

T2

T2A) Ressonâncias acústicas em  
tubos

T2B) Radiação térmica

# T 1- RESSONÂNCIAS ACÚSTICAS EM TUBOS OCOS

## 1 Objectivos

- Observação de espetros de frequência de ressonâncias acústicas em tubos fechados numa e nas duas extremidades.
- Determinação da velocidade de propagação do som no ar, utilizando os dois tipos de tubo.

## 2 Execução do trabalho

Para este trabalho vamos utilizar o programa Audacity.

Pode descarregar a última versão «*freeware*» da net (Audacity 2.4.2), ou usar a versão existente no computador do laboratório que é uma versão menos recente. Pode ver a comparação da janela principal de comandos em ambas as versões na figura 1.

Antes de iniciar o registo de dados, familiarize-se com este programa, fazendo algumas gravações com o microfone e fazendo a respetiva análise espectral. Analize, por exemplo os sons «aaaaaaa», «iiiiii», etc. produzidos por si.

### 2.1 Ressonância de tubos fechados numa extremidade

- Na altura da realização experimental, *e para cada tubo*, não se esqueça de registar a temperatura  $T$  (em Kelvin) e o valor da pressão de vapor de água  $p_{vH_2O}$ , expressa em milímetros de mercúrio. Com estes valores pode calcular o valor de referência para a velocidade do som no ar, recorrendo à equação 1.

$$v = 331,4 + 0,607(T - 273,15) + 0,08p_{vH_2O} \quad (1)$$

- Antes de abrir o programa Audacity, verifique que o microfone de mesa está ligado ao computador na tomada adequada (cor-de-rosa) do painel posterior (ver figura 2, no caso do computador do laboratório).
- Verifique que o programa Audacity reconhece o *microfone*, *testando uma gravação*. **Nota:** se alterar a ligação dos fios, poderá ter que desligar e voltar a ligar o programa, ou mesmo o computador para que o microfone seja reconhecido pelo Audacity.
- Ligue a gravação no programa e sopre no tubo, tal como indicado na figura 3, tapando a outra extremidade do tubo. *Escolha a forma como o vai tapar. Se o fizer com o dedo, essa é a melhor escolha? Porquê?*

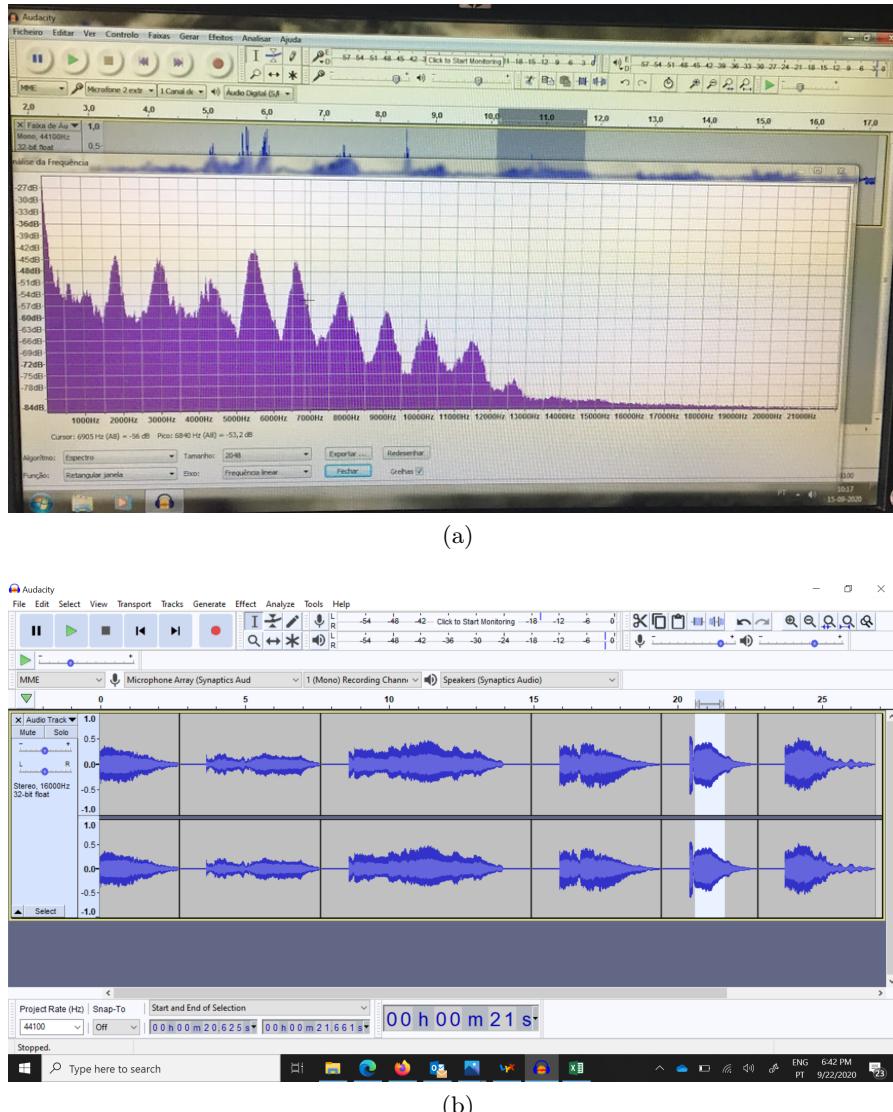


Figura 1: Painel de comandos na versão existente no laboratório (a) e a versão mais atual (b)

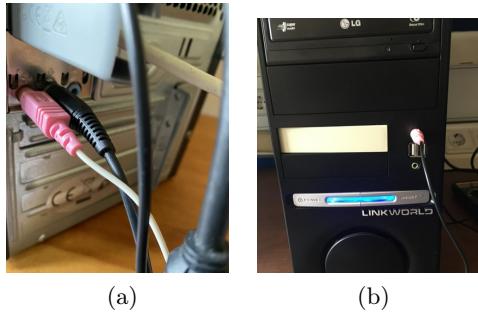


Figura 2: Esquemas de ligação do microfone ao computador: banana cor-de-rosa ligada ao painel posterior (a) e ao painel anterior (b). O terminal preto é o terminal do altifalante, ligado à tomada adequada no painel posterior do computador.



Figura 3: a) Comandos básicos para gravação do som. b) Método de sopragem que origina a vibração da coluna de ar no interior no tubo.

- Termine a gravação e selecione a secção correspondente à melhor produção de som pelo tubo.
- No menu de análise (ver figura 4) selecione a opção *Plot spectrum (desenhar espetro de frequência)*. Aumente o tamanho da janela para uma boa visualização da sequência de picos no espetro. Se pretender reduzir a gama de frequências de representação do espetro, escolha sequencialmente no menu principal, *tracks (faixas), resample*, e depois digite o valor pretendido (na figura 4 vai ser escolhido 16000, por exemplo).

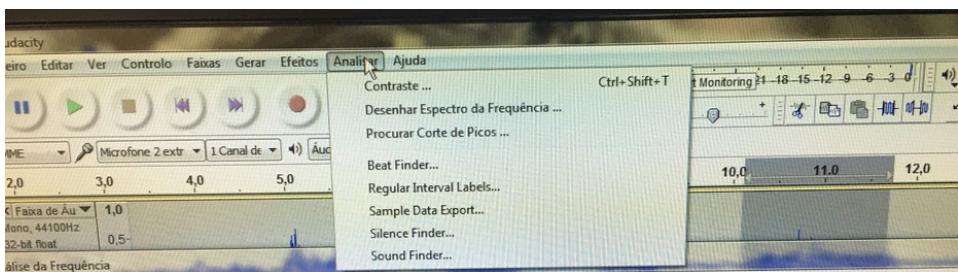
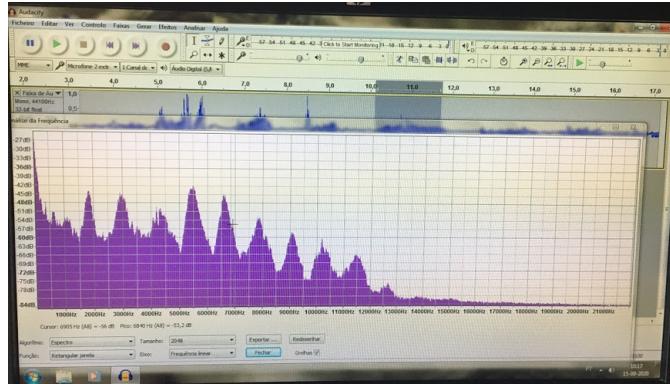


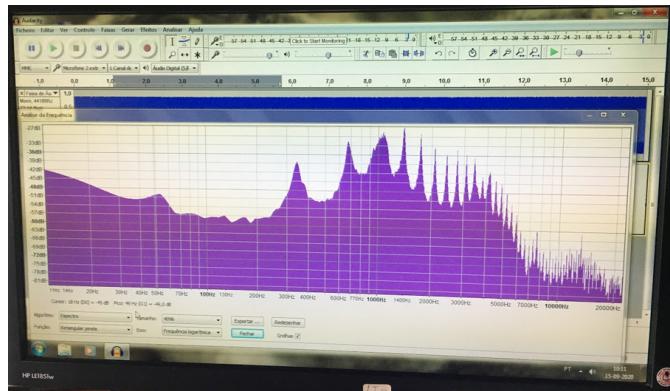
Figura 4: No menu do programa, opções de escolha para a Análise e visualização do espetro de frequências (*Analisar; Desenhar espetro de frequências*).

- Depois de obter o espetro, pode escolher visualizá-lo em função da frequência numa

representação linear ou logarítmica (figura 5). A logarítmica é preferível para melhor identificar as ressonâncias a baixa frequênci, mas a representação linear é melhor para as restantes. Desloque o cursor de modo a com ele assinalar os picos. Para cada posição do cursor, na parte inferior da janela é indicada a frequência correspondente.



(a)



(b)

Figura 5: Exemplos de espectros medidos em escala: a) linear; b) logarítmica.

- Elabore uma tabela onde deve registar, para cada tubo com um dado comprimento (medido com uma craveira), cada uma das frequências de ressonância identificadas e o correspondente nº do modo de vibração. Note que só deve considerar a contagem dos modos a partir do 2º (contando a partir da menor frequênci) pico observado no espetro, que é também o mais intenso. *Verificou se o diâmetro interno é o mesmo para todos os tubos? Não se esqueceu de medir a temperatura ambiente e a pressão de vapor de água?*
- Repita o procedimento para outros 3 ou 4 tubos de comprimento distinto.
- Trace um gráfico da frequência  $f$  em função da ordem  $n$  do modo. Recorrendo a

um ajuste linear, determine a velocidade do som, recorrendo à equação 2

$$f = \frac{v}{2(\ell + \Delta y)} \cdot n + \frac{v}{4(\ell + \Delta y)} \quad (2)$$

onde  $\Delta y = 0.305 D$  é a correção ao comprimento do tubo, proposta teoricamente. Pode determinar  $v$  através da análise gráfica de duas formas diferentes. *Quais são elas e qual delas é a melhor? Justifique.*

- Trace um gráfico do comprimento  $\ell$  dos tubos em função do inverso da frequência,  $1/f$ , para modos com o mesmo número  $n = n_i$ . Que informações adicionais pode retirar da experiência?
- Confronte os resultados obtidos experimentalmente para a velocidade de propagação do som no ar, com o valor esperado. **Note:** deve coligir numa tabela, todos os resultados obtidos para a velocidade do som e depois decidir qual é o seu resultado final para esta grandeza.

## 2.2 Ressonância de tubos fechados nas duas extremidades

- Verifique que o microfone e o altifalante do tubo de ressonância estão ligados às tomadas adequadas, no painel posterior do computador (figuras 2 e 6) e que o programa Audacity os reconhece.

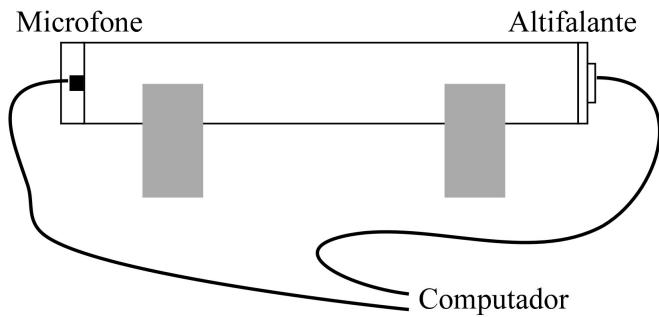


Figura 6: Esquema da montagem do tubo de ressonância e ligação ao computador.

- No menu de geração crie um ruído branco com algumas dezenas de segundos de duração.
- Fazendo um “click” no botão de gravação do programa este vai gravar o sinal do microfone enquanto o microfone reproduz o ruído branco no interior do tubo. Assegure-se que o volume de saída não é muito alto, pois pode introduzir realimentação no altifalante gerando batimentos.
- Termine a gravação e selecione a seção correspondente à melhor produção de som pelo tubo.

- No menu de análise selecione a função *desenhar espectro de frequência*. Ajuste a janela para uma boa visualização e selecione o número de pontos utilizados para a análise (idealmente o máximo).
- Desloque o cursor de forma a identificar a frequência dos picos de ressonância e faça o todos os registos numa tabela adequadamente construída.

**Atenção:** O conjunto altifalante-microfone tem uma ressonância própria perto de 1 kHz. Este pico de ressonância é facilmente visível e não deve ser confundido com a ressonância da coluna de ar.

- Trace um gráfico da frequência em função da ordem do modo. A partir da correspondente análise gráfica, determine a velocidade do som.

### 3 Introdução teórica

O que nós sentimos como som, é a sensação auditiva produzida por vibrações mecânicas do meio que comunica com o nosso ouvido, numa gama de frequências característica da nossa espécie, gama essa  $\sim [20, 20000]$  Hz. Note que esta é uma gama média e que pressuposiões ouvidos saudáveis que ainda não foram danificados pelo ambiente sonoro.

Em muitas situações, a existência de condições fronteira, que se traduzem em modos próprios de vibração, favorecem (reforçam) a vibração em frequências bem definidas, chamadas frequências de ressonância. Este é o princípio de funcionamento dos instrumentos musicais clássicos. Também é a razão pela qual o nosso ouvido é mais sensível a frequências  $\sim 500$  Hz,  $\sim 3500$  Hz e  $\sim 13$  kHz (ressonâncias do ar no canal auditivo).

Neste trabalho vamos estudar as ressonâncias acústicas em tubos contendo ar e fechados numa, ou nas duas extremidades.

#### 3.1 Frequências de ressonância

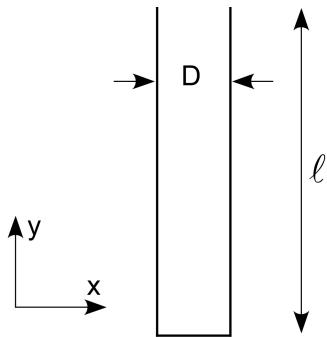
Vamos considerar a ressonância acústica em tubos ocos fechados numa extremidade, de acordo com a figura 7.

Vamos admitir, por simplicidade, que se trata de um sistema a uma dimensão, isto é, não iremos considerar as limitações impostas nas direções transversais xx e zz. Supomos ainda que a origem do eixo dos yy (longitudinal) coincide com a base fechada do tubo.

Através de uma ação externa (ex: fluxo de ar junto à abertura do tubo) produz-se uma perturbação no ar do tubo, que resulta na propagação de ondas de pressão no seu interior.

Vamos supor ainda que as intensidades sonoras são baixas, isto é, que as variações de pressão no ar causadas pela vibração, são muito menores que a pressão atmosférica.

Para este sistema, as condições fronteira são:

Figura 7: Esquema de um tubo de espessura  $D$  e comprimento

- Para  $y = 0$ , não existe vibração. As moléculas de ar em contacto com a parede não se deslocam por ação da perturbação.
- Para  $y = \ell$ , a vibração é máxima.

Estas condições fronteira indicam que teremos um nodo de vibração para  $y = 0$  e um antinodo para  $y = \ell$ . Mediante estas condições fronteira, a equação que traduz a relação  $\ell(\lambda)$  é a e. 3

$$\ell = \frac{\lambda}{4} + n \frac{\lambda}{2} \quad (3)$$

em que  $\lambda$  representa o comprimento de onda do som e  $n$  é um número inteiro.

Para  $n = 0$  (modo fundamental), temos então a eq. 4:

$$\lambda = 4\ell \quad (4)$$

Para os modos de ordem superior, teremos sucessivamente:

$$\begin{array}{ll} n=1 & \lambda = 4\ell/3 \\ n=2 & \lambda = 4\ell/5 \\ n=3 & \lambda = 4\ell/7 \\ \dots & \dots \\ n=n & \lambda = \frac{4\ell}{2n+1} \end{array} \quad (5)$$

Como a velocidade de propagação de uma onda ( $v$ ), o comprimento de onda ( $\lambda$ ), e a sua frequência de vibração ( $f$ ), estão relacionados por

$$v = \lambda f \quad (6)$$

podemos obter a velocidade de propagação do som a partir do conhecimento da frequência

de ressonância associado a cada modo:

$$\begin{aligned}
 n=0 & \quad v = f_0 4\ell \\
 n=1 & \quad v = f_1 4\ell/3 \\
 n=2 & \quad v = f_2 4\ell/5 \\
 & \dots \quad \dots \\
 n=n & \quad v = \frac{4f\ell}{2n+1}
 \end{aligned} \tag{7}$$

Reorganizando a escrita desta equação, obtemos:

$$f = \frac{v(2n+1)}{4} \cdot \frac{1}{\ell} = \frac{v}{2\ell} \cdot n + \frac{v}{4\ell} \tag{8}$$

### 3.2 Tubos fechados nas duas extremidades

Para tubos fechados nas duas extremidades teremos nodos nos dois extremos e um, ou mais, ventres (amplitude máxima de vibração) no interior do tubo.

O modo fundamental terá apenas um ventre. Nestas condições teremos:

$$\lambda = 2\ell \tag{9}$$

Para os modos de ordem superior, teremos respectivamente:

$$\begin{aligned}
 n=1 & \quad \lambda = \ell \\
 n=2 & \quad \lambda = 2\ell/3 \\
 n=3 & \quad \lambda = 2\ell/4 \\
 & \dots \quad \dots \\
 n=n & \quad \lambda = \frac{2\ell}{n+1}
 \end{aligned} \tag{10}$$

Tal como no caso anterior, podemos escrever a frequência em função do índice do modo, obtendo:

$$f = \frac{v}{2\ell} \cdot n + \frac{v}{2\ell} \tag{11}$$

Note que o modo fundamental ocorre à frequência dada por  $v/2\ell$ .

### 3.3 Correções às expressões introduzidas

As expressões anteriores pressupõem que os nodos e antinodos se formam exatamente nos extremos do tubo.

A assumpção para o extremo fechado é verificada desde que *o material que forma o fundo seja indeformável*.

No extremo aberto, a variação da densidade com  $y$  não pode ser igual a zero, como seria de esperar se fosse um antinodo, dada a propagação de som para o exterior. A correção a introduzir pode ser vista como a passagem de uma frente de onda plana, no limite do tubo, para uma onda esférica, no exterior. *Este ajuste corresponde a considerarmos o tubo ligeiramente mais comprido de um valor  $\Delta y$ .*

Teremos assim a expressão corrigida para a frequência de ressonância:

$$f = \frac{v(2n+1)}{4} \cdot \frac{1}{\ell + \Delta y} \quad (12)$$

*Esta correção pode ser determinada experimentalmente traçando o gráfico de  $\ell$  em função de  $1/f$ . A recta correspondente irá cruzar o eixo das ordenadas no ponto  $(0, -\Delta y)$ .*

De acordo com a referência [4] esta correção tem o valor  $\Delta y = 0,305D$  para tubos de secção circular, em que  $D$  é o diâmetro do tubo.

### 3.4 Velocidade do som

A velocidade do som no ar ( $v$ ) pode ser aproximada pela fórmula seguinte:

$$v = 331,4 + 0,607(T - 273,15) + 0,08p_{vH_2O} \quad (13)$$

em que  $T$  é a temperatura absoluta e  $p_{vH_2O}$  é a pressão de vapor de água, expressa em milímetros de mercúrio.

## Referências

[1]

1. G. Bruhat, "Mécanique", 6<sup>a</sup> edição, Masson e Cie, 1961
2. F.W. Sears, "Mechanics, Heat and Sound", Addison Wesley, 1950
3. A. D. Pierce, "Acoustics - An introduction to its Physical Principles and Applications", McGraw-Hill, 1981
4. E. G. Richardson, "Sound - A Physical Text-Book", 2<sup>a</sup> edição, Edward Arnold & Co, 1935
5. H. J. Pain, "The Physics of Vibration and Waves", 4<sup>a</sup> edição, J. Wiley, 1993

# 1 ESTUDO EXPERIMENTAL DA RADIAÇÃO TÉRMICA

## 1.1 Objectivos

- Apreciação qualitativa da emissividade de vários materiais.
- Verificação da lei de Stefan-Boltzmann.

## 1.2 Realização experimental

O trabalho consta de duas partes que serão parcialmente executadas em paralelo: **1<sup>a</sup> parte** - Cubo de Leslie; **2<sup>a</sup> parte** - Verificação da lei de Stefan-Boltzmann.

A montagem experimental base está indicada na figura 1. Utiliza-se o seguinte material: cubo de Leslie, lâmpada de Stefan-Boltzmann, sensor de radiação com anteparos espelhados, fonte de tensão, ohmímetro, microvoltímetro, voltímetro e amperímetro.

O cubo de Leslie é um cubo de paredes de alumínio com uma espessura razoável destinada a fornecer uma boa condução de calor que garanta uniformidade da temperatura em todos os pontos do cubo. O cubo é aquecido interiormente por uma lâmpada de 100 W à qual podem ser fornecidas outras potências, reguláveis através de uma fonte de tensão própria.

Exteriormente, quatro das suas faces são revestidas de diversos materiais destinados à comparação dos vários poderes emissivos. A temperatura das faces do cubo é lida através da resistência de um termistor,  $R_t$ , embebido no cubo e convertida em temperaturas (em Kelvin).

O sensor de radiação é constituído por uma termopilha (um dispositivo que converte o calor que recebe em f.e.m.) calibrada, com um circuito amplificador.

Para manter calibrada esta termopilha, é necessário não a expor, mais do que o indispensável, a quaisquer fluxos de calor. A termopilha está protegida por um anteparo que é fechado ou aberto pelo deslizar de um anel: o seu "campo visual" está tapado quando o anel está puxado para trás e abre quando se desliza o anel para a frente figura . Quando em uso a abertura pode, se indispensável, estar aberta, mas deve então ser protegida, entre medições, pela apropriada placa isoladora, face espelhada virada para o sensor.

### 1. Cubo de Leslie (*a fazer em paralelo com a experiência da verificação da lei de Stefan-Boltzman*)

- Garantir a configuração indicada na figura 1(a).
- Com o sensor afastado das fontes de calor do trabalho, medir e registar a radiação ambiente,  $R_{amb}$ . Esta medida, se o sensor estiver em equilíbrio térmico com o exterior no momento da medida, representará não só a quantidade de calor recebida do meio exterior, à temperatura ambiente, como a quantidade de calor que o próprio sensor emite.
- Ligar o ohmímetro nos terminais do termistor do cubo de Leslie e iniciar o seu aquecimento utilizando a potência máxima, HIGH.
- Ir vigiando (enquanto decorre a execução da 2<sup>a</sup> parte) os valores da resistência do termistor até esta atingir cerca de 40 kΩ. Ajustar então o controle da fonte para a **posição 5**.

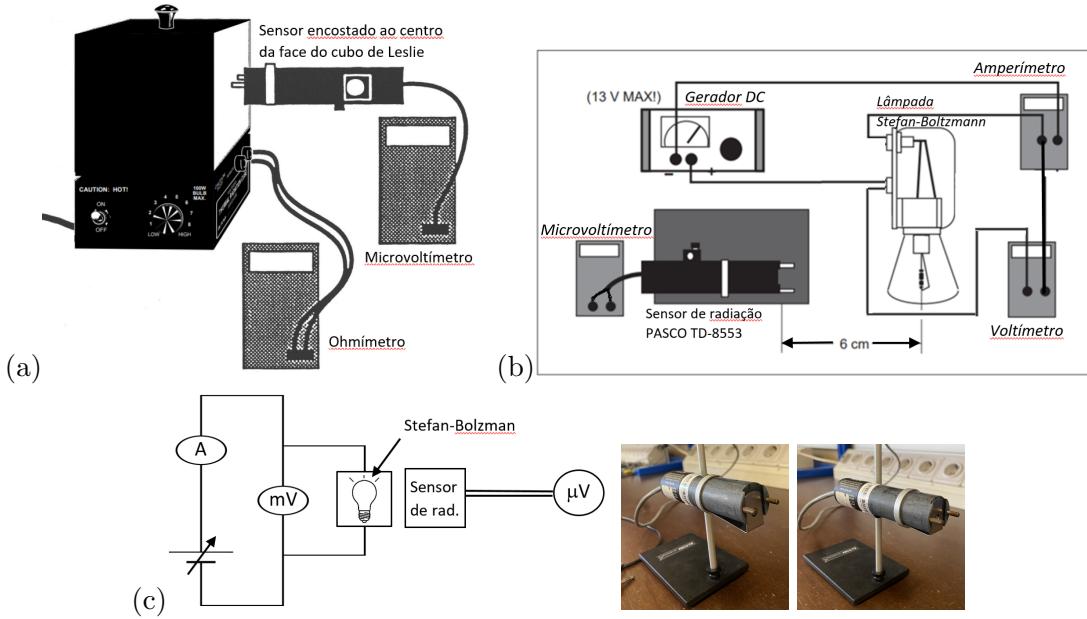


Figura 1: Montagem experimental: (a) com o Cubo de Leslie; (b) para o estudo da lei de Stefan-Boltzmann e (c) respetivo circuito esquemático. (d) Sensor a não detetar sinal (à esquerda) e a detetar sinal (à direita).

- Estando já o cubo em equilíbrio térmico com o exterior (temperatura estável), para essa potência (posição 5 do alimentador), efetuar medidas *em aquecimento* e até ao máximo que conseguir, da radiação emitida pelas diferentes faces, encostando as pontas do sensor sensivelmente ao centro de cada face. Isto é, para cada face  $i$  e a cada temperatura estabilizada  $R_t$ , registar pares de valores  $(V_s, R_t)_{face\ i}$ , como sugerido na tabela 1. Note que as medições nas 4 faces, à mesma temperatura, devem ser executadas tão rápido quanto possível.

Posição do alimentador	Temperatura		$V_s$ , para face			
	$R(\Omega)$	$\theta (^\circ)$	preta	branca	baça	metalizada
5						
:						
10						

Tabela 1: Registo a efetuar no estudo com o cubo de Leslie.

- As equação de conversão nas várias gamas de temperatura estão indicadas em anexo, na figura 3.
- Numa análise gráfica de  $V_s$  em função de  $T^4$ , compare entre si a emissividade das várias faces relativamente à face preta, considerando que nesta  $\epsilon_{preta} \sim 1$ . Comente os resultados obtidos. *Com este tipo de análise, pode dizer que a lei de Stefan-Boltzman se verifica no caso das diferentes faces do cubo?*

## 2. Lei de Stefan-Boltzman

- Montar o circuito indicado na figura 1(b).
- Medir, **com uma tensão inferior a 0.1 V**, a resistência da lâmpada de Stefan Boltzmann,  $R_{amb}$ , e registar esse valor. O registo de um valor correto para  $R_{amb}$  é muito importante. **Dispondo de tempo suficiente**, pode certificar-se que o valor que determina é de confiança. Para isso pode recorrer ao sugerido no apêndice 1.1.3.
- **A tensão máxima que a lâmpada suporta é 13 V!** O melhor é prudentemente não ultrapassar os 12 V. Retifique, se necessário, as posições dos comandos da fonte.
- Ajustar a altura do sensor no suporte de modo a estar alinhado com o centro do filamento da lâmpada (figura 2). Colocar o sensor a cerca de 6 cm da lâmpada e desviar todos os objetos do “campo visual” do sensor.

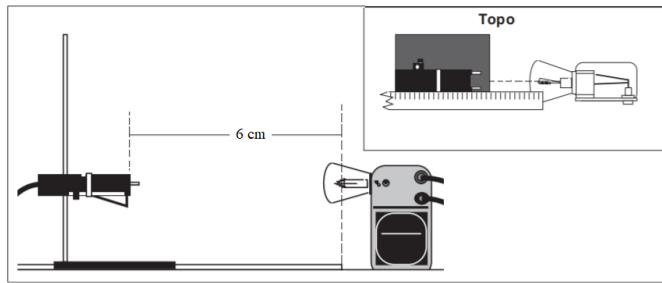


Figura 2: Alinhamento do sensor de radiação com o centro do filamento de tungsténio.

- Na gama experimental de 1 V a 12 V, e variando  $V$ , registe **tanto em aquecimento como em arrefecimento**, trios de valores de  $(V, I, V_s)$ , onde  $V$  e  $I$  são obtidos no circuito da lâmpada, e a tensão  $V_s$  é lida no microvoltímetro ligado ao sensor. **Proteja o sensor executando a experiência de forma célere e tapando novamente o sensor mal a acabe**. Ao realizar a experiência em aquecimento e arrefecimento deve considerar apenas os dados que *não são assimétricos*. Para estes, deve fazer a média dos valores para o mesmo  $V$ . Assim suprime-se parcialmente o efeito de drift. Isto é particularmente relevante para temperaturas inferiores a 1000 K.[3]
- Use os dados para a conversão da temperatura do filamento de tungsténio dadas em anexo, figura 4.
- Numa análise adequada, investigue a veracidade da lei de Stefan-Boltzman

$$V_s = A\epsilon\sigma T^4 \quad (1)$$

onde  $\sigma$  é a constante de Stefan-Boltzmann,  $\epsilon$  é a emissividade do tungsténio,  $A$  é a área superficial eficaz do filamento e  $V_s$  é a intensidade radiada pela área  $A$ . *Qual o parâmetro que pretende determinar experimentalmente? Que representação gráfica  $y(x)$  deve usar para fazer o ajuste linear?*

- **Note** que o que mede é  $V_s$ , uma grandeza que se admite como sendo proporcional à potência . Ou seja,  $P = CV_s$ , onde  $C = A\epsilon\sigma$ . *Constate que assim é antes de fazer o estudo do ponto anterior. Isso verifica-se experimentalmente em toda*

*a gama experimental estudada? Porquê? (Pista: entre o filamento e o sensor, a radiação atravessa que meios?) Que consequências advêm daqui?*

- Numa gama de temperaturas  $T \sim [2000\text{ K} \text{ a } 3400\text{ K}]$ , considere como referência a gama de valores espectável (para filamentos de tungsténio “aged”)  $\epsilon \sim [0.035 \text{ a } 0.5]$ .

## 1.3 Introdução Teórica

### 1.3.1 a lei de Stefan-Boltzmann

O calor pode transferir-se de uns sistemas para outros por três processos:

- Condução
- Convecção
- Radiação

Esta divisão de processos de transferência de calor é mais teórica do que prática já que, na realidade, qualquer transferência de calor envolve mais do que um processo. Ao classificá-los deste modo pretende-se apenas isolar, num processo real, o mecanismo dominante e estudá-lo como se fosse único.

A condução é o processo de transferência por contacto entre sistemas ou entre partículas do mesmo sistema. É o processo típico de transferência de calor entre sólidos ou ao longo de um sólido.

A convecção é um processo que envolve movimento de partes dos sistemas, sendo o processo dominante na transferência de calor entre fluidos.

Estes dois processos utilizam fundamentalmente os choques entre partículas ou os seus movimentos para transferir energia.

A radiação é um processo diferente, em que um sistema emite calor, independentemente das condições exteriores, sob a forma de radiação eletromagnética.

A Termodinâmica é um conjunto de princípios, cimentado por uma matemática coerente, que procura explicar uma infinidade de resultados experimentais sem recorrer a quaisquer teorias sobre a constituição da matéria. A sua grande aplicação, na prática, e a constatação dos bons resultados obtidos, convenceram os físicos à aceitação dos seus princípios, que são válidos em todos os domínios da Física.

A lei de Stefan-Boltzmann, que se pretende verificar neste trabalho, é, como veremos adiante, uma dedução termodinâmica e, como tal, inquestionável.

Contudo, tratando-se de uma lei que pode ser hoje deduzida, adotaremos um procedimento misto na sua exposição, recorrendo a hipóteses microscópicas, nomeadamente à teoria de Planck.

O calor radiado deve-se à existência, na matéria, de cargas eléctricas em oscilação, com uma frequência própria, emitindo energia sob a forma de radiação eletromagnética. Um sistema é, na prática, constituído por um número infinitamente grande de osciladores cujas frequências são, de acordo com a teoria clássica, contínuas, de 0 a  $\infty$ , ou, de acordo com a teoria de Planck, discretas. As duas teorias conduzem a resultados práticos diferentes pelo que não podem, ambas, ser válidas. Na exposição que se segue tentamos mostrar as razões que levaram os físicos a optar, definitivamente, pela teoria de Planck.

A potência radiada por um corpo, para uma dada frequência, deve ser proporcional ao número de osciladores presentes com essa frequência. Imaginando uma cavidade, uma caixa, por exemplo, cujas paredes são aquecidas de modo a manterem uma temperatura

constante  $T$ , as paredes dessa caixa enviam (e recebem) energia para as outras. Podemos imaginar que no interior da caixa existe um campo de energia que pode ser caracterizado pela sua densidade de energia,  $u$ , que, estando a caixa em equilíbrio térmico, deve ter o mesmo valor para todos os pontos no seu interior. Se dividirmos esta energia em intervalos de frequência  $[\nu, \nu + d\nu]$  (as componentes espectrais da radiação) e designarmos por  $u - \nu$  a densidade de energia por intervalo de frequência  $[\nu, \nu + d\nu]$ , então  $u - \nu d\nu$  representa a densidade de energia no intervalo referido de frequências. A energia total emitida deverá ser uma soma de todas estas parcelas, efetuada sobre uma gama de frequências que se estenderá de 0 a  $\infty$ . Um sólido representa um número infinito de osciladores de todas as frequências e, portanto, emite um espectro contínuo.

Na prática, a densidade de energia é medida através da potência, que lhe é proporcional. A potência emitida por um corpo, ou poder emissivo, assim como a potência absorvida, ou poder absorutivo, devem ser independentes da sua natureza e depender unicamente da sua temperatura pois, se assim não fosse, não se conseguiria atingir equilíbrio térmico numa cavidade contendo objetos diferentes.

O **corpo negro** é, por definição, o corpo que tem absorvibilidade igual à unidade, isto é, absorve toda a energia radiante que recebe e a energia que emite é apenas função da temperatura. Na prática, uma cavidade com um pequeno orifício para o exterior realiza bastante bem um corpo negro, já que a energia que nele penetra se vai refletindo sucessivamente no seu interior sem sair, ou seja, é absorvida.

Se imaginarmos o sistema constituído pelo interior da cavidade, à temperatura  $T$ , ocupando o volume  $V$  à pressão  $p$ , podemos escrever, aplicando o 2º Princípio da Termodinâmica, para uma transformação elementar

$$TdS = dW + pdV \quad (2)$$

A energia total  $W$  pode escrever-se  $V \cdot u$ ; a pressão no interior do sistema, como se deduz na teoria cinética dos gases, pode escrever-se  $u/3$ . Substituindo, vem

$$TdS = udV + V \frac{du}{dT} dT + \frac{1}{3} udV = V \frac{du}{dT} dT + \frac{4}{3} udV \quad (3)$$

Desta relação se tira

$$\frac{\partial S}{\partial V} = \frac{4}{3} \frac{u}{T} \quad \text{e} \quad \frac{\partial S}{\partial T} = \frac{V}{T} \frac{du}{dT} \quad (4)$$

e

$$\frac{\partial}{\partial V} \left( \frac{V}{T} \frac{du}{dT} \right) = \frac{\partial^2 S}{\partial T \partial V} = \frac{4}{3} \frac{d(u/T)}{dT} \quad (5)$$

ou

$$\frac{1}{T} \frac{du}{dT} = \frac{4}{3} \left( \frac{1}{T} \frac{du}{dT} - \frac{u}{T^2} \right) \quad (6)$$

Então pode concluir-se

$$\frac{du}{dT} = 4 \frac{u}{T} \quad (7)$$

ou

$$u = aT^4 \quad (8)$$

Esta relação, obtida pela Termodinâmica, constitui a lei de Stefan-Boltzmann e deve verificar-se independentemente de quaisquer hipóteses sobre a constituição da matéria.

### 1.3.2 As leis de Wien e de Planck

A teoria dos osciladores que víhamos desenvolvendo permite concluir, com a ajuda da teoria cinética dos gases, que a densidade de energia no intervalo de frequência  $[\nu, \nu + d\nu]$  para n osciladores à temperatura  $T$  seria da forma

$$u_\nu d\nu \propto kT\nu^2 d\nu \quad (9)$$

o que significa, em termos de comprimento de onda  $\lambda$  e atendendo a que  $\lambda\nu = c$ , que dependeria de  $\lambda$  de acordo com

$$u_\lambda d\lambda \propto kT \frac{1}{\lambda^4} d\lambda \quad (10)$$

Esta relação prevê que, quando  $\lambda \rightarrow 0$ , a potência radiada (que é proporcional à densidade de energia) tende para infinito, o que contraria a experiência. (Este resultado é conhecido na Física por "catástrofe do ultravioleta".)

A quantificação dos níveis de energia dos osciladores (em vez de um contínuo de energias) e a hipótese de que as variações entre níveis seriam discretas e de energia

$$\Delta E = h\nu \quad (11)$$

em que  $h$  é a constante de Planck, proposta por Planck, permite escrever, para a densidade de energia, a expressão

$$u_\lambda d\lambda = 8\pi \frac{hc/\lambda}{e^{(hc/\lambda kT)} - 1} \cdot \frac{d\lambda}{\lambda^4} \quad (12)$$

que, quando  $\lambda \rightarrow 0$ , não diverge, resolvendo assim a "catástrofe do ultravioleta".

Esta relação permite ainda mostrar que a potência radiada por um corpo à temperatura  $T$  apresenta um máximo para um comprimento de onda,  $\lambda_{max}$ , que é proporcional a  $T$  (Lei de Wien) e que a potência total emitida pelo corpo negro é proporcional a  $T^4$ , como prevê a lei de Stefan-Boltzmann, sendo a constante de proporcionalidade,  $\sigma$ , designada por constante de Stefan-Boltzmann, tal que

$$\sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15h^3 c^2} = 5,67 \cdot 10^8 \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4} \quad (13)$$

A potência radiada por um corpo qualquer é medida por referência ao corpo negro, introduzindo um coeficiente de emissividade,  $\epsilon$ , cujo valor varia entre 0 e 1 e escrevendo

$$P = \epsilon\sigma T^4 \quad (14)$$

## Referências

- [1] Max Born, Atomic Physics, 6th edition, Blackie & Son Limited, 1959
- [2] Jorge Dias de Deus, Mário Pimenta, Ana Noronha, Teresa Peña, Pedro Brogueira, Introdução à Física, McGraw-Hill (1992)
- [3] Marcello Carla; «Stefan–Boltzmann law for the tungsten filament of a light bulb: Revisiting the experiment»; American Journal of Physics 81, 512 (2013)

## 1.1 Anexos

### 1.1.1 Cubo de Leslie: Conversão Resistência/Temperatura

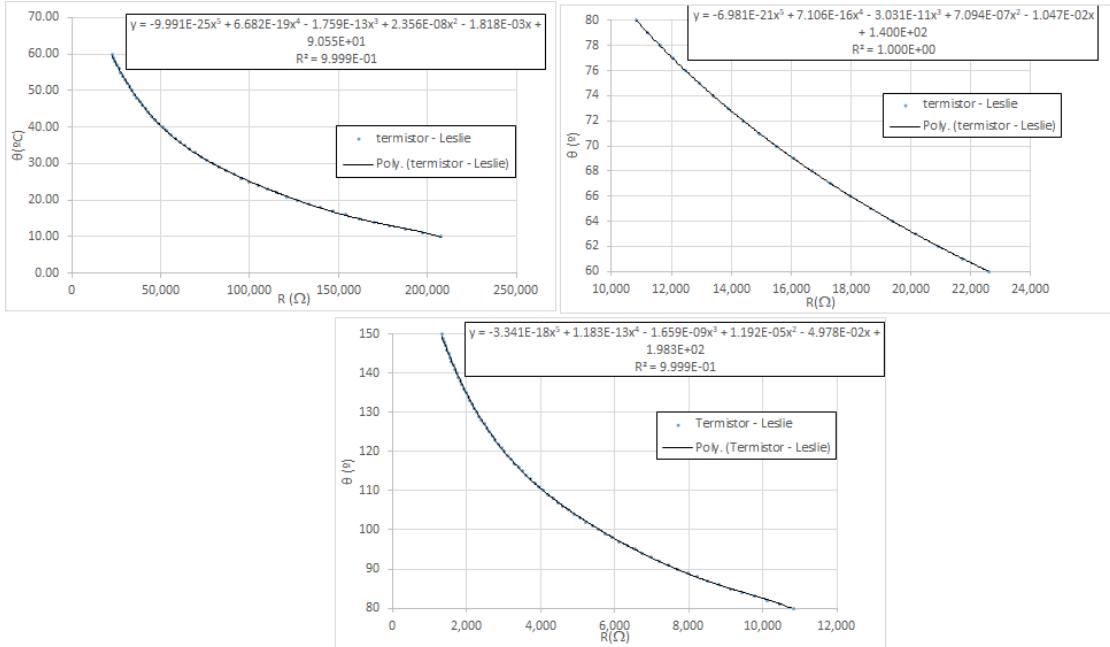


Figura 3: Gráficos e equações das linhas de tendência para a conversão da resistência em temperatura, no caso do termistor no cubo de Leslie. Gama de resistências permitidas pelo cubo de Leslie são as indicadas, isto é, de

### 1.1.2 Stefan-Boltzman: Conversão Resistência/Temperatura

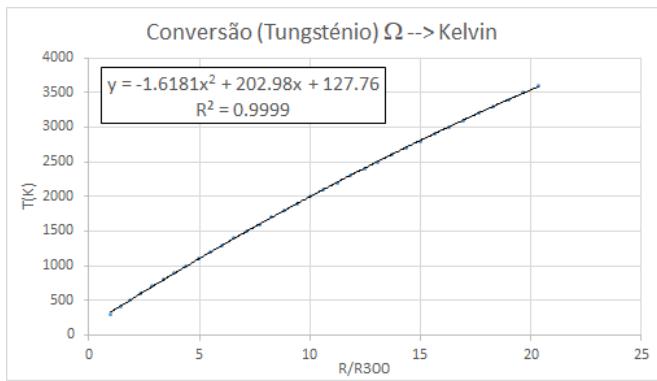


Figura 4: Gráfico e equação da linha de tendência para a conversão da resistência em temperatura, para o filamento de tungsténio na lâmpada de Stefan-Boltzman

### 1.1.3 Como determinar $R_{amb}$ suprimindo «drifts» de $I$

Registrar  $(I, V)$  desde  $V \sim 0.02\text{V}$  até  $V \sim 0.1\text{V}$  ( $V_{max} \leq 0.4\text{V}$ ). Para cada valor de  $V$ , durante  $\sim 20\text{s}$  registrar o máximo se valores de  $I$ . Repetir o processo para intervalos de  $\sim 0.02\text{V}$ .

Observe os dados  $(I, V)$  assim obtidos. Deve notar algum drift a  $V$  constante ( $\sim 0.2 \text{ A}$ ). Faça um ajuste polinomial de grau 2 ao conjunto de dados que foram obtidos no fim de cada intervalo de 20s. O declive da linha em zero dar-lhe-á  $R_{amb}$ .