

(Experiência T3B)

"Indução magnética"

Grupo 2 : Sára Caeiro, ~~Paulo~~,
Marco Lourenço, ~~Paulo~~,
João Pedro Ferreira,
Gonçalo Lage.

Objetivos :

- Observar o fenômeno de indução magnética
- Verificar a relação entre a amplitude da tensão induzida nos terminais de uma bobina de prova com a variação temporal de parâmetros associados ao fluxo de campo magnético que atravessa a bobina de prova (Lei de Faraday)
- ~~Calcular o valor da permeabilidade magnética do vácuo, μ_0~~
- Calcular o valor da permeabilidade magnética do vácuo, μ_0

Equações :

$$V_{E0} = \mu_0 \frac{N n S \cos \theta}{L} \omega i_0 \quad (\text{Volts})$$

V_{E0} = amplitude do sinal de tensão induzido na bobina de prova

i_0 (A) = amplitude do sinal do corrente que percorre o solenóide

■ N = número de espiras do solenóide

n = número de espiras da bobina de prova

S = área da seção neta da bobina de prova

$$S = \frac{\pi D^2}{4} \quad (\text{m}^2) \quad \text{onde } D = \text{diâmetro (m)}$$

θ = ângulo entre o eixo do solenóide e o eixo da bobina de prova

ω = frequência angular do sinal do gerador

$$\omega = 2\pi f \quad (\text{rad s}^{-1}) \quad \text{onde } f = \text{frequência (s}^{-1} \text{ ou Hz)}$$

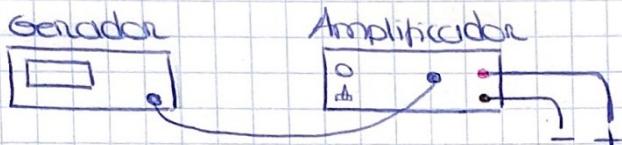
L = comprimento do solenóide (m)

$$V_E = V_{E0} \cos(\omega t) \rightarrow \text{Tensão induzida na bobina}$$

$$i = i_0 \sin(\omega t) \rightarrow \text{Corrente no solenóide}$$

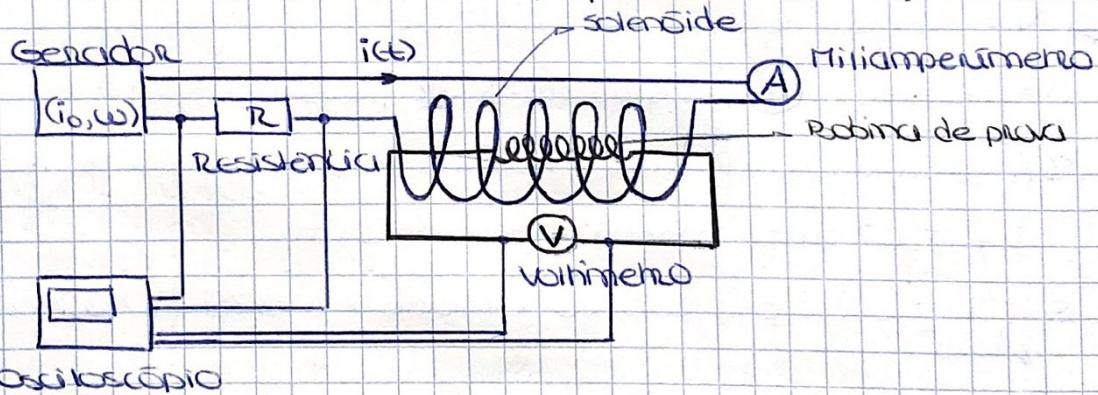
Material e Esquema de montagem:

- Gerador de sinal sinusoidal de frequência variável
- Amplificador de sinal de baixa impedância de saída
(pois o gerador, devido à sua impedância de saída de 50Ω , não disponibiliza corrente suficiente para ~~o amperímetro~~ que o sinal induzido seja mensurável com os multímetros disponíveis)



- Amperímetro
- Voltímetro
- Osciloscópio
- Solenóide ~~do~~

- Várias bobinas de prova (pequenos solenóides), numeradas de 1 a 8.



Notas:

- "Output" do gerador ligado com "IN" do amplificador
(entre) ligação com "+" (vermelho)
- Amperímetro — ~~lado com a resistência~~ do amplificador
— (cui, "cor") ligação com a extremidade do solenóide tem a resistência
- Oscilador — "1" liga com ~~o amperímetro~~ solenóide
(lado com a resistência)
— "2" liga aos terminais do voltímetro
(em cima das da bobina)
- Amperímetro e voltímetro têm de estar em AC (botão amarelo)
- Ao variar a frequência no solenóide há também variação da corrente. Variar a corrente (acertar) para manter constante.

Notas

- É necessário ligar o terminal "-" (preto) do amplificador ao lado do solenoide que tem a resistência em série a 0 "+" (vermelho) à outra extremidade com o amperímetro em série (onde estão as indicações de resistência,)
- No voltmetro e amperímetro mede-se as amplitudes RMS de um sinal sinusoidal

$$V_{RMS} = \frac{V_0}{\sqrt{2}} \quad i_{RMS} = \frac{i_0}{\sqrt{2}}$$

- A bobina de prova deve ter um comprimento pequeno relativamente ao solenoide para que o campo magnético que a atrai vessa possa ser considerado aproximadamente constante
- A bobina de prova (no interior do solenoide) deve estar centrada e com o eixo alinhado com o do solenoide
- A bobina 6 é a que permite variar θ .

Método experimental :

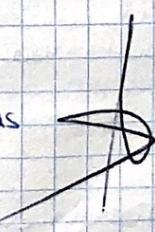
- 1 Feita a montagem, observar num canal um sinal de tensão na resistência proporcional à corrente no solenoide (i) e no outro canal a tensão induzida na bobina de prova (V_0)
- 2 Verificar que a diferença de fase entre os dois sinais se mantém $\pi/2$, tendo independente da variação de qualquer dos parâmetros em estudo
- 3 Estudar a dependência de V_0 de cada parâmetro, ou seja, desseparar a vez, variar um dos parâmetros mantendo os outros constantes

3.1 Em ordem de prioridade :

- (1) V_0 em função de ω , com a bobina 1 (obrigatório)
- (2) " " " i_0 , com a bobina 1 (obrigatório)
- (3) " " " n , com as bobinas 1, 4, 5, 7, 8
- (4) " " " S , com as bobinas 1, 2, 3
- (5) " " " $\cos\theta$, com a bobina 6

Nota : (1), (2) → variar no gerador

restantes → escolher bobinas de prova com as características apropriadas



| Resultados experimentais e análise | :

① Estudo da dependência de V_{Eo} em função de ω :

Variámos

a frequência linear no gerador e, para cada valor, obtemos a amplitude RMS da tensão induzida na bobina de prova.

A variação da frequência provocava alteração da corrente. Por isso, fomos aceitando a ~~constante~~ corrente no gerador de forma a mantê-la aproximadamente constante. Para isto, procurámos manter a amplitude RMS da corrente dentro do intervalo $[0,255; 0,260] \text{ A}$.

$V_{\text{RMS}} (\text{V})$	$f (\text{kHz})$
0.1384	0.866
0.1583	0.905
0.1901	0.966
0.2014	0.990
0.2126	1.020
0.2258	1.048
0.2473	1.087
0.2556	1.110
0.2724	1.131
0.2795	1.160
0.2910	1.180
0.3082	1.217
0.3240	1.245
0.3320	1.275
0.3476	1.301
0.3576	1.332
0.3890	1.406
0.4387	1.544
0.4729	1.612
0.4240	1.477
0.4924	1.635
0.5236	1.706
0.5399	1.765

Parmenos constantes:

$$\bullet i_{\text{RMS}} = (0,255 \pm 0,005) \text{ A}$$

$$\bullet n = 200 \text{ espiras}$$

$$\bullet S = 1,32 \times 10^{-3} \text{ m}^2$$

$$\theta = 0^\circ$$

Convertemos os valores de amplitude de corrente e da amplitude da tensão usando as equações:

$$V_{\text{RMS}} = \frac{V_{\text{Eo}}}{\sqrt{2}}$$

$$i_{\text{RMS}} = \frac{i_0}{\sqrt{2}}$$

A área de secção reta da bobina de prova (S) foi calculada a partir do diâmetro (D) pela equação:

$$S = \frac{\pi D^2}{4}$$

A frequência angular (ω) foi obtida a partir da frequência linear (f) pela equação:

$$\omega = 2\pi f$$

Tabela 1. - Dados experimentais variando a frequência.

Com o objetivo de determinar a permeabilidade do vínuo (μ_0), e tendo em conta a equação

$$V_{\text{Eo}} = \mu_0 \cdot \frac{NnS \cos \omega \cdot i_0}{L}$$

foi feita uma regressão linear $V_{\text{Eo}}(\omega)$ em todo o gama experimental.

Os parâmetros obtidos da regressão linear encontram-se na tabela abaixo.

m	1.00E-04	-0.338	b
Δm	1.00E-06	0.008	Δb
r^2	0.998	0.008	s_y

Tabela 2. - Parâmetros de ajuste da regressão linear $V_{\text{Eo}}(\omega)$.

Com os dados da tabela 1 e 2, obtemos o seguinte gráfico.

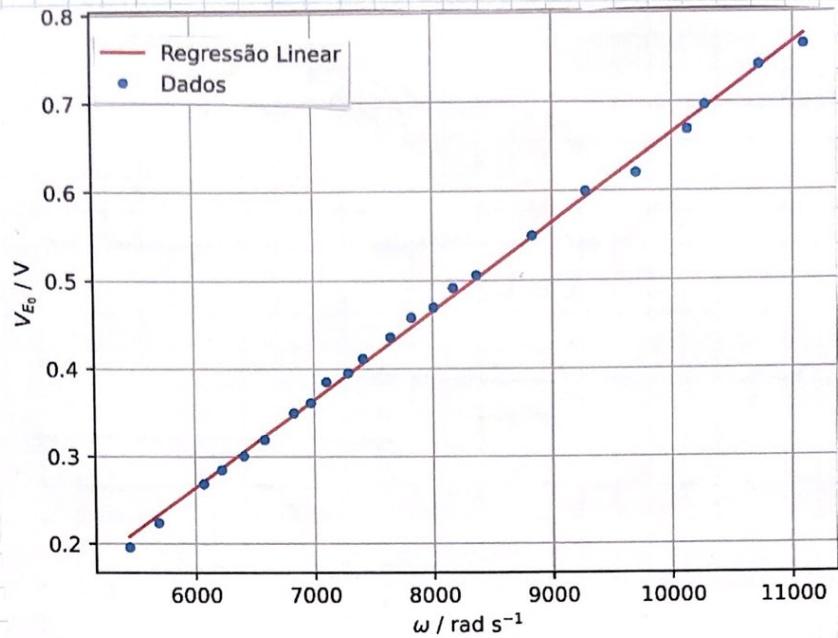


Gráfico 1. - Variação da tensão induzida com a frequência angular do sinal gerado.

O gráfico verifica uma tendência linear na distribuição dos dados, observando-se uma boa correspondência entre os pontos e o ajuste linear, expresso numericamente no valor de r^2 .

Visando uma análise mais detalhada da relação entre o ajuste linear e a distribuição de dados, construiu-se um gráfico de resíduos.

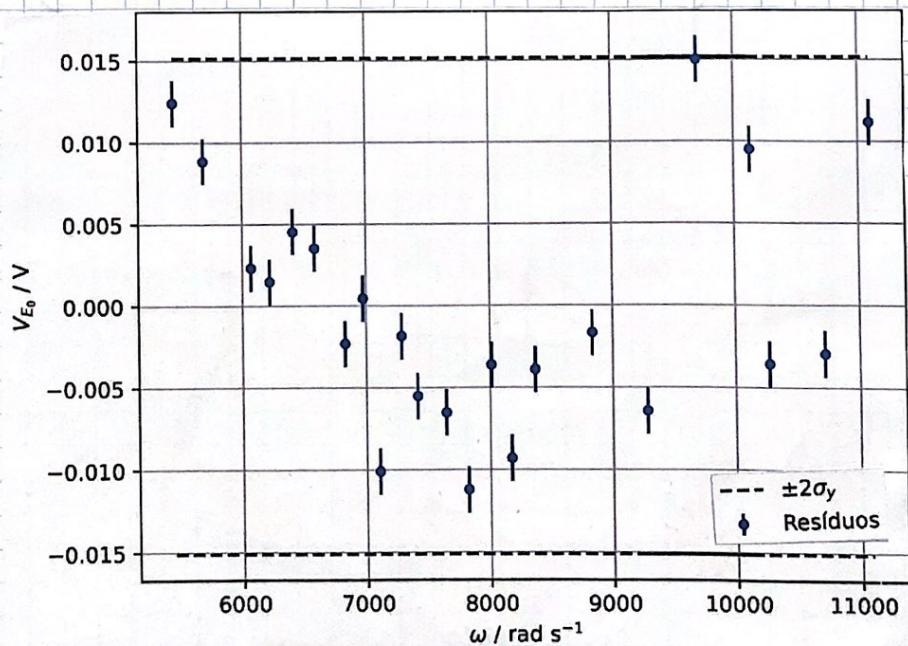


Gráfico 2. - Resíduos da regressão linear de $V_{E_0}(\omega)$.

O gráfico acima indica que todos os valores dos resíduos estão dentro dos limites impostos pela incerteza que, conforme é indicado pelas linhas a tracado do gráfico, correspondem ao dobro do valor de σ_y .

Verifica-se também que existe uma distribuição aleatória dos dados, conforme pretendido.

Tendo isto em conta, podemos usar o valor da m da Tabela 2, juntamente com incerteza associada, para quanto calcular o valor experimental de μ_0 .

$$\text{verm } \mu_0 = \frac{m^2}{NnS \cos\theta}$$

$$\mu(\mu_0) = \mu_0 \sqrt{\frac{\sigma^2(m)}{m^2} + \frac{\sigma^2(I_0)}{I_0}}$$

$$\rightarrow \mu_0 = (1,45 \pm 0,02) \times 10^{-6} \text{ H/m}$$

② Estudo da dependência de V_E em função de i_0

Variámos o valor de I_{RMS} e I_{RHS} no intervalo entre $[200, 700] \text{ mA}$.

Observamos uma tendência parabólica no gráfico $V_E(i_0)$ em tempo real. Recidivando, entendo testar uma outra gama de valores, sendo essa $I_{RHS} \in [10, 180] \text{ mA}$. Nestas, os dados registados para estas duas gamas experimentais são os seguintes:

I_{RMS} (A)	V_{RMS} (V)	I_{RMS} (mA)	V_{RMS} (mV)
0.200	0.4184	10.525	16.81
0.222	0.4375	24.085	52.00
0.243	0.4663	36.375	80.77
0.284	0.5486	58.75	116.54
0.307	0.5939	71.60	148.22
0.329	0.6384	87.52	187.90
0.355	0.6935	104.41	227.79
0.376	0.7424	111.84	245.22
0.403	0.8016	130.20	287.80
0.434	0.8712	140.41	311.26
0.468	0.9511	158.08	351.97
0.493	1.0064	174.68	389.90
0.524	1.0792	181.95	406.54
0.556	1.1534		
0.577	1.2035		
0.599	1.2541		
0.621	1.3040		
0.646	1.3588		
0.670	1.4156		
0.685	1.4500		
0.697	1.4773		
0.244	0.5279		

Tabela 3: Dados exp. da gama 1 (I_{RMS} entre 200mA e 700 mA)

Parâmetros constantes:

$$\circ f = 1554 \text{ Hz} \pm 1 \text{ Hz}$$

$$\circ n = 200 \text{ espiras}$$

$$\circ S = 4,32 \times 10^{-2} \text{ m}^2$$

$$\circ \theta = 0^\circ$$

Tabela 4: Dados exp. da gama 2 (I_{RMS} entre 10mA e 180mA)

Nota: Na realização do ensaio da gama 2, alterou-se a escala do Amperímetro, de Amperes para miliamperes.

Comesou-se por fazer uma análise de dados da gamma 1, fazendo uma regressão linear de V_{E_0} (io); foram obtidos os seguintes parâmetros de ajuste:

m	2.18	-0.08	b
Δm	0.03	0.02	Δb
r^2	0.997	0.03	s_y

Tabela 5: Parâmetros de ajuste da reta linear V_{E_0} (io) para a gamma 1

Com estes dados fizemos o seguinte gráfico:

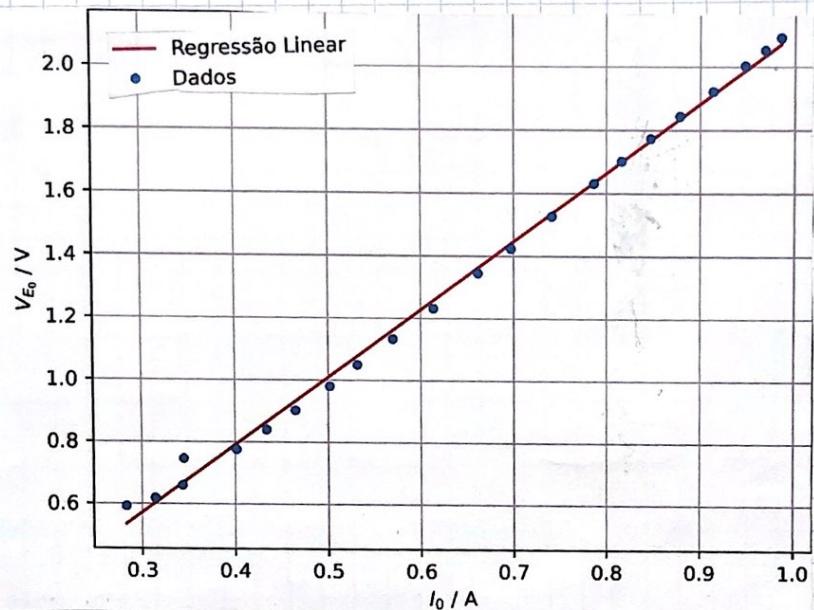


Gráfico 3. - Gráfico de V_{E_0} (io) com ajuste. (gamma 1)

Para melhor ~~desenho~~ verificar a linearidade desta relação, construímos o gráfico de resíduos apresentado abaixo.

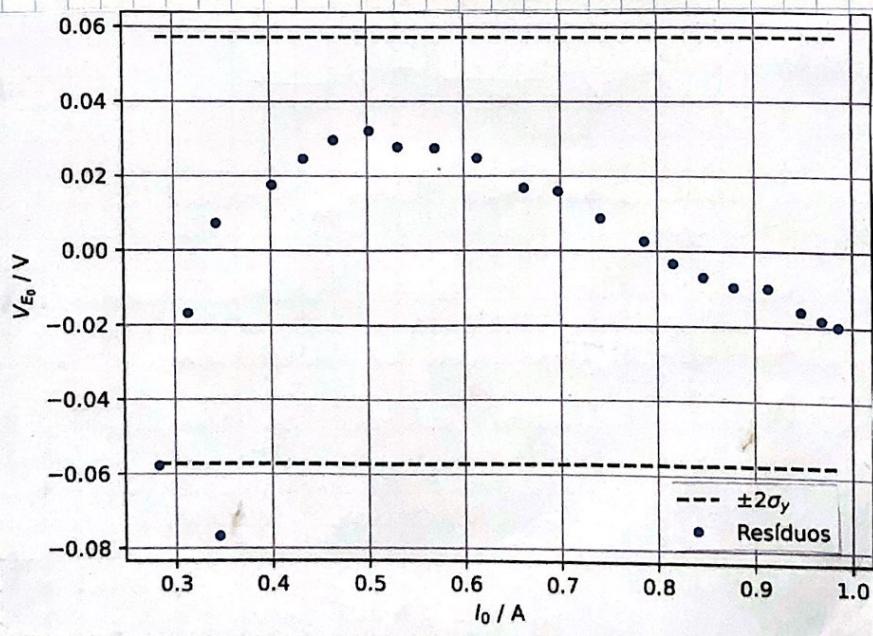


Gráfico 4. - Gráfico de resíduos do ajuste do gráfico 3.

O gráfico de resíduos mostra uma tendência ~~linear~~, cuja razão não se conseguiu identificar.

Apesar da tendência verificada, os valores dos resíduos encontram-se, na sua maioria, dentro do intervalo de confiança ($[-2\sigma_y, 2\sigma_y]$). Apenas dois valores dos resíduos não estão contidos neste intervalo. Porém, como não existe uma grande descrença entre os seus valores e os valores ~~de~~ $\pm 2\sigma_y$, considerou-se que não se justifica a realização de uma nova análise de dados. Assim, foi calculado o valor de μ_0 com os dados da Tabela 5.

$$\mu_0 = \frac{mL}{Nn S \cos \theta w}$$

$$u(\mu_0) = \mu_0 \sqrt{\frac{u^2(m)}{m^2} + \frac{u^2(w)}{w^2}}$$

$$\rightarrow \mu_0 = (1,16 \pm 0,01) \times 10^{-6} \text{ H/m}$$

Realizou-se uma análise de dados análoga para a gama 2 (Tabela 4), em que se mediram menores valores de incerteza. Foram obtidos os seguintes parâmetros de ajuste:

m	2.27	-0.012	b
Δm	0.02	0.003	Δb
r^2	0.9990	0.006	σ_y

Tabela 6: Parâmetros da Regressão Linear $V_{E_0}(i)$ para a gama 2.

Com estes gráficos, dados foi obtido o seguinte gráfico,

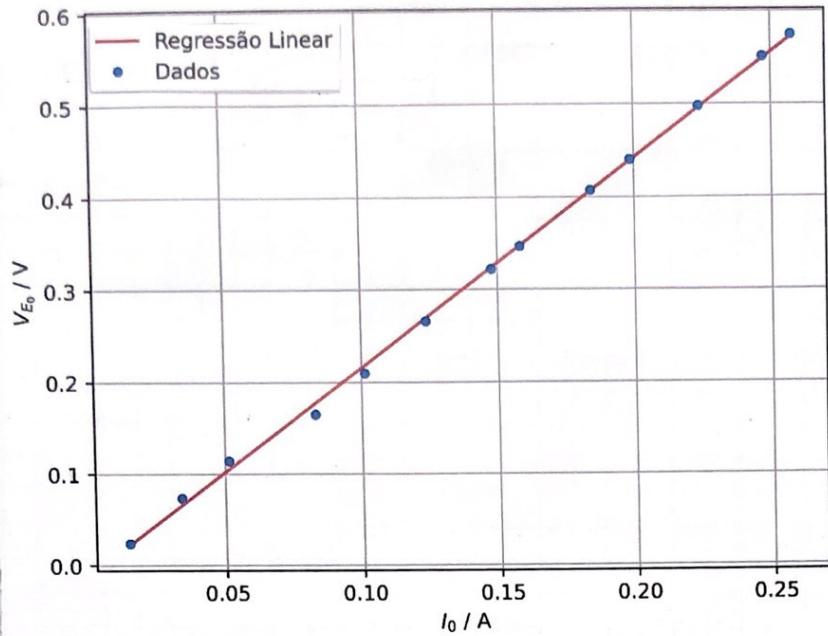


Gráfico 5: Gráfico de $V_{E_0}(I_0)$ com ajuste (gama 2)

Tal como se verificou para o ajuste linear da gama 1 (gráfico 3), também neste gráfico é evidente a distribuição linear dos dados experimentais. ~~estádio~~

Os resíduos correspondentes estão representados no seguinte gráfico

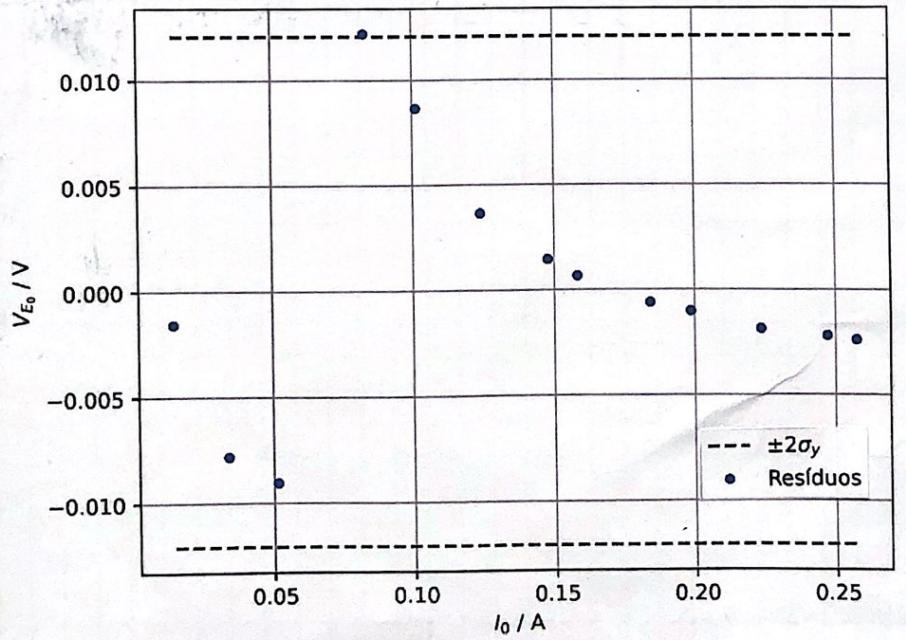


Gráfico 6: Gráfico de resíduos do ajuste do gráfico 5

A análise dos resíduos mostra, tal como na gama 1, que a sua distribuição não é aleatória, apresentando uma certa tendência.

Contudo, ~~há~~ é semelhante da outra gama, a maioria dos valores encontram-se no intervalo de confiança. Temos apenas um valor fora desse, pelo que, como a distância ^{desse} limite do intervalo é muito pequena, a sua influência é insignificativa. Logo, não se justifica um novo ajuste com a eliminação deste dado.

Com isto, calcular-se no a partir do declive obtido (tabela 6), recorrendo-se às mesmas expressões.

$$\rightarrow N_0 = (1,21 \pm 0,01) \times 10^{-6} \text{ H/m}$$

Para uma análise global da variação de V_{E_0} com i_0 , sobrepos-su os gráficos 3 e 5.

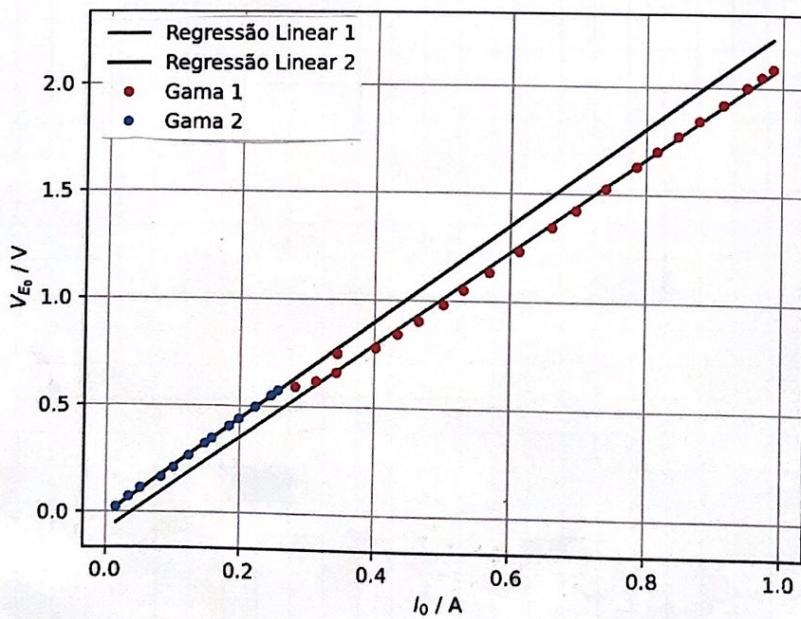


Gráfico 7. - sobreposição dos gráficos 3 + 5.

~~Consequently, there is a limit on the number of people who can be accommodated, so the total area of land available for agriculture is limited, which limits the number of people who can live there.~~

~~Recreational Mathematics~~

Não se observa uma ligação entre esses dois grupos de dados. Podelíamos ter ~~obtido~~ obtido uma melhor análise se, ~~excluíssemos~~, hivéssemos retirado pontos de menor corrente para a gama 1 e pontos de maior corrente para a gama 2.

Caso esses pontos continuassem sobrepostos sobre a repreensão reta do ajuste de cada gamma, poderíamos concluir que a origem do erro experimental estaria no amperímetro, pois é a única diferença sendo as escalas utilizadas.

Podemos também analisar a sobreposição dos gráficos de resíduos (anexos 4 e 6).

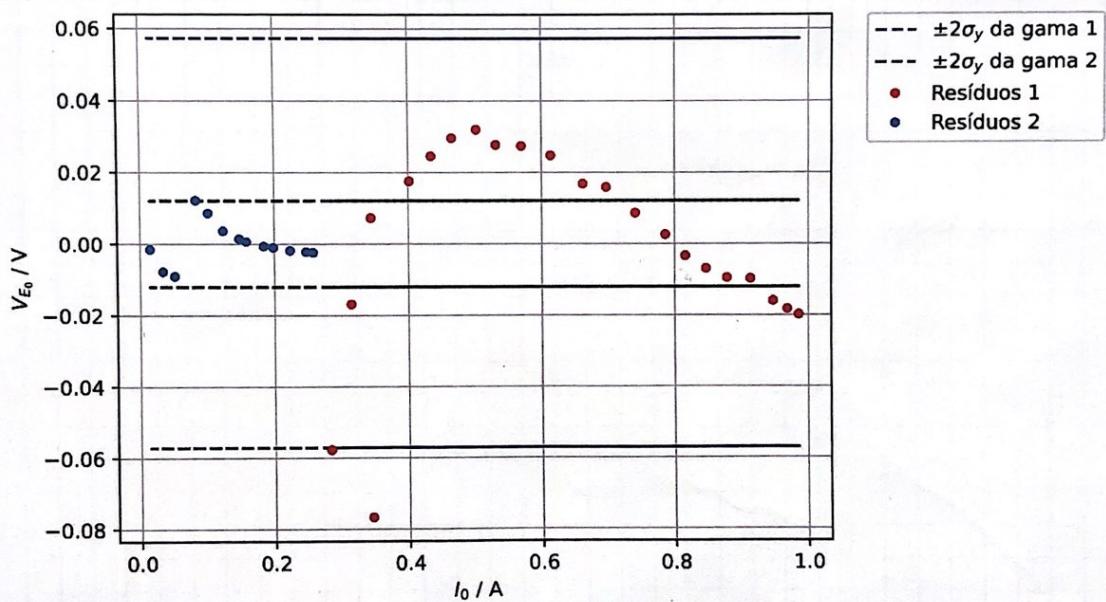


Gráfico 5. - sobreposição dos gráficos 4 e 6.

Vê-se uma tendência aproximadamente sinusoidal nos resíduos, indicativa de um erro sistemático.

Depois de ter considerado vários possíveis causas — erros na montagem experimental, erros na calibração dos aparelhos de medida e erros na própria fundamentação teórica — consideramos que uma causa plausível seria o amperímetro estar com mau funcionamento, provocando medições erráticas de i_0 , cuja influência é em parte minimizada pela aplicação do método dos mínimos quadrados no ajuste linear.

Assim, como os resíduos se encontram dentro da incerteza considerada, foram estes os ajustes mais considerados para as duas gamas.

③ Estudo da dependência de V_{Eo} em função de n :

~~Variação da bobina de prova~~

Utilizamos diferentes bobinas de prova de maneira a variar o valor de n (número de espiras).

$$\approx \pm 0.0001 V$$

Pârametros constantes:

nº da bobina	n	V_{RMS} (V)
1	300	0.5367
4	200	0.3591
5	100	0.1794
7	400	0.7082
8	542	1.4186

- $f = (1493 \pm 1) \text{ Hz}$
- $i_{RMS} = (0,3410 \pm 0,001) \text{ A}$
- $S = 1,32 \times 10^{-3} \text{ m}^2$
- $\theta = 0^\circ$

Tabela 7. - Dados experimentais da variação de n .

Foi feita uma regressão linear $V_{Eo}(n)$ e obtiveram-se os seguintes pârametros (agrupados em tabela).

m	3.8E-03	-0.3	b
Δm	6.0E-04	0.2	Δb
r^2	0.92	0.2	σ

Tabela 8. - Pârametros do ajuste linear $V_{Eo}(n)$.

A partir destas tabelas, foi obtido o seguinte gráfico.

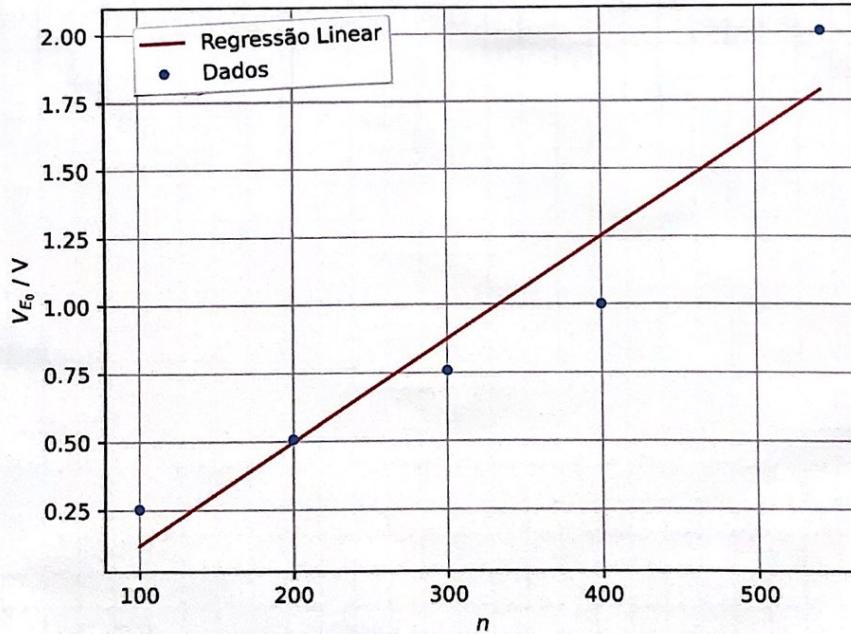


Gráfico 9. - Gráfico de $V_{Eo}(n)$ com ajuste.

Nota-se uma diferença entre os quatro primeiros pontos e o último. Para compreender melhor esta situação, construímos um gráfico de resíduos (gráfico 10).

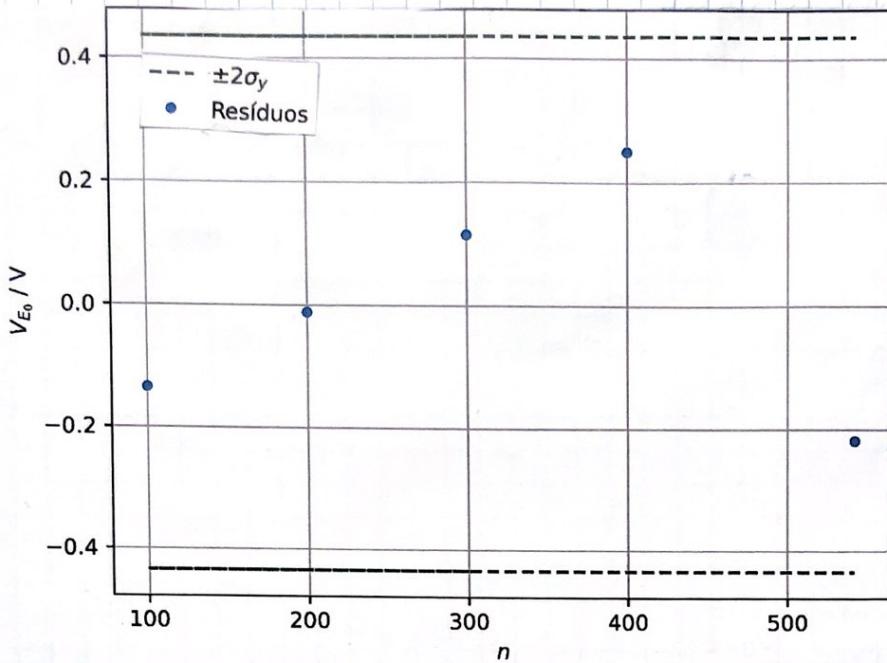


Gráfico 10. – Gráfico de resíduos do ajuste do gráfico 9.

~~Resposta~~ Como o gráfico 9 indica, os primeiros 4 pontos estabeleceram uma tendência linear por si só. Esta tendência é contrabalanceada pelo 5º ponto, o que causa um desvio na reta de ajuste. (Um aumento do valor do declive). Consequentemente, existe um desvio cada vez maior entre os pontos iniciais e a reta de ajuste que se reflete na tendência linear verificada no gráfico 10. (Como esperado, essa tendência não se verifica para o último ponto).

A partir do declive obtido (tabela 9) calculámos μ_0 pela expressão ~~equação~~:

$$\mu_0 = \frac{m L}{N \cos \omega \cdot w_{10}}$$

$$w(\mu_0) = \mu_0 \sqrt{\frac{w^2(m)}{m^2}} + \frac{\mu^2(w)}{w^2} + \frac{\mu^2(I_0)}{I_0^2}$$

$$\mu_0 = (4,0 \pm 0,2) \times 10^{-6} \text{ H/m}$$

④ Estudo da dependência de V_{Eo} em função de S :

De modo a validar a área da secção reta, utilizámos também diferentes bobinas de prova.

Parâmetros constantes:

nº da bobina	$S (m^2)$	$V_{RMS} (V)$
1	1.32E-03	0.8884
2	8.55E-04	0.5811
3	5.31E-04	0.1585

Tabela 9. - Dados experimentais da variação de S .

$$\circ f = (493 \pm 1) \text{ Hz}$$

$$\rightarrow \pm 0.0001 \text{ V}$$

$$\circ i_{RMS} = (0.440 \pm 0.001) \text{ A}$$

$$\circ n = 100 \text{ espiras}$$

$$\circ \Theta = 0^\circ$$

Foi feita a regressão linear com os pares de valores obtidos e chegaram-se aos seguintes parâmetros (Tabela 10).

m	1.3E+03	-0.4	b
Δm	3E+02	0.2	Δb
r^2	0.96	0.1	σ_y

Tabela 10. Parâmetros do ajuste linear de $V_{Eo}(S)$.

A partir das tabelas anteriores, construiu-se o seguinte gráfico.

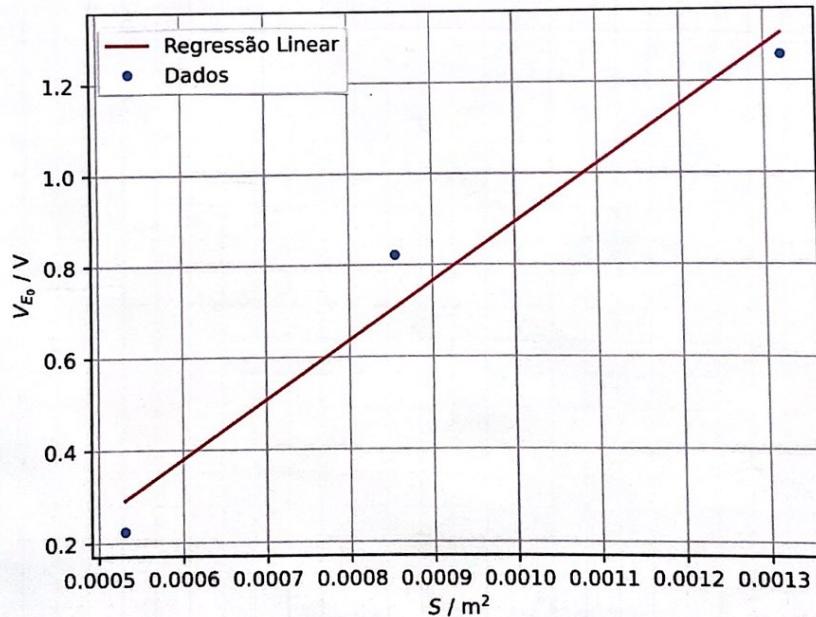


Gráfico 11. - Gráfico de $V_{Eo}(S)$ com ajuste.

O número de pontos não é suficiente para confirmar a relação linear com segurança.

Construímos também o gráfico de resíduos deste ajuste.

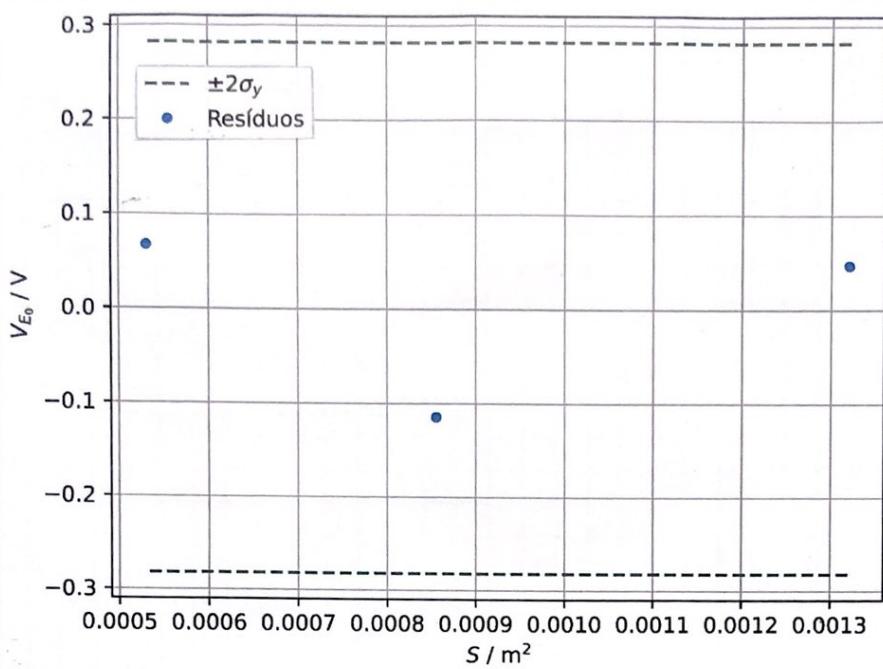


Gráfico 12.- Gráfico de resíduos do ajuste do gráfico 11.

A insuficiência de pontos experimentais não permite concluir com se certeza ~~se~~^{se} existe ou não uma distribuição aleatória dos resíduos. Com os dados obtidos foi calculado o valor de μ_0 , recorrendo às expressões

$$\mu_0 = \frac{mL}{N n \cos \theta w i_0}$$

$$u(\mu_0) = \mu_0 \sqrt{\frac{u^2(m)}{m^2} + \frac{u^2(w)}{w^2} + \frac{u^2(i_0)}{i_0^2}}$$

$$\rightarrow \mu_0 = (1,5 \pm 0,3) \times 10^{-6} \text{ H/m}$$

⑤ Estudo da dependência de V₀ em funções do $\cos \theta$:

De forma a variar o ângulo θ foi usada uma única bobina, previamente introduzida em cima de um transformador. Para cada ângulo, foi introduzida a bobina no solenoide, e registrados os seguintes dados.

θ (°)	V_{RMS} (V)
0	0.1047
15	0.0981
30	0.0901
45	0.0718
60	0.0518
75	0.0279
90	0.0101

Tabela II. Dados Experimentais da ajuste Variação de θ .

Com os dados números da tabela II foi realizada obtida uma matriz com os seguintes parâmetros de ajuste.

Nota: Os valores de "k" usado, na cálculo dos parâmetros da tabela 12 são $\cos \theta$, onde a primeira coluna da tabela II é convertida para radiano

$$\theta (\text{rad}) = \frac{\theta ^\circ \times \pi}{180}$$

m	0.135	0.009	b
Δm	0.004	0.003	Δb
r^2	0.995	0.004	σ

Tabela 12. Parâmetros de Ajuste Linear de V_0 ($\cos \theta$)

Com os dados da tabela anterior, construiu-se o seguinte gráfico.

Parâmetros Constantes:

- $f = (1493 \pm 1) \text{ Hz}$
- $i_0 = (0,440 \pm 0.001) \text{ A}$
- $n = 100$
- $S = 5.31 \times 10^{-4} \text{ m}^2$

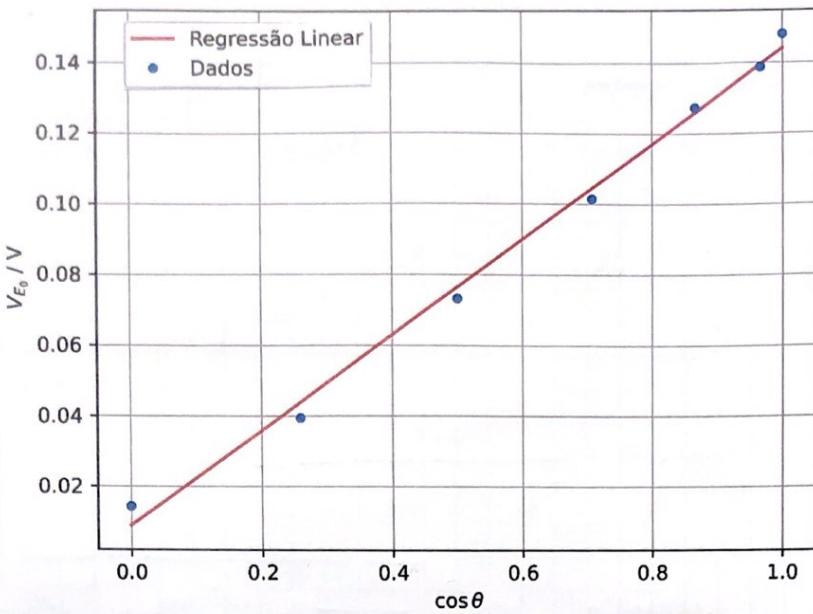


Gráfico 13: Gráfico de $V_{E_0}(\cos\theta)$ com ajuste.

O gráfico revela uma clara correspondência entre o ajuste linear e a distribuição dos dados, conforme era esperado. De forma a analisar o desvio entre o ajuste linear e os dados farei um gráfico de resíduos.

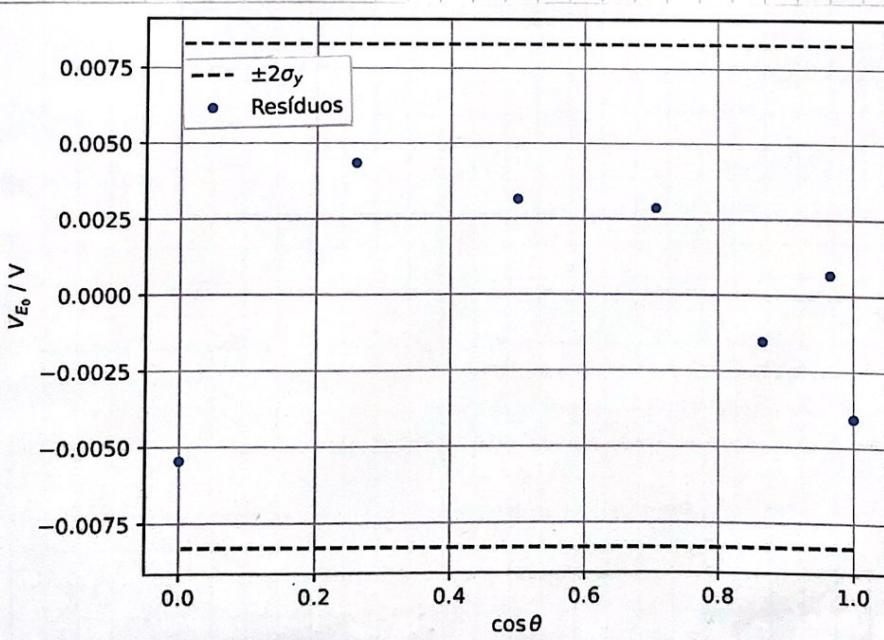


Gráfico 14: Gráfico de Resíduos do ajuste do gráfico 13

O gráfico de resíduos indica que os valores dos resíduos estão ~~estão~~ contidos no intervalo $[-2\sigma_y, 2\sigma_y]$. e que não se verifica uma tendência significativa identificável.

Assim, foram usados os dados da Tabela 12 no cálculo de μ_0 , recorrendo às expressões

$$\mu_0 = \frac{m\bar{L}}{NnS_{\text{swic}}}$$

$$u(\mu_0) = \mu_0 \sqrt{\frac{u^2(w_0)}{w_0^2} + \frac{u^2(m)}{m^2} + \frac{u^2(c_0)}{c_0^2}}$$

$$\rightarrow \mu_0 = (9.0 \pm 0.3) \times 10^{-7} \text{ H/m}$$

Discussão de Resultados e Conclusão

Os resultados finais encontram-se sumarizados na tabela abaixo, acompanhados das incertezas e do erro experimental.

Parâmetro variado	w	I_0 (gama 1)	I_0 (gama 2)	n	s	θ
μ_0 (H/m)	1.45E-06	1.16E-06	1.21E-06	1.0E-06	1.5E-06	9.0E-07
Incerteza	2E-08	1E-08	1E-08	2E-07	3E-07	3E-08
Incerteza relativa %	1.4	0.9	0.8	20.0	20.0	3.3
Erro relativo %	15.4	7.7	3.7	20.4	19.4	28.4
Valor de referência μ_0 (H/m)				1.2566E-06		

Tabela 13: Valores obtidos de μ_0 nas 5 fases da experiência com as respectivas incertezas absolutas e relativas e os seus relativos ao valor de referência dado no protocolo.

• Para melhor ilustrar os dados obtidos, realize-se um gráfico de μ_0 em função do número identificado da parte da experiência.

As barras de incerteza são os valores da incerteza para cada valor de μ_0 experimental.

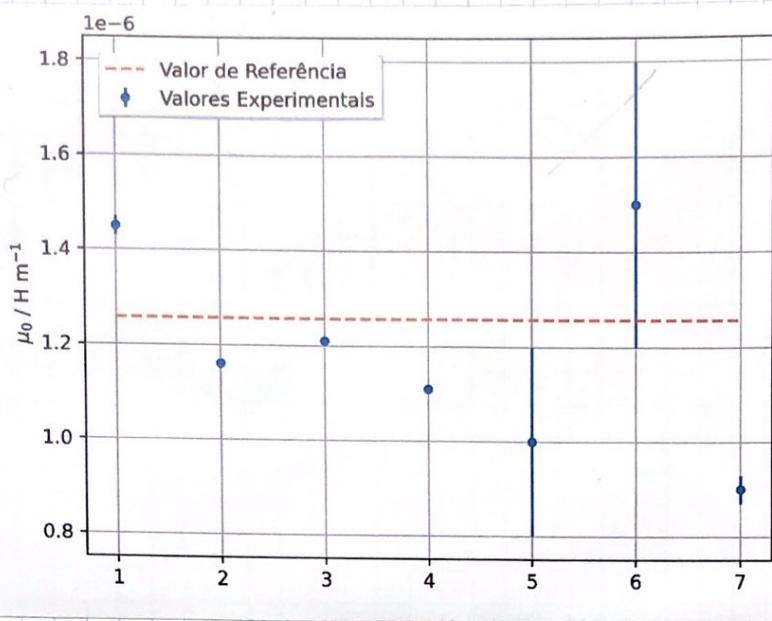


Gráfico 15: Valores experimentais de μ_0 sobrepostos com uma reta correspondente ao valor de referência de μ_0 , em função do nº que designa a fase da atividade.

- o valor medido mais próximo de μ_0 foi o valor obtido quando se variou Io na gama 2.
- contudo, apenas quando se variou Io é que o valor do erro relativo foi inferior à incerteza relativa.

→ Uma forma de explicar o primeiro facto vai de encontro à hipótese quanto à tendência que se observou no gráfico de resíduos de V_{Io} (μ_0). De facto, se o valor de μ_0 tiver sido medido exatamente, isto conduziria a um aumento jás notado no erro nas determinações de Valores Experimentais de μ_0 quando se variava Io para os parâmetros. Por outro lado, esse erro sistemático é minimizado quando se aplica o método dos mínimos quadrados para uma regressão linear de V_{Io} (μ_0), o que leva a que o erro relativo seja muito mais reduzido quando variamos Io .

→ Consideramos o valor obtido para a variação da corrente Io na gama 2 o valor experimental mais próximo da referência, uma vez que não foi considerado o problema no experimento na determinação das incertezas.