

Determinação de módulos elásticos de materiais pelo método das vibrações de uma barra encastrada e pelo péndulo de torsão.

T4B

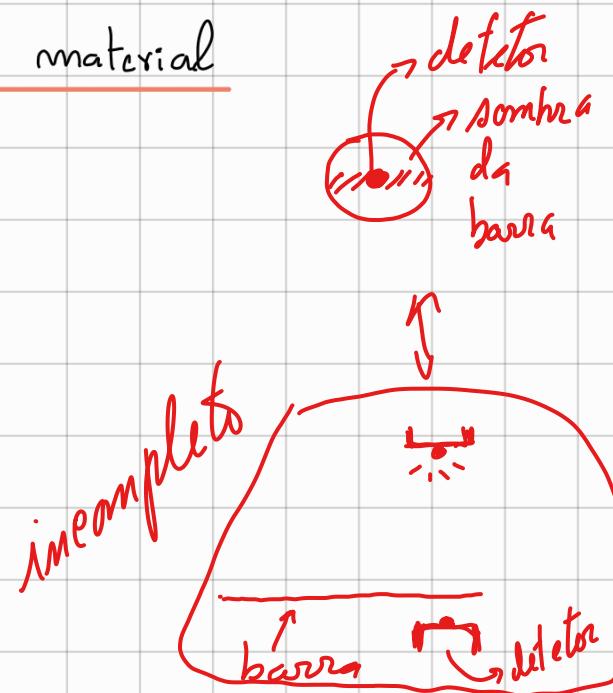
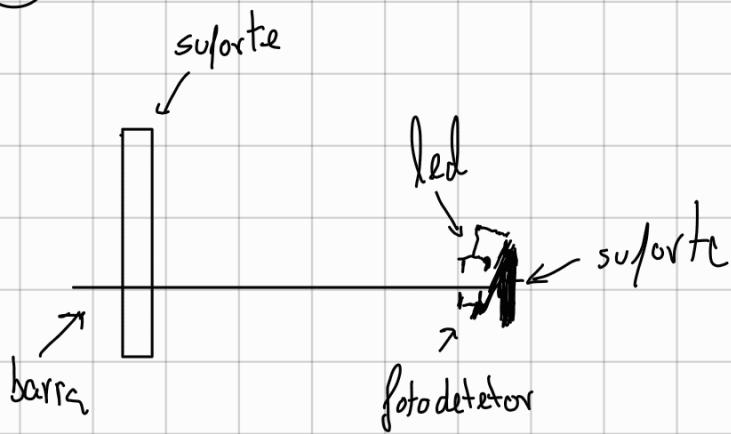
Grupo 4 || Nomes: Alfonso Vieira, Maria Lopes, Diogo Baptista, Nicholas Saraciva

→ Objetivos

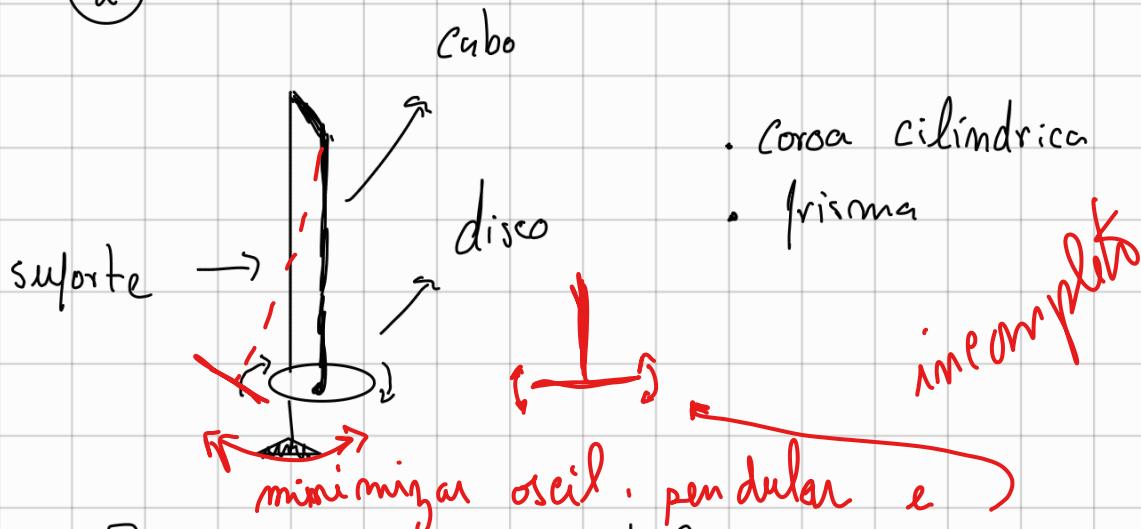
- Determinar o módulo de Young do material de uma barra, usando o método de vibrações da barra encastrada.
- Efectuar o cálculo dos momentos de inércia das peças suspensas no péndulo de torsão.
- Determinar o módulo de rigidez do material do fio de suspensão.

→ Montagem experimental e respetivo material

①



(2)



### → Procedimento experimental:

. Para a montagem (1) :

- Encontrar o maior e o menor valor,  $l$ , da barra para 151 impulsos, de modo a calcular o valor ideal para aumentar o comprimento da barra a cada nova medida.

- Para cada comprimento  $l$  da barra, selecionar no contador de impulsos os respetivos números 51, 101, 151 e registrar o tempo,  $t$ .

- Com auxilio a um objeto, iniciar o movimento da barra. Certificando que o movimento é vertical. (1 único modo de vibração)

- Calcular o módulo de  $\gamma$  a partir da seguinte equação:

$$\bar{T}^2 = 5,029 \frac{\pi^2 \rho}{E D^2}$$

$\log T (\text{Poy } D) \quad \text{e } m=0,5?$

$T(D^2)$

. Para a montagem ②:

- Suspender o fio, sucessivamente:

- Disco + prisma, com o eixo maior vertical
- Disco + prisma, com o eixo maior horizontal
- Disco + coroa cilíndrica
- Disco + coroa cilíndrica + prisma com eixo maior horizontal

- Para cada um dos casos anteriores determinar o tempo,  $t$ , correspondente a 10 oscilações completas, para valores iniciais da amplitude,  $\Theta$ , de  $90^\circ$ ,  $180^\circ$  e  $270^\circ$

- Obter o módulo de rigidez  $\mu$ , a partir de uma análise gráfica,  $I(T)$  a partir da expressão

$$I = \frac{D^4 \mu}{128\pi l} \bar{T}$$



→ Resultados obtidos:

$$l_{\min} = 0,205 \text{ m}$$

$$l_{\max} = 0,7 \text{ m}$$

utilizando a seguinte expressão para 10 ensaios ( $n=10$ ) obtemos:

$$\text{acréscimo de } \leftarrow \Delta l^4 = \left( l_{\max}^4 - l_{\min}^4 \right) / n$$

$l$  em cada medida obtemos  $\Delta l = 5,37 \text{ cm}$

## Dados da barra

$m_i (\pm 0,00001g)$	$l_{\text{barra}} (\pm 0,0005 \text{ m})$	$d_{\text{barra}} (\pm 0,000002 \text{ m})$
0,02166	0,8940	0,001970
0,02166	0,8935	0,001970
0,02166	0,8935	0,001970
0,02166	0,8940	0,001985
0,02166	0,8940	0,001975
<b>média</b>	<b>0,02166</b>	<b>0,001974</b>
$u(\text{média})$	0,00001	0,0002
		0,000006

A partir destes dados é possível calcular  $\rho$ :

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{\pi \left( \frac{D}{2} \right)^2 \cdot l}$$

$$\Leftrightarrow \rho = 7,92 \times 10^3 \text{ g cm}^{-3}$$

$$u(\rho) = \sqrt{\left( \frac{4}{\pi D^2 l} \cdot u(m) \right)^2 + \left( -\frac{8m}{\pi D^3 l} u(D) \right)^2 + \left( -\frac{4m}{\pi D^2 l^2} u(l) \right)^2}$$

$$= 50 \text{ g cm}^{-3}$$

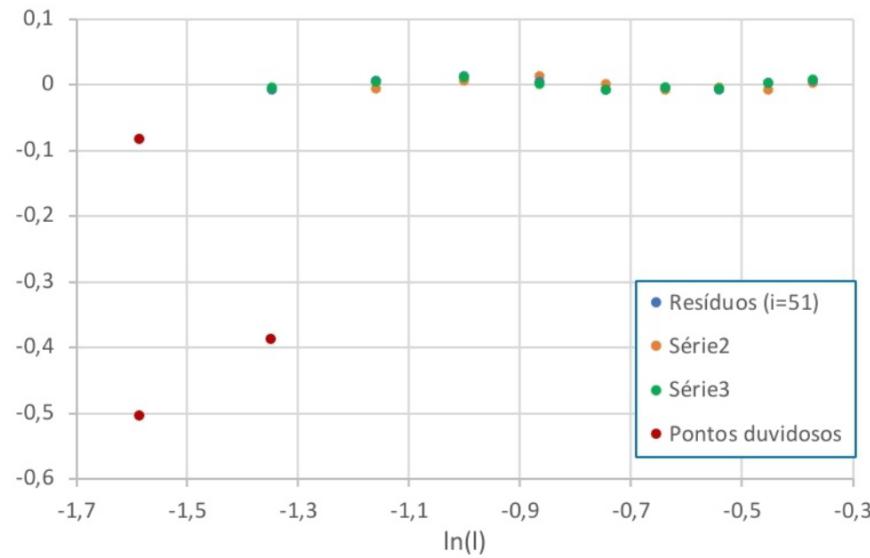
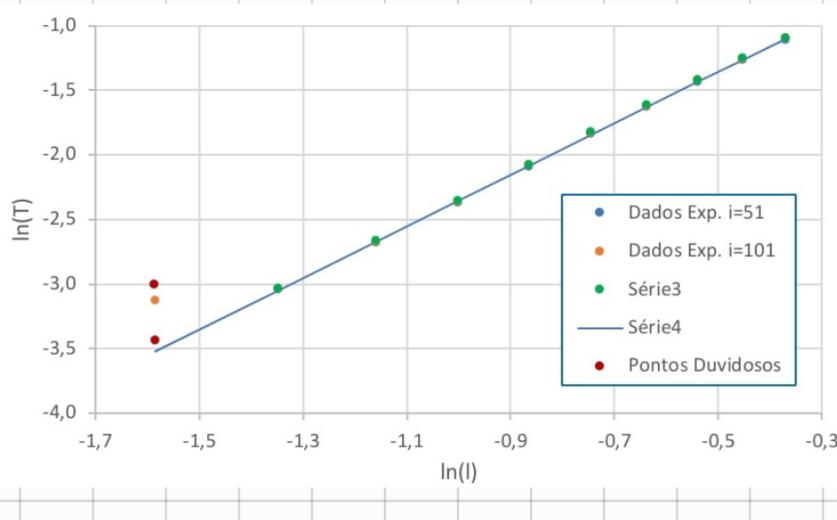
$$\rho = (7,92 \pm 0,05) \times 10^3 \text{ g cm}^{-3}$$

## Dados experimentais

$i \rightarrow \text{nº de oscilações}$

$I^4 (\text{m})$	$u(I^4) (\text{m})$	$(T_{\text{médio}})^2 (\text{s}^2)$	$u(T_{\text{médio}})^2 (\text{s}^2)$	$i = 51$		$i = 101$		$i = 151$	
				$(T_{\text{médio}})^2 (\text{s}^2)$	$u(T_{\text{médio}})^2 (\text{s}^2)$	$(T_{\text{médio}})^2 (\text{s}^2)$	$u(T_{\text{médio}})^2 (\text{s}^2)$	$(T_{\text{médio}})^2 (\text{s}^2)$	$u(T_{\text{médio}})^2 (\text{s}^2)$
0,00177	0,00002	0,00104	0,00003	0,00194	0,00002	0,00245	0,00001		
0,0046	0,0000	0,0023	0,0000	0,00233	0,00002	0,00233	0,00001		
0,0097	0,0001	0,0047	0,0001	0,00482	0,00003	0,00484	0,00002		
0,0182	0,0001	0,0088	0,0001	0,00891	0,00004	0,00897	0,00003		
0,0315	0,0001	0,0154	0,0001	0,01573	0,00005	0,01581	0,00003		
0,0509	0,0002	0,0254	0,0001	0,02586	0,00006	0,02605	0,00004		
0,0782	0,0003	0,0387	0,0002	0,0394	0,0001	0,03968	0,00005		
0,1151	0,0004	0,0572	0,0002	0,0583	0,0001	0,05863	0,00006		
0,1639	0,0005	0,0797	0,0002	0,0812	0,0001	0,08172	0,00008		
0,2266	0,0007	0,1094	0,0003	0,1114	0,0001	0,11196	0,00009		

Para verificar a veracidade dos pontos para o ajuste final fizemos um gráfico  $\ln(T)$  ( $\ln(l)$ ).



m	1,993	-0,361	b
s(m)	0,009	0,007	s(b)
r <sup>2</sup>	0,99986	0,008	s(y)

m	1,995	-0,351	b
s(m)	0,008	0,007	s(b)
r <sup>2</sup>	0,99988	0,008	s(y)

m	1,997	-0,346	b
s(m)	0,008	0,007	s(b)
r <sup>2</sup>	0,99988	0,008	s(y)

Retiramos o primeiro ponto pois este afastava-se da tendência. (Só fui colocada a reta de ajuste para  $i = 51$  porque para  $i = 101$  e  $i = 151$  as linhas são coincidentes).

Isto aconteceu devido ao facto de  $l$  ser muito pequeno e reparamos que esta não estava a oscilar em torno da posição de equilíbrio.

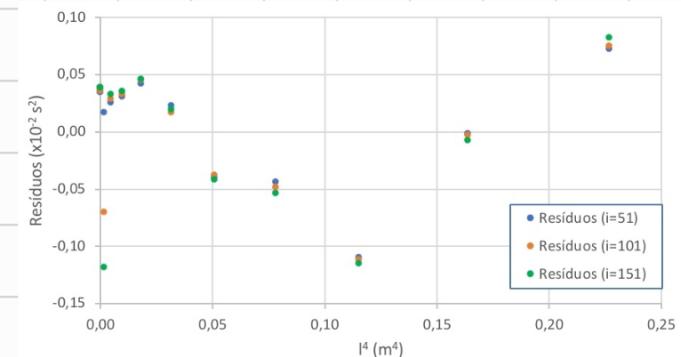
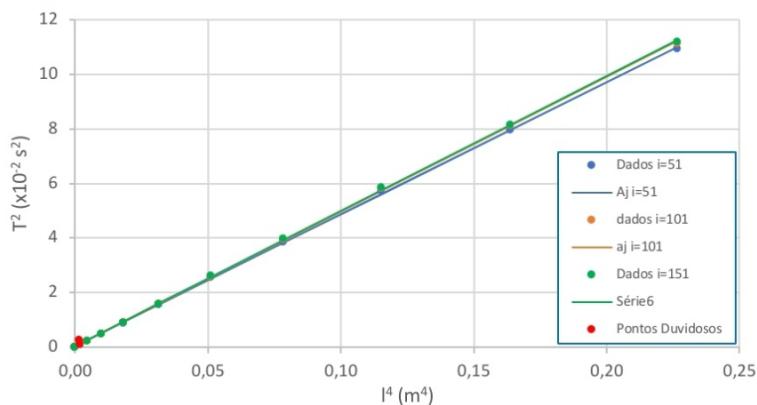
Os restantes pontos estão alinhados com a tendência por isso são valores bons a ter em consideração.

$i = 51$

$i = 101$

$i = 151$

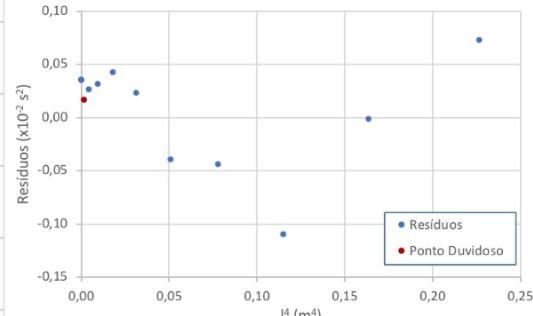
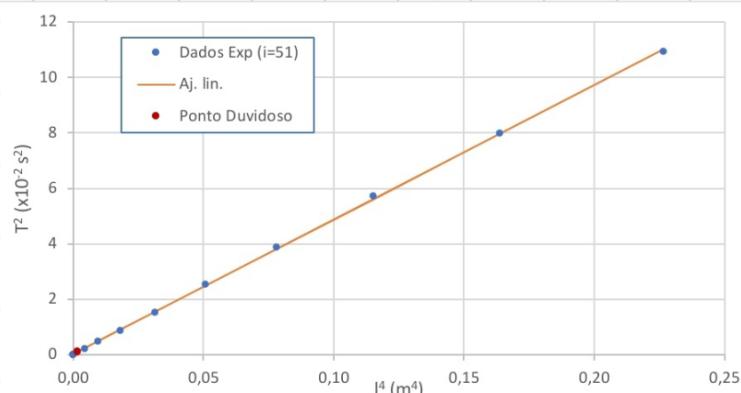
$l^4$ (m)	$(T_{\text{médio}})^2 \times 10^{-2} \text{ s}^2$	$(T_{\text{aj}})^2 \times 10^{-2} \text{ s}^2$	Res. $\times 10^{-2} \text{ s}^2$	$(T_{\text{médio}})^2 \times 10^{-2} \text{ s}^2$	$T_{\text{médio}}^2 \text{ aj.} \times 10^{-2} \text{ s}^2$	Res. $\times 10^{-2} \text{ s}^2$	$(T_{\text{médio}})^2 \times 10^{-2} \text{ s}^2$	$T_{\text{m}}^2 \text{ aj.} \times 10^{-2} \text{ s}^2$	Res. $\times 10^{-2} \text{ s}^2$
0,00177	0,104	0,12	0,02	0,194	0,12	-0,07	0,245	0,13	-0,12
0,0046	0,23	0,26	0,03	0,233	0,26	0,03	0,233	0,27	0,03
0,0097	0,47	0,50	0,03	0,482	0,51	0,03	0,484	0,52	0,04
0,0182	0,88	0,92	0,04	0,891	0,94	0,05	0,897	0,94	0,05
0,0315	1,54	1,56	0,02	1,573	1,59	0,02	1,581	1,60	0,02
0,0509	2,54	2,50	-0,04	2,586	2,55	-0,04	2,605	2,56	-0,04
0,0782	3,87	3,82	-0,04	3,94	3,89	-0,05	3,968	3,91	-0,05
0,1151	5,72	5,61	-0,11	5,83	5,72	-0,11	5,863	5,75	-0,12
0,1639	7,97	7,973	-0,002	8,12	8,120	-0,002	8,172	8,165	-0,007
0,2266	10,94	11,02	0,07	11,14	11,22	0,08	11,196	11,28	0,08



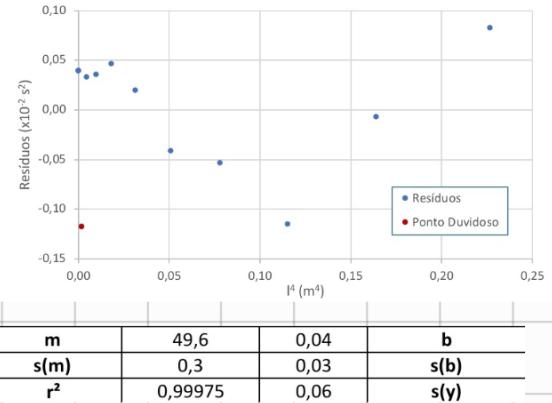
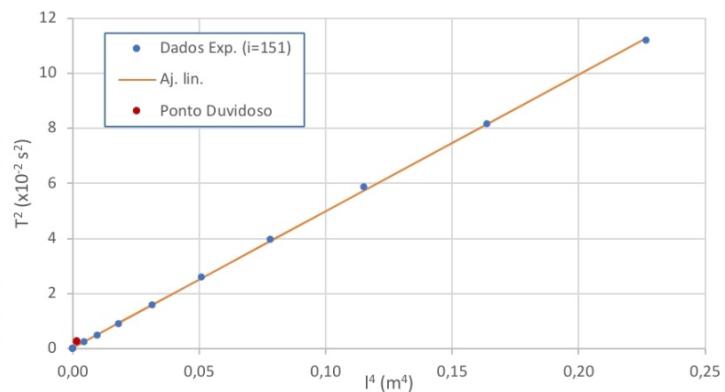
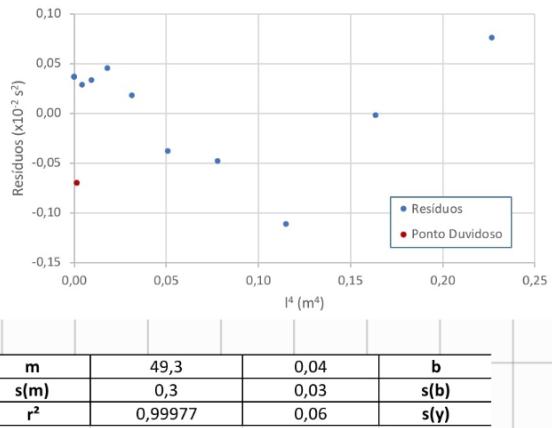
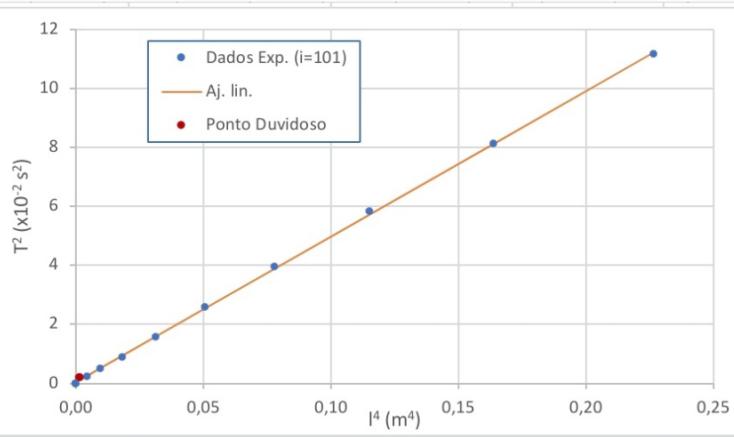
Através deste gráfico verificamos que as retas de ajuste não coincidentes logo  $l^4$  corresponde, quase, ao mesmo  $T^2$  para diferentes números de oscilação. Logo é lógico afirmarmos uma média entre os períodos registados para o mesmo comprimento e diferentes números de oscilação.

No gráfico de resíduos nota-se uma distribuição regular dos pontos à exceção do primeiro ( $1^{\text{a}}$  ensaio). O mesmo ponto referido anteriormente, ou seja, mais uma razão para este não ser considerado na gama de valores a analisar.

### Gráficos para números de oscilações diferentes



m	48,4	0,03	b
s(m)	0,3	0,03	s(b)
r <sup>2</sup>	0,99978	0,06	s(y)



A partir dos parâmetros de ajuste das retas, podemos calcular o módulo de young para os diferentes  $i$ 's.  
 $(E_{ref} = 2,00 \times 10^{11} Nm^{-2})$

$$E = 5,029 \times \frac{\pi^2 P}{D^2 \cdot m}$$

$$\mu(E) = \sqrt{\left(\frac{5,029 \pi^2}{D^2 m} \cdot \mu(p)\right)^2 + \left(-\frac{2 \times 5,029 \pi^2 P}{D^3 m} \cdot \mu(D)\right)^2 + \left(\frac{-5,029 \pi^2 P}{D^2 m^2} \cdot \mu(m)\right)^2}$$

$$\mu(E) (\%) = \frac{\mu(E)}{E} \times 100$$

Obtemos então para cada  $i$  os seguintes valores:

$E_{i=51}(Nm^{-2})$	$2,08E+11$
$u(E_{i=51})(Nm^{-2})$	$2E+09$
$u(E_{i=51}) (\%)$	0,8
$Er(\%)$	4,1

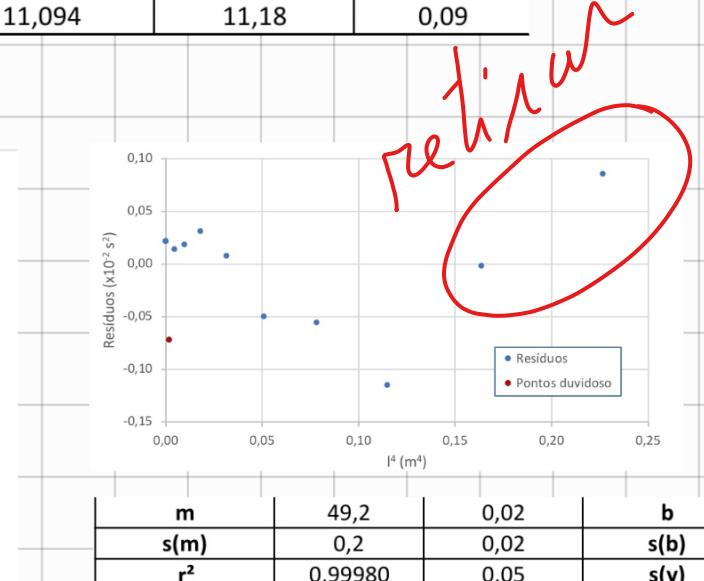
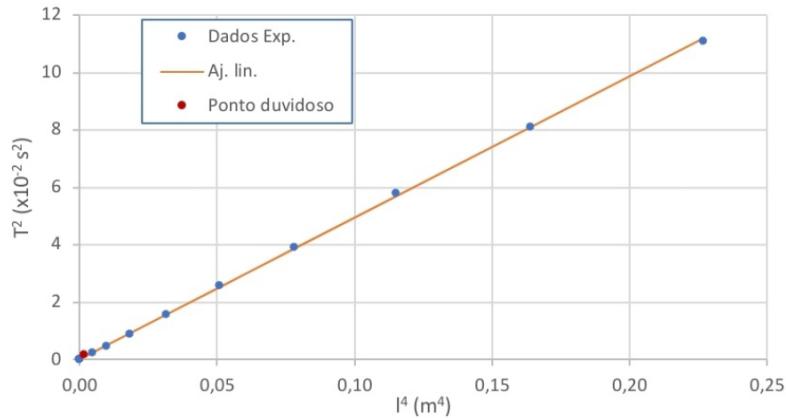
$E_{i=101}(Nm^{-2})$	$2,04E+11$
$u(E_{i=101})(Nm^{-2})$	$2E+09$
$u(E_{i=101}) (\%)$	0,8
$Er(\%)$	2,2

$E_{i=151}(Nm^{-2})$	$2,03E+11$
$u(E_{i=151})(Nm^{-2})$	$2E+09$
$u(E_{i=151}) (\%)$	0,8
$Er(\%)$	1,7

• Verificamos que os dados obtidos foram bons pois temos sempre erros inferiores a 5%. Boa exatidão experimental.

• Foi feito ainda, de modo a minimizar alguns erros, um ajuste linear com os valores médios.

$I^4 \text{ (m}^4\text{)}$	$(T_m)^2 \text{ (s}^2\text{)}$	$u(T_m)^2 \text{ (s}^2\text{)}$	$(T_m)^2 \times 10^{-2} \text{ s}^2$	$(T_m \text{ aj})^2 \times 10^{-2} \text{ s}^2$	Res. $\times 10^{-2} \text{ s}^2$
0,00177	0,00181	0,00001	0,181	0,108	-0,072
0,0046	0,00232	0,00001	0,232	0,25	0,01
0,0097	0,00480	0,00002	0,480	0,50	0,02
0,0182	0,00888	0,00003	0,888	0,92	0,03
0,0315	0,01564	0,00004	1,564	1,57	0,01
0,0509	0,02577	0,00005	2,577	2,53	-0,05
0,0782	0,03924	0,00006	3,924	3,87	-0,06
0,1151	0,05804	0,00007	5,804	5,69	-0,12
0,1639	0,08090	0,00009	8,090	8,088	-0,002
0,2266	0,11094	0,00010	11,094	11,18	0,09



. Calculando o módulo de young da mesma maneira acima referida:

$E_{\text{Ref.}} (\text{Nm}^{-2})$	2,00E+11
$E_{\text{média}} (\text{Nm}^{-2})$	2,05E+11
$u(E_{\text{média}}) (\text{Nm}^{-2})$	2E+09
$u(E_{\text{média}}) (\text{Nm}^{-2})$	0,8
Er(%)	2,4

falling as banana nos  
d inc' ex p /  
capital residues

→ Passando para a montagem ② (pêndulo de torsão):

. Dados do fio e dos sólidos:

→ fio:

$$l(\text{m}) = (1,09 \pm 0,005) \text{ m}$$

$$d(\text{cm}) = (0,089 \pm 0,002) \text{ cm}$$

→ sólidos:

Disco	M(kg)	Coroa cilíndrica				Prisma			
		D(m)	Mcc+d(kg)	M(Kg)	D1(m)	D2(m)	M(kg)	b(m)	h(m)
1	0,8146	0,205	1,3046	0,4901	0,2	0,1795	0,6855	0,0286	0,21
2	0,8145	0,203	1,3045	0,49	0,205	0,181	0,6855	0,0285	0,21
3	0,8144	0,2	1,3045	0,49	0,2	0,179	0,6856	0,0292	0,21
$\langle x \rangle$	0,8145	0,202667	1,3045333	0,490033	0,201667	0,179833	0,685533	0,028767	0,21
$u(\langle x \rangle)$	0,0001	0,003	0,00007	0,00007	0,003	0,001	0,00007	0,0004	0
$u(\text{apare})$	0,0001	0,0005	0,0001	0,0001	0,0005	0,0005	0,0001	0,0005	0,0005

Mota: esta tabela foi retirada de um logbook da aluna Patrícia Soares, pois durante a realização da experiência não tivemos uma balança adequada aos objetos utilizados.

. Com estes dados obtivemos os seguintes valores para I, momento de inércia:

	I <sub>b</sub>	I <sub>cc</sub>	I <sub>maior</sub>	I <sub>menor</sub>
I (kgm <sup>2</sup> )	0,0042	0,00447	4,7E-05	0,00254
u(I)	0,0001	0,00009	2E-06	1,00E-05
% inc	3	2	3	0,5

. Associação dos momentos de inércia para as respetivas etapas da experiência:

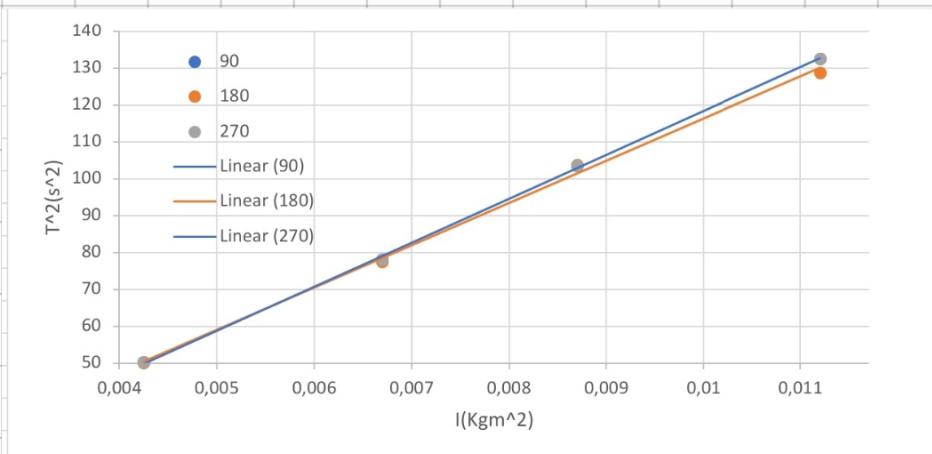
	I (kgm <sup>2</sup> )	u(I)	%inc
a)	0,0042	0,0001	3
b)	6,70E-03	0,0001	2
c)	0,0087	0,0001	2
d)	1,12E-02	0,0001	1

→ Dados recolhidos :

( $\text{Kg m}^2$ )

I sist. Suspenso	$\theta \text{ max } (\cdot)$	$t=10T(s)$	T médio = $1T(s)$
$b) 6,70 \times 10^{-3}$	90	88,43	8,843
	180	88,04	8,804
	270	87,61	8,761
$a) 4,20 \times 10^{-3}$	90	70,91	7,091
	180	70,8	7,08
	270	70,64	7,064
$c) 8,70 \times 10^{-3}$	90	101,76	10,176
	180	101,85	10,185
	270	101,08	10,108
$d) 1,12 \times 10^{-2}$	90	115,17	11,517
	180	113,47	11,347
	270	114,69	11,469

→ Análise de Gamma :



Analisando o gráfico, podemos verificar que os valores do período ao quadrado são praticamente iguais para os diferentes momentos de inércia, isso permite-nos concluir que os valores foram medidas com precisão.

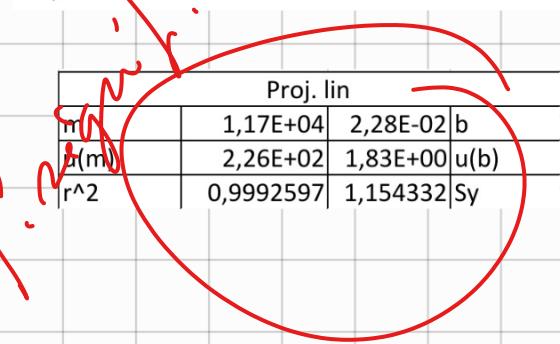
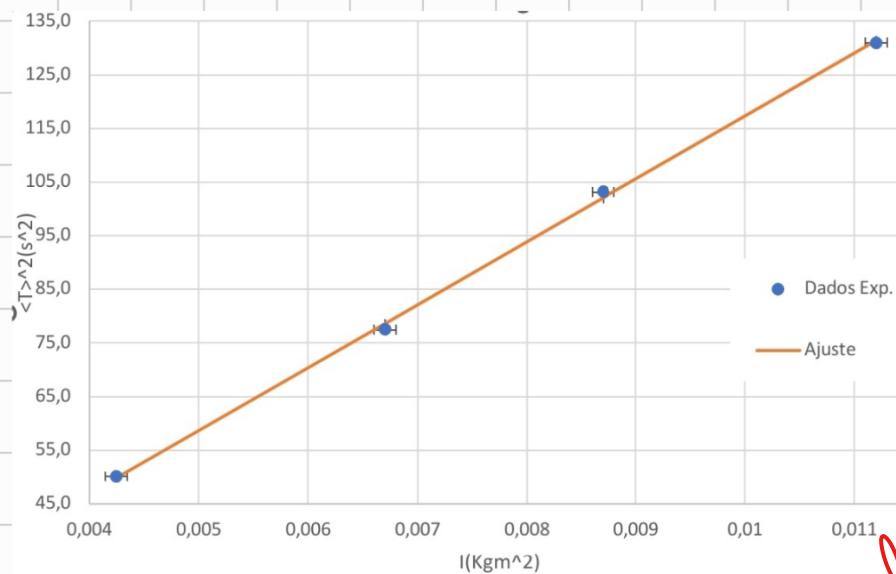
\* Num gráfico  $y(x)$ ,  $y$  é o que tem maior incerteza

# Cálculo do módulo de Rigidez

$\langle T \rangle(s)$	$u(\langle T \rangle)$	$I(Kgm^2)$	$u(I)$	$\langle T \rangle^2$	$u(\langle T \rangle^2)$	$T^{2aj}$	Residuos( $s^2$ )
7,078342	0,01	0,004247	0,0001	50,1	0,1	49,81181539	-0,2911103
8,80273	0,01	0,0067	0,0001	77,5	0,2	78,56919172	1,08112972
10,15639	0,01	0,0087	0,0001	103,2	0,2	102,0158907	-1,1363976
11,44456	0,01	0,0112	0,0001	131,0	0,2	131,3242645	0,34637816

$$m(\langle T^2 \rangle) = 2 m(\langle T \rangle) \cdot \langle T \rangle$$

obtivemos o seguinte gráfico:



$$\text{Coeficiente } R_h = 5,96 \times 10^{10} N\text{ m}^{-2}$$

$$m(R_h) = \frac{128\pi}{D^4 m} \left( m^2(l) + \left( \frac{l}{D} \right)^2 m^2(D) + \left( \frac{l}{m} \right)^2 m^2(m) \right)^{1/2}$$

$$m(R_h) = 3 \times 10^9 N\text{ m}^{-2}$$

• e do aco

• O valor tabelado do coeficiente de rigidez do ferro é de  $6,30 \times 10^{10} N\text{ m}^{-2}$ . Utilizando este valor como referência obtivemos um erro percentual de 5,41%.

## → Conclusão:

. Ao calcular a densidade,  $\rho$ , da barra preveu-se que a barra fosse de aço. Calculando agora o valor do módulo de young podemos confirmar que a barra é de aço.

. Podemos afirmar que a experiência foi bem realizada pois obtivemos um erro de apenas 2,4%.

. Na segunda parte da experiência concluímos que o cabo era de ferro. Obtivemos um erro baixo mas não ideal, pois achamos que se deve ao desgaste e deformação do cabo o qual às vezes causava movimentos verticais.

Usando o método proposto determinou-se módulo de Young da barra com uma % inc... e um % erro, no pressuposto que o material é o aço ou ferro.

% inc ?

$$M_{\text{ferro}} = [80 - 90] \text{ GPa}$$

$$M_{\text{aço}} = [80 - 90] \text{ GPa}$$