

Apontamentos de Laboratório de Física II

Departamento de Física e Astronomia

2011

1 ESTUDO DO CIRCUITO RLC. OSCILAÇÕES

1.1 Objectivo

Estudo do circuito oscilante RLC série no regime transitório (oscilatório-amortecido, crítico, sobre-amortecido) e no regime permanente (sinusoidal).

1.2 Introdução

Considere-se um circuito constituído por uma resistência R , uma capacidade C e uma indutância L , ligados em série a um gerador de tensão $V_{in}(t)$.

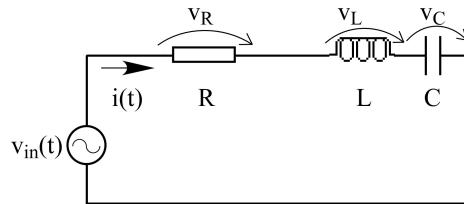


Figura 1-1. Circuito RLC.

A tensão $v_R(t)$ nos terminais da **resistência** R ($[R]=[Ω]=[ohm]$) é:

$$v_R(t) = Ri(t) \quad (1)$$

simplesmente proporcional a $i(t)$. Na resistência ocorre dissipação, convertendo-se potência eléctrica em potência calorífica $p(t)$ ($[p]=[W]=[watt]$) de acordo com a lei de Joule:

$$p(t) = v(t)i(t) = Ri^2(t) \quad (2)$$

A tensão $v_C(t)$ nos terminais da **capacidade** C ($[C]=[F]=[faraday]$) é:

$$v_C(t) = \frac{q(t)}{C} = \frac{1}{C} \int i(t) dt \quad (3)$$

sendo $q(t)$ a carga instantânea da capacidade. Numa capacidade pura não há dissipação, podendo acumular-se energia no campo eléctrico existente entre as armaduras. Essa energia, no instante t , pode ser escrita como

$$W_C(t) = \frac{1}{2} Cv^2(t) = \frac{1}{2} \frac{q^2(t)}{C} = \frac{1}{2} q(t)v(t) = \frac{1}{2} \left[\int i(t) dt \right] v(t) \quad (4)$$

A energia acumulada durante a carga da capacidade é recuperável na sua descarga. (Na realidade, a realização prática da capacidade faz-se com um **condensador**, que tem como circuito equivalente uma capacidade C associada a uma resistência R_C em paralelo, geralmente muito elevada, e que se despreza frequentemente).

A tensão $v_L(t)$ nos terminais da **indutância** L ($[L]=[H]=[henry]$) é:

$$v_L(t) = L \frac{di(t)}{dt} \quad (5)$$

Numa indutância pura não há dissipação, acumulando-se energia no campo magnético existente em seu redor. No instante t , essa energia pode ser escrita sob a forma:

$$W_L(t) = \frac{1}{2} L i^2(t) = \frac{1}{2} \left[\int v_L(t) dt \right] i(t) \quad (6)$$

A energia W_L acumulada é recuperável anulando a corrente na indutância.

(A realização prática da indutância recorre a uma bobina, que tem como circuito equivalente, no caso mais simples de baixas frequências de funcionamento, uma indutância L associada em série a uma resistência R_L . Assim, há sempre dissipação numa bobina, sendo a potência dissipada $p_L(t) = 1/2 \cdot R_L i^2(t)$).

1.3 Equação diferencial do circuito RLC

Considerando o circuito representado, a tensão do gerador será naturalmente igual à soma das outras tensões em série (lei das malhas de Kirchhoff):

$$v_{in}(t) = [v_R(t) + v_L(t) + v_C(t)] = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + \frac{q(t)}{C} \quad (7)$$

(em que R representa a soma da resistência da bobina R_L com uma eventual resistência externa em série com a bobina e o condensador).

Esta equação pode escrever-se em termos de $q(t)$ e suas derivadas (pois $i = \frac{dq}{dt}$, $\frac{di}{dt} = \frac{d^2q}{dt^2}$):

$$\boxed{Lq'' + Rq' + C^{-1}q = v_{in}(t)} \quad (8)$$

Trata-se de uma equação diferencial linear de 2ª ordem, com segundo membro função de t .

Por derivação em ordem ao tempo, poder-se-ia também escrever uma equação diferencial na corrente:

$$\boxed{Li'' + R\dot{i}' + C^{-1}i = \frac{dv_{in}(t)}{dt}} \quad (9)$$

Vai-se considerar duas situações diferentes para $dv_{in}(t)$, correspondentes aos regimes transitório e permanente.

1.4 Regime transitório

Seja $dv_{in}(t)$ uma tensão em degrau

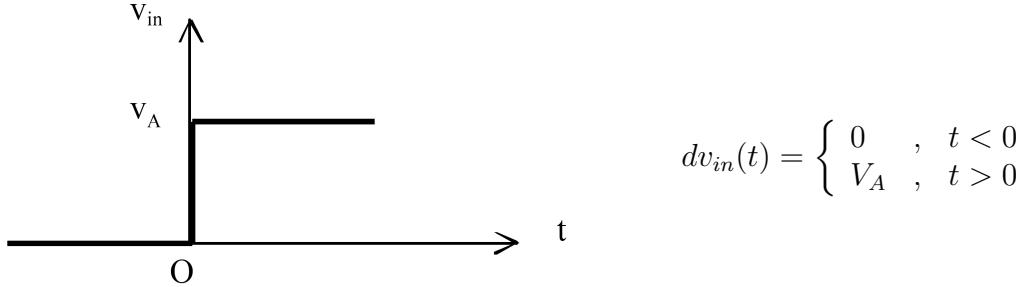


Figura 1-2. Tensão em degrau.

Considerando a equação diferencial da corrente:

$$Li'' + Ri' + C^{-1}i = 0 \quad , \quad t \neq 0 \quad (10)$$

pode escrever-se sob a forma

$$i'' + 2\beta i' + \omega_0^2 i = 0 \quad (11)$$

sendo

$$\beta = \frac{R}{2L} : \text{constante de dissipação} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} : \text{frequência natural do oscilador LC}$$

Ensaiando uma solução da forma $i(t) = I \exp[xt]$, onde I é uma constante, resulta imediatamente uma condição para x , designada por equação característica da equação diferencial:

$$x^2 + 2\beta x + \omega_0^2 = 0 \quad (12)$$

Considerando $\omega_0 > \beta$ (o que corresponde a dissipação relativamente fraca, ou seja e como veremos, ao regime oscilatório amortecido), as raízes da equação característica são:

$$x_{1,2} = -\beta \pm j\omega \quad (j = \sqrt{-1}) \quad (13)$$

com $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$

A solução geral da equação diferencial é uma combinação linear das duas soluções possíveis:

$$i(t) = C_1 e^{x_1 t} + C_2 e^{x_2 t} \quad (14)$$

que se pode reescrever como:

$$i(t) = I e^{-\beta t} \sin(\omega t + \phi) \quad (15)$$

As constantes I e ϕ são determinadas a partir das condições iniciais:

$$\begin{aligned} v_{in}(0) = V_A &= L i'(0) + R i(0) + C^{-1} q(0) = L i'(0) = \\ &= L I [-\beta e^{-\beta \cdot 0} \sin(\omega \cdot 0) + \omega e^{-\beta \cdot 0} \cos(\omega \cdot 0)] = \\ &= L I \omega \end{aligned} \quad (16)$$

Donde

$$I = \frac{V_A}{\omega L} \quad (17)$$

Como $i(t)$ é contínua para $t = 0$ (sendo $i(t) = 0$ para $t < 0$), tem-se $\phi = 0$. Assim, finalmente para $t > 0$:

$$i(t) = \frac{V_A}{\omega L} e^{-\beta t} \sin(\omega t) \quad (18)$$

$$\text{com } \beta = \frac{R}{2L} \text{ e } \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

Uma vez determinada $i(t)$, as tensões (amplitude, fase) em cada elemento do circuito podem ser calculadas facilmente: $v_R = Ri$, $v_C = 1/C \int idt$, $v_L = Ldi/dt$.

A figura seguinte mostra a oscilação amortecida de corrente para o oscilador LC ($L = 35$ mH, $C = 100$ nF), considerando vários valores de R (12, 50, 100, 200, 500 Ω).

A presença da resistência R diminui a frequência ω de oscilação relativamente a ω_0 , e introduz um amortecimento na oscilação traduzido pela exponencial de expoente negativo.

Quando R aumenta bastante, ω tende para zero, $i(t)$ deixa de ser oscilatório e o circuito funciona em **regime sobre-amortecido** ($\omega_0 < \beta$). Neste regime a corrente cresce, atinge um máximo e decresce para zero sem inverter o sentido.

A situação de transição do regime oscilatório-amortecido para sobre-amortecido ocorre para a situação de resistência crítica R_C tal que $\omega = 0$:

$$R_C = 2\sqrt{\frac{L}{C}} \quad (19)$$

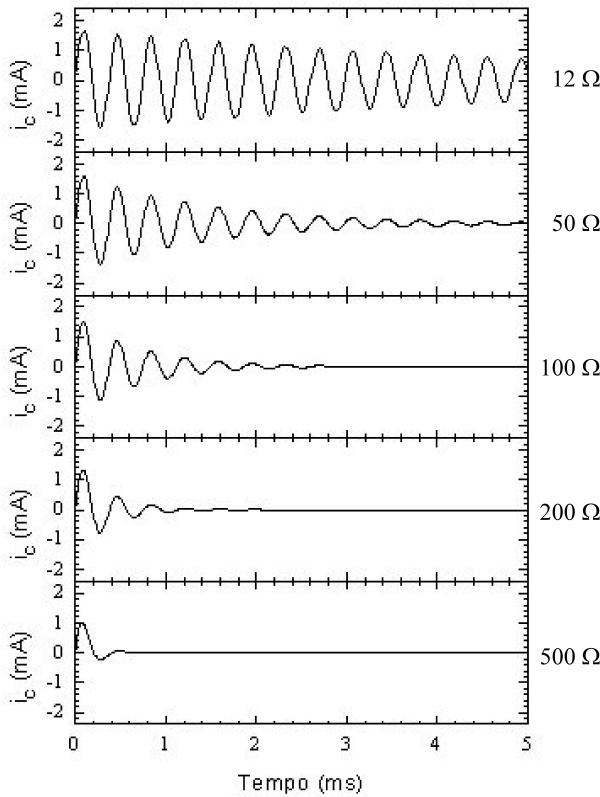


Figura 1-3. Oscilações amortecidas para $R = 12, 50, 100, 200, 500\ \Omega$ considerando $L = 35\text{ mH}$ e $C = 100\text{ nF}$.

1.5 Regime permanente

Seja a tensão $v(t)$, aplicada ao circuito RLC, sinusoidal. Depois de terminado o regime transitório (correspondente à ligação da fonte $v(t)$), a corrente $i(t)$ oscila à mesma frequência de $v(t)$, com amplitude e fase que dependem de $v(t)$ e das características do circuito. Seja o circuito representado na figura, com $v(t) = V_0 \cos \omega t$

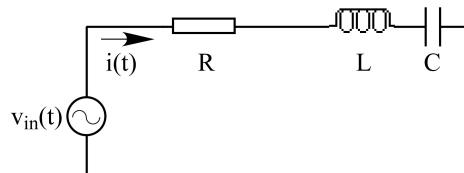


Figura 1-4. Circuito RLC.

A análise do comportamento do circuito em regime sinusoidal recorre, com vantagem, à representação fasorial (complexa) das grandezas v, i (ver notas do trabalho "Ponte de Anderson").

A impedância complexa do circuito RLC é dada por:

$$Z = Z_R + Z_L + Z_C = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) = |Z| e^{j\phi_z} \quad (20)$$

Sendo:

$$|Z| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \quad \phi_Z = \arctan\left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}\right) \quad (21)$$

A tensão $v(t)$ é representada pelo fasor $V = V_0$, e a corrente $i(t)$ pelo fasor I :

$$I = \frac{V}{Z} = \frac{V_0}{|Z| e^{j\phi_z}} \quad (22)$$

A tensão nos terminais da capacidade C é dada pelo fasor V_C :

$$V_C = I Z_C = \left(\frac{V_0}{|Z|} e^{-j\phi_z}\right) \cdot \left(-\frac{j}{\omega C}\right) = V_{C0} e^{j\phi_C} \quad (23)$$

a que corresponde a tensão $v_C(t)$ dada por:

$$v_C(t) = V_{C0} \cos(\omega t + \phi_C) \quad (24)$$

com a amplitude V_{C0} e a fase ϕ_C dependentes da frequência segundo as expressões seguintes:

$$V_{C0} = \frac{V_0}{\sqrt{(\omega RC)^2 + (\omega^2 LC - 1)^2}} \quad \phi_C = -\arctan\left(\frac{\omega^2 LC - 1}{\omega RC}\right) - \frac{\pi}{2} \quad (25)$$

Quando $R = 0$, a amplitude é infinita para $\omega = 1/\sqrt{LC}$, que é a frequência angular de ressonância. Para $R \neq 0$, a amplitude é máxima para a frequência de ressonância

$$\omega = \frac{\sqrt{4LC - 2R^2C^2}}{2LC} \quad (26)$$

valendo

$$(V_{C0})_{max} = \frac{V_0}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (27)$$

A fase ϕ_C varia em torno da ressonância:

$$\begin{aligned} \phi_C(\omega = 0) &= 0 \\ \phi_C(\omega = \omega_{res}) &= -\pi/2 \\ \phi_C(\omega \rightarrow \infty) &= -\pi \end{aligned} \quad (28)$$

À medida que R aumenta, a ressonância torna-se progressivamente menos visível.

As figuras seguintes mostram a curva de resposta de amplitude $V_{C0}(\omega)$ e a curva de resposta de fase $\phi_C(\omega)$ para vários valores de R , considerando $L = 35$ mH e $C = 100$ nF.

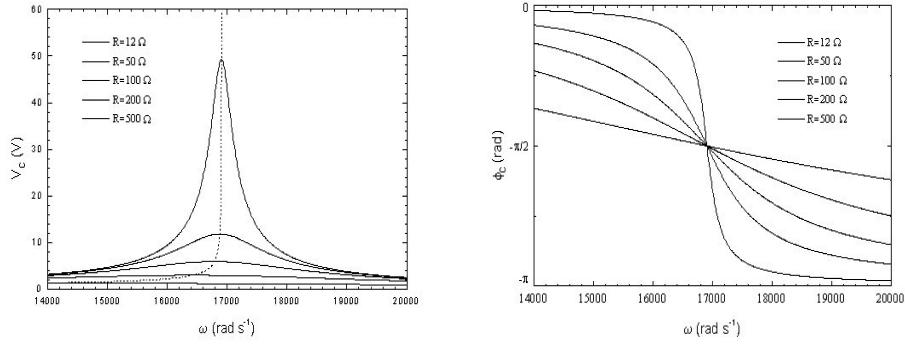


Figura 1-5. Resposta em amplitude, e em fase, para vários valores de R ($L = 35\text{ mH}$ e $C = 100\text{ nF}$).

Considerando $R = 12\ \Omega$, as figuras seguintes indicam, para vários valores de ω em torno da ressonância (a - e), a resposta sinusoidal $v_C(t)$ e a tensão do gerador $v(t)$, notando-se as variações de amplitude (atenção às escalas) e fase relativas (atraso entre V e V_C).

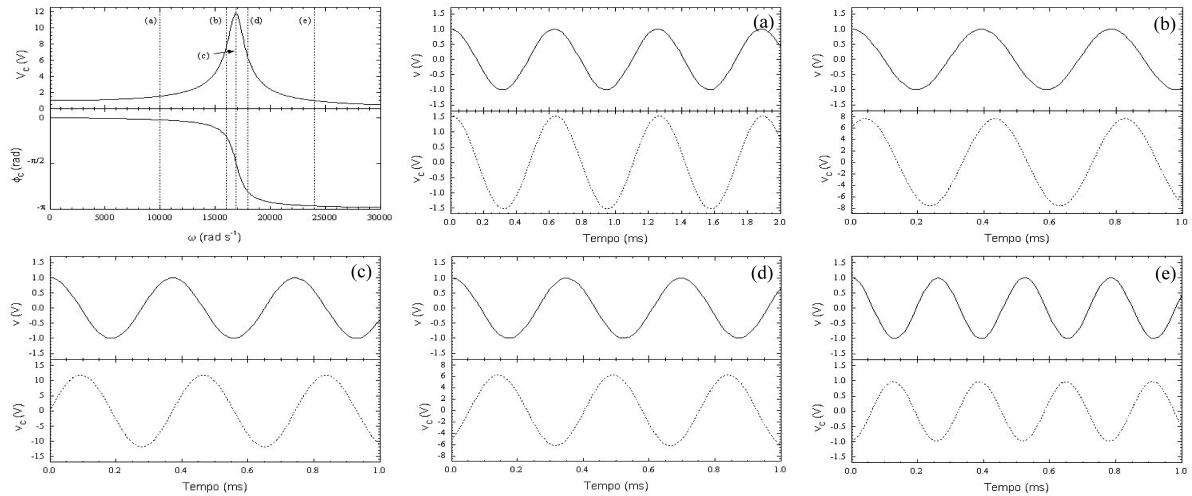


Figura 1-5. Resposta do circuito para diferentes frequências em torno da ressonância ($R = 12\ \Omega$, $L = 35\text{ mH}$ e $C = 100\text{ nF}$).

1.6 Referências

1. “Berkeley Physics Laboratory”, Part A, Experiment A-6
2. I. Main, “Vibrations and Waves in Physics”, cap. 1, 3
3. Calvert, “Electronics”, cap. 2

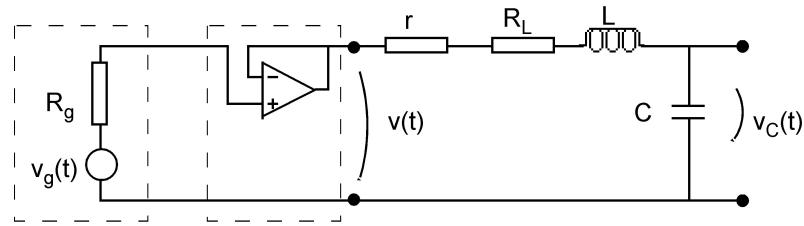
1.7 Execução do trabalho

Objectivo

Estudo do circuito oscilante RLC série no regime transitório (oscilatório amortecido, crítico, sobre-amortecido) e no regime permanente (sinusoidal).

Montagem

Monte o circuito representado na figura



(v_g, R_g) : gerador de sinal

“Buffer”: reproduz a tensão $v_g(t)$ em $v(t)$, mas sem resistência interna; assim, $v(t)$ é mantida independentemente do funcionamento do circuito RLC, ou seja, $v(t)$ é uma fonte de tensão ideal.

r: resistência externa

(L, R_L) : bobina

C : condensador

Observe $v(t)$ e $v_C(t)$ usando os dois canais do osciloscópio.

Regime permanente Selecione, no gerador de sinal, uma tensão $v_g(t)$ sinusoidal. Faça nula a resistência r ($R = R_L$).

1. Varie a frequência do sinal ($\omega = 2\pi f$) e registe a razão V_{C0}/V_0 das amplitudes de $v_C(t)$ e $v(t)$ bem como a diferença de fase ϕ_C entre $v_C(t)$ e $v(t)$ a partir da observação desses sinais no osciloscópio. Analise, em particular, a situação em torno da ressonância.
2. Represente graficamente essas respostas de amplitude e de fase em função da frequência ω .
3. Verifique o efeito da introdução de resistência r da resistência externa ($R = R_L + r$).

Regime transitório

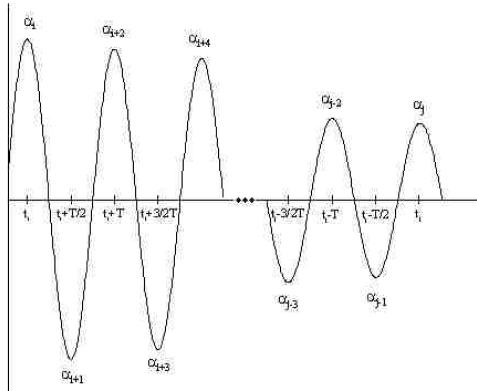
Selecione, no gerador de sinal, uma tensão $v_g(t)$ quadrada, com frequência próxima de 50 Hz e amplitude de 0,5 V.

- Para valores crescentes de $R = R_L + r$ (desde o mínimo $R = R_L$) observe o sinal de tensão $v_C(t)$ no osciloscópio.

Determine o pseudo-período T_{exp} da oscilação sinusoidal amortecida, e calcule daí a respectiva frequência ω_{exp} .

Determine a constante de decaimento da amplitude β_{exp} , observando no osciloscópio um intervalo de tempo $(t_j - t_i)$ tal que exista variação significativa dos máximos da oscilação.

$$\beta_{exp} = \frac{1}{t_j - t_i} \ln \left(\frac{v_{Cmax_i}}{v_{Cmax_j}} \right)$$



Escolha (i, j) de modo adequado para minimizar os erros na determinação de T_{exp} e β_{exp} , para cada R escolhido.

- Organize os valores experimentais registados no quadro seguinte, onde deve também introduzir os valores nominais correspondentes ω_{nom} e β_{nom} , obtidos a partir de

$$\beta = \frac{R}{2L} \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

$R(\Omega)$	$T_{exp}(\text{s})$	$\omega_{exp}(\text{rad s}^{-1})$	$\omega_{nom}(\text{rad s}^{-1})$	$\beta_{exp}(\text{s}^{-1})$	$\beta_{nom}(\text{s}^{-1})$

Compare os valores experimentais com os valores nominais.

- Varie $R = r + R_L$ de modo a observar quer o regime oscilatório amortecido, quer o regime não oscilatório (amortecimento forte). Estime o valor crítico de R .