

17.5

## Ressonâncias Acústicas em Tubos

Raquel Duque Queirós Freixo

Turma PL1

Grupo 4 – Subgrupo A

Departamento de Física e Astronomia da Universidade do Porto

Junho de 2023

### Resumo

Neste trabalho, determinou-se experimentalmente a velocidade de propagação do som no ar, tendo sido obtidos valores com um erro percentual entre 0,4% e 2% por defeito e um de 4% por excesso, relativamente aos respetivos valores de referência, e incertezas compreendidas entre 0,2% e 2%, demonstrando resultados bastante satisfatórios.

Foram também estimados valores experimentais de  $\Delta y$  (correção no comprimento do tubo aberto devido a propagação do som para o exterior), tendo sido possível concluir que de facto há uma variação desta característica que deve ser tomada em conta na análise.

2 metros i falta  
referência  
disten

# 1. Introdução

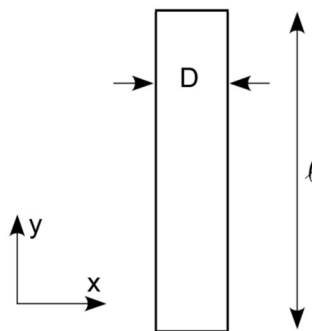
Com este trabalho pretendeu-se:

- Observar espectros de frequência de ressonâncias acústicas em tubos fechados numa e em duas extremidades (figura 5);
- Determinar a velocidade de propagação do som no ar, utilizando tubos fechados numa e em duas extremidades (equações 3 e 4)

A sensação auditiva que percebemos como som é resultado das vibrações mecânicas do meio que alcançam os nossos ouvidos, que ocorrem numa faixa de frequências específica para a nossa espécie. Em muitas situações, a existência de condições de fronteira, que levam a modos próprios de vibração, favorece ou reforça a vibração em frequências bem definidas, conhecidas como frequências de ressonância.

## 1.1 Ressonância em tubos fechados nas duas extremidades

Considere-se o tubo fechado nas duas extremidades. Simplificando o sistema para uma dimensão (ignoram-se as direções transversais  $xx$  e  $zz$ ), este representa-se na Figura 1.



**Figura 1** – Esquema de um tubo de diâmetro interno  $D$  e comprimento  $\ell$ . [1]

Para este sistema, as condições de fronteira são:

- Para  $y = 0$ , não há vibração;
- Para  $y = \ell$ , a vibração é máxima.

A partir destas condições, estabelece-se que a relação  $\ell(y)$  é traduzida pela equação

$$\ell = \frac{\lambda}{4} + n \frac{\lambda}{2} \quad (1)$$

em que  $\lambda$  é o comprimento de onda e  $n$  é modo de ressonância (número inteiro).

Relembrando que a velocidade de propagação do som,  $v$ , se relaciona com o comprimento de onda,  $\lambda$ , e a frequência de vibração,  $f$ , pela equação

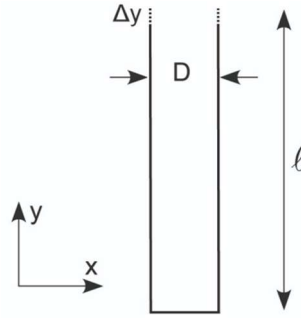
$$v = \lambda f \quad (2)$$

Inserindo a Equação 2, obtém-se uma nova forma para a Equação 1:

$$f = \frac{v}{2\ell} \cdot n + \frac{v}{2\ell} \quad (3)$$

## 1.2 Ressonância em tubos fechados numa extremidade

Considerando o tubo fechado apenas numa extremidade, de acordo com a Figura 2. No extremo aberto, dada a propagação de som para o exterior, a variação da densidade do ar com  $y$  é não nula, como tal é necessário introduzir uma correção ao comprimento do tubo ( $\Delta y$ ).



**Figura 2** – Esquema de um tubo de diâmetro interno  $D$  e comprimento  $\ell + \Delta y$ . [1]

Assim, a expressão para este caso obtém-se aplicando a correção ao comprimento na Equação 3:

$$f = \frac{v}{2(\ell + \Delta y)} \cdot n + \frac{v}{4(\ell + \Delta y)} \quad (4)$$

Será usado o valor  $\Delta y = 0,305D$ , no entanto poder-se-á estimar o valor experimental a partir do gráfico de  $\ell$  em função de  $1/f$ , tendo em conta a expressão

$$\ell = \left(\frac{v}{2} \cdot n + \frac{v}{4}\right) \frac{1}{f} - \Delta y \quad (5)$$

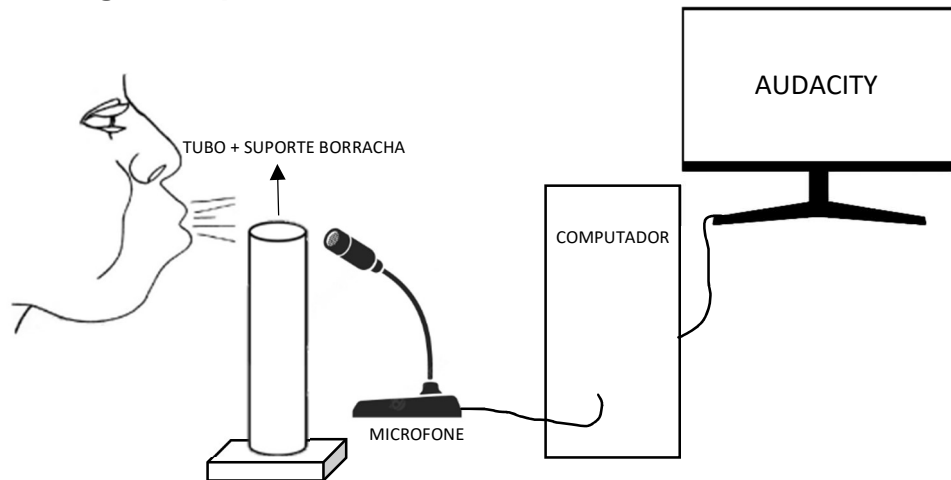
## 1.3 Velocidade do som

A velocidade do som no ar tem um valor de referência aproximado pela expressão infra, segundo [1], na qual  $T$  é a temperatura do ar, em Kelvins, e  $p_{H_2O}$  é a pressão de vapor de água, em mmHg.

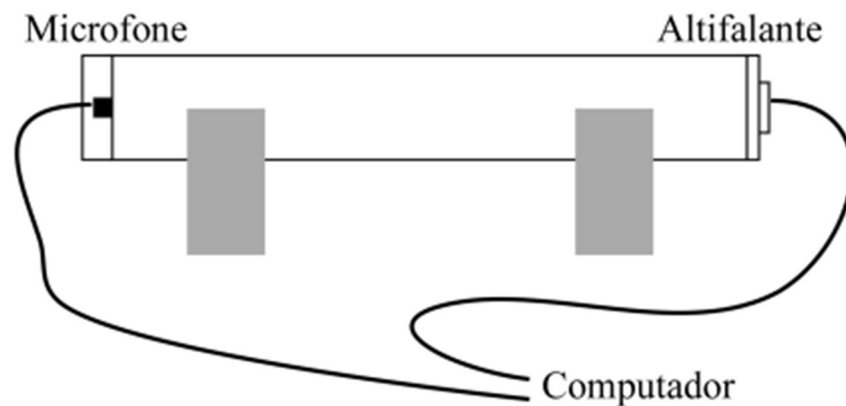
$$v_{ref} = 331,4 + 0,607(T - 273,15) + 0,08p_{v_{H_2O}} \quad (6)$$

## 2. Experiência

### 2.1 Montagem Experimental



**Figura 3** – Esquema de montagem para ressonância do tubo fechado numa extremidade (sobre um suporte de borracha - indeformável)



**Figura 4** – Esquema de montagem para ressonância do tubo fechado nas duas extremidades [1]

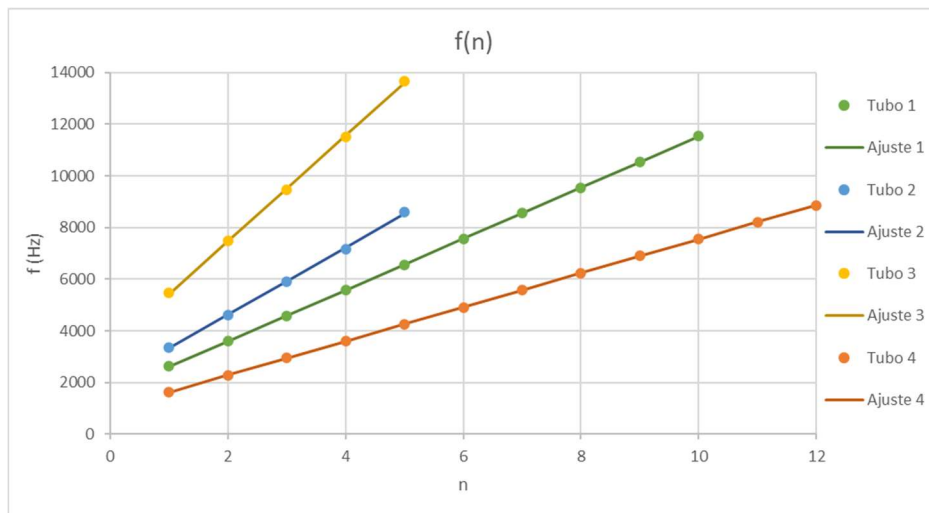
## 2.2 Resultados experimentais e análise

### 2.2.1 Ressonância em tubos fechados numa extremidade

Para efetuar o estudo sobre tubos fechados numa extremidade, foram utilizados 4 tubos de diferentes comprimentos.

Para cada ensaio, registaram-se os valores de  $T$  e  $p_{v_{H_2O}}$  (a partir da tabela fornecida no laboratório). Assim, usando a Equação 6, foi obtido um valor  $v_{ref}$  para cada um.

Após a produção de som sobre os diversos tubos e respetiva análise dos picos de frequência visíveis (exemplo na Figura 5), foi traçado o gráfico da frequência de ressonância,  $f$ , em função do número de modo,  $n$ .



**Figura 9** – Gráfico da frequência em função do número de modo para todos os tubos, com respectivos ajustes lineares

Matriz Ajuste - Tubo 1			
$m$	991	$1,62E+03$	$b$
$\sigma_m$	2	$2E+01$	$\sigma_b$
$r^2$	0,99995	$2E+01$	$\sigma_y$

**Tabela 4** – Matriz de ajuste linear de  $f(n)$  para o tubo 1

Matriz Ajuste Tubo 2			
$m$	$1,30E+03$	$2,0E+03$	$b$
$\sigma_m$	$2E+01$	$6E+01$	$\sigma_b$
$r^2$	0,9995	$5E+01$	$\sigma_y$

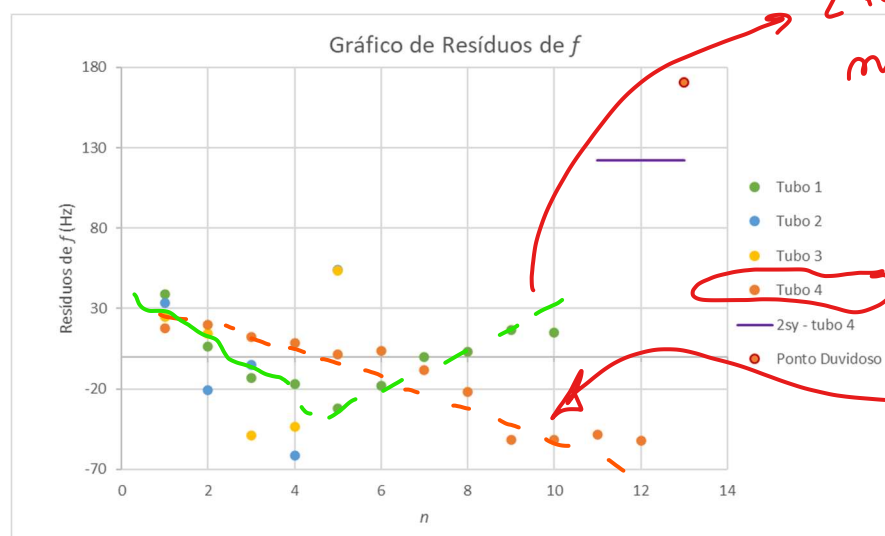
**Tabela 5** – Matriz de ajuste linear de  $f(n)$  para o tubo 2

Matriz Ajuste Tubo 3			
$m$	$2,05E+03$	$3,4E+03$	$b$
$\sigma_m$	$2E+01$	$5E+01$	$\sigma_b$
$r^2$	0,9998	$5E+01$	$\sigma_y$

**Tabela 6** – Matriz de ajuste linear de  $f(n)$  para o tubo 3

Matriz Ajuste 2 - Tubo 4			
$m$	659	965	$b$
$\sigma_m$	1	6	$\sigma_b$
$r^2$	1	$1E+01$	$\sigma_y$

**Tabela 8** – Matriz de ajuste linear de  $f(n)$  para o tubo 4 (sem ponto duvidoso)



**Figura 10** – Sobreposição de gráficos de resíduos para os 4 tubos, elaborado com valores das Tabelas 4 a 7 (identificação de ponto a excluir na análise)

2 tendências  $\Rightarrow$  não ajuste

não pode estar bem!

atribuída aos

quantidade de  
tendências  
lineares?  
↓  
referir

não em todos  
os casos

Numa primeira abordagem, as diferentes gamas experimentais intersestavam-se (Figura 7 no anexo). Daí ter sido efetuado um rearranjo ~~de~~ <sup>dos</sup> números de modo ~~possibilitado~~ <sup>possibilitado</sup> pelo gráfico da Figura 15), eliminando interseções entre gamas (como se pode visualizar nos gráficos das Figuras 8 - supra - e 9 - no anexo).

Pela visualização do gráfico da Figura 9, a relação  $f(n)$  aparenta uma tendência linear. Daí terem sido realizados ajustes lineares para cada uma das gamas, de modo a ser possível recorrer à Equação 4, com o objetivo de se determinar o valor experimental para a velocidade de propagação do som no ar.

Os parâmetros de ajuste, nos quatro casos, reforçam a existência duma tendência linear, já que apresentam valores baixos de incertezas (em percentagem) e uma grande aproximação de  $r^2$  a 1.

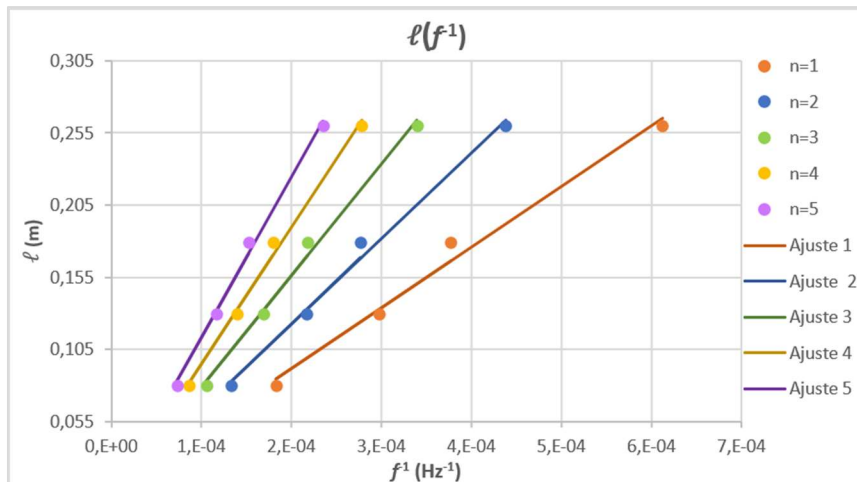
Quanto ao gráfico da Figura 10 (e os gráficos das Figuras 11 a 14 no Anexo) vale notar que não se encontram representadas as barras de incerteza por serem impercetíveis (gama demasiado pequena para ser visualizada). Uma análise destas representações permite verificar a aleatoriedade de distribuição dos resíduos em torno de 0 por valores pequenos (tendo em conta a gama em estudo). Todos os pontos encontram-se dentro do intervalo de confiança a 95%, à exceção do ponto relativo a  $n = 14$  no último gráfico (identificado como ponto duvidoso e removido para a restante análise).

Destarte, foram obtidos os resultados para  $v_{exp}$  das diversas gamas através da relação:  $v_{exp} = 2m((\ell + \Delta y))$ . Devido ao facto de os erros mais significativos estarem associados à ordenada na origem, optou-se por não obter valores experimentais usando esse parâmetro.

	Incertezas e Erro de $v$			
	valor	incerteza	inc (%)	$e_r$ (%)
tubo 1	362	1	0,4%	4%
tubo 2	345	6	2%	0,9%
tubo 3	340	6	2%	2%
tubo 4	346,8	0,7	0,2%	0,4%

**Tabela 9** – Resultados de  $v_{exp}$  para tubos fechados numa extremidade (Note-se que os valores  $v_{ref}$  se encontram tabelados no Anexo – Tabela 2)

Para ser possível estimar o valor real de  $\Delta y$ , foi traçado o gráfico com comprimento,  $\ell$ , em função do inverso da frequência,  $f^{-1}$ , para cada número de modo,  $n$ , (número máximo existente em todos os ensaios, para garantir uma gama experimental adequada).



**Figura 15** – Gráfico do comprimento do tubo em função do inverso da frequência, com respectivos ajustes lineares para diferentes números de modo

Matriz Ajuste - n=1			
m	4,2E+02	0,01	b
$\sigma_m$	3E+01	0,01	$\sigma_b$
$r^2$	0,987	0,01	$\sigma_y$

**Tabela 11** – Matriz de ajuste linear de  $\ell(f^{-1})$  para o n=1

Matriz Ajuste - n=2			
m	5,9E+02	0,004	b
$\sigma_m$	4E+01	0,01	$\sigma_b$
$r^2$	0,991	0,009	$\sigma_y$

**Tabela 12** – Matriz de ajuste linear de  $\ell(f^{-1})$  para o n=2

Matriz Ajuste - n=3			
m	7,7E+02	0,002	b
$\sigma_m$	4E+01	0,01	$\sigma_b$
$r^2$	0,993	0,008	$\sigma_y$

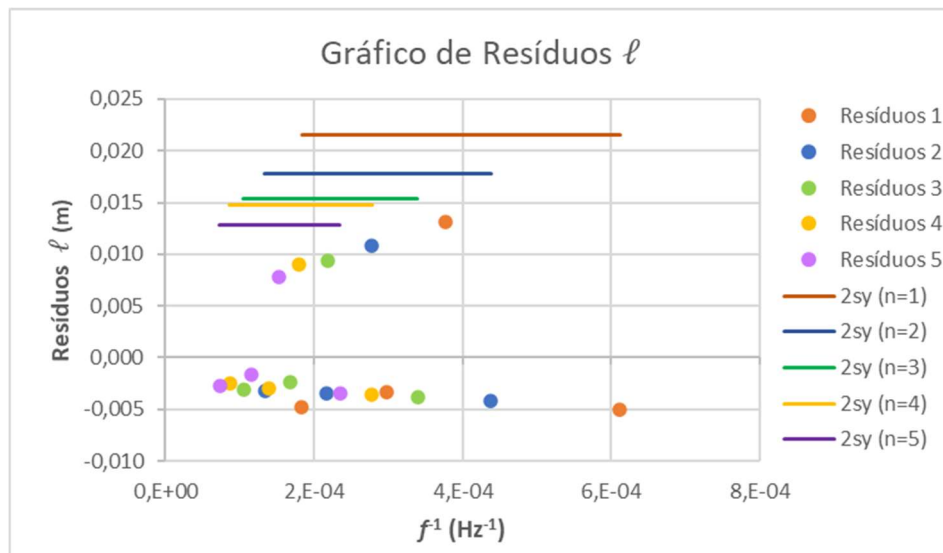
**Tabela 13** – Matriz de ajuste linear de  $\ell(f^{-1})$  para o n=3

Matriz Ajuste - n=4			
m	9,5E+02	0,004	b
$\sigma_m$	5E+01	0,01	$\sigma_b$
$r^2$	0,994	0,007	$\sigma_y$

**Tabela 14** – Matriz de ajuste linear de  $\ell(f^{-1})$  para o n=4

Matriz Ajuste - n=5			
m	1,12E+03	0,001	b
$\sigma_m$	5E+01	0,008	$\sigma_b$
$r^2$	0,995	0,006	$\sigma_y$

**Tabela 15** – Matriz de ajuste linear de  $\ell(f^{-1})$  para o n=5



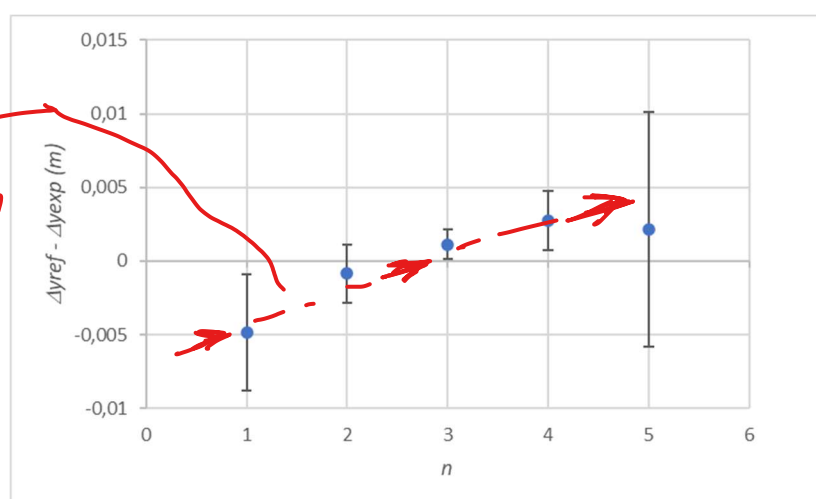
**Figura 16** – Sobreposição de gráficos de resíduos para todos os números de modo, elaborado com valores das Tabelas 9 a 13 (delimitados apenas por +2sy para melhor visualização)

A partir duma análise ao gráfico da Figura 16 (e os gráficos das Figuras 17 a 21 no Anexo), verifica-se a aleatoriedade de distribuição dos resíduos, de valor reduzido, em torno de 0. Os pontos encontram-se todos dentro do intervalo de confiança a 95%, não havendo, portanto, dados a excluir da análise (como seria de se esperar após a escolha anterior de gamas).

Pela visualização do gráfico da Figura 15, é clara a tendência linear da relação  $\ell(f^{-1})$ , como tal foram realizados os respetivos ajustes lineares, sendo assim possível determinar os valores de  $\Delta y$  a partir da Equação 5.

Assim, foram obtidos os resultados, de seguida representados num gráfico de  $\Delta y_{ref} - \Delta y_{exp}$  em função de  $n$  (também registados na Tabela 16 no Anexo). Vale apontar que no cálculo de  $\Delta y_{ref}$  se usou o valor da média dos diâmetros em estudo para  $D$ .

*bars do erro em  $\Delta y_{ref}$ !*  
*comentar ...*  
*sugerir consequências e deduções!*



**Figura 22** – Gráfico de  $\Delta y_{ref} - \Delta y_{exp}$  em função do número de modo, com respetivas barras de incerteza

Deste gráfico conclui-se que os valores  $\Delta y_{exp}$  serão  $\Delta y_{ref}$  desviado apenas pelo valor da incerteza (por defeito).



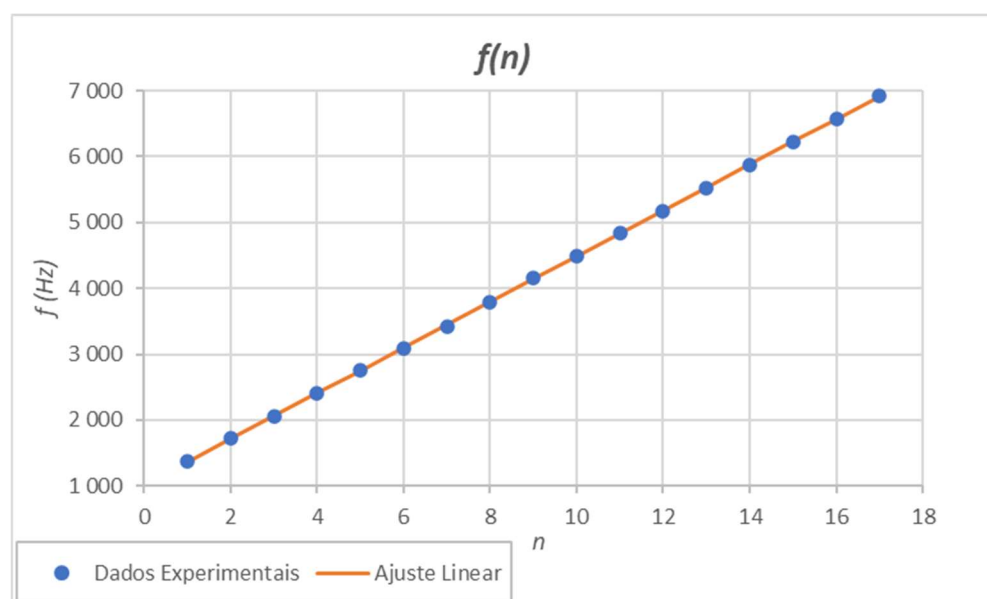
## 2.2.2 Ressonância num tubo fechado nas duas extremidades

Para efetuar o estudo sobre tubos fechados em ambas as extremidades, foram registados os valores de  $T = 25,5^\circ\text{C}$  e o comprimento do tubo usado  $\ell = (0,5000 \pm 0,0005)\text{m}$ . Assim, usando a Equação 6, foi obtido um valor  $v_{ref} = (348,8 \pm 0,8)\text{m/s}$ .

De seguida, gerou-se um ruído branco no altifalante e constituiu-se o respetivo espetro de frequências do som captado pelo microfone, isto por meio do programa *Audacity*.

Após a produção de som dentro do tubo e respetiva análise dos picos de frequência visíveis no espetro, foi traçado o gráfico da frequência de ressonância,  $f$ , em função do número de modo,  $n$ .

Traçado o primeiro ajuste, foram identificados pontos duvidosos (Figuras 23 e 24 no Anexo). Como tal, foi efetuada uma redução da gama em análise e representado o gráfico que a seguir se apresenta.



**Figura 25** – Gráfico da frequência em função do número de modo para todos os tubos, com respetivos ajustes lineares

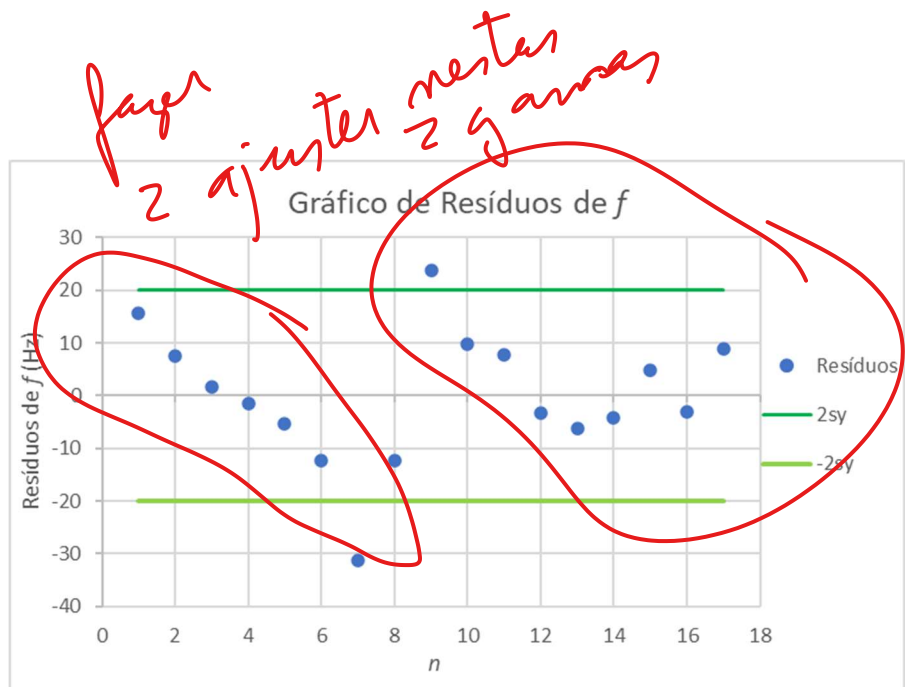
Matriz Ajuste 2			
m	347,0	1019	b
$\sigma_m$	0,6	7	$\sigma_b$
$r^2$	0,99995	1E+01	$\sigma_y$

**Tabela 19** – Matriz de ajuste linear de  $f(n)$  (sem pontos duvidosos)

⊗ NOTA : Faltava um gráfico de (p/ todos os tubos)

$v_{ref} - v_{exp}$

Daqui é que se escolhe o "Resultado Final" e se comenta a qualidade dos resultados! → tubo



**Figura 26** – Gráfico de resíduos de  $f$  para a gama em análise, elaborado com valores da Tabela 19

Optou-se por não representar as barras de incerteza neste gráfico, já que os valores dos resíduos, apesar de não se encontrarem todos compreendidos em  $]-2\sigma_y; +2\sigma_y[$ , terem valores reduzidos quando comparados com a gama de frequências em estudo (o valor residual máximo absoluto representa apenas 2% da menor frequência medida).

Pela análise deste gráfico, é clara a existência de duas gamas a serem avaliadas:  $n \in [1; 8]$  (gama 1) e  $n \in [9; 17]$  (gama 2), já que se identificam dois comportamentos distintos dos resíduos. Os seus respetivos parâmetros de ajuste encontram-se registados nas Tabelas 21 e 22 no Anexo.

No entanto, considerando os parâmetros de ajuste da Tabela 19, com valores pequenos de incertezas e de elevada aproximação de 1 para  $r^2$ , comprova-se (mais uma vez) a relação linear entre  $f$  e  $n$ , sendo, portanto, possível calcular o valor de  $v_{exp}$  pela relação:  $v_{exp} = 2m\ell$ .

Assim, foram obtidos os seguintes valores:

ajustes aqui!

	Incertezas e Erro de $v$			
	valor	incerteza	inc (%)	$e_r$ (%)
Gama Total	347,0	0,7	0,2%	0,5%
Gama 1	342	1	0,3%	2%
Gama 2	345	1	0,3%	1%

**Tabela 20** – Resultados de  $v_{exp}$  para tubo fechado nas duas extremidades

Tendo em conta a inferioridade dos valores obtidos para a incerteza percentual e o erro relativo percentual, é perceptível que usar a gama total é mais adequado do que a dividir em duas partes.

### 3. Conclusão

A velocidade de propagação do som no ar foi calculada com sucesso para os dois tipos de tubo em estudo (fechado numa ou em ambas as extremidades).

Os resultados finais obtidos para o primeiro caso foram:

separado!

1.  $v_{exp} = (362 \pm 1) m/s$  com incerteza relativa de 0,4% e erro relativo de 4% por excesso, pouco significativo;
2.  $v_{exp} = (345 \pm 6) m/s$  com incerteza relativa de 2% e um erro percentual de 0,9% por defeito, quase não tendo significado;
3.  $v_{exp} = (340 \pm 6) m/s$  com incerteza relativa de 2% e um erro percentual de 2% por defeito, ainda assim contribuições não significantes;
4.  $v_{exp} = (346,8 \pm 0,7) m/s$  com incerteza relativa de 0,2% e um erro percentual de 0,4% por defeito, sendo assim o resultado obtido com maior qualidade.

A existência destes desvios, embora pequenos, pode dever-se a um erro aleatório no método de sopragem para o tubo, que originaria modos de vibração transversais.

Reconhece-se que deviam ter sido efetuados ensaios para uma maior quantidade de tubos, para que fosse possível obter ajustes mais adequados e de melhor qualidade, sobretudo no estudo da relação  $\ell(f^{-1})$  que foi feito com uma gama muito reduzida (por sugestão do docente no início da execução experimental).

Já para o segundo caso, o resultado considerado final foi:  $v_{exp} = (347,0 \pm 0,7) m/s$  com incerteza relativa de 0,2% e erro relativo de 0,5% por defeito, denotando elevada qualidade de na obtenção dos dados.

Comparando os dois casos (tubos fechados numa extremidade e tubo fechado em ambas), é facilmente perceptível que o segundo caso origina melhores resultados. Isto pode justificar-se pelas seguintes condições:

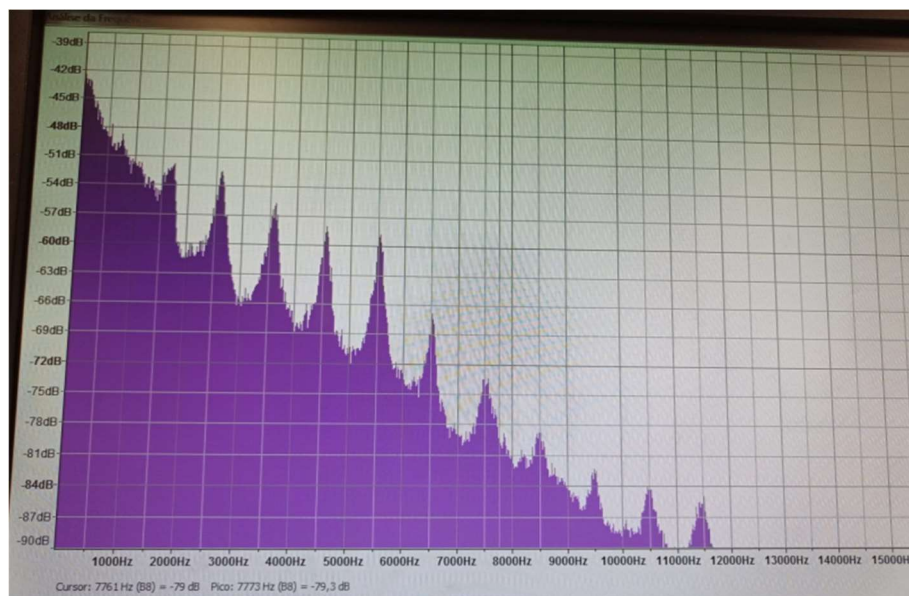
- ausência de erros aleatórios tais como: existência de  $\Delta y \neq 0$ , transferência de calor ao segurar no tubo, contribuição de modos transversais, entre outros;
- utilização de um ruído branco, em oposição ao sopro de intensidade inconstante do executante;
- maior clareza de leitura e estudo de gama de frequências mais extensa.

Em todo o caso, reforça-se que a experiência foi concluída com sucesso e os resultados obtidos apresentam qualidade ~~muito satisfatória~~ excelente!

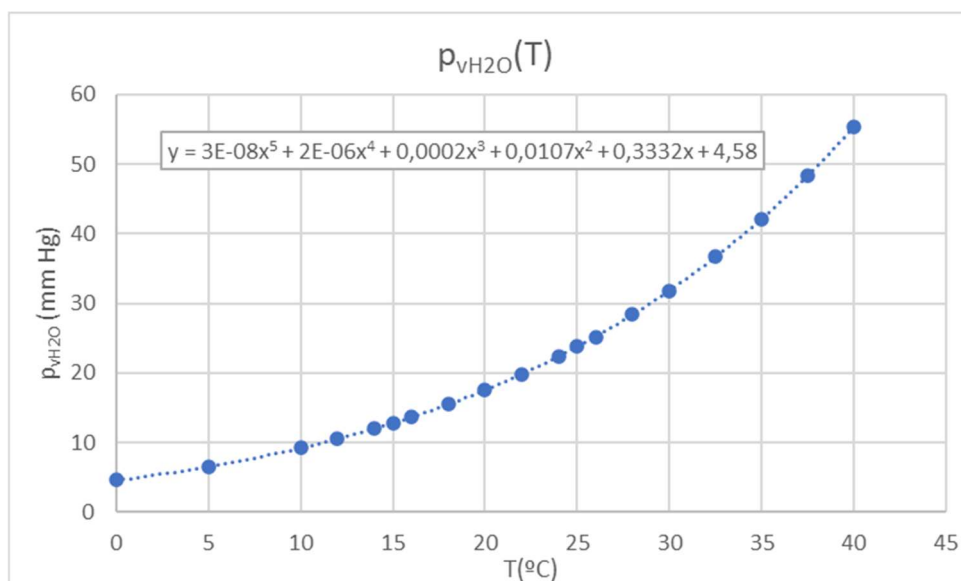
## Referências

- [1] Departamento de Física e Astronomia da Universidade do Porto. Protocolo da experiência T2A – Ressonâncias Acústicas em Tubos. Último acesso a 6 de junho de 2023
- [2] Beatriz Feiteira. Relatório – Ressonâncias Acústicas em Tubos Ocos. Último acesso a 8 de junho de 2023

## Anexo



**Figura 5** – Exemplo de espectro de frequências de ressonância, gerado pelo programa *Audacity*



**Figura 6** – Representação gráfica de  $p_{vH_2O}$  em função de  $T$  (elaborado a partir da tabela disponível no laboratório)

Tubo	$T (\pm 0,01 ^\circ C)$	$v_{ref} (m/s)$	$u(v) (m/s)$	$l (\pm 0,05 cm)$	$l (\pm 0,0005 m)$	$D (\pm 0,00001 m)$	$n$	$f (Hz) \pm 1$	Ajuste $f$	Resíduos $f$
1	24,5	348,1	0,3	17,95	0,1795	0,01041	1	697	682	-15,37
							2	1745	1666	-79,32
							3	2650	2650	-0,27
							4	3608	3634	25,79
							5	4579	4618	38,84
							6	5566	5602	35,89
							7	6541	6586	44,94
							8	7546	7570	24,00
							9	8554	8554	0,05
							10	9548	9538	-9,90
							11	10552	10522	-29,85
							12	11541	11506	-34,79
2	24,5	348,1	0,3	12,95	0,1295	0,01013	1	897	842	-55,04
							2	2131	2117	-13,79
							3	3360	3392	32,46
							4	4607	4668	60,71
							5	5924	5943	18,96
							6	7169	7218	49,21
							7	8586	8493	-92,54
3	25,0	348,2	0,3	8,00	0,0800	0,01024	1	1508	1436	-72,29
							2	3433	3460	27,29
							3	5459	5485	25,86
							4	7494	7509	15,43
							5	9476	9534	58,00
							6	11527	11559	31,57
							7	13669	13583	-85,86
4	25,0	348,2	0,3	26,00	0,2600	0,01046	1	977	995	17,63
							2	1634	1646	12,47
							3	2283	2298	15,30
							4	2942	2950	8,14
							5	3597	3602	4,98
							6	4255	4254	-1,18
							7	4904	4906	1,65
							8	5567	5557	-9,51
							9	6232	6209	-22,67
							10	6913	6861	-51,84
							11	7564	7513	-51,00
							12	8212	8165	-47,16
							13	8867	8817	-50,32
							14	9295	9469	173,51

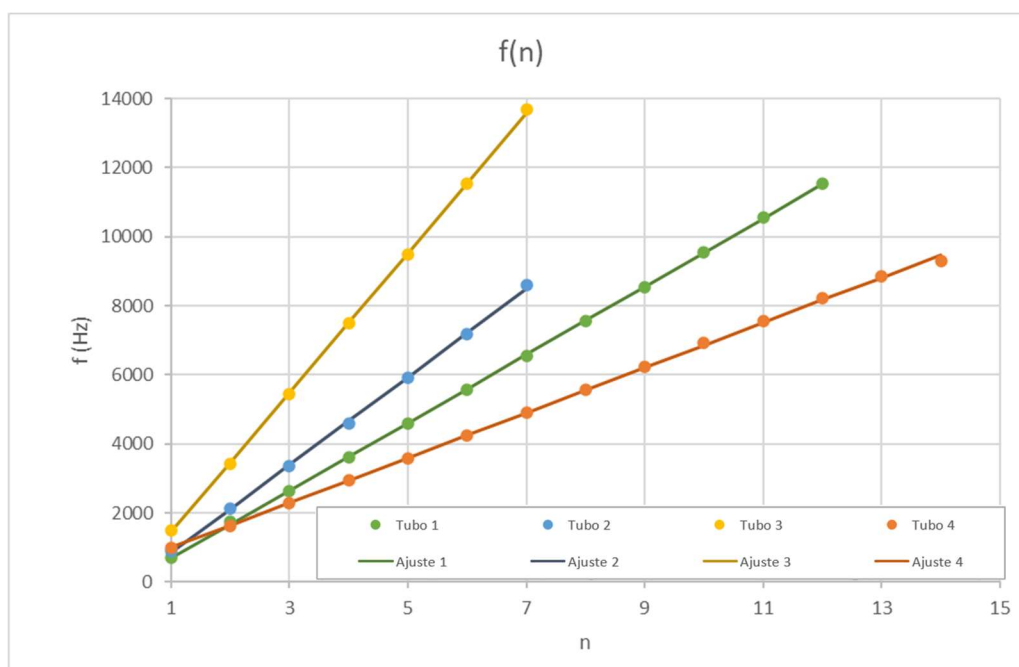
**Tabela 1** – Registo de dados experimentais e respetivos valores de ajuste e resíduos

Tubo	$T (\pm 0,01 ^\circ C)$	$v_{ref} (m/s)$	$u(v) (m/s)$	$l (\pm 0,05 cm)$	$l (\pm 0,0005 m)$	$D (\pm 0,00001 m)$	$n$	$f (Hz) \pm 1$	Ajuste $f$	Resíduos $f$
1	24,5	348,1	0,3	17,95	0,1795	0,01041	1	2650	2611	38,98
							2	3608	3602	6,43
							3	4579	4592	-13,12
							4	5566	5583	-16,67
							5	6541	6573	-32,22
							6	7546	7564	-17,78
							7	8554	8554	-0,33
							8	9548	9545	3,12
							9	10552	10535	16,57
							10	11541	11526	15,02
2	24,5	348,1	0,3	12,95	0,1295	0,01013	1	3360	3326	33,60
							2	4607	4628	-20,80
							3	5924	5929	-5,20
							4	7169	7231	-61,60
							5	8586	8532	54,00
3	25,0	348,2	0,3	8,00	0,0800	0,01024	1	5459	5434	24,60
							2	7494	7480	14,30
							3	9476	9525	-49,00
							4	11527	11570	-43,30
							5	13669	13616	53,40
4	25,0	348,2	0,3	26,00	0,2600	0,01046	1	1634	1652	17,89
							2	2283	2303	20,05
							3	2942	2954	12,21
							4	3597	3605	8,37
							5	4255	4257	1,53
							6	4904	4908	3,69
							7	5567	5559	-8,15
							8	6232	6210	-21,99
							9	6913	6861	-51,84
							10	7564	7512	-51,68
							11	8212	8163	-48,52
							12	8867	8815	-52,36
							13	9295	9466	170,80

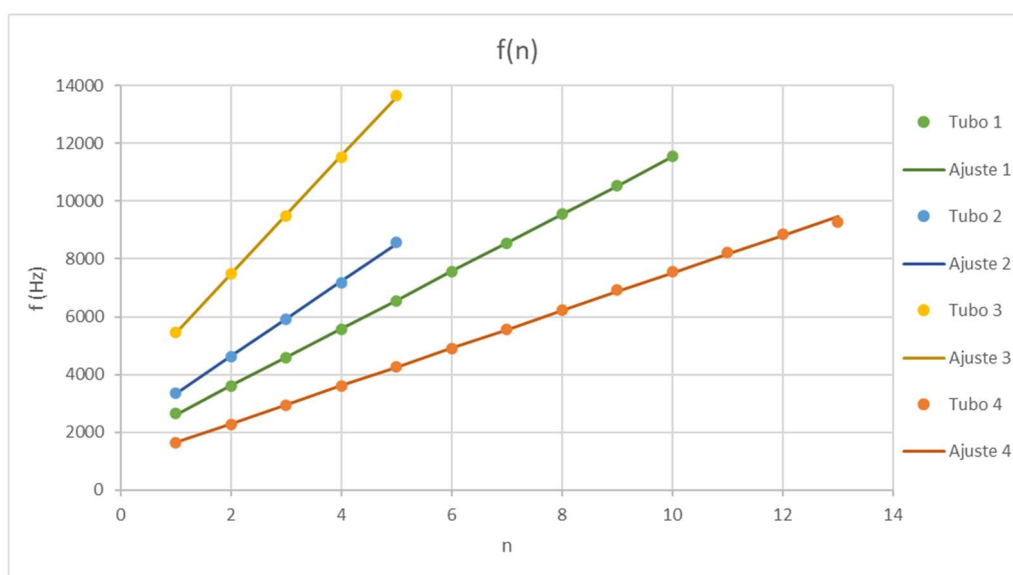
**Tabela 2** – Dados utilizados para análise de  $f(n)$  (após correção aos números de modo)

	Tubo 1	Tubo 2	Tubo 3	Tubo 4
	d (mm)	d (mm)	d (mm)	d (mm)
	10,30	10,1	10,64	10,43
	10,50	10,15	10,30	10,46
	10,40	10,12	10,00	10,50
	10,43	10,14	10,02	10,43
	média (mm)	10,41	10,13	10,24
média (m)	0,010408	0,010128	0,01024	0,010455

**Tabela 3** – Diâmetros dos tubos utilizados



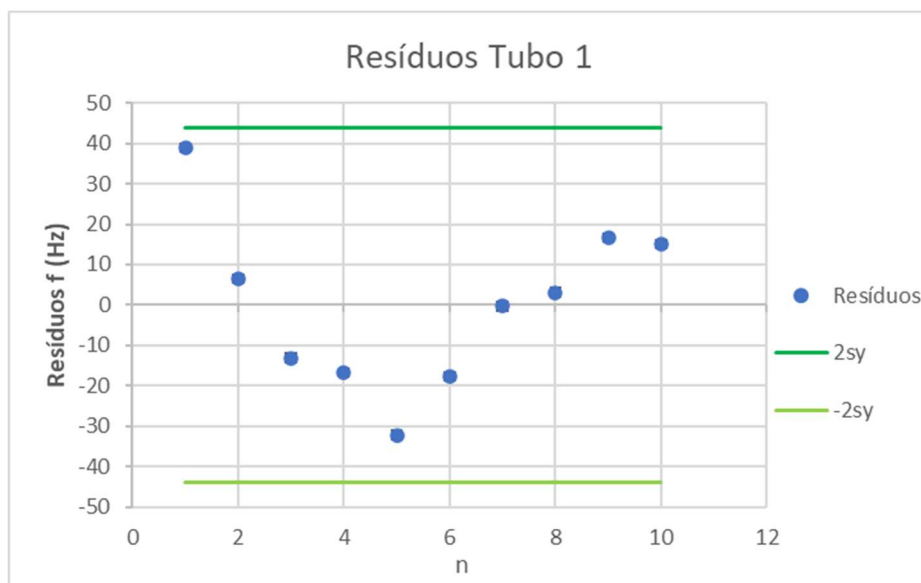
**Figura 7** – Gráfico da frequência em função do número de modo e respectivos ajustes lineares



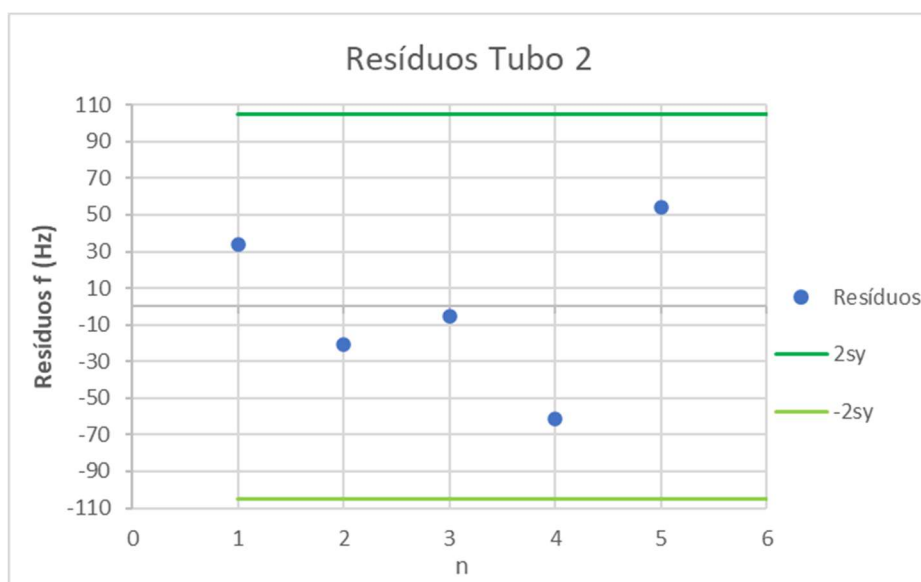
**Figura 8** – Gráfico da frequência em função do número de modo (adequado), com respectivos ajustes lineares para todos os tubos

Matriz Ajuste Tubo 4			
m	651	1,00E+03	b
$\sigma_m$	5	4E+01	$\sigma_b$
$r^2$	0,9995	6E+01	$\sigma_y$

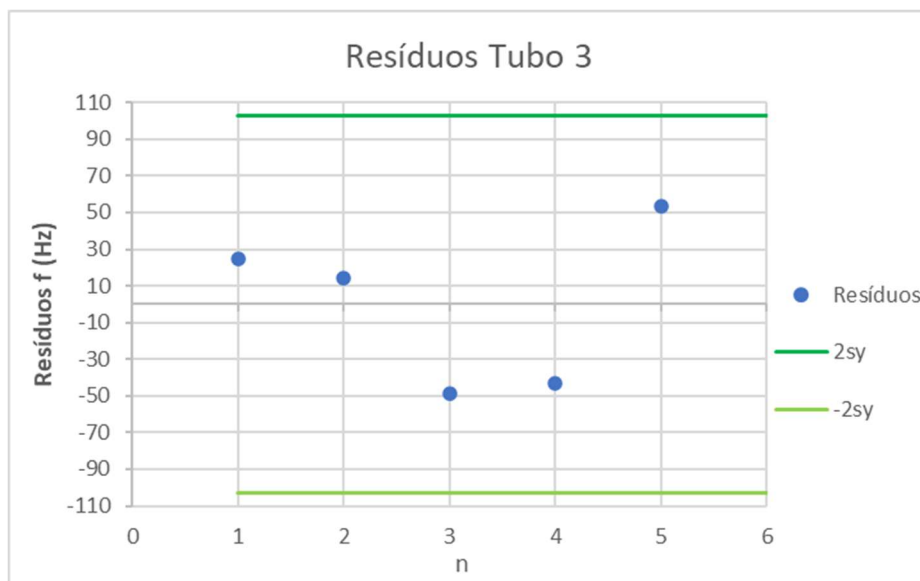
**Tabela 7** – Matriz de ajuste linear para o tubo 4 (com ponto duvidoso)



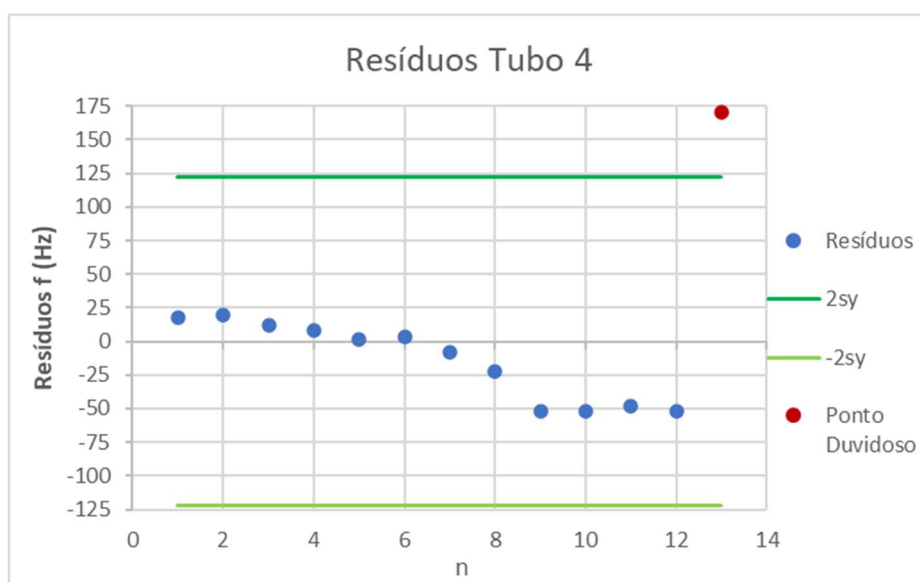
**Figura 11** – Gráfico de resíduos do ajuste  $f(n)$  para o tubo 1



**Figura 12** – Gráfico de resíduos do ajuste  $f(n)$  para o tubo 2



**Figura 13** – Gráfico de resíduos do ajuste  $f(n)$  para o tubo 3

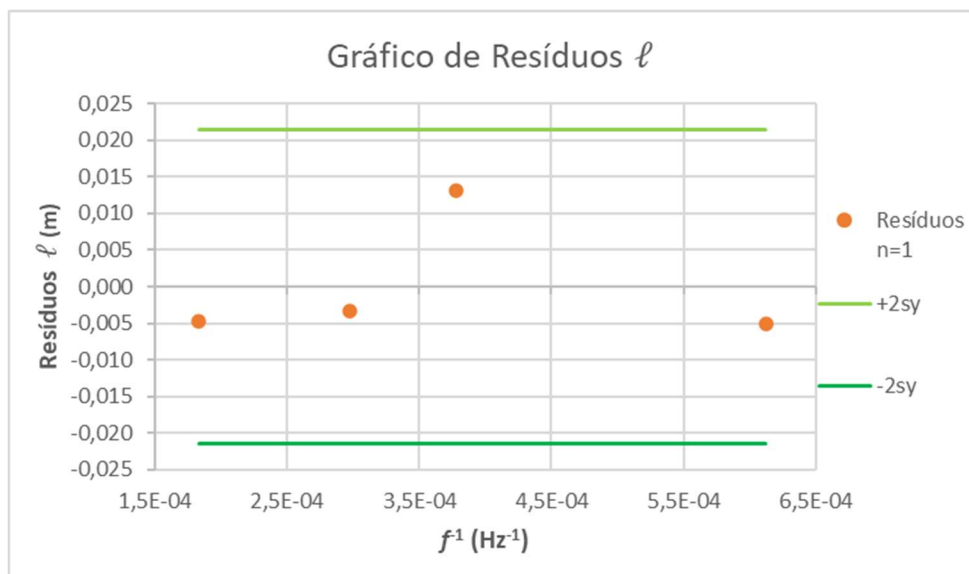


**Figura 14** – Gráfico de resíduos do ajuste  $f(n)$  para o tubo 4

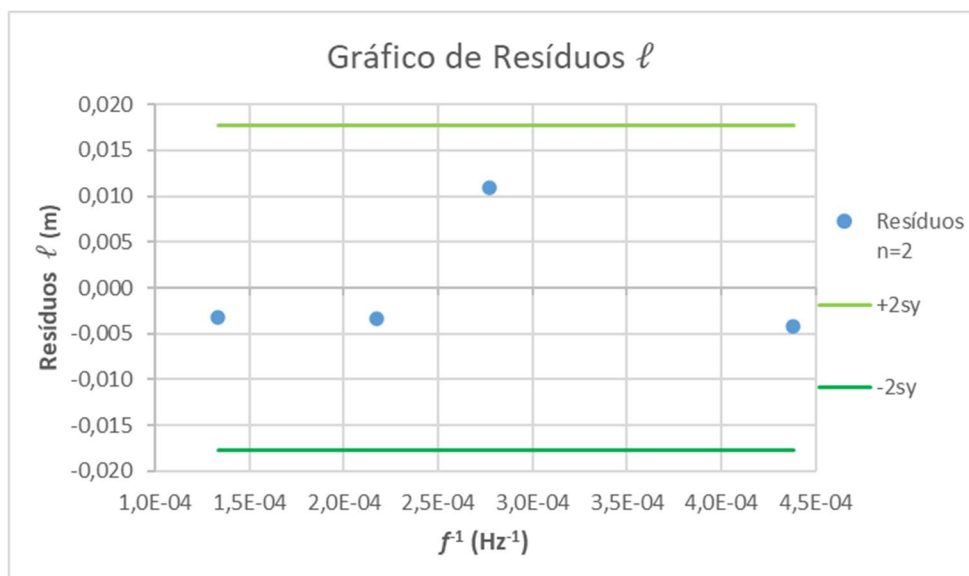
$\ell$ (m) $\pm 0,0005$	$f^{-1}$ (Hz $^{-1}$ )				
	n=1	n=2	n=3	n=4	n=5
0,1795	0,000377	0,000277	0,000218	0,000180	0,000153
0,1295	0,000298	0,000217	0,000169	0,000139	0,000116
0,0800	0,000183	0,000133	0,000106	0,000087	0,000073
0,2600	0,000612	0,000438	0,000340	0,000278	0,000235

**Tabela 10** – Valores utilizados para análise de  $\ell(f^{-1})$

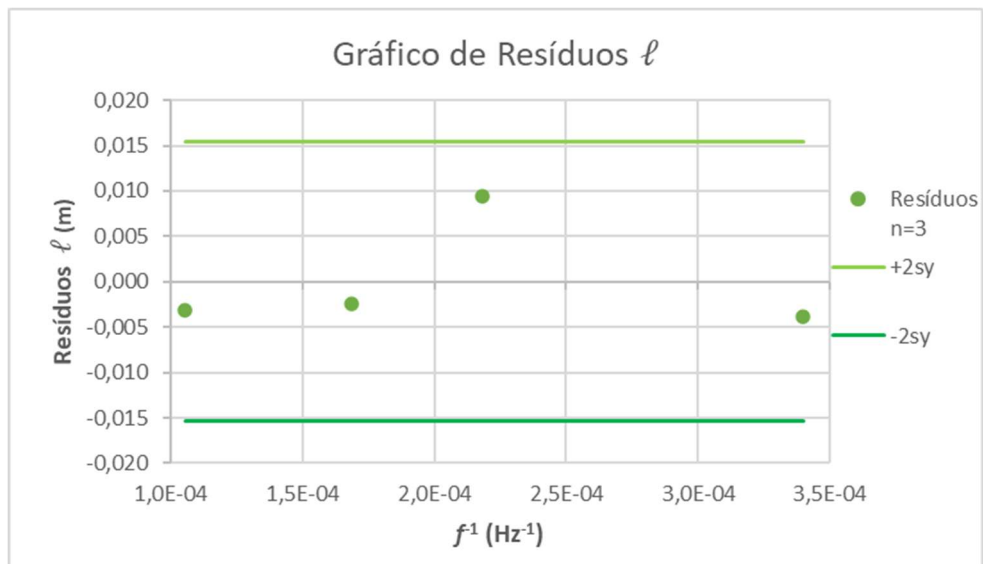




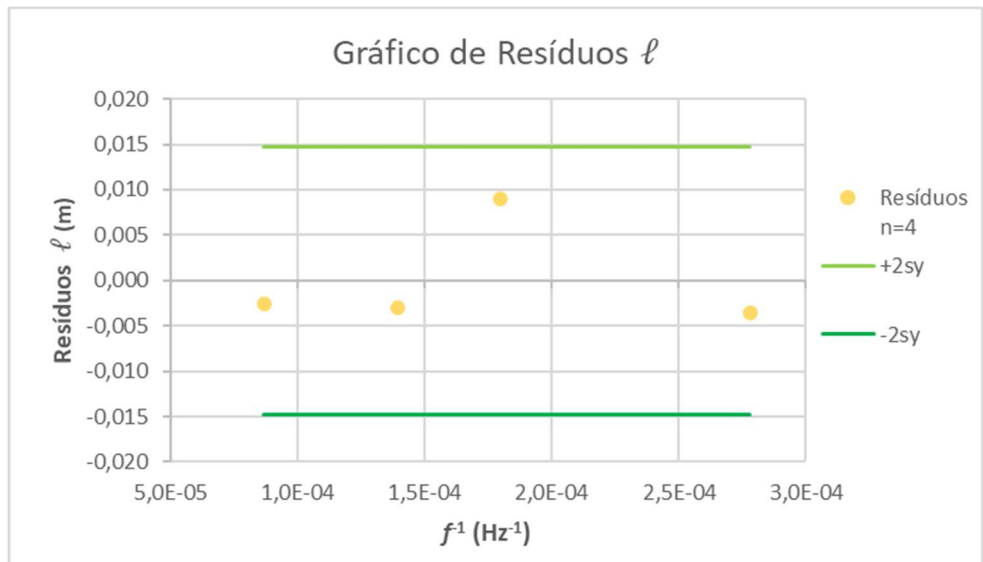
**Figura 17** – Gráfico de resíduos do ajuste  $\ell(f^{-1})$  para n=1



**Figura 18** – Gráfico de resíduos do ajuste  $\ell(f^{-1})$  para n=2



**Figura 19** – Gráfico de resíduos do ajuste  $\ell(f^{-1})$  para n=3



**Figura 20** – Gráfico de resíduos do ajuste  $\ell(f^{-1})$  para n=4

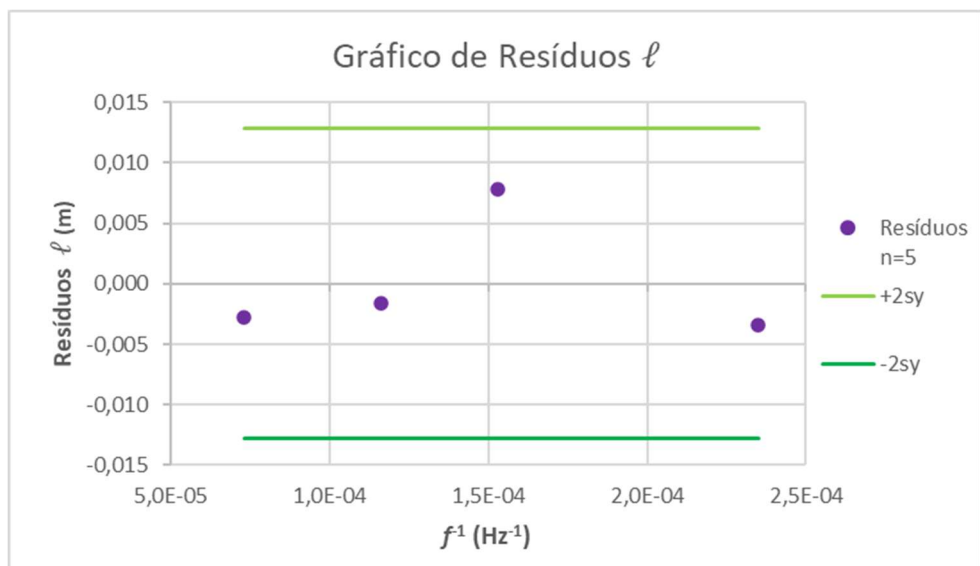


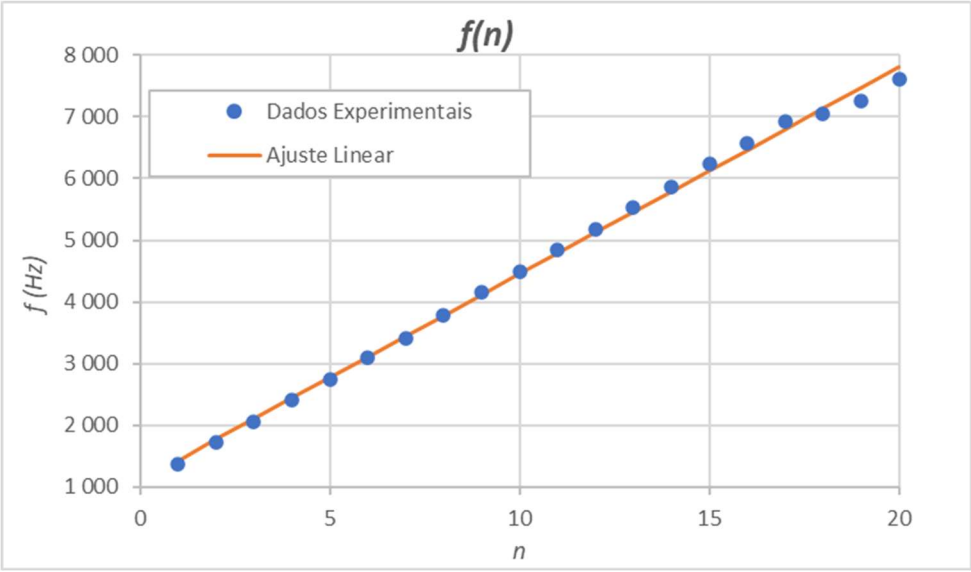
Figura 21 – Gráfico de resíduos do ajuste  $\ell(f^{-1})$  para n=5

n	D ( $\pm 0,00005$ m)	$\Delta y_{ref}$ ( $\pm 0,00002$ m)	$\Delta y_{exp}$ (m)	$u(\Delta y_{exp})$ (m)	$\Delta y_{ref} - \Delta y_{exp}$ (m)
1	0,01031	0,00314455	0,008	0,004	-0,00485545
2	0,01031	0,00314455	0,004	0,002	-0,00085545
3	0,01031	0,00314455	0,002	0,001	0,00114455
4	0,01031	0,00314455	0,0004	0,002	0,00274455
5	0,01031	0,00314455	0,001	0,008	0,00214455

Tabela 16 – Valores utilizados para a análise de  $\Delta y_{ref} - \Delta y_{exp}$

$\ell$ ( $\pm 0,0005$ m)	$v_{ref}$ ( $\pm 0,3$ m/s)	n	f (Hz)	u(f) (Hz)	Ajuste f (Hz)	Resíduos f (Hz)	Ajuste f 2 (Hz)	Resíduos f 2 (Hz)
0,5000	348,8	1	1382	30	1433,0	51,0	1366,4	15,6
		2	1721	30	1768,2	47,2	1713,4	7,6
		3	2062	30	2103,4	41,4	2060,4	1,6
		4	2406	30	2438,6	32,6	2407,4	-1,4
		5	2749	30	2773,8	24,8	2754,4	-5,4
		6	3089	50	3109,0	20,0	3101,3	-12,3
		7	3417	50	3444,3	27,3	3448,3	-31,3
		8	3783	40	3779,5	-3,5	3795,3	-12,3
		9	4166	30	4114,7	-51,3	4142,3	23,7
		10	4499	30	4449,9	-49,1	4489,3	9,7
		11	4844	30	4785,1	-58,9	4836,3	7,7
		12	5180	30	5120,3	-59,7	5183,2	-3,2
		13	5524	30	5455,5	-68,5	5530,2	-6,2
		14	5873	30	5790,7	-82,3	5877,2	-4,2
		15	6229	70	6126,0	-103,0	6224,2	4,8
		16	6568	70	6461,2	-106,8	6571,2	-3,2
		17	6927	50	6796,4	-130,6	6918,2	8,8
		18	7052	110	7131,6	79,6		
		19	7264	50	7466,8	202,8		
		20	7615	80	7802,0	187,0		

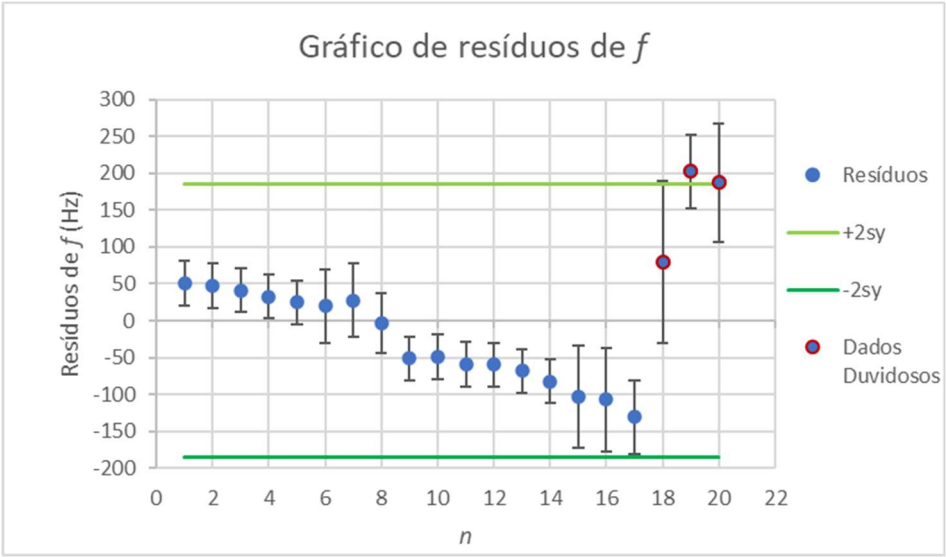
Tabela 17 – Dados utilizados para análise de  $f(n)$



**Figura 23** – Gráfico da frequência em função do número de modo, com respectivo ajuste linear

Matriz Ajuste 1			
m	335	1,10E+03	b
$\sigma_m$	4	4E+01	$\sigma_b$
$r^2$	0,998	9E+01	$\sigma_y$

**Tabela 18** – Matriz de ajuste linear (com pontos duvidosos)



**Figura 24** – Gráfico de resíduos do ajuste de  $f(n)$

Matriz Ajuste - Gama 1			
m	342	1038	b
$\sigma_m$	1	6	$\sigma_b$
$r^2$	0,99994	7	$\sigma_y$

**Tabela 21** – Matriz de ajuste linear de  $f(n)$  para a gama 1

Matriz Ajuste - Gama 2			
m	345	1,05E+03	b
$\sigma_m$	1	2E+01	$\sigma_b$
$r^2$	0,99992	9	$\sigma_y$

**Tabela 22** – Matriz de ajuste linear de  $f(n)$  para a gama 2

### Equações de propagação de incerteza

$$u(\bar{x}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (7)$$

$$u(v_{ref}) = \sqrt{(0,607 u(T))^2 + (0,08 u(p_{v_{H_2O}}))^2} \quad (8)$$

Para tubos fechados numa extremidade:

$$u(v_{exp}) = \sqrt{[0,2\ell + (2 \times 0,305D)]^2 u(m)^2 + [2m u(\ell)]^2 + [2 \times 0,305D \times u(D)]^2} \quad (9)$$

Para tubo fechado nas duas extremidades:

$$u(v_{exp}) = \sqrt{[2\ell u(m)]^2 + (2m u(\ell))^2} \quad (10)$$