

T4 B - Determinação de módulos elásticos de materiais pelo método das vibrações de uma barra encastreada e pelo pêndulo de torção

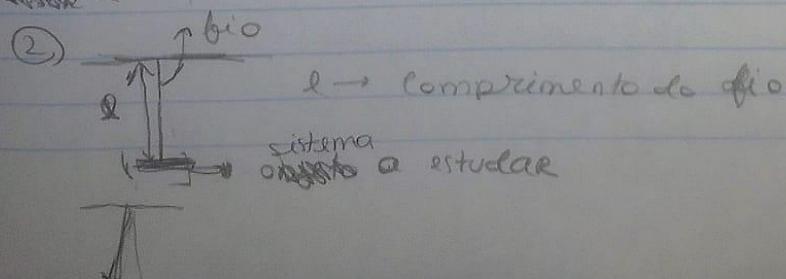
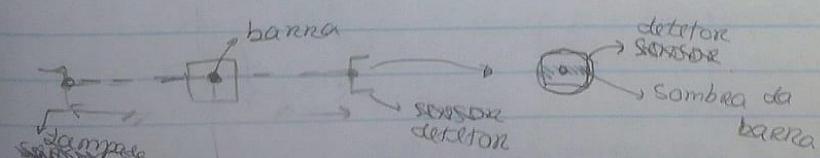
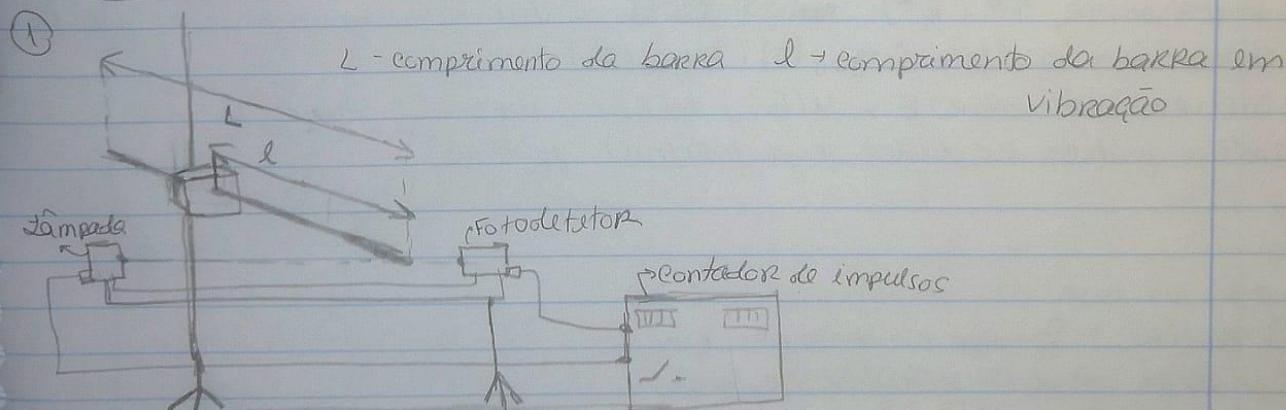
19.8

Drauna Coletano G3A PL 6

### Objetivos

- ① Determinar o módulo de Young do material de uma barra, pelo método de vibrações da barra encastreada
- ② ~~calcular os momentos de inércia das~~ <sup>peças</sup> suspensas no pêndulo de torção
- Determinar o módulo de rigidez do material do fio de suspensão

### Montagem experimental



## checklist

1)

- Montar esquema
- Escolher barra
- Medir:  $D$  - diâmetro da barra;  $L$  - comprimento total da barra,  $m$  - massa da barra
- Primir "Roset" no sistema fotogate
- Escolher o nº de impulsos cujo tempo  $t$  quer registar
- ~~Nota:~~ a escolha para o nº de impulsos para cada comprimento  $l$  deve ser, para cada ensaio,  $i = 52, 101, 151$ .
- ~~Nota:~~ a contagem do tempo começa na 1ª interrupção do circuito óptico e acaba quando  $n^o$  impulsos = ao  $n^o$  selecionado acima
- Fazer oscilar verticalmente a barra, evitando a ocorrência de modos transversais.
- Escolher gama experimental, tendo em conta a expressão em estudo (1) (varrimento)
- Registar  $l, t, i$
- Representar  $\bar{T}^{\star}(l^2)$  e ver simultaneamente aquando a experiência gráfico  $\log_{10}(T)(\log_{10}(l))$
- Determinar valor  $E$ ,  $\epsilon(E)$ ,  $\epsilon(E)\%$ , erro % através da análise gráfica dos dados experimentais de  $\bar{T}(l^2)$

2)

- Medir:
  - $l$  - comprimento do fio
  - $d$  - diâmetro do fio
  - (em vários pontos do fio  $\rightarrow$  depois tomar  $\bar{l}$ )
- Medir •  $M$  - massa,  $D$  - diâmetro, ... para os objetos em estudo
- suspender no fio (sucessivamente)

- Disco + prisma (eixo maior vertical)
- Disco + prisma (eixo maior horizontal)
- Disco + coroa cilíndrica
- Disco + coroa cilíndrica + prisma (com o eixo maior horizontal)

→ Para cada uma das combinações:

Determinar o tempo  $T$  correspondente a 10 oscilações completas:

→ Para  $\theta_{\max}$ :   $\theta = 90^\circ$

$\theta = 180^\circ$

$\theta = 270^\circ$

Calcular  $I$  (momento de inércia do corpo utilizado)

Calcular  $\mu$  por análise gráfica de  $I(T^2)$  pela expressão (2)

Cuidados a ter!

→ O movimento oscilatório tem de ser apenas de torção!!!  
↓

para tal:  
• não lançar o pêndulo → tem de ser largado  
• ~~deslizar~~

### Equações

$$(1) \bar{T}^2 = 5,029 \frac{\pi^2 E}{D^2} l^4$$

•  $l \rightarrow$  comprimento da barra em vibração

•  $E \rightarrow$  módulo de Young

•  $D \rightarrow$  densidade e diâmetro da barra, respectivamente

•  $\bar{T}$  - valor médio

do período de oscilação  
para um lado  $l$

$$(2) I = \frac{D^4 \mu}{128 \pi l} \bar{T}^2$$

•  $I \rightarrow$  momento de inércia do corpo em estudo

•  $l, D \rightarrow$  comprimento e diâmetro do fio, respectivamente

•  $\mu \rightarrow$  módulo de rigidez

•  $\bar{T} \rightarrow$  valor médio do período de oscilação

(3) momentos de inércia:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Disco} \\ \vdots \end{array} \right\} I_{dl} = \frac{\pi D^3}{8}$$

$$\text{Coroa cilíndrica} : I_{cc} = \frac{\pi}{9} (D_1^2 + D_2^2)$$

$$\cdot \text{Prisma triangular} : I_{\text{Prisma}} = \frac{\pi b^2}{12} \quad (\text{com eixo maior } b)$$

$$\cdot \text{Prisma triangular} : I_{\text{Prisma}} = \frac{\pi (2h^2 + b^2)}{24} \quad (\text{com eixo menor } b)$$

Os dados relativos à parte ① da experiência foram obtidos  
~~Dados da barra~~ pelo subgrupo 3B (PLG).

*M/Sats*  
*W gráficos*

① Determinação do módulo de Young de uma barra

Dados da barra

Cálculo de  $u(V)$  e  $u(\rho)$  pelo método de propagação de incertezas:

$$V = L \cdot \pi \cdot \bar{D}^2$$

$D_i (\pm 0,005 \text{ mm})$	$\bar{D} (\text{mm})$	1,94
1,985	$u(\bar{D})(\text{mm})$	0,01
1,900	$\bar{D} (\pm 0,00001 \text{ m})$	0,00194
1,950	$L (\pm 0,00005 \text{ m})$	0,8950
1,950	$m (\pm 0,00001 \text{ kg})$	0,02163
1,910	$V (\text{m}^3)$	2,65E-06
1,940	$u(V)(\text{m}^3)$	2,7E-08
	$\rho (\text{kg/m}^3)$	8,18E+03
	$u(\rho) (\text{kg/m}^3)$	8,4E+01

$$\frac{u^2(V)}{V^2} = \frac{u^2(L)}{L^2} + 4 \frac{u^2(\bar{D})}{\bar{D}^2}$$

$$u(L) = 0,0006$$

$$u(V) = \sqrt{\frac{u^2(L)}{L^2} + 4 \frac{u^2(\bar{D})}{\bar{D}^2}} \cdot V$$

$$u(\bar{D}) = 0,005$$

$$\rho = \frac{m}{V}$$

$$u(m) = 0,0005$$

$$\frac{u^2(\rho)}{\rho^2} = \frac{u^2(m)}{m^2} + \frac{u^2(V)}{V^2} \quad \Rightarrow \quad u(\rho) = \sqrt{\frac{u^2(m)}{m^2} + \frac{u^2(V)}{V^2}} \cdot \rho$$

$$u(\bar{D}) = \frac{s}{\sqrt{n}}, \quad s = \sqrt{\sum_{i=1}^n (D_i - \bar{D}) \cdot \frac{1}{n-1}} \quad n = 6$$

$I_{\min} (\pm 0,0005 \text{ m})$	0,1950
$I_{\max} (\pm 0,0005 \text{ m})$	0,6500
incremento ( $\pm 0,0005 \text{ m}$ )	0,0455

Ensaios	i	(i-1)/2	$ l  \pm 0,0005m$	$l^2 (m^2)$	$u(l^2) (m^2)$	$t \pm 0,01s$	T (s)	u(T) (s)
11	51	25	0,6500	0,4225	0,0007	7,41	0,2964	0,0004
	101	50	0,6500	0,4225	0,0007	14,94	0,2988	0,0002
	151	75	0,6500	0,4225	0,0007	22,58	0,3011	0,0001
10	51	25	0,6045	0,3654	0,0006	6,38	0,2552	0,0004
	101	50	0,6045	0,3654	0,0006	12,88	0,2576	0,0002
	151	75	0,6045	0,3654	0,0006	19,38	0,2584	0,0001
9	51	25	0,5590	0,3125	0,0006	5,40	0,2160	0,0004
	101	50	0,5590	0,3125	0,0006	10,92	0,2184	0,0002
	151	75	0,5590	0,3125	0,0006	16,44	0,2192	0,0001
8	51	25	0,5135	0,2637	0,0005	4,62	0,1848	0,0004
	101	50	0,5135	0,2637	0,0005	9,33	0,1866	0,0002
	151	75	0,5135	0,2637	0,0005	14,03	0,1871	0,0001
7	51	25	0,4680	0,2190	0,0005	3,83	0,1532	0,0004
	101	50	0,4680	0,2190	0,0005	7,73	0,1546	0,0002
	151	75	0,4680	0,2190	0,0005	11,63	0,1551	0,0001
6	51	25	0,4225	0,1785	0,0004	3,14	0,1256	0,0004
	101	50	0,4225	0,1785	0,0004	6,33	0,1266	0,0002
	151	75	0,4225	0,1785	0,0004	9,52	0,1269	0,0001
5	51	25	0,3770	0,1421	0,0004	2,51	0,1004	0,0004
	101	50	0,3770	0,1421	0,0004	5,06	0,1012	0,0002
	151	75	0,3770	0,1421	0,0004	7,62	0,1016	0,0001
4	51	25	0,3315	0,1099	0,0003	1,93	0,0772	0,0004
	101	50	0,3315	0,1099	0,0003	3,91	0,0782	0,0002
	151	75	0,3315	0,1099	0,0003	5,86	0,0781	0,0001
3	51	25	0,2860	0,0818	0,0003	1,47	0,0588	0,0004
	101	50	0,2860	0,0818	0,0003	2,96	0,0592	0,0002
	151	75	0,2860	0,0818	0,0003	4,45	0,0593	0,0001
2	51	25	0,2420	0,0586	0,0002	1,71	0,0684	0,0004
	101	50	0,2420	0,0586	0,0002	2,11	0,0422	0,0002
	151	75	0,2420	0,0586	0,0002	3,17	0,0423	0,0001
1	51	25	0,1950	0,0380	0,0002	0,07	0,0288	0,0004
	101	50	0,1950	0,0380	0,0002	1,42	0,0284	0,0002
	151	75	0,1950	0,0380	0,0002	3,75	0,0500	0,0001

$i \rightarrow$  impulsos

$$\text{Obteve-se } T \text{ por: } T = \frac{t}{\frac{i-1}{2}}$$

$$\cdot u(l^2) = 2l u(l)$$

$$\cdot \frac{u^2(T)}{T^2} = \frac{u^2(t)}{t^2} \Rightarrow u(T) = \frac{u(t) \cdot T}{t}$$

~~obtido~~

→ Tabela 1,

→ A gama experimental em estudo é:

$$l^2 \in [0,0380; 0,4225] \text{ m}^2 \text{ tendo}$$

sendo obtidos valores de T entre [0,0028; 0,3011] s)

a partir da tabela seguinte, foi ~~obtido~~ o gráfico  $\log_{10}(T)$

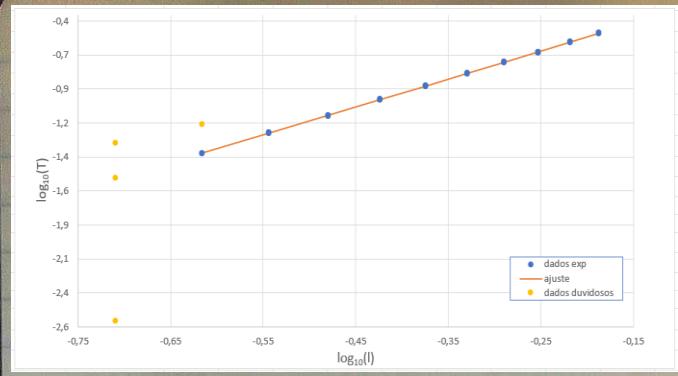
Ensaios	i	$l^2 (m^2)$	T (s)	$\log_{10}(T)$	$u(\log_{10}(T))$	$\log_{10}(l)$	$u(\log_{10}(l))$	$\log_{10}(Ta)$	$res(\log_{10}(T))$
11	51	0,4225	0,2964	-0,5281	0,0006	-0,1871	0,0003	-0,529	-0,0006
	101	0,4225	0,2988	-0,5246	0,0003	-0,1871	0,0003	-0,529	-0,0041
	151	0,4225	0,3011	-0,5213	0,0002	-0,1871	0,0003	-0,529	-0,0074
10	51	0,3654	0,2552	-0,5931	0,0007	-0,2186	0,0004	-0,591	0,0023
	101	0,3654	0,2576	-0,5891	0,0003	-0,2186	0,0004	-0,591	-0,0018
	151	0,3654	0,2584	-0,5877	0,0002	-0,2186	0,0004	-0,591	-0,0031
9	51	0,3125	0,2160	-0,6655	0,0008	-0,2526	0,0004	-0,658	0,0077
	101	0,3125	0,2184	-0,6607	0,0004	-0,2526	0,0004	-0,658	0,0029
	151	0,3125	0,2192	-0,6592	0,0003	-0,2526	0,0004	-0,658	0,0013
8	51	0,2637	0,1848	-0,7333	0,0009	-0,2895	0,0004	-0,731	0,0027
	101	0,2637	0,1866	-0,7291	0,0005	-0,2895	0,0004	-0,731	-0,0015
	151	0,2637	0,1871	-0,7280	0,0003	-0,2895	0,0004	-0,731	-0,0026
7	51	0,2190	0,1532	-0,815	0,001	-0,3298	0,0005	-0,810	0,0046
	101	0,2190	0,1546	-0,8108	0,0006	-0,3298	0,0005	-0,810	0,0007
	151	0,2190	0,1551	-0,8095	0,0004	-0,3298	0,0005	-0,810	-0,0006
6	51	0,1785	0,1256	-0,901	0,001	-0,3742	0,0005	-0,898	0,0033
	101	0,1785	0,1266	-0,8976	0,0007	-0,3742	0,0005	-0,898	-0,0001
	151	0,1785	0,1269	-0,8964	0,0005	-0,3742	0,0005	-0,898	-0,0013
5	51	0,1421	0,1004	-0,998	0,002	-0,4237	0,0006	-0,995	0,0029
	101	0,1421	0,1012	-0,9948	0,0009	-0,4237	0,0006	-0,995	-0,0005
	151	0,1421	0,1016	-0,9931	0,0006	-0,4237	0,0006	-0,995	-0,0022
4	51	0,1099	0,0772	-1,112	0,002	-0,4795	0,0007	-1,105	0,0069
	101	0,1099	0,0782	-1,107	0,001	-0,4795	0,0007	-1,105	0,0013
	151	0,1099	0,0781	-1,1072	0,0007	-0,4795	0,0007	-1,105	0,0017
3	51	0,0818	0,0588	-1,231	0,003	-0,5436	0,0008	-1,232	-0,0013
	101	0,0818	0,0592	-1,228	0,001	-0,5436	0,0008	-1,232	-0,0043
	151	0,0818	0,0593	-1,227	0,001	-0,5436	0,0008	-1,232	-0,0053
2	51	0,0586	0,0684	-1,165	0,003	-0,6162	0,0009		
	101	0,0586	0,0422	-1,375	0,002	-0,6162	0,0009	-1,375	-0,0004
	151	0,0586	0,0423	-1,374	0,001	-0,6162	0,0009	-1,375	-0,0011
1	51	0,0380	0,0028	-2,55	0,06	-0,710	0,001		
	101	0,0380	0,0284	-1,547	0,003	-0,710	0,001		
	151	0,0380	0,0500	-1,301	0,001	-0,710	0,001		

Os valores apresentados a vermelho foram considerados como desviados

para  $\log_{10} l \in [-0,1871, -0,71]$

→ Tabela 1,

→ A gama experimental considerado no ajuste é:  $\log_{10} T \in [-0,5113, -2,5528]$



$m$	1,972	-0,160	$b$
$\sigma_m$	0,005	0,002	$\sigma_b$
$r^2$	0,9998	0,003	$\sigma_{\log 10 T_{aj}}$

$u_{\log 10 T_{aj}} = 0,007$

$$\text{Temos que: } \bar{T}^2 = 5,029 \frac{\pi^2 p}{ED^2} l^4$$

Fazendo:

$$\Rightarrow \log_{10}(\bar{T}^2) = \log_{10}(5,029 \frac{\pi^2 p}{ED^2} l^4)$$

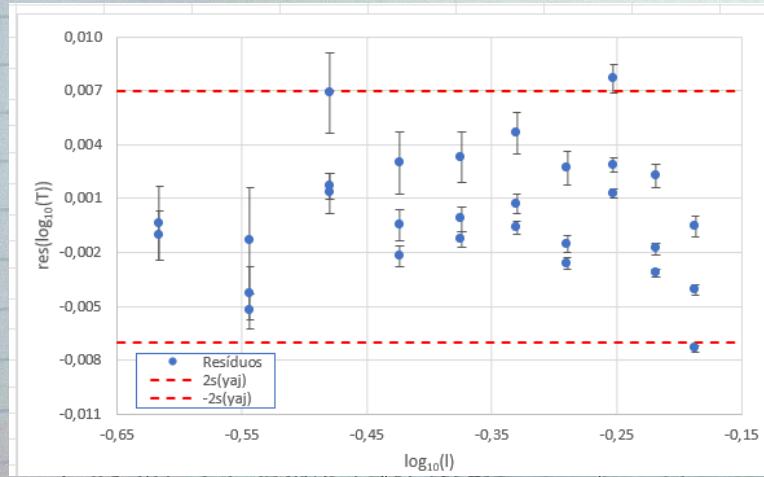
$$\Leftrightarrow 2 \log_{10}(\bar{T}) = \log_{10}(5,029 \pi^2 p) + \log_{10}(l^4)$$

$$\Leftrightarrow \log_{10}(\bar{T}) = \frac{1}{2} \log_{10}(l) + \frac{1}{2} \log_{10}\left(\frac{5,029 \pi^2 p}{ED^2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \log_{10}(\bar{T}) = m \log_{10}(l) + b$$

Ao representar  $\log_{10}(\bar{T})$  em função de  $\log_{10}(l)$ , podemos verificar se a relação  $\bar{T} \propto l^2$  pelo declive do gráfico, esperando-se que  $m = 2$ .

Pela observação ao gráfico de resíduos, dada a aleatoriedade deste em torno de zero, constata-se que o ajuste é adequado.



representação de  $\bar{T}$  em função de  $l$  para obter o valor do modelo

pode passar diretamente para a análise de  $T(l^2)$

→ Representar Análise gráfica de  $T(l^2)$  para diferentes impulsos  
(exploração pessoal da análise gráfica -)

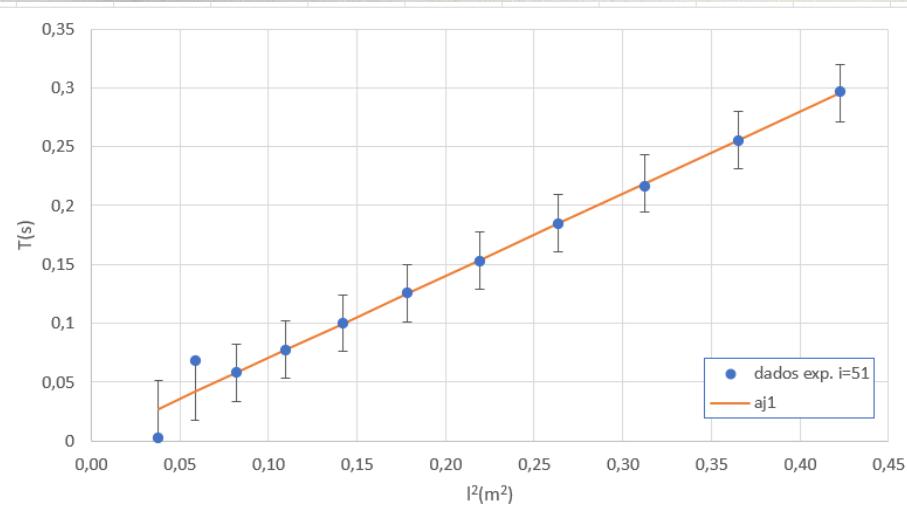
~~análise gráfica de  $T(l^2)$  para diferentes impulsos~~

impulsos  $i = 51$ : tabela 2

gama:  $l^2 \in [0,0380; 0,4225] \text{ (m}^2\text{)}$   
 $T \in [0,03; 0,30]$

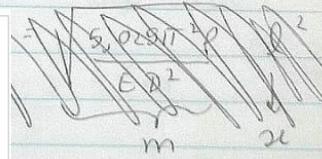
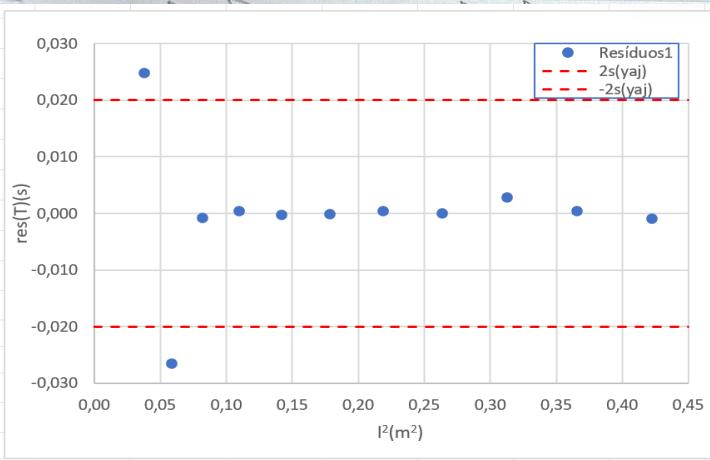
$I(\pm 0,0005\text{m})$	$l^2(\text{m}^2)$	$u(l^2)(\text{m}^2)$	$t(\pm 0,01\text{s})$	$T(\text{s})$	$u(T)(\text{s})$	$T_{aj1}(\text{s})$	$\text{res1}(T)(\text{s})$	$T_{aj2}(\text{s})$	$\text{res2}(T)(\text{s})$
0,6500	0,4225	0,0007	7,41	0,2964	0,0004	0,30	-0,001	0,295	-0,002
0,6045	0,3654	0,0006	6,38	0,2552	0,0004	0,26	0,005	0,255	0,0002
0,5590	0,3125	0,0006	5,40	0,2160	0,0004	0,22	0,003	0,218	0,0024
0,5135	0,2637	0,0005	4,62	0,1848	0,0004	0,18	-0,0003	0,185	-0,0003
0,4680	0,2190	0,0005	3,83	0,1532	0,0004	0,15	0,005	0,153	0,0003
0,4225	0,1785	0,0004	3,14	0,1256	0,0004	0,13	-0,002	0,125	-0,0003
0,3770	0,1421	0,0004	2,51	0,1004	0,0004	0,10	-0,003	0,100	-0,0004
0,3315	0,1099	0,0003	1,93	0,0772	0,0004	0,08	0,004	0,078	0,0004
0,2860	0,0818	0,0003	1,47	0,0588	0,0004	0,06	-0,001	0,058	-0,001
0,2420	0,0586	0,0002	1,71	0,0684	0,0004	0,04	-0,03		
0,1950	0,0380	0,0002	0,07	0,0028	0,0004	0,03	0,02		

A partir desta tabela, foi representado o gráfico  $T(l^2)$  para  $i=51$ :



ajuste1	$m$	0,70	0,001	$b$
$\sigma_m$	0,03	0,007	$\sigma_b$	
$r^2$	0,98	0,01	$\sigma_{T_{aj1}}$	

$u(T_{aj1}) = 0,02$



Observando que o gráfico  $T(l^2)$  quer o gráfico de resíduos. Verifica-se uma discrepância de 2 pontos relativamente aos restantes dados experimentais ao ajuste.

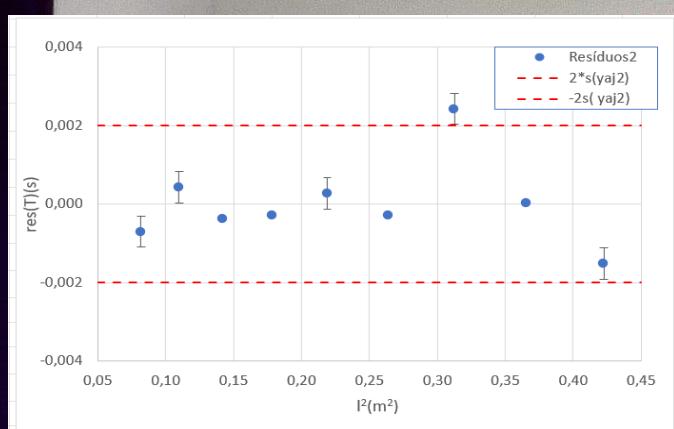
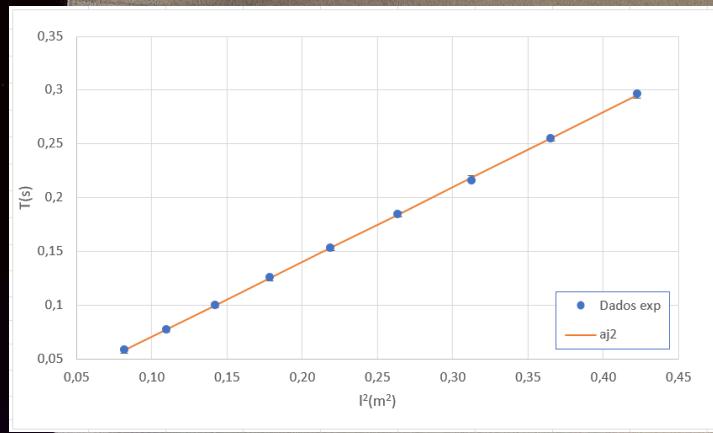
É por consequente estes serão considerados devidos, e serão retirados para a gama experimental para o novo ajuste.

(As barra de incerteza experimental são representadas nos pontos dos gráficos de resíduos, apenas não são visíveis).

(pontos devidos identificando a vermelha na tabela 2)

$$\text{Gama: } l^2 \in [0,0818; 0,4225] \text{ m}^2$$

$$T \in [0,0588; 0,2964] \text{ s}$$



aj2	
$m$	0,695
$\sigma_m$	0,003
$r^2$	0,9998
$u(T_{aj2})$	0,002

No gráfico  $T(l^2)$  os dados experimentais apresentam uma tendência linear, como era previsto, encontram-se muito próximos do ajuste linear, traduzindo-se em resíduos de valor muito reduzidos quando comparados com a ordem de grandeza de  $y$ .

Constata-se também que  
o erro experimental predominante é aleatório, dada a distribuição dos resíduos.

(\*) tamanho das barras de inc. experimental

Portanto, o ajuste considerado é uma boa aproximação aos dados experimentais

também devemos ter em mente que:

Porque separamos?

$$m^2 = 5,029 \cdot \pi^2 \cdot p \Rightarrow E = \frac{5,029 \cdot \pi^2 \cdot p}{m^2 \cdot D^2}$$

cálculo de  $u(E)$ :

$$\frac{u^2(E)}{E^2} = \frac{u^2(p)}{p^2} + \pi^2 \cdot \frac{u^2(m)}{m^2} + 4 \frac{u^2(D)}{D^2} \Rightarrow u(E) = E \cdot \sqrt{\left(\frac{u(p)}{p}\right)^2 + \left(2 \frac{u(m)}{m}\right)^2 + \left(\frac{2u(D)}{D}\right)^2}$$

$$\frac{u(p)}{p} = 0,01 \quad \frac{u(m)}{m} = 0,005$$

↓

(\*) é igual para todos os pontos, por esse motivo, apenas foram escolhidos em pontos representativos.

• Para ajuste 1:

$$\text{Ex} \quad m = 0,70 \rightarrow u(m) = 0,09 \\ u(m) = 2 \cdot \sigma_m \quad m \\ = 0,06$$

$$E = (2,2 \pm 0,4) \cdot 10^{11} \text{ Nm}^{-2} \\ u(E) \% = 17\%$$

• Para ajuste 2:

$$m = 0,695 \quad u(m) = 0,01 \\ u(m) = 0,007$$

$$E = (2,23 \pm 0,06) \cdot 10^{11} \text{ kgm}^{-2} \\ u(E) \% = 2\%$$

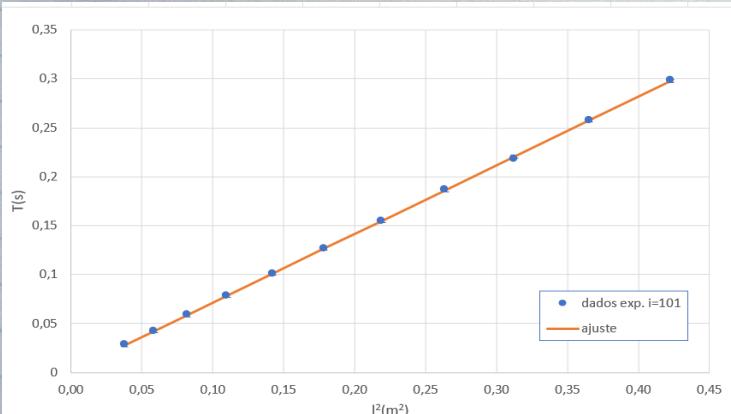
101 impulsos] Gama

$$l^2 \in [0,0380 - 0,4225] (\text{m}^2)$$

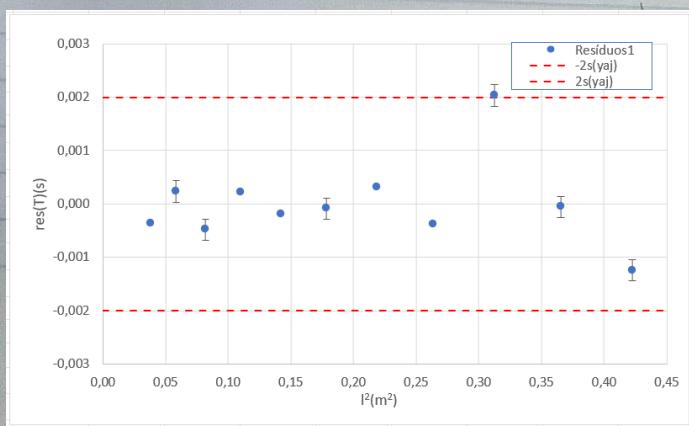
$$T \in [0,03 - 0,30] (\text{s})$$

$I(\pm 0,0005\text{m})$	$I^2(\text{m}^2)$	$u(I^2)(\text{m}^2)$	$t(\pm 0,01\text{s})$	T (s)	$u(T)(\text{s})$	$T_{aj1}(\text{s})$	$res1(T)(\text{s})$
0,6500	0,4225	0,0007	14,94	0,2988	0,0002	0,30	-0,001
0,6045	0,3654	0,0006	12,88	0,2576	0,0002	0,26	-0,0001
0,5590	0,3125	0,0006	10,92	0,2184	0,0002	0,22	0,002
0,5135	0,2637	0,0005	9,33	0,1866	0,0002	0,19	-0,0004
0,4680	0,2190	0,0005	7,73	0,1546	0,0002	0,15	0,0003
0,4225	0,1785	0,0004	6,33	0,1266	0,0002	0,13	-0,0001
0,3770	0,1421	0,0004	5,06	0,1012	0,0002	0,10	-0,0002
0,3315	0,1099	0,0003	3,91	0,0782	0,0002	0,08	0,0002
0,2860	0,0818	0,0003	2,96	0,0592	0,0002	0,06	-0,0005
0,2420	0,0586	0,0002	2,11	0,0422	0,0002	0,04	0,0002
0,1950	0,0380	0,0002	1,42	0,0284	0,0002	0,03	-0,0004

Representação  $T(l^2)$



m	0,701	0,0014	b
$\sigma_m$	0,002	0,0005	$\sigma_b$
$r^2$	0,99992	0,0008	$\sigma_{T_{aj1}}$
$u(T_{aj1})$			0,002



→ No gráfico  $T(l^2)$ , observa-se uma distribuição linear dos dados experimentais segundo o ajuste.

→ No gráfico de resíduos, este varia de -0,0004 a 0,002 encontrando-se dentro de  $u(T_{aj1})$ .

⊗ aleatoriamente

→ As barras de incerteza experimentais foram colocadas em pontos representativos.

## Cálculo de E, modelo de Young

$$m = 0,701 \rightarrow \frac{u(m)}{m} = 0,005$$

$$u(m) = 0,004$$

$$E = (2,19 \pm 0,04) \cdot 10^{11} \text{ Nm}^{-2}$$

$$u(E) \approx 2\%$$

{151 impulsos}

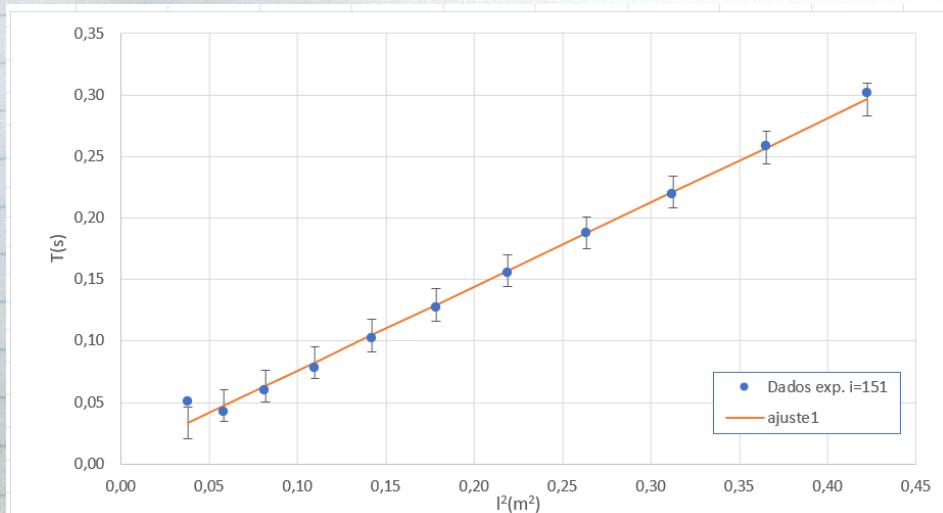
$I (\pm 0,0005 \text{ l}^2 \text{ m}^2)$	$u(l^2)(\text{m}^2)$	$t (\pm 0,01 \text{ s})$	T (s)	$u(T) (\text{s})$	$T_{aj1}(\text{s})$	$res1(T)(\text{s})$	$T_{aj2}(\text{s})$	$res2(T)(\text{s})$
0,6500	0,4225	0,0007	22,58	0,3011	0,0001	0,296	-0,005	0,299
0,6045	0,3654	0,0006	19,38	0,2584	0,0001	0,257	-0,001	0,259
0,5590	0,3125	0,0006	16,44	0,2192	0,0001	0,221	0,002	0,221
0,5135	0,2637	0,0005	14,03	0,1871	0,0001	0,188	0,001	0,187
0,4680	0,2190	0,0005	11,63	0,1551	0,0001	0,157	0,002	0,155
0,4225	0,1785	0,0004	9,52	0,1269	0,0001	0,129	0,002	0,127
0,3770	0,1421	0,0004	7,62	0,1016	0,0001	0,104	0,003	0,101
0,3315	0,1099	0,0003	5,86	0,0781	0,0001	0,082	0,004	0,078
0,2860	0,0818	0,0003	4,45	0,0593	0,0001	0,063	0,004	0,059
0,2420	0,0586	0,0002	3,17	0,0423	0,0001	0,047	0,005	0,042
0,1950	0,0380	0,0002	3,75	0,0500	0,0001	0,033	-0,017	

→ Foram realizados 2 ajustes, no 1º considerou-se todos os pontos da gama experimental de  $I^2 \in [0,0380; 0,4225] (\text{m}^2)$

$$T \in [0,050; 0,3011] (\text{s})$$

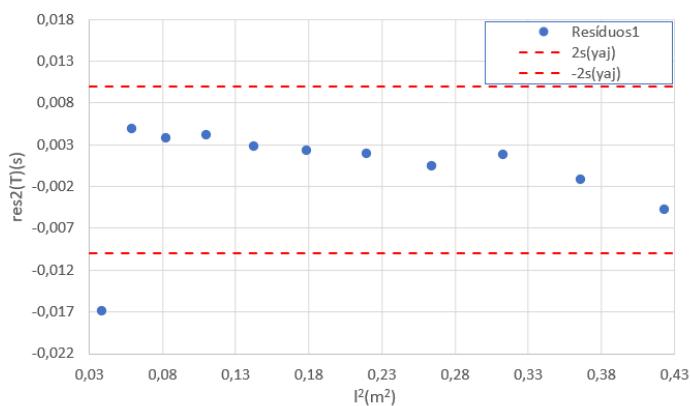
do 2º foi retirado o ponto identificado a vermelho na tabela, ~~considerado~~ após ser considerado como errôneo na análise do ajuste 1.

Ajuste 1



aj1			
m	0,68	0,007	b
$\sigma_m$	0,02	0,004	$\sigma_b$
$r^2$	0,995	0,007	$\sigma_{T_{aj1}}$

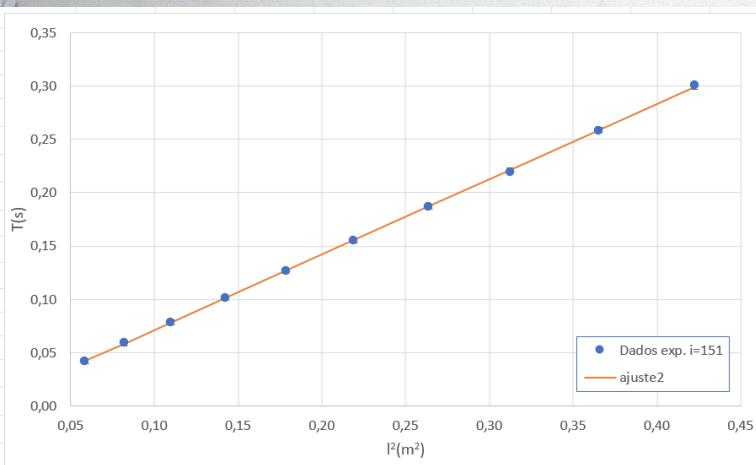
$$u(T_{aj1}) = 0,01$$



Como podemos ver em ambos os gráficos de  $T(L^2)$  e de resíduos, o ponto  $L^2 = 0,0390$ ,  $T = 0,05$  (o 1º ponto dos gráficos) apresenta um grande desvio relativamente aos restantes pontos, o mesmo acontece no resíduo associado a este. ~~É~~ Sendo por este critério, considerado desviado.

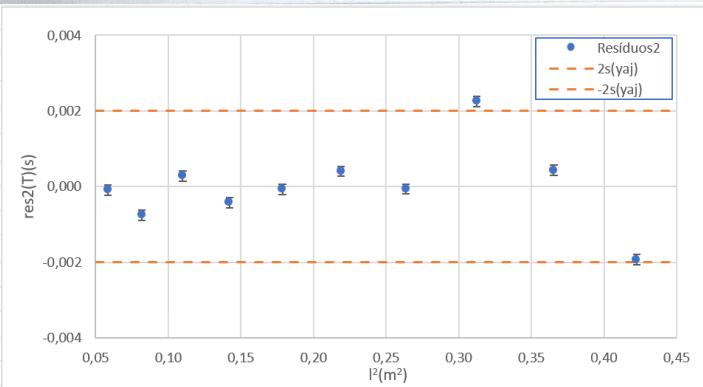
(É de notar que as barras de ~~erro~~ incerteza experimental associada a cada ponto não estão visíveis no gráfico de resíduos).

### Auguste 2



aj2	
m	0,706
$\sigma_m$	0,003
$r^2$	0,99985
b	
$\sigma_b$	
$\sigma_{T_{aj2}}$	0,001
$\sigma_{T_{aj2}}$	0,002

$$u(T_{aj2}) = 0,002$$



Resíduos

Podemos ver que os resíduos são aleatórios e ~~estão~~ estão dentro da incerteza  $u(T_{aj2})$  podendo assim ser admitidos como valores baixos, exceto um ponto. De intento, este encontra-se muito próximo da valor da incerteza.

Verificou-se assim uma melhor aproximação do ajuste aos dados experimentais (relativamente ~~ao ajuste 1~~ <sup>ao ajuste 2</sup>).

### Cálculo do módulo de Young e respectiva incerteza

$$E = \frac{5,029 \cdot \pi^2 \cdot P}{m^2 \cdot D^2}, \text{ m} \rightarrow \text{declive de ajuste linear}$$

$$\frac{u^2(E)}{E^2} = \frac{u^2(P)}{P^2} + 2 \frac{u^2(\pi)}{m^2} + 4 \frac{u^2(D)}{D^2}$$

Referir como "análise preliminar"!

## calculo do modelo de Kung

### Ajuste 1

$$m = 0,68 \rightarrow \frac{u(m)}{m} = 0,05$$

$$u(m) = 0,03$$

$$E = (2,3 \pm 0,2) 10^{11} \text{ Nm}^{-2}$$

$$\mu(E)_{2\%} = 9\%$$

### Ajuste 2

$$m = 0,706 \rightarrow \frac{u(m)}{m} = 0,009$$

$$u(m) = 0,006$$

$$E = (2,16 \pm 0,05) 10^{11} \text{ Nm}^{-2}$$

$$\frac{\mu(E)}{\mu(E)} \% = 2\%$$

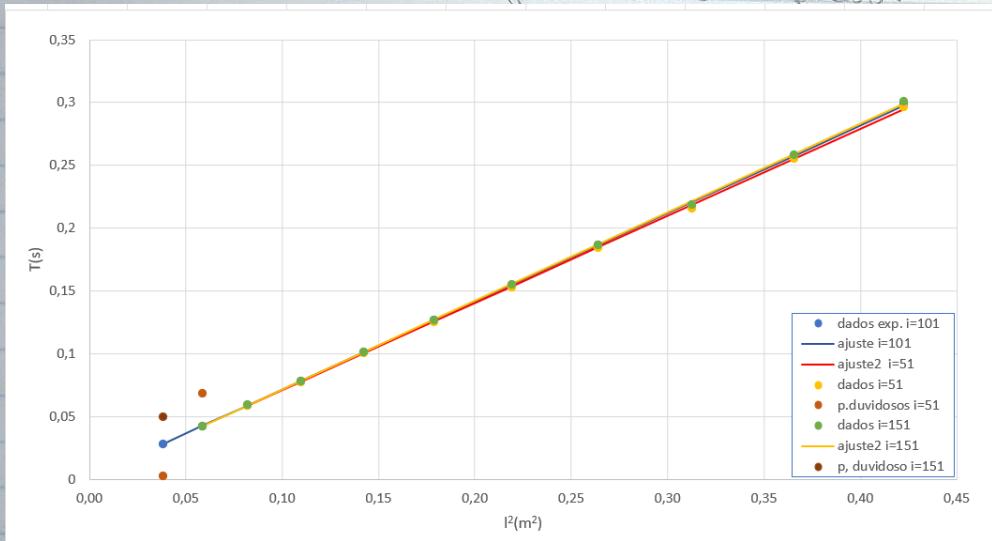
→

e dos dados experimentais

De modo a conseguirem-se verificar a proximidade dos ajustes finais relativos a cada impulso, representou-se gráficos: 1 - com a presença de todos os dados experimentais classificados de acordo com o seu impulso correspondente

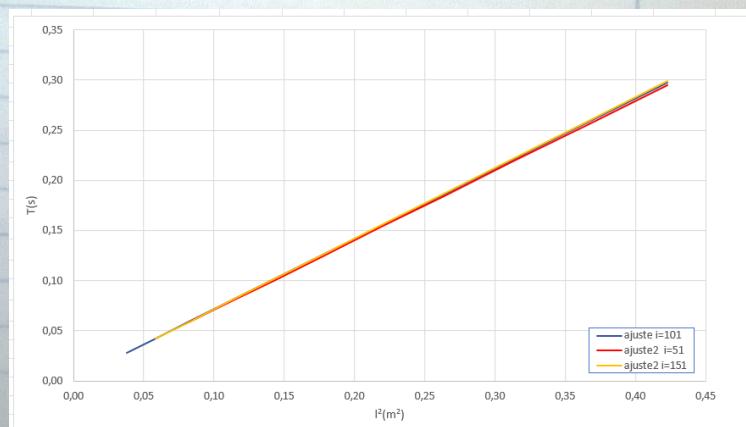
~~com todos os dados~~

2 - com apenas os ajustes finais de cada impulso.



Através da visualização deste gráfico, retira-se que os ajustes ~~coincidentes~~ <sup>de</sup>  $i = 101$  e  $i = 151$  são coincidentes ao longo de  $l^2$ , verificando-se que o ajuste de  $i = 51$  se desvia dos restantes ajustes gradualmente, com o aumento de  $l^2$ .

sendo que se observa um desvio (não muito significativo) a partir de  $l^2 = 0,40 \text{ m}^2$



→ Análise gráfica de  $\bar{T}(l^2)$

Foi feito para cada ensaio o valor médio do tempo de suma oscilação:  $\bar{T}$ , tal como está representado na seguinte tabela:

Ensaio	$l^2 (m^2)$	$\bar{T} (s)$	$u(\bar{T}) (s)$	$\bar{T}_{aj1} (s)$	Res1( $\bar{T}$ ) (s)	$\bar{T}_{aj2} (s)$	Res2( $\bar{T}$ ) (s)
11	0,4225	0,299	0,001	0,296	-0,002	0,297	-0,002
10	0,3654	0,257	0,001	0,257	-0,0002	0,257	0,0001
9	0,3125	0,218	0,001	0,220	0,002	0,220	0,002
8	0,2637	0,1862	0,0007	0,186	0,0001	0,186	-0,0002
7	0,2190	0,1543	0,0006	0,155	0,001	0,155	0,0003
6	0,1785	0,1264	0,0004	0,127	0,001	0,126	-0,0002
5	0,1421	0,1011	0,0004	0,102	0,001	0,101	-0,0003
4	0,1099	0,0778	0,0003	0,079	0,002	0,078	0,0003
3	0,0818	0,0591	0,0002	0,060	0,001	0,058	-0,001
2	0,0586	0,051	0,009	0,044	-0,007		
1	0,0380	0,03	0,01	0,030	0,003		

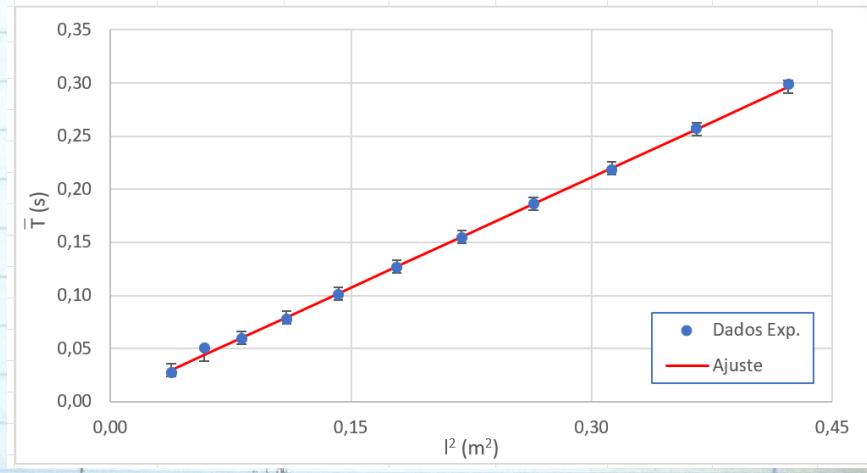
$$\rightarrow u(\bar{T}) = \frac{s}{\sqrt{n}}, \quad n=3 \quad s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\bar{T}_i - \bar{T})^2}$$

→ Gama experimental em estudo:  $\bar{T} \in [0,0002; 0,17] \text{ s}$  para  $l^2 \in [0,0380; 0,425] \text{ m}^2$

- Representação  $\bar{T}(l^2)$  e respectivo gráfico de resíduos

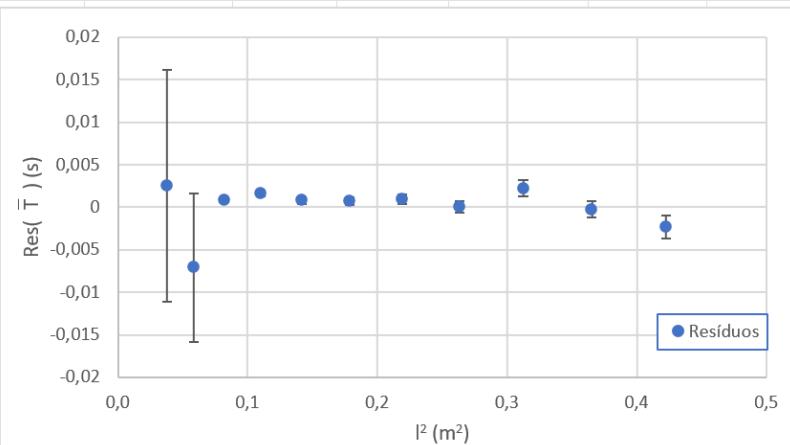
### Ajuste 1

$m$	0,69	0,003	$b$
$\sigma_m$	0,007	0,002	$\sigma_b$
$r^2$	0,9991	0,003	$\sigma_{\bar{T}_{aj}}$
$u(\bar{T}_{aj}) (s)$			0,006
$u(m) =$			0,01



→ A partir do gráfico de resíduos, observa-se que os 2 primeiros pontos, apesar de próximos aos restantes, apresentam elevada incerteza experimental comparando com a ordem de grandeza do valor do  $\bar{T}$  que é maior e associado com os restantes resíduos.

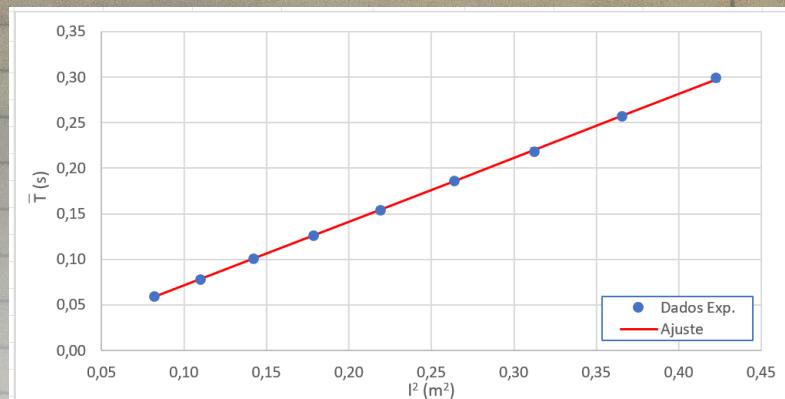
Assim, sendo, procedi a um novo ajuste no qual não considerei estes 2 pontos na gama (de ajuste).



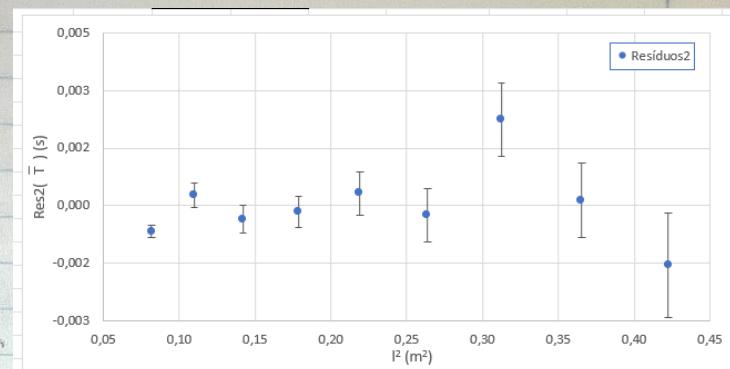
Ajuste 2 (Retirando os pontos mencionados anteriormente e identificados a vermelho na tabela da página anterior)

$m$	0,701	0,0011	$b$
$\sigma_m$	0,003	0,0008	$\sigma_b$
$r^2$	0,9998	0,001	$\sigma_{\bar{T}_{aj2}}$

$$u(\bar{T}_{aj2}) = 0,002$$



Observando os gráficos de  $\bar{T}(I^2)$  e resíduos e tendo em conta os critérios usados nas análises anteriores, considero que este ajuste é adequado.



Cálculo de módulo de Young,  $E$ :  $m^2 = \frac{5,029 \cdot \pi^2 \cdot p}{D^2 E}$   $\textcircled{w}$

→ Ajuste 1

$$m = 0,69 \rightarrow \frac{u(m)}{m} = 0,02$$

$$u(m) = 0,01$$

$$\frac{\Delta u}{m} = 0,02$$

$$E = (2,24 \pm 0,07) \cdot 10^{11} \text{ Nm}^{-2}$$

$$u(E) \% = 3\%$$

→ Ajuste 2

$$m = 0,701 \rightarrow \frac{u(m)}{m} = 0,009$$

$$u(m) = 0,006$$

$$E = (2,20 \pm 0,05) \cdot 10^{11} \text{ Nm}^{-2}$$

$$u(E) \% = 2\%$$

### Parte 2 - Pêndulo de torção

Dados relativos ao fio de suspensão:

$$u(\bar{D}) = \frac{s}{\sqrt{n}}, n = 6 \quad s = \sqrt{1 \sum_{i=1}^n (D_i - \bar{D})^2}$$

$$\textcircled{w} E = \frac{5,029 \cdot \pi^2 \cdot p}{m^2 \cdot D^2}$$

$$\frac{u^2(E)}{E^2} = \frac{u^2(p)}{p^2} + 4 \frac{u^2(m)}{m^2} + \frac{u^2(D)}{D^2}$$

$$\Rightarrow u(E) = E \cdot \sqrt{\frac{u^2(p)}{p^2} + \left(2 \frac{u(m)}{m}\right)^2 + \left(\frac{2 \cdot u(D)}{D}\right)^2}$$

$$\frac{u(p)}{p} = 0,01 \quad \frac{u(D)}{D} = 0,005$$

# Dados dos objetos a suspender:

$D_i (\pm 0,005 \text{ mm})$	$\bar{D} (\text{mm})$	0,868
0,865	$u(\bar{D})(\text{mm})$	0,004
0,870	$\bar{D} (\pm 0,000004 \text{ m})$	0,000868
0,860	$L (\pm 0,0005 \text{ m})$	1,0930
0,855		
0,880		
0,875		

$P_{\text{exterior}} (\text{m}) =$	0,6300	$P_{\text{interior}} (\text{m}) =$	0,5630
$u(P) \text{ m}$	0,0005		
$r_{\text{exterior}} (\text{m}) =$	0,10027	$r_{\text{interior}} (\text{m}) =$	0,0896
$u(r_{\text{exterior}})(\text{m}) =$	0,00008	$u(r_{\text{interior}})(\text{m}) =$	0,0001

$D_d (\pm 0,0005 \text{ m}) =$	0,2000			
$b_{\text{prisma maior}} (\pm 0,0005 \text{ m}) =$	0,1990	$b_{\text{prisma menor}} (\pm 0,0005 \text{ m}) =$	0,0290	$h_{\text{prisma}} (\pm 0,0005 \text{ m})$
$D_{\text{exterior}} (\text{m}) =$	0,2005	$D_{\text{interior}} (\text{m})$	0,1792	
$u(D_{\text{exterior}}) (\text{m})$	0,0002	$u(D_{\text{interior}}) (\text{m})$	0,0002	

- cc - coroa circular  
 d - disco  
 p+ - prisma com base maior na horizontal  
 p- - prisma com base menor na horizontal

-  $b_{\text{prisma maior}} \rightarrow$  altura do prisma;  $b_{\text{prisma menor}} \rightarrow$  lado da base;  $h_{\text{prisma}}$  <sup>altura da base</sup>  
 \* o cálculo de  $D_{\text{exterior}}$  e  $D_{\text{interior}}$  foi feito de forma analítica através do perímetro exterior,  $P_{\text{exterior}}$ , e  $P_{\text{interior}}$ ,  $P_{\text{interior}}$ .

$$\pi = \frac{P}{2\pi} \quad \frac{u^2(\pi)}{\pi^2} = \frac{u^2(P)}{P^2} \Rightarrow u(\pi) = \frac{u(P) \cdot \pi}{P}$$

$$D = 2 \cdot \pi$$

$$u(D_{\text{exterior}}) : \quad \frac{u^2(D)}{D^2} = \frac{u^2(\pi)}{\pi^2} \Rightarrow u(D) = D \cdot \frac{u(\pi)}{\pi} = D \cdot \frac{u(P)}{P}$$

## Tabela de massas:

$m_d (\pm 0,0001 \text{ kg})$	0,8073
$m_p + m_d (\pm 0,0001 \text{ kg})$	1,4906
$m_p (\pm 0,0001 \text{ kg})$	0,6835
$m_{cc} (\pm 0,0001 \text{ kg})$	0,4771
$m_{cc} + m_d + m_p (\pm 0,0001 \text{ kg})$	1,9779

## Tabela de momentos de inércia de cada objeto:

$I_d (\text{kg m}^2)$	0,00404	$I_p (\text{kg m}^2)$	0,000054
$u(I_d) (\text{kg m}^2)$	0,00002	$u(I_p) (\text{kg m}^2)$	0,000002
$I_{p+} (\text{kg m}^2)$	0,00226	$I_{cc} (\text{kg m}^2)$	0,00431
$u(I_{p+}) (\text{kg m}^2)$	0,00001	$u(I_{cc}) (\text{kg m}^2)$	0,00002

## Cálculo de $u(I_d)$ , $u(I_{p+})$ , $u(I_{p-})$ , $u(I_{cc})$ :

$$\frac{u^2(I_d)}{I_d^2} = \frac{u^2(m_d)}{m_d^2} + \left(2 \frac{u(D)}{D}\right)^2$$

$$\frac{u^2(I_{p+})}{(P+)^2} = \frac{u^2(m)}{m^2} + \left(2 \frac{u(b)}{b}\right)^2$$

$$u^2(I_{p-}) = \left(\frac{2h^2 + b^2}{24}\right)^2 \cdot u^2(\pi) + \left(\frac{4\pi b}{24}\right)^2 \cdot u^2(h) + \left(\frac{2\pi b}{24}\right)^2 \cdot u^2(b)$$

$$u^2(I_{cc}) = \left(\frac{D_1^2 + D_2^2}{8}\right)^2 \cdot u^2(\pi) + \left(\frac{\pi D_1}{4}\right)^2 \cdot u^2(D_1) + \left(\frac{\pi D_2}{4}\right)^2 \cdot u^2(D_2)$$

Tabela com os dados experimentais obtidos e respectivas incertezas

Conjunto	$I_{conjunto}$ ( $\text{kg m}^2$ )	$u(I_{conjunto})$ ( $\text{kg m}^2$ )	$\theta_{\max}$ (graus)	$t (\pm 0,01\text{s})$	$T (\pm 0,001\text{s})$	$\bar{T}$ (s)	$u(\bar{T})$ (s)
Disco + cc	0,00835	0,00004	90	101,63	10,163	10,176	0,009
			180	101,94	10,194		
			270	101,72	10,172		
disco+(p+)+cc	0,01061	0,00005	90	113,57	11,357	11,40	0,02
			180	114,11	11,411		
			270	114,37	11,437		
disco+ (p+)	0,00629	0,00003	90	87,58	8,758	8,75	0,02
			180	87,15	8,715		
			270	87,68	8,768		
disco+(p-)	0,00409	0,00002	90	70,76	7,076	7,080	0,006
			180	70,72	7,072		
			270	70,91	7,091		

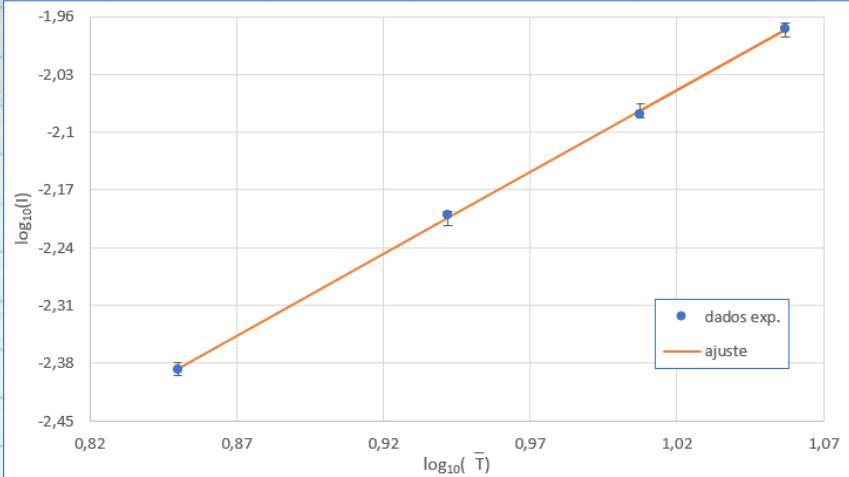
$$u(T) = u(t) \cdot \frac{T}{t}$$

→ Tabela auxiliar à representação de  $\log_{10}(I)$  em função  $\log_{10}T$

$\log_{10}(I)$	$u(\log_{10}(I))$	$\log_{10}(T)$	$u(\log_{10}(T))$	$\log_{10}(I)_{aj}$	$res(\log_{10}(I))$
-2,078	0,01	1,0076	0,0009	-2,074	0,004
-1,974	0,01	1,057	0,002	-1,976	-0,002
-2,201	0,01	0,942	0,002	-2,205	-0,004
-2,388	0,01	0,8500	0,0008	-2,387	0,001

$$u(\log_{10}(I)) = \frac{1}{I \ln(10)} \cdot u(I)$$

$m$	1,99	-4,08	$b$
$\sigma_m$	0,03	0,03	$\sigma_b$
$r^2$	0,9996	0,004	$\sigma_{\log_{10}(I_{aj})}$
$u(\log_{10}(I_{aj}))$			0,008



Pom a representação de  $\log_{10}(I)$  ( $\log_{10}(\bar{T})$ )

constata-se que  $T \propto \bar{T}^2$ , como era esperado pela expressão (2).

pois o declive nro.

$$m = 1,99 \pm 0,06$$

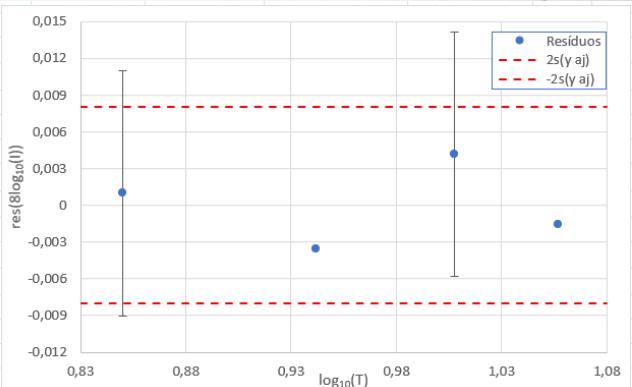
$$u(m) = \pm 0,06$$

Os resíduos são aleatórios

e de valor reduzido ( $\propto 10^{-3}$ )

comparativamente com a ordem de grandeza de  $y$  ( $\propto 10^{-9}$ )

O tamanho das barras de incerteza experimental associada a cada ponto é 0,01, daí estar apena representada em pontos representativos.



→ Representação gráfica de  $I(\bar{T}^2)$ : Gama experimental:

$$u(\bar{T}^2) = 2 \cdot \bar{T} \cdot u(\bar{T})$$

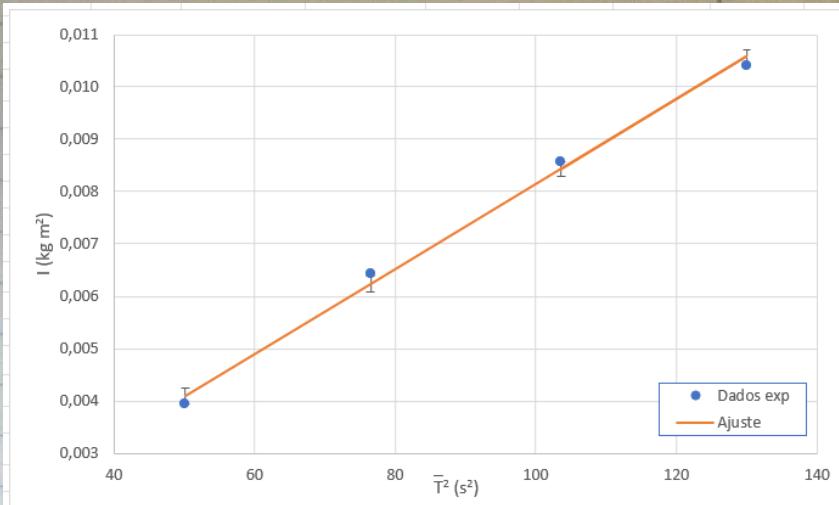
$I \in [0,00409; 0,01061] \text{ kg m}^2$  para  
 $\bar{T}^2 \in [50,12; 130,0] \text{ s}^2$ .

$\bar{T}^2 (\text{s}^2)$	$u(\bar{T}^2) (\text{s}^2)$	$I_{aj} (\text{kg m}^2)$	$res(I) (\text{kg m}^2)$
103,6	0,2	0,0084	0,00008
130,0	0,5	0,0106	-0,00003
76,5	0,3	0,0062	-0,00005
50,12	0,08	0,0041	0,00001

m	8,1E-05	0,0000	b
$\sigma_m$	1E-06	0,0001	$\sigma_b$
$r^2$	0,9996	0,000007	$\sigma_{I_{aj}}$
			$u(I_{aj})$ 0,0001

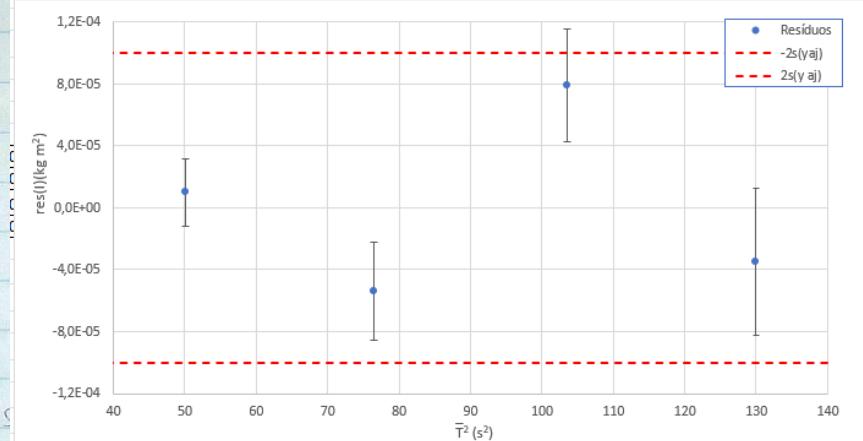
experimentais

Os dados parecem seguir uma tendência linear no gráfico  $I(\bar{T}^2)$ .



Observando o gráfico de resíduos nota-se que os valores destes são reduzidos, oscilando entre 0, e encontrando-se dentro a incerteza associada ao ajuste linear.

Desta forma, o ajuste é adequado aos dados experimentais.



Cálculo da constante de rigidez do material:

$$I = \frac{\mu D^4}{128\pi L} \rightarrow \mu = \frac{128\pi L \cdot m}{D^4} = 6,3 \cdot 10^{10} \text{ Pa} = 63 \text{ GPa}$$

$$\frac{u(\mu)}{\mu} = \frac{u^2(L)}{L^2} + \frac{u^2(m)}{m^2} + \left(4 \frac{u(D)}{D}\right)^2 \quad \frac{u^*(L)}{L} = 0,005$$

$$\Rightarrow \mu^*(\mu) = \mu \cdot \sqrt{\left(\frac{u(L)}{L}\right)^2 + \left(\frac{u(m)}{m}\right)^2 + \left(4 \frac{u(D)}{D}\right)^2} = 2 \cdot 10^9 \text{ Pa} = 2 \text{ GPa}$$

$$\begin{cases} \frac{u(m)}{m} = 0,03 \\ \frac{u(D)}{D} = 0,004 \end{cases}$$

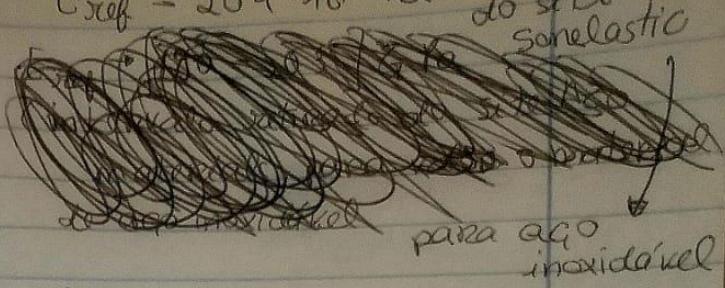
$$\mu = (63 \pm 2) \text{ GPa} \quad \mu(\mu)\% = 3\%$$

## Resultados finais

### ① Módulo de Young, $E$ :

$E$ (Pa) =	2,20E+11
$u(E)$ (Pa) =	5E+09
$u_r(E)$ (%) =	2%
erro %	8%

$E_{ref} = 204 \cdot 10^9$  Pa → retirado do site Sonelastic  
 (referência utilizada no site) → para aço inoxidável



### ② Módulo de rigidez, $\mu$ :

$\mu$ (Pa)	6,3E+10
$u(\mu)$ (Pa)	2E+09
$u(\mu)\%$	3%
erro%	21%

### Conclusão

→ Na primeira parte da experiência, através da análise gráfica de  $\log(T)$  em função de  $\log(l)$  verificou-se a relação  $T \propto l^2$  (tendo sido obtido um declive de  $(1,972 \pm 0,009)$  com incerteza percentual de 0,3%, por excesso e erro percentual de 1%, por defeito), sendo uma boa comprovação da linearidade dos dados experimentais. Através da análise do gráfico  $(T(l^2))$ , no qual está representada a linearidade dos dados [comprovada pelo  $\log_{10}(T)(\log_{10}l)$ ], determinou-se a partir do módulo de Young  $E = (2,20 \pm 0,05) \cdot 10^{10}$  Pa com incerteza (relativa) de 2%, por defeito, e um erro de 8% relativamente ao valor de referência de aço inoxidável (sendo que foi comparado em aço inoxidável, pois foi mencionado a que bárka utilizada era feita desse material). O valor experimental obtido apresenta elevada confiança e boa exatidão.

"Rodagem":  
 ⇔ tendência quadrática obtida a menor de ...

? %  $\mu(p)$ ? %. erro?

→ Da segunda parte da experiência, partindo da representação gráfica de  $\log_{10} I$  ( $\log(I)$ ) mostrou-se que  $I$  é proporcional a  $T^2$ , como era de esperar (sendo a declive do gráfico igual a  $1,99 \pm 0,05$ , com 3% de incerteza, por excesso, e 1% de erro, por excesso).

Relante isto, representa-se o gráfico  $I(T)$ , tendo-se obtido o valor do esfílice de ~~referência~~ rigidez a partir do ajuste linear com uma incerteza de 3%, por defeito, e um erro de 21%, por excesso, relativamente ao valor de referência de aço de carbono (feio de fios). O valor  $\mu$  obtido ~~aproximado~~ tem assim um grande erro associado, apesar de ser um valor com elevado nível de confiança. Uma possível justificação para o elevado erro será ~~devido~~ à presença de imperfeções no material do bis.

rusta avançam a consistência do

valor no que diz respeito ao erro, isto é,  
recomenda-se futura comparação com  
valores obtidos por outros grupos

(esta  
é uma  
forma  
limpa de  
terminar)