T1

Coeficiente de viscosidade da água - Lei de Poiseuille

1 DETERMINAÇÃO DO COEFICIENTE DE VISCOSIDADE DA ÁGUA PELA LEI DE POISEUILLE

1.1 Objectivo

Determinação do coeficiente de viscosidade da água usando o escoamento num tubo capilar cilíndrico.

1.2 Execução Experimental

- A figura1 representa, esquematicamente, o sistema usado no laboratório.
- O depósito A deve estar cheio, a uma altura constante (assegurando assim uma pressão constante na entrada do tubo de escoamento) e à temperatura estabilizada θ_a .
- Para isso, o depósito A é cheio com antecedência de algumas horas, retirando a rolha R_{ar} e abrindo a torneira T_a. Depois, fecha-se T_a e coloca-se a rolha R_{ar} com a ajuda duma gordura vedante.
- A torneira aberta T_{ar} garante que o interior do depósito se mantém à pressão ambiente.
- Os tubos de borracha por onde a água passa têm que estar livres de estreitamentos.
- Abrindo a torneira T_s, o regime estacionário de fluxo é atingido quando se observar o aparecimento de bolhinhas no interior da água, como indicado na figura1
- O tubo capilar deve estar posicionado na horizontal, para que não haja uma contribuição extra devido à variação de energia potencial ao longo dele.
- É necessário registar os valores de R e ℓ (raio interno e comprimento do tubo capilar), indicados na bancada.
- Confirme que a temperatura ambiente não se altera durante a execução da experiência. (*Porquê?)*
- Para cada posição do tubo no suporte $\boldsymbol{S}$, registe h (diferença de alturas manométricas) e o volume V de água recolhido na proveta graduada, num intervalo de tempo t. Como deve proceder a este registo, para maximizar a informação retirada num único ensaio? Deve fazer mais do que um ensaio, registar vários volumes?... Porquê?
- No cálculo da variação de pressão, dada pela equação 1, quantos algarismos significativos deve considerar no valor de g? Justifique.

$$P = \rho g h \tag{1}$$

- Calcule o caudal Q correspondente a cada situação/ensaio, sabendo que $Q = V/t$.
- Pode optar por duas formas de cálculo de η : *(i)* através de uma análise gráfica da eq.2 , $P\,(Q)$, ou *(ii)* através do cálculo das médias de Q e de P , correspondentes a um número elevado de ensaios para determinada posição intremédia no suporte S.

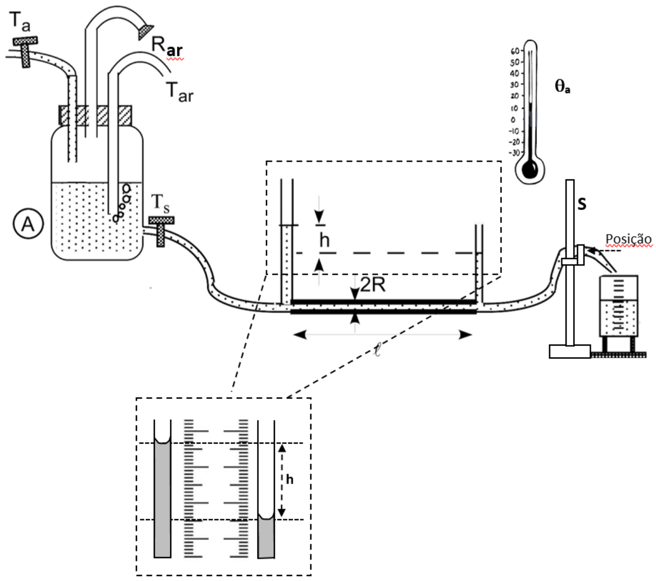

Figure 1: Montagem experimental do método de Poiseuille.

Comente as vantagens e desvantagens de *(i)* e de *(ii)*. Na eventualidade de falta de tempo, qual prefere usar?

$$P = \eta \frac{8\ell}{\pi R^4} Q \tag{2}$$

1.3 Introdução teórica

1.3.1 Viscosidade: escoamento planar

Num fluido perfeito em repouso, ou com partes em movimento, a tensão numa superfície geométrica nesse fluido é sempre normal a essa superfície. Num fluido real, movendo-se como um corpo rígido, a tensão permanece normal a essa superfície. Contudo, quando num fuido real há movimento relativo de partes desse fluido, e devido às ligações entre moléculas vizinhas, há uma grandeza física resultante dessas interações e que é característica desse fluido, designada por viscosidade η. Na presença de η haverá tensões tangenciais ("dragg", de atrito) a essa superfície. O fluido diz-se então viscoso.

Considerando um fluxo unidimensional paralelo a Ox, como o representado na figura2, sendo a velocidade do fluido dependente apenas de z, uma linha de fluxo será PQ (ou RS), e um plano de fluxo conterá PQ (ou RS) e será perpendicular a z.

Sobre o plano de fluxo PQ atuará uma tensão tangencial τ_{tang} proporcional à taxa de variação da velocidade, dv/dz, medida segundo Oz:

$$\tau_{tang} = \eta \frac{dv}{dz} \tag{3}$$

sendo η o coeficiente de viscosidade. As respectivas dimensões são:

$$[\eta] = \frac{\mathrm{LMT^{-2}}}{\mathrm{L^2}} \cdot \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{LT^{-1}}} = \mathrm{L^{-1}MT^{-1}} \tag{4}$$

e a unidade SI em que se representa os valores de η é $Pa.s$.

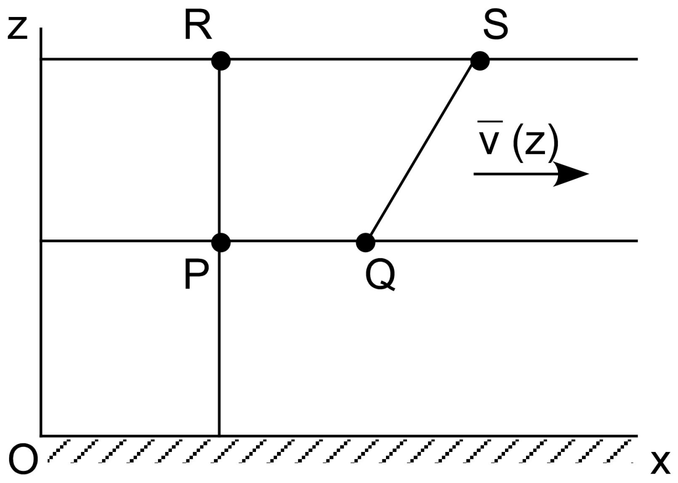

Figure 2: Representação esquemática de um fluido unidimensional que se desloca na direção Ox.

Considerando a figura, a taxa de deformação da camada de líquido entre os planos de fluxo PQ e RS é $\mathcal{R} = dv/dz$ (rad/s).

A força por unidade de área exercida pelo líquido entre esses planos sobre o plano RS é $\eta dv/dz$ (no sentido de o retardar); a força por unidade de área exercida sobre PQ é $\eta dv/dz$ (no sentido de o avançar).

O trabalho despendido por unidade de área da superfície movendo-se com velocidade $v + dv = (v + dv/dz)dz$ sobre a camada dz será $(v + dv/dz)\eta dv/dz$ por unidade de tempo; por sua vez, a camada desenvolve um trabalho por unidade de área sobre a outra superfície, que se move à velocidade v à taxa de $v\eta dv/dz$. Assim, a potência despendida por unidade de área e altura dz da camada de fluido é dada por:

$$\eta \left(\frac{dv}{dz}\right)^2 dz \tag{5}$$

Logo, a potência despendida por unidade de volume na deformação do fluido será:

$$u = \eta \mathcal{R}^2 \tag{6}$$

onde $\mathcal{R}$ é a taxa de deformação (no caso do escoamento planar, como vimos, $\mathcal{R} = dv/dz$).

1.3.2 Escoamento num tubo cilíndrico

Imaginemos um líquido pouco viscoso, por exemplo água, que flui ao longo de um tubo de secção circular colocado na horizontal. Para estudar o seu movimento, vamos começar por considerar no seu interior uma camada cilíndrica de espessura δr.

A figura 3, através de uma vista lateral e de uma vista frontal, representa a situação.

A força devida à diferença de pressão será

$$P \cdot 2\pi r \delta r \tag{7}$$

A velocidade de escoamento decresce do eixo para a periferia, ou seja, será dada por uma função $v(r)$ com dv/dr negativo.

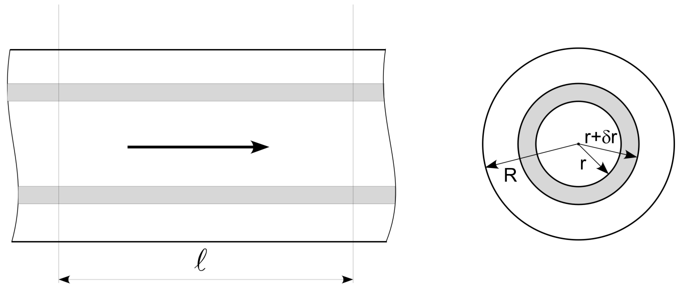

Figure 3: Escoamento de um fluido num tubo cilíndrico de raio R.

A força de viscosidade devida ao líquido no interior da camada cilíndrica será

$$-\eta \cdot 2\pi r\ell \cdot \left(\frac{\delta v}{\delta r}\right)_r \tag{8}$$

(esta força é exercida no sentido do movimento, portanto o seu valor algébrico será positivo; a velocidade decresce do centro para a periferia, isto é, dv/dr é negativo; é portanto necessário um sinal menos.)

A força de viscosidade devida ao líquido no exterior da camada cilíndrica será

$$-\eta \cdot 2\pi(r+\delta r)\ell \cdot \left(\frac{\delta v}{\delta r}\right)_{r+\delta r} \tag{9}$$

onde tivemos o cuidado de usar um valor diferente do anterior para o gradiente de velocidade.

Somando e igualando a zero a força resultante:

$$P \cdot 2\pi r\delta r - \eta \cdot 2\pi r\ell \cdot \left(\frac{\delta v}{\delta r}\right)_r + \eta \cdot 2\pi(r+\delta r)\ell \cdot \left(\frac{\delta v}{\delta r}\right)_{r+\delta r} = 0 \tag{10}$$

Se passarmos ao limite

$$P \cdot 2\pi r dr - \eta \cdot 2\pi r\ell \cdot \left(\frac{dv}{dr}\right)_r + \eta \cdot 2\pi(r+dr)\ell \cdot \left(\frac{dv}{dr}\right)_{r+dr} = 0 \tag{11}$$

Exprimindo $\left(\frac{dv}{dr}\right)_{r+dr}$ em função de $\left(\frac{dv}{dr}\right)_r$

$$\left(\frac{dv}{dr}\right)_{r+dr} = \left(\frac{dv}{dr}\right)_r + dr\left(\frac{d^2v}{dr^2}\right)_r \tag{12}$$

e substituindo na equação anterior,

$$Prdr - \eta\ell(r+dr)\left(\frac{dv}{dr} + dr\frac{d^2v}{dr^2}\right) - \eta\ell r\frac{dv}{dr} = 0 \tag{13}$$

Desprezando o termo em dr^2, e dividindo por dr, encontra-se

$$\eta\ell\left(r\frac{d^2v}{dr^2} + \frac{dv}{dr}\right) = -Pr \tag{14}$$

Atendendo a que

$$r\frac{d^2v}{dr^2} + \frac{dv}{dr} = \frac{d}{dr}\left(r\frac{dv}{dr}\right) \tag{15}$$

escreve-se

$$\eta\ell\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv}{dr}\right) = -Pr \tag{16}$$

Integrando:

$$\eta\ell r\frac{dv}{dr} = -P\frac{r^2}{2} + C_1 \tag{17}$$

ou

$$\frac{dv}{dr} = -P\frac{r}{2\eta\ell} + \frac{1}{\eta\ell r}C_1 \tag{18}$$

onde C_1 é uma constante de integração.
Integrando esta última equação:

$$v = -P\frac{r^2}{4\eta\ell} + \frac{1}{\eta\ell}C_1 \cdot \log r + C_2 \tag{19}$$

onde C_2 é uma nova constante de integração.
Determinemos as constantes de integração:

- No eixo do tubo, $r = 0$, a velocidade do fluido é finita; portanto terá que ser $C_1 = 0$.
- Na parede exterior do tubo, $r = R$, a velocidade do fluido é nula, isto é

$$0 = -P\frac{R^2}{4\eta\ell} + C_2 \tag{20}$$

donde

$$C_2 = P\frac{R^2}{4\eta\ell} \tag{21}$$

A solução é, finalmente,

$$v = \frac{P(R^2 - r^2)}{4\eta\ell} \tag{22}$$

Assim, a distribuição radial da velocidade $v(r)$ é parabólica, máxima no eixo e nula para $r = R$.

Para obtermos o caudal que atravessa o tubo, calculamos o caudal para uma camada cilíndrica como a representada na figura 1-1, e integramos ao longo de toda a secção recta do tubo:

$$Q = \int_0^R v \cdot 2\pi r \cdot dr = \int_0^R \frac{P(R^2 - r^2)}{4\eta\ell} \cdot 2\pi r \cdot dr \tag{23}$$

donde

$$Q = \frac{P\pi}{2\eta\ell}\int_0^R (R^2 r - r^3)dr \tag{24}$$

e finalmente

$$P = \eta\frac{8\ell}{\pi R^4}Q \tag{25}$$

Este resultado, a que habitualmente se dá o nome de **Lei de Poiseuille**, é devido ao físico e médico francês Jean Poiseuille (1799 - 1869), cujo interesse na circulação do sangue no corpo humano o levou ao estudo do escoamento de líquidos sujeitos a diversas pressões, através de tubos finos (capilares).

1.4 Referências

1. Worsnop B.L. & Flint H.T., "Advanced Practical Physics for Students", Methuen & Co. Ltd, London 1951 (1962)
2. Thewlis, editor in chief, "Encyclopedic Dictionary of Physics", vol 7, Pergamon Press, 1962
3. Klein Arthur H. , "The World of Measurements", Simon & Schuster, 1974
4. Sears F.W., "Mechanics, Heat and Sound", Addison Wesley, 1950