

# Indução magnética

Margarida Cruz Campelo

Dep. Física e Astronomia da Faculdade de Ciências da Universidade do Porto

8

~~Abstract~~

em Português!

~~incluindo  
permeabilidade  
parcial~~

Neste trabalho analisou-se experimentalmente a relação entre a amplitude do sinal de tensão ( $V_E$ ) e a intensidade da corrente que alimenta o solenoide ( $i_0$ ) e a frequência desse sinal ( $\omega_0$ ). Através da análise gráfica dessas relações, foi determinado também o valor da permeabilidade magnética do vácuo, para a qual se obteve o valor  $\mu_0 = (1,22 \pm 0,08) \times 10^{-6}$ , obtendo-se uma incerteza de 6,6% e um erro de 2,9%. Concluiu-se também que esse valor é mais preciso quando se estuda em função de  $i_0$  com recurso ao voltímetro.

## 1 Introdução

### 1.1 Objetivos

- Verificar a existência de indução magnética.
- Verificar a relação entre a amplitude do sinal de tensão induzido na bobina de prova e os parâmetros associados à bobina, a intensidade de corrente que alimenta o solenoide e a frequência do sinal.
- Calcular o valor da permeabilidade magnética do vácuo.

### 1.2 Introdução teórica

A indução magnética é um fenômeno natural que está presente em diversos dispositivos e aparelhos no nosso quotidiano.

Se um condutor elétrico for colocado em uma região com um campo magnético e formar um circuito fechado, uma corrente elétrica será gerada no circuito quando o fluxo magnético ( $\phi_B$ ) que atravessa o circuito variar no tempo. Essa corrente elétrica é um indicativo da existência de um campo elétrico induzido,  $E$ , que atua no circuito, isto é, de uma força eletromotriz  $v_E$  ao longo dele. A medição da força eletromotriz indica que ela depende da taxa de variação do fluxo magnético, ou seja,  $d\phi_B/dt$ , como é expresso na equação 3:

*(aparece 1º que a*  $v_E = -\frac{d\phi_B}{dt}$  *é m. 19!*

$$v_E = -\frac{d\phi_B}{dt} \quad (1)$$

Sendo esta a relação que expressa a lei de Faraday da indução magnética.

A geração da força eletromotriz ocorre devido à variação temporal do fluxo magnético, que pode ser causada pela variação do campo magnético ao longo do tempo, pela variação da posição do circuito em relação às linhas de força do campo magnético, ou pela combinação desses dois tipos de variação temporal em simultâneo.

O sinal “-” na equação 1, indica que o campo magnético associado à corrente induzida tende a restaurar o valor inicial do campo magnético indutor caso este varie - lei de Lenz.

Nesta experiência em particular, utilizamos duas bobinas: bobina de prova e outra muito maior (solenoide), que é capaz de envolver completamente a primeira. Quando uma corrente elétrica passa pelas espiras do solenoide, um campo magnético é gerado no seu interior, com uma distribuição espacial bastante uniforme (linhas de força uniformemente espaçadas e paralelas ao eixo do solenoide). Quando há variação na corrente elétrica que gera o campo magnético no interior do solenoide, o fluxo magnético que atravessa a bobina de prova também varia, o que resulta na indução de uma tensão elétrica nesta bobina. A partir da medição dessa tensão em relação a certos parâmetros, é possível verificar experimentalmente a lei da indução magnética.

*Faltam as REFERÊNCIAS!*

*referencias deduções, figuras, etc.*

*equações, etc.*

É possível calcular a intensidade do campo magnético no eixo de um solenoide com base no campo gerado por uma única espira. De acordo com a lei de Biot-Savart um elemento de corrente  $idl$  gera um campo  $dB$  descrito pela seguinte equação:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times \hat{z}}{R^2} \quad (2)$$

Onde  $R$  corresponde ao vetor que une  $d\vec{l}$  ao ponto de interesse P.

Assim, partindo desta lei, para um solenoide longo (no eixo zz), tem-se:

$$(3) \quad \vec{B} = \frac{\mu_0 N i}{L} \hat{z} \quad \text{Diagrama: Um solenoide longo com uma bobina de prova dentro, gerando um campo uniforme no interior.}$$

Onde  $N$  representa o número de espiras do solenoide,  $L$  o seu comprimento,  $i$  a corrente que passa nas suas espiras e  $\mu_0$  a permeabilidade magnética do vazio.

Pela lei de Ampère, o campo  $B$  é uniforme no interior de um solenoide longo, sendo nulo no exterior do mesmo. Ao colocarmos a bobina de prova dentro do solenoide, conseguimos garantir a uniformidade do campo magnético no interior da bobina.

Prosseguindo da equação 1, pela lei da indução magnética, o fluxo  $\phi_B$  de  $B$  através de cada das  $n$  espiras, de área  $S$ , da bobina de prova é dado por:

$$\varphi_B = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = BS \cos \theta = \mu_0 \frac{NS \cos \theta i}{L} \quad (4)$$

Sendo  $\theta$  o ângulo ( $B, dS$ ).

Considerando as  $n$  espiras da bobina de prova, o fuxo total através desta equivale a:

$$\varphi_{total} = n\varphi_B = \mu_0 \frac{nNS \cos \theta i}{L} \quad (5)$$

Substituindo em (1), considerando somente:

$$i = i_0 \sin \omega t \quad (6)$$

A variar no tempo tem-se:

$$v_E = -\mu_0 \frac{nNS \cos \theta \omega i_0}{L} \cos \omega t \quad (7)$$

Obtendo-se a amplitude da tensão gerada nos terminais da bobina de prova:

$$v_{E_0} = -\mu_0 \frac{nNS \cos \theta \omega i_0}{L} \quad (8)$$

É então, finalmente estabelecida a equação que se pretende verificar ao longo desta experiência.

## 2 Montagem experimental

Começou-se por assegurar a seguinte montagem experimental:

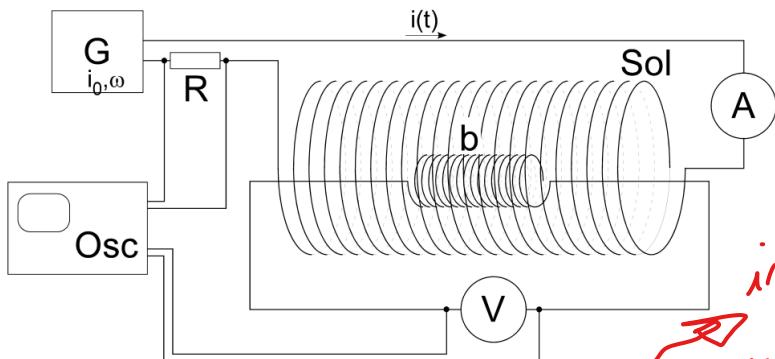


Figura 1 - Esquema da montagem.

Tem-se que: G corresponde ao gerador de sinal sinusoidal; Amp ao amplificador de sinal; A ao miliamperímetro; S ao solenoide; b à bobina de prova colocada no interior de S; R à resistência; Osc ao osciloscópio Tektronix TDS 1002C-HDU e V ao voltímetro. Note-se que a bobina deve estar devidamente bem colocada no centro do solenoide.

O gerador deve estar ligado a um amplificador de sinal da seguinte forma:



Figura 2 - Ligação do gerador ao amplificador.

As características do solenoide e da bobina utilizados estão apresentadas abaixo:

Solenóide		Bobina 1	
$(L \pm 0,001)$ (m)	0,750	$(d \pm 0,001)$ (m)	0,041
N	364	n	300

Tabela 1 - Características do solenoide e da bobina utilizados no trabalho experimental.

Identificação dos instrumentos usados? Por ex.: os multímetros usados para "true RMS" e terem inseridas resistências

### 3 Análise de dados

#### 3.1 $V_{E0}$ em função de $\omega$

Na primeira etapa da experiência, que envolveu o estudo da relação entre  $V_{E0}$  e  $\omega_0$ , foram mantidas constantes as seguintes variáveis:  $\theta$ ,  $S$ ,  $i_0$ ,  $N$ ,  $L$  e  $n$ . A frequência do gerador foi variada de 0 a 2000 Hz, o que resultou na variação da frequência angular  $\omega$ . Os valores de tensão foram medidos tanto pelo voltímetro quanto pelo osciloscópio.

Utilizou-se  $\mu_0=1,257E-06$  H/m como valor de referência para a permeabilidade magnética do ar no vazio, valor retirado do protocolo experimental.

Como  $i_0$  deve permanecer constante, o que não se verificou, efetuou-se o gráfico  $i_0(f)$  para averiguar que valores de  $i_0$  podem ser considerados constantes.

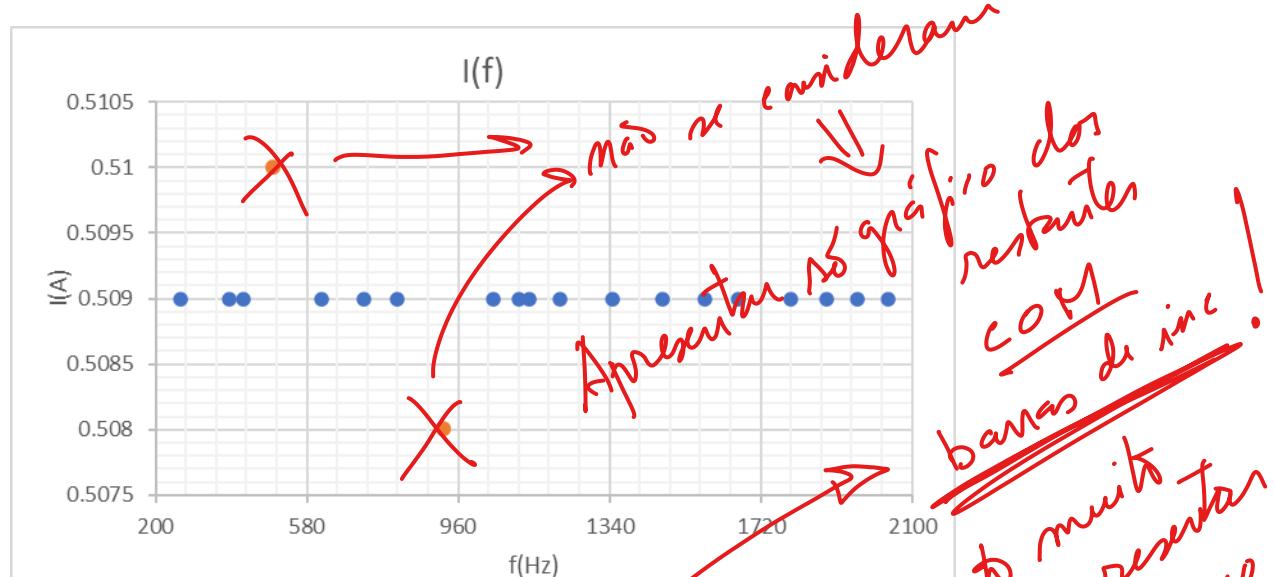


Gráfico 1 - Gráfico de  $i_0(f)$  com os pontos duvidosos assinalados a laranja.

Desta forma, podemos prosseguir com a análise sem considerar os pontos duvidosos. Sabendo que  $u(i_0)=u(\text{amperímetro})=0,001 \text{ A}$ :

$$i_0 = (0,509 \pm 0,001) \text{ A}$$

De seguida, elaborou-se o gráfico de  $V_{E0}$  em função de  $\omega_0$ :

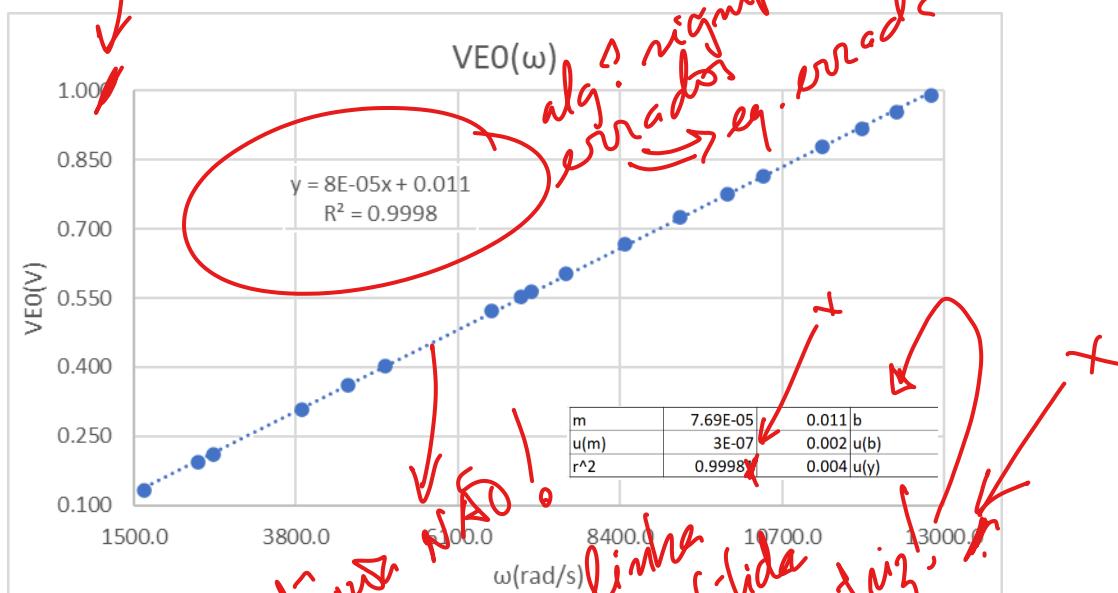
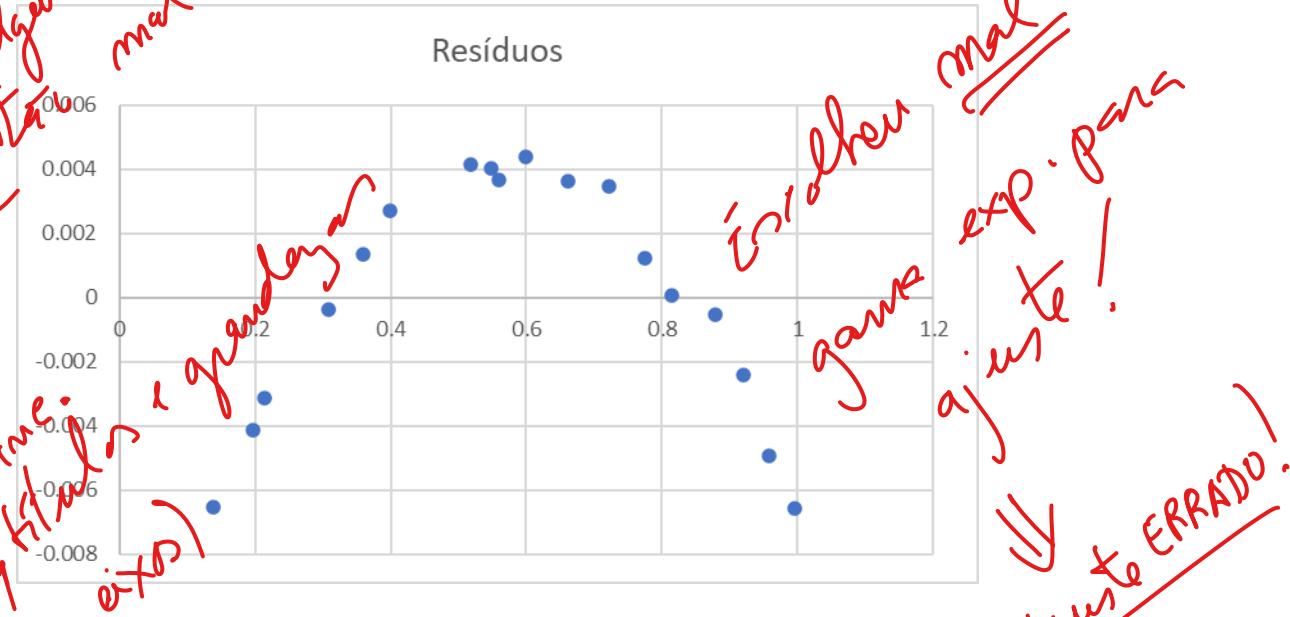


Gráfico 2 - Gráfico de  $V_{E0}(\omega)$  aliado da reta de ajuste e a sua respectiva matriz de ajuste.

*Linha de tendência não é a linha polida com a matiz!*  
Têm que ter a de ajuste com a matiz!



**Grafico 3** – Gráfico de resíduos associado ao ajuste linear feito a VE0( $\omega$ ) para os dados do osciloscópio.

Pode-se verificar evidentemente uma tendência parabólica, ao contrário do que seria esperado - dados aleatoriamente distribuídos em torno do zero residual. No entanto, todos os resíduos apresentam valores inferiores a  $u(y)_{aj}=0,77V$ , podendo ser desprezada a tendência (devido a erros sistemáticos) pela baixa percentagem de variação dos resíduos dentro da gama experimental.

Procedendo para o cálculo do valor da permeabilidade magnética do vazio, partindo da equação (8):

$$m_{aj} = \mu_{0exp} \frac{Nps \cos \theta t_0}{L} \quad (9)$$

Considerando  $\theta = 0$ , logo,  $c = 0$ , e que a área da secção reta da bobina de prova é  $s$ , dada por:

$$S = \frac{\pi D^2}{4} \quad (10)$$

~~Resultado:~~ term - se

$$\mu_{0exp} = \frac{4Lm_{aj}}{Nn\pi D^2 l_0}$$

$$\mu_{0\text{exp}} = (7,9 \pm 0,4) \times 10^{-9} \text{ H/m}$$

Este valor apresentado tem uma percentagem de erro de 99,4% e 5,1% de incerteza.

71

Para os dados obtidos com o osciloscópio, obteve-se o seguinte gráfico, onde os pontos duvidosos já se encontram assinalados a vermelho, sendo excluídos da análise.

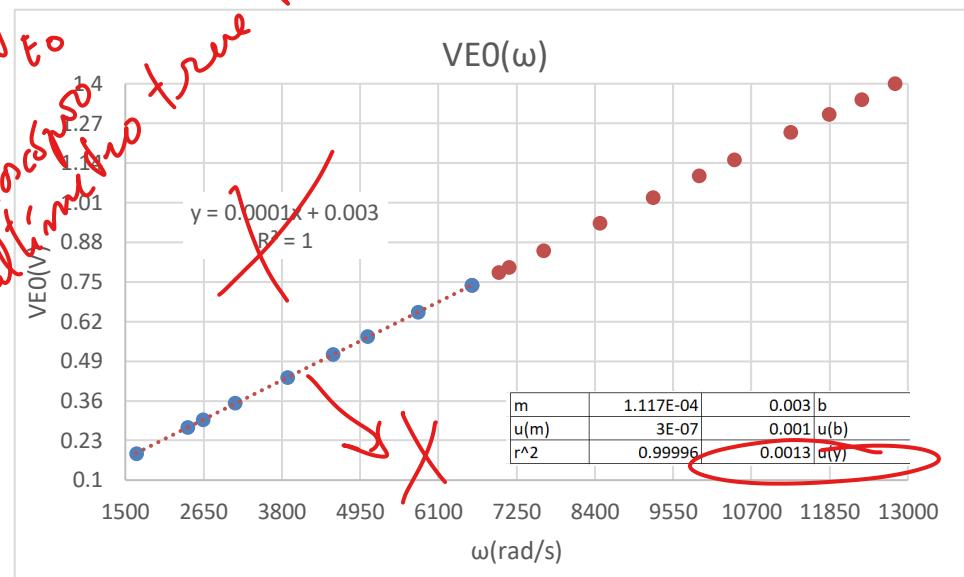


Gráfico 4 - Gráfico de  $V_{E0}(\omega)$  aliado da reta de ajuste e a sua respetiva matriz de ajuste.

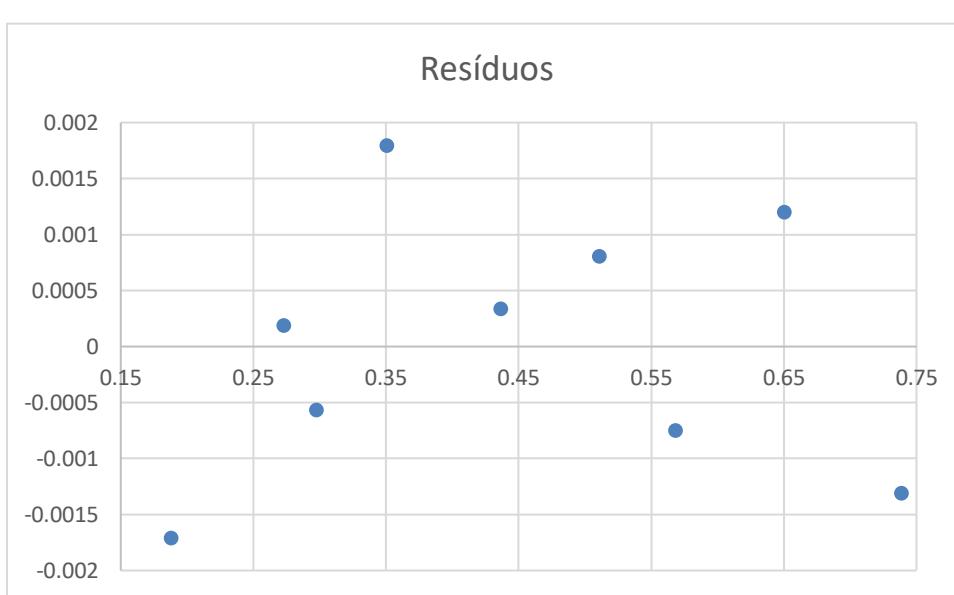


Gráfico 5 - Gráfico de resíduos associado ao ajuste linear feito a  $V_{E0}(\omega)$  para os dados do voltímetro.

Os resultados apresentam uma distribuição aleatória dos dados, tal deve-se à grande redução da gama experimental. Após reflexão e partilha de resultados com colegas pôde-se concluir que as tendências parabólicas nesta experiência se podem dever a um mau contacto nas ligações.

Assim, partindo para o cálculo do valor da permeabilidade magnética do vazio através das mesmas equações que anteriormente:

$$\mu_0\text{exp} = (1,1 \pm 0,3) \times 10^{-6} \text{ H/m}$$

Este valor apresentado tem uma percentagem de erro de 12,5% e 27,5% de incerteza.

OBS:

Parece-me que ele enganou mas contas de obterem o valor não!

Com o propósito de avaliar os resultados obtidos pelos dois métodos utilizados neste estudo, verificou-se a proporcionalidade entre  $V_{E0}$  e  $\omega$  em ambos os métodos. Para tal recorreu-se à linearização da equação (8) e ~~realizou-se~~  $\ln(V_{E0})$  em função de  $\ln(\omega)$  de acordo com o proposto na seguinte equação:

$$\ln(V_{E0}) = \ln(\omega) + \ln\left(\frac{\mu_0 N n S \cos\theta i_0}{L}\right) \quad (12)$$

*tracou - N*

Resultando em dois gráficos: um relativo à medição com o osciloscópio e outra com o voltímetro, respetivamente.

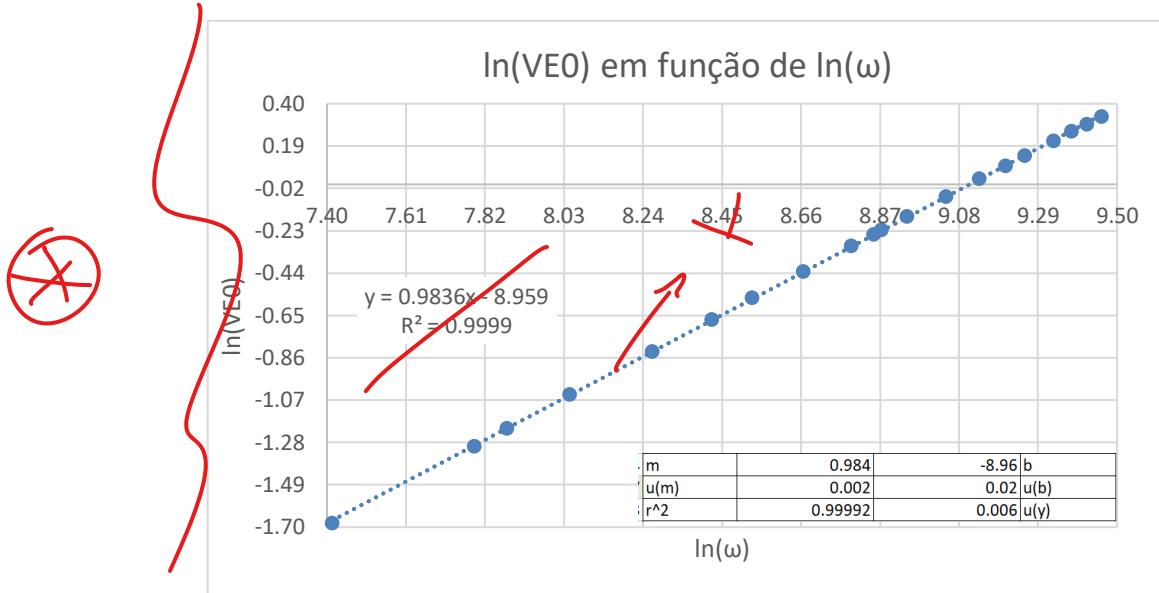
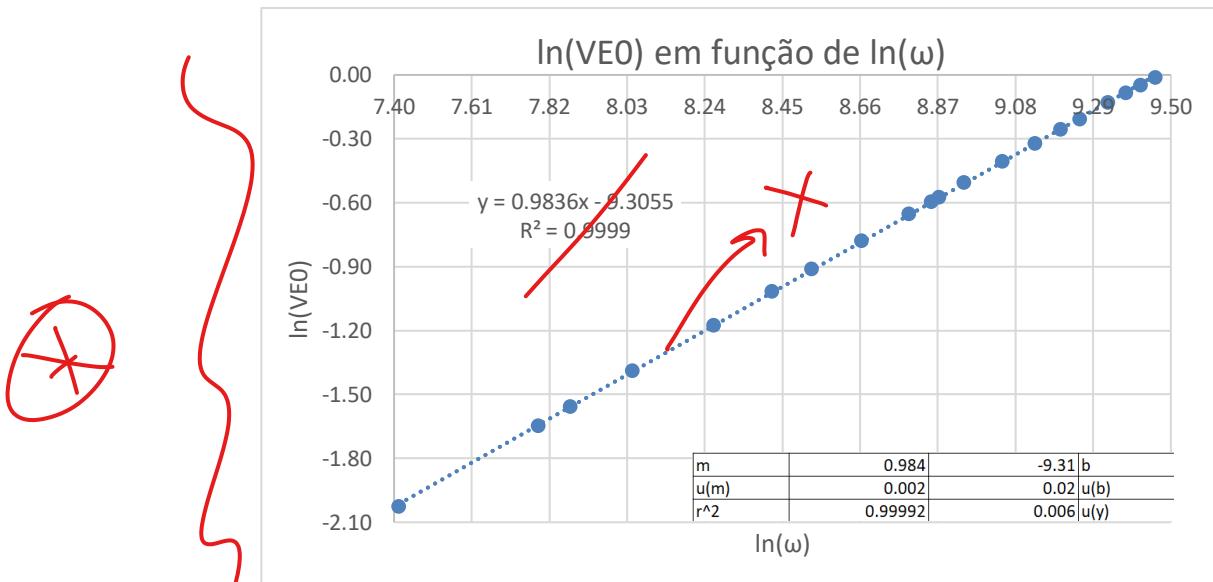


Gráfico 6 - Gráfico de  $\ln(V_{E0})$  em função de  $\ln(\omega)$  medido pelo osciloscópio aliado da reta de ajuste e a sua respetiva matriz de ajuste.



Observando os gráficos e as suas matrizes é evidente a relação linear entre os parâmetros, partindo-se para a análise dos gráficos de resíduos.

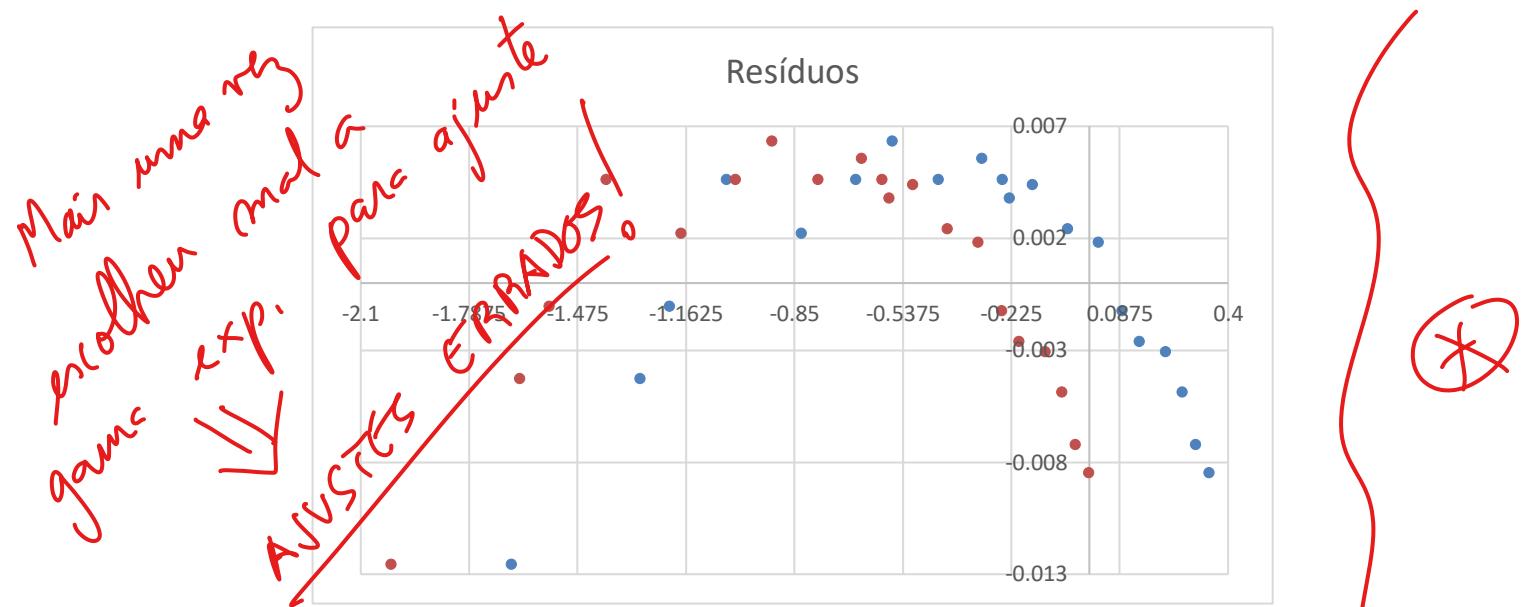


Gráfico 8 – Gráfico de resíduos associado ao ajuste linear feito a  $\ln V_E(0)$  para os dados do osciloscópio (a azul) e para o voltímetro (a vermelho).

Analizando o gráfico da figura 8 verifica-se uma tendência aproximada a uma parábola dos resíduos de ambos os ajustes. Ainda se verifica valores bastante parecidos com um desvio no eixo x.

Obteve-se, então, para o valor de  $m_{exp}$  pelo osciloscópio:

$$m_{exp} = (0,984 \pm 0,002)$$

E o valor obtido pelo voltímetro:

$$m_{exp} = (0,984 \pm 0,002)$$

Tendo em conta que os valores obtidos são os mesmos, terão ambos uma incerteza associada de % e um erro relativo de %.

### 3.2 $V_{E0}$ em função de $i_0$

Na segunda parte da experiência, ao contrário da primeira parte,  $i_0$  não será mantido constante pelo que vai variar ao contrário de  $\omega$  que será o parâmetro a manter-se constante. Desta forma, tem-se que:

$$\omega = (9068 \pm 6) \text{ rad/s}$$

Tendo como base a equação (8), resulta a linearidade entre  $V_{E0}$  e  $i_0$ . Com esta relação é possível determinar o valor experimental da permeabilidade magnética do vazio para dados do osciloscópio e do voltímetro pelo ajuste linear do gráfico de  $V_{E0}$  em função de  $i_0$ . Do declive obtido no ajuste, deriva:

$$m_{aj} = \mu_{0exp} \frac{NnS \cos\theta\omega}{L} \quad (12)$$

Novamente, considerando  $\theta = 0$ , logo,  $\cos \theta = 1$ , e a área da secção reta da bobina de prova dada pela equação (10), advém:

$$\mu_{0\exp} = \frac{4Lm_{aj}}{Nn\pi D^2\omega} \quad (13)$$

O valor de referência para a permeabilidade magnética do vazio que foi considerado para esta parte do estudo foi o mesmo que anteriormente e constante do protocolo.

Para valores de corrente baixos ( $\sim 300\text{mA}$ ) os gráficos de  $V_{E0}$  em função de  $i_0$  irão apresentar uma curvatura. A análise será feita excluindo esses pontos, assinalados a vermelho, até não existir deformação do sinal.

Para os dados obtidos a partir do osciloscópio, obteve-se o seguinte gráfico:

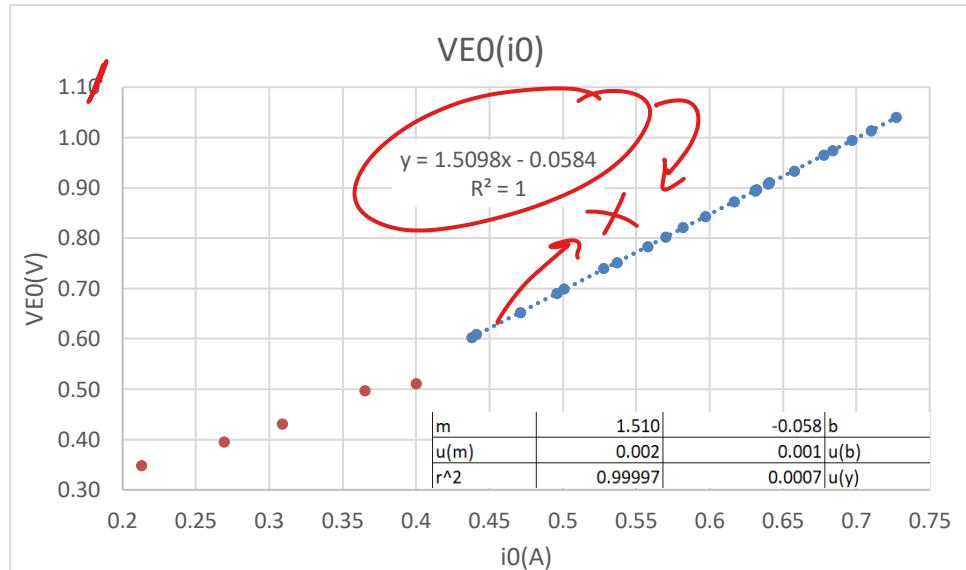


Gráfico 9 – Gráfico de  $V_{E0}(i_0)$  medido pelo osciloscópio aliado da reta de ajuste e a sua respectiva matriz de ajuste.

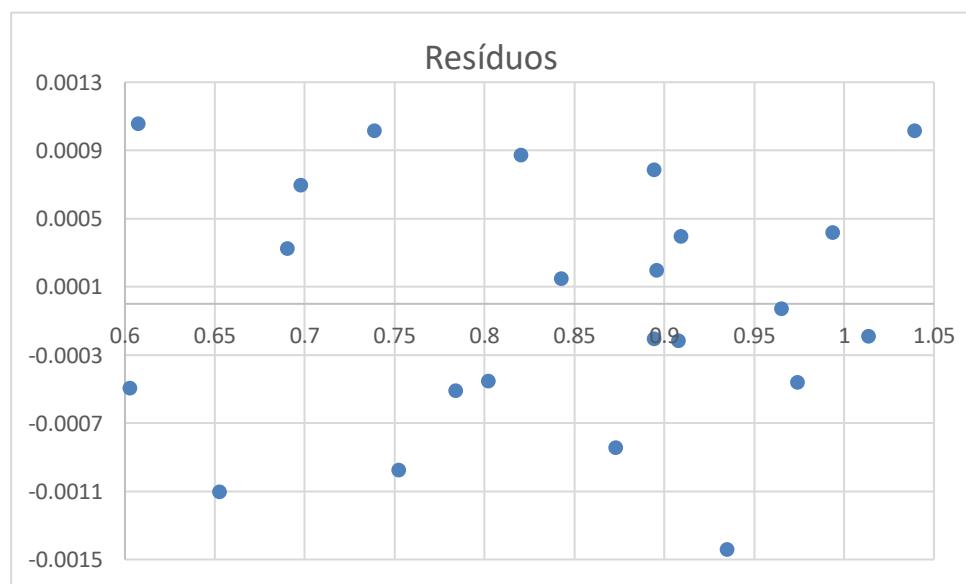


Gráfico 10 – Gráfico de resíduos associado ao ajuste linear feito a  $V_{E0}(i_0)$  para os dados do osciloscópio excluindo pontos duvidosos.

*NOTA: alg. rigor errado*

Analizando o gráfico de resíduos, verifica-se que na gama escolhida onde existe proporcionalidade entre  $V_{E0}$  e  $i_0$ , os dados estão distribuídos aleatoriamente, excluindo a presença de erros sistemáticos ou de execução, como esperado.

Tendo como referência os parâmetros do ajuste linear realizado e da equação (13), obteve-se:

$$\mu_{0\text{exp}} = (8,7 \pm 0,4) \times 10^{-7} \text{ H/m}$$

Este valor apresentado tem uma percentagem de erro de 30,5% e 5,0% de incerteza.

Para os dados obtidos a partir do voltímetro, elaborou-se o seguinte gráfico:

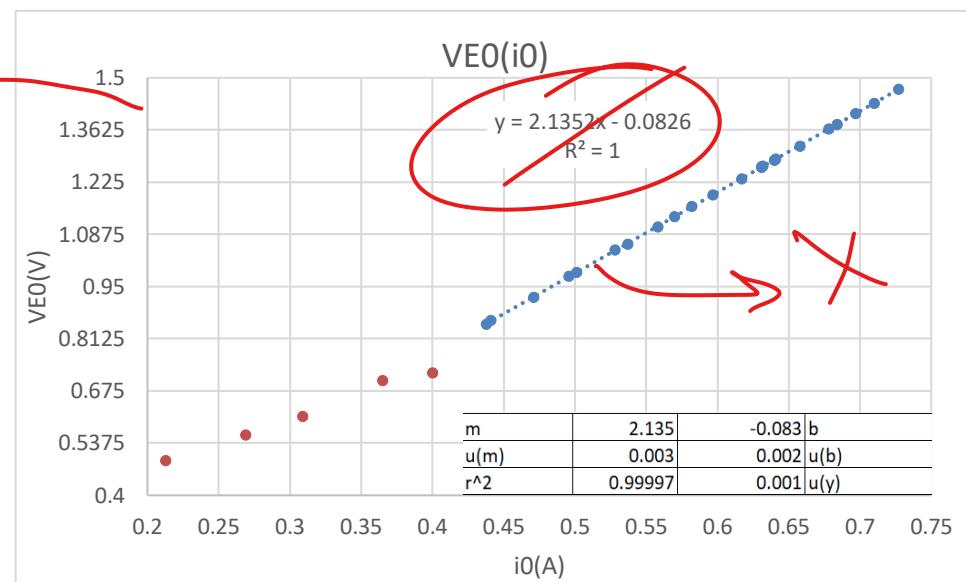


Gráfico 11 – Gráfico de  $V_{E0}(i_0)$  medido pelo voltímetro aliado da reta de ajuste e a sua respectiva matriz de ajuste.

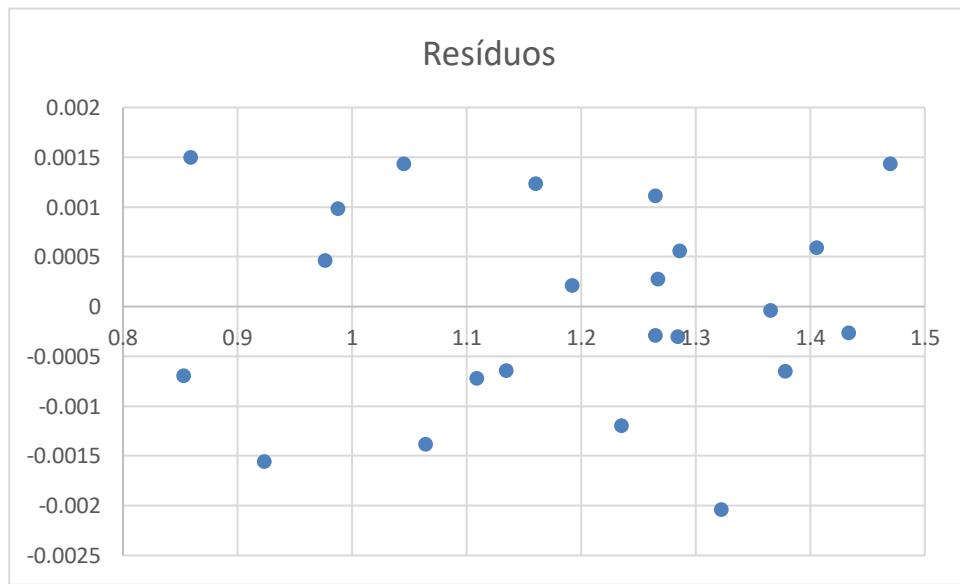


Gráfico 12 – Gráfico de resíduos associado ao ajuste linear feito a  $V_{E0}(i_0)$  para os dados do voltímetro excluindo pontos duvidosos.

Observando o gráfico de resíduos, constata-se uma dispersão aleatória dos dados como no ajuste anterior.

Assim, partindo para o cálculo do valor da permeabilidade magnética do vazio através das mesmas equações que anteriormente:

$$\mu_{0\text{exp}} = (1,22 \pm 0,08) \times 10^{-6} \text{ H/m}$$

Este valor apresentado tem uma percentagem de erro de 2,9% e 6,6% de incerteza.

*3%, 10%*

Com o propósito de avaliar os resultados obtidos pelos dois métodos utilizados neste estudo, verificou-se a proporcionalidade entre  $V_{E0}$  e  $i_0$  em ambos os métodos. Para tal recorreu-se à linearização da equação (8) e plotou-se  $\ln(V_{E0})$  em função de  $\ln(i_0)$  de acordo com o proposto na seguinte equação:

$$\ln(V_{E0}) = \ln(i_0) + \ln\left(\frac{\mu_0 N n S \cos\theta \omega}{L}\right) \quad (14)$$

*esta palavra  
não existe em  
Português!*

É de notar que nessa avaliação, somente foi considerada a gama ajustada previamente na determinação de  $\mu_{0\text{exp}}$ . Os pontos duvidosos permanecem os mesmos.

Resultando em dois gráficos: um relativo à medição com o osciloscópio e outra com o voltímetro, respetivamente.

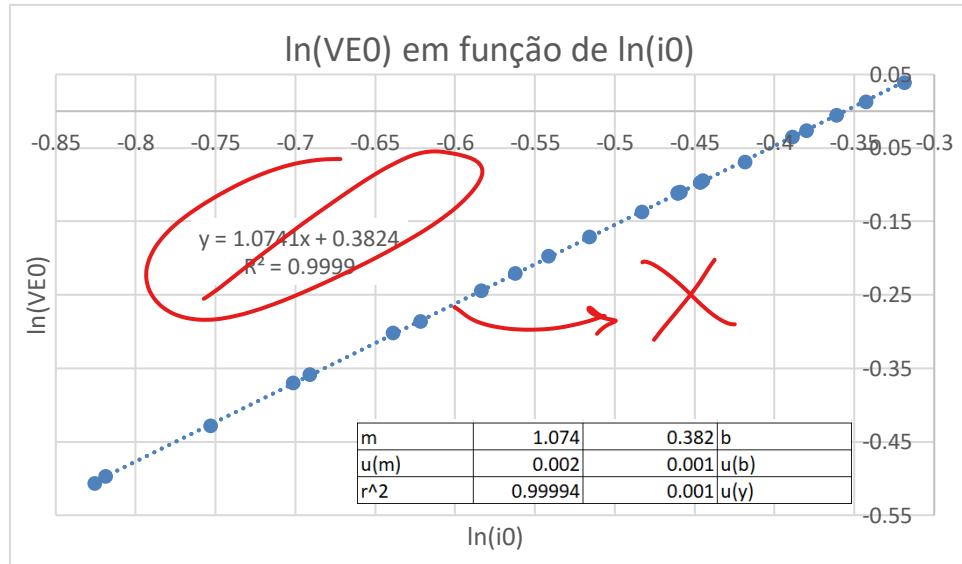


Gráfico 13 – Gráfico de  $\ln V_{E0}(\ln i_0)$  medido pelo osciloscópio aliado da reta de ajuste e a sua respetiva matriz de ajuste.

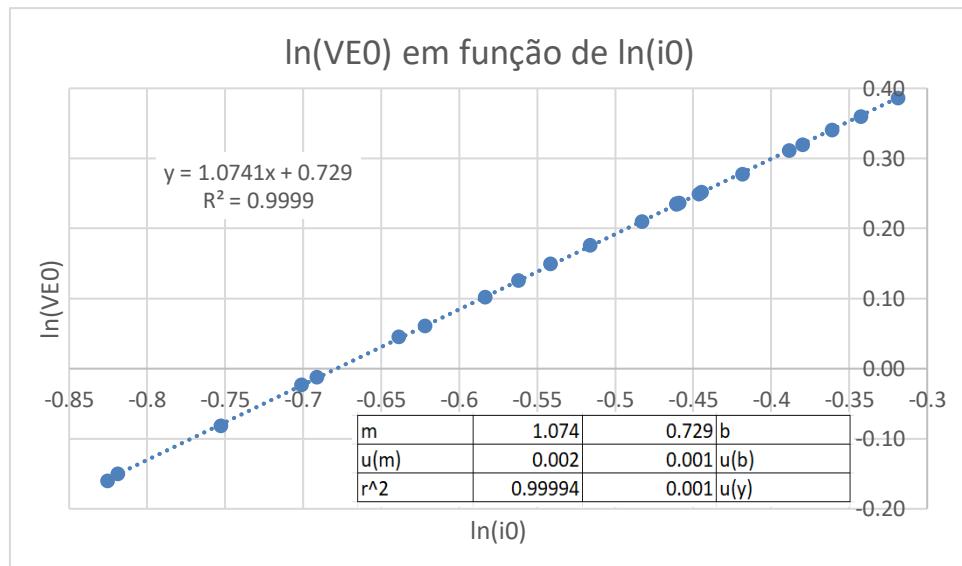


Gráfico 14 – Gráfico de  $\ln V_{E0}(\ln i_0)$  medido pelo voltímetro aliado da reta de ajuste e a sua respetiva matriz de ajuste.

Observando os gráficos e as suas matrizes é evidente a relação linear entre os parâmetros, partindo-se para a análise dos gráficos de resíduos.

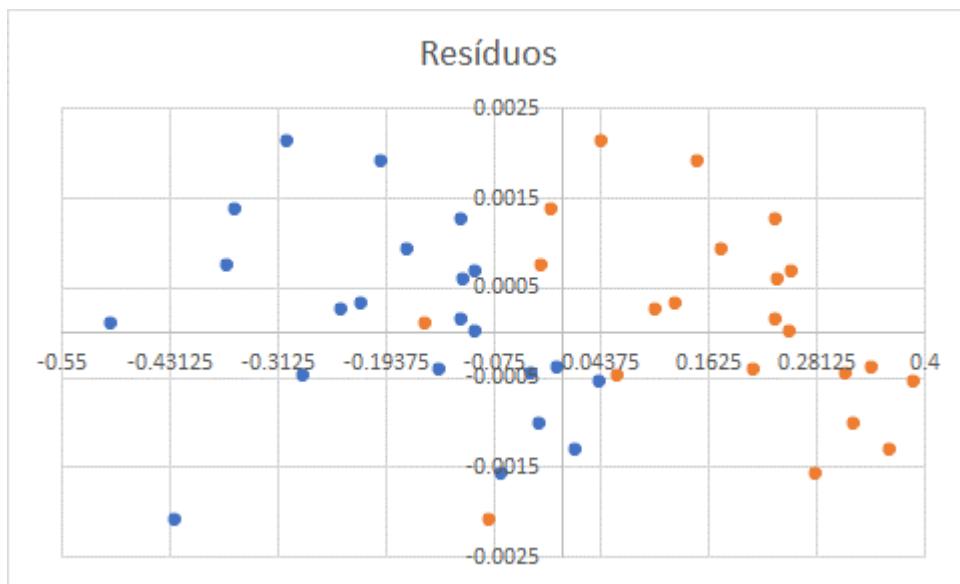


Gráfico 15 – Gráfico de resíduos associado ao ajuste linear feito a  $\ln(V_E0/i_0)$  para os dados do osciloscópio (a azul) e para o voltímetro (a laranja).

Pode-se concluir a presença de uma leve tendência parabólica em ambos os ajustes. Ainda se verifica valores bastante parecidos com um desvio no eixo x.

Obteve-se, então, para o valor de  $m_{exp}$  pelo osciloscópio e pelo voltímetro:

$$m_{exp} = (1,074 \pm 0,002)$$

Tendo em conta que os valores obtidos são os mesmos, terão ambos uma incerteza associada de % e um erro relativo de %.

4 Resultados ~~finais~~ obtidos (os "finais" não são todos estes)

Variação de $V_E0$ em função de $\omega$			
Determinação experimental de $\mu_0$			
Voltímetro		Osciloscópio	
$\mu_{0exp}$ (H/m)	$1,1 \times 10^{-6}$	$\mu_{0exp}$ (H/m)	$7,9 \times 10^{-9}$
$u(\mu_{0exp})$ (H/m)	$0,3 \times 10^{-6}$	$u(\mu_{0exp})$ (H/m)	$0,4 \times 10^{-9}$
$u(\mu_{0exp})$ (%)	27,7	$u(\mu_{0exp})$ (%)	5,1
erro (%)	12,5	erro (%)	99,4
Verificação da proporcionalidade			
Voltímetro		Osciloscópio	
$m_{exp}$	0,984	$m_{exp}$	0,984
$u(m_{exp})$	0,002	$u(m_{exp})$	0,002
$u(m_{exp})$ (%)	0,2	$u(m_{exp})$ (%)	0,2
erro (%)	1,6	erro (%)	1,6
Variação de $V_E0$ em função de $i_0$			
Determinação experimental de $\mu_0$			
Voltímetro		Osciloscópio	
$\mu_{0exp}$ (H/m)	$1,22 \times 10^{-6}$	$\mu_{0exp}$ (H/m)	$8,7 \times 10^{-7}$
$u(\mu_{0exp})$ (H/m)	$0,08 \times 10^{-6}$	$u(\mu_{0exp})$ (H/m)	$0,4 \times 10^{-7}$
$u(\mu_{0exp})$ (%)	6,6	$u(\mu_{0exp})$ (%)	5,0
erro (%)	2,9	erro (%)	30,8
Verificação da proporcionalidade			
Voltímetro		Osciloscópio	
$m_{exp}$	1,074	$m_{exp}$	1,074
$u(m_{exp})$	0,002	$u(m_{exp})$	0,002
$u(m_{exp})$ (%)	0,2	$u(m_{exp})$ (%)	0,2
erro (%)	7,4	erro (%)	7,4

Tabela mal estruturada  $\Rightarrow$  complica leitura da mesma.

## 5 Conclusão

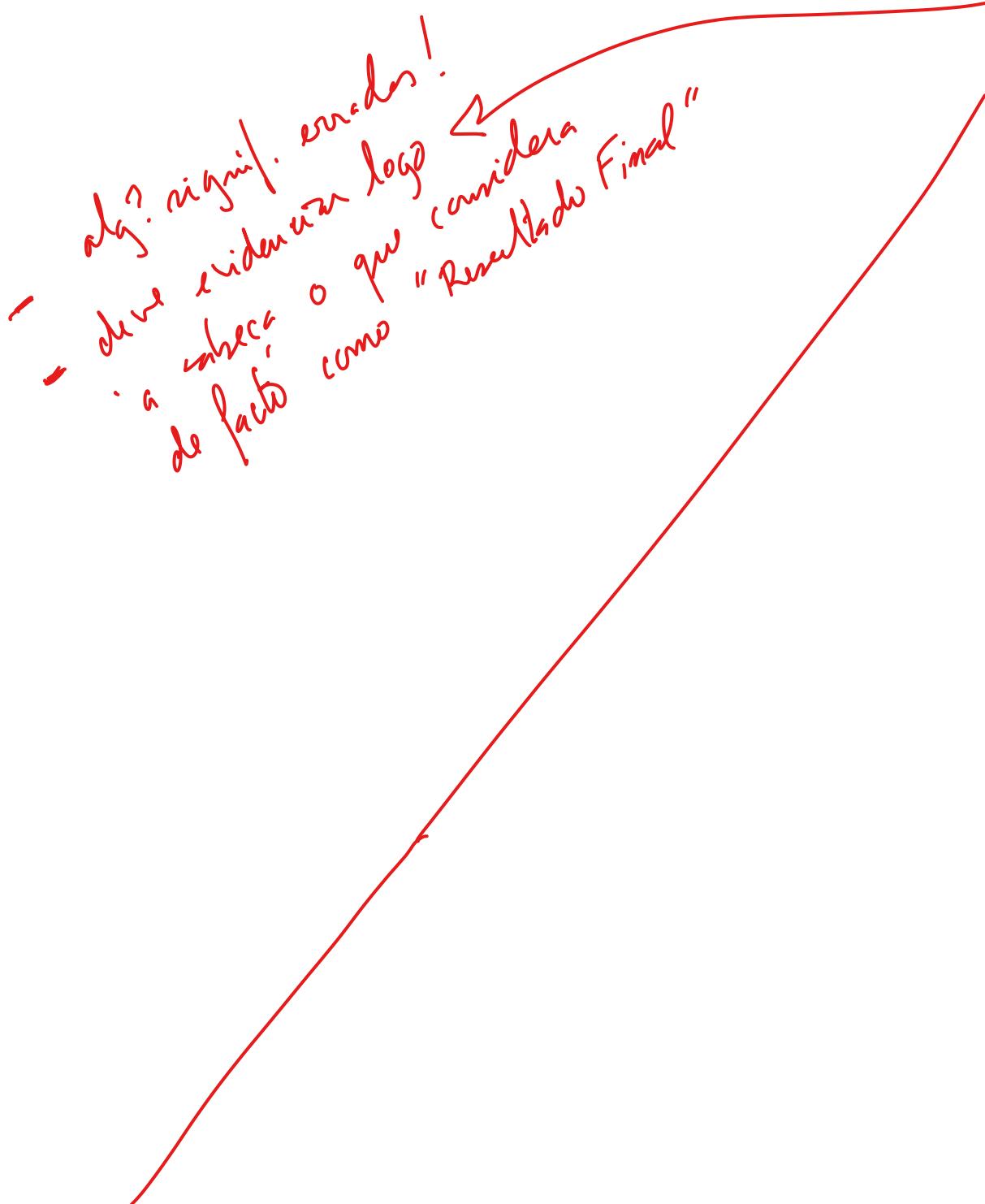
a menor de  $\left[ \dots \% \text{inc.} + \dots \% \text{erro} \right]?$

Observou-se graficamente a dependência linear de  $V_{E0}$  em  $\omega_0$  e  $i_0$ , o que permitiu verificar, parcialmente, a lei da indução magnética.

Embora fosse esperado que os valores de  $\mu_0$  obtidos a partir dos dados do osciloscópio fossem mais próximos do valor tabelado relativamente à primeira parte da experiência no estudo de  $V_{E0}(\omega_0)$  ficando bastante aquém com um valor de  $(7,9 \pm 0,4) \times 10^{-6} \text{ H/m}$ , um erro relativo de 99,4% e uma incerteza de 5,1%, isso só se verificou no estudo da relação entre  $V_{E0}$  e  $i_0$ , em que o valor de  $\mu_0$  obtido foi  $(8,7 \pm 0,4) \times 10^{-7} \text{ H/m}$  e apresentou um erro relativo de 30,8% e uma incerteza relativa de 5,0%.

Em relação à análise feita a partir dos dados obtidos no voltímetro, os valores foram bastante mais aproximados do valor real tendo sido o melhor resultado para o valor de  $\mu_0$   $(1,22 \pm 0,08) \times 10^{-6}$  com um erro relativo de 2,9% e uma incerteza relativa de 6,6% no estudo da relação entre  $V_{E0}$  e  $i_0$ . Por outro lado, na variação de  $V_{E0}$  em função de  $\omega_0$  o resultado obtido foi de  $(1,1 \pm 0,3) \times 10^{-6} \text{ H/m}$  com um erro relativo de 12,5% e uma incerteza de 27,7%.

Assim, apesar de não se ter efetuado o estudo de todos os parâmetros propostos, associados à equação (8), pode-se concluir a existência de indução magnética com mais precisão recorrendo ao voltímetro no estudo da relação entre  $V_{E0}$  e  $i_0$ .



## Referências

[1] Docentes da disciplina, Indução Magnética, Laboratório de Física II

?!  
,

OBS: o trabalho é que não pode deixar  
de fazer ajustes (voltar grafos e colher tabelas)  
para formular o que "resultados"  
estruturar como "final"  
com este

Anexos 1

Formulas

Textos e numerações das eq's:

$$\text{Erro relativo} = \frac{|x_{esperado} - x_{obtido}|}{x_{esperado}} \times 100$$

$$\text{Incerteza relativa} = \frac{u(x)_{obtido}}{x_{obtido}} \times 100$$

$$\text{Desvio padrão, } s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

$$u(y)_{aj} = 2 \times s(y)$$

$$u(\mu_{0exp}) V_{E0}(\omega) = \mu_{0exp} \times \sqrt{\left(\frac{u(L)}{L}\right)^2 + \left(\frac{u(m_{aj})}{m_{aj}}\right)^2 + \left(-2 \frac{u(D)}{D}\right)^2 + \left(-\frac{u(\bar{i}_0)}{\bar{i}_0}\right)^2}$$

$$u(\mu_{0exp}) V_{E0}(i_0) = \mu_{0exp} \times \sqrt{\left(\frac{u(L)}{L}\right)^2 + \left(\frac{u(m_{aj})}{m_{aj}}\right)^2 + \left(-2 \frac{u(D)}{D}\right)^2 + \left(-\frac{u(\omega)}{\omega}\right)^2}$$

- Especificar contribuições percentuais (parciais) evidenciando/comentando qual (quais) as mais relevantes!
- Nas as referências no texto.