

14

## Coeficiente de viscosidade da água - Lei de Poiseuille

Francisca Organista

FCUP

16 de maio de 2023

Não soube  
interpretar  
• explorar  
• concluir  
com os dados exp. obtidos!  
nem depois da conversa extensa sobre  
esse assunto (na aula)

## Resumo

Com este trabalho pretende-se determinar o coeficiente de viscosidade da água a uma temperatura próxima de 22°C pela Lei de Poiseuille, através do escoamento num tubo capilar. Obteve-se o valor do coeficiente de viscosidade mais próximo do valor de referência com valor de  $\eta = (1.11 \times 10^{-3} \pm 6\%) \text{ Pa} \cdot \text{s}$ , e erro percentual de 10.7%.

## 1 Introdução

## 1.1 Viscosidade

Num fluido real, por oposição a um fluido ideal, devido às interações de parte do fluido com moléculas vizinhas resulta uma propriedade chamada de viscosidade que pode ser entendida como a resistência oferecida por um fluido ao seu escoamento. Estabelece-se então uma grandeza física característica de cada fluido, o coeficiente de viscosidade  $\eta$ . Um fluido viscoso é um fluido onde há presença de forças tangenciais, atrito.

## 1.2 Lei de Poiseuille

Conhecidos o caudal,  $Q$  e a pressão,  $P$  de determinado fluido num tubo cilíndrico de comprimento  $L$  e raio  $R$ , é possível enunciar, recorrendo a algumas aproximações, uma lei que relaciona a pressão com o caudal e o coeficiente de viscosidade,  $\eta$ , a **Lei de Poiseuille**.

$$P = \eta \frac{8L}{\pi R^4} Q$$

Para chegar a este resultado considera-se o tubo capilar infinito ou com um diâmetro **muito menor** que o seu comprimento. É também desprezada a gravidade e considerado o sistema num regime estacionário.

Nota: a dedução desta expressão pode ser consultada no protocolo do trabalho T1- "Coeficiente de viscosidade da água - Lei de Poiseuille". [1]

## 2 Execução Experimental

## 2.1 Montagem Experimental

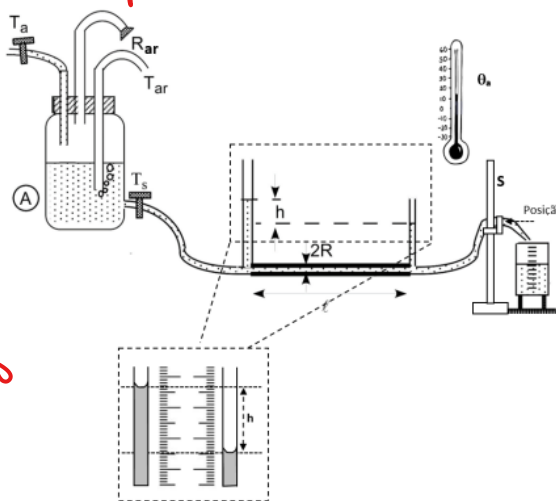


Figura 1: Esquema da Montagem Experimental (retirado de [1])

## 2.2 Procedimento

Com o depósito *A* cheio (com água acima do traço de referência) destapou-se a rolha,  $R_{ar}$ , e abriu-se a torneira,  $T_a$ . Fixou-se a torneira a uma altura específica para ser mantida uma pressão constante dentro da entrada do tubo. Aguardou-se que se estabelecesse um regime estacionário de fluxo no tubo (o que é visível pela presença de bolhas de ar no depósito). Para diferentes valores de  $h$  registou-se o tempo total,  $t$ , para se perfazer um volume de 5 ml, 10 ml, 15 ml, 20 ml e 25 ml, sendo  $h$  a diferença de alturas da água entre os tubos 1 e 2.

## 3 Análise dos Resultados Experimentais

A seguir apresentam-se os valores da densidade da água, da aceleração da gravidade, do raio e do comprimento do tubo capilar, respetivamente:

$$\rho = 1000 \text{ kg/m}^3 \quad (\text{valor tabelado})$$

$$g = 9.807 \text{ m/s}^2 \quad (\text{valor tabelado})$$

$$R = (396 \pm 5) \mu\text{m}$$

$$L = (432.65 \pm 0.005) \text{ cm}$$

Utilizaram-se as seguintes expressões para o cálculo do caudal,  $Q$  e da pressão,  $P$ :

$$P = \rho gh$$

$$Q = V/t$$

Considerou-se como valor de referência para o coeficiente de viscosidade da água a 22°C o valor de 1.002 Pa·s. Procedeu-se à média dos valores retirados para cada ensaio. Assim, para todos gráficos que se seguem considera-se  $\bar{Q}$  e  $\bar{P}$ .

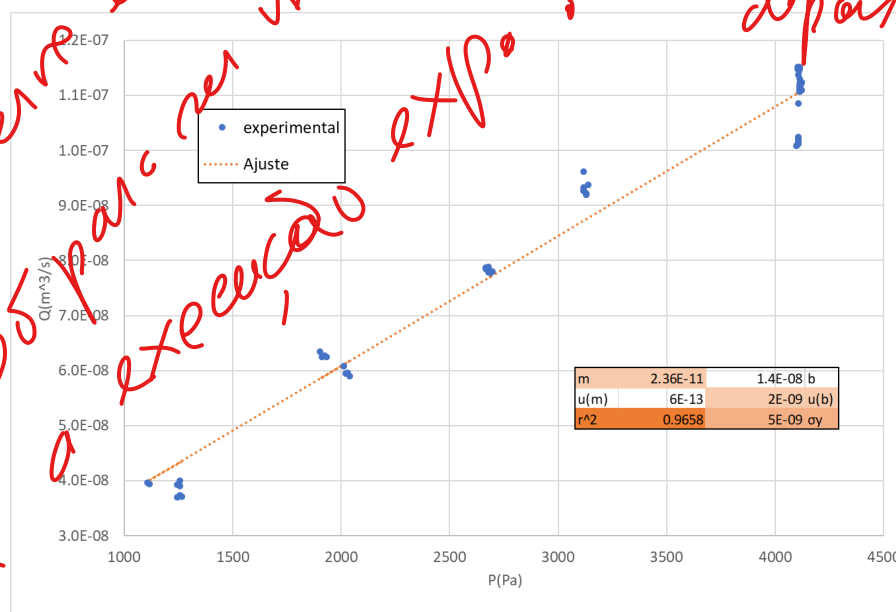
Optou-se por fazer a análise segundo a equação derivada a partir de (1), uma vez que a incerteza associada a  $Q$  é superior à incerteza associada a  $P$ :

$$Q = \frac{\pi R^4}{8L\eta} P \quad (2)$$

Desta forma, através de um gráfico  $Q(P)$  obtém-se uma reta de ajuste com declive,  $m$ :

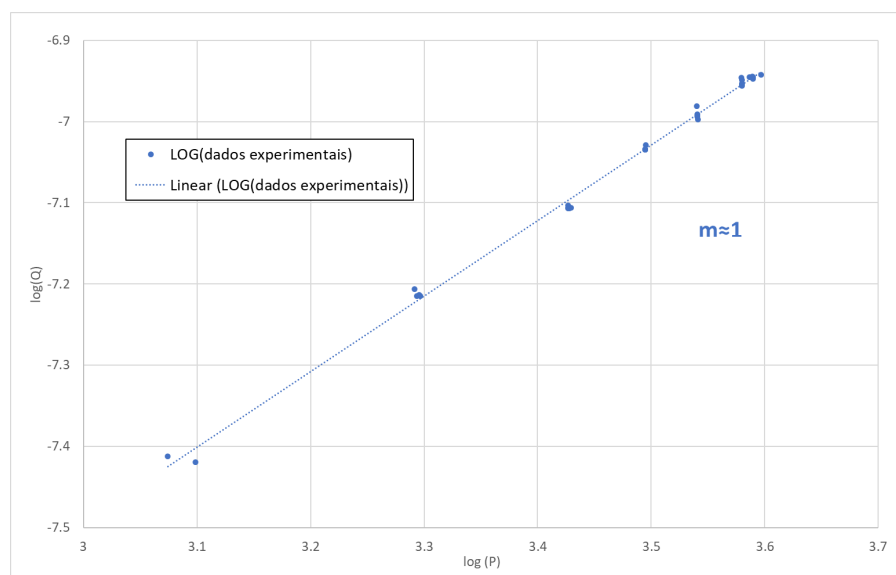
$$m = \frac{\pi R^4}{8L\eta} \Leftrightarrow \eta = \frac{\pi R^4}{8Lm} \quad (3)$$

O cálculo de  $\eta$  será feito a partir de (3). Apresentam-se os seguintes valores para todas as posições e considerando todos os volumes:



**Figura 2:**  $\bar{Q}(\bar{P})$  para todas as posições com reta de ajuste associada

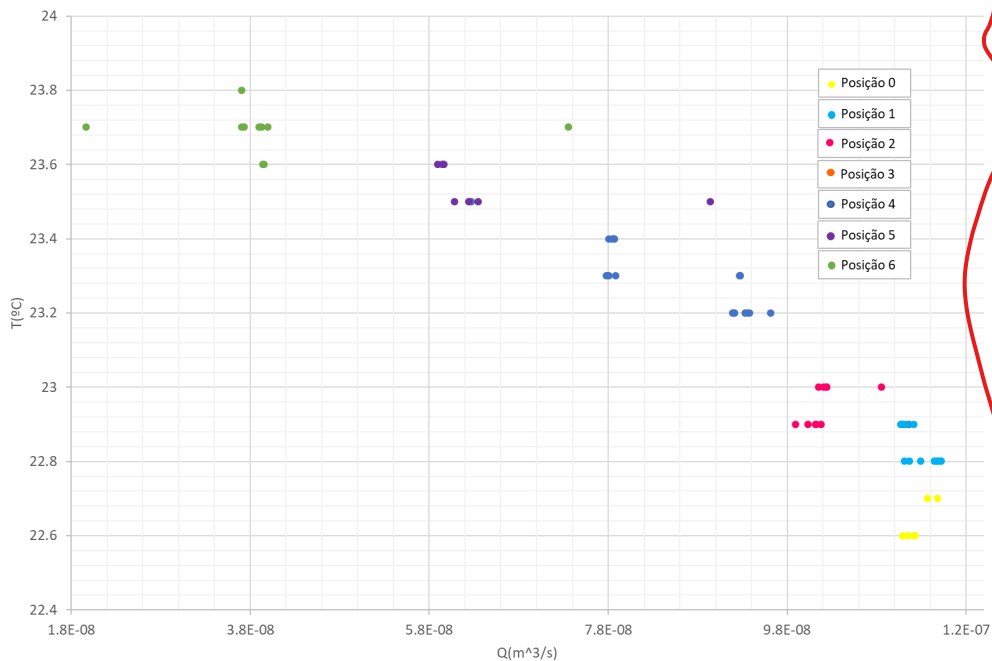
Com vista a confirmar a linearidade dos dados aplicou-se o logaritmo a ambas as quantidades  $P$  e  $Q$ , elaborando-se o seguinte gráfico:



**Figura 3:**  $(\log(\bar{P}), \log(\bar{Q}))$  com linha de tendência linear

Pelo gráfico confirma-se a tendência linear dos dados, com o declive da linha de tendência muito próximo de 1.

Ao longo da experiência foram-se registando os valores da temperatura. Este registo é concordante com a sequência dos ensaios. O gráfico obtido é o seguinte:



**Figura 4:** Registo da temperatura para as diferentes posições

(relação posição, sequência das exp??)

É possível verificar que valores de temperatura próximos correspondem à mesma posição, o que faz sentido dado o modo como foi executada a experiência, e que a temperatura foi diminuindo ao longo do tempo de execução (notar que o registo foi feito da posição 1 para a posição 6). A variação da temperatura é dada por:

$$\Delta T = T_{\max} - T_{\min} = 23.8 - 22.6 = 1.2^{\circ}\text{C} \quad (4)$$

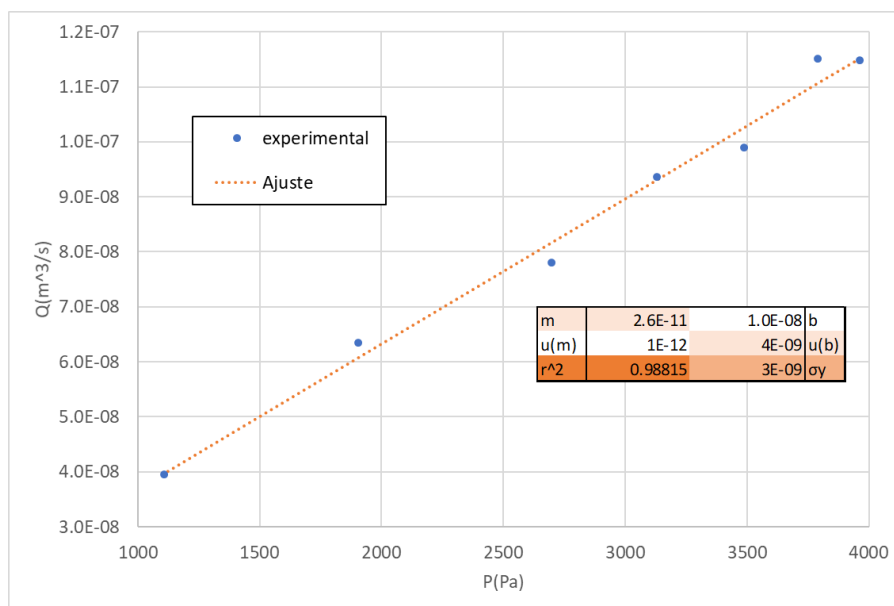
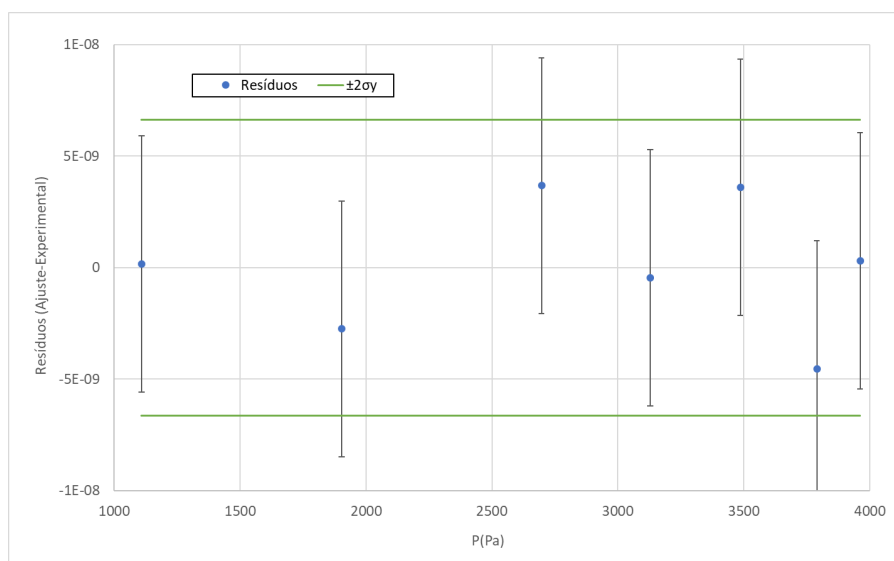
Dado este valor ser baixo não se considera relevante a análise da influência da variação da temperatura no valor do coeficiente de viscosidade da água pelo que esta pode ser assumida como constante ao longo da atividade (estabeleceu-se um equilíbrio térmico entre a água dentro do depósito e o ambiente). Assim considerou-se como valor de referência para o coeficiente de viscosidade da água a  $23^{\circ}\text{C}$  o valor de  $1.002 \text{ Pa} \cdot \text{s}$ .

Um gráfico da dependência de  $\eta$  com a temperatura pode ser encontrado em anexo.

Pode agora estender-se a análise para cada volume.

mas é!  
Ver  $\eta(\theta)$  nesta  
grupos!

ERRADO!  
Eu conversei exaustivamente  
com o vosso grupo sobre  
isto!

3.1 Determinação de  $\eta$  para  $V = 5$  mlFigura 5:  $\bar{Q}(\bar{P})$  para  $V = 5$  mlFigura 6: Resíduos para  $V = 5$  ml

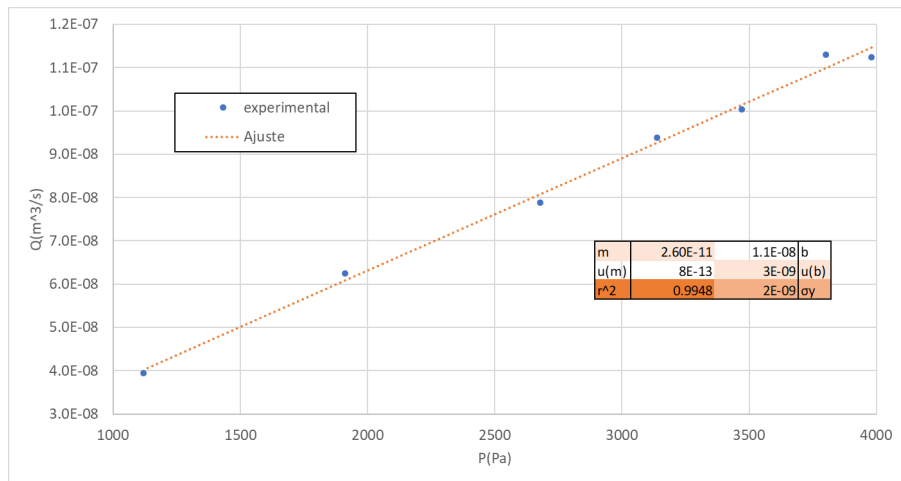
$$\eta_{\text{exp}} = 1.17 \times 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$$

$$\mu(\eta) = 7 \times 10^{-5} \text{ Pa} \cdot \text{s}$$

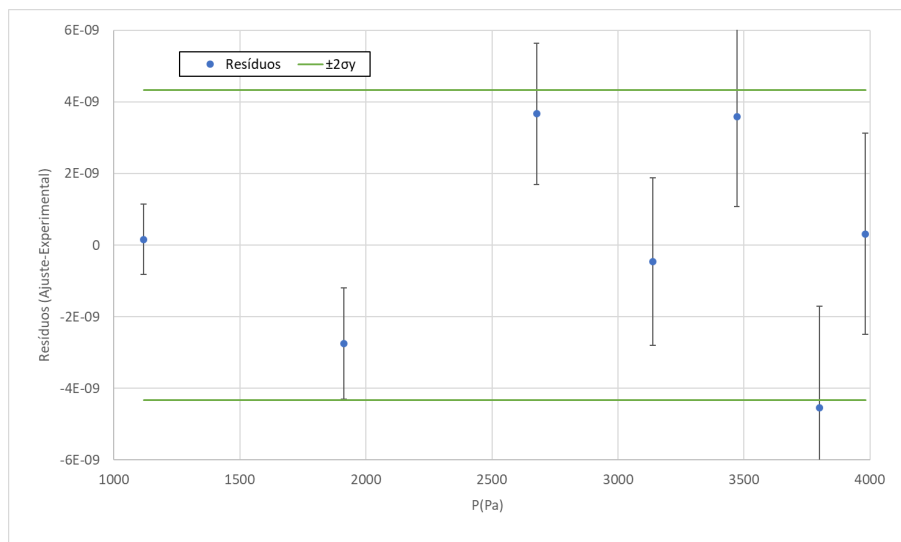
$$\mu_{\%}(\eta) = 6\%$$

$$Er_{\%}(\eta) = 16.3\%$$

### 3.2 Determinação de $\eta$ para $V = 10$ ml



**Figura 7:**  $\bar{Q}(\bar{P})$  para  $V = 10$  ml



**Figura 8:** Resíduos para  $V = 10$  ml

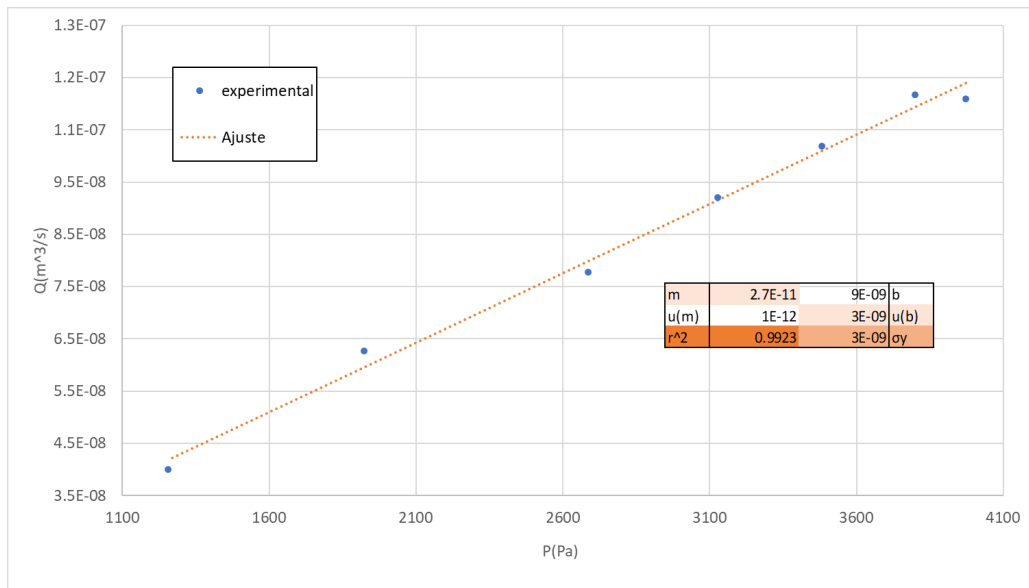
$$\eta_{\text{exp}} = 1.18 \times 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$$

$$\mu(\eta) = 7 \times 10^{-5} \text{ Pa} \cdot \text{s}$$

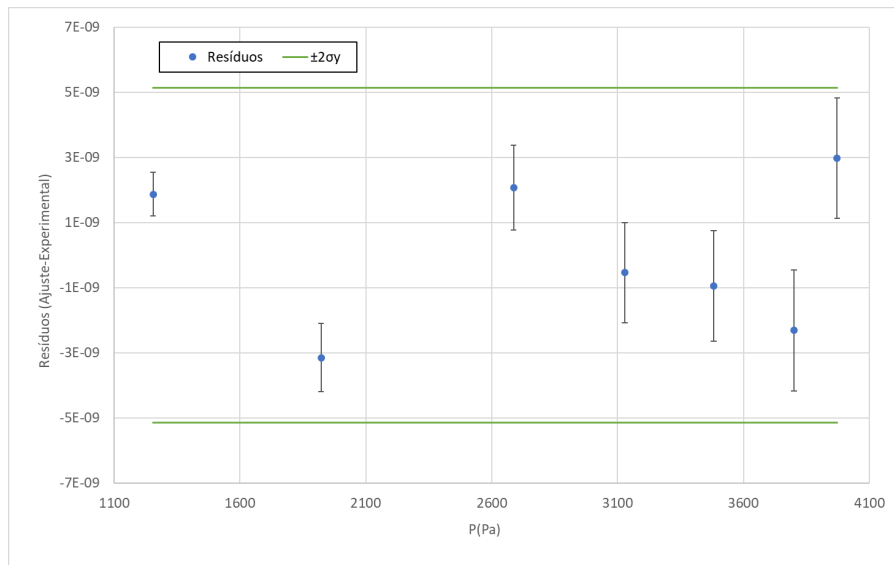
$$\mu_{\%}(\eta) = 6\%$$

$$Er_{\%}(\eta) = 18.2\%$$

### 3.3 Determinação de $\eta$ para $V = 15$ ml



**Figura 9:**  $\bar{Q}(\bar{P})$  para  $V = 15$  ml



**Figura 10:** Resíduos para  $V = 15$  ml

$$\eta_{\text{exp}} = 1.16 \times 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$$

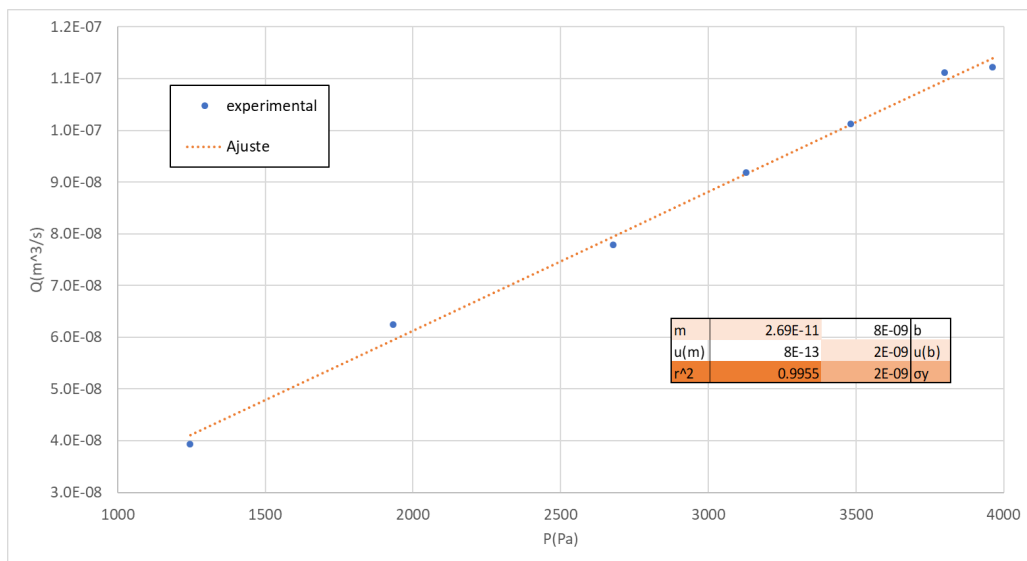
$$\mu(\eta) = 7 \times 10^{-5} \text{ Pa} \cdot \text{s}$$

$$\mu_{\%}(\eta) = 6\%$$

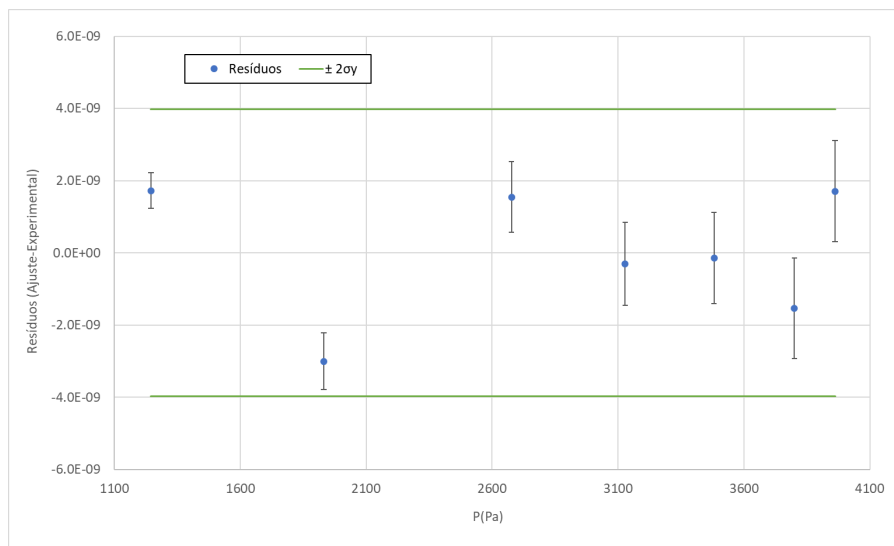
$$Er_{\%}(\eta) = 15.9\%$$



### 3.4 Determinação de $\eta$ para $V = 20$ ml



**Figura 11:**  $\bar{Q}(\bar{P})$  para  $V = 20$  ml



**Figura 12:** Resíduos para  $V = 20$  ml

$$\eta_{\text{exp}} = 1.15 \times 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$$

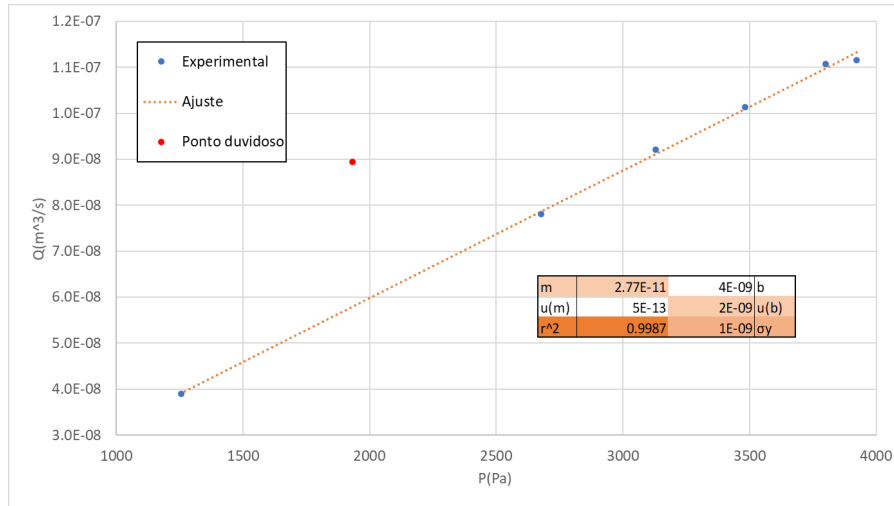
$$\mu(\eta) = 7 \times 10^{-5} \text{ Pa} \cdot \text{s}$$

$$\mu_{\%}(\eta) = 6\%$$

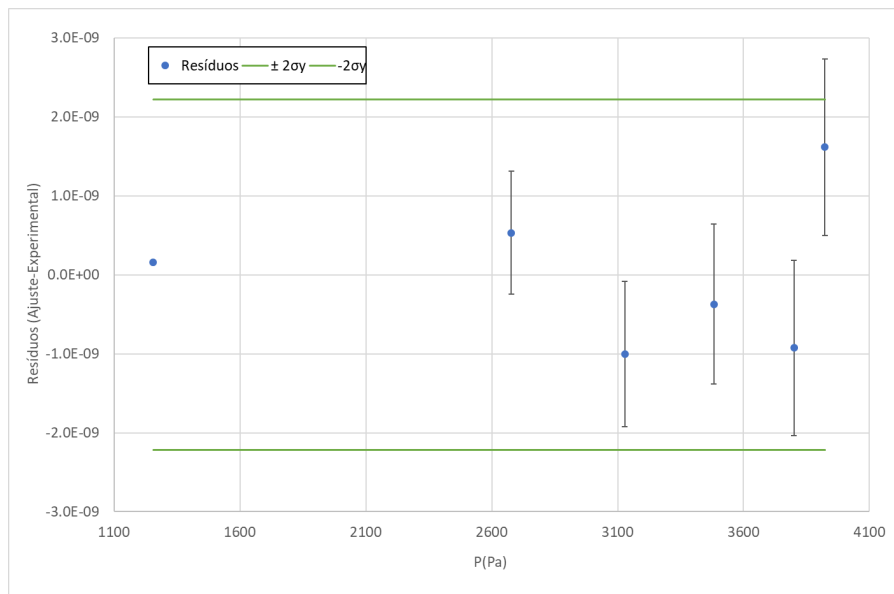
$$Er_{\%}(\eta) = 14.4\%$$

### 3.5 Determinação de $\eta$ para $V = 25$ ml

Fez-se um primeiro ajuste que revelou um ponto suspeito, procedeu-se à retirada desse valor e o gráfico resultante é o seguinte: O primeiro ajuste poderá ser consultado em anexo.



**Figura 13:**  $\bar{Q}(\bar{P})$  para  $V = 25$  ml (tentativa 2)



**Figura 14:** Resíduos para  $V = 25$  ml (tentativa 2)

$$\eta_{\text{exp}} = 1.11 \times 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$$

$$\mu(\eta) = 6 \times 10^{-5} \text{ Pa} \cdot \text{s}$$

$$\mu_{\%}(\eta) = 5\%$$

$$Er_{\%}(\eta) = 10.7\%$$

Para cada um dos gráficos de resíduos os pontos encontram-se contidos no intervalo  $[-2\sigma_y, 2\sigma_y]$  e não se observou nenhuma tendência para nenhum volume. Os valores de  $r^2$  obtidos também foram muito próximos de 1. Consideram-se todos os ajustes bons ajustes.

### 3.6 Determinação de $\eta$ através da reta de ajuste para todos os dados

Como forma de comparar os resultados obtidos ao valor tabelado recorreu-se à reta de ajuste obtida a partir do gráfico da **Figura (2)** para calcular o coeficiente de viscosidade.

$$y = 2.36 \times 10^{-11}x + 1.4 \times 10^{-8}$$

$$\eta_{\text{exp}} = 1.31 \times 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$$

$$\mu(\eta) = 7 \times 10^{-5} \text{ Pa} \cdot \text{s}$$

$$\mu_{\%}(\eta) = 6\%$$

$$Er_{\%}(\eta) = 30.3\%$$

Apesar da incerteza experimental e relativa associada a  $\eta$  ser coerente com a calculada para cada volume constata-se que o erro obtido por este método é substancialmente superior ao erro obtido para qualquer um dos ensaios anteriores pelo que se pode afirmar que o melhor processo é o cálculo distinto do coeficiente para cada volume.

### 3.7 Propagação de Incertezas

A seguir apresentam-se as expressões utilizadas no cálculo das incertezas associadas a cada variável:

$$\mu(h) = \sqrt{\mu(h_{\min})^2 + \mu(h_{\max})^2}$$

$$\mu(P) = \rho g \mu(h) = 1$$

$$\mu(\eta) = \sqrt{\left(\frac{4\pi R^3 m \mu(R)}{8L}\right)^2 + \left(\frac{\pi R^4 \mu(m)}{8L}\right)^2 + \left(\frac{4\pi R^4 m \mu(L)}{8L^2}\right)^2}$$

## 4 Resultados Finais

| Volume            | $\eta$  | $\mu(\eta)$ | $\mu_{\%}(\eta)$ | $Er_{\%}$ |
|-------------------|---------|-------------|------------------|-----------|
| ( $\pm 0.25$ ) ml | mPa · s | Pa · s      | %                | %         |
| Toda a gama       | 1.31    | 0.07        | 6                | 30.3      |
| 5                 | 1.17    | 0.07        | 6                | 16.3      |
| 10                | 1.18    | 0.07        | 6                | 18.2      |
| 15                | 1.16    | 0.07        | 6                | 15.9      |
| 20                | 1.15    | 0.07        | 6                | 14.4      |
| 25                | 1.11    | 0.06        | 5                | 10.7      |

## 5 Conclusão

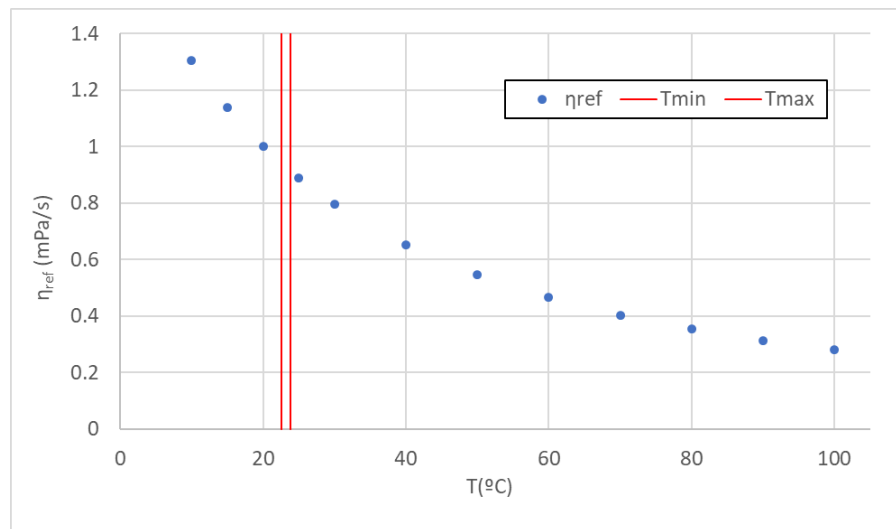
Foi possível determinar o coeficiente de viscosidade da água a partir do escoamento num tubo capilar com recurso à Lei de Poiseuille. Conclui-se que o método mais exato na sua determinação é o da análise discriminada para cada volume a partir da qual se obteve para o melhor valor:  $\eta = (1.11 \times 10^{-3} \pm 5\%) \text{ Pa} \cdot \text{s}$  com um erro percentual de 10.7%. Tendo em conta o método experimental utilizado, nomeadamente a medição dos volumes que é feita sem recurso a nenhum aparelho, este valor é bastante satisfatório.

## Referências

- [1] Protocolo do Trabalho T1: "Coeficiente de viscosidade da água - Lei de Poiseuille"
- [2] [https://www.materiais.gelsonluz.com/2018/12/viscosidade-da-agua-tabela.html?utm\\_content=cmp-true](https://www.materiais.gelsonluz.com/2018/12/viscosidade-da-agua-tabela.html?utm_content=cmp-true), Acedido a 02/06/2023

## Anexo

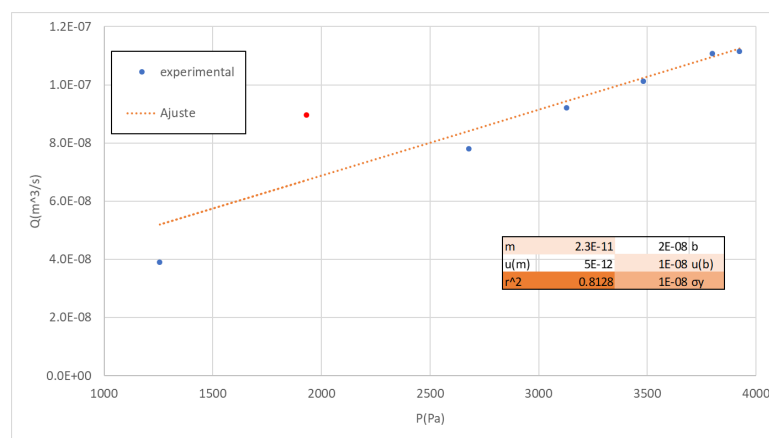
### Gráfico com valores de $\eta$ de referência em função da temperatura



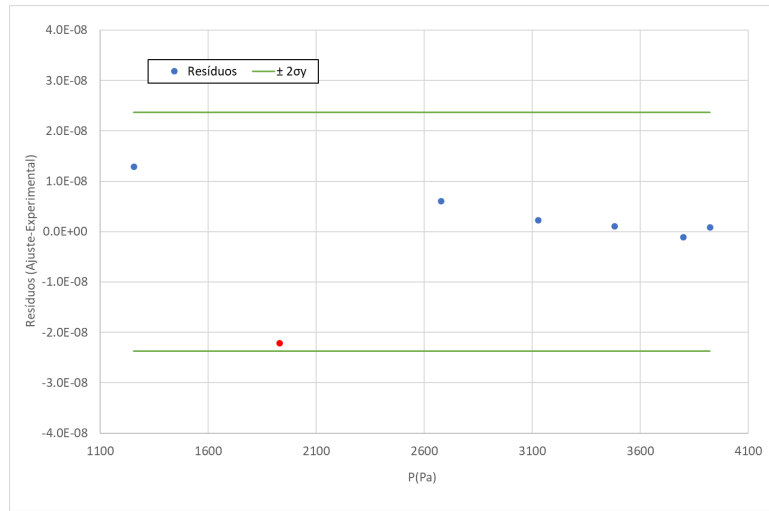
**Figura 15:**  $\eta_{\text{ref}}(T)$  com linhas de referência das temperaturas mínima e máxima [2]

Como se verifica pelo gráfico a variação do coeficiente de viscosidade no intervalo de temperaturas experimental não é significativa, esta variação tem mais importância para  $\Delta T > 5$ .

### Tentativa inicial para $V = 25\text{ml}$



**Figura 16:**  $\bar{Q}(\bar{P})$  para  $V = 25\text{ ml}$  (tentativa 1)



**Figura 17:** Resíduos para  $V = 25$  ml (tentativa 1)

É notória a existência de um ponto experimental que destoa da maioria, que se encontra assinalado a vermelho. Apesar desse ponto se encontrar, como todos os outros, incluído no intervalo  $[-2\sigma_y, 2\sigma_y]$  pode observar-se uma tendência linear dos resíduos e que o ajuste obtido não é um bom ajuste ( $r^2 = 0.8128$ ).

Procedeu-se ao cálculo de  $\eta$  e do respetivo erro para obter uma comparação com a segunda tentativa apresentada acima. Obtiveram-se os seguintes resultados:

$$\eta_{exp} = 1.4 \times 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$$

$$\mu(\eta) = 3 \times 10^{-4} \text{ Pa} \cdot \text{s}$$

$$\mu_{\%}(\eta) = 23\%$$

$$Er_{\%}(\eta) = 35.4\%$$

O erro e a incerteza associada ao coeficiente de viscosidade aumentam consideravelmente relativamente ao obtido através do ajuste feito sem o ponto duvidoso. Assim, conclui-se que retirar o ponto foi o mais sensato.