,0105	0,0326	7,89E-05	0,0363	10,22%
0,0755	0,3410	0,1900	7,5440	7,5320	7,5380	56,8214	0,0106	0,0326	7,90E-05	0,0371	12,05%
0,0855	0,3510	0,1800	7,5460	7,5240	7,5350	56,7762	0,0105	0,0326	7,89E-05	0,0380	14,19%
0,0955	0,3610	0,1700	7,5860	7,5460	7,5660	57,2444	0,0106	0,0329	7,96E-05	0,0390	15,71%

Tabela 2 - Dados obtidos na 2ª parte da atividade

- Algumas notas sobre a tabela 2:

- Como dito anteriormente, ao medir a barra medimos o valor de \bar{I}_2 . Assim, temos que $\bar{I}_1 = 2 \times 26,55 - \bar{I}_2$ e que $d = b_1 - \bar{I}_1$.

- Tal como na parte da atividade anterior, medimos T_1 e T_0 com o fotogate no modo pêndulo.

- Com T é apenas a média de 2 valores, T_1 e T_0 , a sua incerteza depende apenas de $u(T_1)$ e $u(T_0)$ e é então constante e é igual a $7 \cdot 10^{-4} s^2$.

- Mais uma vez, a incerteza de T^2 é igual a $u(T^2) = 2Tu(T)$ e foi obtida por propagação de incertezas.

- Assim, utilizando a fórmula $I = \frac{D}{4\pi^2} T^2$ ^{com o D obtido anteriormente} obtivemos os valores de $I_{zz'}(E)$ (experimentais). Ora, estes são os valores do momento de inércia do sistema para um certo valor de d , tal que $\bar{I}_1 \neq \bar{I}_2$, ou seja, em que os eixos de simetria e rotação não coincidem.

- Para obter as incertezas de $I_{zz'}$ fizemos a propagação de incertezas de $I_{zz'} = \frac{D}{4\pi^2} T^2$:

$$u(I_{zz'}(E)) = \sqrt{\left(\frac{\partial I_{zz'}}{\partial D} u(D)\right)^2 + \left(\frac{\partial I_{zz'}}{\partial T^2} u(T^2)\right)^2}$$

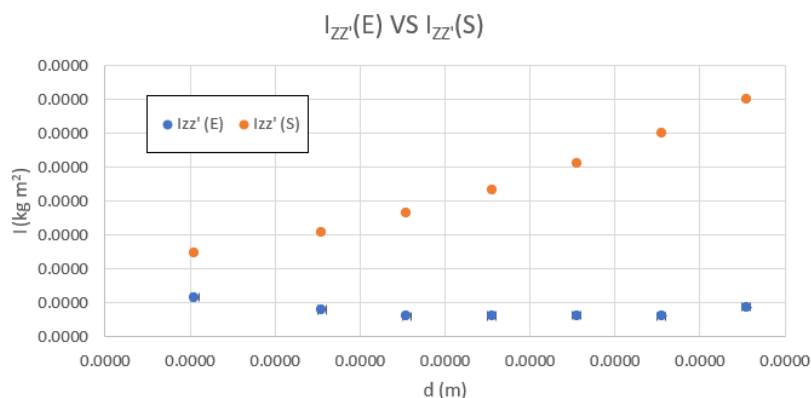
- De seguida, aplicamos o teorema de Steiner para obter um valor teórico de $I_{zz'}(S)$ (teorema de Steiner):

$$I_{zz'}(S) = I_{00'} + M d^2$$

sendo que M é a massa total do sistema, d a distância entre os eixos de rotação e de simetria e $I_{00'}$ o momento de inércia do sistema a rolar em torno do seu eixo de simetria, obtido com a fórmula $I_{00'} = m_1 b_1^2 + m_2 b_2^2 + \frac{m v_L^2}{12}$.

- De seguida, determinamos os erros experimentais dos valores de $I_{zz'}(E)$ obtidos em relação aos valores de $I_{zz'}(S)$ obtidos com o teorema de Steiner e que, portanto, consideramos como sendo valores de referência. Estes erros encontram-se na gama de 3,75% - 15,71%. É ainda evidente que o erro percentual aumentou com o aumento de d .

- Ora, isto é facilmente visualizado no gráfico 3:



Gráficos 3 - Relação $I(d)$ para $I_{ZZ'}(S)$ e $I_{ZZ'}(E)$
(curvas de incerteza não são visíveis)

- Ora, neste gráfico podemos ver que algum erro terá ocorrido, porque estas duas séries de dados bacteriano se descrevem 2 curvas mais próximas e quase paralelas.

Após uma profunda análise dos dados, conseguimos determinar as fontes desta discrepância entre as 2 séries de dados.

- Uma letra ~~está~~ está na determinação da constante da mola, D . Como $I_{zz} = \frac{D}{\pi^2} T^2$, se o D determinado for menor que o valor real, os valores de I_{zz} determinados com esta fórmula também serão. Assim, conclui-se que o valor de D determinado deveria ser maior, e que seria com que os 2 séries de dados no gráfico ficassem mais próximos.

- A outra fonte deste erro será na medição dos períodos de oscilação. Na execução da atividade foi apenas feito a medição de um período ~~no sentido~~ no sentido direito e outro no inverso. Desta modo, qualquer erro aleatório nestas medições terá um ~~efeito~~ grande efeito. Ora, no gráfico 4 (colunas) isto é evidenciado:

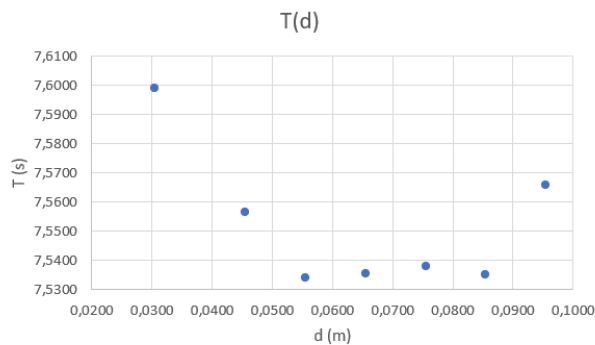


Gráfico 4 - Relação $T(d)$

- Ora, este gráfico tem um formato inesperado. Ao longo $T(d)$ deves de resultar numa curva ascendente. Assim, como $I = \frac{1}{4\pi^2} T^2$, conclui-se que o traçado de $I_{zz'}(E)$ no gráfico 3 é ~~quase~~ uma linha quase constante porque os valores de T medidos apresentam ~~uma~~ o traçado no gráfico 4. Verifiquemos ainda que se colocarmos valores ascendentes para T (obtidos de outro grupo), o traçado de $I_{zz'}(E)$ no gráfico 3 ~~ainda~~ teria um formato bastante mais similar e "parecido" ao de $I_{zz'}(S)$.

~ Momento de Inércia de Sólidos ~

- Nesta última parte da atividade, selecionamos para estudar, o cilindro oco e o disco.

- Temos na tabela 3 os dados obtidos:

Sólido	$T_D (\pm 0,0005) (s)$	$T_I (\pm 0,0005) (s)$	$T (\pm 0,0004) (s)$	$T^2 (s^2)$	$u(T^2) (s^2)$	$I_E (kg m^2)$	$u(I_E) (kg m^2)$	$I_T (kg m^2)$	Erro %
Cilindro Oco	1,180	1,181	1,181	1,394	9,447E-04	8,010E-04	0,251%	8,634E-04	7,22%
	1,180	1,182							
	1,181	1,181							
Disco	1,465	1,465	1,465	2,145	1,172E-03	1,232E-03	0,247%	1,371E-03	10,09%
	1,464	1,464							
	1,464	1,466							

Tabela 3 - Dados obtidos na determinação de I para sólidos

- Tal como nas primeiras 2 partes da atividade, vimos que T é apenas uma média de valores, ou seja que portanto a sua incerteza é constante e, ~~por~~ por propagação de incerteza, é igual a $4 \cdot 10^{-4} s$.

- Mais uma vez, calculamos $u(T^2)$ por propagação de incerteza, tal ~~que~~ que $u(T^2) = 2Tu(T)$

- Assim, com os dados da tabela 3, determinamos I_E (valor de I obtido experimentalmente). Para isto usamos a fórmula $I = \frac{D}{4T^2} T^2$, com o valor de D obtido na primeira parte da atividade.

- Para determinar a incerteza de I_E fizemos propagação de incerteza e obtivemos:

$$u(I_E) = \sqrt{\left(\frac{\partial I_E}{\partial D} u(D)\right)^2 + \left(\frac{\partial I_E}{\partial T^2} u(T^2)\right)^2}$$

- Com estas incertezas, determinou-se as incertezas percentuais relativas para os valores de I_E calculados. Estas são de cerca de 0,25% para ambos os sólidos.

- Por fim, utilizando as fórmulas ^{teóricas} $I = \frac{1}{2} M (r_{int}^2 + r_{ext}^2)$ para o cilindro oco e $I = \frac{1}{2} M R^2$ para o disco obtivemos os valores de I_T (valor de I obtido com métodos teóricos) para cada sólido. Determinou-se ainda os erros percentuais de I_E em relação a I_T , que foram de 7,22% para o cilindro oco e de 10,09% para o disco.

Conclusões

- Na primeira parte da atividade determinamos um valor para a constante da mola, D , que foi de $(0,022670 \pm 0,000954) N/m$. A incerteza dos valores de I obtidos (utilizando D) foi reduzida, ficando os 0,24%. As diferenças entre os valores de I e I' obtidos são baixas, nunca passando 0,67%. Isto leva a concluir que $I = \frac{D}{4T^2} T^2$ e $I = m_1 d_1^2 + m_2 d_2^2 + \frac{m_1 d_1^2 + m_2 d_2^2}{12}$

ambas fórmulas válidas para determinar o momento de inércia de um sistema de massas pontuais.

- Na segunda parte utilizou-se o D e as duas fórmulas referidas anteriormente para verificar o Teorema de Steiner. Neste, o erro percentual aumentou com d . Como já foi explicado na análise de dados, as principais fontes destes erros terão sido: erros na determinação de D e, especialmente, na medição dos períodos de oscilação na segunda parte da atividade. Ora, a maneira mais fácil de tentar reduzir

este erro teria sido reduzido mais ensaios por cada valor de d (só realizamos 2 ensaios por cada d).

- Por fim, na terceira parte da atividade pretendíamos determinar o momento de inércia de um cilindro sólido e de um disco. ~~Repetidamente, obtivemos erros~~ Por isso, utilizamos mais uma vez a fórmula $I = \frac{D}{8\pi^2} T^2$, assim como as fórmulas teóricas de I para os 2 sólidos selecionados. Assim, para o cilindro ^{sólido} obtivemos um erro percentual de 7,22% e, para o ~~disco~~ ^{disco}, um erro de 10,09%. Ao calcular as incertezas dos I obtidos vimos que elas rondam os 0,25%. Assim, como a incerteza percentual é muito menor que o erro percentual, concluímos que os valores obtidos são bastante precisos, mas não exatos. Isto pode dever-se a erros no cálculo de T ou a defeitos ~~nos~~ nos sólidos utilizados. Mais concretamente, os limites exteriores das bases do disco estavam desgastados, sendo que este não era um disco perfeito. Já o ~~disco~~ cilindro, não era exatamente sólido, porque tinha uma base, de modo a encaixar no suporte.