

T4B - Módulos Elásticos

1 de maio de 2023 13:00

13.5

Objetivos

- Estudo do equilíbrio dinâmico de elasticidade de:
 - Barra encastrada
 - Pêndulo de Torção
- 1) Determinação de (a partir do método das vibrações) do módulo de Young da barra
- 2) Usando um pêndulo de torção calcular
- 3) calcular o módulo de rigidez do fio de suspensão, μ
- Momento de inércia dos corpos suspensos, I
- Familiarização com componentes como fotogate e contadores de impulsos

Equações a verificar

Barra Encastrada

$$T^2 = 5,029 \frac{\pi^2 \rho}{E D} l^4$$

T : Período de oscilação

l : Comprimento da barra

Pêndulo de Torção

$$\mu = \frac{128 \pi l}{D^4} \left(\frac{I}{T^2} \right)$$

D : diâmetro do fio

l : comprimento do fio

T : período de oscilação

I : momento de inércia do

corpo suspenso

Hontagem

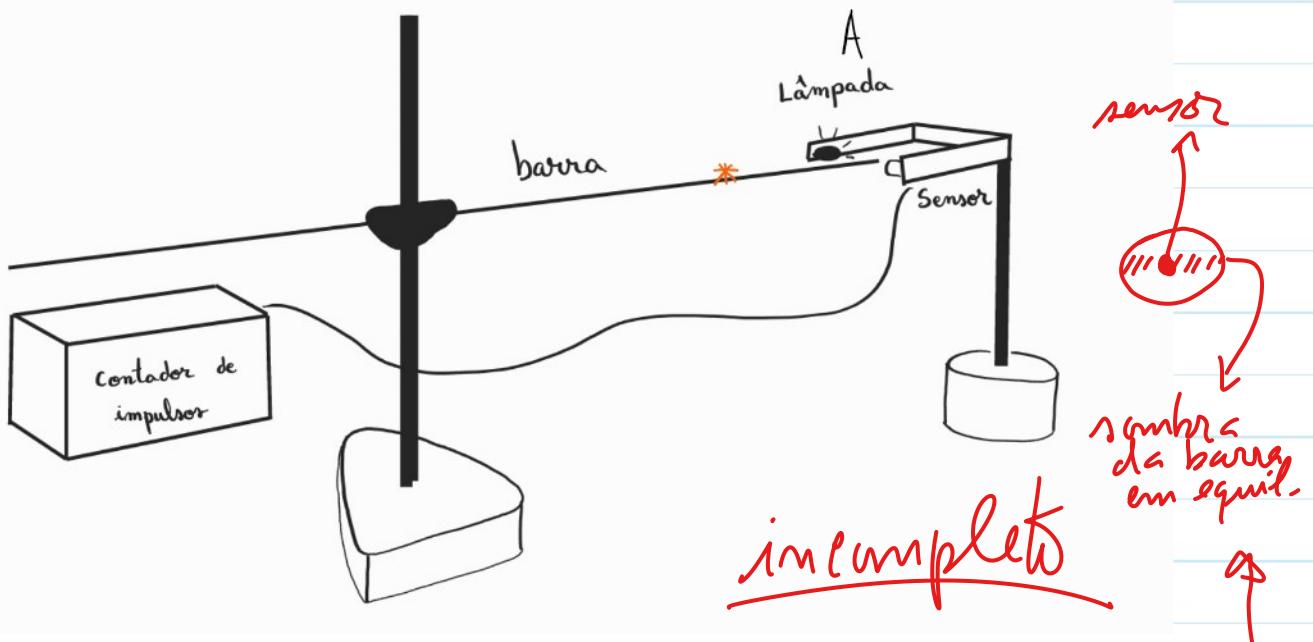


Fig 1: Hontagem experimental da barra encastrada

- ! * barra próxima do sensor (ver a sombra) → esquema
- ! Evitar oscilações circulares e transversais
- ! Apoiar a barra numa régua antes de a largar

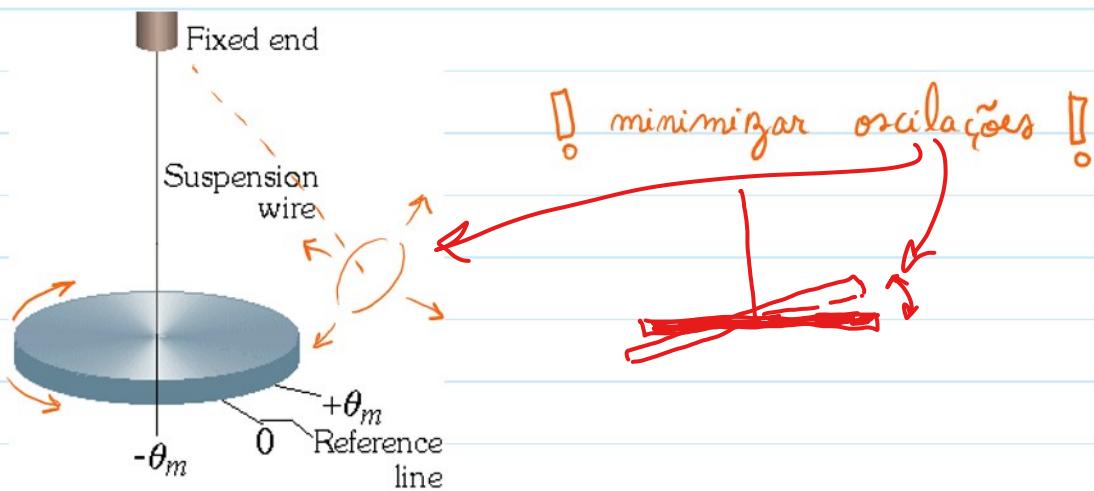


Fig 2: Pêndulo de torção

Material

A

- Barra
- Suporte p/ barra
- Fotogate
- Contador de Impulsor, CI

B

- Fio
- Suporte p/ pêndulo
- Disco
- Coroa Cilíndrica
- Prismas triangulares

Procedimento

A. Barra Encastrada

- Escolher uma barra e medir massa, M , diâmetro, D , comprimento, l .
- Realizar montagem A; Ligar CI e carregar "reset"
- Para um l , medir T de $i = 52, 101$ e 151 impulsos
- Calcular período médio, \bar{T}

- Repetir o processo para outro l , criar tabela com l, \bar{T} ;
- Calcular o módulo de Young, E (ajuste linear)

B. Pêndulo de Torgão

- Medir o fio: comprimento, l , diâmetro, d , diâmetro médio, \bar{d}
- Realizar medições p/ obter momento de inércia dos corpos suspensos
- Suspender no fio:
 - a) Disco + prisma A

- a) Disco + prisma A
- b) Disco + prisma B
- c) Disco + coroa cilíndrica (cc)
- d) Disco + CC + prisma B

Determinar T de 10 oscilações completas, $\theta_{\max} = 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$

Calcular perímetro médio, \bar{T}

Calcular módulo de rigidez, μ (ajuste linear)

Homentos de Inércia

Disco

$$I_D = \frac{M D^2}{8}$$

Coroa Cilíndrica

$$I_{CC} = \frac{M}{8} (D_1^2 + D_2^2)$$

Prisma A ($b > h$)

$$I_{P_A} = \frac{M b^2}{12}$$

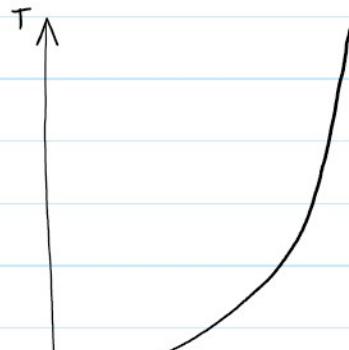


Prisma B ($h > b$)

$$I_{P_B} = \frac{M (2h^2 + b^2)}{24}$$

Previsão dos Gráficos

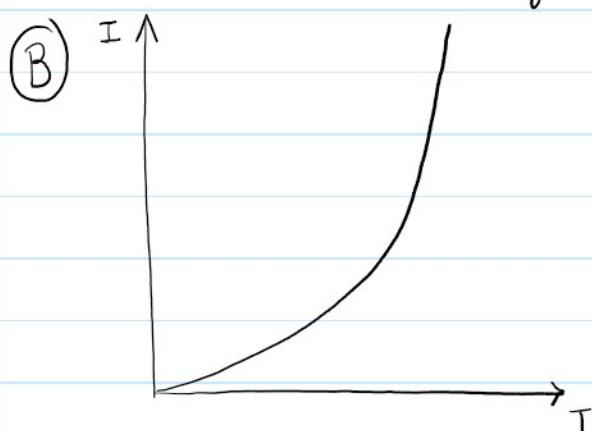
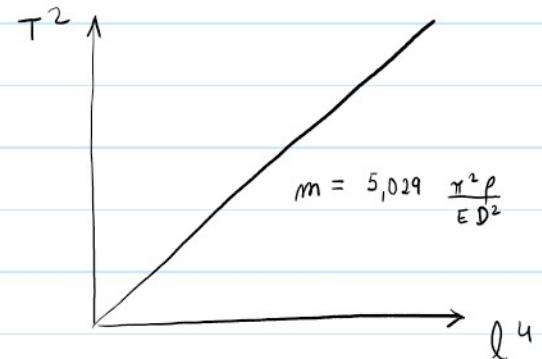
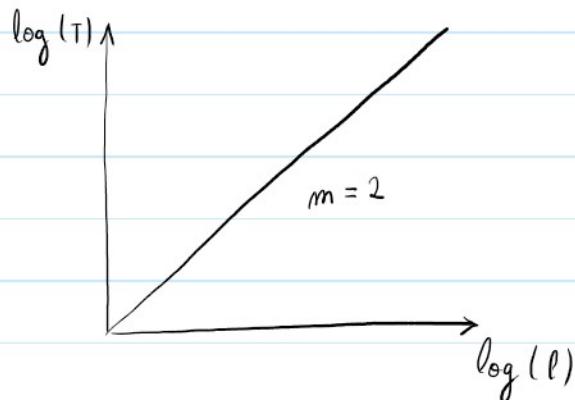
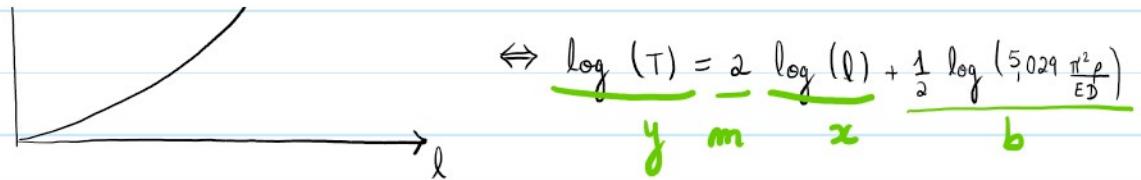
(A)



$$T^2 = 5,029 \frac{\pi^2 \rho}{E D^2} l^4$$

$$\Leftrightarrow \log(T^2) = \log(5,02 \frac{\pi^2 \rho}{E D^2} l^4)$$

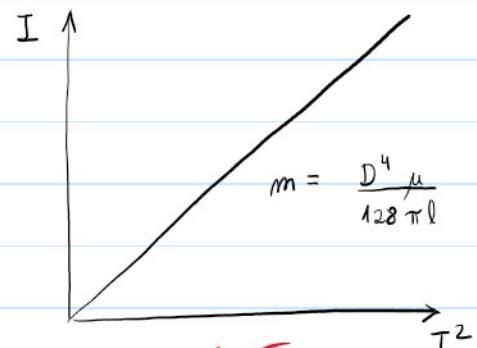
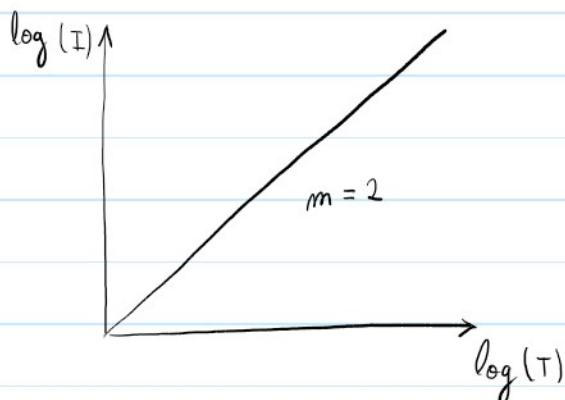
$$\Leftrightarrow \underline{\log(T)} = \underline{2 \log(l)} + \frac{1}{2} \log(5,02 \frac{\pi^2 \rho}{E D^2})$$



$$I = \frac{D^4 \mu}{128 \pi l} T^2$$

$$\Leftrightarrow \log(I) = \log\left(\frac{D^4 \mu}{128 \pi l} T^2\right)$$

$$\Leftrightarrow \log(I) = 2 \log(T) + \log\left(\frac{D^4 \mu}{128 \pi l}\right)$$



Notas de Aula

Comenciamos hoy hacer las siguientes mediciones para calcular a

Más tarde
aprendíos
OK

OK

Começamos por fazer as seguintes medições para calcular a densidade da barra:

$$M = (0,0216 \pm 0,0001) \text{ Kg}$$

$$I = (0,896 \pm 0,005) \text{ m}$$

$$D_1 = 1,965 \text{ mm}$$

$$D_2 = 1,960 \text{ mm}$$

$$D_3 = 1,950 \text{ mm}$$

$$\bar{D} = (1,958 \pm 0,003) \text{ mm}$$

Registámos os valores do tempo para 52, 101 e 151 vezes, com 3 ensaios para cada, e calculámos o seu valor médio.

As medições dos corpos para a parte B foram feitas diretamente no Excel. colocaram-se diferentes corpos no pêndulo e fizeram-se ensaios para 90, 180 e 270 graus.

Análise de Dados

A. Barra Encastrada

Começámos por calcular a densidade:

$$\rho = \frac{M}{\pi D^2 L}$$

$$\mu(\rho) = \sqrt{\left(\frac{4 \mu^2(M)}{\pi D^2 L}\right)^2 + \left(\frac{8 M \mu^2(D)}{\pi D^3 L}\right)^2 + \left(\frac{4 \mu^2(L)}{\pi D^2 L^2}\right)^2}$$

(temos de 50 medições logo 1 algarismo significativo para μ)

$$\rho = (8003 \pm 44) \text{ Kg/m}^3 = (8,00 \pm 0,04) \text{ g/cm}^3$$

$$\% \mu(\rho) = ?$$

NOTA:
51 101 151 → amostras
para limiar em quantos mist
para melhorar os que
irão ser usados para
amostras com
método
valores (T) para
de T (T) para
cada

Prof.

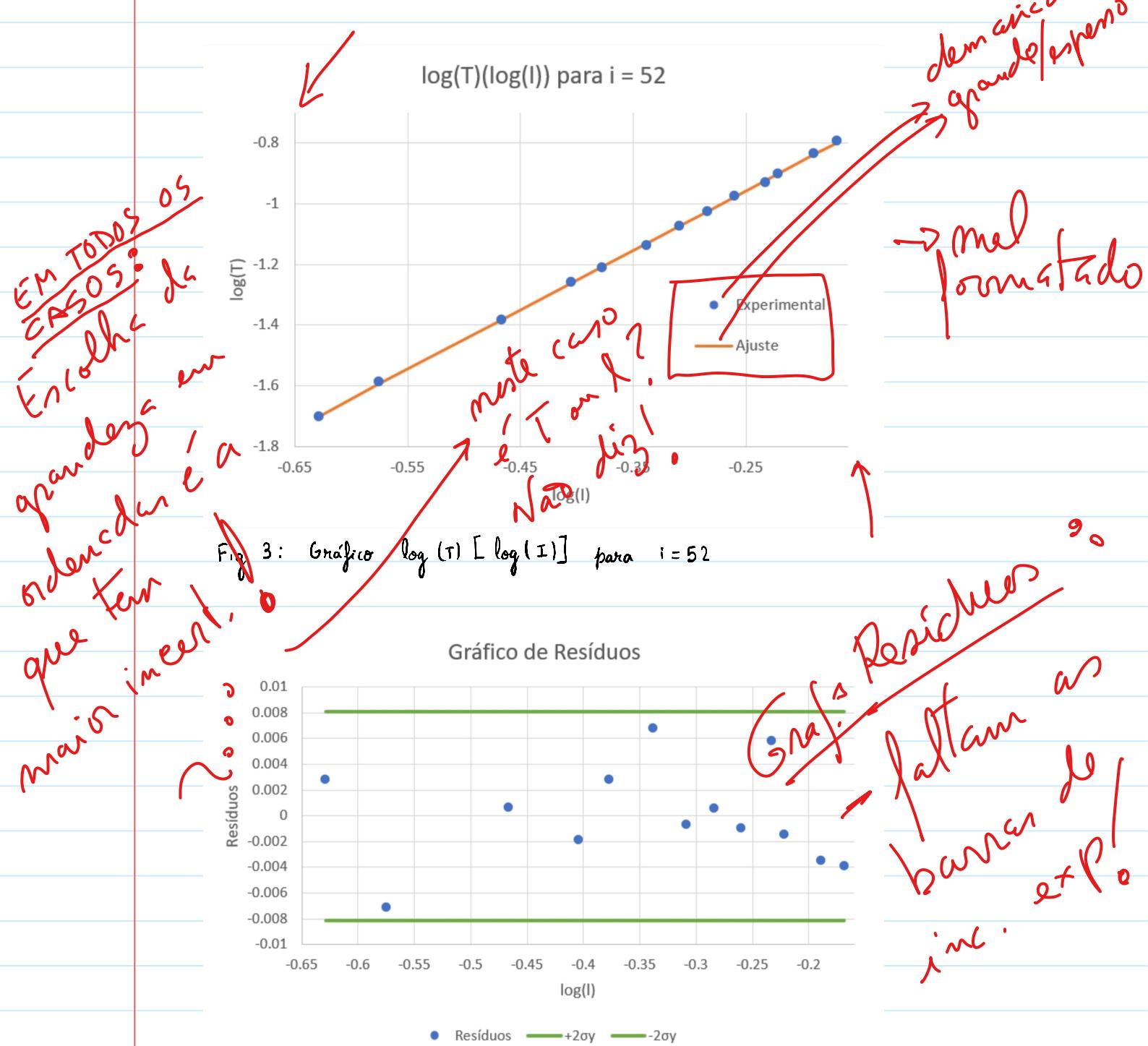
Comparando com valores tabelados, pensamos que podia ser algo:

$$\rho_{\text{teórico}} = 7,85 \text{ g/cm}^3$$

$$\epsilon = 1,9 \%$$

Passámos então à representação dos dados da 1ª parte:

Em alguns graficos não aparecem barras de erro porque eram demasiado pequenas.



OBJS ↑ semelhantes em ↘ (resto)

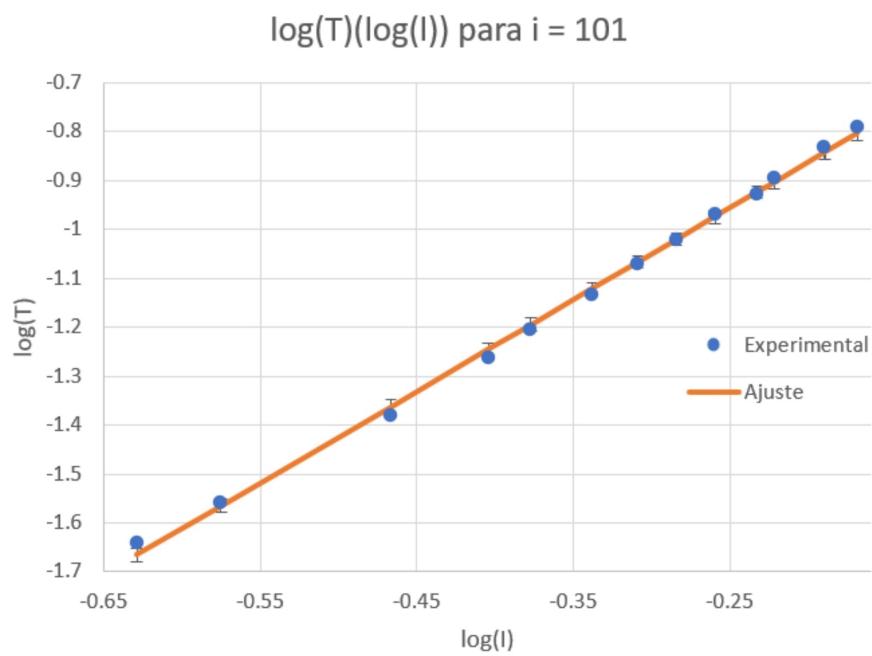


Fig 5 : Gráfico $\log(T) [\log(I)]$ para $i = 101$



Fig 6 : Gráfico de residuos para $i = 101$

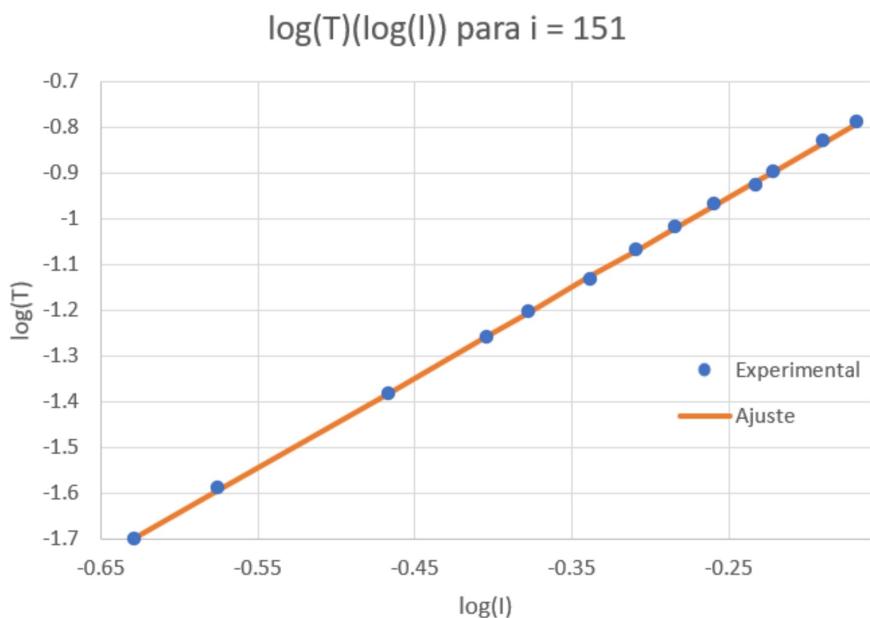


Fig 7 : Gráfico $\log(T) [\log(I)]$ para $i = 151$

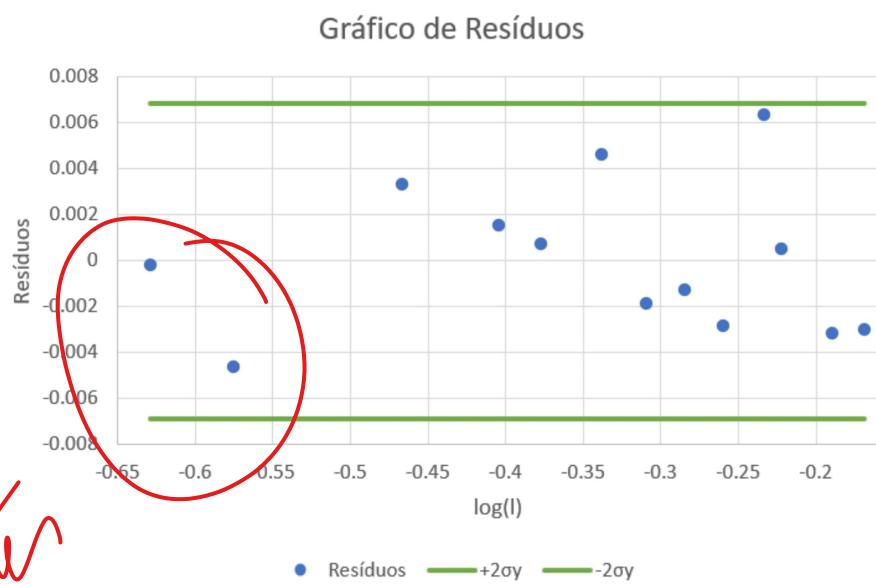


Fig 8 : Gráfico de resíduos para $i = 151$

Parâmetros de Ajuste Log $i = 52$			
m	1.960	-0.468	b
$u(m)$	0.008	0.003	$u(b)$
r^2	0.9998	0.004	σ_y

Fig 9 : Parâmetros de ajuste para $i = 52$

Parâmetros de Ajuste Log $i = 101$			
m	1.87	-0.489	b
$u(m)$	0.03	0.010	$u(b)$
r^2	0.998	0.01	σ_y

Fig 10: Parâmetros de ajuste para $i = 101$

Parâmetros de Ajuste Log $i = 151$		
m	1.969	-0.461 b
u(m)	0.007	0.003 u(b)
r^2	0.9999	0.003 oy

Fig 11: Parâmetros de ajuste para $i = 151$

Analizando os gráficos da fig. 3, 5 e 7 observam-se tendências aparentemente lineares, o que é coincidente com os valores muito altos de r^2 . Analisando os gráficos de resíduos, fig 4, 6 e 8, confirma-se que todos os resíduos estão no intervalo $[-2 \sigma_y, 2 \sigma_y]$, logo todos os pontos foram considerados no ajuste. Conclui-se que foram bons ajustes.

tabelado

Considerando o valor ~~técnico~~ do módulo de Young do aço:

$$E_{\text{teo}} = 205 \text{ GPa}$$

$$m_{52} = (1,960 \pm 0,008)$$

$$\varepsilon_{52} (\cdot \cdot \cdot) = 2 \cdot \cdot \cdot$$

$$m_{101} = (1,87 \pm 0,03)$$

$$\varepsilon_{101} (\cdot \cdot \cdot) = 6,5 \cdot \cdot \cdot$$

$$m_{151} = (1,969 \pm 0,007)$$

$$\varepsilon_{151} (\cdot \cdot \cdot) = 1,55 \cdot \cdot \cdot$$

Aço inox :

$$\boxed{\begin{aligned} \rho_{\text{ref}} &= 7860 \text{ Kg m}^{-3} \\ E_{\text{ref}} &= 193 \text{ GPa} \end{aligned}}$$

O aço inoxidável tem uma contenção de 12% cromo + 5% níquel que o torna resistente à corrosão. A barra não está oxidada desde o início do semestre \Rightarrow é aço inox \Rightarrow

Passarão ao estudo do log ($T_{\text{médio}}$):

Grafos de Resíduos : falta indicar grandezas em ordenadas

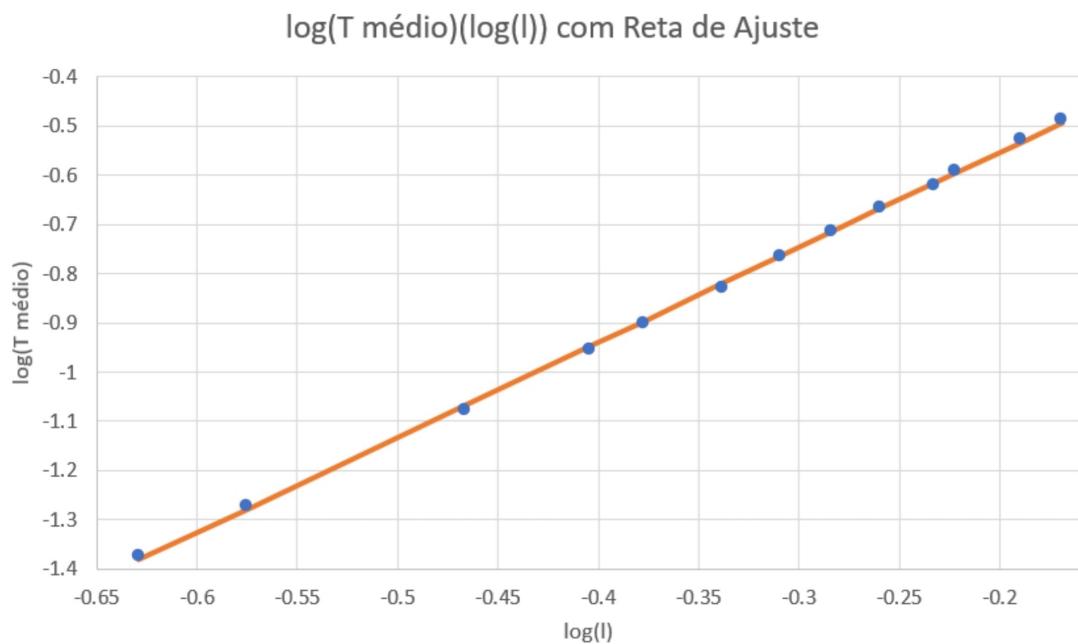


Fig 12: Gráfico da relação logarítmica entre T médio e l.

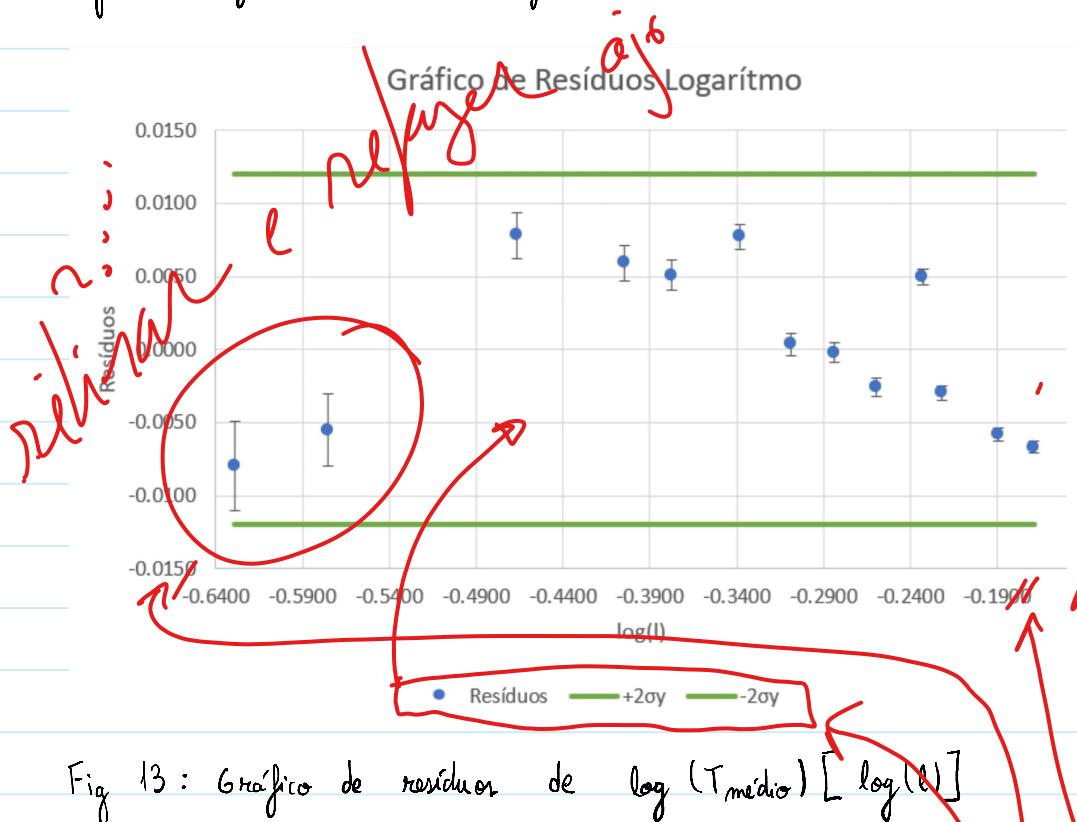


Fig 13: Gráfico de resíduos de $\log(T_{\text{médio}})[\log(l)]$

Parâmetros de Ajuste Log Médio			
m	1.93	-0.167	b
u(m)	0.01	0.004	u(b)
r^2	0.9996	0.006	σy

Fig 14: Parâmetros de ajuste para $\log(T_{\text{médio}})[\log(l)]$

Gráficos: em geral / erros de formatação,

Analisando o gráfico de resíduos^V, visualizamos que todos os resíduos se encontram dentro do intervalo de confiança $[-2\sigma_y, 2\sigma_y]$, logo todos os pontos foram considerados no ajuste. Observe-se também um valor de r^2 elevado o que indica uma elevada tendência linear.

$$m = (1,93 \pm 0,01)$$

$$\varepsilon (-.) = 3,5 \cdot 1.$$

Conforma-se, então, a relação polinomial de 2º grau entre o período médio e o comprimento da barra.

Passou-se ao estudo do período em função do quadrado do comprimento da barra:

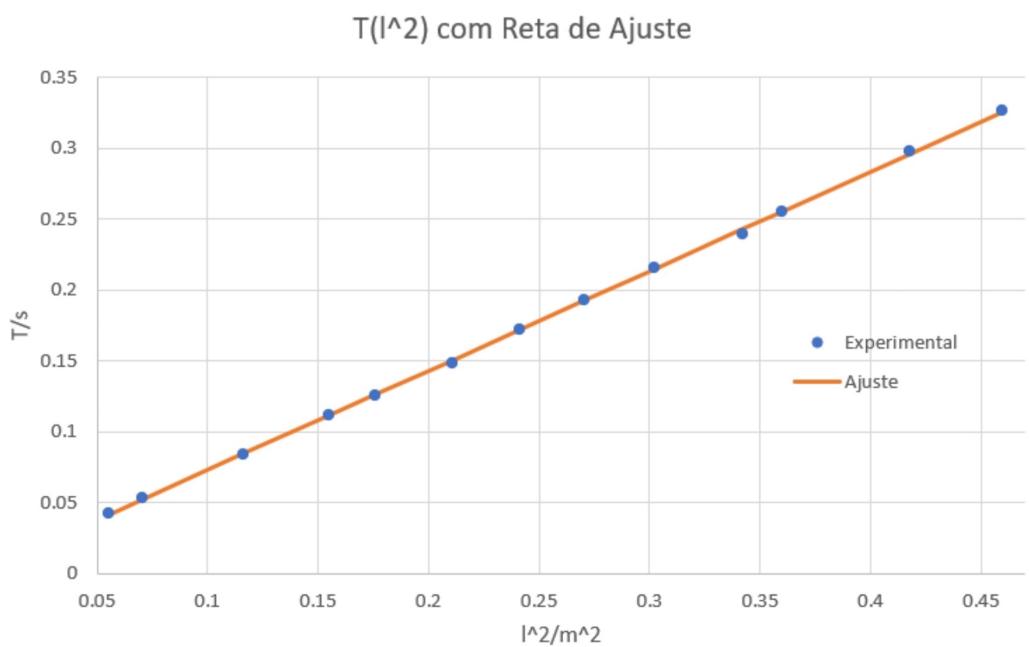


Fig 15: Gráfico da relação polinomial entre o período médio e o comprimento da barra

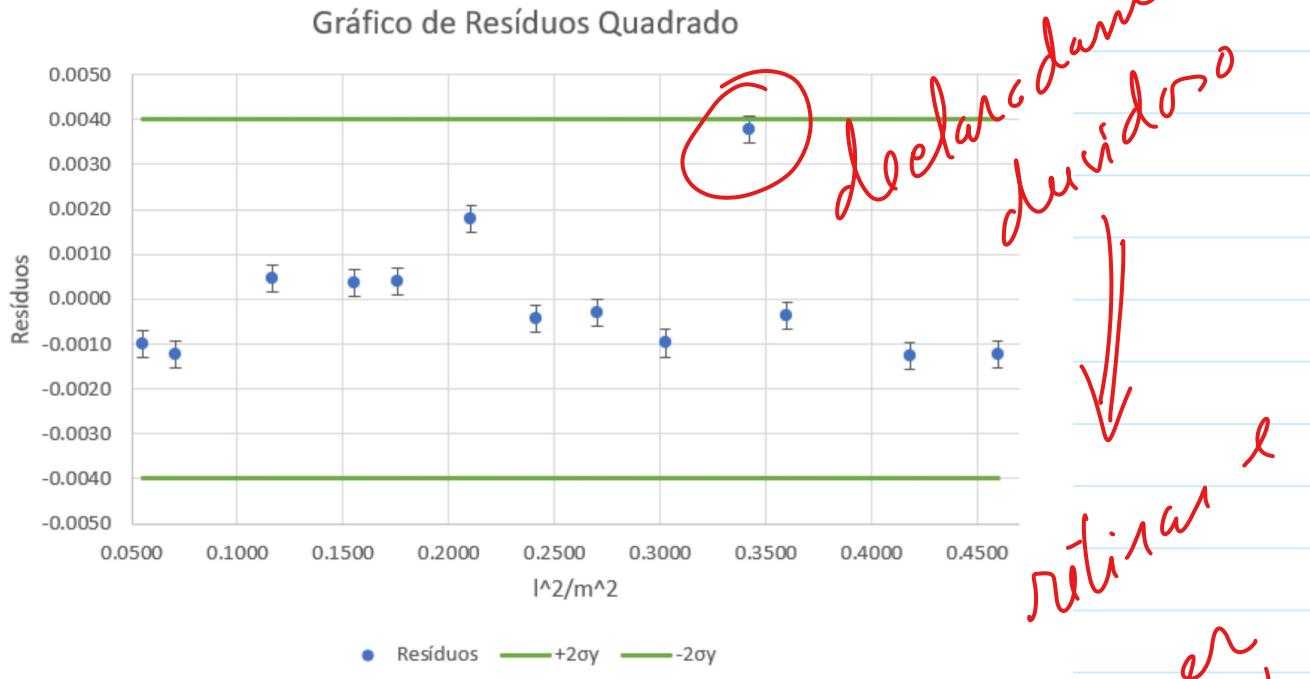


Fig 16: Gráfico de resíduos de $T(l^2)$

Parâmetros de Ajuste Quadrado			
m	0.702	0.0025	b
u(m)	0.003	0.0009	u(b)
r^2	0.9997	0.002	σ_y

Fig 17: Parâmetros de ajuste de $T(l^2)$

M^2 é critério!

Analisando o gráfico de resíduos, visualizamos que todos os resíduos se encontram dentro do intervalo de confiança $[-2\sigma_y, 2\sigma_y]$, logo todos os pontos foram considerados no ajuste. Observe-se também um valor de r^2 elevado o que indica uma elevada tendência linear.

Cálculo de E

$$T = \sqrt{5,029 \frac{\pi^2 f}{ED^2}} l^2 \Rightarrow m^2 = 5,029 \frac{\pi^2 f}{ED^2}$$

$$\Rightarrow E = 5,029 \frac{\pi^2 f}{m^2 D^2}$$

$$E = 5,029 \cdot \frac{8000 \pi^2}{0,702^2 \times 1,958^2} = 210,2 \text{ GPa}$$

$$\mu(E) = \sqrt{\left(\frac{5\pi^2 \mu(p)}{m^2 D^2}\right)^2 + \left(\frac{10\pi^2 p \mu(m)}{m^3 D^2}\right)^2 + \left(\frac{10\pi^2 p \mu(D)}{m^2 D^3}\right)^2} = 1,2 \text{ GPa}$$

$$E = (210 \pm 1) \text{ GPa}$$

$$\varepsilon (\%) = 2,4 \%$$

B. Pêndulo de Torção

Fio		u
I/m	1.062	0.0005
D/m	8.40E-04	
	8.15E-04	
	8.35E-04	8.30E-04
		3E-06

(A)

Disco		u
M/kg	0.8074	0.0001
D/m	0.2020	0.0005
I/kgm^2	0.00412	2E-05

(B)

Coroa		u
M/kg	0.4871	0.0001
D1/m	0.1920	0.0005
D2/m	0.1780	0.0005
I/kgm^2	0.00417	2E-05

(C)

Prisma		u
M/kg	0.6834	0.0001
b/m	0.0310	0.0005
h/m	0.2100	0.0005
I A/kgm^2	0.000055	6E-06
I B/kgm^2	0.00254	3E-05

(D)

Fig. 18 : Tabelas das medições dos corpos : (A) Fio ; (B) Disco ; (C) Coroa ; (D) Prisma

Nesta parte, fiz-se o estudo da relação entre o período médio e o momento de inércia dos corpos em escalas logarítmicas.

NOTA : para escolher qual a grandeza "y" é preciso saber qual tem maior inc. ! Não analisa este assunto!

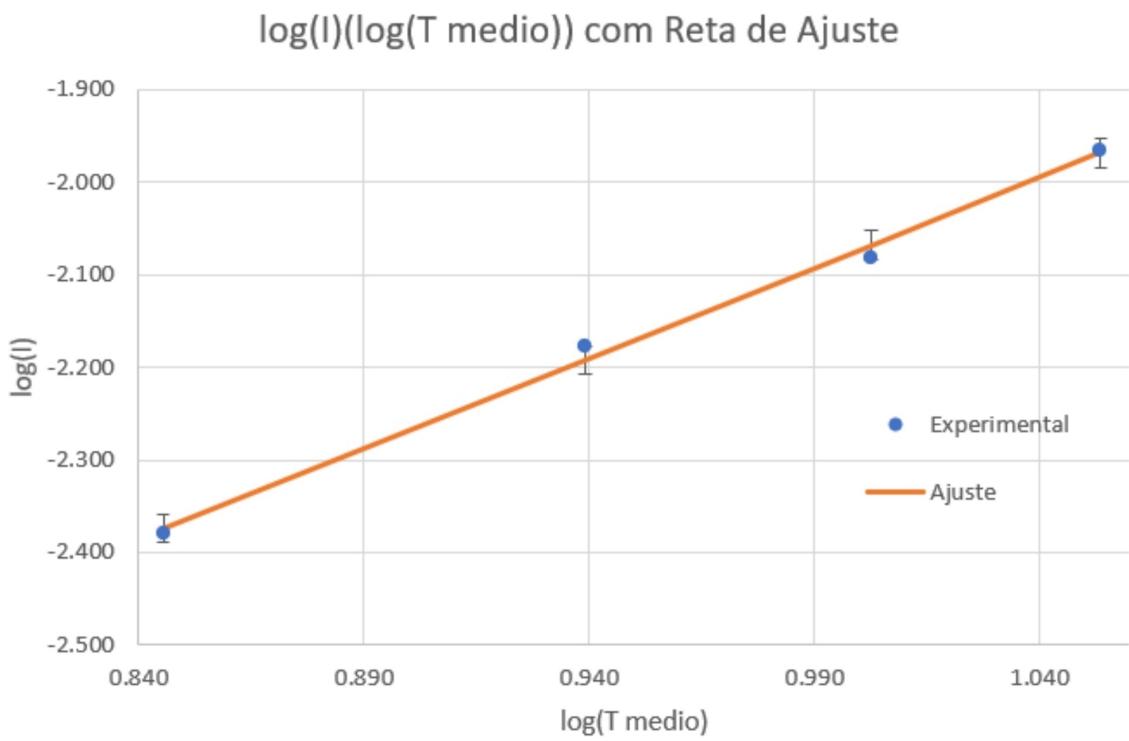


Fig. 19 : Gráfico logarítmico dos momentos de inércia e do período médio

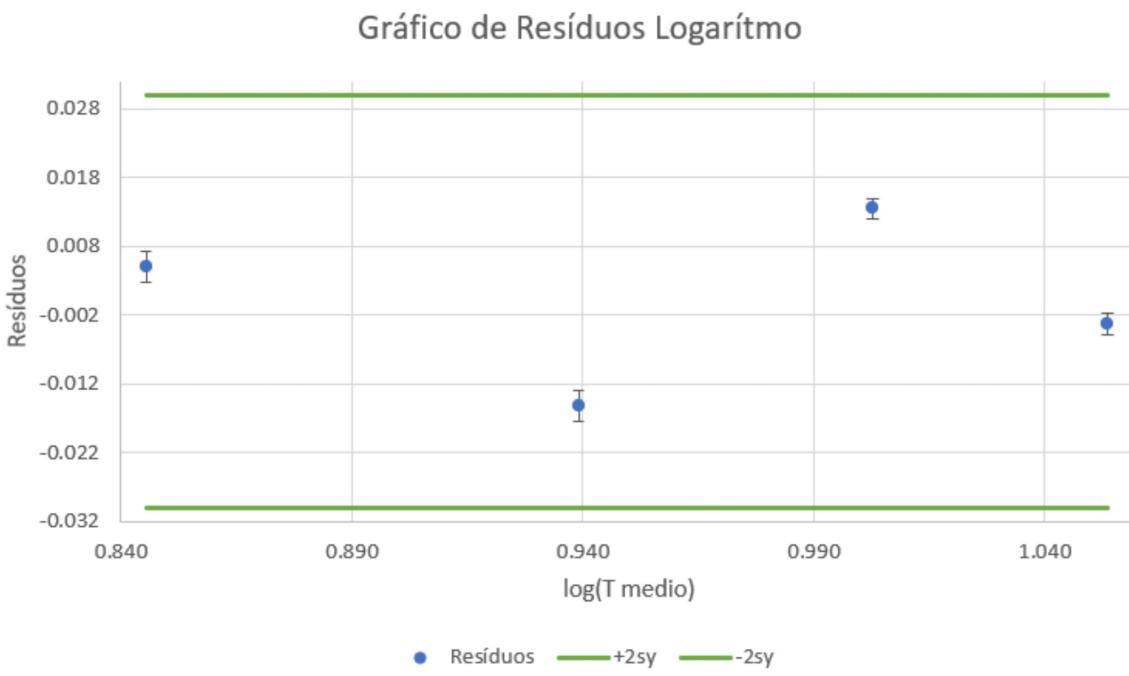


Fig 20 : Resíduos do gráfico de $\log(I)$ [$\log(T \text{ médio})$]

Parâmetros de Ajuste Log Médio			
m	1.95	-4.02	b
u(m)	0.10	0.09	u(b)
r^2	0.995	0.02	σ_y

Fig 21 : Parâmetros de ajuste $\log(I)$ [$\log(T \text{ médio})$]

r^2	0.995	0.02 σ_y
-------	-------	-------------------

Fig. 21: Parâmetros de ajuste $\log(I) [\log(T \text{ médio})]$

Todos os resíduos se encontram dentro do intervalo de confiança $[-2\sigma_y; 2\sigma_y]$, com a sua barra de incerteza, pelo que todos os pontos foram considerados no ajuste. Obteve-se um valor elevado de r^2 o que confirma a elevada tendência linear.

$$m = (1,95 \pm 0,10)$$

$$\epsilon_{(\cdot)} = 2,5 \%$$

Verifica-se então a ~~tendência polinomial de 2º grau entre I e T médio.~~

Passámos, então, ao estudo de $I \times T^2$.

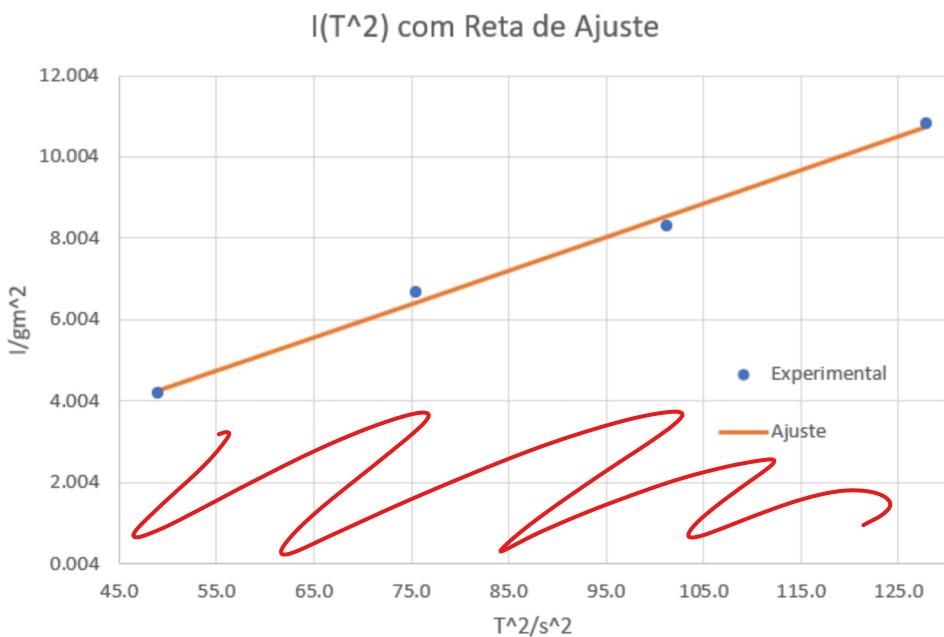


Fig. 22: Gráfico do momento de inércia em função do período médio



Fig. 23: Gráfico de resíduos de $I(T^2)$

Parâmetros de Ajuste Quadrado			
m	8.2E-05	0.0002	b
u(m)	4E-06	0.0004	u(b)
r^2	0.994	0.0003	σy

Fig. 24: Parâmetros de ajuste $I(T^2)$

Todos os resíduos se encontram dentro do intervalo de confiança $[-2\sigma_y; 2\sigma_y]$, com a sua barra de incerteza, pelo que todos os pontos foram considerados no ajuste. Observe-se um valor elevado de r^2 o que confirma a elevada tendência linear.

Calculo do módulo de rigidez

$$m = \mu \frac{D^4}{128 \pi L} \Leftrightarrow \mu = \frac{128 m \pi L}{D^4}$$

$$\mu = \frac{128 \times 8,2 \times 10^{-5} \pi \times 1,062}{(8,30 \times 10^{-4})^4} = 74,1 \text{ GPa}$$

$$u(\mu) = \sqrt{\left(\frac{128 \pi L u(m)}{D^4}\right)^2 + \left(\frac{128 \pi m u(L)}{D^4}\right)^2 + \left(\frac{4 \times 128 \pi m L u(D)}{D^5}\right)^2}$$

Forma relativa é melhor!

$$= 3,75 \text{ GPa}$$

$$\mu = (74 \pm 4) \text{ GPa}$$

Utilizando como valor teórico $\mu_{\text{teo}} = 79,3 \text{ GPa}$:

$$\epsilon (\cdot \cdot \cdot) = 6,7 \cdot \cdot \cdot$$

Um motivo para este valor de erro pode ter sido algumas oscilações transversais.

→ observou - ar ? mas registro inv
Me exceção exp. !

Resultados

(A)

$$\begin{aligned}m_{i=52} &= (1,960 \pm 0,008) \\m_{i=101} &= (1,87 \pm 0,03) \\m_{i=151} &= (1,969 \pm 0,007) \\m_{\text{médio}} &= (1,93 \pm 0,01)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\epsilon_{i=52} (\cdot \cdot \cdot) &= 2 \cdot \cdot \cdot \\ \epsilon_{i=101} (\cdot \cdot \cdot) &= 6,5 \cdot \cdot \cdot \\ \epsilon_{i=151} (\cdot \cdot \cdot) &= 1,55 \cdot \cdot \cdot \\ \epsilon_{\text{médio}} (\cdot \cdot \cdot) &= 3,5 \cdot \cdot \cdot\end{aligned}$$

$$E = (210 \pm 1) \text{ GPa}$$

$$\epsilon (\cdot \cdot \cdot) = 2,4 \cdot \cdot \cdot$$

? inc.?

(B)

$$\begin{aligned}m &= (1,95 \pm 0,10) \\ \mu &= (74,1 \pm 1) \text{ GPa}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\epsilon (\cdot \cdot \cdot) &= 2,5 \cdot \cdot \cdot \\ \epsilon (\cdot \cdot \cdot) &= 6,7 \cdot \cdot \cdot\end{aligned}$$

X
mais expas

Conclusões

Utilizamor o método das vibrações para calcular os módulos elásticos da barra encastreada e do pêndulo de torção.

elásticos da barra encaristrada e do período de lorcão.

Confirmou-se que o período e o comprimento da barra apresentam uma tendência polinomial de grau 2, pela análise dos gráficos logarítmicos das variáveis, pois chegou-se a valores de declive muito próximos de 2.

$\% \Delta(E)$; $\% \Delta(\bar{E})$?

Calculou-se o módulo de Young da barra a partir do gráfico do período médio e do comprimento da barra, tendo se obtido um valor bastante próximo do esperado.

Confirmou-se também a tendência polinomial de grau 2 entre os logarítmos do momento de inércia e do período médio, pois o valor obtido foi também muito próximo de 2.

Calculou-se o módulo de rigidez a partir da linearização dos momentos de inércia com o quadrado do período médio, tendo-se obtido um valor próximo do esperado!

Anexos

Barra Encastrada													
I/m	t/s i = 52	t/s i = 101	t/s i = 151	T medio/s	log(I)	log(T medio)	Ajuste	Resíduos	I^2/m^2	Ajuste	Resíduos	u(log(T medio))	
0.235	1.03	2.2	3.02	0.0423	-0.6289	-1.3740	-1.3819	-0.0080	0.0552	0.0413	-0.0010	0.0031	
	1.04	2.33	3.02										
	1.02	2.4	3.01										
0.266	1.34	2.78	3.9	0.0534	-0.5751	-1.2724	-1.2779	-0.0055	0.0708	0.0522	-0.0012	0.0024	
	1.34	2.79	3.89										
	1.35	2.78	3.88										
0.3415	2.16	4.26	6.25	0.0839	-0.4666	-1.0761	-1.0683	0.0078	0.1166	0.0844	0.0005	0.0016	
	2.15	4.18	6.25										
	2.15	4.17	6.24										
0.394	2.86	5.5	8.31	0.1111	-0.4045	-0.9542	-0.9483	0.0059	0.1552	0.1115	0.0004	0.0012	
	2.87	5.51	8.32										
	2.87	5.51	8.31										
0.4195	3.21	6.29	9.43	0.1257	-0.3773	-0.9007	-0.8956	0.0051	0.1760	0.1261	0.0004	0.0010	
	3.21	6.28	9.42										
	3.2	6.28	9.42										
0.459	3.79	7.43	11.15	0.1487	-0.3382	-0.8278	-0.8201	0.0077	0.2107	0.1504	0.0018	0.0009	
	3.79	7.43	11.15										
	3.79	7.44	11.15										
0.491	4.4	8.53	12.92	0.1722	-0.3089	-0.7639	-0.7636	0.0004	0.2411	0.1718	-0.0004	0.0008	
	4.4	8.62	12.92										
	4.4	8.62	12.93										
0.52	4.91	9.64	14.45	0.1927	-0.2840	-0.7152	-0.7154	-0.0002	0.2704	0.1924	-0.0003	0.0007	
	4.91	9.64	14.45										
	4.91	9.64	14.45										
0.55	5.5	10.8	16.19	0.2159	-0.2596	-0.6657	-0.6683	-0.0026	0.3025	0.2149	-0.0010	0.0006	
	5.5	10.81	16.2										
	5.5	10.8	16.2										
0.585	6.1	11.94	17.9	0.2390	-0.2328	-0.6215	-0.6166	0.0050	0.3422	0.2428	0.0038	0.0005	
	6.12	11.93	17.91										
	6.11	11.94	17.91										
0.600	6.53	12.82	19.08	0.2557	-0.2218	-0.5923	-0.5953	-0.0030	0.3600	0.2553	-0.0004	0.0005	
	6.53	12.83	19.07										
	6.53	12.83	19.08										
0.6465	7.59	14.84	22.29	0.2973	-0.1894	-0.5268	-0.5327	-0.0058	0.4180	0.2960	-0.0013	0.0004	
	7.59	14.85	22.29										
	7.6	14.85	22.27										
0.678	8.39	16.31	24.46	0.3265	-0.1688	-0.4861	-0.4928	-0.0067	0.4597	0.3253	-0.0012	0.0004	
	8.32	16.31	24.47										
	8.32	16.32	24.46										

Fig. 25 : Dados da barra encastrada

Valores para impulsos individuais											
I/m	log(I)	logT i=52	Ajuste	Resíduos	logT i=101	Ajuste	Resíduos	logT i=151	Ajuste	Resíduos	
0.235	-0.62893	-1.70317	-1.70036	0.002805	-1.640709	-1.66581	-0.025097897	-1.69945	-1.69965	-0.0002	
0.266	-0.57512	-1.58782	-1.5949	-0.00708	-1.559756	-1.56509	-0.005337644	-1.589027	-1.59368	-0.00465	
0.3415	-0.46661	-1.38289	-1.38224	0.000648	-1.380728	-1.36202	0.018710518	-1.383329	-1.37999	0.003337	
0.394	-0.4045	-1.25863	-1.26053	-0.00191	-1.263433	-1.24579	0.017647202	-1.259202	-1.25769	0.001513	
0.4195	-0.37727	-1.20995	-1.20716	0.002794	-1.206131	-1.19481	0.011318097	-1.204772	-1.20405	0.000719	
0.459	-0.33819	-1.13736	-1.13057	0.006798	-1.133138	-1.12167	0.011464894	-1.131702	-1.12709	0.004609	
0.491	-0.30892	-1.07255	-1.07321	-0.00065	-1.070328	-1.0669	0.003432462	-1.067602	-1.06945	-0.00185	
0.52	-0.284	-1.02492	-1.02436	0.000558	-1.020244	-1.02025	-9.69344E-06	-1.019109	-1.02038	-0.00127	
0.55	-0.25964	-0.97564	-0.97663	-0.00098	-0.970764	-0.97467	-0.003901461	-0.969551	-0.97241	-0.00285	
0.585	-0.23284	-0.92996	-0.92412	0.005846	-0.927438	-0.92452	0.002917184	-0.925962	-0.91964	0.006319	
0.6	-0.22185	-0.90109	-0.90257	-0.00148	-0.896208	-0.90394	-0.007735489	-0.898474	-0.89799	0.000485	
0.6465	-0.18943	-0.83557	-0.83904	-0.00347	-0.832692	-0.84327	-0.01058109	-0.830997	-0.83415	-0.00315	
0.678	-0.16877	-0.79466	-0.79855	-0.00388	-0.791779	-0.80461	-0.012827083	-0.790461	-0.79346	-0.003	

Fig. 26 : Dados dos impulsos individuais da barra encastrada

Pêndulo de Torção													
I/kgm^2	θ max/º	t/s	T/s	T medio/s	log(I)	log(T medio)	Ajuste	Resíduos	(T medio)^2/s^2	Ajuste	Resíduos	u(I)	u(log(I))
4.09E-03	90	69.97	6.997	7.01	-2.388	0.845	-2.383	0.005405	49.1	0.00416	0.00007	2.10971E-05	2.24E-03
	180	70.03	7.003										
	270	70.18	7.018										
6.58E-03	90	86.81	8.681	8.69	-2.182	0.939	-2.198	-0.0158	75.5	0.00634	-0.00023	3.49512E-05	2.31E-03
	180	86.9	8.69										
	270	87.01	8.701										
8.21E-03	90	100.51	10.051	10.06	-2.086	1.003	-2.072	0.013454	101.2	0.00846	0.00025	2.574E-05	1.36E-03
	180	100.71	10.071										
	270	100.64	10.064										
1.07E-02	90	113.25	11.325	11.31	-1.969	1.054	-1.972	-0.00306	128.0	0.01066	-0.00009	3.84246E-05	1.55E-03
	180	113.15	11.315										
	270	112.98	11.298										

Fig 27: Dados do pêndulo de Torção