

T4B - Determinação de Módulo Elástico de Materiais Pelo Método das Vibrações de um Barro em Contrato e pelo Síndrome de Torsão.

Alexandre Kikuchi - 202106340 - Grau 3B-PL5

15

### Objetivos

- Determinar o módulo de Young de uma barra através das vibrações do barro em contrato.
- Calcular momentos de inércia e os pesos das massas no fundo de torção.
- Determinar o módulo de rigidez da ligação suspensão.

### Fundamentos teóricos

#### Barro em contrato

O módulo de Young é proporcional à rigidez do material  $\times$

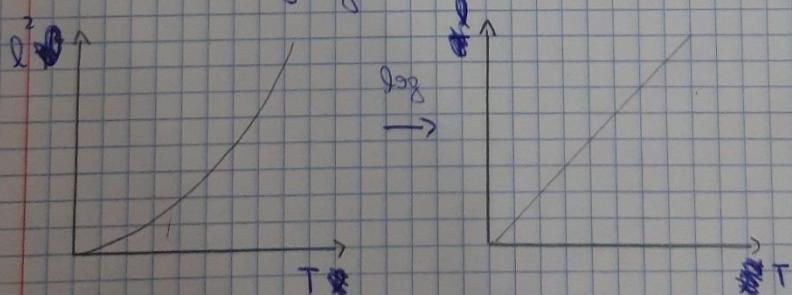
$$(1) \frac{T^2}{l^2} = 5,029 \frac{\pi^2 \rho}{ED^2} \frac{l^4}{n} \quad E = 5,029 \frac{\pi \rho}{m D^2}$$

$l$  - Comprimento da barra

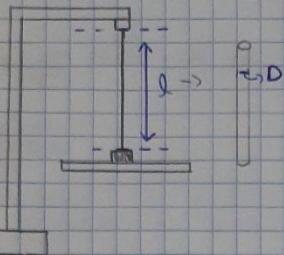
$D$  - diâmetro da barra

$\rho$  - densidade do material

$E$  - módulo de Young



### Pêndulo de Torção



- 1 - Disco + prisma (eixo vertical)
- 2 - Disco + prisma (eixo horizontal)
- 3 - Disco + grava cilíndrica
- 4 - Disco + grava cilíndrica + prisma (eixo horizontal)

- Medir  $l$  e  $D$  (média de várias medições)
- Para cada combinação, medida as suas dimensões e determinar os tempos correspondentes a 10 oscilações para amplitudes  $\theta_{\text{max}} = 90^\circ, 180^\circ \text{ e } 270^\circ$
- Obter o momento de inércia a partir do gráfico de  $I (t^2)$

### Notas

- Anticipar que serão efetuados movimentos de rotação.

### Registo experimental

: barra? pêndulo de torção?

#### Incertezas

Fita métrica - 0,05 cm

Micrometro - 0,01 mm

Conta-milhas - 0,01 s

Contador de milhas - 0,01 s

$$\mu = 123 \pm 154,72/12 = 107,4 \quad = 4,4 \times 10^{-2}$$

$$= 1,0 \times 10^{-3} \times 10^{-14}$$

$$= 1,0 \times 10^{-15}$$

? → Fijo na  
diândice

muito incomplato  
não executaram

- esqueceram experimentais
- isto foi (consequência) parte do trabalho /
- cuidado com este tipo de gestão de tempo /
- têm que estar bem preparados em todas as partes!

Modulo de Rigidez

Tablas - onde está o registo directo?  
- quantos espaços - cálculo de  $\mu^2(I)$ ?

Tmedio (s)	Tmedio^2 (s^2)	I(gcm^2)	I(kgm^2)	log(Tmedio)	log(I)	u(Tmedio)	u(Tmedio^2)	u(I)	Ajuste	Resíduos
6,963	48,49	41670,70	0,00417	0,8428	4,61983	0,01	0,1	0,0001	0,00417	-0,000002
8,656	74,93	64331,93	0,00643	0,9373	4,80843	0,01	0,2	0,0001	0,00642	-0,000010
9,957	99,14	84639,92	0,00846	0,9981	4,92758	0,01	0,2	0,0001	0,00849	0,000025
11,216	125,80	107780,20	0,01078	1,0498	5,03254	0,01	0,2	0,0001	0,01077	-0,000013

nota-se que má preparou bem no pêndulo de torção

Tablo 1 - Tablo das dados experimentais e de ajuste ) no estudo de ?

Realizando uma linearização, com provisórios para  $\mu^2 = 2$ , obtém-se:

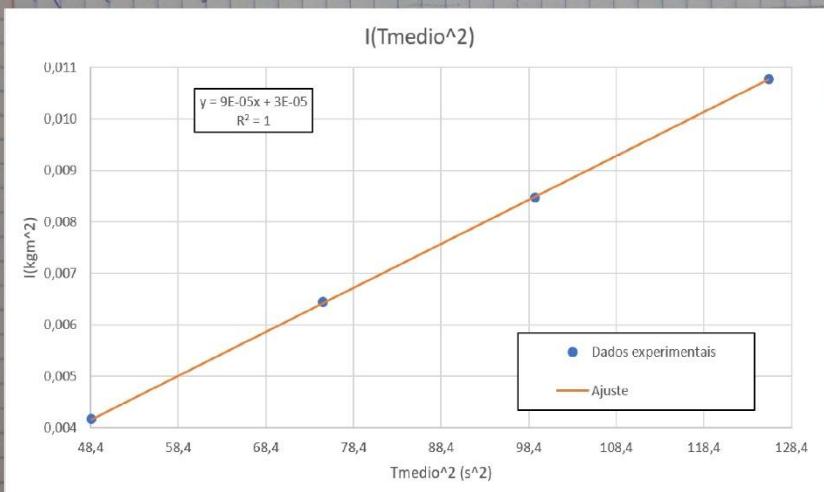


Gráfico 1 - Gráfico de linearização de  $I(T^2)$

Matriz de Ajuste

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline m & 3,54 \times 10^{-5} & 2,62 \times 10^{-5} & b \\ \hline u(m) & 3,71 \times 10^{-7} & 3,14 \times 10^{-5} & u(b) \\ \hline n^2 & 0,99996 & 2,12 \times 10^{-5} & u(y) \\ \hline \end{array}$$

Falta o gráfico dos resíduos correspondentes e elas barras de inc exp. representadas.

↓  
não anotou bem  
- 1º. de preparação  
de inc.?

incerteza de  $\mu$

$$u(\mu) = \sqrt{\left(\frac{\partial \mu}{\partial c} u(c)\right)^2 + \left(\frac{\partial \mu}{\partial s} u(s)\right)^2 + \left(\frac{\partial \mu}{\partial m} u(m)\right)^2}$$

$$= 5 \times 10^{-2}$$

união?

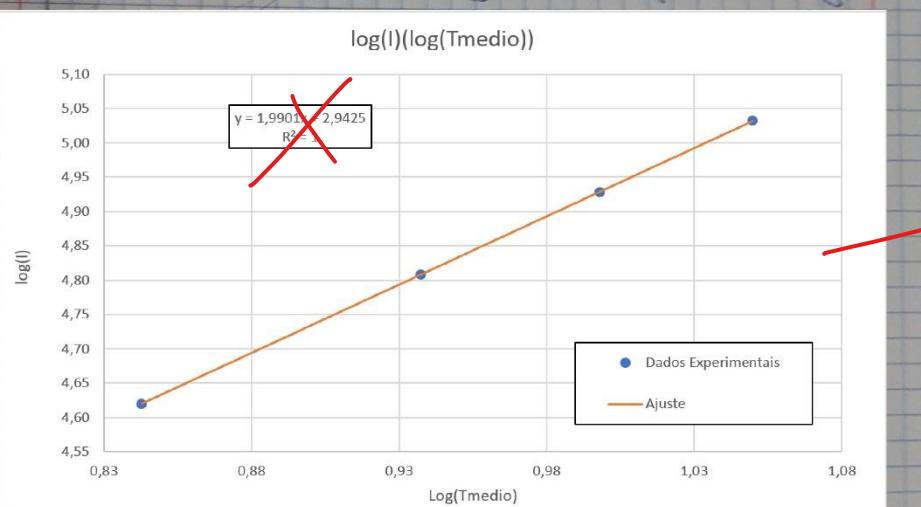
% inc?

Erro de  $\mu$

$$\text{En}(\%) = \frac{|\mu_{\text{tabelado}} - \mu_{\text{experimental}}|}{\mu_{\text{tabelado}}} \times 100$$

$$= 3\%$$

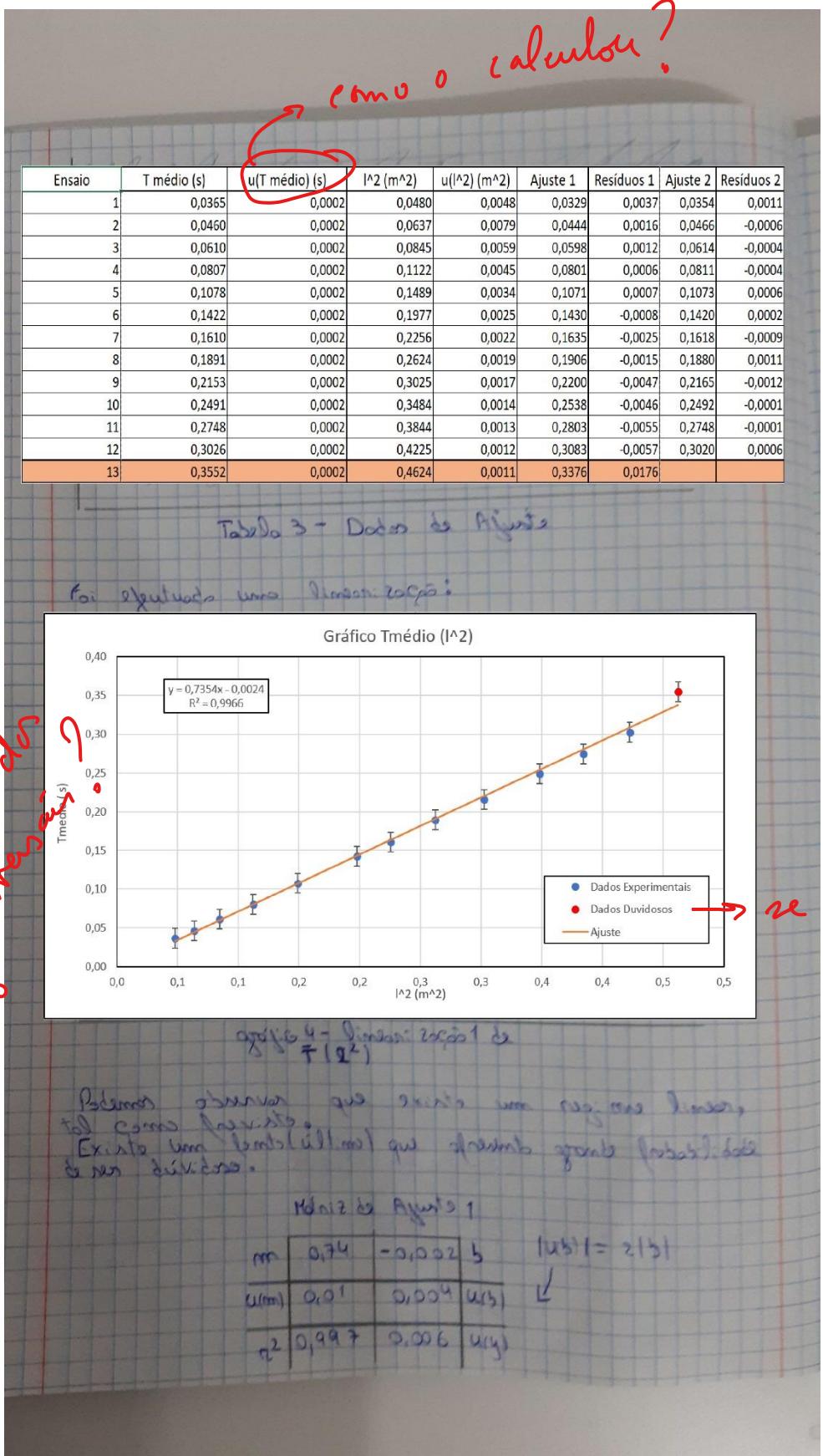
Para verificar a dependência da  $I(F^2)$  com a  $T$ , constante um gráfico  $\log(I)$  em função de  $\log(T)$ .



matriz de ajuste?  
quantificações do expoente?  
% erro?

exemplo -  $\log[I(\log(T))]$

Este gráfico dá-nos o valor do expoente (valor de  $F^2$ ), que como podemos observar é muito próximo de 2, que era o valor esperado.



re acha, executa de fazer este passo informado →  
passe logo para o ajuste "final"

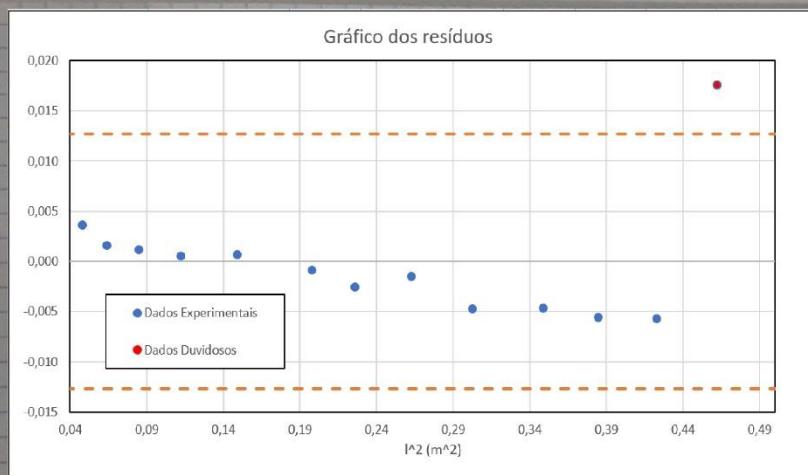


gráfico 5 - gráfico de resíduos

Apesar do valor de  $r^2$  ser bom  $\rightarrow$  existe um ponto claramente duvidoso.

Procedeu-se a uma nova regressão removendo o ponto duvidoso.

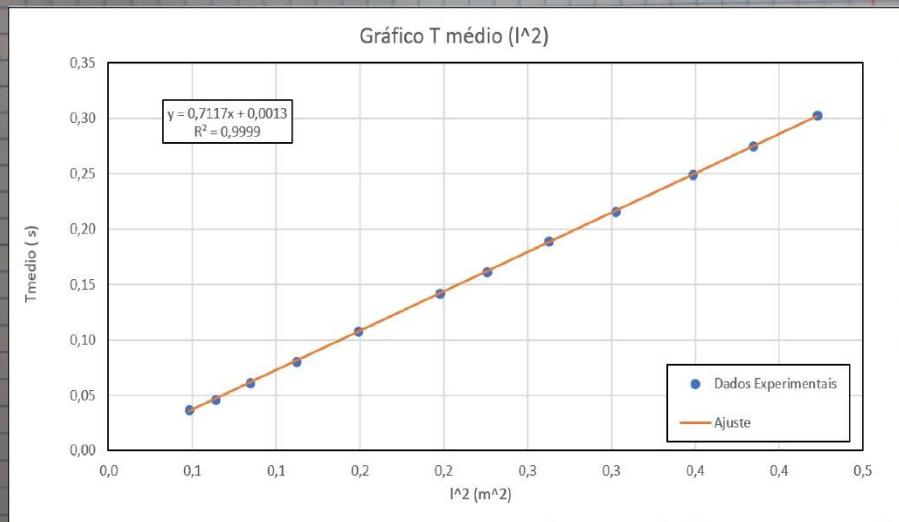
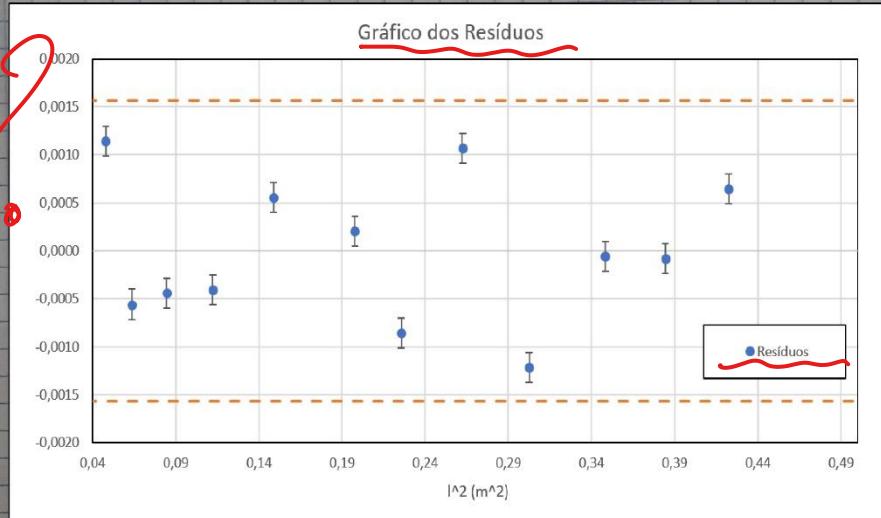


gráfico 6 - gráfico de T médio versus  $I^2$

Agora, é possível observar ainda melhor a função linear.  
Nenhum ponto parece ser duvidoso.

### Matriz de Aguste 2

$m$	0,712	0,0013	$\rightarrow$
$u(m)$	0,002	0,0005	$u(b)$
$n^2$	0,999993	0,001	$u(y)$



falta info!



gráfico - gráfico de resíduos 2

O valor de  $n^2$  é ainda melhor.  
Não existe nenhum regime aparente nos resíduos.  
Os valores estão não reduzidos.  
Tudo indica que isso é uma boa escala de grava e todos  
precisos nem erros na sua aquisição.

Calcula-se então o valor de  $E$ :

$$m = 5,029 \pi^2 \frac{1}{ED^2} P$$

$$( \Rightarrow ) E = 5,029 \pi^2 P \frac{1}{ED^2 m}$$

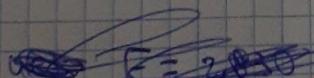
$$P = \frac{u \cdot m}{L \pi D^2} = 3494,924 \text{ Kg.m}^{-3}$$

$u(p) ?$   
 $/u(p) ?$

ac? ?  
com



$$E = (2,30 \pm 0,07) \times 10^{11}$$



$$E_R = 10^{11}, (\text{valor referencial} = 2,10 \times 10^{11})$$

b

considerar  
entrar mais  
info?

i = 51

Considerando os ~~dados~~ dados para i=51

Ensaios	(l ± 0,05) cm	(l ± 0,0005) m	(t ± 0,01) s	T (s)	u[T] (s)	^2 (m^2)	u[ ^2] (m^2)	Ajuste 1	Resíduos 1	Ajuste 2	Resíduos 2
1	21,90	0,2190	0,96	0,0384	0,0002	0,0480	0,0219	0,0339	0,0045	0,0369	0,0015
2	25,24	0,2524	1,17	0,0468	0,0002	0,0637	0,0252	0,0455	0,0013	0,0480	-0,0012
3	29,07	0,2907	1,55	0,0620	0,0002	0,0845	0,0291	0,0609	0,0011	0,0628	-0,0008
4	33,50	0,3350	2,05	0,0820	0,0002	0,1122	0,0335	0,0813	0,0007	0,0825	-0,0005
5	38,59	0,3859	2,73	0,1092	0,0002	0,1489	0,0386	0,1083	0,0009	0,1085	0,0007
6	44,46	0,4446	3,60	0,1440	0,0002	0,1977	0,0445	0,1443	-0,0003	0,1431	0,0009
7	47,50	0,4750	4,03	0,1612	0,0002	0,2256	0,0475	0,1649	-0,0037	0,1629	-0,0017
8	51,23	0,5123	4,78	0,1912	0,0002	0,2624	0,0512	0,1920	-0,0008	0,1890	0,0022
9	55,00	0,5500	5,39	0,2156	0,0002	0,3025	0,0550	0,2215	-0,0059	0,2174	-0,0018
10	59,02	0,5902	6,31	0,2524	0,0002	0,3484	0,0590	0,2553	-0,0029	0,2500	0,0024
11	62,00	0,6200	6,84	0,2736	0,0002	0,3844	0,0620	0,2819	-0,0083	0,2755	-0,0019
12	65,00	0,6500	7,57	0,3028	0,0002	0,4225	0,0650	0,3100	-0,0072	0,3026	0,0002
13	68,00	0,6800	9,00	0,3600	0,0002	0,4624	0,0680	0,3394	0,0206		

~~Table 4 -~~ Dados de medição para i=51

~~A~~ Linhas sublinhadas representam os pontos divididos que já se configuraram anteriormente.

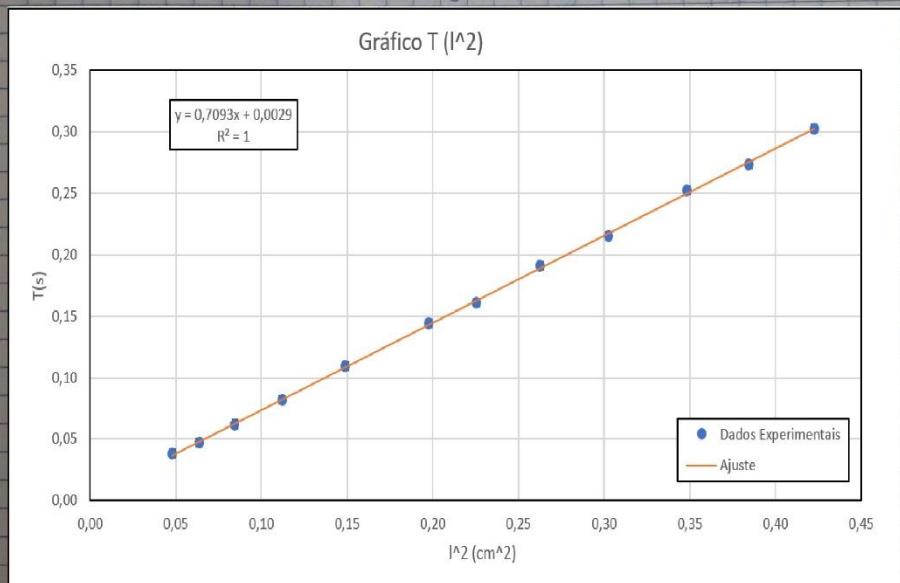


Gráfico 2 - Diminuição de T (^2) para i=51

Matrizes de Ajustes

rm	0,709	0,003	5
urml	0,004	0,0015	4(5)
r^2	0,9997	0,002	ur(y)

**E MAIS INFORMATIVO**

apresentar  
o rendimento  
dos 3  
subruptos!  
(3 séries)

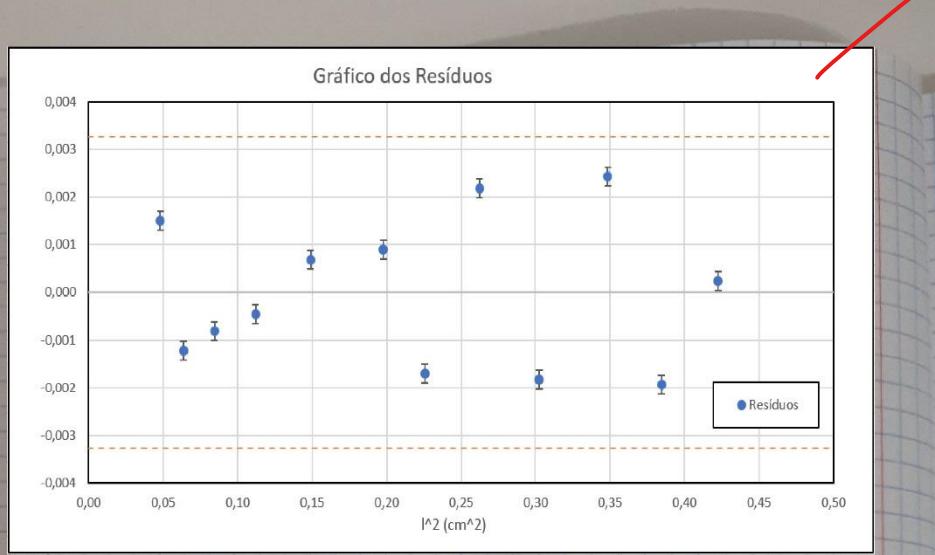


Gráfico 9 - Gráfico de resíduos para  $C=51$

$r^2$  apresenta um valor bom.  
Não se verifica tendência nos resíduos.  
Os valores estão no limite.

Isso afonta para uma boa adequação da curva, sendo estes bastante precisos.

$$E = 5,029 \pi^2 \rho \frac{1}{D^2 \cdot m}$$

$$= (2,32 \pm 0,06) \times 10^{11}$$

$$\text{En}(\%) = 10\%$$

$$i = 101$$

Ensaios	$(l \pm 0,05) \text{ cm}$	$(l \pm 0,0005) \text{ m}$	$(t \pm 0,01) \text{ s}$	$T \text{ (s)}$	$u(T) \text{ (s)}$	$\lambda^2 \text{ (m}^2\text{)}$	$u(\lambda^2) \text{ (m}^2\text{)}$	Ajuste 1	Resíduos 1	Ajuste 2	Resíduos 2
1	21,90	0,2190	1,80	0,0360	0,0002	0,0480	0,0219	0,0324	0,0036	0,0347	0,0013
2	25,24	0,2524	2,29	0,0458	0,0002	0,0637	0,0252	0,0440	0,0018	0,0459	-0,0001
3	29,07	0,2907	3,02	0,0604	0,0002	0,0845	0,0291	0,0593	0,0011	0,0608	-0,0004
4	33,50	0,3350	4,02	0,0804	0,0002	0,1122	0,0335	0,0796	0,0008	0,0806	-0,0002
5	38,59	0,3859	5,36	0,1072	0,0002	0,1489	0,0386	0,1067	0,0005	0,1068	0,0004
6	44,46	0,4446	7,06	0,1412	0,0002	0,1977	0,0445	0,1425	0,0013	0,1416	-0,0004
7	47,50	0,4750	8,04	0,1608	0,0002	0,2256	0,0475	0,1630	0,0022	0,1615	-0,0007
8	51,23	0,5123	9,40	0,1880	0,0002	0,2624	0,0512	0,1901	-0,0021	0,1878	0,0002
9	55,00	0,5500	10,76	0,2152	0,0002	0,3025	0,0550	0,2196	-0,0044	0,2164	-0,0012
10	59,02	0,5902	12,37	0,2474	0,0002	0,3484	0,0590	0,2533	-0,0059	0,2492	-0,0018
11	62,00	0,6200	13,86	0,2772	0,0002	0,3844	0,0620	0,2798	-0,0026	0,2749	0,0023
12	65,00	0,6500	15,13	0,3026	0,0002	0,4225	0,0650	0,3078	-0,0052	0,3021	0,0005
13	68,00	0,6800	17,65	0,3530	0,0002	0,4624	0,0680	0,3372	0,0158		

Tabela 5 - dados de medição  $i=101$

O valor sublinhado se divide.

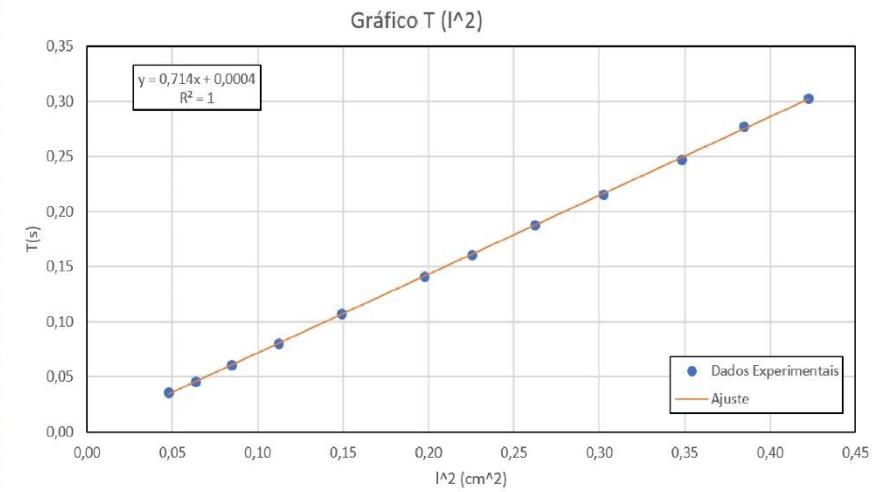


gráfico 10 - Diminuição de  $\bar{T}(I^2)$  para  $i = 101$

Matriz de Ajuste

$m$	0,714	0,0004	$b$
$u(m)$	0,003	0,0007	$u(b)$
$u^2$	0,99986	0,001	$u(u)$

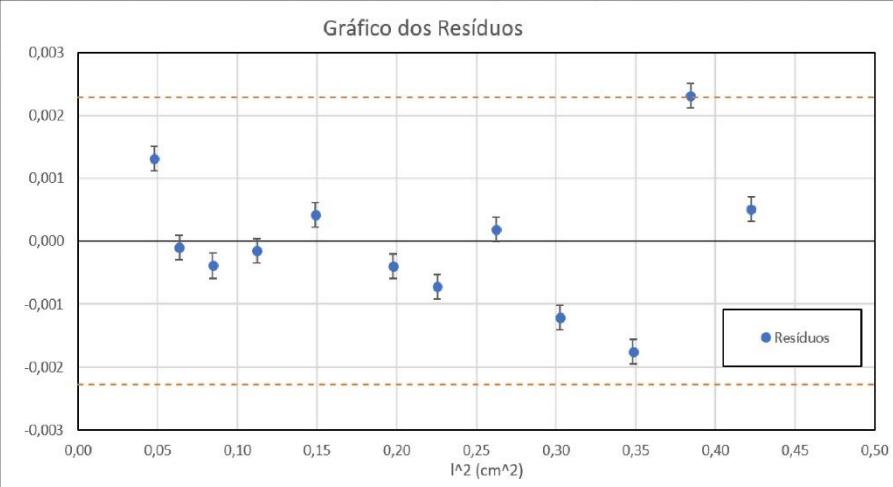


gráfico 11 - gráfico de Resíduos para  $i = 101$

O valor de  $\pi^2$  é muito bom para a distribuição eletrônica. Os resíduos apresentam uma distribuição aleatória (nem viés). Existe um ponto curioso mas feito para ondulação, ele, conclui-se que este não contribui significativamente para os valores obtidos, por isso não é considerado.

$$E = 5,029 \pi^2 \rho \frac{1}{m^2} = (2,29 \cancel{\pm 0,06}) \times 10^{11}$$

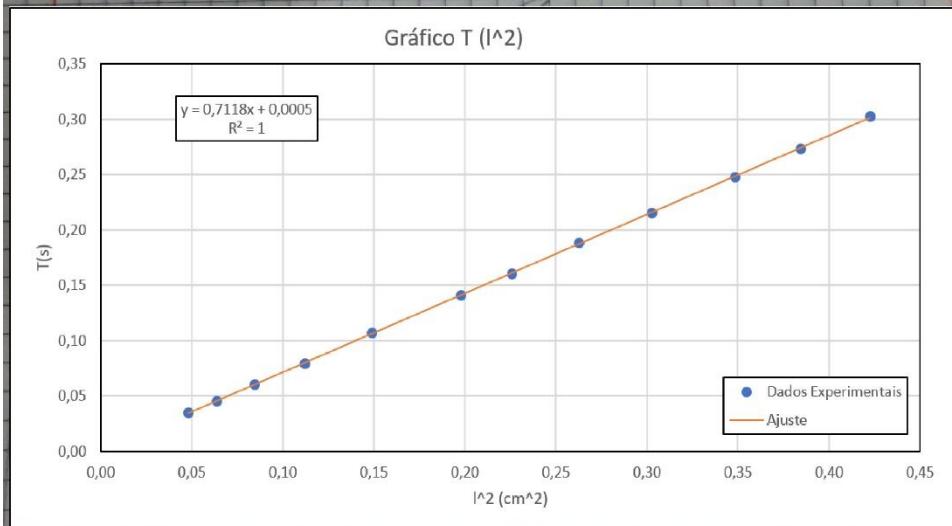
$$En(\%) = 9\%$$

$i = 151$

Ensaios	( $\pm 0,05$ ) cm	( $\pm 0,0005$ ) m	( $\pm 0,01$ ) s	T (s)	$u(T)$ (s)	$ I ^2$ ( $m^2$ )	$u( I ^2)$ ( $m^2$ )	Ajuste 1	Resíduos 1	Ajuste 2	Resíduos 2
1	21,90	0,2190	2,64	0,0352	0,0002	0,0480	0,0219	0,0323	0,0029	0,0346	0,0006
2	25,24	0,2524	3,41	0,0455	0,0002	0,0637	0,0252	0,0438	0,0017	0,0458	-0,0003
3	29,07	0,2907	4,54	0,0605	0,0002	0,0845	0,0291	0,0591	0,0014	0,0606	-0,0001
4	33,50	0,3350	5,98	0,0797	0,0002	0,1122	0,0335	0,0794	0,0003	0,0803	-0,0006
5	38,59	0,3859	8,03	0,1071	0,0002	0,1489	0,0386	0,1064	0,0007	0,1065	0,0006
6	44,46	0,4446	10,60	0,1413	0,0002	0,1977	0,0445	0,1421	-0,0008	0,1412	0,0001
7	47,50	0,4750	12,07	0,1609	0,0002	0,2256	0,0475	0,1626	-0,0017	0,1611	-0,0001
8	51,23	0,5123	14,11	0,1881	0,0002	0,2624	0,0512	0,1896	-0,0015	0,1873	0,0008
9	55,00	0,5500	16,14	0,2152	0,0002	0,3025	0,0550	0,2190	-0,0038	0,2158	-0,0006
10	59,02	0,5902	18,57	0,2476	0,0002	0,3484	0,0590	0,2527	-0,0051	0,2485	-0,0009
11	62,00	0,6200	20,51	0,2735	0,0002	0,3844	0,0620	0,2791	-0,0057	0,2741	-0,0006
12	65,00	0,6500	22,68	0,3024	0,0002	0,4225	0,0650	0,3071	-0,0047	0,3012	0,0012
13	68,00	0,6800	26,45	0,3527	0,0002	0,4624	0,0680	0,3364	0,0163		

Tabela 6 - Dados de ondulação  $i = 151$

O ponto sublinhado é inválido



Em todos os gráficos de resíduos falta  $\oplus$

Meth. de Ajuste		
m	0,712	0,0005 $\pm$ 5
$u(m)$	0,002	0,0009 $\pm$ 5
$n^2$	0,99995	0,701 $\pm$ 5

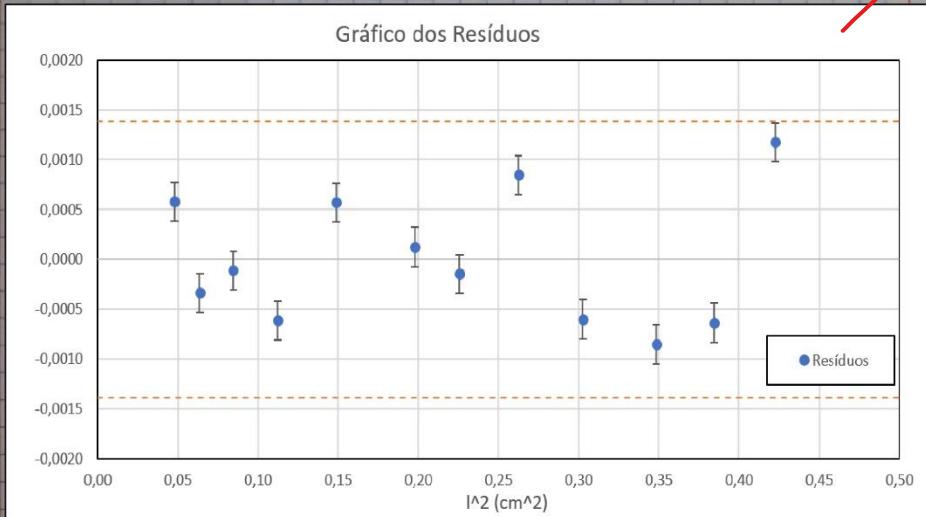


gráfico 13 - gráfico de resíduos para  $i=151$

$R^2$  apresenta bom valor.  
Os resíduos apresentam uma distribuição aleatória  
e têm valores próximos, tudo indica para uma boa  
execução.

$$E = 5,029 \pi^2 \rho \frac{1}{mD^2} = (2,3) \pm 0,07 \times 10^{-11}$$

$$En(\%) = 9\%$$

~~scribble~~

A análise para  $i=51$ ,  $i=101$ ,  $i=151$  mostrou grande  
gerincio entre si.

cerca de 0,5  
dos restantes  
 $\downarrow$   
é de 7  
encontrados

### Resultados

#### Péndulo de torsión

$$\mu = (7,70 \pm 0,05) \times 10^{10} \text{ Pa}$$

$$E_{\text{rel}} = 3\%.$$

#### Barras amortiguadas

$$i = 51 \rightarrow E = (2,29 \pm 0,06) \times 10^{11}$$

$$E_{\text{rel}} = 10\%.$$

$$i = 101 \rightarrow E = (2,30 \pm 0,07) \times 10^{11}$$

$$E_{\text{rel}} = 9\%.$$

$$i = 151 \rightarrow E = (2,30 \pm 0,07) \times 10^{11}$$

$$E_{\text{rel}} = 9\%.$$

$$\text{Todos } \rightarrow i \rightarrow E = (2,32 \pm 0,07) \times 10^{11}$$

$$E_{\text{rel}} = 10\%.$$

$$U(E) = \sqrt{\left(\frac{\partial E}{\partial m} u(m)\right)^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial D} u(D^2)\right)^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial p} u(p)\right)^2}$$

#### Conclusões

Usando os valores dos momentos de inércia e  
valores conhecidos de objectos, foi possível obter um valor para o módulo de rigidez de ~~um~~?

$$\mu = (7,70 \pm 0,05) \times 10^{10} \text{ Pa}$$

que apresenta um erro ~~de~~ 3%, e  $\rightarrow \% \text{ inc.}$   
das aquisições de dados que resultam num valor  
muito próximo ao esperado.

~~Portanto, é necessário que tenha uma base de aquisição de dados~~

~~que seja suficiente para obter resultados finais~~

~~FALTA~~  
~~a Identificação~~  
~~dos resultados finais~~

Através do método de vibrações é possível obter um valor para a constante de Young de aço?

10

$$E = 12,30 \pm 0,03\% \times 10$$

Tendo visto o a médio dos valores em 4 amostras

obtendo um erro de 10%. Isto mostra que a escala do erro experimental não foi a mais adequada, apesar de o valor em si ser aceitável e permitir que a constante de aço

Conforme

% inc. "má concordo com a sua escolha do "valor final"

$$\rho; \% u(\rho); \% \text{err } \rho ?$$