

14.5

~~Relatório da Atividade T4B~~

Nuno Duarte Parente

Departamento de Física e Astronomia, Faculdade de Ciências,
Universidade do Porto

25 de Março de 2023

Titulo?

Sumário?

1 Introdução Teórica

1.1 Barra Encastrada

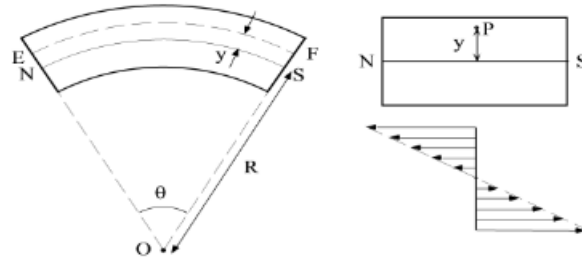


Figura 1: Barra a ser flexionada

Tendo uma barra a ser flexionada como mostrado na figura acima, existe uma superfície neutra (NS) que não sofre qualquer alteração e uma outra superfície EF, que é deformada.

NS tem um comprimento $R\theta$. Antes da flexão, EF tinha o mesmo comprimento que NS, pelo que agora tem um comprimento $(R + y)\theta$ (y é a distância de NS a EF no eixo perpendicular à barra).

Assim, para uma pequena secção da barra, de área ΔS , teríamos que a variação de comprimento é y/R . Se nessa secção for aplicada uma força f , então o módulo de Young é dado por:

$$E = \frac{f/\Delta S}{y/R}$$

Para uma secção de barra em que se aplica forças, o momento das forças elásticas é dado por:

$$C = \sum f y = \frac{E}{R} I \rightarrow \frac{1}{R} = \frac{C}{EI}$$

sendo $I = \sum \Delta S y^2$ o momento de inércia geométrico dessa secção em relação ao plano das fibras neutras.

Temos uma barra encastrada com massa M e comprimento ℓ . Teremos que:

$$C(x) = EI \frac{d^2 y}{dx^2}$$

Para um certo ponto na posição x temos que a componente de C causada pelo peso da secção de comprimento $(\ell - x)$ da barra é dado por:

$$C = \frac{1}{2} \mu g (\ell - x)^2$$

Podemos considerar que, neste exemplo, é como se tivéssemos uma massa m na extremidade da barra. Essa massa causaria uma outra componente de C :

$$C_m = mg(\ell - x)$$

Ora, se a barra estiver em equilíbrio estático temos:

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = mg(\ell - x) + \frac{1}{2} \mu g (\ell - x)^2$$

De onde temos que y_1 , a posição de equilíbrio do extremo da barra, é dado por:

$$y_1 = \frac{\ell^3 g}{EI} \left(\frac{m}{3} + \frac{M}{8} \right)$$

Sendo que podemos reescrever a posição de equilíbrio como

$$\frac{EI}{\ell^3} (y_1 + y) = \frac{mg}{3} + \frac{Mg}{8}$$

Consideremos agora que é aplicada uma força F no extremo livre de uma barra encastrada, que cause um pequeno deslocamento y no extremo da barra. Temos:

$$\frac{EI}{\ell^3} (y_1 + y) = \frac{mg + F}{3} + \frac{Mg}{8}$$

De onde se tira:

$$F = \frac{3EI}{\ell^3} y$$

A variação total de energia potencial relativamente ao equilíbrio é igual ao trabalho realizado pela força F :

$$U_p = \int_0^y F(y) dy = \frac{3}{2} \frac{EI}{\ell^3} y^2$$

Tendo um certo ponto da barra, que apresente um deslocamento z em relação ao equilíbrio, a sua velocidade é dada por

$$\dot{z} = \frac{3}{\ell^3} \left(\ell \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) \dot{y}$$

(em que \dot{y} é a velocidade do extremo) Temos

$$dU_c = \frac{1}{2} (\mu dx) \dot{z}$$

Que, ao integrar, nos dá a energia cinética da barra:

$$U_{c_b} = \frac{33}{280} M \dot{y}^2$$

e temos a energia cinética da massa no extremo da barra:

$$E_{c_m} = \frac{1}{2} m \dot{y}^2$$

Assim, a energia total da barra é

$$U_C + U_P = \frac{1}{2} \left(m + \frac{33}{140} M \right) \dot{y}^2 + \frac{3EI}{2\ell^3} y^2$$

Ao derivar e dividir por \dot{y} , obtemos uma solução do tipo $\ddot{y} + \omega^2 y = 0$, de onde se tem:

$$\omega^2 = \frac{3EI}{\ell^3 \left(m + \frac{33}{140} M \right)} = \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2$$

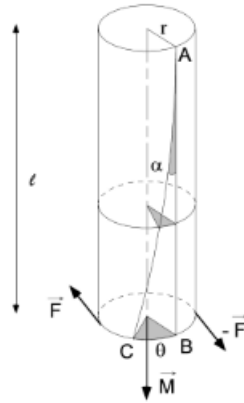
Assim, presumindo $m = 0$ e sabendo que, para uma barra circular de diâmetro D temos que $I = \frac{\pi}{64} D^4$, então:

$$\bar{T}^2 = 5,029 \frac{\pi^2 \rho}{E D^2} \ell^4 \quad (1)$$

O que podemos também escrever assim:

$$\bar{T} = \sqrt{5,029 \frac{\pi^2 \rho}{E D^2}} \ell^2 \quad (2)$$

1.2 Pêndulo de Torção



ref?

Figura 2: Deformação do fio de suspensão num pêndulo de torção.

Para um pêndulo de torção temos:

$$C = \int_0^R r \cdot df = \frac{\mu I_0}{\ell} \theta$$

O momento resistente do fio é dado por

$$W_e = \int_0^\theta C d\theta$$

Essa energia é convertida em energia cinética de rotação. Sendo I o momento de inércia do corpo suspenso, temos:

$$W_c = \frac{1}{2} \int_M v^2 dm = \frac{\theta'^2 \cdot I}{2} = \frac{(\theta_0 \cdot \frac{2\pi}{T})^2 \cdot I}{2}$$

Se não houver dissipação de energia temos $W_e = W_c$. Sendo $I = I_0 = \frac{\pi D^4}{32}$, o momento de inércia do fio, temos:

$$I = \frac{D^4 \mu}{128 \pi L} T^2 \quad (3)$$

Recordemos ainda algumas fórmulas de momentos de inércia.

ref?

Momento de Inércia do Disco

$$I_d = \frac{MD^2}{8} \quad (4)$$

Momento de Inércia da Coroa Cilíndrica

$$I_{cc} = \frac{M}{8}(D_1^2 + D_2^2) \quad (5)$$

Momento de Inércia do Prisma com o eixo maior Vertical

$$I_{P_{vertical}} = \frac{Mb^2}{12} \quad (6)$$

Momento de Inércia do Prisma com o eixo maior Horizontal

$$I_{P_{horizontal}} = \frac{M(2h^2 + b^2)}{24} \quad (7)$$

Sendo que o momento de inércia de um sistema A que consiste de acoplar um objeto com momento de inércia I_1 com um objeto com momento de inércia I_2 é dado por

$$I_A = I_1 + I_2 \quad (8)$$

1.3 Determinação dos Pontos da Gama Experimental

Temos N pontos uniformemente distribuídos numa certa escala em que d_{min} é o valor mais baixo do conjunto de pontos em estudo. A distância entre 2 pontos consecutivos pode ser determinada usando um ponto n , tendo-se:

$$\frac{d_n - d_{min}}{n}$$

Podemos também obter essa distância usando o maior e menor ponto do conjunto:

$$\frac{d_{max} - d_{min}}{N - 1}$$

Pelo que podemos igualar as 2 frações acima.

$$\frac{d_n - d_{min}}{n} = \frac{d_{max} - d_{min}}{N - 1}$$

$$d_n = d_{min} + \frac{n}{N - 1}(d_{max} - d_{min})$$

Assim, para uma amostra de valores elevados a quatro temos:

$$d_n^4 = d_{min}^4 + \frac{n}{N - 1}(d_{max}^4 - d_{min}^4)$$

$$d_n = \sqrt[4]{d_{min}^4 + \frac{n}{N - 1}(d_{max}^4 - d_{min}^4)} \quad ; \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (9)$$

Assim, podemos usar a Equação 9 para determinar cada ponto n de um conjunto X com N dados. Se depois elevarmos os dados a 4 iremos obter um novo conjunto, Y , em que os pontos estão uniformemente distribuídos.

isto não
pertence à
indução
técnica.

demandado
básico
colocar
em anexo!

2 Atividade Experimental

2.1 Execução Experimental

2.1.1 Montagem Experimental

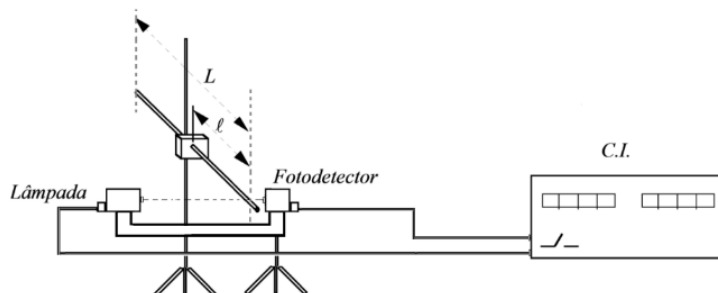


Figura 3: Montagem a realizar na parte 1 da atividade experimental. Garantir que a barra está perpendicular ao feixe luminoso no sensor.

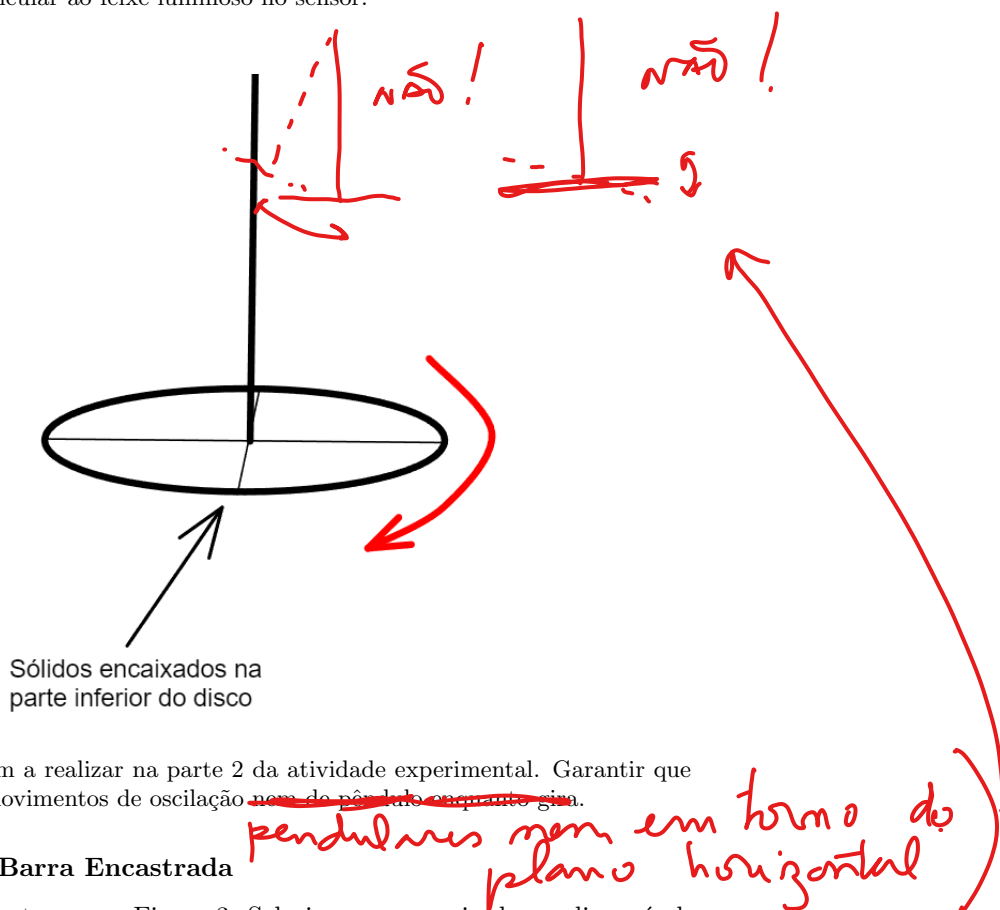


Figura 4: Montagem a realizar na parte 2 da atividade experimental. Garantir que o disco não realiza movimentos de oscilação ~~nem de pêndulo encaixado gir.~~

2.1.2 Parte 1 - Barra Encastrada

1. Executar a montagem na Figura 3. Seleccionamos a maior barra disponível, de forma a ter acesso a uma gama maior de comprimentos em vibração, ℓ .

2. Seleccionamos o número de intervalos desejados, como $i = 51$, sendo que o contador de impulsos parava ao chegar à oscilação $i-1$, de forma que $i = 51$ corresponde a 25 oscilações da barra. Variou-se $i = 51, i = 101, i = 151$. Fez-se 2 ensaios para cada valor de i .
3. Imprimimos oscilações na barra. Para isso, levantamos a barra usando uma barra auxiliar e cuidadosamente retiramos a barra auxiliar, sem gerar forças na barra em estudo.
4. Repetir os pontos 2 e 3 para diferentes comprimentos em vibração, ℓ . Como prevíamos utilizar a Equação 1 para determinar o Módulo de Young para a barra, determinamos previamente os valores de ℓ a obter, de forma que o gráfico de $\bar{T}^2(\ell^4)$ tivesse pontos distribuídos uniformemente. Para isso, segui a Subseção 1.3.
5. Elaboramos uma tabela onde registamos todos os dados (ℓ, t, \bar{T}) relevantes para a análise.

2.1.3 Parte 2 - Pêndulo de Torção

1. Medimos as dimensões do fio e dos objetos que nele suspendemos (disco, prisma e coroa cilíndrica)
2. Suspendemos no fio, pela seguinte ordem:
 - **Sistema A** - Disco + Prisma, com o eixo maior vertical
 - **Sistema B** - Disco + Prisma, com o eixo maior horizontal
 - **Sistema C** - Disco + Coroa Cilíndrica
 - **Sistema D** - Disco + Coroa Cilíndrica + Prisma com o eixo maior horizontal
3. Para cada sistema fizemos 3 ensaios, com 3 amplitudes de oscilação: $\theta = 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$. Por razões técnicas, não registamos o tempo que o sistema demorava a fazer 10 oscilações com um sensor, mas sim "a olho" com o cronómetro de um telemóvel, o que faz com que haja incertezas relativamente altas nos valores medidos.
4. Elaboramos uma tabela onde registamos todos os dados (θ, t, \bar{T}) relevantes para a análise.

*que se revelam
inconsequentes*

2.2 Análise de Dados

2.2.1 Parte 1 - Barra Encastrada

Todas as medições do diâmetro, comprimento e massa da barra seleccionada encontram-se na Tabela 23. Temos que

- ℓ - comprimento em vibração da barra
- t - tempo que a barra demora a fazer 10 oscilações
- T - tempo de 1 oscilação
- \bar{T} - tempo médio de 1 oscilação (média dos valores de T de 2 ensaios)

De notar que para obter T , como o contador de impulsos conta $i - 1$ impulsos, fizemos $T = t \frac{2}{i-1}$. Ou seja, por exemplo, para $i = 101$, $T = t/50$.

Para calcular o módulo de Young precisamos da densidade da barra, pelo que foi preciso calcular o volume da barra:

$$V = \pi \frac{\bar{D}^2}{4} \bar{L} \quad ; \quad u(V) = \sqrt{\left(\frac{\bar{L}}{2} \pi \bar{D} u(\bar{D})\right)^2 + \left(\frac{\pi}{4} \bar{D}^2 u(\bar{L})\right)^2}$$

Conseguí então obter a densidade da barra:

$$\rho = \frac{\bar{m}}{V} \quad ; \quad u(\rho) = \sqrt{\left(\frac{1}{V} u(\bar{m})\right)^2 + \left(\frac{\bar{m}}{V^2} u(V)\right)^2}$$

Tal como feito com o volume e com a densidade, utilizei propagação de incertezas para determinar as incertezas de cada variável, tendo-se então:

$$\begin{aligned} u(\ell^4) &= |4L^3 u(L)| \quad ; \quad u(T) = \left| \frac{2}{i-1} u(t) \right| \\ u(\bar{T}) &= \frac{\sigma}{\sqrt{2}} \quad ; \quad u(\bar{T}^2) = |2\bar{T} u(\bar{T})| \\ u(\log(X)) &= \left| \frac{1}{X} u(X) \right| \end{aligned}$$

2.2.1.1 Gama 1

Inicialmente, decidimos estudar as oscilações da barra encastrada para uma vaga menor, pois é mais fácil garantir que não ocorre o efeito de "oscilações elípticas". Este efeito consiste em, especialmente para valores de ℓ elevados, após algum tempo a oscilar a barra começa a oscilar na horizontal e na vertical simultaneamente. Ora, isto resulta numa oscilação que, quando vista de frente, tem formato elíptico e afeta o período de oscilação medido. Felizmente, para reduzir este efeito basta rodar a barra no suporte, mas ele nunca desaparece completamente.

Todos os valores de E e regressões lineares feitas nesta subsecção sobre a 1ª gama de estudo foram obtidos utilizando a fórmula 1

Com os valores registados (Tabela 24), foi possível obter os seguintes gráficos:

i=51

Para $i = 51$ (50 oscilações) obtive os seguintes gráficos:

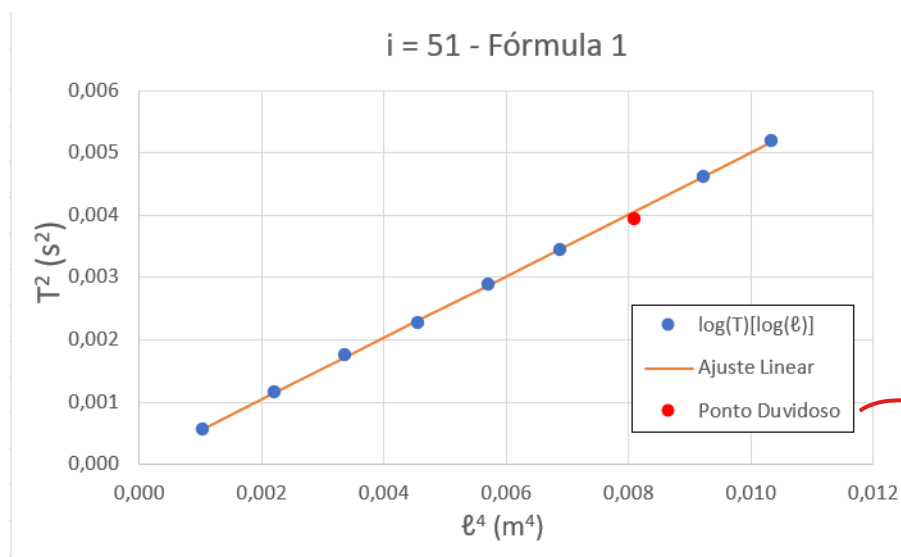


Gráfico 1: Regressão linear obtida para $i = 51$ utilizando a fórmula 1.

Regressão de $T^2(\ell^4)$ para $i=51$			
m	0,495	0,00005	b
s(m)	0,003	0,00002	s(b)
r^2	0,99980	0,00002	s(y)

Tabela 1: Matriz de ajuste correspondente ao gráfico 1.

Ao qual corresponde o gráfico de resíduos:

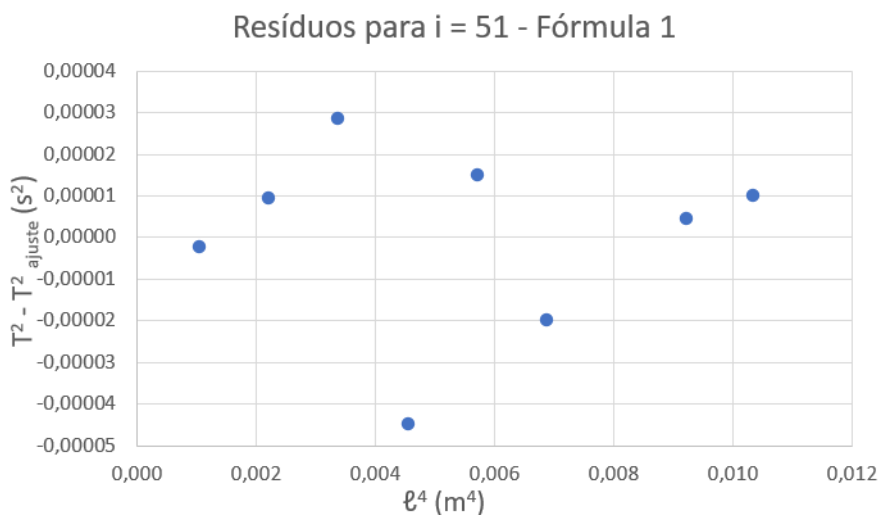


Gráfico 2: Gráfico de Resíduos da regressão linear no gráfico Gráfico 1

Como temos $r^2 \approx 1$, resíduos aleatórios e muito próximos de 0, podemos estimar que a regressão linear é apropriada.

Para reforçar essa declaração, fiz o gráfico $\log(T)[\log(\ell)]$ que deverá ter declive 2, pois:

$$T^2 = 5,029 \frac{\pi^2 \rho}{ED^2} \ell^4 \longleftrightarrow \log(T^2) = \log\left(5,029 \frac{\pi^2 \rho}{ED^2}\right) + \log(\ell^4)$$

$$\log(T) = 2 \log(\ell) + \log\left(5,029 \frac{\pi^2 \rho}{ED^2}\right)$$

Assim, obtive o gráfico 23 (em apêndice) e a respetiva matriz de ajuste:

Regressão de $\log(T)[\log(\ell)]$ para $i=51$			
m	1,93	-0,19	b
s(m)	0,02	0,01	s(b)
r^2	0,999	0,003	s(y)

Tabela 2: Matriz de ajuste da linearização da fórmula 1 para $i = 51$

Para o declive desta linearização temos um erro percentual de 3% por defeito, com uma incerteza relativa de 1%. Vemos ainda, no gráfico 24, que os resíduos desta linearização são aleatórios.

Assim, e tendo em conta aquilo que vimos acima, podemos considerar que a regressão linear na Tabela 1 estará feita corretamente. Assim, para $i = 51$ obtivemos:

$$E = (2,62 \pm 0,04) \cdot 10^{11} Nm^{-2} = (2,62 \cdot 10^{11} \pm 1\%) Nm^{-2}$$

$$Erro\% = 31\% \text{ (por excesso)}$$

i=101

Para $i = 101$ (100 oscilações) obtive os seguintes gráficos:

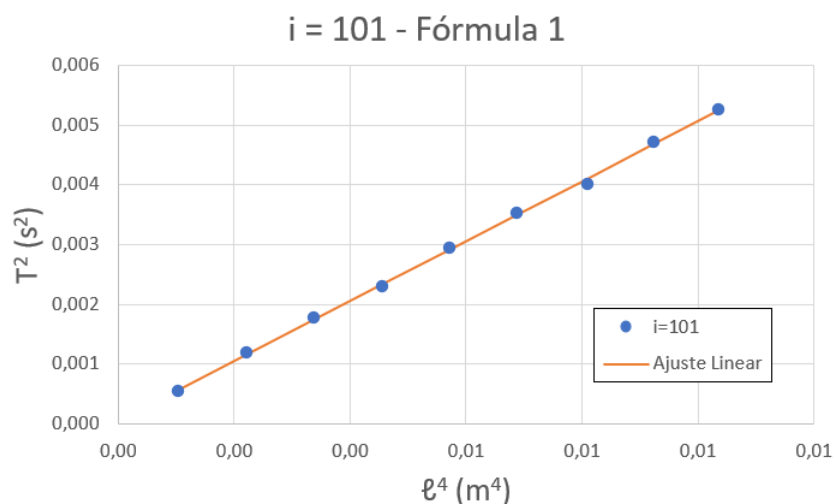


Gráfico 3: Regressão linear obtida para $i = 101$ utilizando a fórmula 1.

Regressão de $T^2(\ell^4)$ para $i=101$			
m	0,501	0,00005	b
s(m)	0,005	0,00004	s(b)
r^2	0,9992	0,00005	s(y)

Tabela 3: Matriz de ajuste correspondente ao gráfico 3.

Ao qual corresponde o gráfico de resíduos:

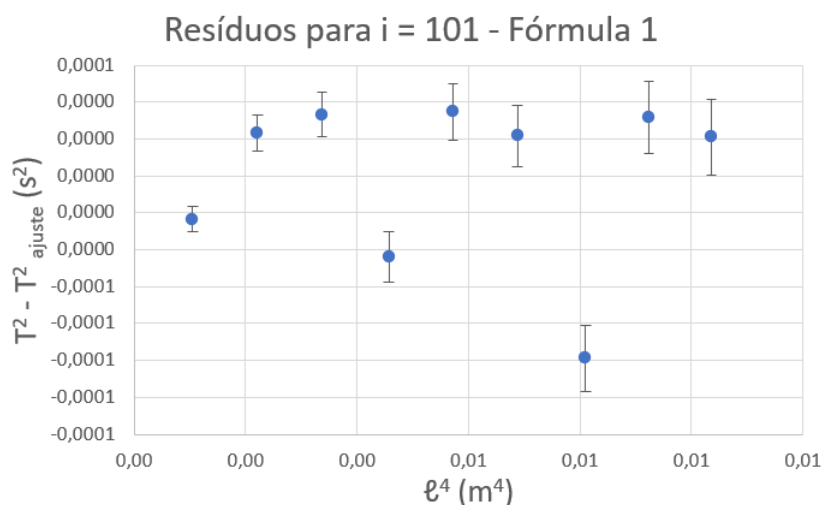


Gráfico 4: Gráfico de Resíduos da regressão linear no gráfico Gráfico 3

Como temos $r^2 \approx 1$, resíduos aleatórios e muito próximos de 0, podemos estimar que a regressão linear é apropriada. No entanto, podemos verificar melhor essa declaração, pelo que fiz o gráfico $\log(T)[\log(\ell)]$ que, como vimos acima, deverá ter declive 2.

Assim, obtive o gráfico 25 (em apêndice) e a respetiva matriz de ajuste:

Regressão de $\log(T)[\log(\ell)]$ para $i=101$			
m	1,931	-0,184	b
s(m)	0,024	0,014	s(b)
r^2	0,99905	0,004	s(y)

alg. signif. errados

Tabela 4: Matriz de ajuste da linearização da fórmula 1 para $i = 51$

Para o declive desta linearização temos um erro percentual de 4% por defeito, com uma incerteza relativa de 1%. No gráfico 26, vemos que os resíduos desta linearização são aleatórios.

Assim, e tendo em conta aquilo que vimos acima, podemos considerar que a regressão linear na Tabela 3 estará feita corretamente. Assim, para $i = 101$

temos que:

$$\begin{aligned}
 E &= (2,5856318 \pm 0,0000002) \cdot 10^{11} Nm^{-2} \\
 &= (2,5856318 \cdot 10^{11} \pm 0,000007\%) Nm^{-2} \\
 Erro\% &= 29\% \text{ (por excesso)}
 \end{aligned}$$

i=151

Para $i = 151$ (150 oscilações) obtive os seguintes gráficos:

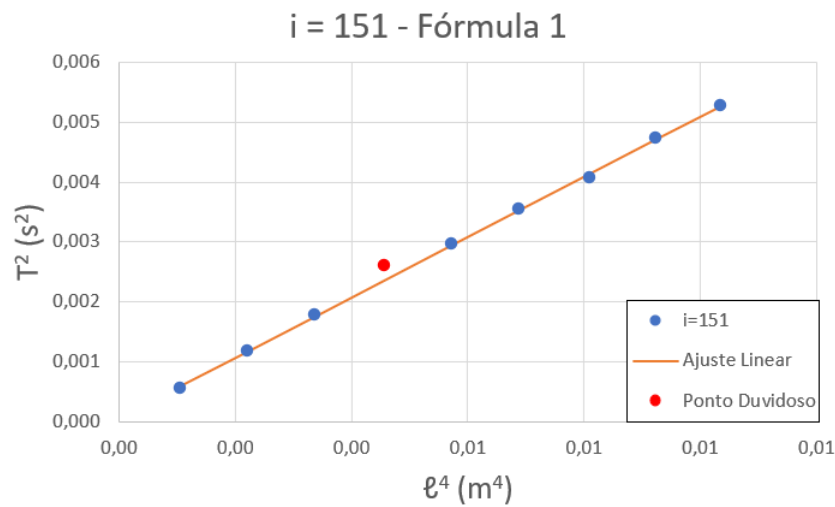


Gráfico 5: Regressão linear obtida para $i = 151$ utilizando a fórmula 1.

Regressão de $T^2(\ell^4)$ para $i=151$			
m	0,504	0,00006	b
s(m)	0,004	0,00003	s(b)
r^2	0,9996	0,00004	s(y)

Tabela 5: Matriz de ajuste correspondente ao gráfico 5.

Ao qual corresponde o gráfico de resíduos:

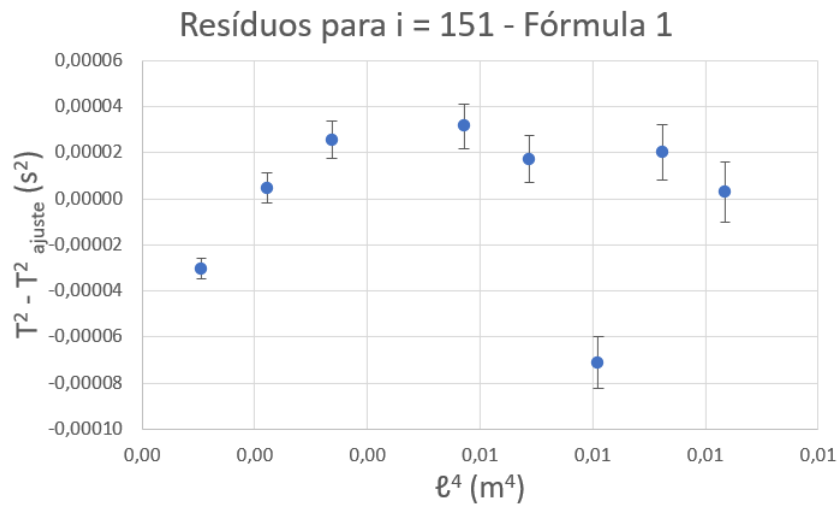


Gráfico 6: Gráfico de Resíduos da regressão linear no gráfico Gráfico 5

Como temos $r^2 \approx 1$, resíduos aleatórios e muito próximos de 0, podemos estimar que a regressão linear é apropriada. No entanto, podemos verificar melhor essa declaração, pelo que fiz o gráfico $\log(T)[\log(\ell)]$ que, como vimos acima, deverá ter declive 2.

Assim, obtive o gráfico 27 (em apêndice) e a respetiva matriz de ajuste:

Regressão de $\log(T)[\log(\ell)]$ para $i=151$			
m	1,931	-0,181	b
s(m)	0,013	0,008	s(b)
r^2	0,99976	0,002	s(y)

alg. signif. excedido

Tabela 6: Matriz de ajuste da linearização da fórmula 1 para $i = 51$

Para o declive desta linearização temos um erro percentual de 3% por defeito, com uma incerteza relativa de 1%. No gráfico 28 podemos ver que os resíduos desta linearização são aleatórios.

Assim, e tendo em conta aquilo que vimos acima, podemos considerar que a regressão linear na Tabela 5 estará feita corretamente. Assim, para $i = 151$ temos que:

$$\begin{aligned}
 E &= (2,5704160 \pm 0,0000002) \cdot 10^{11} Nm^{-2} \\
 &= (2,5856318 \cdot 10^{11} \pm 0,000006\%) Nm^{-2} \\
 \text{Erro}\% &= 29\% \text{ (por excesso)}
 \end{aligned}$$

Média dos valores para os 3 i

Se juntarmos os gráficos das regressões lineares para $i = 51, 101, 151$ temos:

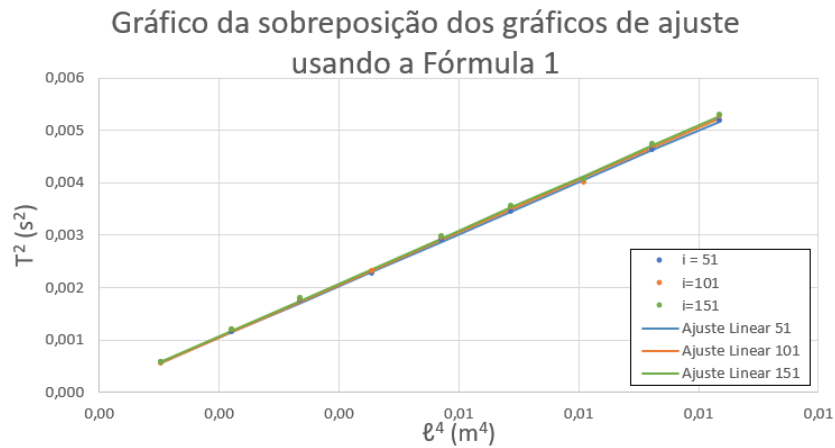


Gráfico 7: Sobreposição dos ajustes para os 3 valores de i

Podemos ainda fazer o mesmo para os resíduos:

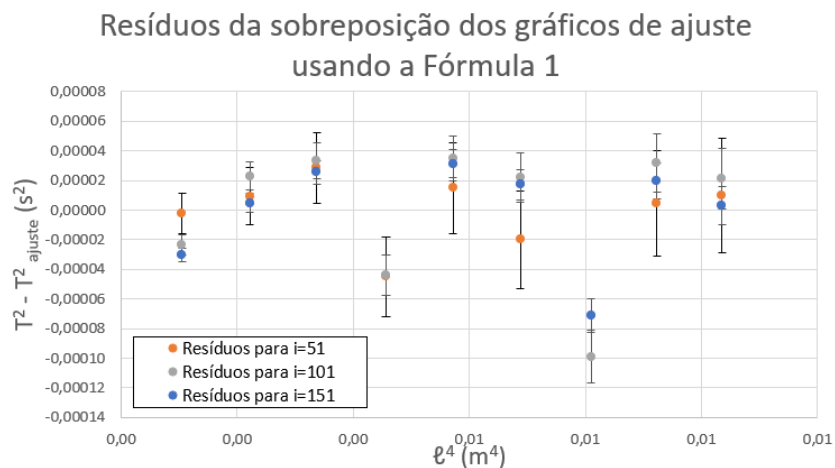


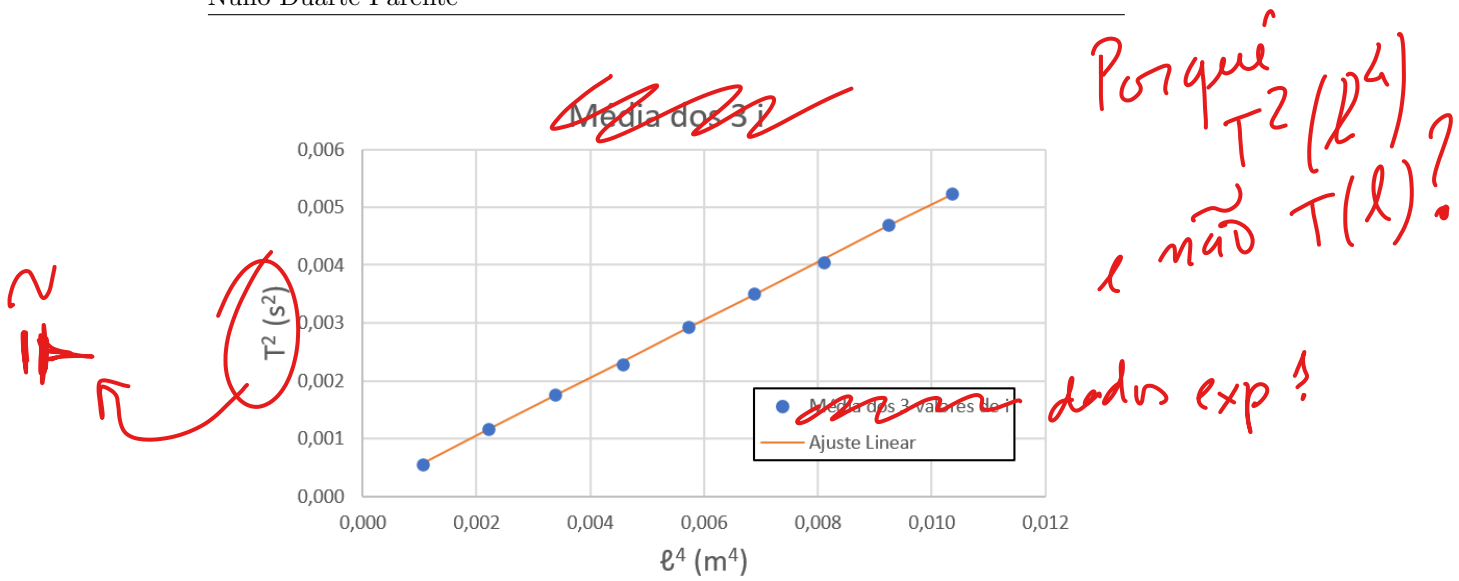
Gráfico 8: Sobreposição dos resíduos correspondentes a cada um dos ajustes no gráfico 7

Assim, facilmente vemos que os valores de \bar{T}^2 obtidos para cada valor de ℓ variado na execução, são bastante aproximados. Isto acontece de tal forma que as retas no gráfico 7 são dificilmente distinguidas e até os resíduos no gráfico 8 apresentam um formato bastante semelhante para todos os i testados.

Desta forma, decidi gerar um "novo ensaio", em que para cada valor de ℓ é usado a média dos valores de \bar{T}^2 para $i = 51, 101, 151$. De notar que os pontos duvidosos obtidos para $i = 51$ e $i = 151$ não foram incluídos nestas médias. Os valores usados encontram-se na Tabela 25, no apêndice.

Foi então obtido o gráfico e a regressão linear abaixo:

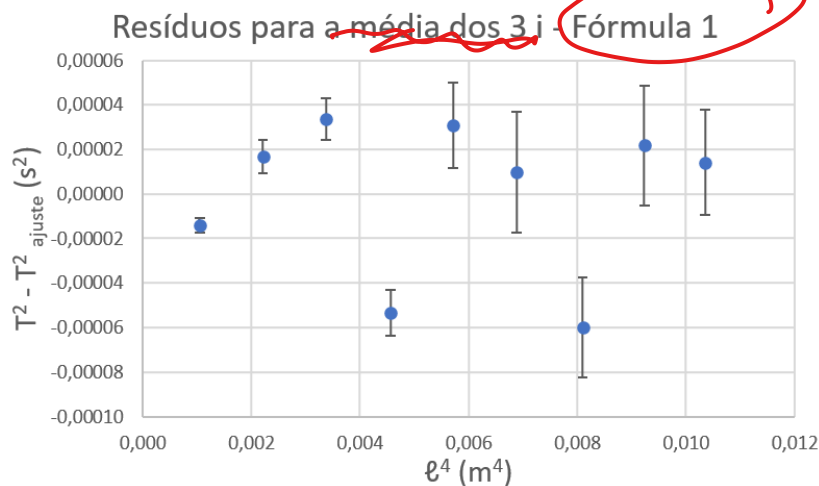
↑↑↑
↓↓↓
NOTA: os valores que obtém para $\mu(E)$ estão errados!



Regressão de $T^2(\ell^4)$ médio			
m	0,500	0,00005	b
s(m)	0,004	0,00003	s(b)
r^2	0,9995	0,00004	s(y)

Tabela 7: Matriz de ajuste correspondente à regressão linear presente no gráfico 9

Para a qual temos os resíduos:



Novamente, para verificar a relação linear, fiz o ajuste linear de $\log(T) \log(\ell)$:

Onde está o gráfico?

Regressão de $\log(T)[\log(\ell)]$ para média			
m	1,92	-0,19	b
s(m)	0,02	0,01	s(b)
r^2	0,9991	0,004	s(y)

Tabela 8: Matriz de ajuste da linearização deste ensaio

Assim, obtivemos uma linearização cujo declive apresenta um erro de 4% e uma incerteza de 1%. Além disso, como se tem no gráfico 30, o ajuste da linearização apresenta resíduos aleatórios. Vimos ainda, na Tabela 7 e no gráfico 10, que temos $r^2 \approx 1$ e resíduos aleatórios. Assim, a regressão linear é correta.

Desta forma, para o "ensaio" dos valores médios temos:

$$\begin{aligned}
 E &= (2,5894697 \pm 0.0000002) \cdot 10^{11} Nm^{-2} \\
 &= (2,5894697 \cdot 10^{11} \pm 0,000006\%) Nm^{-2} \\
 Erro\% &= 29\% \text{ (por excesso)}
 \end{aligned}$$

2.2.1.2 Gama 2

Ao longo da análise dos valores da Secção 2.2.1.1 verificamos que:

- Pontos duvidosos facilmente influenciavam os resultados obtidos
- Os erros ao determinar E foram relativamente elevados
- Os erros e incertezas do declive ao verificar a relação entre T e ℓ foram elevados.

Assim, decidimos estudar uma segunda gama de estudo, com valores de ℓ mais elevados. Ou seja, pretendíamos ver se o maior número de dados iria aumentar a incerteza e diminuir o erro, além de verificar se o efeito de "oscilações elípticas" mencionado acima de facto causava algum efeito nos resultados obtidos (apesar de termos rodado a barra para reduzir as oscilações horizontais).

Os valores obtidos encontram-se na Tabela 26. Com eles, pudemos fazer os seguintes gráficos:

i=51 - Fórmula 1

Para $i = 51$ (50 oscilações) obtivemos:

man é
preciso saber
que critério leva
a esta identificação?

se isto
é uma
"experiência"
de análise
deve ser
remetida
p/ apêndice!
só interessa o
T (l²)

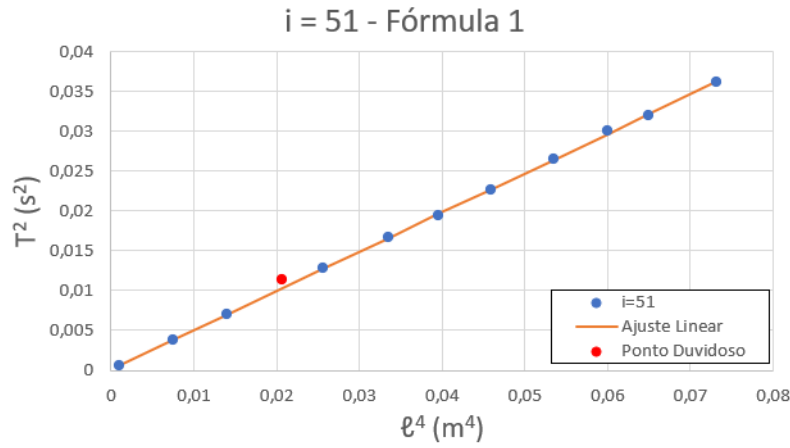


Gráfico 11: Regressão Linear obtida utilizando a fórmula 1 para $i = 51$

Regressão de $T^2(\ell^4)$ para $i=51$			
m	0,494	0,0001	b
s(m)	0,002	0,0001	s(b)
r^2	0,99986	0,0001	s(y)

Tabela 9: Matriz de ajuste do gráfico 11

Para a qual correspondem os resíduos:

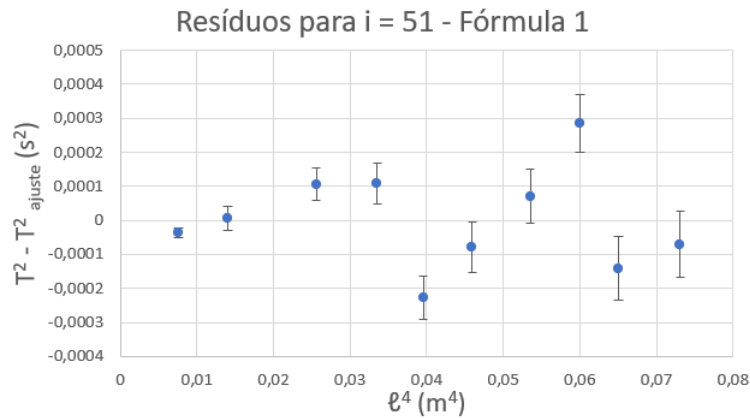


Gráfico 12: Resíduos associados à regressão linear presente no gráfico 11

Temos $r^2 \approx 1$ e resíduos aleatórios.
 Novamente, decidi usar os dados para verificar a relação $\bar{T}^2 \propto \ell^4$. Assim obtive o gráfico 31, para o qual temos a seguinte matriz de ajuste:

Regressão de $\log(T)[\log(\ell)]$ para $i=51$			
m	1,99	-0,155	b
s(m)	0,01	0,002	s(b)
r^2	0,99992	0,002	s(y)

Tabela 10: Linearização dos dados para $i = 51$ na Gama 2

Temos então um declive com um erro de 0,4% e uma incerteza de 0,3%. Vemos ainda no gráfico 32 que os resíduos desta regressão são aleatórios.

Desta forma, podemos estimar que o ajuste feito no gráfico 11 está correto e temos:

$$\begin{aligned}
 E &= (2,62 \pm 0,03) \cdot 10^{11} Nm^{-2} \\
 &= (2,62 \cdot 10^{11} \pm 1\%) Nm^{-2} \\
 Erro\% &= 31\% \text{ (por excesso)}
 \end{aligned}$$

i=101 - Fórmula 1

Para $i = 101$ (100 oscilações) obtive os seguintes gráficos:

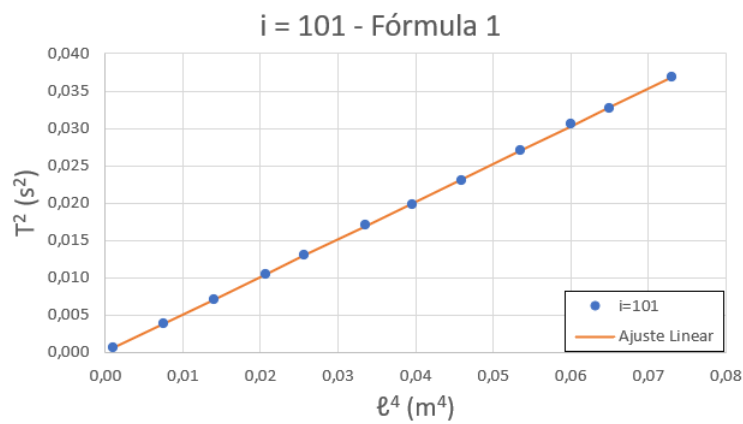


Gráfico 13: Regressão Linear obtida utilizando a fórmula 1 para $i = 101$, na gama 2

Regressão de $T^2(\ell^4)$ para $i=101$			
m	0,503	0,0001	b
s(m)	0,002	0,0001	s(b)
r^2	0,99986	0,0001	s(y)

Tabela 11: Matriz de ajuste do gráfico 11

Para a qual correspondem os resíduos:

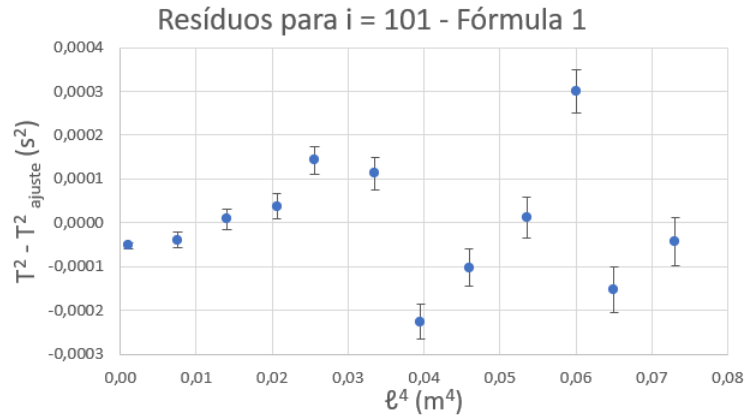


Gráfico 14: Resíduos associados à regressão linear do gráfico 13

Podemos ver que se tem $r^2 \approx 1$ e os resíduos são aleatórios. Novamente, decidi decidi linearizar os dados do gráfico 13. Assim obtive o gráfico 33, para o qual temos a seguinte matriz de ajuste:

Regressão de $\log(T)[\log(\ell)]$ para $i=101$			
m	1,989	-0,152	b
s(m)	0,006	0,002	s(b)
r^2	0,99991	0,002	s(y)

Tabela 12: Linearização dos dados para $i = 101$ na Gama 2

Esta regressão um declive com um erro de 0,5% e uma incerteza de 0,3%. Vemos ainda no gráfico 34 que os resíduos desta regressão são aleatórios.

Desta forma, podemos estimar que o ajuste feito no gráfico 13 está correto e temos:

$$\begin{aligned}
 E &= (2,5755948 \pm 0,0000001) \cdot 10^{11} Nm^{-2} \\
 &= (2,5755948 \cdot 10^{11} \pm 0,000005\%) Nm^{-2} \\
 Erro\% &= 29\% \text{ (por excesso)}
 \end{aligned}$$

i=151 - Fórmula 1

Para os dados obitdos com $i = 151$ (150 oscilações) consegui fazer a seguinte análise:

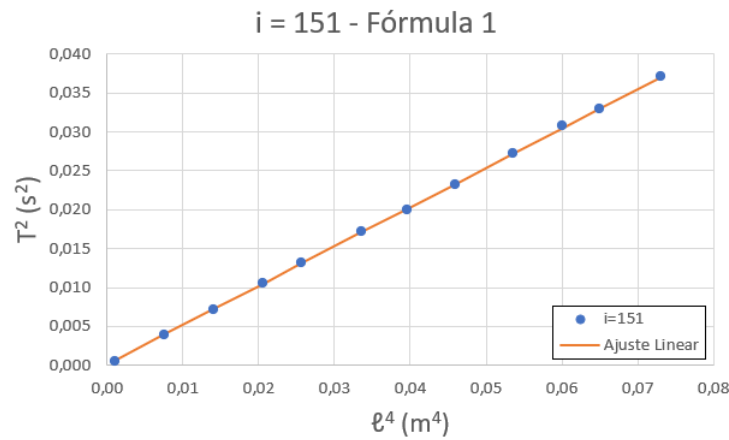


Gráfico 15: Regressão Linear obtida utilizando a fórmula 1 para $i = 151$

Regressão de $T^2(\ell^4)$ para $i=151$			
m	0,506	0,0001	b
s(m)	0,002	0,0001	s(b)
r^2	0,99990	0,0001	s(y)

Tabela 13: Matriz de ajuste do gráfico 15

Para a qual correspondem os resíduos:

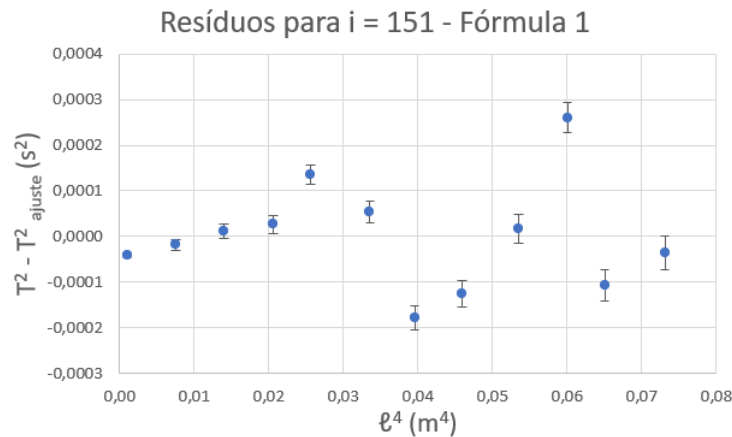


Gráfico 16: Resíduos associados à regressão linear presente no gráfico 15

Temos $r^2 \approx 1$ e resíduos que aparentam ser aleatórios.

Novamente, estudei a relação $\log(\bar{T})[\log(\ell)]$. Assim obtive o gráfico 35, para o qual temos a seguinte matriz de ajuste:

Regressão de $\log(T)[\log(\ell)]$ para $i=151$			
m	1,987	-0,151	b
s(m)	0,005	0,002	s(b)
r^2	0,99994	0,001	s(y)

Tabela 14: Linearização dos dados para $i = 151$ na Gama 2

Temos então um declive com um erro de 0,6% e uma incerteza de 0,3%. Vemos ainda no gráfico 36 que os resíduos desta regressão são aleatórios.

Desta forma, podemos estimar que o ajuste feito no gráfico 15 está correto e temos:

$$\begin{aligned}
 E &= (2,55578231 \pm 0,0000001) \cdot 10^{11} Nm^{-2} \\
 &= (2,55578231 \cdot 10^{11} \pm 0,000005\%) Nm^{-2} \\
 Erro\% &= 28\% \text{ (por excesso)}
 \end{aligned}$$

Média dos valores para os 3 i

Tal como com a gama 1, decidi sobrepor os gráficos dos ajuste e dos resíduos feitos para os 3 valores de i :

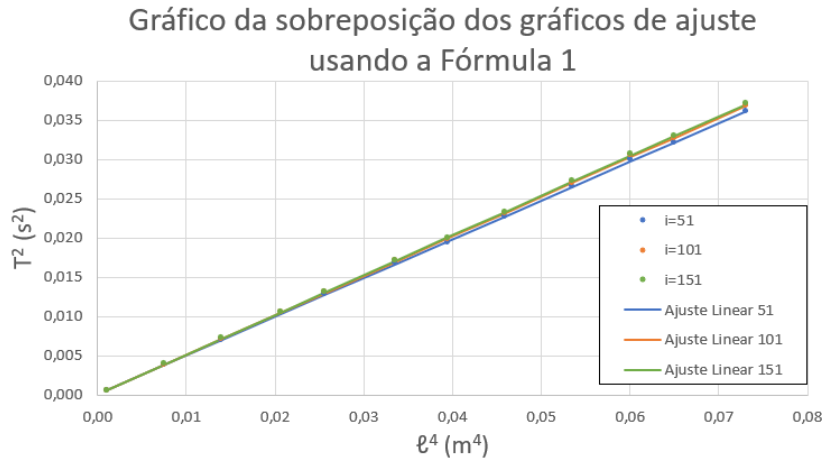


Figura 5: Sobreposição dos ajustes feitos na secção 2.2.1.2

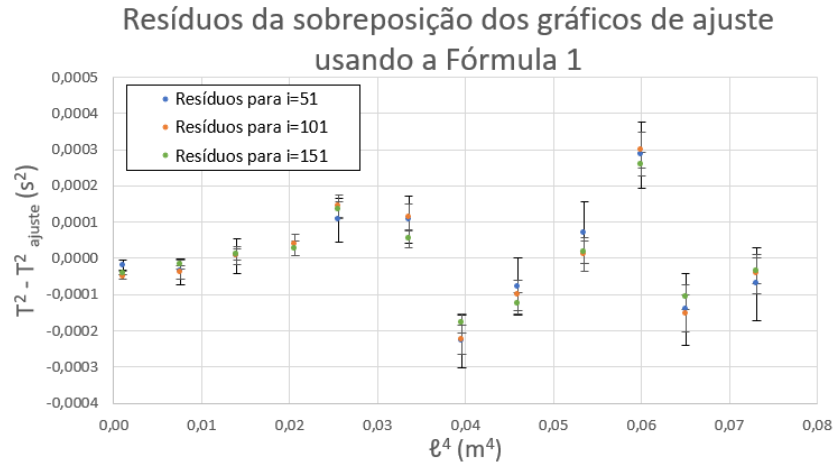


Figura 6: Sobreposição dos resíduos correspondentes aos 3 ajustes no gráfico 5

Mais uma vez, vemos que os resíduos são idênticos e as retas dos ajustes estão próximas. Assim, decidi voltar a fazer um "ensaio" de médias. Tal como na secção 2.2.1.1, a cada valor de ℓ associei a média dos 3 valores de \bar{T} obtidos. Não incluí o ponto duvidoso de $i = 51$ nessa média. Todos os valores usados neste "ensaio" estão na Tabela 27.

Obtive então:

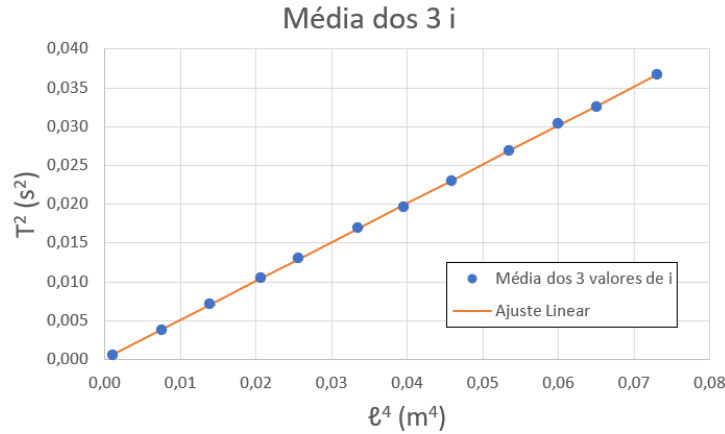


Gráfico 17: Regressão Linear obtida utilizando a fórmula 1 para $i = 151$

Regressão de $T^2(\ell^4)$ médio			
m	0,501	9E-05	b
s(m)	0,002	8E-05	s(b)
r^2	0,99987	0,0001	s(y)

Tabela 15: Matriz de ajuste da regressão linear do gráfico 17.

Para a qual correspondem os resíduos:

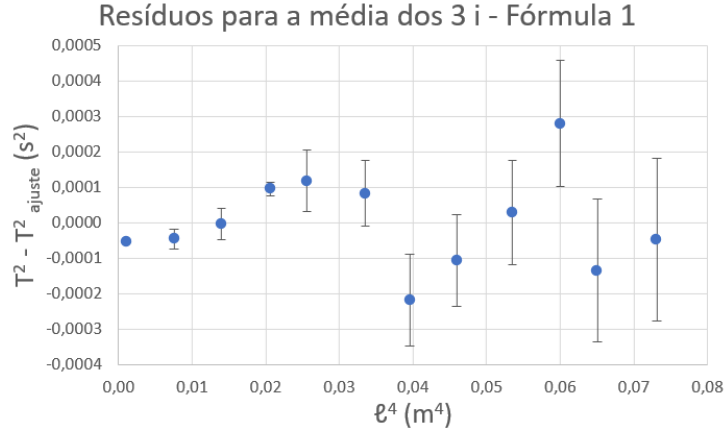


Gráfico 18: Resíduos associados à regressão linear presente no gráfico 17

Temos $r^2 \approx 1$ e resíduos que aparentam ser aleatórios. Ao fazer o gráfico de $\log(\bar{T})[\log(\ell)]$ obtive o gráfico 37, para o qual temos a seguinte matriz de ajuste:

Regressão de $\log(T)[\log(\ell)]$ para média			
m	1,988	-0,153	b
s(m)	0,006	0,002	s(b)
r^2	0,99991	0,002	s(y)

Tabela 16: Linearização dos dados o ensaio dos valores médios dos 3 i na Gama 2

Temos então um declive com um erro de 0,6% e uma incerteza de 0,3%. Vemos ainda no gráfico 38 que os resíduos desta regressão são aleatórios.

Desta forma, podemos estimar que o ajuste feito no gráfico 15 terá sido realizado corretamente e tem-se:

$$\begin{aligned}
 E &= (2,5860090 \pm 0,0000001) \cdot 10^{11} Nm^{-2} \\
 &= (2,5860090 \cdot 10^{11} \pm 0,000005\%) Nm^{-2} \\
 \text{Erro}\% &= 29\% \text{ (por excesso)}
 \end{aligned}$$

2.2.1.3 Verificação da Fórmula 2 com a Gama 2

Conseguimos verificar pelos dos valores de E e dos declives de linearização, que a gama 2, tal como esperado, nos dá incertezas menores.

Assim, para verificar os valores obtidos com a fórmula 2 decidi usar esta gama. De notar que na fórmula 2 temos $\bar{T} \propto \ell^2$, pelo que o declive da linearização seria 2 novamente. Deste modo, optei por não verificar novamente a linearização, até porque para a determinar usei \bar{T} e ℓ , valores que serão os mesmos a usar no estudo da fórmula 2.

Assim, obtive:

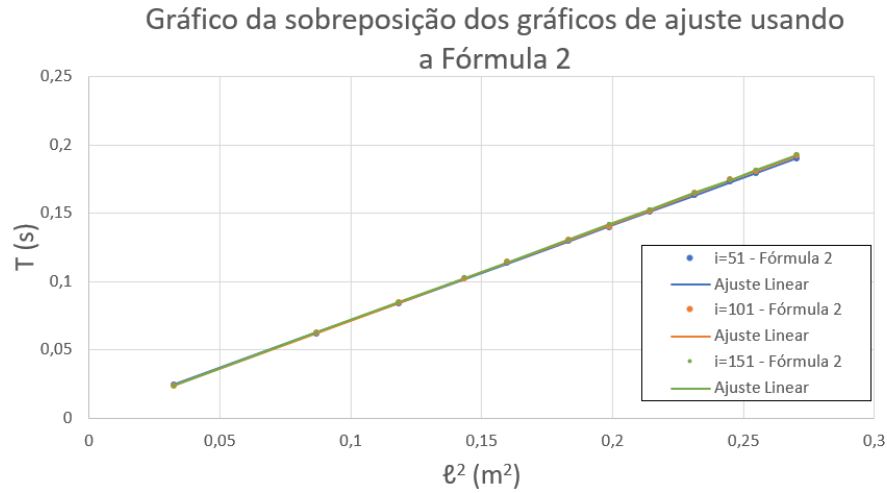


Gráfico 19: Sobreposição das retas de ajuste obtida para os 3 valores de i , com a fórmula 2.

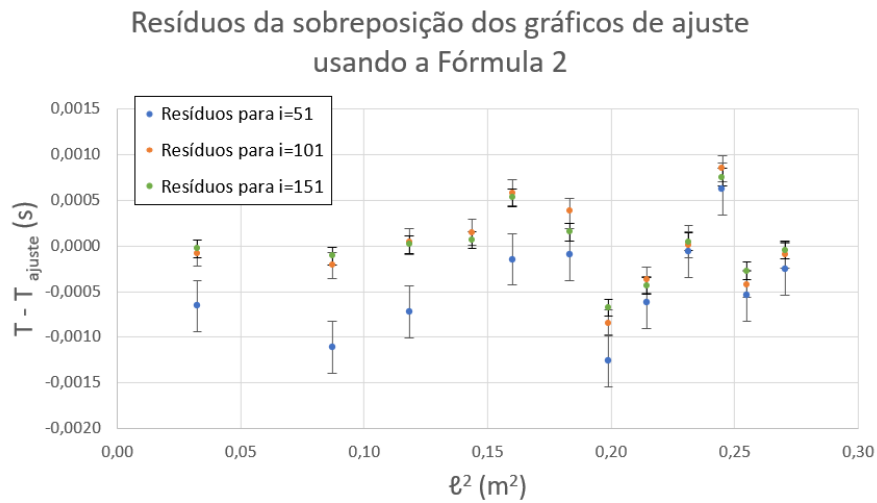


Gráfico 20: Sobreposição dos resíduos dos 3 ajustes no gráfico 19

Desta vez, como os gráficos obtidos têm traçados muito semelhantes àqueles obtidos na análise feita com a Fórmula 1, incluí apenas os gráficos de sobreposição na análise de dados. Os gráficos do ajuste e resíduos para $i = 51, 101, 151$ encontram-se no Apêndice (gráficos 39 a 44). Para as regressões lineares presentes no gráfico 19 temos as seguintes matrizes de ajuste:

Regressão de $T(\ell^2)$ para $i=51$			
m	0,700	0,0009	b
s(m)	0,002	0,0004	s(b)
r^2	0,99992	0,0005	s(y)

Tabela 17: Matriz de ajuste para $i = 51$, no estudo da Fórmula 2.

Regressão de $T(\ell^2)$ para $i=101$			
m	0,707	0,0007	b
s(m)	0,002	0,0004	s(b)
r^2	0,99992	0,0005	s(y)

Tabela 18: Matriz de ajuste para $i = 101$, no estudo da Fórmula 2.

Regressão de $T(\ell^2)$ para $i=151$			
m	0,709	0,0007	b
s(m)	0,002	0,0003	s(b)
r^2	0,99994	0,0004	s(y)

Tabela 19: Matriz de ajuste para $i = 151$, no estudo da Fórmula 2.

Para todas as regressões temos $r^2 \approx 1$ e resíduos aleatórios. Assim, no estudo da Fórmula 2 temos:

i=51 - Fórmula 2

$$\begin{aligned}
 E &= (2,64 \pm 0,02) \cdot 10^{11} Nm^{-2} \\
 &= (2,64 \cdot 10^{11} \pm 0,7\%) Nm^{-2} \\
 Erro\% &= 32\% \text{ (por excesso)}
 \end{aligned}$$

i=101 - Fórmula 2

$$\begin{aligned}
 E &= (2,589 \pm 0,001) \cdot 10^{11} Nm^{-2} \\
 &= (2,589 \cdot 10^{11} \pm 0,04\%) Nm^{-2} \\
 Erro\% &= 29\% \text{ (por excesso)}
 \end{aligned}$$

i=151 - Fórmula 2

$$\begin{aligned}
 E &= (2,573 \pm 0,001) \cdot 10^{11} Nm^{-2} \\
 &= (2,573 \cdot 10^{11} \pm 0,04\%) Nm^{-2} \\
 Erro\% &= 29\% \text{ (por excesso)}
 \end{aligned}$$

Para este estudo decidi não fazer estudo de um "ensaio" de valores médios. O benefício destes estudos feitos anteriormente era o de obter um resultado mais uniforme, com erro e incerteza mais baixa que a dos valores medidos. No entanto, neste estudo queríamos apenas comparar e tirar conclusões acerca dos valores de E obtidos com a fórmula 2, assim como a respetiva incerteza, o que conseguimos fazer com os valores de E para cada i .

2.3 Parte 2 - Pêndulo de Torção

Começamos a atividade por medir as dimensões de cada sólido e do fio, cujos valores estão indicados na Tabela 28. Usando estes valores e as equações 4 a 7 foi possível determinar os momentos de inércia dos sistemas A, B, C, D :

$$I_A = (4,04 \pm 0,01) \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2$$

$$I_B = (6,28 \pm 0,01) \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2$$

$$I_C = (8,36 \pm 0,02) \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2$$

$$I_D = (10,64 \pm 0,02) \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2$$

Para cada sistema, foi feita a média dos tempos de 1 oscilação determinado para cada amplitude de oscilação testada ($90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$), tendo-se obtido a Tabela 29, que contém todos os valores registados nesta parte da atividade.

Com estes dados, foi possível fazer uma regressão linear de I em função de T^2 :

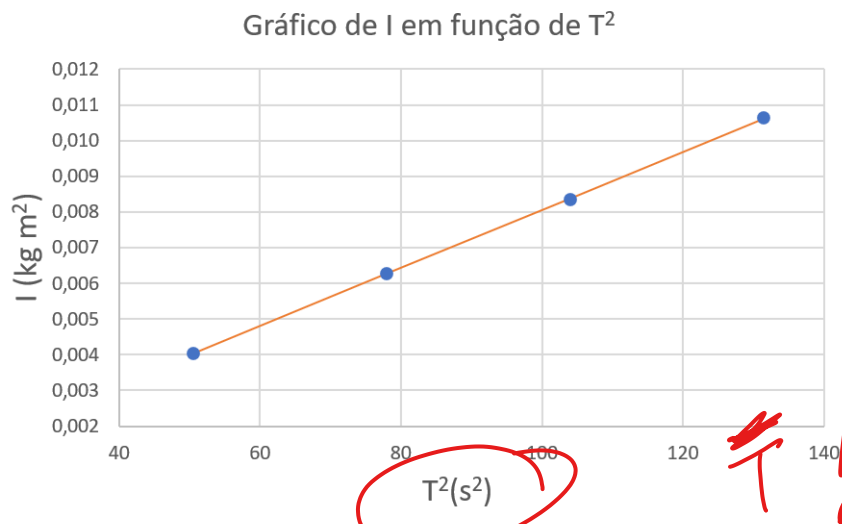


Gráfico 21: Regressão linear $I(T^2)$ feita na segunda parte da atividade.

$I(T^2)$			
m	8,15E-05	-0,0001	b
s(m)	4E-07	0,00004	s(b)
r^2	0,99995	0,00002	s(y)

Tabela 20: Matriz de ajuste da regressão no gráfico 21

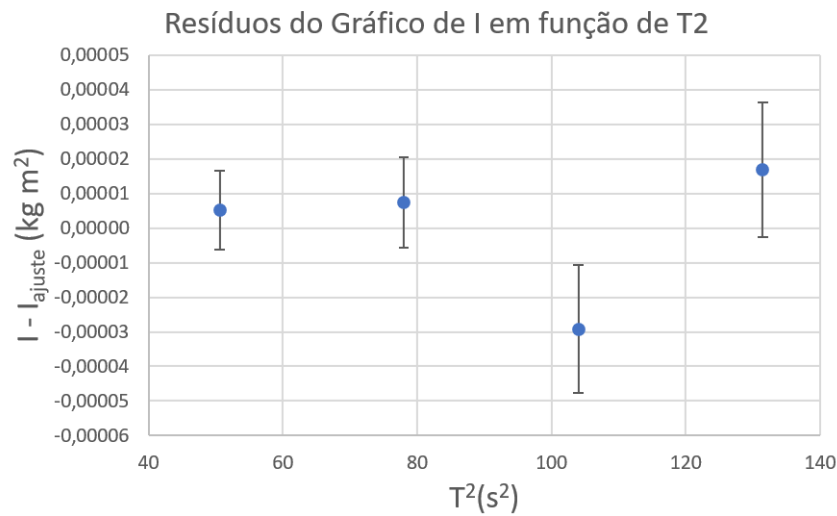


Gráfico 22: Resíduos do gráfico 21.

Mais uma vez, decidi fazer a linearização destes dados, sendo que o declive esperado seria 2, pois:

$$I = \frac{D^4 \mu}{128 \pi L} T^2 \quad \longrightarrow \quad \log(I) = 2 \log(T) + \log\left(\frac{D^4 \mu}{128 \pi L}\right)$$

Assim, temos:

$\text{Log}(I) [\text{Log}(T)]$			
m	2,02	-4,12	b
s(m)	0,01	0,01	s(b)
r^2	0,99997	0,001	s(y)

Tabela 21: Matriz de ajuste da linearização dos dados da segunda parte da atividade.

Temos então um declive com um erro de 1% e uma incerteza percentual de 0,4%. A representação gráfica de $\log(I) [\log(T)]$ e os seus resíduos encontram-se nos gráficos 45 e 46. Como, além disso, vimos que a regressão linear presente no gráfico 21 apresenta $r^2 \approx 1$ e resíduos muito próximos de zero e possivelmente aleatórios (apesar de não termos pontos suficientes para tirar essa conclusão

com certeza). Assim, na segunda parte da atividade (sendo $\mu = 79,3 \text{ GPa}$ o valor de referência) determinou-se:

$$\mu = (105 \pm 3) \text{ GPa} = (105 \pm 3\%) \text{ GPa}$$

$$\text{Erro}\% = 32\% \text{ (por excesso)}$$

2.4 Resultados Finais

Resultados Finais												
Barra Encastrada - Gama 1						Barra Encastrada - Gama 2						
	F1-S1	F1-S2	F1-Média	F1-S1	F1-S2	F1-Média	F2-S1	F2-S2	F2-Média	F2-S1	F2-S2	
E	2,62E+11	2,586009E+11	2,591009E+11	2,5894697E+11	2,62E+11	2,5578231E+11	2,586009E+11	2,64E+11	2,589E+11	2,578E+11	2,578E+11	Pêndulo de Torção
u(E)	4E+09	2E+04	2E+04	2E+04	3E+09	3E+09	1E+04	1E+04	2E+09	1E+08	1E+08	μ 1,05E+11
u(E) (%)	1%	0,0000007%	0,0000006%	0,0000006%	1%	1%	0,0000005%	0,0000005%	0,7%	0,04%	0,04%	u(μ) 3%
Erro %	31%	29%	29%	29%	31%	28%	29%	32%	29%	29%	29%	Erro % 32%
Erro Linearização	-3,3%	-3,5%	-3,4%	-4%	-0,4%	-0,5%	-0,6%	-0,6%	-0,6%	-0,6%	-0,6%	Erro Linearização 1%
Incerteza Linearização	1,2%	1,3%	0,7%	1%	0,3%	0,3%	0,3%	0,3%	0,3%	0,3%	0,3%	Incerteza Linearização 0,4%

Tabela 22: Resultados obtidos na atividade experimental.

Uma vez que foi determinado com a gama mais apropriada e, como tal, apresenta menor incertezas, o valor final do módulo de Young da barra encastrada é aquele obtido no "ensaio" dos valores médios feito com a segunda gama:

$$E = (2,5860090 \pm 0,0000001) \cdot 10^{11} \text{ Nm}^{-2} = (2,5860090 \cdot 10^{11} \pm 0,000005\%) \text{ Nm}^{-2}$$

$$\text{Erro}\% = 29\% \text{ (por excesso)}$$

Para o módulo de rigidez do fio do pêndulo de torção, o valor final obtido foi

$$\mu = (105 \pm 3) \text{ GPa} = (105 \pm 3\%) \text{ GPa}$$

$$\text{Erro}\% = 32\% \text{ (por excesso)}$$

3 Conclusões

Nesta atividade foi possível determinar o módulo de Young de uma barra metálica a menos de um erro de 29%, com uma incerteza de 0,000005%. Apesar de muito elevado, este erro não se deverá a erros na execução, pois o erro obtido mantevesse perto de 30% em todos os ensaios estudados. Deve-se ainda realçar que todos os valores obtidos foram erros por excesso. Assim, conclui-se que ou o método experimental não é o mais adequado e, portanto, está sujeito a erros sistemáticos que não são considerados; ou o valor de módulo de Young considerado como valor de referência não é o mais apropriado.

Ao usar 2 gamas bastante diferentes, consegui verificar que, nesta atividade, ao ter pontos mais dispersos na gama total apenas a incerteza dos valores obtidos é reduzida, pelo que o erro não foi afetado. Foi ainda claro que, em ambas as gamas, 50 oscilações resultavam em valores com elevadas incertezas.

Com a gama 2 testei a aplicabilidade da Fórmula 2 nesta atividade. Apesar de esta fórmula dar valores do módulo de Young muito próximos aos da Fórmula 1, esses valores estavam associados a incertezas muito maiores do que aquelas obtidas com a fórmula 1.

Consegui ainda verificar a relação $\bar{T}^2 \propto \ell^4$ com uma incerteza de 0,3% e com um erro de 0,4%. De notar que estes valores foram obtidos para $i = 51$ na segunda gama.

Na segunda parte da atividade, conseguiu-se determinar o módulo de rigidez do fio, com uma incerteza percentual de 3% e um erro de 32%. Nesta parte deve-se notar que o cronómetro usado para contar o tempo de 10 oscilações foi parado manualmente e que apenas se obteve 4 pontos. Assim, é compreensível obter uma incerteza e erro baixos.

4 Apêndice

	Medições		
	(m ± 0,1) (g)	(L ± 0,5) (mm)	(d ± 0,01) (mm)
	21,6	895,0	1,85
	21,6	895,2	1,83
	21,6	894,8	1,83
	21,5	895,1	1,88
	21,6	895,0	1,88
Média	0,02158	0,89502	0,00185
u(média)	0,00002	0,00006	0,00001

Tabela 23: Medições do comprimento (L), massa (m) e diâmetro (D) da barra escolhida.

Valores Experimentais	R ± 0,050 (m)	ℓ^2 (m)	$\ell^2 T^2$ (m)	T = 52				T = 102				T = 152			
				R ± 0,051 (m)	T ± 0,051 (s)	T _{med} (s)	σT_{med}^2 (s)	R ± 0,051 (m)	T ± 0,051 (s)	T _{med} (s)	σT_{med}^2 (s)	R ± 0,051 (m)	T ± 0,051 (s)	T _{med} (s)	σT_{med}^2 (s)
18,000	18,000	1,044160000E-03	2E-12	0,89	0,024	0,0238	0,0003	0,00037	0,00001	1,17	0,033	0,2235	0,0001	0,00005	0,00001
21,689	21,700	2,2173799E-03	2E-11	0,85	0,024	0,0238	0,0003	0,00116	0,00002	1,12	0,034	0,0344	0,0001	0,00118	0,00001
24,104	24,100	3,3754028E-03	8E-11	0,85	0,024	0,0238	0,0003	0,00175	0,00002	1,11	0,034	0,0412	0,0001	0,00177	0,00001
25,956	26,000	4,5897600E-03	2E-10	0,85	0,024	0,0238	0,0003	0,00227	0,00003	1,09	0,034	0,0479	0,0001	0,00229	0,00001
27,478	27,500	5,7138432E-03	4E-10	0,85	0,024	0,0238	0,0003	0,00289	0,00003	1,07	0,034	0,0543	0,0001	0,00295	0,00002
28,781	28,800	6,8787070E-03	7E-10	0,85	0,024	0,0238	0,0003	0,00343	0,00003	1,05	0,034	0,0599	0,0001	0,00352	0,00002
29,933	30,000	8,1000000E-03	1E-09	0,85	0,024	0,0238	0,0003	0,00394	0,00004	1,03	0,034	0,0653	0,0001	0,00401	0,00002
30,963	31,000	9,252121E-03	2E-09	0,85	0,024	0,0238	0,0003	0,00442	0,00004	1,01	0,034	0,0699	0,0001	0,00441	0,00002
31,899	31,900	1,05553E-02	2E-09	0,85	0,024	0,0238	0,0003	0,00488	0,00004	0,99	0,034	0,0743	0,0001	0,00479	0,00002

Tabela 24: Valores registados ao longo da primeira parte da atividade, com a primeira Gama Experimental.

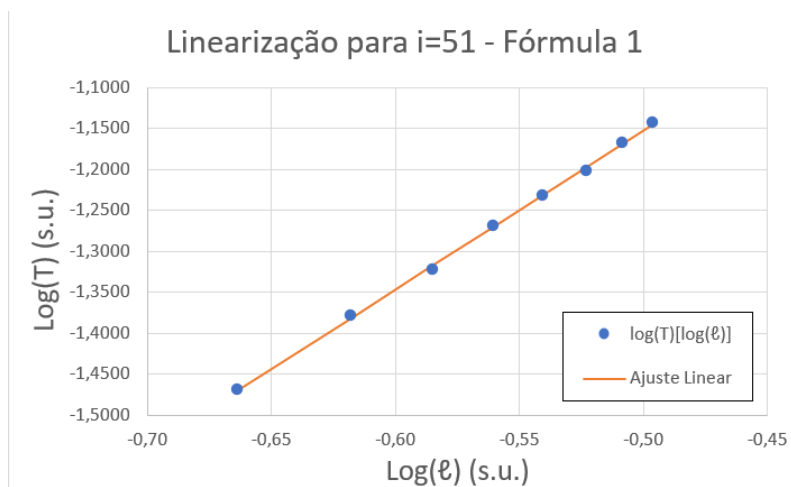


Gráfico 23: Gráfico obtido na linearização dos dados para $i = 51$ na primeira gama de estudo

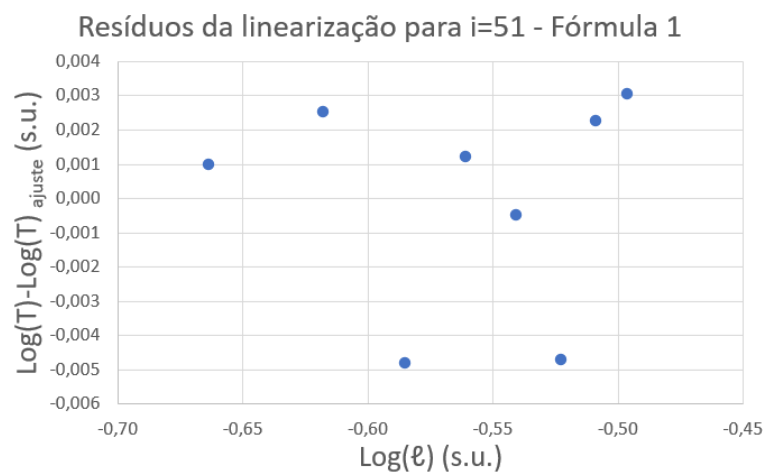


Gráfico 24: Resíduos correspondentes à regressão linear presente no gráfico Gráfico 23

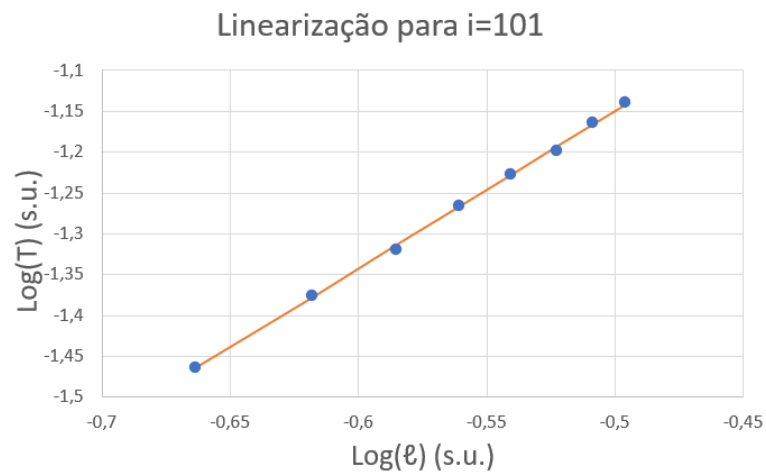


Gráfico 25: Gráfico obtido na linearização dos dados para $i = 101$ na primeira gama de estudo

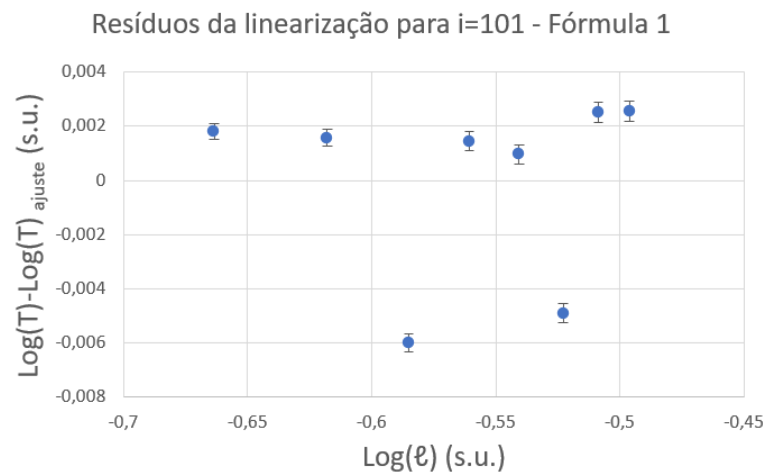


Gráfico 26: Resíduos correspondentes à regressão linear presente no gráfico Gráfico 25

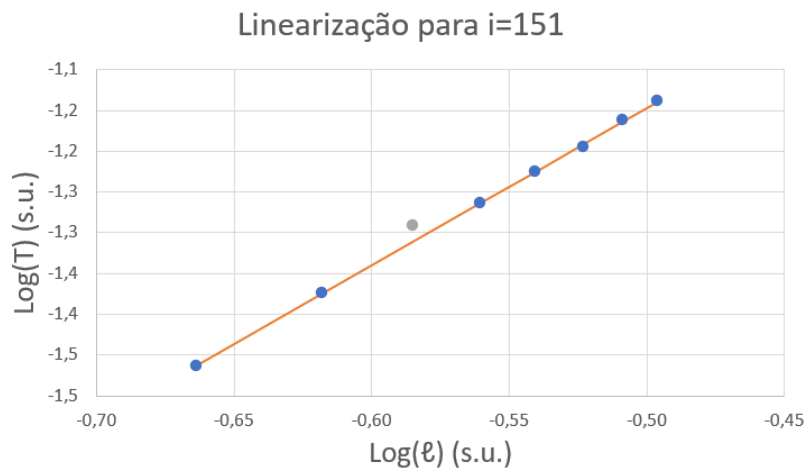


Gráfico 27: Gráfico obtido na linearização dos dados para $i = 151$ na primeira gama de estudo

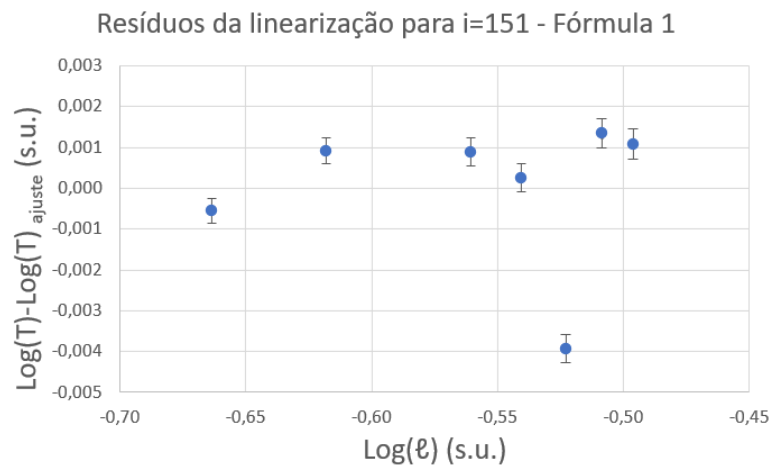


Gráfico 28: Resíduos correspondentes à regressão linear presente no gráfico Gráfico 27

ℓ (cm)	ℓ^4 (m)	$u(\ell^4)$ (m)	Média dos 3 i					Ajuste	Resíduos
			$T_{méd}$ (s)	$u(T_{méd})$ (s)	$(T_{méd})^2$ (s ²)	$u(T_{méd})^2$ (s ²)	$u(T_{méd})^2$ (s ²)		
18,00	1,04976000E-03	2E-12	0,0237	0,0001	0,000560	0,000003	0,000003	0,000574	-0,000014
21,70	2,2173739E-03	2E-11	0,0343	0,0001	0,00117	0,00001	0,00001	0,00116	0,000002
24,10	3,3734026E-03	8E-11	0,0421	0,0001	0,00177	0,00001	0,00001	0,00174	0,000003
26,00	4,569760E-03	2E-10	0,0495	0,0011	0,00228	0,00001	0,00001	0,00233	-0,000005
27,50	5,719141E-03	4E-10	0,0542	0,0002	0,0029	0,0000	0,0000	0,0029	0,0000
28,80	6,87971E-03	7E-10	0,0591	0,0002	0,0035	0,0000	0,0000	0,0035	0,0000
30,00	8,10000E-03	1E-09	0,0636	0,0002	0,0040	0,0000	0,0000	0,0041	-0,0001
31,00	9,23521E-03	2E-09	0,0685	0,0002	0,0047	0,0000	0,0000	0,0047	0,0000
31,90	1,03553E-02	2E-09	0,0724	0,0002	0,0052	0,0000	0,0000	0,0052	0,0000

Tabela 25: "Ensaio" dos valores médios na segunda Gama Experimental da primeira parte da atividade.

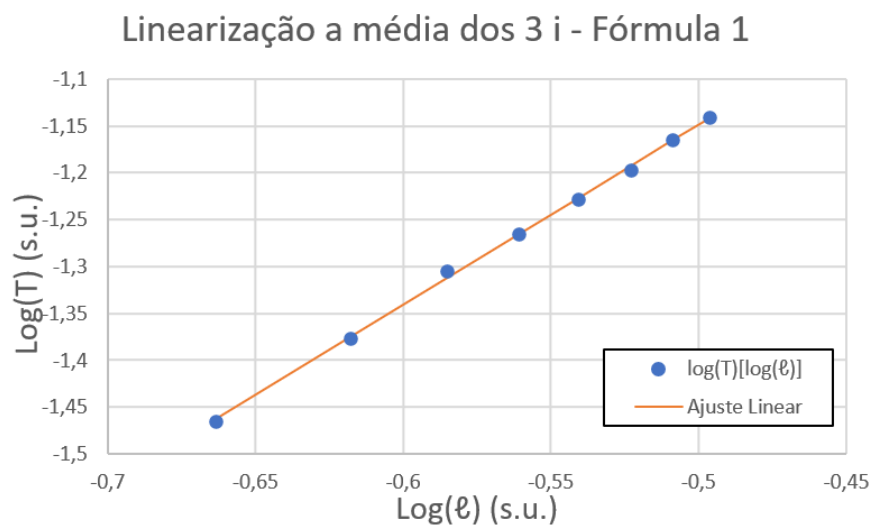


Gráfico 29: Relação entre $\log(T)$ e $\log(\ell)$ neste ensaio de valores médios.

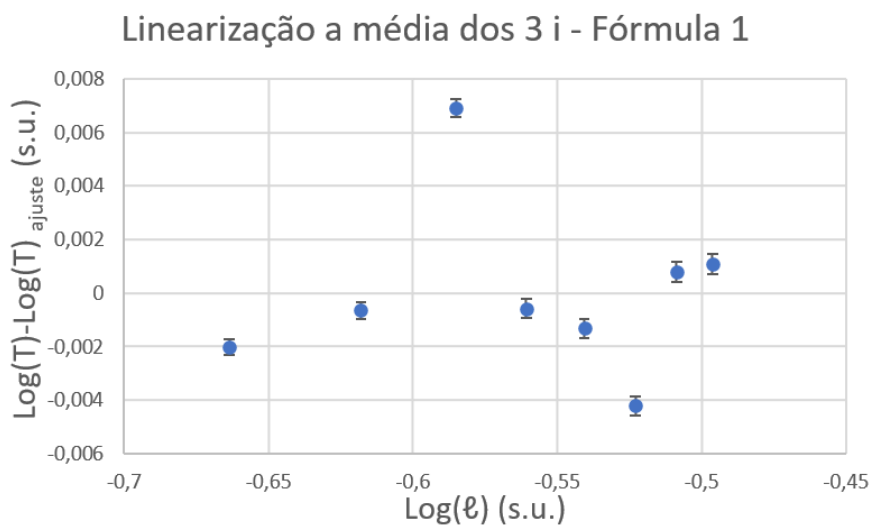


Gráfico 30: Resíduos correspondentes à regressão linear presente no gráfico Gráfico 29

Valores Preliminares	ℓ (m)	ℓ^2 (m ²)	$\omega(\ell)$ (m)	i=51						i=52						i=53					
				$\tau_{\text{osc}}(51)$ (s)	$\tau_{\text{osc}}(52)$ (s)	$\tau_{\text{osc}}(53)$ (s)	$\tau_{\text{osc}}(54)$ (s)	$\tau_{\text{osc}}(55)$ (s)	$\tau_{\text{osc}}(56)$ (s)	$\tau_{\text{osc}}(57)$ (s)	$\tau_{\text{osc}}(58)$ (s)	$\tau_{\text{osc}}(59)$ (s)	$\tau_{\text{osc}}(60)$ (s)	$\tau_{\text{osc}}(61)$ (s)	$\tau_{\text{osc}}(62)$ (s)	$\tau_{\text{osc}}(63)$ (s)	$\tau_{\text{osc}}(64)$ (s)	$\tau_{\text{osc}}(65)$ (s)	$\tau_{\text{osc}}(66)$ (s)	$\tau_{\text{osc}}(67)$ (s)	$\tau_{\text{osc}}(68)$ (s)
18.000	18.0000	1.044700000E-03	2F-12	0.58	0.528	0.0138	0.0000	0.00007	0.00001	1.17	0.023	0.0135	0.0001	0.00005	0.00001	1.17	0.028	0.0137	0.0001	0.000060	0.000004
29.485	29.5000	7.27393000E-03	9E-10	1.53	0.961	0.0614	0.0000	0.00377	0.00003	3.10	0.062	0.062	0.0001	0.00084	0.00002	4.88	0.062	0.062	0.0001	0.00089	0.00001
34.434	34.4000	1.40024000E-02	5E-09	2.09	0.988	0.0836	0.0000	0.00889	0.00005	4.22	0.084	0.084	0.0001	0.00712	0.00002	6.35	0.085	0.0847	0.0001	0.00717	0.00002
37.845	37.9000	2.063274E-02	1E-08	2.80	0.115	0.1068	0.0000	0.0114	0.0001	5.12	0.102	0.102	0.0001	0.01049	0.00003	7.70	0.109	0.1027	0.0001	0.01054	0.00002
40.557	40.0000	2.960000E-02	3E-08	3.83	0.113	0.1132	0.0000	0.0128	0.0001	5.72	0.114	0.114	0.0001	0.01309	0.00003	8.61	0.115	0.1147	0.0001	0.01318	0.00002
42.779	42.8000	3.355000E-02	8E-08	4.86	0.122	0.1229	0.0000	0.0167	0.0001	6.52	0.114	0.114	0.0001	0.01309	0.00004	9.81	0.122	0.1208	0.0001	0.01311	0.00002
44.735	44.8000	3.994700E-02	1E-07	5.45	0.130	0.130	0.0000	0.0194	0.0001	6.53	0.131	0.131	0.0001	0.013074	0.00004	10.99	0.131	0.1311	0.0001	0.01392	0.00003
46.438	46.5000	4.594400E-02	2E-07	6.48	0.139	0.1391	0.0000	0.0223	0.0001	7.05	0.141	0.141	0.0001	0.01307	0.00004	11.49	0.141	0.1413	0.0001	0.01331	0.00003
47.970	48.1000	5.152700E-02	3E-07	7.72	0.151	0.1506	0.0000	0.0266	0.0001	7.80	0.152	0.152	0.0001	0.01307	0.00005	12.47	0.151	0.1499	0.0001	0.01318	0.00003
49.371	49.5000	5.603700E-02	4E-07	9.07	0.165	0.1650	0.0000	0.0309	0.0001	8.21	0.164	0.164	0.0001	0.01306	0.00005	13.38	0.165	0.1653	0.0001	0.01307	0.00003
50.872	50.5000	6.003700E-02	6E-07	1.03	0.175	0.1752	0.0000	0.0350	0.0001	8.74	0.175	0.175	0.0001	0.01306	0.00005	14.15	0.175	0.1753	0.0001	0.01307	0.00003
51.875	52.0000	7.211600E-02	8E-07	1.18	0.179	0.1790	0.0000	0.0393	0.0001	9.09	0.181	0.181	0.0001	0.01306	0.0001	14.80	0.181	0.1813	0.0001	0.01308	0.00003
				1.35	0.180	0.1800	0.0000	0.0393	0.0001	9.59	0.182	0.1818	0.0001	0.01306	0.0001	14.44	0.180	0.1803	0.0001	0.01304	0.00004

Tabela 26: Valores registados ao longo da primeira parte da atividade, com a segunda Gama Experimental.

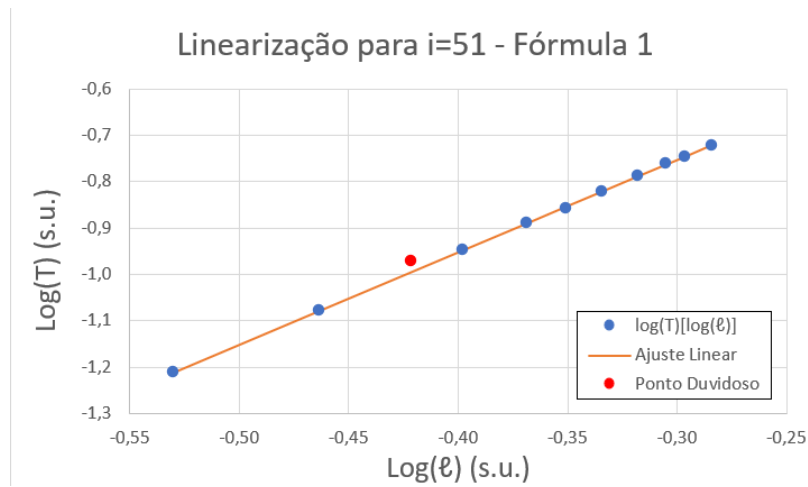


Gráfico 31: Gráfico de $\log(T)[\log(\ell)]$ para 50 oscilações, na segunda gama.

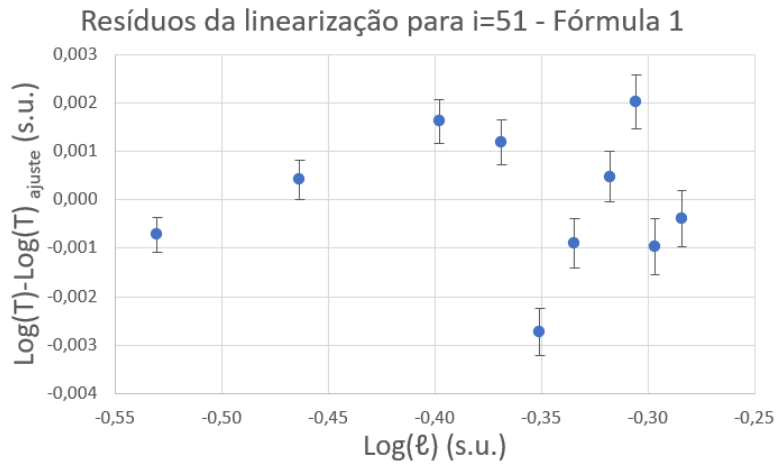


Gráfico 32: Resíduos da regressão linear do gráfico 31

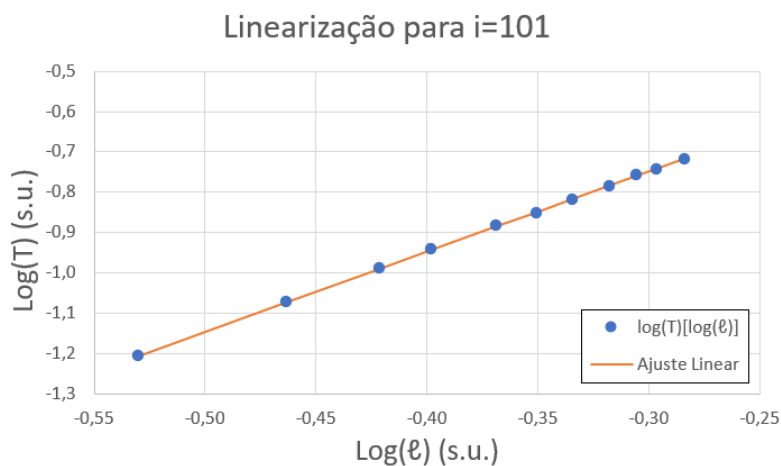


Gráfico 33: Gráfico de $\log(T)[\log(\ell)]$ para 50 oscilações, na segunda gama.

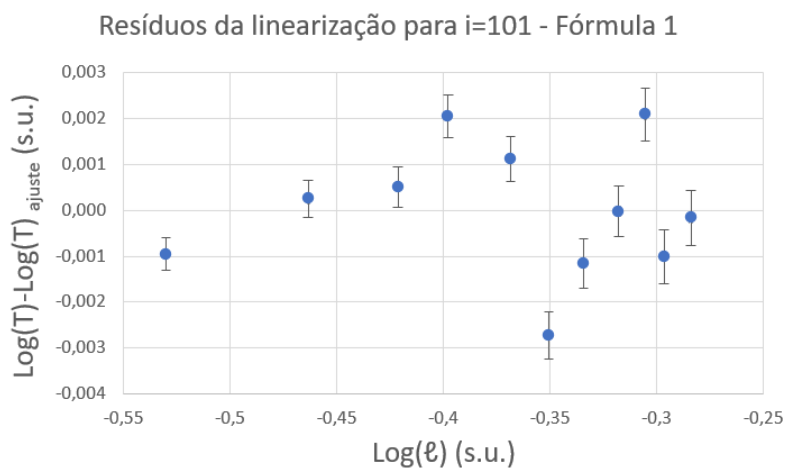


Gráfico 34: Resíduos da regressão linear do gráfico 10

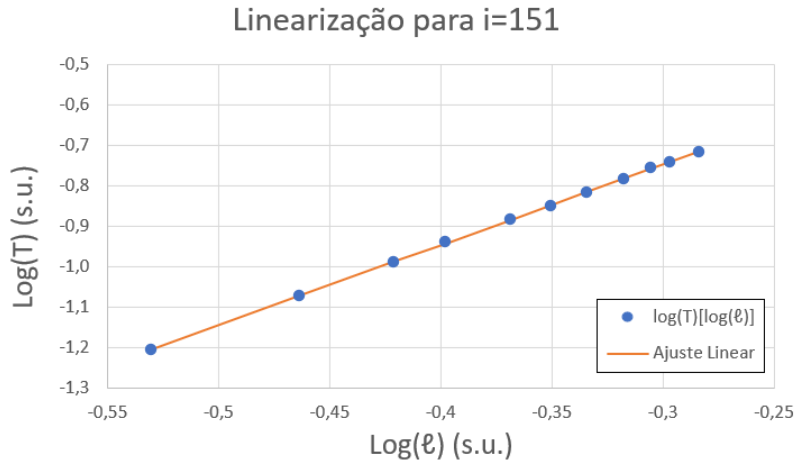


Gráfico 35: Gráfico de $\log(T)[\log(\ell)]$ para 50 oscilações, na segunda gama.

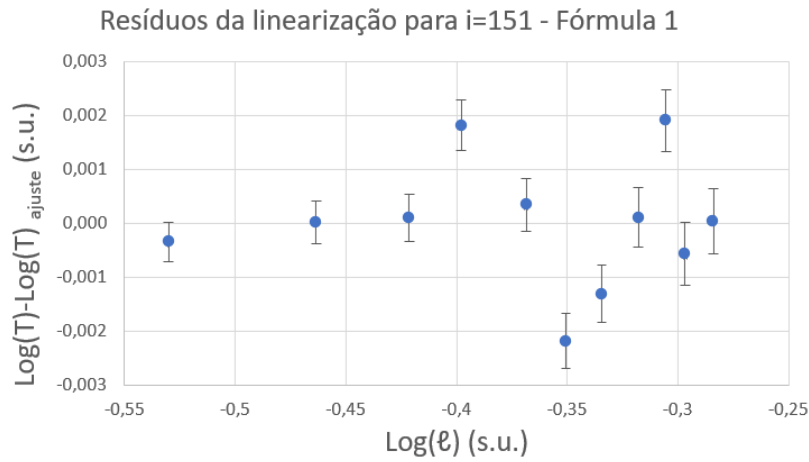


Gráfico 36: Resíduos da regressão linear do gráfico 35

ℓ (cm)	ℓ^4 (m)	$u(\ell^4)$ (m)	Média dos 3 i				Ajuste	Resíduos
			$T_{\text{médio}}$ (s)	$u(T_{\text{médio}})$ (s)	$(T_{\text{médio}})^2$ (s ²)	$u((T_{\text{médio}})^2)$ (s ²)		
18,00	1,049760000E-03	2E-12	0,0237	0,0001	0,000560	0,000003	0,000612	-0,000053
29,50	7,5733506E-03	9E-10	0,0619	0,0002	0,00383	0,00003	0,00388	-0,00005
34,40	1,4003409E-02	5E-09	0,0842	0,0003	0,00709	0,00004	0,00710	0,00000
37,90	2,063274E-02	2E-08	0,1025	0,0001	0,01051	0,00002	0,01042	0,00010
40,00	2,560000E-02	3E-08	0,1141	0,0004	0,0130	0,0001	0,0129	0,0001
42,80	3,35564E-02	8E-08	0,1303	0,0004	0,0170	0,0001	0,0169	0,0001
44,60	3,95676E-02	1E-07	0,1403	0,0005	0,0197	0,0001	0,0199	-0,0002
46,30	4,59541E-02	2E-07	0,1516	0,0004	0,0230	0,0001	0,0231	-0,0001
48,10	5,35279E-02	3E-07	0,1641	0,0005	0,0269	0,0001	0,0269	0,0000
49,50	6,00373E-02	4E-07	0,1744	0,0005	0,0304	0,0002	0,0301	0,0003
50,50	6,50378E-02	6E-07	0,1803	0,0006	0,0325	0,0002	0,0326	-0,0001
52,00	7,31162E-02	8E-07	0,1914	0,0006	0,0366	0,0002	0,0367	0,0000

Tabela 27: Valores usados no estudo do "ensaio" dos valores médios para a gama 2.

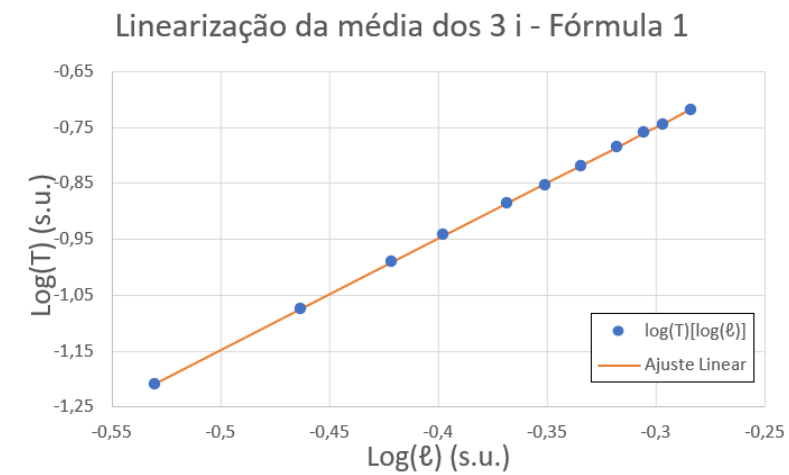


Gráfico 37: Gráfico de $\log(T)[\log(\ell)]$ para o "ensaio" dos valores médios da segunda gama.

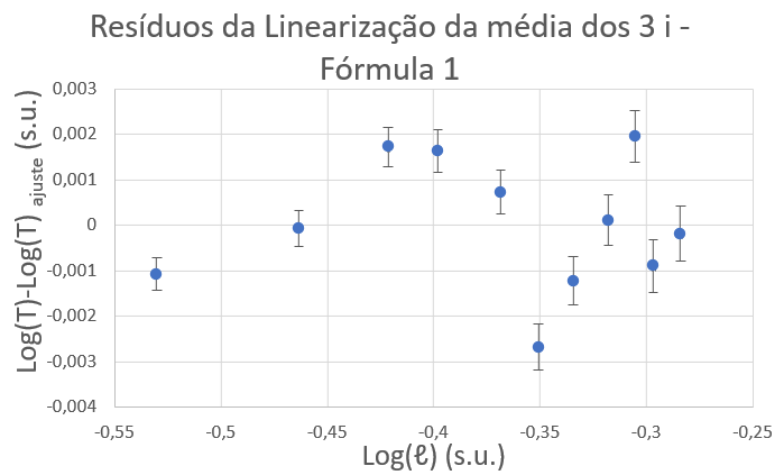


Gráfico 38: Resíduos da regressão linear do gráfico 37

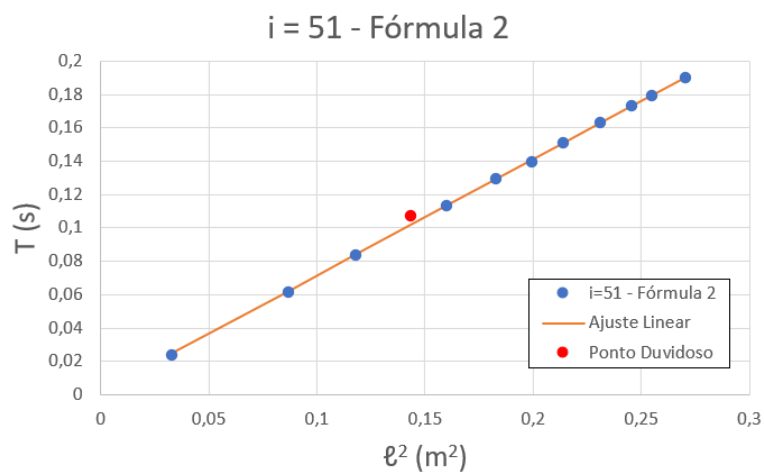


Gráfico 39: Regressão linear obtida para $i = 51$, com a fórmula 2 e com dados da gama 1.

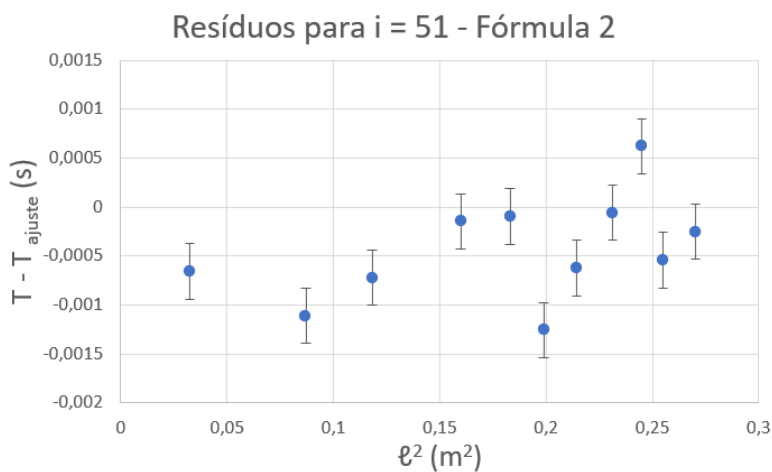


Gráfico 40: Resíduos da regressão linear presente no gráfico 39.

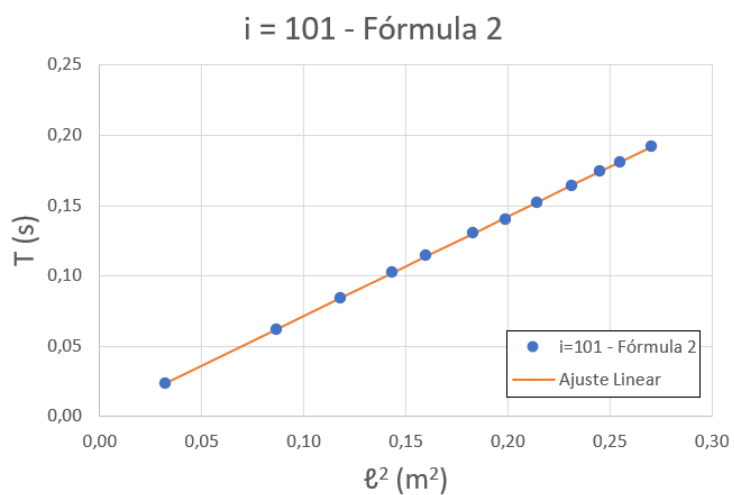


Gráfico 41: Regressão linear obtida para $i = 101$, com a fórmula 2 e com dados da gama 1.

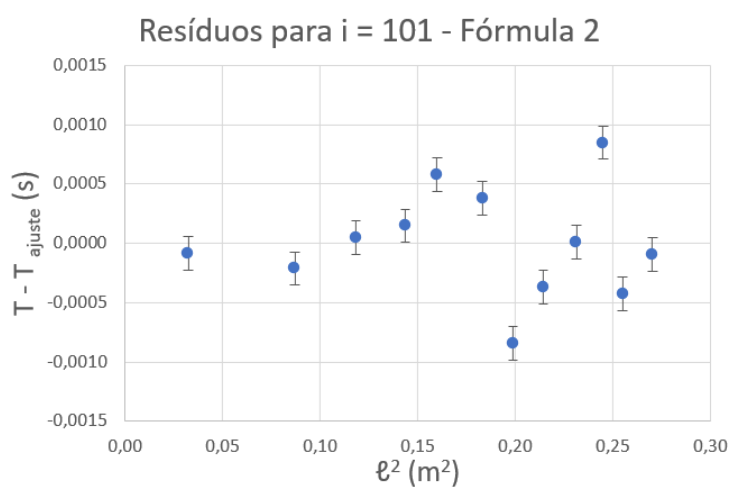


Gráfico 42: Resíduos da regressão linear presente no gráfico 41.

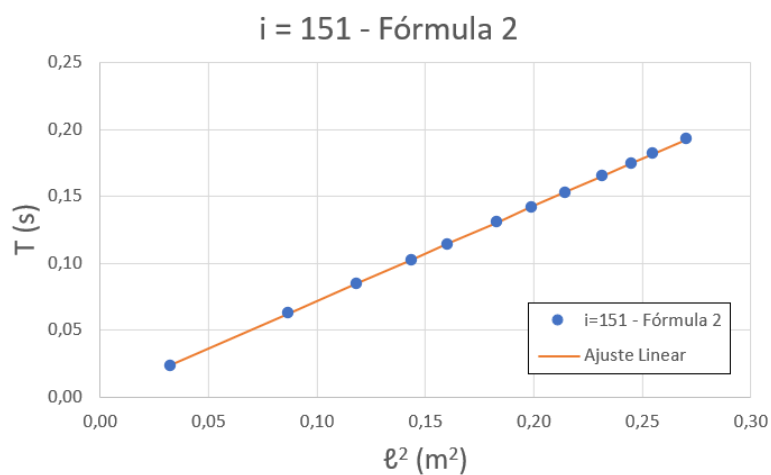


Gráfico 43: Regressão linear obtida para $i = 151$, com a fórmula 2 e com dados da gama 1.

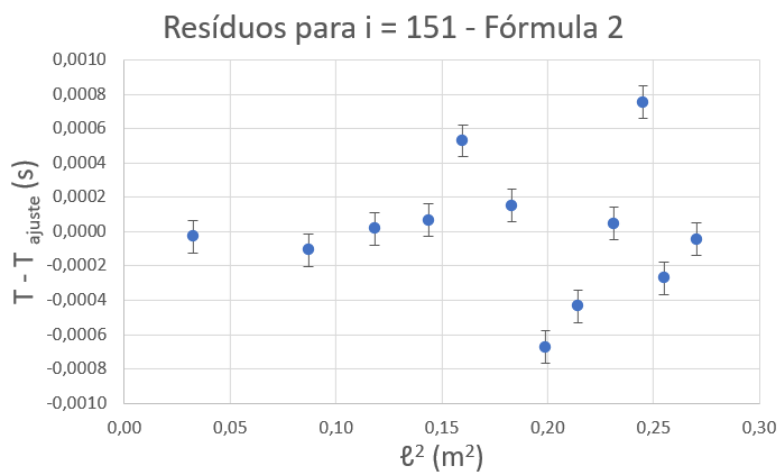


Gráfico 44: Resíduos da regressão linear presente no gráfico 43.

	Disco		Coroa			Prisma			Fio	
	(M ± 0,1) (g)	(D ± 0,5) (mm)	(M ± 0,1) (g)	(D1 ± 0,5) (mm)	(D2 ± 0,5) (mm)	(M ± 0,1) (g)	(h ± 0,5) (mm)	(b ± 0,5) (mm)	(ℓ ± 0,5) (mm)	(D ± 0,01) (mm)
1	807,3	200,0	487,1	197,0	179,0	683,5	199,0	28,0	1093,5	0,75
2	807,4	201,0	487,2	199,0	181,0	683,7	199,0	29,0	1098,0	0,78
3	807,4	200,5	487,1	200,0	180,0	683,6	200,0	28,0	1096,5	0,75
4	807,2	201,0	487,2	198,0	180,0	683,5	198,0	28,7	1097,5	0,77
5	807,2	200,0	487,1	197,0	179,0	683,5	199,0	28,3	1096,4	0,77
Média (Si)	0,80730	0,1990	0,48714	0,1982	0,1798	0,68356	0,1990	0,0284	1,0964	0,000765
u (Si)	0,00004	0,0003	0,00002	0,0005	0,0003	0,00004	0,0003	0,0002	0,0007	0,000005

Tabela 28: Valores medidos na segunda parte da atividade.

	l sistema	$\theta_{m\acute{e}x}$ (°)	(t ± 0,1) (s)	(T ± 0,01) (s)	T médio (s)	u(T médio)	τ^2 (s ²)	u(τ^2) (s ²)
A	0,00404	90	71,1	7,11	7,115	0,004	50,62	0,06
		180	71,2	7,12				
		270	71,2	7,12				
B	0,00628	90	88,1	8,81	8,83	0,01	78,0	0,2
		180	88,6	8,86				
		270	88,3	8,83				
C	0,00836	90	101,9	10,19	10,199	0,004	104,013	0,07
		180	102,0	10,20				
		270	102,1	10,21				
D	0,01064	90	114,8	11,48	11,464	0,007	131,4	0,2
		180	114,5	11,45				
		270	114,6	11,46				

Tabela 29: Valores registados na segunda parte da atividade.

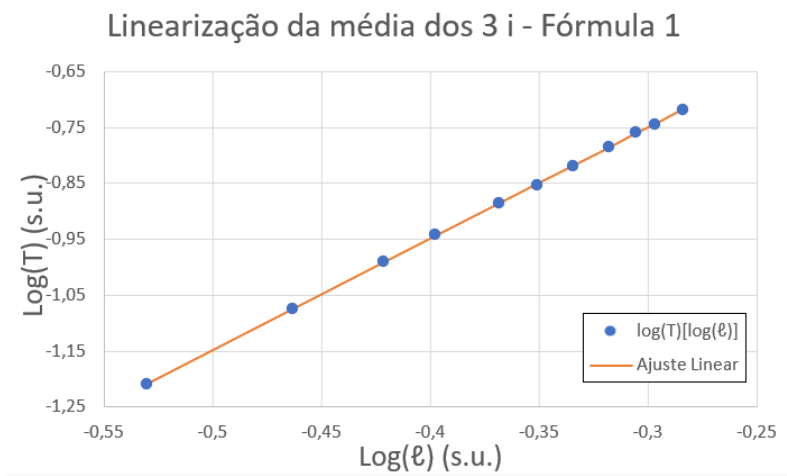


Gráfico 45: Gráfico de $\log(I)[\log(T)]$ obtido na segunda parte da atividade.

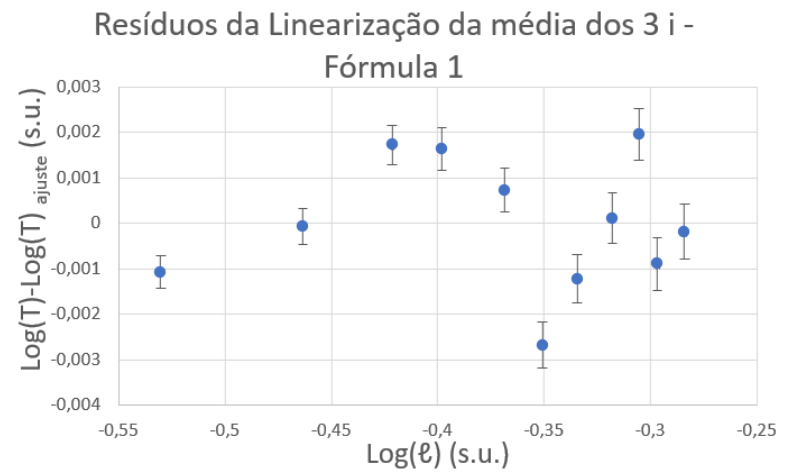


Gráfico 46: Resíduos da regressão linear no gráfico 45.