

16.8

# Ressonâncias Acústicas em Tubos Ocos

Beatriz Feiteira

PL1 Grupo 4

Departamento de Física e Astronomia

Faculdade de Ciências da Universidade do Porto

## experimentalmente

### Resumo

Neste trabalho, recorreu-se ao programa *Audacity* para observar e analisar espetros de frequências de ressonâncias acústicas em tubos fechados numa e em ambas as extremidades. Este estudo permitiu, ainda, obter alguns valores experimentais para a velocidade do som no ar através dum ajuste linear de  $f(\lambda)$  para cada um dos métodos. Os valores finais foram de  $(346,4 \pm 0,9) \text{ ms}^{-1}$  e  $(341,2 \pm 0,6) \text{ ms}^{-1}$  para as duas gamas em que se dividiram os resultados, com incertezas relativas excelentes de 0,2% e erros bastante satisfatórios de 0,3% para a primeira gama e 2% para a segunda. Determinou-se, também, um valor experimental para  $\Delta y$ , tendo-se obtido  $(0,00156 \pm 0,00007) \text{ m}$  para a gama mais adequada, com uma baixa incerteza relativa de 3% e um erro de 19%. O erro alto veio comprovar que o método pelo qual se obteve este parâmetro não foi o mais adequado por ser na ordenada na origem que se acumulam os erros sistemáticos.

## 1 Introdução

A sensação sonora que percecionamos a toda a hora é, na verdade, o resultado das vibrações mecânicas do meio que interagem com os nossos ouvidos, numa dada gama de frequências a que chamamos audíveis. No entanto, na presença de certas condições de fronteira, surgem modos próprios de vibração que reforçam a mesma em frequências bem definidas, que designamos frequências de ressonância. Neste trabalho, os objetos de estudo serão tubos contendo ar, fechados numa e em ambas as extremidades.

### 1.1 Ressonância de tubos fechados nas duas extremidades

Consideremos o tubo fechado em ambas as extremidades, tal como representado na Figura 1. Para simplificar o sistema, vamos representá-lo a uma dimensão, ignorando as direções transversais  $xx$  e  $zz$ .

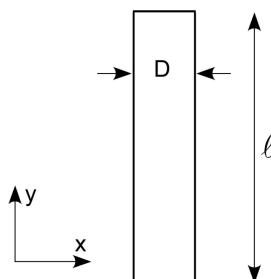


Figura 1: Esquema de um tubo de diâmetro interno  $D$  e comprimento  $\ell$ . [1]

Neste caso, temos:

- Para  $y = 0$ , não há vibração.
- Para  $y = \ell$ , a vibração é máxima.

Estas condições de fronteira permitem-nos obter a seguinte equação:

$$\ell = \frac{\lambda}{4} + n\frac{\lambda}{2} \quad (1)$$

onde  $\lambda$  é o comprimento de onda e  $n$  é a ordem do modo de ressonância.

Podemos relacionar a velocidade de propagação do som numa onda,  $v$ , com o seu comprimento de onda,  $\lambda$ , e a sua frequência de vibração,  $f$ , através da equação que se segue:

$$v = \lambda f \quad (2)$$

E, com a Equação 2, podemos reescrever a Equação 1 do seguinte modo:

$$f = \frac{v}{2\ell}n + \frac{v}{4\lambda} \quad (3)$$

## 1.2 Ressonância de tubos fechados numa extremidade

Agora, para um tubo fechado em apenas uma das extremidades, a variação da densidade do ar com  $y$  é não nula, devido à propagação de som para o exterior. Daí que seja necessário adicionar um elemento  $\Delta y$  ao comprimento do tubo, como vemos na Figura 2.

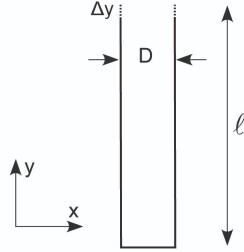


Figura 2: Esquema de um tubo de diâmetro interno  $D$  e comprimento  $\ell + \Delta y$ . [1]

Ficamos, assim, com a expressão corrigida para a ressonância:

$$f = \frac{v}{2(\ell + \Delta y)}n + \frac{v}{4(\ell + \Delta y)} \quad (4)$$

Usaremos o valor  $\Delta y = 0,305D$ , onde  $D$  é o diâmetro interno do tubo. Todavia, esta correção pode ser determinada experimentalmente traçando o gráfico de  $\ell$  em função de  $1/f$ , de acordo com a expressão

$$\ell = \left( \frac{v}{2}n + \frac{v}{4} \right) \frac{1}{f} - \Delta y \quad (5)$$

## 1.3 Velocidade do som

O valor de referência para a velocidade do som no ar a ser utilizado pode, segundo [1], ser aproximado pela seguinte expressão

$$v_{ref} = 331,4 + 0,607(T - 273,17) + 0,08p_{H_2O} \quad (6)$$

onde  $T$  é a temperatura ambiente, em Kelvins, e  $p_{H_2O}$  é a pressão de vapor de água, em mmHg.

## 2 Experiência

### 2.1 Método experimental

#### 2.1.1 Ressonância de tubos fechados numa extremidade

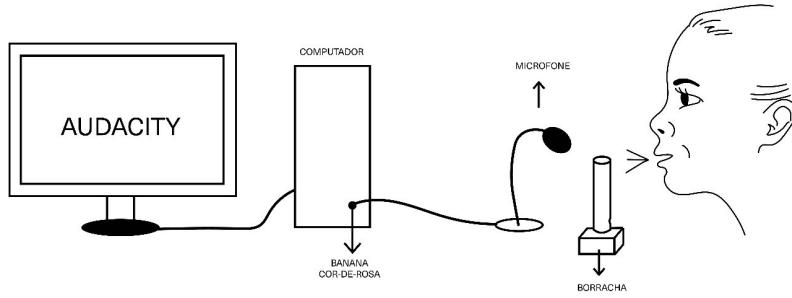


Figura 3: Esquema experimental implementado no estudo da ressonância de tubos fechados numa extremidade. [2]

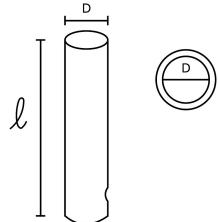


Figura 4: Representação dos tubos utilizados e das suas dimensões. [2]

- Implementado o esquema patente na Figura 3, verificou-se que o programa *Audacity* reconhecia o microfone.
- Para cada ensaio, registou-se a temperatura ambiente,  $T$ , a pressão de vapor de água,  $p_{H_2O}$ , o comprimento do tubo,  $\ell$ , e o seu diâmetro interno,  $D$ .
- Encostou-se uma borracha à extremidade do tubo, de modo a tapá-la, e agarrou-se o tubo com uma folha de papel, evitando o contacto deste com as mãos para que a temperatura no interior do tubo fosse igual à temperatura ambiente.
- Soprou-se para o tubo, como indicado na Figura 3, e gravou-se o som com o programa *Audacity*.
- Analisou-se o espetro de frequências de ressonância para a secção de melhor produção de som e registaram-se as frequências,  $f$ , relativas a cada pico.

#### 2.1.2 Ressonância de tubos fechados em ambas as extremidades

- Implementado o esquema patente na Figura 5, verificou-se que o programa *Audacity* reconhecia o microfone.
- Mediu-se o comprimento do tubo.
- Gerou-se um ruído branco e, selecionando a secção de melhor produção de som, analisou-se o espetro de frequências de ressonância e registrou-se  $f$  para cada pico.

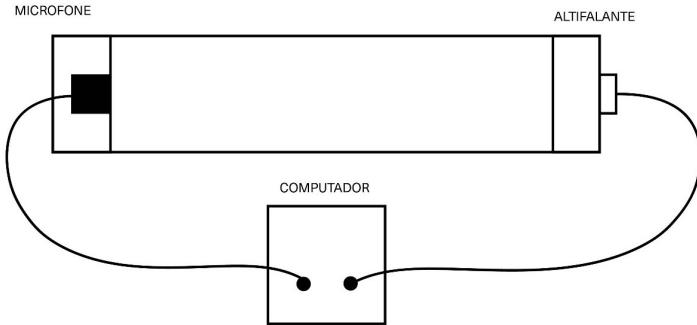


Figura 5: Esquema experimental implementado no estudo da ressonância de tubos fechados em ambas as extremidades. [2]

## 2.2 Resultados experimentais e análise

Para os registos da frequência a partir da leitura pelo cursor, muitas vezes teve de se efetuar a média da leitura de dois picos. Para estes casos, a incerteza é dada pela semi-diferença destes valores. Para os restantes, considerou-se 1 Hz, uma vez que corresponde ao último algarismo lido. Poder-se-ia ter considerado a mesma incerteza para a gama onde se considerasse que o comportamento fosse semelhante, mas decidiu-se analisar individualmente cada caso.

### 2.2.1 Ressonância de tubos fechados numa extremidade

Para esta parte da experiência, utilizaram-se 6 tubos de comprimentos distintos, para que o estudo se desse numa gama experimental homogeneizada. Para cada tubo, mediu-se  $T$  e registrou-se  $p_{H_2O}$  (segundo a tabela disponível em laboratório), pelo que se obteve um valor de  $v_{ref}$  (calculado a partir da Equação 6) diferente para cada ensaio, como se verifica no gráfico que se segue.

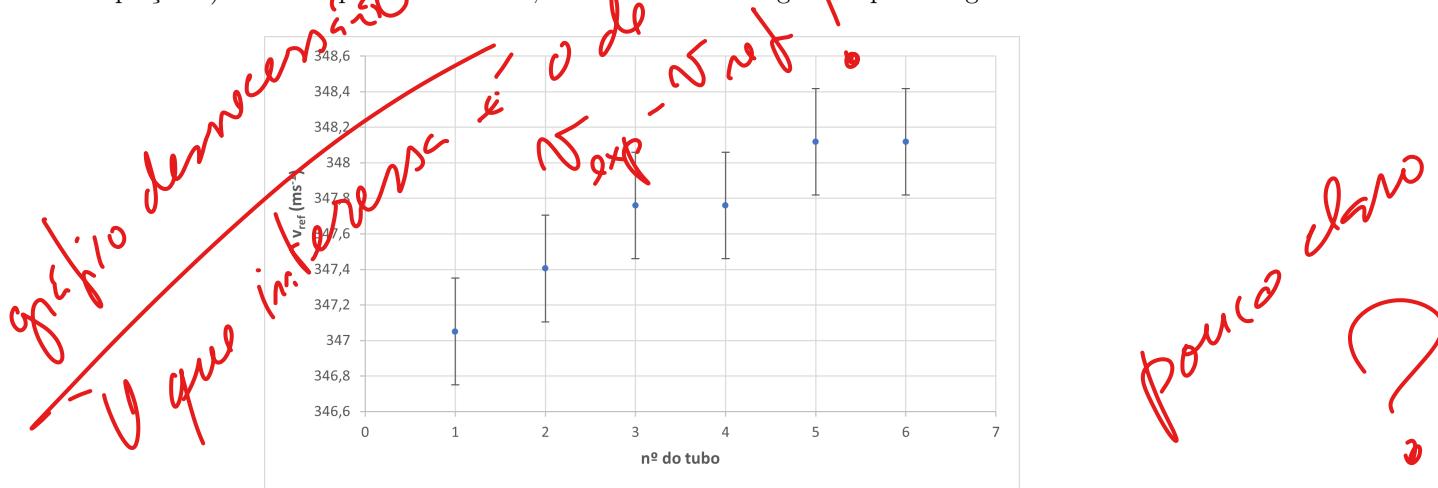


Figura 6: Gráfico da velocidade de referência em função do número do tubo e respectivas barras de incerteza experimental.

É notável uma tendência de aumento do valor de  $v_{ref}$  com o aumento do número do tubo e, consequentemente, ao longo do tempo, visto que os tubos se encontram numerados pela ordem que foram utilizados. Isto pode ser explicado pelo aumento da temperatura durante a experiência, possivelmente devido à presença de quem a realizou e cuja temperatura corporal se encontra bastante acima da temperatura ambiente, fazendo-a variar. Quanto às barras de incerteza experimental, estas apresentam um valor fixo de 0,3, podendo a equação de propagação de incertezas ser consultada no anexo. ... (eq. ...)

Dado que a temperatura foi variando, utilizaremos, para cada tubo, o valor de referência que lhe corresponde.

Passando à produção de som e à sua análise pelo programa designado, segue-se um exemplo de um espetro obtido para um dos tubos.

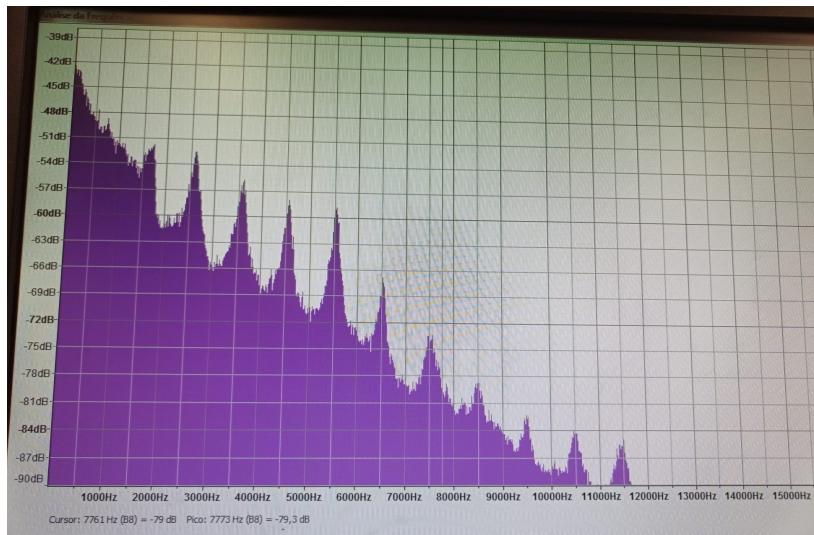


Figura 7: Exemplo de representação do espetro de frequências, obtido pelo programa *Audacity* para o tubo 4.

São claramente visíveis os picos de frequência a serem analisados. Para os de maior largura, efetuou-se a média e a semi-diferença para se obter o valor e a sua incerteza, respetivamente, como indicado no início da secção 2.2.

Recolhidos os valores para as frequências dos picos de todos os tubos, traçou-se o gráfico das frequências de ressonância em função do número de modo.

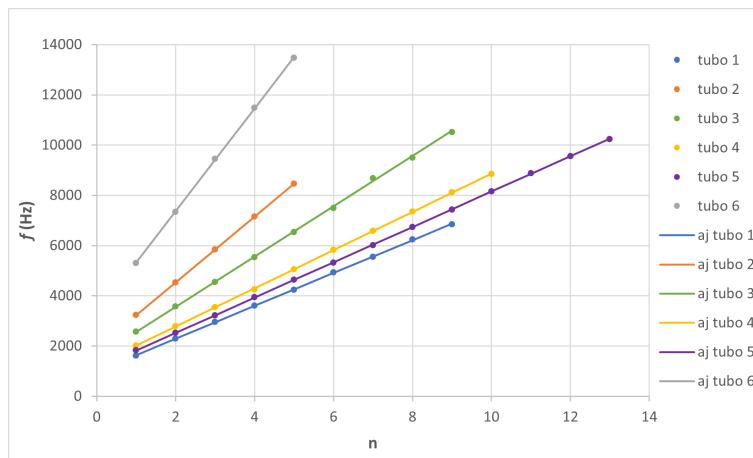


Figura 8: Gráfico da frequência em função do número do modo para todos os tubos e respectivos ajustes lineares.

Inicialmente, as gamas intersetavam-se (ver Figura 31 em anexo). No entanto, o gráfico da Figura 17 permitiu uma renumeração correta dos números dos modos, dando origem ao gráfico acima representado, onde não há interseção das gamas. É, também, clara a tendência linear entre as duas grandezas representadas. Esta tendência permitiu que se realizasse um ajuste linear para cada tubo, tal como representado no gráfico, de modo a obter, para cada ensaio, um valor experimental para a velocidade do som no ar, com recurso à Equação 4. Não foram apresentadas barras de erro por serem duma gama tão pequena que não seriam visíveis.

de tabela  
permutei  
os dados  
das matrizes  
e do gráfico de resíduos  
que inclui todos os  
ajustes

quantificada  
apenas em  
log/log.

*Mas aqui,  
não em anexo!*

Segue-se, para cada tubo, o gráfico de resíduos relativo ao ajuste efetuado e a matriz correspondente. As barras representadas dizem respeito à incerteza experimental da frequência, de acordo com o indicado no início da secção 2.2.

### Tubo 1

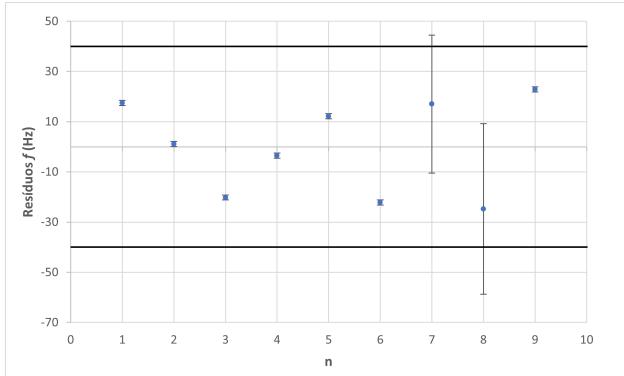


Figura 9: Gráfico de resíduos do ajuste de  $f(n)$  para o tubo 1, delimitado por  $]-2\sigma_y, 2\sigma_y[$ .

Os resíduos encontram-se aleatoriamente distribuídos em torno de 0 por valores pequenos (dada a gama em estudo), não havendo qualquer ponto duvidoso, visto que todos se encontram dentro do intervalo de confiança a 95% dado por  $]-2\sigma_y, 2\sigma_y[$ .

### Tubo 2

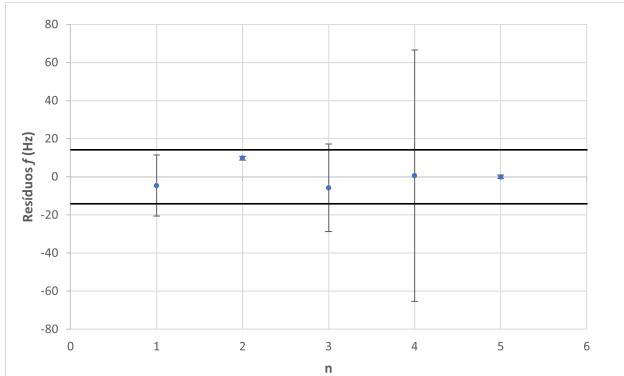


Figura 10: Gráfico de resíduos do ajuste de  $f(n)$  para o tubo 2, delimitado por  $]-2\sigma_y, 2\sigma_y[$ .

Os resíduos apresentam uma distribuição aleatória e sem tendências em torno de 0 por valores pequenos, encontrando-se, ainda, dentro do intervalo de confiança a 95%, confirmando-se a ausência de pontos duvidosos.

### Tubo 3

É clara a presença de um ponto duvidoso, em  $n=7$ , na Figura 11, já que, para além de ultrapassar  $-2\sigma_y$ , encontra-se bastante desviado dos restantes pontos, que se distribuem aleatoriamente numa gama de baixos valores. Posto isto, efetuou-se um novo ajuste sem este dado, cuja matriz se encontra representada na Tabela 4.

Relativamente a este novo ajuste, é notável a melhoria que se deu, como se verifica pela diminuição das incertezas e pela aproximação de  $r^2$  a 1. Os resíduos demonstram aleatoriedade dentro duma baixa gama, sem qualquer ponto duvidoso.

Tubo 1			
$m$	655	$9,80E+02$	$b$
$\sigma_m$	3	$1E+01$	$\sigma_b$
$r^2$	0,99989	$2E+01$	$\sigma_y$

Tabela 1: Matriz de ajuste linear para o tubo 1.

Tubo 2			
$m$	1308	$1916$	$b$
$\sigma_m$	2	7	$\sigma_b$
$r^2$	0,999991	7	$\sigma_y$

Tabela 2: Matriz de ajuste linear para o tubo 2.

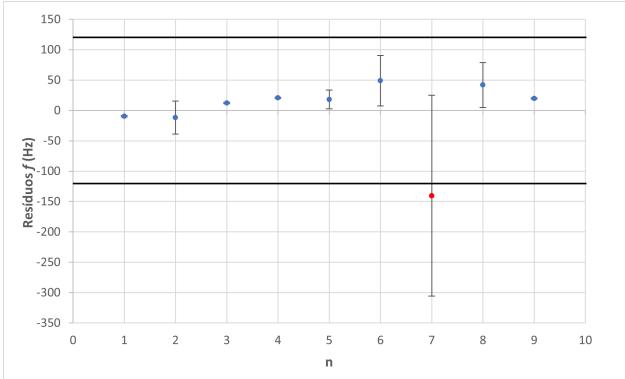


Figura 11: Gráfico de resíduos do ajuste de  $f(n)$  para o tubo 3, delimitado por  $]-2\sigma_y, 2\sigma_y[$ . A vermelho, um ponto duvidoso.

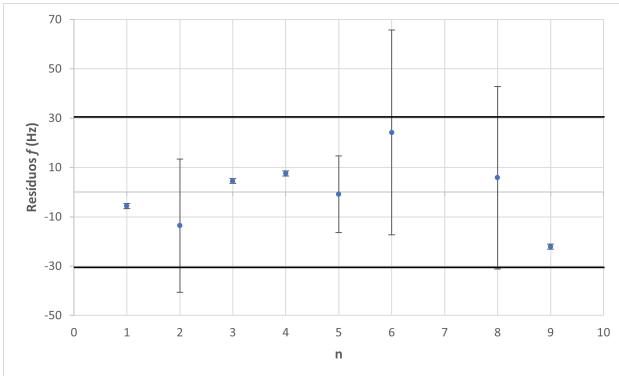


Figura 12: Gráfico de resíduos do ajuste de  $f(n)$  sem o ponto duvidoso para o tubo 3, delimitado por  $]-2\sigma_y, 2\sigma_y[$ .

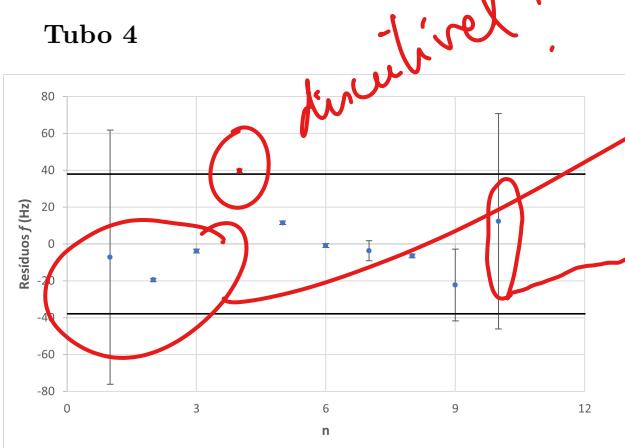


Figura 13: Gráfico de resíduos do ajuste de  $f(n)$  para o tubo 4, delimitado por  $]-2\sigma_y, 2\sigma_y[$ . A vermelho, um ponto duvidoso.

Embora os resíduos, patentes na Figura 13, apresentem uma distribuição aleatória, estamos perante um ponto duvidoso que se encontra fora do intervalo  $]-2\sigma_y, 2\sigma_y[$ , pelo que se efetuou um novo ajuste.

Tubo 3			
$m$	995	$1,57\text{E}+03$	$b$
$\sigma_m$	8	$4\text{E}+01$	$\sigma_b$
$r^2$	0,9996	$6\text{E}+01$	$\sigma_y$

Tabela 3: Matriz de ajuste linear para o tubo 3.

Tubo 3			
$m$	989	$1,58\text{E}+03$	$b$
$\sigma_m$	2	$1\text{E}+01$	$\sigma_b$
$r^2$	0,99997	$2\text{E}+01$	$\sigma_y$

Tabela 4: Matriz de ajuste linear para o tubo 3, sem o ponto duvidoso.

Tubo 4			
$m$	762	$1,25\text{E}+03$	$b$
$\sigma_m$	2	$1\text{E}+01$	$\sigma_b$
$r^2$	0,99994	$2\text{E}+01$	$\sigma_y$

Tabela 5: Matriz de ajuste linear para o tubo 4.

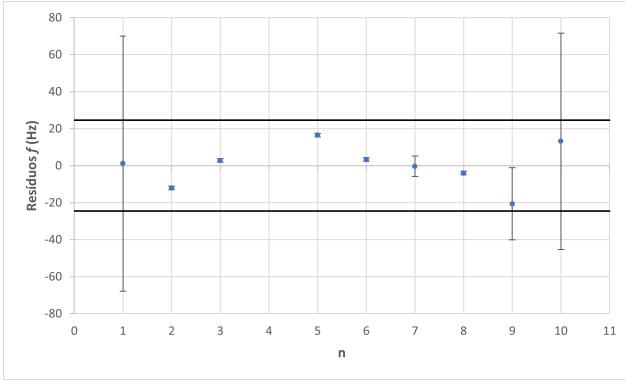


Figura 14: Gráfico de resíduos do ajuste de  $f(n)$  sem o ponto duvidoso para o tubo 4, delimitado por  $]-2\sigma_y, 2\sigma_y[$ .

Vemos, mais uma vez, nas baixas incertezas e na aproximação de  $r^2$  a 1 a melhoria no ajuste. Outra evidência é a distribuição aleatória dos resíduos dentro do intervalo estabelecido.

### Tubo 5

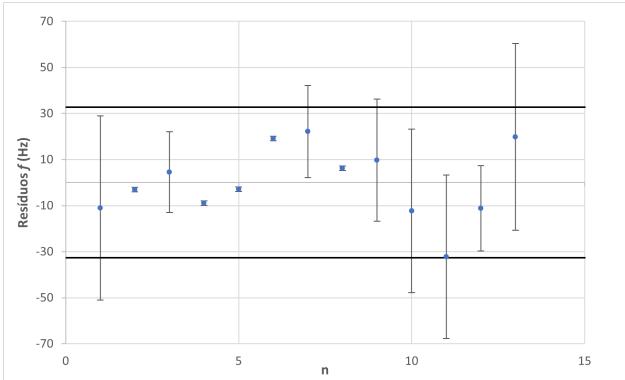


Figura 15: Gráfico de resíduos do ajuste de  $f(n)$  para o tubo 5, delimitado por  $]-2\sigma_y, 2\sigma_y[$ .

Os resíduos não apresentam qualquer tendência e encontram-se dentro do intervalo de confiança a 95%. Um dos pontos desvia-se um pouco dos restantes, quase sobrepondo-se à linha, mas não será tido como duvidoso.

### Tubo 6

Mesmo tratando-se duma gama mais pequena, verifica-se aleatoriedade nos resíduos e ausência de pontos duvidosos.

Tubo 4			
$m$	761	1259	$b$
$\sigma_m$	1	9	$\sigma_b$
$r^2$	0,99998	1E+01	$\sigma_y$

Tabela 6: Matriz de ajuste linear para o tubo 4, sem o ponto duvidoso.

Tubo 5			
$m$	703	1,12E+03	$b$
$\sigma_m$	1	1E+01	$\sigma_b$
$r^2$	0,99997	2E+01	$\sigma_y$

Tabela 7: Matriz de ajuste linear para o tubo 5.

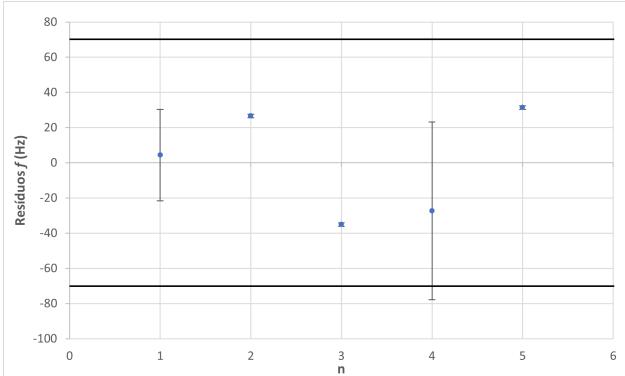


Figura 16: Gráfico de resíduos do ajuste de  $f(n)$  para o tubo 6, delimitado por  $]-2\sigma_y, 2\sigma_y[$ .

Posto isto, os resultados obtidos para  $v_{exp}$  em cada um dos ensaios encontram-se representados na tabela que se segue. É importante reforçar que só se calculou  $v$  pelo declive, visto que a ordenada na origem é onde estão acumulados todos os erros, não sendo possível obter um valor fidedigno a partir deste parâmetro. Portanto:

*dar esta info em gráfico c/  $v_{exp} = 2m(\ell + \Delta y)$*

nº tubo	$v_{exp}$ ( $\text{ms}^{-1}$ )	$u(v_{exp})$ ( $\text{ms}^{-1}$ )	inc(%)	$v_{ref}$ ( $\text{ms}^{-1}$ )	$u(v_{ref})$ ( $\text{ms}^{-1}$ )	$e_r$ (%)
1	345	2	0,4%	347,1	0,3	0,7%
2	348	1	0,4%	347,4	0,3	0,2%
3	343	1	0,4%	347,8	0,3	1%
4	340	1	0,3%	347,8	0,3	2%
5	342	1	0,3%	348,1	0,3	2%
6	341	3	0,8%	348,1	0,3	2%

Tabela 9: Resultados de  $v_{exp}$  para os tubos analisados.

De seguida, traçou-se o gráfico de  $\ell$  em função de  $f^{-1}$  para cada  $n$ , de modo a determinar, de acordo com a Equação 5, o valor real de  $\Delta y$ , visto que durante toda a experiência se usou  $\Delta y = 0,305D$ .

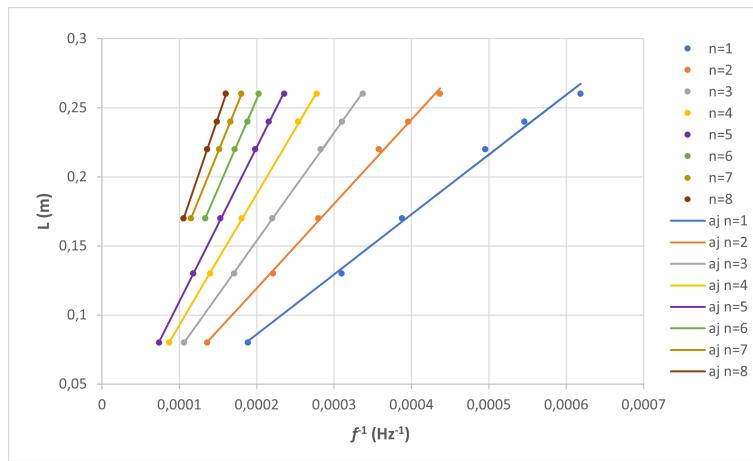


Figura 17: Gráfico do comprimento do tubo,  $\ell$ , em função do inverso da frequência,  $f^{-1}$ , para diferentes números de modos, com respetivos ajustes.

Tubo 6			
$m$	$2,05\text{E+03}$	$3,26\text{E+03}$	$b$
$\sigma_m$	$1\text{E+01}$	$4\text{E+01}$	$\sigma_b$
$r^2$	0,99991	4E+01	$\sigma_y$

Tabela 8: Matriz de ajuste linear para o tubo 6.

↓

Resumir os gráf.<sup>!</sup> de resíduos num só!  
(o resto pode ficar em anexo)

As Figuras 18 a 25 mostram os gráficos de resíduos para os ajustes efetuados para cada gama, cujos parâmetros podem ser consultados nas matrizes que os acompanham (Tabelas 10 a 17).

Note-se, no entanto, que esta análise foi feita apenas até  $n = 8$ , uma vez que, para valores superiores, não se podia garantir uma gama experimental adequada devido ao reduzido número de picos que se conseguiu registar para valores de  $n$  superiores.

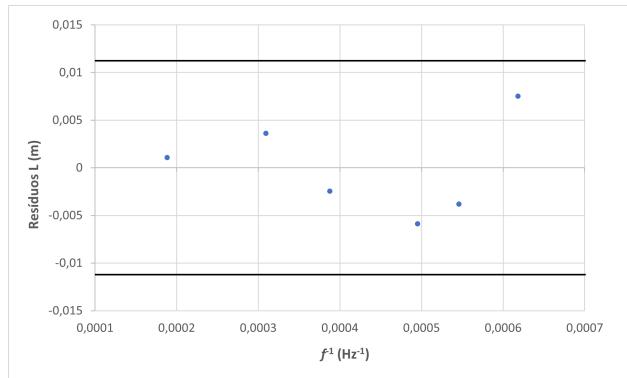


Figura 18: Gráfico de resíduos do ajuste de  $\ell(f_{-1})$  para  $n=1$ , delimitado por  $]-2\sigma_y, 2\sigma_y[$ .

n=1			
$m$	4,3E+02	-0,001	$b$
$\sigma_m$	2E+01	0,007	$\sigma_b$
$r^2$	0,995	0,006	$\sigma_y$

Tabela 10: Matriz de ajuste linear de  $\ell(f^{-1})$  para  $n=1$ .

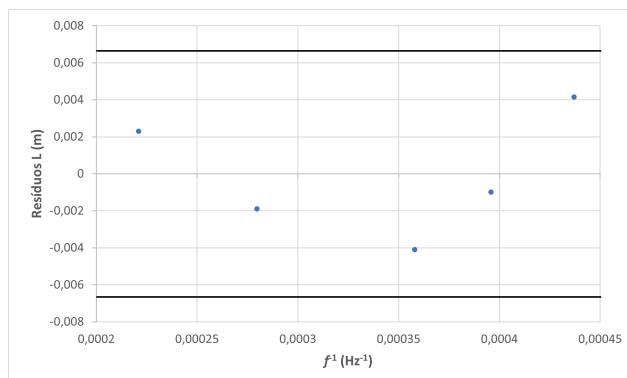


Figura 19: Gráfico de resíduos do ajuste de  $\ell(f_{-1})$  para  $n=2$ , delimitado por  $]-2\sigma_y, 2\sigma_y[$ .

n=2			
$m$	6,1E+02	-0,003	$b$
$\sigma_m$	1E+01	0,004	$\sigma_b$
$r^2$	0,998	0,003	$\sigma_y$

Tabela 11: Matriz de ajuste linear de  $\ell(f^{-1})$  para  $n=2$ .

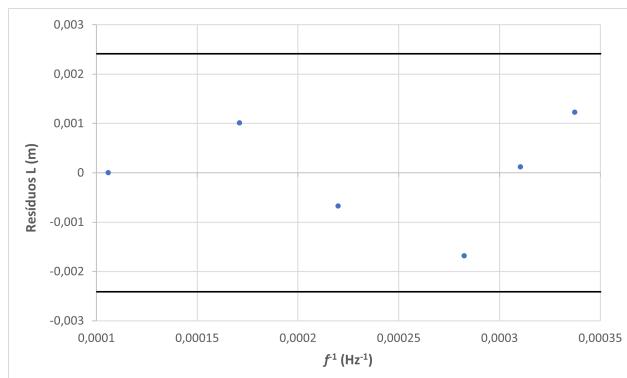


Figura 20: Gráfico de resíduos do ajuste de  $\ell(f_{-1})$  para  $n=3$ , delimitado por  $]-2\sigma_y, 2\sigma_y[$ .

n=3			
$m$	783	-0,003	$b$
$\sigma_m$	6	0,002	$\sigma_b$
$r^2$	0,9998	0,001	$\sigma_y$

Tabela 12: Matriz de ajuste linear de  $\ell(f^{-1})$  para  $n=3$ .

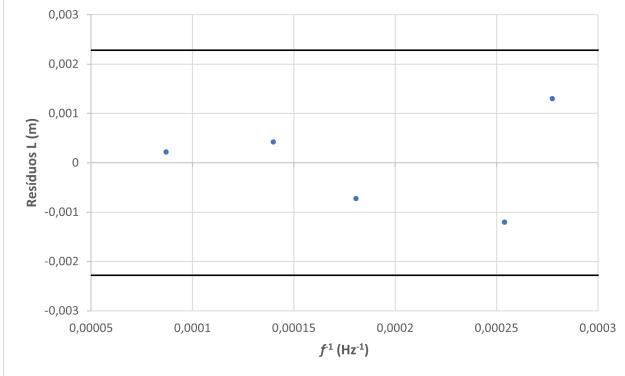


Figura 21: Gráfico de resíduos do ajuste de  $\ell(f_{-1})$  para  $n=4$ , delimitado por  $]-2\sigma_y, 2\sigma_y[$ .

n=4			
$m$	950	-0,002	$b$
$\sigma_m$	7	0,001	$\sigma_b$
$r^2$	0,9998	0,001	$\sigma_y$

Tabela 13: Matriz de ajuste linear de  $\ell(f^{-1})$  para  $n=4$ .

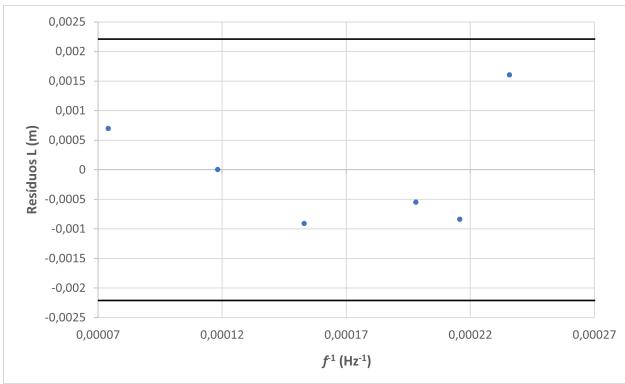


Figura 22: Gráfico de resíduos do ajuste de  $\ell(f_{-1})$  para  $n=5$ , delimitado por  $]-2\sigma_y, 2\sigma_y[$ .

n=5			
$m$	1119	-0,002	$b$
$\sigma_m$	8	0,001	$\sigma_b$
$r^2$	0,9998	0,001	$\sigma_y$

Tabela 14: Matriz de ajuste linear de  $\ell(f^{-1})$  para  $n=5$ .

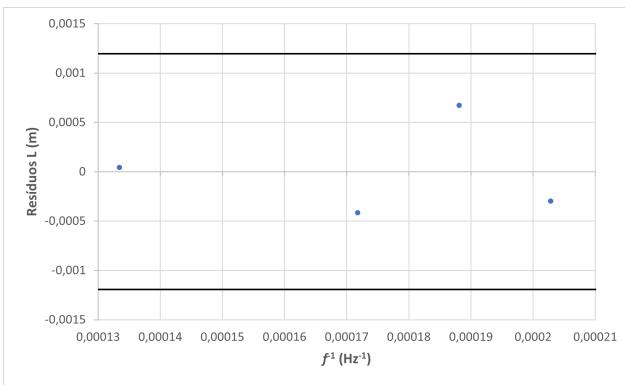


Figura 23: Gráfico de resíduos do ajuste de  $\ell(f_{-1})$  para  $n=6$ , delimitado por  $]-2\sigma_y, 2\sigma_y[$ .

n=6			
$m$	1,29E+03	-0,002	$b$
$\sigma_m$	1E+01	0,002	$\sigma_b$
$r^2$	0,9998	0,0006	$\sigma_y$

Tabela 15: Matriz de ajuste linear de  $\ell(f^{-1})$  para  $n=6$ .

Para cada  $n$ , os resíduos apresentam uma distribuição aleatória, não evidenciando quaisquer pontos duvidosos, já que todos os pontos se encontram dentro do intervalo de confiança a 95%  $]-2\sigma_y, 2\sigma_y[$ . Assim, foi possível obter um valor para  $\Delta y_{exp}$  para cada número de modo, dado que  $\Delta y_{exp} = -b$ . Os valores de  $\Delta y_{exp}$  para cada  $n$  podem ser consultados em anexo. No entanto, de modo a obtermos um valor final para esta grandeza, analisou-se o desvio de cada valor em relação ao seu valor teórico, onde se usou, para  $D$ , o valor médio dos diâmetros dos tubos patentes nessa gama (também disponíveis para consulta no mesmo anexo). A Figura 26 ilustra a análise realizada.

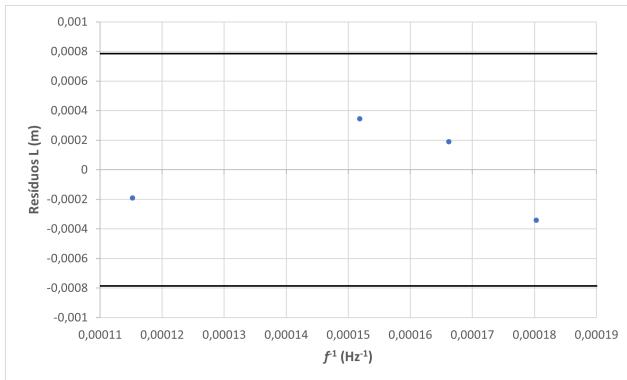


Figura 24: Gráfico de resíduos do ajuste de  $\ell(f_{-1})$  para n=7, delimitado por  $]-2\sigma_y, 2\sigma_y[$ .

n=7			
m	1380	0,011	b
σ <sub>m</sub>	8	0,001	σ <sub>b</sub>
r <sup>2</sup>	0,99993	0,0004	σ <sub>y</sub>

Tabela 16: Matriz de ajuste linear de  $\ell(f^{-1})$  para n=7.

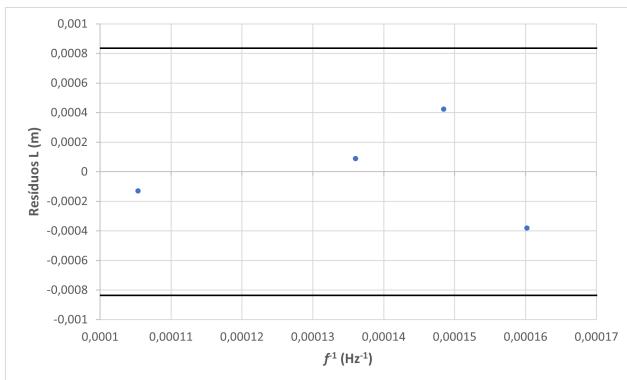


Figura 25: Gráfico de resíduos do ajuste de  $\ell(f_{-1})$  para n=8, delimitado por  $]-2\sigma_y, 2\sigma_y[$ .

n=8			
m	1,64E+03	-0,003	b
σ <sub>m</sub>	1E+01	0,001	σ <sub>b</sub>
r <sup>2</sup>	0,99992	0,0004	σ <sub>y</sub>

Tabela 17: Matriz de ajuste linear de  $\ell(f^{-1})$  para n=8.

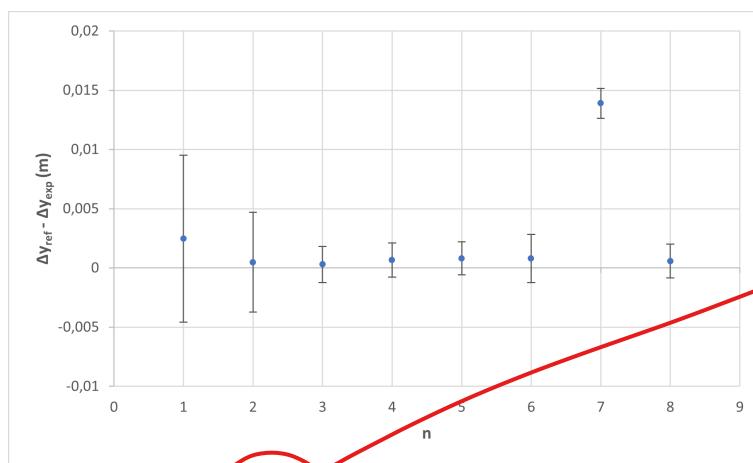


Figura 26: Gráfico de  $\Delta y_{ref} - \Delta y_{exp}$ , em função do número de modo, n.

As barras de incerteza representadas dizem respeito à incerteza experimental, isto é,  $\sigma_b$  de cada ajuste. Por observação do gráfico, vemos, claramente, que o valor de  $\Delta y_{exp}$  para  $n = 7$  se desvia bastante do seu valor de referência quando comparado com os restantes pontos. Na verdade, também em  $n = 1$  verificamos um desvio ligeiramente maior dada a baixa gama em que se distribuem os restantes pontos. Assim, faz todo o sentido obtermos um valor final para este parâmetro através da média dos restantes pontos (ou seja, excluindo  $n = 1$  e  $n = 7$ ).

Má! o que se tira  
(deste gráfico é que  $\Delta y_{exp}$  são o  $\Delta y_{ref}$ . a menor  
da incerteza, mas sempre por defeito.)

Obtemos, portanto, um valor médio final de  $\Delta y_{exp} = (0,00256 \pm 0,00007)$  m, com uma incerteza relativa de 3% e um erro relativamente ao valor teórico de  $(0,003161 \pm 0,000004)$  m de 19%.

### 2.2.2 Ressonância de tubos fechados em ambas as extremidades

Começou por se medir o comprimento do tubo, tendo em conta as posições do microfone e do altifalante. Registou-se  $\ell = (0,5000 \pm 0,0005)$  m. Mediú-se, também, a temperatura neste ensaio ( $T = 25,5^{\circ}\text{C}$ ), para a qual se obteve  $v_{ref} = (348,1 \pm 0,3) \text{ ms}^{-1}$  (Equação 6).

Procedeu-se à geração de ruído branco com 60 segundos de duração e desenhou-se o espetro de frequências, quando reproduzido no altifalante e captado no microfone, tendo-se obtido a Figura 27.

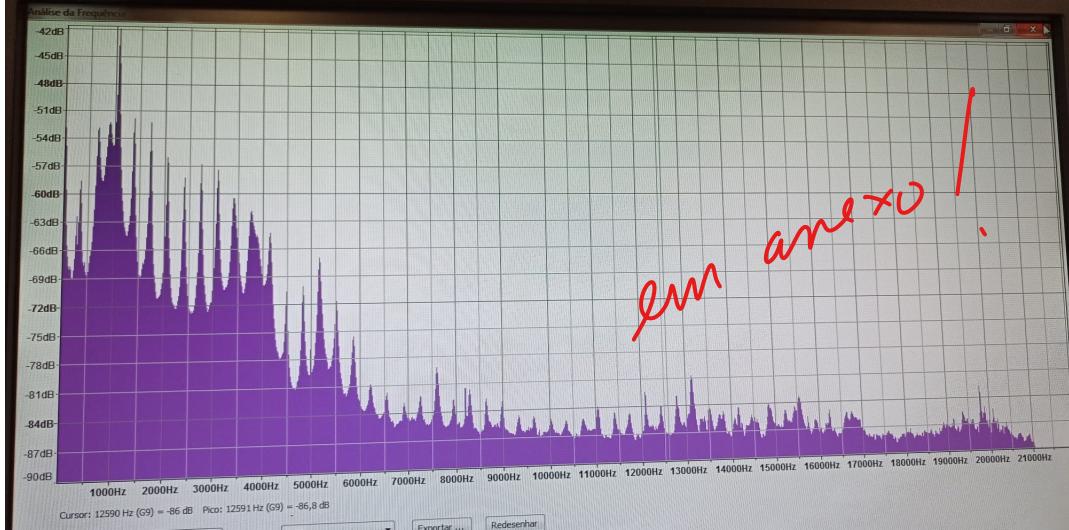


Figura 27: Exemplo de representação do espetro de frequências de um ruído branco, obtido pelo programa *Audacity* para o tubo fechado.

O pico mais alto corresponde à ressonância própria do conjunto microfone+altifalante. Registaram-se as frequências dos picos seguintes, o que permitiu traçar o gráfico de  $f(n)$ , como vemos a seguir.

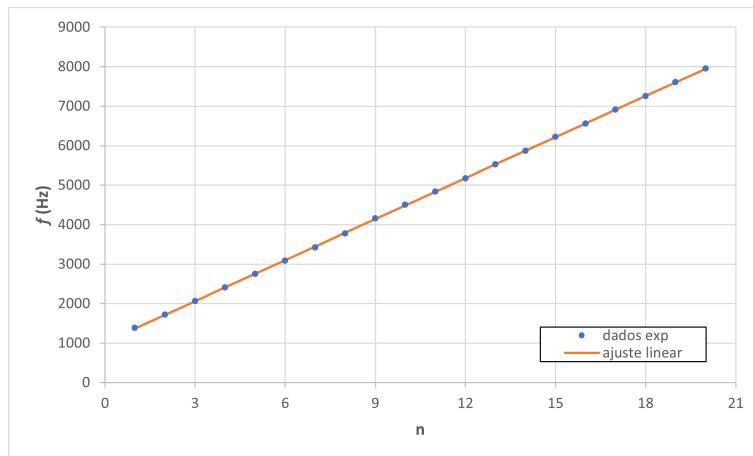


Figura 28: Gráfico da frequência em função do número de modo para o tubo fechado e respetivo ajuste linear.

A ausência de barras de incerteza pode ser explicada pelo facto de todos os valores terem sido lidos diretamente sem efetuar médias, pelo que a incerteza foi sempre de 1 Hz, não sendo esta gama visível na escala apresentada.

Tubo fechado			
$m$	346,4	1023	$b$
$\sigma_m$	0,5	6	$\sigma_b$
$r^2$	0,90097	1E+01	$\sigma_y$

Tabela 18: Matriz de ajuste linear de  $f(n)$  para o tubo fechado.

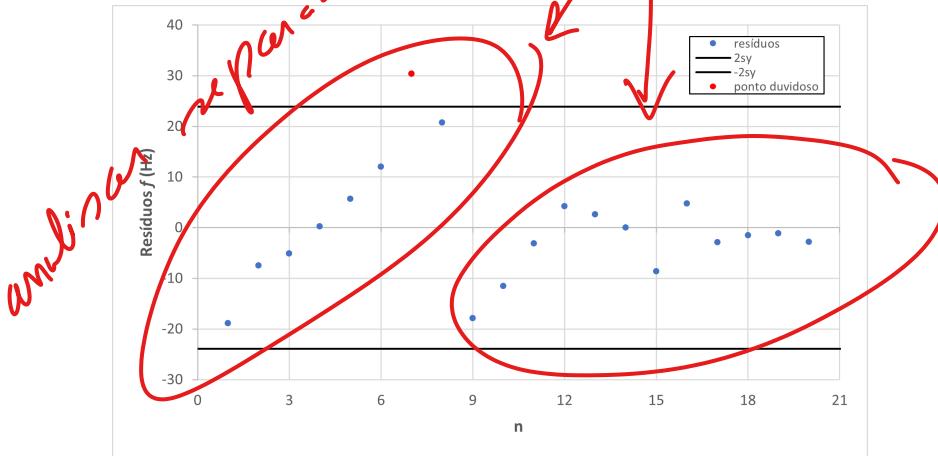


Figura 29: Gráfico de resíduos do ajuste de  $f(n)$ , delimitado por  $]-2\sigma_y, 2\sigma_y[$ . A vermelho, um ponto duvidoso.

É clara a tendência linear que se dá entre as duas grandezas e os parâmetros do ajuste fornecem bons valores de  $r^2$  e de incertezas, validando a qualidade do ajuste. Porém, o gráfico de resíduos evidencia a presença de um ponto duvidoso. Um novo ajuste sem este ponto conteria parâmetros praticamente iguais, um novo ponto duvidoso e as mesmas duas tendências sobrepostas que só se resolveriam separando as duas gamas e efetuando um ajuste para cada uma delas, o que não se justifica dada a proximidade de  $r^2$  a 1. Por estes motivos, mantém-se-o o ajuste apresentado para o cálculo de  $v_{exp}$ , segundo a relação que se segue:

$$v_{exp} = 2m\ell \quad (8)$$

Obteve-se, então,  $v_{exp} = (346,4 \pm 0,6) \text{ ms}^{-1}$ , com uma incerteza relativa de 0,2 % e um erro relativamente ao valor de referência previamente indicado de 0,5%.

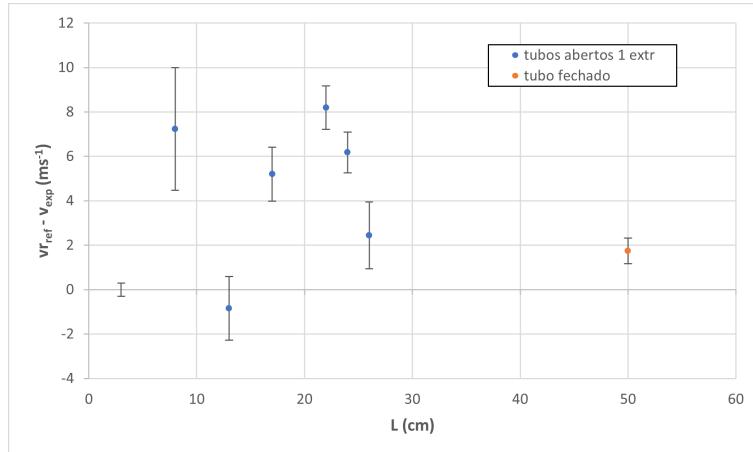


Figura 30: Gráfico de  $v_{ref} - v_{exp}$ , em função do comprimento do tubo,  $\ell$ .

Por fim, procedeu-se a comparar os valores de velocidade obtidos com os de referência calculados, em função do comprimento do tubo, através da representação gráfica patente na Figura 30.

As barras associadas a cada ponto correspondem à incerteza experimental para cada valor de  $v$ ; já a barra observada na linha de 0 diz respeito à incerteza dos valores de referência. A distribuição aleatória dos pontos não nos permite inferir nada acerca da relação entre os desvios e os comprimentos dos tubos. Podemos, contudo, partindo deste gráfico, agrupar os valores que se encontram mais próximos uns dos outros e obter um resultado final para  $v_{exp}$ . Seja o grupo 1 o que contém os tubos 1, 2 e o tubo fechado (de comprimento 26 cm, 13 cm e 50 cm, respetivamente) e o grupo 2 o que abrange os restantes.

Para a primeira gama, e para  $v_{ref}^1 = (347,5 \pm 0,3) \text{ ms}^{-1}$ , obteve-se  $v_{exp} = (346,4 \pm 0,9) \text{ ms}^{-1}$ , com uma incerteza de 0,2% e um erro associado de 0,3%. Para a segunda gama, e para  $v_{ref}^1 = (347,94 \pm 0,09) \text{ ms}^{-1}$ , obteve-se  $v_{exp} = (341,2 \pm 0,6) \text{ ms}^{-1}$ , com uma incerteza de 0,2% e um erro associado de 2%.

### 3 Resultados finais

$\Delta y_{ref}$ (m)	$u(\Delta y_{ref})$ (m)	$\Delta y_{exp}$ (m)	$u(\Delta y_{exp})$ (m)	inc (%)	$e_r$ (%)
0,003161	0,000004	0,00256	0,00007	3%	19%

Tabela 19: Resultados finais de  $\Delta y_{exp}$ .

Gama	$v_{ref}$ ( $\text{ms}^{-1}$ )	$u(v_{ref})$ ( $\text{ms}^{-1}$ )	$v_{exp}$ ( $\text{ms}^{-1}$ )	$u(v_{exp})$ ( $\text{ms}^{-1}$ )	inc (%)	$e_r$ (%)
1	347,5	0,3	346,4	0,9	0,2%	0,3%
2	347,94	0,09	341,2	0,6	0,2%	2%

Tabela 20: Resultados finais de  $v_{exp}$ .

### 4 Conclusão

Calculou-se a velocidade do som no ar recorrendo às vibrações da coluna de ar em tubos fechados numa e em ambas as extremidades. Agruparam-se os valores obtidos nas duas gamas em que mais sentido fazia separá-los, de acordo com os seus desvios relativamente ao valor de referência; obteve-se um valor final a partir das médias dos valores em cada gama:  $(346,4 \pm 0,9) \text{ ms}^{-1}$  para a primeira gama, e  $(341,2 \pm 0,6) \text{ ms}^{-1}$  para a segunda. Para os dois casos, os valores finais foram excelentes, com incertezas relativas inferiores a 1% (0,2% para ambos os grupos) e erros relativos bastante baixos (0,3% e 2%). O valor final do segundo grupo originou um erro superior ao primeiro, dado que esta gama era a que se agrupava nos valores superiores de desvio, revelando-se, ainda assim, bastante satisfatório.

Se compararmos, ainda, os dois métodos utilizados, vemos, de um modo geral, que o do tubo fechado nas duas extremidades apresentou melhores resultados, o que se pode dever à conjugação de diferentes fatores, entre os quais:

- maior número de picos (e mais claros) no espetro de frequências;
- ausência de possibilidade de erros aleatórios, ora por transferência de calor por contacto com o tubo, ora devido à vaporização de água no interior do tubo resultante do sopro.

Partindo da análise gráfica de  $\ell(f^{-1})$ , determinou-se um  $\Delta y_{exp}$ . Mais uma vez, o valor final foi resultado da média dos valores cujos desvios relativamente ao valor de referência (diferente para cada valor, por causa dos diferentes diâmetros) pouco diferiam uns dos outros. O valor final de  $(0,00256 \pm 0,00007) \text{ m}$ , embora tenha apresentado uma incerteza relativamente baixa (3%), teve um erro associado de 19%. Trata-se de um erro bastante elevado, o que evidencia que este não é o método

<sup>1</sup>Média das velocidades de referência dos tubos de cada grupo.

mas considero bem (discutido) concluído!

mas adequado para a determinação desta grandeza. Isto pode ser explicado pelo facto da ordenada na origem ser muito próxima de 0 e a sua incerteza ser da mesma ordem de grandeza, acabando por se tornar pouco precisa, também fruto da acumulação de erros que se dá neste parâmetro.

## 5 Anexo

### Tabelas

$p_{H_2O}$ ( $\pm 0,01$ mmHg)	$T$ ( $\pm 0,5$ $^{\circ}C$ )	$v_{ref}$ ( $ms^{-1}$ )	$u(v_{ref})$ ( $ms^{-1}$ )	nº tubo
21,12	23,0	347,05	0,03	1
21,75	23,5	347,40	0,03	2
22,39	24,0	347,76	0,03	3
22,39	24,0	347,76	0,03	4
23,08	24,5	348,12	0,03	5
23,08	24,5	348,12	0,03	5

Tabela 21: Dados obtidos para o cálculo de  $v_{ref}$ .

nº tubo	$\ell$ (m)	$u(\ell)$ (m)	d (m)	$u(d)$ (m)
1	0,2600	0,0005	0,01046	0,00001
2	0,1300	0,0005	0,01010	0,00002
3	0,1700	0,0005	0,01041	0,00004
4	0,2200	0,0005	0,01034	0,00004
5	0,2400	0,0005	0,01046	0,00005
6	0,0800	0,0005	0,0103	0,0001

Tabela 22: Dimensões dos tubos analisados em SI.

n	$D$ (m)	$u(D)$ (m)	$\Delta y_{ref}$ (m)	$u(\Delta y_{ref})$ (m)	$\Delta y_{exp}$ (m)	$u(\Delta y_{exp})$ (m)	$\Delta y_{ref} - \Delta y_{exp}$ (m)
1	0,01034	0,00005	0,003153166	0,00002	0,001	0,007	0,002
2	0,01034	0,00005	0,003153166	0,00002	0,003	0,004	0,000
3	0,01034	0,00005	0,003153166	0,00002	0,003	0,002	0,000
4	0,01034	0,00006	0,003153212	0,00002	0,002	0,001	0,001
5	0,01034	0,00005	0,003153166	0,00002	0,002	0,001	0,001
6	0,01041	0,00002	0,003176384	0,000007	0,002	0,002	0,001
7	0,01041	0,00002	0,003176384	0,000007	-0,011	0,001	0,014
8	0,01041	0,00002	0,003176384	0,000007	0,003	0,001	0,001

Tabela 23: Dados obtidos para o cálculo de  $\Delta y_{exp}$  a partir das matrizes de ajuste.

Tubo fechado			
$m$	346,2	1026	$b$
$\sigma_m$	0,4	5	$\sigma_b$
$r^2$	0,99998	1E+01	$\sigma_y$

Tabela 24: Matriz de ajuste linear de  $f(n)$  para o tubo fechado, sem o ponto duvidoso.

### Equações de propagação de incertezas

$$u(\bar{x}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (9)$$

$$u(v_{ref}) = \sqrt{0,607^2 u^2(T) + 0,08^2 u^2(p_{H_2O})} \quad (10)$$

Ressonância de tubos fechados numa extremidade:

$$u(v_{exp}) = \sqrt{[(0,2\ell) + (2 \times 0,305D)]^2 u^2(m) + (2m)^2 u^2(\ell) + (2 \times 0,305D) u^2(D)} \quad (11)$$

Ressonância de tubos fechados em ambas as extremidades:

$$u(v_{exp}) = \sqrt{(2\ell)^2 u^2(m) + (2m)^2 u^2(\ell)} \quad (12)$$

## Gráficos

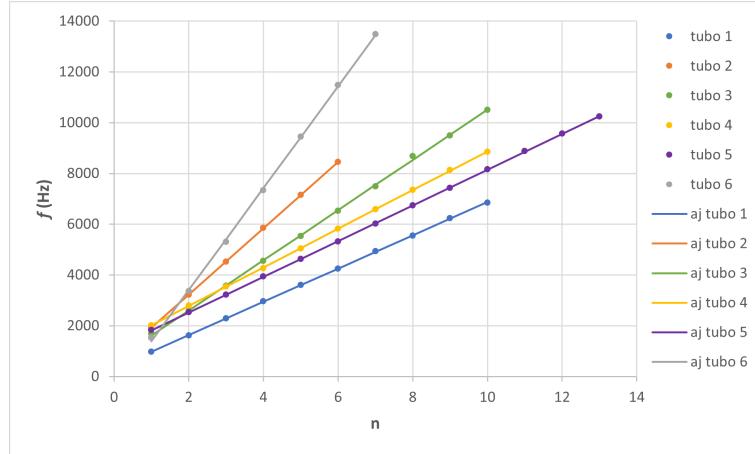


Figura 31: Gráfico da frequência em função do número do modo para todos os tubos e respetivos ajustes lineares, antes da correção dos números dos modos.

## Referências

- [1] Responsáveis pela unidade curricular FIS2020. *Trabalho 2A: Ressonâncias acústicas em tubos ocos*. 2022/2023
- [2] Figuras 3 a 5 elaboradas pela autora do relatório na aplicação *Adobe Photoshop*.