

Determinação do módulo de Young de um material pelo método de vibrações de uma barra encastrada e do módulo de rigidez pelo pêndulo de torção

Laboratórios de Física II

Francisco Santos
 Faculdade de Ciências da Universidade do Porto
 Departamento de Física e Astronomia

Turma: PL6
 Grupo: 3
 Parceiros: Bruna Caetano, Nicolau Pereira, Tomás Santos
 Professora: Manuela Lopes dos Santos

Resumo

Nesta atividade foram realizados 2 estudos [1]. O primeiro consiste na determinação do módulo de Young do material de uma barra, através de vibrações da barra encastrada. O segundo resume-se na determinação do módulo de rigidez do material do fio de um pêndulo de torção, bem como na determinação de momentos de inércia de diversas peças suspensas no pêndulo.

1 Introdução

1.1 Objetivos

- Determinação do módulo de Young, E , do material de uma barra, usando o método de vibrações da barra encastrada.
- Cálculo dos momentos de inércia de peças suspensas num pêndulo de torção.
- Determinação do módulo de rigidez do material do fio de suspensão

1.2 Introdução Teórica

1.2.1 Barra Encastrada - módulo de Young

- Para determinar o módulo de Young E do material de uma barra, vamos recorrer à seguinte equação:

$$\bar{T}^2 = 5,029 \frac{\pi^2 \rho}{E D^2} l^4 \quad (1)$$

referência
de duvidas?

onde \bar{T} é o valor médio do período de oscilação para um dado l (comprimento da barra), D é o diâmetro da barra e ρ é a densidade do material que constitui a barra.

1.2.2 Pêndulo de Torção - Momento de Inércia

→ referência?

- Nesta atividade, foram utilizados 3 corpos: um Disco, uma coroa circular e um prisma triangular. Os momentos de inércia dos respetivos objetos são:

I. Momento de Inércia do disco relativamente ao seu eixo, onde D_d é o diâmetro do disco e m_d a sua massa (9):

$$I_D = \frac{m_d D_d^2}{8} \quad (2)$$

II. Momento de Inércia da coroa circular relativamente ao seu eixo, onde $D_{cc\ interior}$ e $D_{cc\ exterior}$ são, respetivamente, o diâmetro interno e externo da coroa, sendo m_{cc} a sua massa (10):

$$I_{cc} = \frac{m_{cc}}{8} (D_{cc\ interior}^2 + D_{cc\ exterior}^2) \quad (3)$$

III. Momento de Inércia do prisma triangular quando este roda em torno do seu eixo menor, onde $b_{maior\ prisma}$ é o lado maior do prisma (figura 11) e m_p é a sua massa:

$$I_{prisma\ menor} = \frac{m_p b_{maior\ prisma}^2}{12} \quad (4)$$

IV. Momento de Inércia do prisma triangular quando este roda em torno do seu eixo maior, onde $b_{menor\ prisma}$ é o lado menor do prisma, h é a altura da base (figura 12) e m_p é a sua massa:

$$I_{prisma\ maior} = \frac{m_p (b_{menor\ prisma}^2 + 2h^2)}{24} \quad (5)$$

- O momento de inércia de um sistema, constituído por diferentes corpos, pode ser calculado pela soma dos momentos de inércia de cada um desses corpos.

1.2.3 Pêndulo de Torção - Módulo de rigidez

- Para determinar o módulo de rigidez do material de um fio em suspensão, μ , utilizou-se a seguinte equação:

$$I = \frac{D^4 \mu}{128\pi l} \bar{T}^2 \quad \text{referência?} \quad (6)$$

onde I é o momento de inércia, D é o diâmetro do fio, l o comprimento e \bar{T} o tempo médio de uma oscilação completa.

2 Método Experimental

2.1 Barra Encastrada

- Primeiramente, foi escolhida uma barra com um comprimento suficiente, medido por uma fita métrica, de modo a garantir uma boa gama de valores em função da distância. Foi medido, com o micrómetro (figura 1), o diâmetro D da barra em diversos pontos, encontrando o valor médio. Com a balança digital foi medida a massa (figura 2), calculando assim a densidade da barra, recorrendo à expressão $\rho = mV$, onde $V = L\pi(D/2)^2$.

(Este tipo de foto: não se usam num artigo)



Figura 1: Micrómetro (incerteza de 0,005mm)



Figura 2: Balança digital (incerteza de 0,01g)

- Assim, foi realizada a montagem da figura 3. Utilizámos um contador de impulsos e de tempos (figura 5) para medir o período das oscilações e também um sistema optoeletrónico "fotogate", constituído por uma lâmpada e um fotodetector.

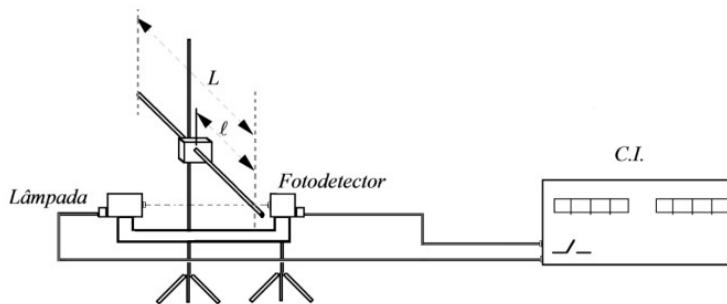


Figura 3: Esquema da montagem experimental



Figura 4: Montagem experimental



Figura 5: Contador de Impulsos e Tempos (C.I.) (incerteza de 0,01s)

- Para determinar o l (comprimento da barra em vibração), descobrimos o l_{\min} e o l_{\max} onde se garantia as 151 oscilações. Em seguida, foi calculada a gama para l , através da expressão $l_d = \frac{l_{\max} - l_{\min}}{n_{ensaios}}$ de modo a garantir um espaçamento homogéneo de valores.

- Para cada valor de l , foi retirado um número de impulsos de $i=51$, 101 e 151 , que corresponde a 25 , 50 e 75 oscilações, respetivamente. O número de impulsos é ímpar para que a barra normalize o seu movimento após o primeiro impulso. A contagem do tempo efetuada pelo aparelho começa na 1^a interrupção do circuito óptico e acaba quando se atinguirem os impulsos pretendidos. Todos os dados foram registados na tabela 32.
- Para realizar cada medição, colocámos a barra próxima do detetor e tentámos garantir que a sombra estava alinhada com o mesmo, como podemos observar na figura 6. Após isso, fornecemos oscilações verticais à barra, tentando evitar a ocorrência de modos transversais. Para isso, utilizámos o método demonstrado na figura 7, onde deslizávamos a barra 2 para trás (na direção das setas), de modo a promover a oscilação da barra 1 paralela ao fotogate.

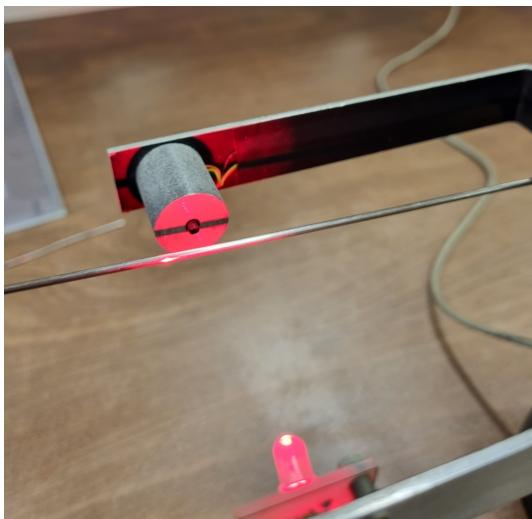


Figura 6: Colocação da barra

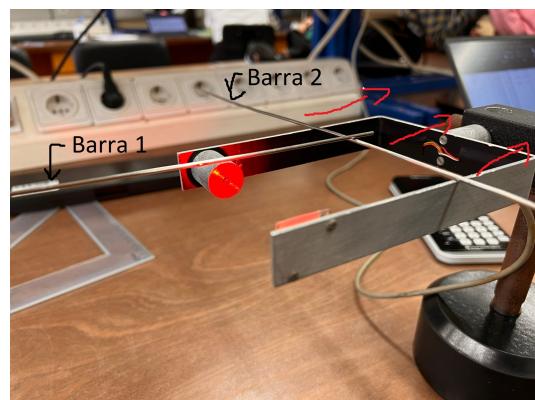


Figura 7: Método para evitar modos transversais

2.2 Pêndulo de Torção

- Para a realização desta experiência, utilizou-se um fio suspenso, onde na extremidade livre se fixaram vários corpos (figura 8): disco (figura 9), coroa cilíndrica (figura 10) e prisma (figura 11 e 12), medindo a massa de cada um deles. Foi medido o comprimento l do fio suspenso e determinado o seu diâmetro D através da medição em vários pontos com o micrómetro (figura 1) e calculando a média.



Figura 8: Montagem experimental



Figura 9: Disco (diâmetro = 20,00cm)



Figura 10: Coroa (diâmetro interior = 17,92cm e diâmetro exterior = 20,05cm)

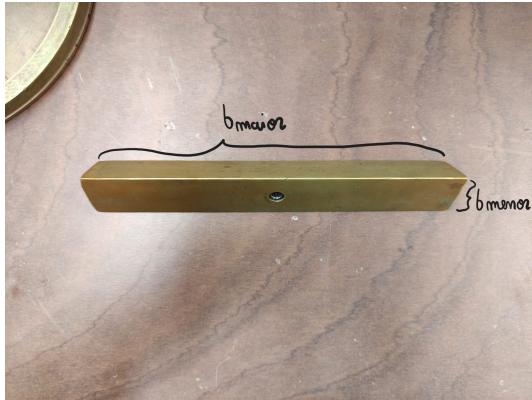


Figura 11: Prisma ($b_{maior} = 19,90\text{cm}$ e $b_{menor} = 2,90\text{cm}$)

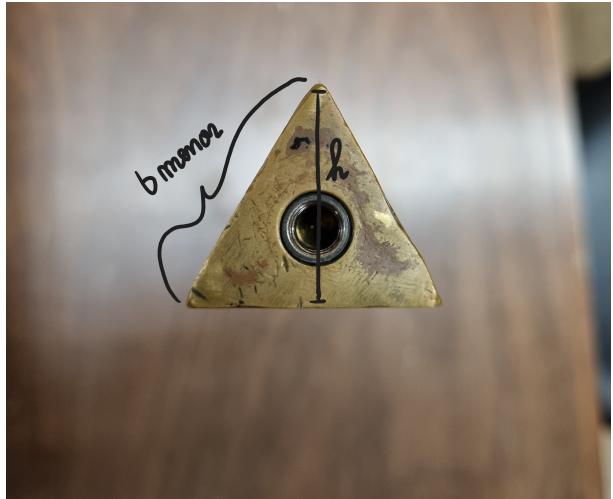


Figura 12: Prisma ($h = 2,30\text{cm}$ e $b_{menor} = 2,90\text{cm}$)

- Assim, foi suspenso no fio o Disco+prisma com o eixo maior vertical e após isso com o eixo maior horizontal. Também foi suspenso Disco + coroa cilíndrica e por último Disco + coroa cilíndrica + prisma com o eixo maior vertical.
- Para cada um dos casos descritos anteriormente, determinou-se o tempo correspondente a 10 oscilações completas, com recurso ao cronómetro de um smartphone, para valores iniciais da amplitude, θ_{max} , de aproximadamente 90° , 180° e 270° , tentando garantir um movimento oscilatório exclusivamente de torção. Os dados dos tempos foram registados na Tabela 36.

Remeta p/ apêndice toda a análise inconveniente

3 Análise de Dados

3.1 Barra Encastrada

- O diâmetro da barra utilizada é de $\bar{D} = (0,00194 \pm 0,00001) m$, calculado pela média dos valores medidos ao longo da barra, presentes na figura 31. A barra tem $L = (0,8950 \pm 0,0005) m$ de comprimento total e uma massa de $m = (0,00216 \pm 0,00001) kg$. Assim foi calculado o volume da barra, considerando-a um cilindro, $V = L\pi(D/2)^2 = (2,64 \pm 0,03) \times 10^{-6} m^3$ e posteriormente foi obtido a densidade da barra $\rho = m/V = (8,18 \pm 0,08) \times 10^3 kgm^{-3}$. A incerteza de \bar{D} foi calculada através da fórmula 8, $u(V)$ pela fórmula 9 e $u(\rho)$ pela fórmula 10.
- Foi calculado o tempo médio de cada oscilação, T , que consistia nos valores do tempo t obtidos pelo contador de impulsos a dividir pelo número de oscilações n correspondente, $T = \frac{t}{n}$, $n = \frac{\text{impulsos}-1}{2}$.
- Após isso, foi realizado um gráfico de T (s) em função de l^2 (m^2) (imagem 13), uma vez que pretendemos analisar a expressão $T^2 = 5,029 \frac{\pi^2 \rho}{ED^2} l^4$ ($\Rightarrow T = \sqrt{5,029 \frac{\pi^2 \rho}{ED^2}} l^2$). A gama selecionada foi de l^2 entre 0,0380m e 0,422m e de T entre 0,003s e 0,301s. Os dados experimentais estão presentes na figura 32.

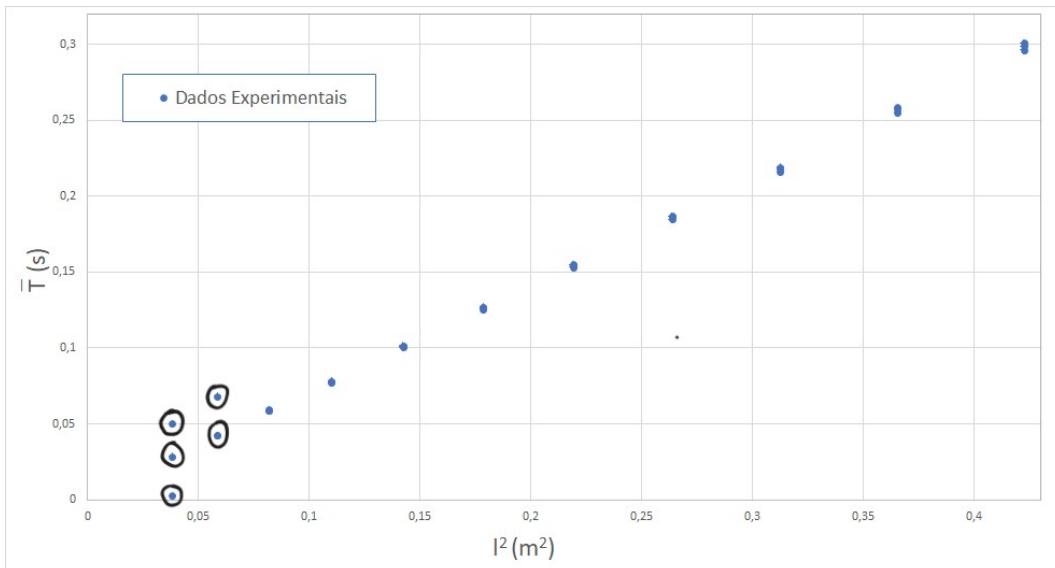


Figura 13: Gráfico de T (s) em função de l^2 (m^2)

- No gráfico 13, podemos observar para cada valor de l^2 , 3 pontos para o T , correspondentes aos 3 valores de oscilações. Para realizar a análise gráfica, poderia dividir os dados experimentais em 3, para cada oscilação, contudo, não o fiz, uma vez que para cada valor de l^2 , a incerteza entre os pontos de T é muito pequena, estando estes quase sobrepostos, exceto nos pontos assinalados, onde apesar de aparecerem ter um bom valor médio, apresentam uma grande incerteza. Esses pontos foram considerados duvidosos e retirados da análise, que foi feita utilizando o valor médio de T para cada l^2 . X
- Para verificar a relação $T \propto l^2$, expressa em $T = \sqrt{5,029 \frac{\pi^2 \rho}{ED^2}} l^2$, representei $\log_{10}(T)$ em função de $\log_{10}(l)$:

Vários gráficos com tamanho de texto demarcado pequeno!

Gráfico de
Resíduos de
barnas exp.
? inc.

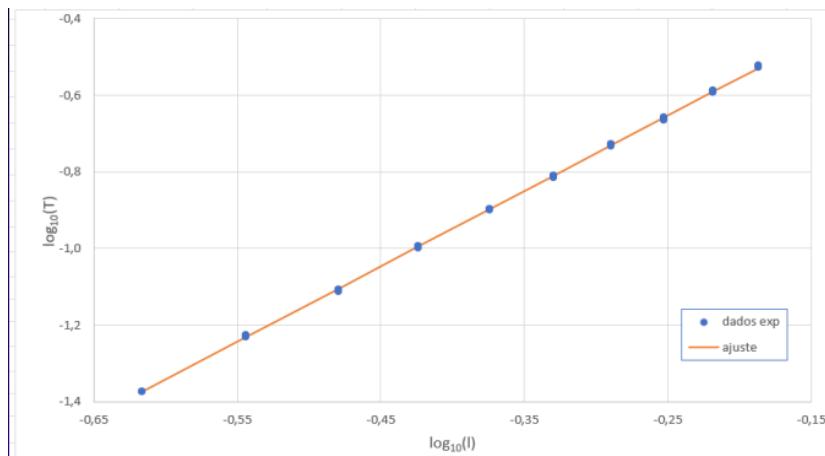


Figura 14: Gráfico de $\log_{10}(T)$ ($\log_{10}(l)$)

? Não diz aqui

Tabela mal
estruturada

é "Tabela"

m	1,974	-0,159	b	
$\sigma(m)$	0,008	0,003	$\sigma(b)$	
r^2	0,99987	0,003	$\sigma(y)$	$\sigma(y_{aj})$

Figura 15: Matriz do Ajuste $\log_{10}(T))(\log_{10}(l))$

- Através do gráfico 14 e da matriz de ajuste representado na tabela 15, verificamos que $m \approx 2$, o que permite afirmar que $T \propto l^2$.
- Posteriormente, para cada ensaio de l^2 , foi calculado o valor médio do tempo de uma oscilação \bar{T} , pelas razões indicadas a cima, sendo representado na tabela 32.
- Foi então feito o ajuste $\bar{T}(l^2)$, presente no gráfico 16 onde l^2 varia entre $0,0818 \text{ m}^2$ e $0,423 \text{ m}^2$ e \bar{T} varia entre $0,059 \text{ s}$ e $0,299 \text{ s}$:

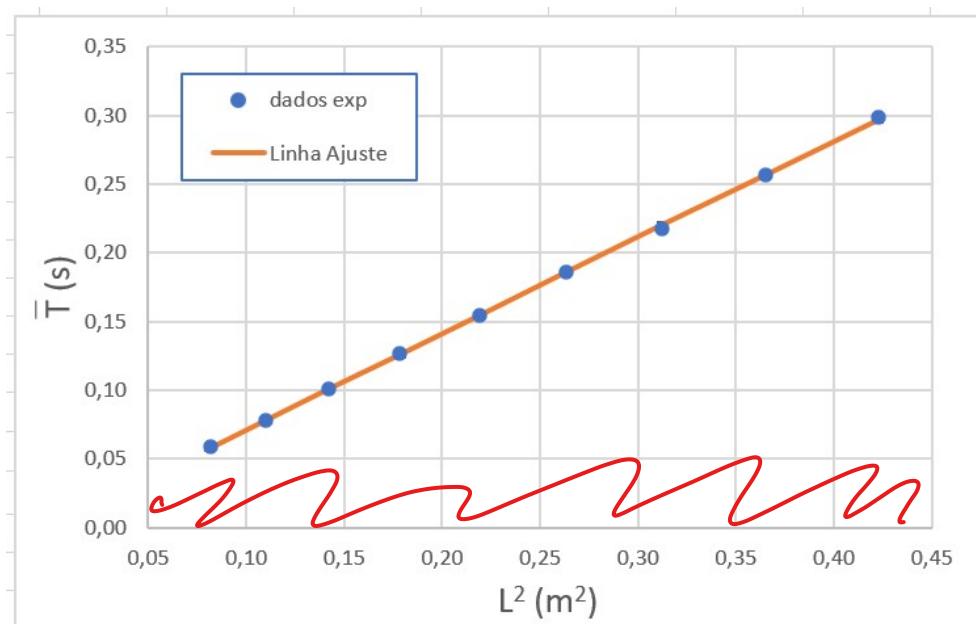


Figura 16: Gráfico de \bar{T} (s) em função de l^2 (m^2) com respetivo ajuste

m	0,701	0,0011	b
$\sigma(m)$	0,003	0,0008	$\sigma(b)$
r^2	0,9998	0,001	$\sigma_{aj}(y)$

Figura 17: Matriz do 1º ajuste

- Podemos observar no gráfico 16 que os dados experimentais seguem uma tendência linear sem grandes desvios, tal como pretendido. As barras de erro, apesar de estarem presentes, não são visíveis. Obteve-se o ajuste linear $\bar{T} = m l^2 + b$, onde $m = \sqrt{5,029 \frac{\pi^2 \rho}{ED^2}}$, apresentando os parâmetros $m = 0,701 \pm 0,003$ e $b = 0,0011 \pm 0,0008$.
- Através dos valores obtidos, foi possível determinar o valor do módulo de Young, $E = (2,20 \pm 0,03) \times 10^{11}$ Pa, como era pretendido, usando a expressão $E = 5,029 \frac{\pi^2 \rho}{m^2 D^2}$, onde a incerteza foi calculada pela fórmula 12.
- O valor obtido para o módulo de Young apresenta uma incerteza percentual de 1%, com um erro percentual de 10%, por excesso, em relação ao valor de referência $E_{ref} = 200 Gpa$, considerando que a barra é de aço inoxidável, devido à sua densidade calculada anteriormente. O valor de referência foi retirado do site www.gelsonluz.com, acedido no dia 14/03/2023.

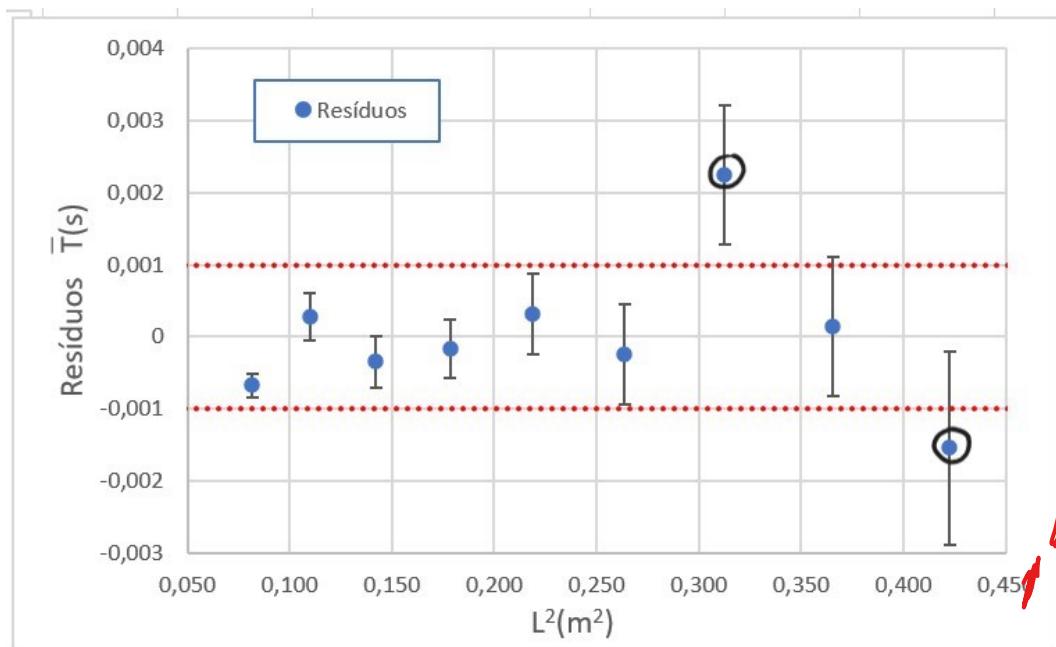


Figura 19: Gráfico de Resíduos de $\bar{T}(l^2)$

- As barras de erro do gráfico 19, foram determinadas através da incerteza de \bar{T} , calculada a partir da fórmula 11.
- No gráfico 19 de resíduos, podemos observar uma tendência nos últimos 3 pontos, sendo que dois deles foram considerados duvidosos, uma vez que têm um valor superior ao desvio padrão. (pontos assinalados no gráfico). Assim, foi realizado um novo ajuste, retirando esses pontos:

se o problema é a "tendência",
então devemos suprimir os
3 do ajuste!

$u(y_{aj})$	0,002
-------------	-------

Figura 18: Incerteza do 1º Ajuste

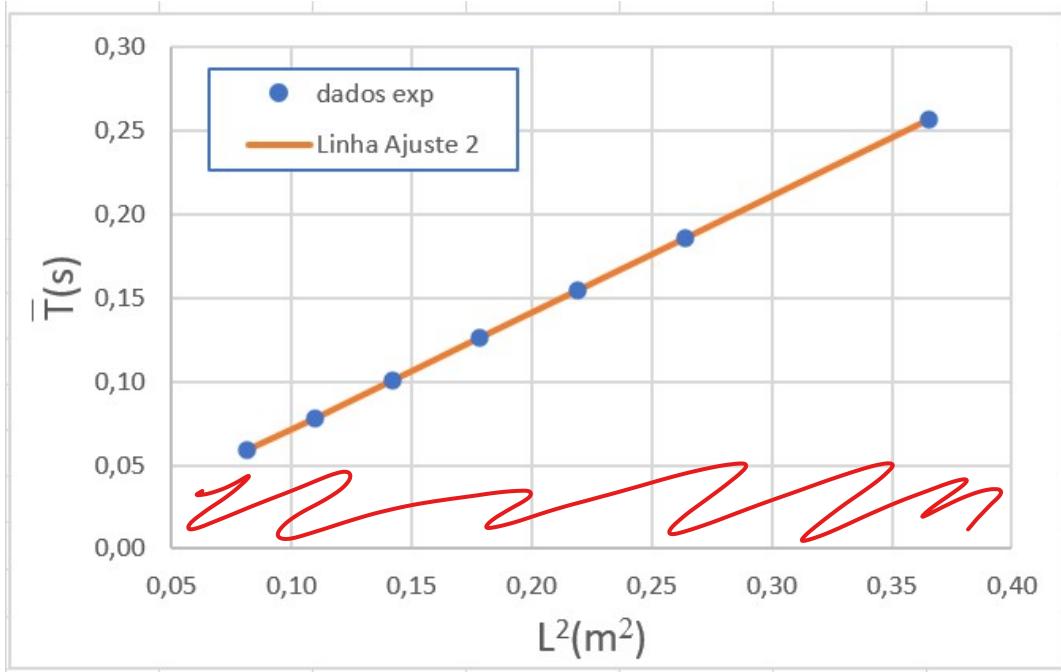


Figura 20: Gráfico de \bar{T} (s) em função de l^2 (m^2) com o novo ajuste

m	0,699	0,0015	b
$\sigma(m)$	0,002	0,0003	$\sigma(b)$
r^2	0,99998	0,0004	$\sigma_{aj}(y)$

Figura 21: Matriz do 2º ajuste

$u(y_{aj})$	0,0007
-------------	--------

Figura 22: Incerteza do
2º Ajuste

- Podemos observar no gráfico 20 que os dados experimentais seguem uma tendência linear sem grandes desvios, tal como pretendido. As barras de erro, apesar de estarem presentes, não são visíveis. Obteve-se o ajuste linear $\bar{T} = m l^2 + b$, onde $m = \sqrt{5,029 \frac{\pi^2 \rho}{ED^2}}$, apresentando os parâmetros $m = 0,699 \pm 0,002$ e $b = 0,0015 \pm 0,0003$.
- Através dos valores obtidos, foi possível determinar o valor do módulo de Young, $E = (2,21 \pm 0,01) \times 10^{11}$ Pa, como era pretendido, usando a expressão $E = 5,029 \frac{\pi^2 \rho}{m^2 D^2}$, onde a incerteza foi calculada pela fórmula 12.
- O valor obtido para o módulo de Young apresenta uma incerteza percentual de 0,5%, com um erro percentual de 11%, por excesso, em relação ao valor de referência $E_{ref} = 200 GPa$, considerando que a barra é de aço inoxidável, devido à sua densidade, calculada anteriormente. O valor de referência foi retirado do site www.gelsonluz.com, acedido no dia 14/03/2023.

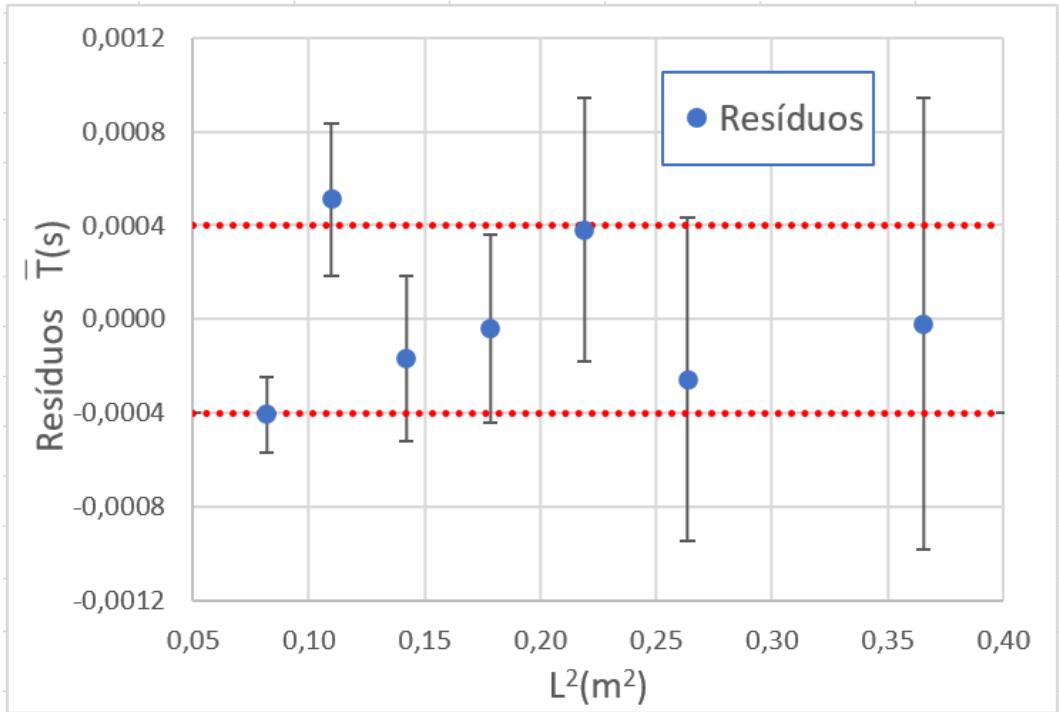


Figura 23: Novo gráfico de Resíduos de $\bar{T}(l^2)$

- No gráfico 23 observamos que todos os resíduos estão distribuídos de forma aleatória, com valores, em geral, próximos ao desvio padrão, o que indica um bom ajuste.
- As barras de erro do gráfico 23 foram determinadas através da incerteza de \bar{T} , calculada a partir da fórmula 11.

3.2 Pêndulo de Torção

- Primeiramente, foi calculado o diâmetro médio do fio de suspensão, $\bar{D} = (0,000868 \pm 0,000004)\text{m}$, a partir dos valores do diâmetro medidos ao longo deste, registados na tabela 33. Também medimos o seu comprimento com uma fita métrica, $L = (1,0930 \pm 0,005)\text{m}$.
- Posteriormente, foram medidos (tabela 35) e pesados (tabela 34) os diferentes objetos utilizados no estudo, com o objetivo de calcular o seu momento de inércia, utilizando as expressões enunciadas na introdução e obtendo os seguintes valores:
 - Momento de Inércia do Disco: $I_d = (0,00404 \pm 0,00002) \text{ kg m}^2$
 - Momento de Inércia da Coroa Circular: $I_{cc} = (0,00431 \pm 0,00002) \text{ kg m}^2$
 - Momento de Inércia do prisma quando este roda em torno do seu eixo maior: $I_{\text{prisma maior}} = (0,00226 \pm 0,00001) \text{ kg m}^2$
 - Momento de Inércia do prisma quando este roda em torno do seu eixo menor: $I_{\text{prisma menor}} = (0,000054 \pm 0,000002) \text{ kg m}^2$
- As incertezas para cada momento de Inércia foram calculadas usando as expressões 13, 14, 15 e 16.

- Assim, foi realizada a tabela 36, com os valores do momento de Inércia para os casos Disco+prisma com o eixo maior vertical e depois com o eixo maior horizontal, Disco + coroa cilíndrica e Disco + coroa cilíndrica + prisma com o eixo maior vertical, em função do tempo correspondente a 10 oscilações completas, para valores de amplitude de aproximadamente 90°, 180° e 270°. Após isso foi calculado o tempo médio de cada oscilação para cada conjunto (valores na tabela referida).
- Para verificar a proporcionalidade entre I e \bar{T} , foi realizado o gráfico de $\log_{10}(I)$ em função de $\log_{10}(\bar{T})$:

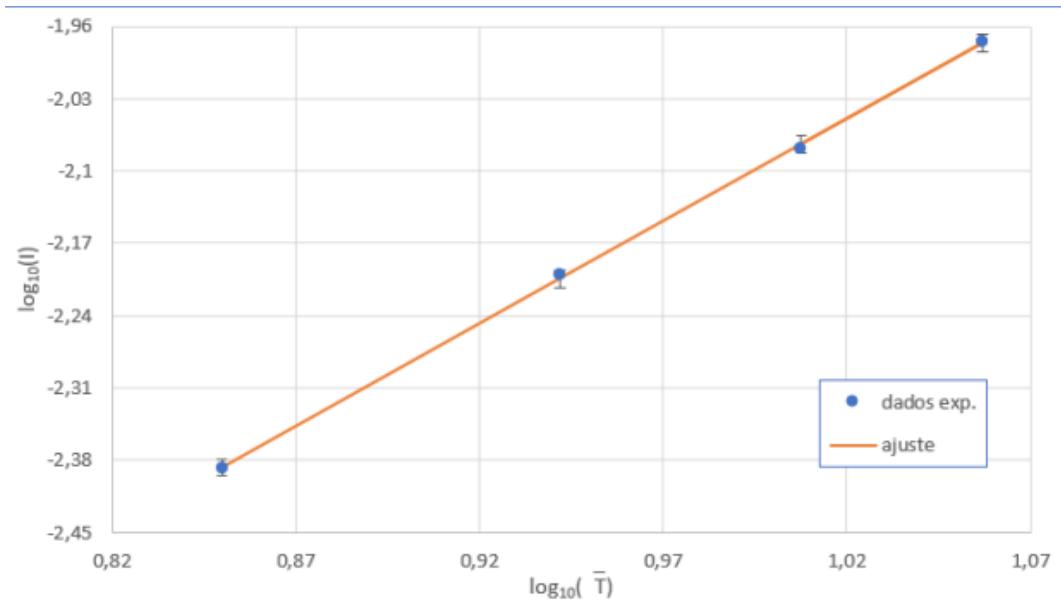


Figura 24: Gráfico de $\log_{10}(I)(\log_{10}(\bar{T}))$

Gráfico de
resíduos?

m	1,99	-4,08	b
σ_m	0,03	0,03	σ_b
r^2	0,9996	0,004	$\sigma_{(y)}$

Figura 25: Matriz do Ajuste do gráfico $\log_{10}(I)(\log_{10}(\bar{T}))$

- Através do gráfico 24 e da matriz do ajuste, verificamos que $m \approx 2$, o que permite afirmar que $I \propto \bar{T}^2$, tal como era esperado pela expressão $I = \frac{D^4 \mu}{128 \pi l} \bar{T}^2$.
- Foi então realizada a representação gráfica de $I(\bar{T}^2)$, utilizando como gama experimental, I entre 0,00409 kg m² e 0,01061 kg m² e \bar{T}^2 entre 50,12 s² e 130,0 s²:

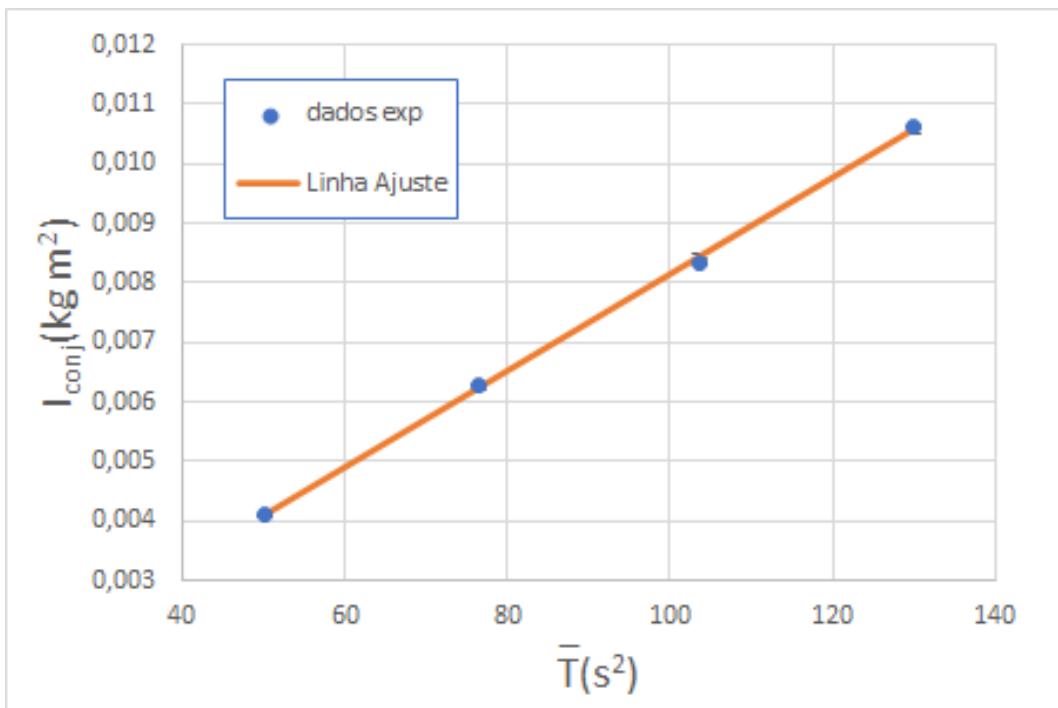
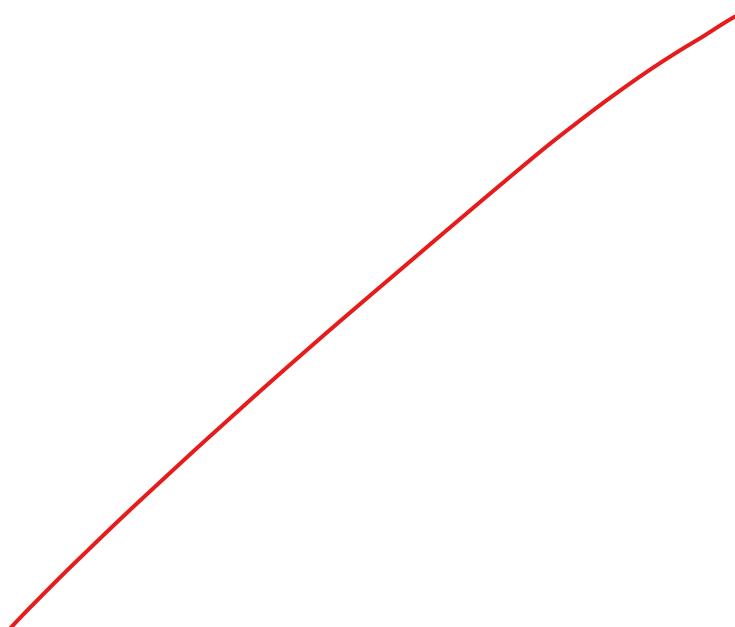


Figura 26: Gráfico de $I(\bar{T}^2)$

m	8,1E-05	4E-05	b	$u(I)_{aj}$	1E-04
σ_m	1E-06	0,0001	σ_b		
r^2	0,9995	7E-05	$\sigma_{I_{aj}}$		

Figura 27: Matriz do Ajuste do gráfico de $I(\bar{T}^2)$

- No gráfico 26, os dados experimentais seguem uma tendência linear sem grandes desvios. As barras de incerteza não estão visíveis, uma vez que são muito pequenas comparadas com as unidades do gráfico.



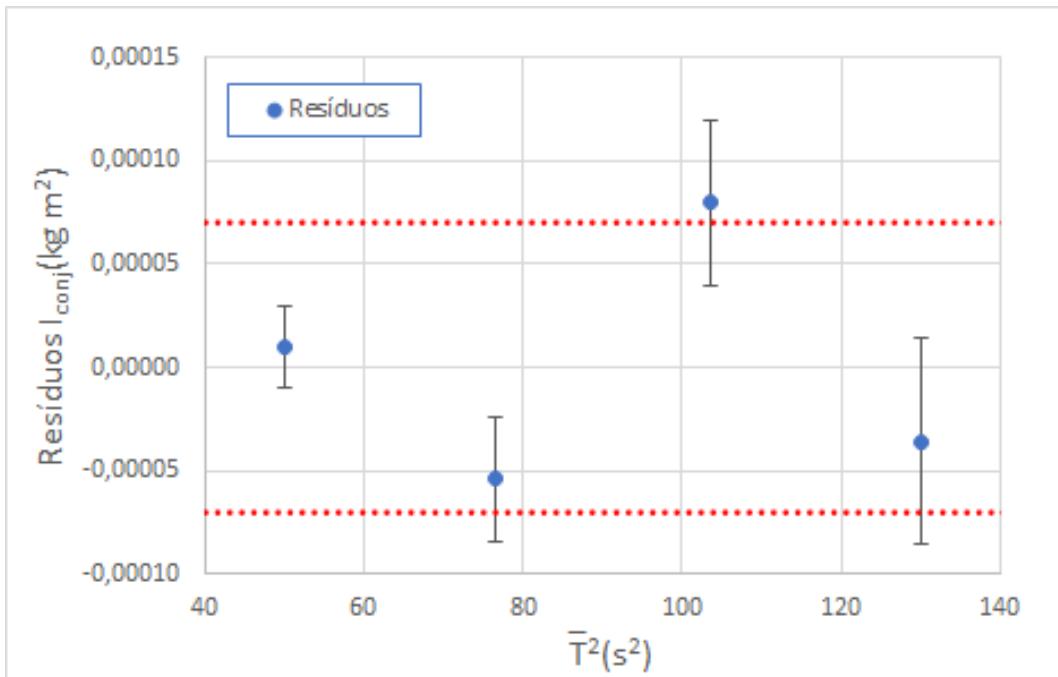


Figura 28: Gráfico de resíduos de $I(\bar{T}^2)$

- Através do gráfico de resíduos, conseguimos observar que estes estão distribuídos de forma aleatória, e que os seus valores são bastante reduzidos. Concluímos que o ajuste é adequado aos dados experimentais.
- Por último, podemos calcular a constante de rigidez do material, através do ajuste liner $I = m \bar{T}^2 + b$, onde $m = \frac{D^4 \mu}{128\pi l}$, utilizando $m = (8,1 \pm 0,1) \times 10^{-5}$:

$$\mu = \frac{128\pi l}{D^4} m = 6,3 \times 10^{10} Pa = 63 GPa \quad (7)$$

- A incerteza de μ foi calculada a partir da expressão 17, obtendo-se o valor final de $\mu = (63 \pm 2) GPa$, com uma incerteza percentual de 3% e um erro percentual de 21%, tendo como valor de referência o módulo de rigidez do fio de piano $\mu = 79,3 GPa$. Este valor foi retirado do site www.fusehatsu.com, acedido no dia 14/03/2023.

4 Resultados e Conclusão

4.1 Resultados finais

4.1.1 Módulo de Young

E (Pa)	2,21E+11
u(E) (Pa)	1E+09
u,(E) (%)	0,5%
erro %	11%
E _{ref}	200 Gpa

Figura 29: Módulo de Young para o 2º ajuste

4.1.2 Módulo de rigidez

μ (Pa)	6,3E+10
$u(\mu)$ (Pa)	2E+09
$u(\mu) \%$	3%
erro %	21%
μ_{ref}	7,93E+10

Figura 30: Módulo de rigidez

4.2 Conclusão

- Na primeira parte da experiência, correspondente à barra encastrada, verificou-se a relação de proporcionalidade $\bar{T} \propto l^2$, observada no gráfico de $\log_{10}(T)$ em função de $\log_{10}(l^2)$, onde se obteve um declive de $(1,974 \pm 0,008)$ com uma incerteza percentual de $0,4\%$. Através da análise gráfica $\bar{T}(l^2)$, foi determinado o valor para o módulo de Young, apresentado na tabela 29, $E = (2,21 \pm 0,01) \times 10^{11}$ Pa com uma incerteza percentual de $0,5\%$ e um erro percentual de 11% por excesso. O erro foi calculado tendo como referência o valor para o aço de $E_{ref} = 200$ GPa, obtido através do site www.gclsonline.com, acedido no dia 14/03/2022. Considero o material como sendo aço devido ao valor obtido para a densidade de $\rho = (8,18 \pm 0,08) \times 10^3$ Kgm $^{-3}$, com uma incerteza percentual de 1% e um erro percentual de 4% por excesso, tomando como referência o valor encontrado no site indicado a cima, $\rho_{ref} = 7860$ Kgm $^{-3}$.
- Na segunda parte, relativo ao pêndulo de torção, verificou-se a relação de proporcionalidade $I \propto \bar{T}^2$, observada no gráfico de $\log_{10}(I)$ em função de $\log_{10}(\bar{T}^2)$, onde se obteve um declive de $(1,99 \pm 0,03)$ com uma incerteza percentual de 2% . Através da análise gráfica $I(\bar{T}^2)$, foi determinado o valor para o módulo de rigidez do material do fio de suspensão de $\mu = (6,3 \pm 0,2) \times 10^{10}$ Pa, com uma incerteza percentual de 3% e um erro percentual de 21% por defeito, em relação ao valor de referência de um fio de aço de um piano $\mu = 7,93 \times 10^{10}$ Pa, retirado do site www.funchatu.com, acedido no dia 15/03/2023. Podemos concluir que o valor obtido apresenta um erro percentual bastante elevado, sendo um valor de baixa confiança. Uma justificação possível poderá ser a presença de impurezas e defeitos no fio. Uma maneira de diminuir o erro obtido poderia passar por realizar mais medições, utilizando um método mais eficaz de medir o tempo e o ângulo das oscilações, com recurso, por exemplo, a um sensor ótico com ligação a um contador de tempos.

Bibliografia

Referências

¹Protocolo do trabalho 4B de Laboratório de Física II, Departamento de Física e Astronomia da Faculdade de Ciências da Universidade do Porto (2023).

5 Anexos

5.1 Dados Experimentais

5.1.1 Barra Encastrada

D (mm)
1,985
1,900
1,950
1,950
1,910
1,940

Figura 31: Diâmetro da barra em diferentes pontos

Ensaios	Impulsos	I ($\pm 0,0005\text{m}$)	$I^2(\pm 0,0009\text{m}^2)$	t ($\pm 0,01\text{s}$)	Oscilações	T (s)	\bar{T} (s)	$u(\bar{T}) \text{ s}$
1	51	0,6500	0,4225	7,41	25	0,296	0,2988	0,0013
	101	0,6500	0,4225	14,94	50	0,299		
	151	0,6500	0,4225	22,58	75	0,301		
2	51	0,6045	0,3654	6,38	25	0,255	0,2571	0,0010
	101	0,6045	0,3654	12,88	50	0,258		
	151	0,6045	0,3654	19,38	75	0,258		
3	51	0,5590	0,3125	5,40	25	0,216	0,2179	0,0010
	101	0,5590	0,3125	10,92	50	0,218		
	151	0,5590	0,3125	16,44	75	0,219		
4	51	0,5135	0,2637	4,62	25	0,185	0,1862	0,0007
	101	0,5135	0,2637	9,33	50	0,187		
	151	0,5135	0,2637	14,03	75	0,187		
5	51	0,4680	0,2190	3,83	25	0,153	0,1543	0,0006
	101	0,4680	0,2190	7,73	50	0,155		
	151	0,4680	0,2190	11,63	75	0,155		
6	51	0,4225	0,1785	3,14	25	0,126	0,1264	0,0004
	101	0,4225	0,1785	6,33	50	0,127		
	151	0,4225	0,1785	9,52	75	0,127		
7	51	0,3770	0,1421	2,51	25	0,100	0,1011	0,0004
	101	0,3770	0,1421	5,06	50	0,101		
	151	0,3770	0,1421	7,62	75	0,102		
8	51	0,3315	0,1099	1,93	25	0,077	0,0778	0,0003
	101	0,3315	0,1099	3,91	50	0,078		
	151	0,3315	0,1099	5,86	75	0,078		
9	51	0,2860	0,0818	1,47	25	0,059	0,0591	0,0002
	101	0,2860	0,0818	2,96	50	0,059		
	151	0,2860	0,0818	4,45	75	0,059		
10	51	0,2420	0,0586	1,71	25	0,068	0,042	0,0002
	101	0,2420	0,0586	2,11	50	0,042		
	151	0,2420	0,0586	3,17	75	0,042		
11	51	0,1950	0,0380	0,07	25	0,003	0,028	0,0002
	101	0,1950	0,0380	1,42	50	0,028		
	151	0,1950	0,0380	3,75	75	0,050		

Figura 32: Dados Experimentais - Barra Encastrada

5.1.2 Pêndulo de Torção

Fio de Suspensão		
$D_i (\pm 0,005 \text{ mm})$	$\bar{D} (\pm 0,004 \text{ mm})$	0,868
0,865	$\bar{D} (\pm 0,000004 \text{ m})$	0,000868
0,870	$L (\pm 0,0005 \text{ m})$	1,0930
0,860		
0,855		
0,880		
0,875		

Figura 33: Medidas Diâmetro do Fio de Suspensão

Massas objetos	
$m_d (\pm 0,0001 \text{ kg})$	0,8073
$m_p + m_d (\pm 0,0001 \text{ kg})$	1,4906
$m_p (\pm 0,0001 \text{ kg})$	0,6835
$m_{cc} (\pm 0,0001 \text{ kg})$	0,4771
$m_{cc} + m_d + m_p (\pm 0,0001 \text{ kg})$	1,9779

Figura 34: Massas dos Objetos em estudo

Medidas dos Objetos			
$D_d (\pm 0,0005 \text{ m})$	0,2000	$h_{\text{prisma}} (\pm 0,0005 \text{ m})$	0,0230
$D_{cc \text{ interior}} (\pm 0,0005 \text{ m})$	0,1792	$b_{\text{menor prisma}} (\pm 0,0005 \text{ m})$	0,0290
$D_{cc \text{ exterior}} (\pm 0,0005 \text{ m})$	0,2005	$b_{\text{maior prisma}} (\pm 0,0005 \text{ m})$	0,1990

Figura 35: Medidas dos Objetos em estudo

Conjuntos	$I_{\text{conjunto}} (\text{kg m}^2)$	$u(I_{\text{conjunto}}) (\text{kg m}^2)$	$\theta_{\max} (\text{graus})$	$t (\pm 0,01 \text{ s})$	$T (\pm 0,1 \text{ s})$	$\bar{T} (\text{s})$	$u(\bar{T}) (\text{s})$
Disco + cc	0,00835	0,00004	90	101,63	10,2	10,176	0,008
			180	101,94	10,2		
			270	101,72	10,2		
disco+(p_maior)+cc	0,01060	0,00005	90	113,57	11,4	11,40	0,02
			180	114,11	11,4		
			270	114,37	11,4		
disco+ (p_maior)	0,00629	0,00003	90	87,58	8,8	8,747	0,01
			180	87,15	8,7		
			270	87,68	8,8		
disco+(p_menor)	0,00409	0,00002	90	70,76	7,1	7,080	0,005
			180	70,72	7,1		
			270	70,91	7,1		

Figura 36: Dados experimentais - Pêndulo de Torção

5.2 Equações de Propagação de Incerteza

5.2.1 Barra Encastrada

$$u(\bar{D}) = \frac{S}{\sqrt{n}}, \quad S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad e \quad n = 6 \quad (8)$$

$$u(V) = \sqrt{\frac{u(L)^2}{L^2} + \frac{(4 u(\bar{D}))^2}{\bar{D}^2}} V \quad (9)$$

$$u(\rho) = \sqrt{\frac{u(m)^2}{m^2} + \frac{u(V)^2}{V^2}} \rho, \quad m = massa \quad (10)$$

$$u(\bar{T}) = \frac{S}{\sqrt{n}}, \quad S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad e \quad n = 3 \quad (11)$$

$$u(E) = \sqrt{\frac{u(\rho)^2}{\rho^2} + \frac{u(m)^2}{m^2} + \frac{(2(u(\bar{D}))^2}{\bar{D}^2}} E, \quad m = \text{declive} \quad (12)$$

5.2.2 Pêndulo de Torção

$$u(I_d) = \sqrt{\frac{u(m_d)^2}{m_d^2} + \frac{(2u(D_d))^2}{D_d^2}} I_d \quad (13)$$

$$u(I_{\text{prisma menor}}) = \sqrt{\frac{u(m_p)^2}{m_p^2} + \frac{(u(b_{\text{prisma maior}}))^2}{b_{\text{prisma maior}}^2}} I_{\text{prisma menor}} \quad (14)$$

$$u(I_{\text{prisma maior}})^2 = \left(\frac{2h^2 + b_{p \text{ menor}}^2}{24} \right)^2 u(m_p)^2 + \left(\frac{4m_p h}{24} \right)^2 u(h)^2 + \left(\frac{2m_p b_{p \text{ menor}}^2}{24} \right)^2 u(b_{p \text{ menor}})^2 \quad (15)$$

$$u(I_{cc})^2 = \left(\frac{D_{cc \ i}^2 + D_{cc \ e}^2}{8} \right)^2 u(m_{cc})^2 + \left(\frac{m_{cc} D_{cc \ i}}{4} \right)^2 u(D_{cc \ i})^2 + \left(\frac{m_{cc} D_{cc \ e}}{4} \right)^2 u(D_{cc \ e})^2 \quad (16)$$

$$u(\mu) = \sqrt{\frac{u(L)^2}{L^2} + \frac{u(m)^2}{m^2} + \frac{(4(u(\bar{D}))^2}{\bar{D}^2}} \mu, \quad m = \text{declive} \quad (17)$$