

# Coeficiente de viscosidade - Lei de Poiseuille

Nicholas Saraiva Arruda Serafim

Turma PL6 - Grupo 4

Departamento de Física e Astronomia

Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, Portugal

15 de março de 2023

15

## Resumo

Neste relatório verifica-se a lei de Poiseuille, estudando a dependência linear do caudal em relação a pressão exercida no fluido variando a altura do tubo de vazão. Com essa abordagem foi possível determinar o valor experimental da viscosidade da água aos 24<sup>o</sup> Celsius com o melhor valor de  $\eta = (1.1 \pm 0.1) \text{ mPa}\cdot\text{s}$  com erro percentual de 16% em comparação com o valor teórico.

## 1 Introdução

### 1.1 Objetivos

- Calcular a viscosidade da água a temperatura constante pela lei de Poiseuille  $P = \eta \frac{8l}{\pi R^4} Q$

### 1.2 Introdução teórica

Num fluido real, movendo-se como um corpo rígido, irá existir uma tensão na superfície do tubo de escoamento que, devido às ligações entre moléculas vizinhas, irá se presenciar tensões tangenciais a superfície, tal efeito é designado por viscosidade  $\eta$  e o fluido que está presente nessa situação se diz viscoso.

Tendo um fluido que flui ao longo de um tubo de secção circular (para exemplificação consideramos o tubo na horizontal), queremos estudar o seu movimento, primeiro iremos começar à introduzir as componentes do tubo, por instanciá, sua espessura  $\delta r$  e sua largura  $l$  como podemos ver na figura 1

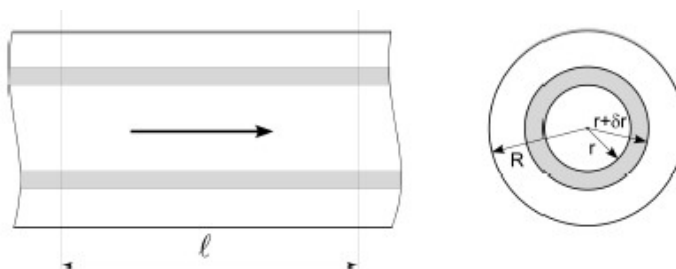


Figura 1: Figura retirada do protocolo T1 da unidade curricular Laboratório de Física 2 do curso de engenharia física da universidade do porto.

Desta forma teremos uma diferença de pressão de  $2\pi r \delta r$  e com tal calculamos a força de viscosidade no líquido no interior da camada cilíndrica:

$$-\eta \times 2\pi r l \times \left( \frac{\partial v}{\partial e} \right)_r \quad (1)$$

e na camada exterior:

$$-\eta \times 2\pi (r + \delta r) l \times \left( \frac{\partial v}{\partial e} \right)_{r+\delta r} \quad (2)$$

Suprimir e  
referenciar  
leções!

Somando e igualando a zero a força resultante, além de tratar no limite, teremos:

$$\eta l \frac{d}{dr} \left( r \frac{dv}{dr} \right) = -Pr \quad (3)$$

Integrando:

$$\frac{dv}{dr} = -P \frac{r}{2\eta l} + \frac{1}{\eta l} C_1 \quad (4)$$

onde  $C_1$  é uma constante de integração.

Realizando mais uma integração para encontrar a velocidade teremos:

$$v = -P \frac{r^2}{4\eta l} + \frac{1}{\eta l} C_1 \times \log r + C_2 \quad (5)$$

( $C_2$  outra constante de integração).

Definindo as constantes de acordo com o tubo teremos a solução:

$$v = \frac{P (R^2 - r^2)}{4\eta l} \quad (6)$$

Atendo-se a formula do caudal que atravessa o tubo, teremos:

$$Q = \int_0^R v \times 2\pi r \times \delta r = \int_0^R \frac{P (R^2 - r^2)}{4\eta l} \times 2\pi r \times \delta r \quad (7)$$

onde:

$$Q = \frac{P\pi}{2\eta l} \int_0^R (R^2 r - r^3) \delta r \quad (8)$$

e dessa forma podemos expressar a lei de Poiseuille:

$$P = \eta \frac{8l}{\pi R^4} Q \quad (9)$$

## 2 Método experimental

A montagem experimental usada encontra-se esquematizada na figura 2. O depósito A deve estar cheio e sua altura deve-se manter constante para manter uma pressão constante na entrada do tubo de escoamento além de que a temperatura do fluido (consequentemente da sala também) esteja estabilizada. Para alcançar esse efeito, o depósito foi alimentando com antecedência, retirando a rolha  $R_{ar}$  e abrindo a torneira de alimentação  $T_a$ . Estando cheio fecha-se  $T_a$  e coloca-se  $R_{ar}$  de volta com gordura vedante. Para alcançar a pressão ambiente no depósito coloca-se a torneira aberta  $T_{ar}$ .

Teve-se o cuidado (como se mostra na figura 2) de manter os tubos de borracha por onde a água passa livres de estreitamento, além de assegurar que o tubo capilar estar posicionado na horizontal para que não haja uma contribuição extra devido à variação de energia potencial ao longo dele.

Ao terminar a montagem abriu-se a torneira de descarga ( $T_s$ ) e esperamos o fluxo alcançar o regime estacionário que é caracterizado pelo aparecimento de bolinhas no interior da água e dessa forma estavam aptos de recolher os dados para a análise de dados.

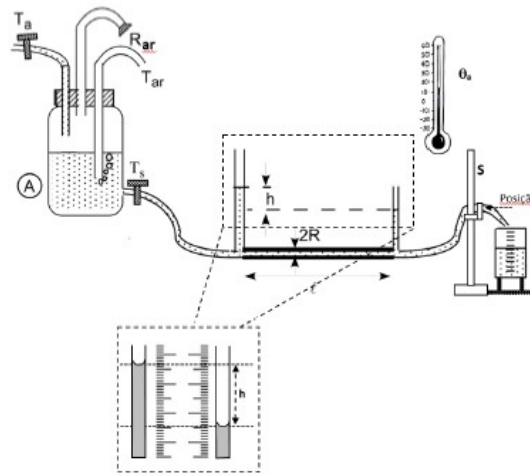
Dessa forma só foi preciso alterar a posição do tubo no suporte S e registrar a diferença de alturas manométricas ( $h$  na figura 2) e o volume  $V$  de água recolhido na proveta graduada, num intervalo de tempo  $t$ . Assim, temos dados para calcular tanto a pressão na água  $P = \rho gh$ , quanto o caudal  $Q = \frac{V}{t}$ .

## 3 Análise de dados

### 3.1 Obtenção da temperatura ambiente

Ao longo dos ensaios se calculou a temperatura ambiente com a ajuda de termómetro digital a qual foi possível obter o gráfico 3.

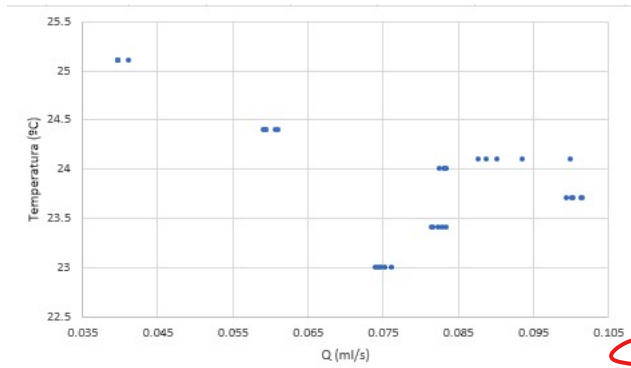
Desta forma foi possível calcular a temperatura média para procurar a o valor teórico para viscosidade da água, onde temos  $T = (23.96 \pm 0.02)^\circ C$  e para a viscosidade teorica utilizamos  $\eta = 0.9107 mPa.s$  (valor retirado do site <https://wiki.anton-paar.com/en/water/>)



Referências...

Figura 2: ~~Figura retirada do protocolo T1 da unidade curricular Laboratório de Física 2 do curso de engenharia física da universidade do porto.~~

Legendm?



⇒  $\eta_{ref}$

Sobrepostos dá + info

Figura 3: Gráfico da temperatura(°C) em função do caudal( $\frac{ml}{s}$ )

### 3.2 Determinação da viscosidade

Como dito na parte teórica, alterando a altura S, do suporte do tubo de descarga, conseguimos registrar valores de Q para diferentes V, com esses dados obtivemos o gráfico 4 junto com os respectivos resíduos. Para uma análise mais profundo analisamos individualmente a viscosidade para cada volume (Em anexo se encontra todos os gráficos divididos por volume).

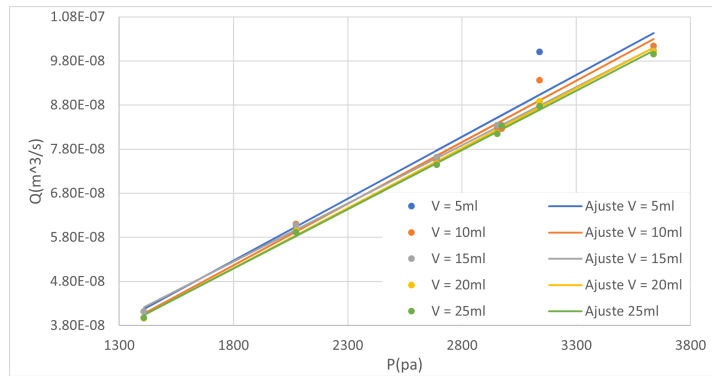


Figura 4: Gráfico do caudal em função do volume de todas as series(volumes) efetuados

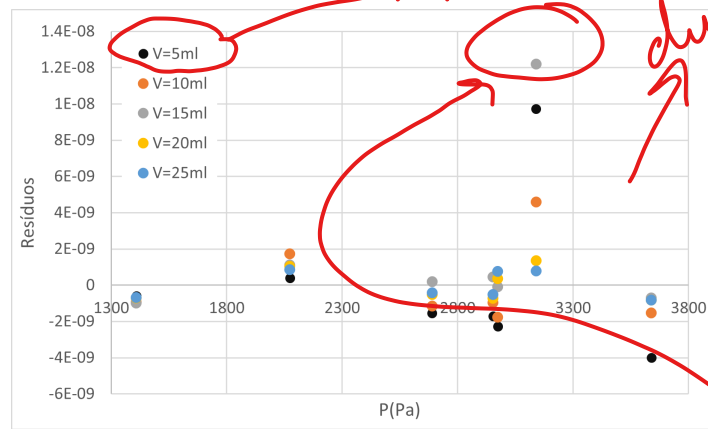


Figura 5: Gráfico de resíduos dividido por volume

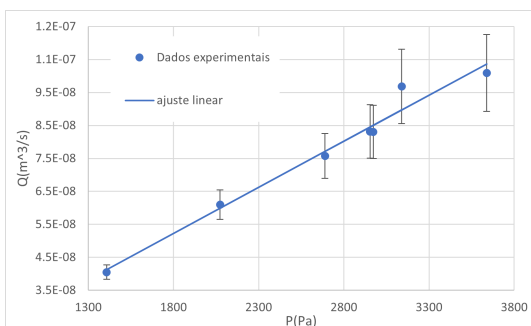
Como referido na introdução teórica encontramos a viscosidade da água com a lei de Poiseuille. Dessa forma, com o ajuste linear feito para os diversos volumes usados encontrar valores de viscosidade para diferentes valores como visto na imagem 6.

$\eta_{\text{teórico}} = 0.9107 \text{ mPa.s}$				
V(ml)	$\eta(\text{Pa.s})$	$u(\eta)$	inc(%)	Erro ref
5	0.0011	0.0001	11	16%
10	0.00106	0.00008	7	17%
15	0.0011	0.0009	81	24%
20	0.00109	0.00006	5	20%
25	0.00111	0.00006	5	21%

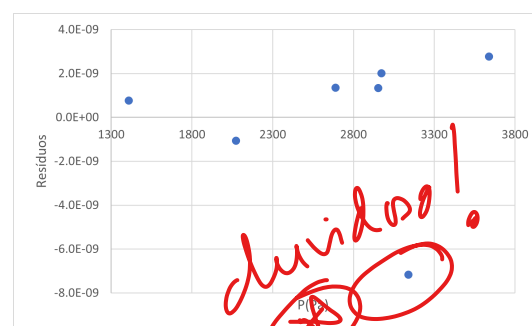
Figura 6: Tabela com os valores das viscosidades para os respetivos volumes, com sua percentagem de incerteza e o erro referente ao valor teórico utilizado. (Formula das incertezas em anexo).

Em uma análise rápida podemos ver que a medição aos 15ml foi a pior e só as de 5ml e 10ml conseguirão um erro menor que 20%. Realizando a média entre os caudais de volume 5 e 10 ml obtidos, obtemos o gráfico 7.

Com os dados da média fazemos da mesma forma para obter a viscosidade e desta forma obtemos  $\eta_{\text{medio}} = (1.06 \pm 9) \times \text{mPa.s}$ , com uma  $\text{inc}(\%) = 9\%$  e um erro referente ao valor de teórico de 17%.



(a) Gráfico da media dos caudais



(b) Resíduos da media dos caudais

Figura 7: Gráficos para o a media dos caudais de 5 ml e 10 ml

Ajuste da media			
m	2.8E-11	2E-09	b
u(m)	2E-12	6E-09	u(b)
r^2	0.9740	4E-09	u(y)

Figura 8: Ajuste da Gama

## 4 Conclusão

Com os resultados obtidos, o nosso melhor resultado para a viscosidade foi aos 5ml com  $\eta = (1.1 \pm 0.1) \times mPa.s$  tendo um erro referente ao valor teórico de 16%, por excesso, erro esse que poderia ser reduzido caso tivéssemos medido de fato a temperatura na água utilizada e não com a medição da temperatura da sala. Outro possível erro que pode ter impactado a experiência como um todo foi o posicionamento da proveta para a obtenção do caudal, já que sua base estava numa região não estabilizada, que pode ter acarretado em erros paralaxe. Os valores da viscosidade de 15, 20 e 25 ml deram valores de erro maior que 20% por conta dos erros já referidos e mais o fator da variação da temperatura que ocorreu durante a realização da experiência. Com tudo o que foi dito, o método utilizado é confiável para a obtenção da viscosidade de fluidos através da lei de Poiseuille.

Isso só serve para procurar um método de escolha, mas não foi grande coisa

mesmo com esta, não fez a análise correta!

## 5 Anexos

### 5.1 Incertezas

Incerteza relativa pode ser calculada como:

$$inc(\%) = \frac{u(A)}{A} \times 100 \quad (10)$$

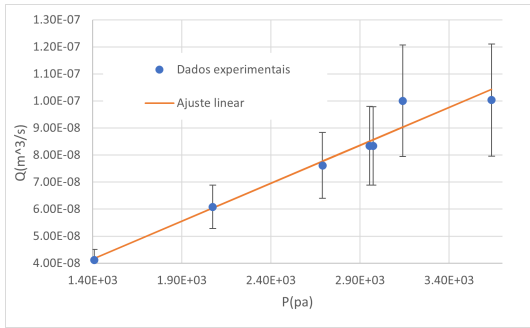
Erro percentual de A referente a um valor B é calculado como:

$$Erro_{ref} = \frac{|B - A|}{B} \times 100 \quad (11)$$

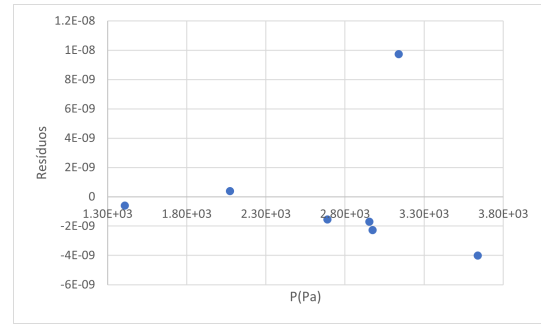
Formula geral para calculos de incertezas:

$$u^2(y) = \left( \frac{\partial y}{\partial x_1} \right)^2 u^2(x_1) + \left( \frac{\partial y}{\partial x_2} \right)^2 u^2(x_2) + \dots + \left( \frac{\partial y}{\partial x_n} \right)^2 u^2(x_n) \quad (12)$$

### 5.2 Gráficos divididos por volume com seus respectivos ajustes



(a) Gráfico para o volume de 5ml

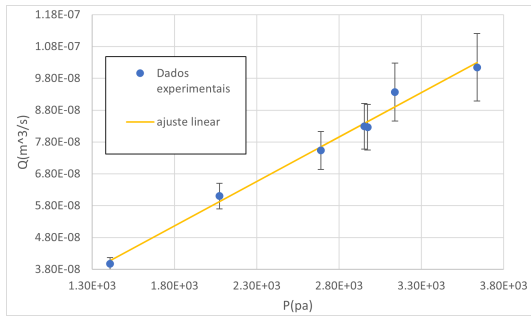


(b) Resíduos para o volume de 5ml

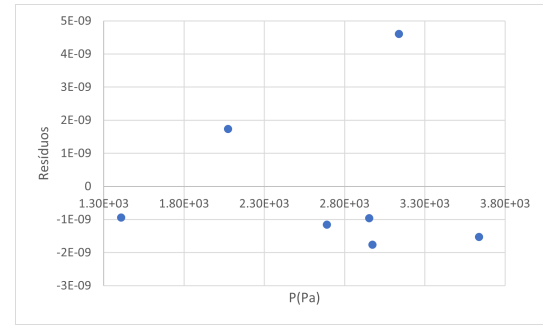
Figura 9: Gráficos para o volume de 5ml

Ajuste da gama de 5 ml			
m	2.8E-11	2E-09	b
u(m)	3E-12	8E-09	u(b)
r^2	0.9549	5E-09	u(y)

Figura 10: Ajuste da Gama



(a) Gráfico para o volume de 10ml

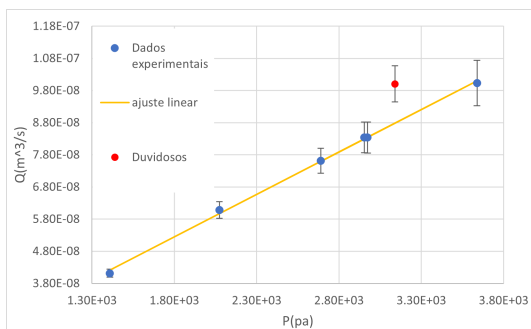


(b) Resíduos para o volume de 10ml

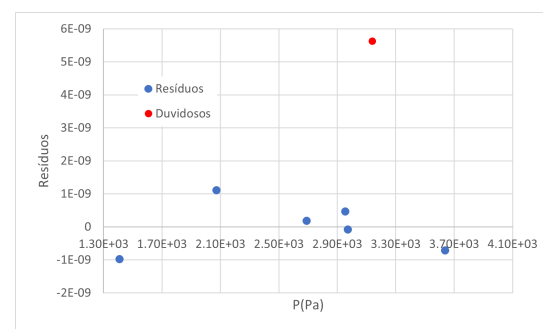
Figura 11: Gráficos para o volume de 10ml

Ajuste da gama de 5 ml			
m	2.8E-11	2E-09	b
u(m)	3E-12	8E-09	u(b)
r^2	0.9549	5E-09	u(y)

Figura 12: Ajuste da Gama



(a) Gráfico para o volume de 15ml

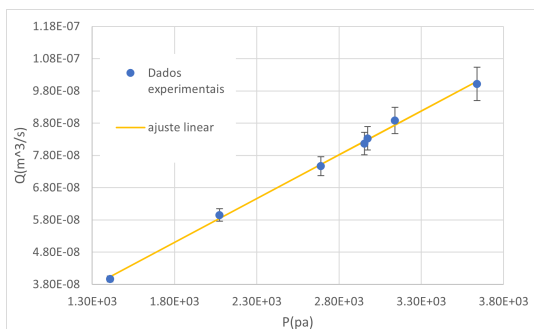


(b) Resíduos para o volume de 15ml

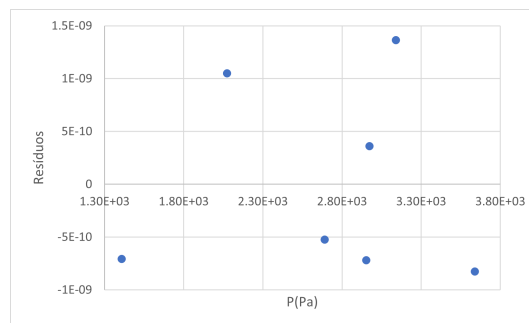
Figura 13: Gráficos para o volume de 15ml

Ajuste da gama de 15 ml			
m	2.64E-11	5E-09	b
u(m)	5E-13	1E-09	u(b)
r^2	0.9986	9E-10	u(y)

Figura 14: Ajuste da Gama



(a) Gráfico para o volume de 20ml

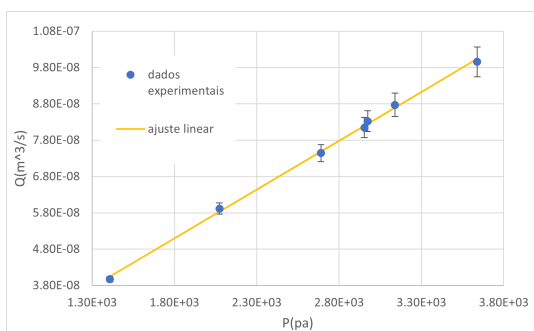


(b) Resíduos para o volume de 20ml

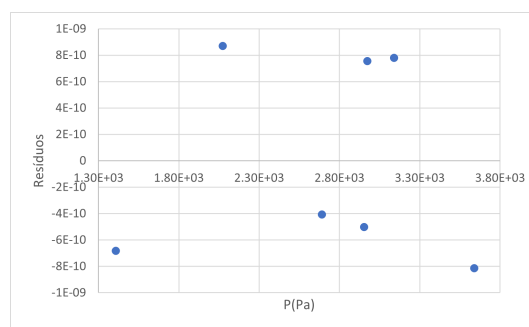
Figura 15: Gráficos para o volume de 20ml

Ajuste da gama de 20 ml			
m	2.72E-11	2E-09	b
u(m)	6E-13	2E-09	u(b)
r^2	0.9979	1.0066E-09	u(y)

Figura 16: Ajuste da Gama



(a) Gráfico para o volume de 25ml



(b) Resíduos para o volume de 25ml

Figura 17: Gráficos para o volume de 25ml

Ajuste da gama de 25 ml			
m	2.69E-11	3E-09	b
u(m)	5E-13	1E-09	u(b)
r^2	0.9985	8E-10	u(y)

Figura 18: Ajuste da Gama



## Referências

[1] Docentes da disciplina, T1 Coeficiente de viscosidade da água - Lei de Poiseuille, Laboratorio de física 2