

T4

T4A) Cabo coaxial

T4B) Barra Encastrada e Pêndulo
de Torção

1 ESTUDO DA TRANSMISSÃO POR CABO COAXIAL

1.1 Objectivos

1.1.1 Estudo da amplitude do impulso refletido, em função da impedância da carga ligada à linha coaxial, $V_r(Z_L)$

1. Determinar o valor da impedância da carga ligada à linha, $Z_L = Z_c$, para o qual a amplitude do impulso refletido $V_r(Z_L) = 0$.
2. Mostrar que em linha aberta ($Z_L \rightarrow \infty$), $\Gamma_L = 1$.
3. Mostrar que com a linha em curto-círcuito ($Z_L = 0$), $\Gamma_L = -1$. Isto é, a tensão inverte o sinal, mas a corrente não.

1.1.2 Determinação da constante de atenuação α e da velocidade v de propagação de fase na linha coaxial

1. Determinar α , a partir da medição das amplitudes V_n de uma sequência de n impulsos reflectidos e das correspondentes distâncias d percorridas pelo sinal.
2. Incluindo, nos dados registados para o objetivo anterior, o registo das instantes t_n a que ocorrem as amplitudes V_n , calcular v a partir de $V_n(t)$.

1.1.3 Determinação da velocidade de propagação de sinal v numa linha coaxial, variando a frequência do sinal à entrada

A partir do registo

- da frequência f do sinal à entrada da linha coaxial,
- da diferença de fase ϕ entre o sinal de entrada e o sinal refletido na linha coaxial,

e variando a frequência f do sinal à entrada numa gama entre kHz e 10MHz, calcular a velocidade de propagação do sinal na linha coaxial.

1.2 Realização Experimental

1.2.1 Equipamento e montagem

O equipamento a usar é

Gerador de impulsos (com fonte de alimentação anexa): período $\approx 5\mu s$, largura dos impulsos a meia altura 200 ns, resistência interna 50Ω ou 600Ω (comutável), saída coaxial BNC.

Gerador sinusoidal com resistência interna 50Ω e saída coaxial BNC (usa-se o MAIN). Uma foto deste aparelho pode ser visto na figura 1.

Linha coaxial (comprimento $63,50 \pm 0,05$ m): cabo coaxial RG58, condutores em cobre estanhado (diâmetro $a=0,9$ mm), dielétrico polietileno (diâmetro $b=2,95$ mm), revestimento externo PVC, impedância característica 50Ω , capacidade 100 pF/m , atenuação $< 0,02 \text{ dB/m} @ 10 \text{ MHz}$.



Figura 1: Gerador sinusoidal de frequência variável.

Osciloscópio (habitualmente com dupla base de tempo, permitindo expansão da escala de tempo). Podem ver-se exemplos de medições com este aparelho na figura 2.

Terminação 1 da linha coaxial: caixa de resistências

Terminação 2 da linha coaxial: adaptador de impedâncias que adapta a impedância da linha à da entrada do osciloscópio

1.2.2 Estudo da amplitude do impulso refletido, em função da impedância da carga ligada à linha coaxial, $V_r(Z_L)$

A montagem adequada e este estudo é a indicada na figura 3 , em que se pode variar a carga Z_L acoplada a um dos extremos da linha coaxial, estando o outro extremo ligado ao osciloscópio e ao gerador de impulsos.

1. A adaptação de impedância da carga à linha de transmissão ocorre quando $Z_L = Z_c$, o que dá um valor nulo para o coeficiente de reflexão Γ_L , pois

$$\Gamma_L = \frac{V_r(\ell, t)}{V_i(\ell, t)} = -\frac{I_r(\ell, t)}{I_i(\ell, t)} = \frac{Z_L - Z_c}{Z_L + Z_c} \quad (1)$$

- Para que não haja reflexão de impulsos à entrada da linha coaxial, que valor deve ter a resistência interna do gerador?
- Pode escolher entre dois valores na saída do gerador, 50Ω e 600Ω . Qual deve escolher, sabendo que a impedância da linha é 50Ω ?

Variando o valor da caixa de resistências ($Z_L = R$), e a partir de um gráfico $V_r(Z_L)$, calcule Z_c . Este é o ponto de intersecção da linha de ajuste $(V_r(Z_L))_{aj}$ com o eixo Z_L .

- Esse valor pode eventualmente ser considerado como valor de referência na experiência da secção seguinte (1.2.3.)?
2. Registe as observações, no osciloscópio, do impulso incidente na linha coaxial seguido do impulso reflectido na carga Z_L , para os seguintes casos:
 - círcuito aberto ($Z_L = \infty$)
 - curto-circuito ($Z_L = 0$)

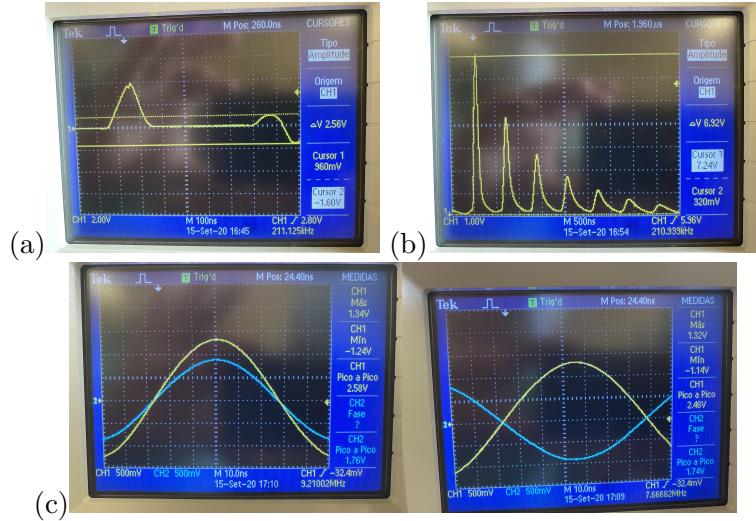


Figura 2: Imagens obtidas com um osciloscópio Tecktronics na determinação numa linha coaxial: (a) da impedância característica da linha; (b) do coeficiente de absorção da linha e da velocidade de propagação do sinal na linha; (c) da velocidade de propagação de fase na linha.

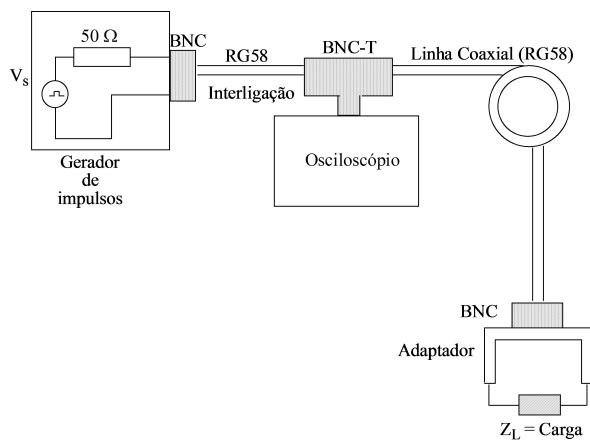


Figura 3: Circuito para o estudo da amplitude refletida em função da carga à saída da linha coaxial.

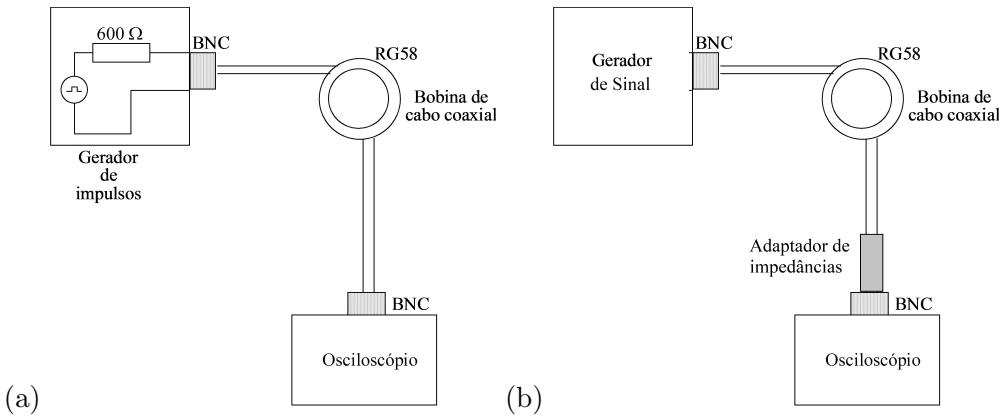


Figura 4: Circuito adequado (a) ao cálculo do coeficiente de atenuação da linha coaxial e (b) à determinação da velocidade de propagação de sinal na linha coaxial

1.2.3 Determinação da constante de atenuação α do cabo coaxial e da velocidade v de propagação de fase

O circuito adequado é o indicado à esquerda na figura 4 em que se escolhe 600Ω no comutador do gerador de impulsos, para que não haja reflexões à entrada do osciloscópio. De facto, note que:

- No percurso entre o osciloscópio e o gerador (ℓ), a amplitude decresce por um factor $\exp(-\alpha\ell)$ devido à atenuação da linha coaxial.
- No gerador ocorre reflexão, com um coeficiente de reflexão de amplitude

$$\Gamma = \frac{Z_o - Z_c}{Z_o + Z_c} = \frac{600 - 50}{600 + 50} = \frac{550}{650} \approx 0,846$$

- No osciloscópio, dada a alta impedância de entrada ($Z = 1\text{ M}\Omega$), a reflexão é praticamente total ($\Gamma \cong 1$).
- Esta onda propaga-se de volta ao osciloscópio, sofrendo uma atenuação por um factor $\exp(-\alpha\ell)$.

Assim, a razão entre picos de amplitude sucessivos observados no osciloscópio deverá ser

$$\frac{V_{i+1}}{V_i} = \Gamma e^{-2\alpha\ell}$$

ou, numa escala logarítmica para as reflexões de ordem i e $i + n$:

$$\ln\left(\frac{V_n}{V_1}\right) = \ln\left[\Gamma^n e^{-2\alpha\ell n}\right] = [\ln(\Gamma) - 2\alpha\ell]n$$

Traçando um gráfico de $\ln V$ em função do número n do impulso e usando o valor de Γ calculado, pode determinar a constante de atenuação α . Compare com os valores especificados para o cabo RG58.

A partir da dependência do percurso do sinal, $d = 2nL$, no tempo, t , calcula-se o valor da velocidade de propagação de fase.

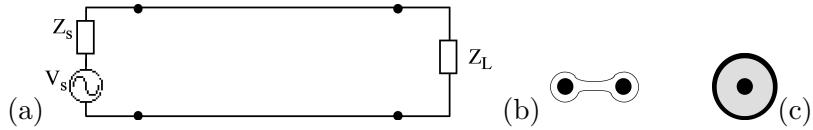


Figura 5: À esquerda, um esquema representativo de uma linha de transmissão uniforme.

Ao centro e à direita, tem-se uma representação da vista de topo de uma linha bifilar e de um cabo coaxial, respetivamente.

1.2.4 Determinação da velocidade de propagação de sinal v numa linha coaxial, variando a frequência do sinal à entrada

Alterando o circuito anterior para a configuração apresentada à direita na figura 4 observe no osciloscópio os sinais nas duas extremidades do cabo coaxial.

Variando a frequência do sinal no gerador, a diferença de fase entre os dois sinais altera-se. Registando a frequência em função da diferença de fase na gama de frequências disponível, calcule a velocidade de propagação dos sinais elétricos no cabo coaxial.

- Note que para $f = 0$ os sinais estão em fase e por isso a diferença de fase $\Phi=0$; para $\Phi = \pi$ estão em antifase; para $\Phi = 2\pi$ estão em fase novamente e assim sucessivamente.

Calcule a velocidade de propagação dos sinais eléctricos no cabo coaxial, a partir do gráfico $f(\Phi)$. Considere como referência o valor de v dado por $v = 1/\sqrt{\epsilon\mu}$, em que $\mu \approx \mu_o$ e ϵ (polietileno) = $2,3 \times \epsilon_o$ ($\epsilon_o = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Fm}^{-1}$, $\mu_o = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Hm}^{-1}$).

1.3 Introdução Teórica

Uma linha de transmissão uniforme (à esquerda na figura 5) é constituída por dois condutores (uniformes) paralelos, que suportam a propagação de energia electromagnética de um gerador (colocado num extremo da linha) para uma impedância de carga (no extremo oposto) para a qual se pretende, em geral, transmitir um sinal de informação ou potência eléctrica.

Duas formas comuns de linha de transmissão são a linha bifilar (dois condutores filiformes paralelos) e o cabo coaxial (constituído por dois condutores coaxiais cilíndricos, sendo o condutor interior geralmente filiforme e o exterior constituído por uma malha; a separá-los, um material dielétrico, tal como polietileno), como representado esquematicamente na figura 5.

A extensão de uma linha de transmissão vai desde milímetros ou centímetros (em pistas depositadas em substratos cerâmicos, nos dispositivos de micro-ondas), até centenas ou milhares de quilómetros (nas linhas de telecomunicações ou de transporte de energia eléctrica).

Seja o caso de um gerador de tensão contínua V_s (para simplificar, com resistência interna $Z_s = 0$), ligado à linha em $t = 0$, como indicado à esquerda na figura 6. Nesse instante, estabelece-se entre os condutores da linha, no seu extremo inicial, uma tensão $V = V_s$. Mas também se estabelecem correntes nos condutores (iguais em grandeza mas de sentidos opostos, de modo a não haver acumulação de cargas nos pontos da linha de transmissão).

Trata-se de uma perturbação do estado inicial da linha, efectuada no seu extremo, que se vai propagar ao longo dela com uma certa velocidade. Ao fim de um dado intervalo

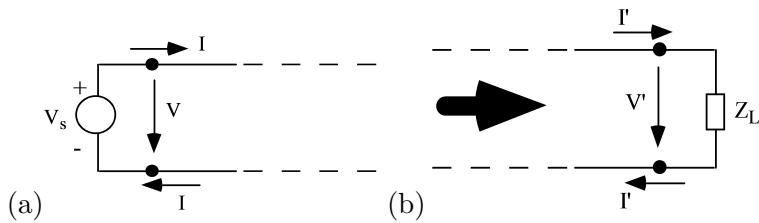


Figura 6: Sinal numa linha de transmissão gerado à entrada (a) e ao chegar ao extremo (b).

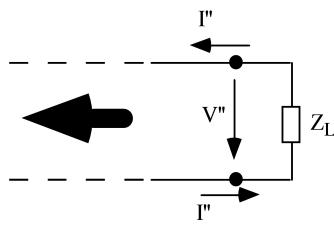


Figura 7: Onda reflectida no extremo da linha de transmissão

de tempo, essa perturbação irá atingir o outro extremo da linha, com valores da tensão entre condutores e da corrente nos condutores respectivamente V' e I' (à direita na6). Ao contrário do caso mais simples de circuitos com dimensões relativamente pequenas e operando a frequências baixas, a perturbação estabelecida na entrada da linha não se comunica quase instantaneamente a todos os outros pontos do circuito eléctrico.

É óbvio que deveria ser verificada uma condição fronteira (lei de Ohm) nesse extremo: $V' = I'Z_L$. Tal ocorre apenas em situações especiais (quando Z_L toma o valor exato $Z_c = V'/I'$, característico da linha). Em geral, a relação não se verificará, o que origina uma onda reflectida a partir do extremo (com amplitudes de tensão e de corrente V'' e I'' , respectivamente, que se propagará em sentido inverso ao da onda inicial, como se pode ver na figura 7).

Esta onda, por sua vez, atingirá o extremo inicial e poderá aí ser também reflectida parcialmente,

Assim, uma linha de transmissão suportará, genericamente, ondas de tensão e de corrente ($V(z, t)$, $I(z, t)$) em propagação em ambos os sentidos.

1.4 Modelo de uma linha de transmissão

A fim de estabelecer um modelo físico de uma linha de transmissão, capaz de justificar quantitativamente os fenómenos de propagação de ondas de tensão e de corrente atrás referidos, considere-se um troço elementar de linha de comprimento Δz , constituído por dois condutores separados por um dielétrico (no topo da figura 8).

O modelo de circuito eléctrico deste elemento de linha está representado na linha de baixo da figura 8, e compreende (ver notas do trabalho "Ponte de Anderson" sobre impedâncias em corrente alternada):

1. Resistência série R , que introduz uma atenuação nos sinais por efeito de Joule nos dois condutores do troço de linha.
2. Condutância paralela G , relacionada com condução residual através de um dielétrico imperfeito entre os condutores.

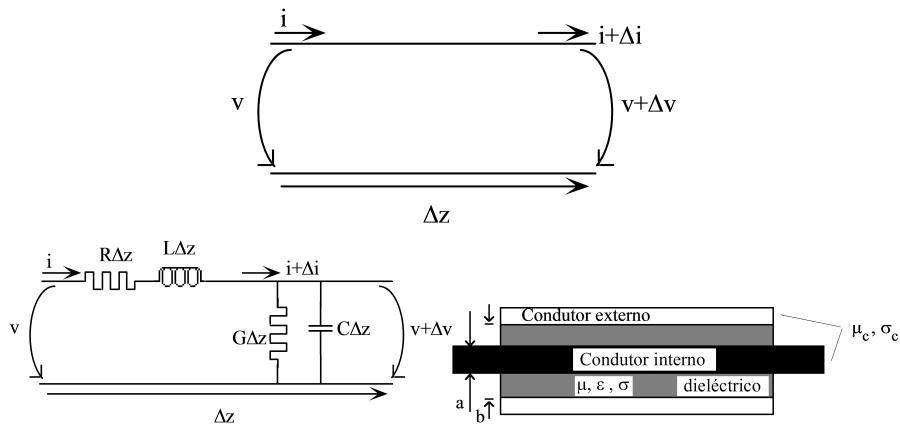


Figura 8: Topo - Troço elementar de dois condutores separados por um dielétrico. Em baixo - modelo do circuito elétrico correspondente

3. Indutância L , que relaciona a corrente na linha com o fluxo magnético por ela produzido através da área entre os condutores.

4. Capacidade C , entre os dois condutores separados pelo dielétrico.

Os valores R , G , L , C são os coeficientes da linha por unidade de comprimento. Estes valores dependem da geometria e da construção da linha.

Para uma linha coaxial, estas quatro grandezas fundamentais podem ser calculadas rigorosamente [1] e são expressas nas equações seguintes.

Coeficiente de autoindução por unidade de comprimento:

$$L = \frac{\mu}{2\pi} \ln \left(\frac{b}{a} \right) \quad (\text{H/m}) \quad (2)$$

Capacidade por unidade de comprimento:

$$C = \frac{2\pi\epsilon}{\ln \left(\frac{b}{a} \right)} \quad (\text{F/m}) \quad (3)$$

Resistência série por unidade de comprimento:

$$R = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu_c \nu}{\pi \sigma_c}} \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{a} \right) \quad (\Omega/\text{m}) \quad (4)$$

Conduânciia paralela por unidade de comprimento:

$$G = \frac{\sigma}{\epsilon} C = \frac{2\pi\sigma}{\ln \left(\frac{b}{a} \right)} \quad ((\Omega\text{m})^{-1}) \quad (5)$$

em que a é o diâmetro do condutor central, b é o diâmetro do condutor exterior, μ é a permeabilidade magnética do dielétrico, ϵ é a permitividade eléctrica do dielétrico, σ é a condutividade do dielétrico, μ_c é a permeabilidade magnética dos condutores, σ_c é a condutividade dos condutores e ν é a frequência das ondas.

Estas quatro grandezas permitem descrever integralmente a linha coaxial e, em particular, determinar a sua **impedância característica**, a **velocidade de propagação**, a **fase** e a **atenuação** das ondas na linha, como se verá adiante.

Notar que, no caso ideal ($R = G = 0$), o modelo se reduz a dois parâmetros (L, C).

1.5 Ondas de corrente e de tensão em linhas de transmissão

As equações gerais para a corrente (i) nos condutores e a tensão (v) entre os condutores podem-se obter analisando o circuito eléctrico equivalente a um elemento de linha coaxial de comprimento Δz . L , C , R , G representam, respectivamente, o coeficiente de autoindução, a capacidade, a resistência série e a condutância paralela por unidade de comprimento da linha. Se designarmos por \bar{q} a carga por unidade de comprimento nos condutores, a tensão média \bar{v} no comprimento Δz tem a forma:

$$\bar{v} = \frac{\bar{q}\Delta z}{C\Delta z} = \frac{\bar{q}}{C} \quad (6)$$

A redução de corrente $-\Delta i$ em Δz resulta da condução através do dielétrico ($G\Delta z$) e da corrente de deslocamento na capacidade ($C\Delta z$) entre condutores:

$$-\Delta i = \frac{\partial(\bar{q}\Delta z)}{\partial t} + \bar{v}G\Delta z \quad (7)$$

Substituindo 6 em 7 e tomando limites após dividir por Δz , obtém-se a expressão:

$$\frac{\partial(i)}{\partial z} = -C\frac{\partial v}{\partial t} - Gv \quad (8)$$

A queda total de tensão no comprimento Δz é dada pela expressão:

$$-\Delta v = L\Delta z\frac{\partial i}{\partial t} + iR\Delta z \quad (9)$$

correspondente à soma das quedas de tensão indutiva ($L\Delta z$) e resistiva ($R\Delta z$).

Dividindo por Δz obtém-se no limite quando $\Delta z \rightarrow 0$:

$$\frac{\partial v}{\partial z} = -L\frac{\partial i}{\partial t} - iR \quad (10)$$

Diferenciemos a expressão anterior em ordem a z . Obtém-se:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = -L\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial i}{\partial z}\right) - R\frac{\partial i}{\partial z} \quad (11)$$

Substituindo 8 em 11, esta expressão transforma-se em:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = -L\frac{\partial}{\partial t}\left(-C\frac{\partial v}{\partial t} - Gv\right) - R\left(-C\frac{\partial v}{\partial t} - Gv\right) \quad (12)$$

e finalmente obém-se:

$$\boxed{\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = RGv + (RC + LG)\frac{\partial v}{\partial t} + LC\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}} \quad (13)$$

Esta equação, designada por *equação do telégrafo*, descreve o processo de transmissão numa linha coaxial. A expressão para a corrente (i) é da mesma forma e obtém-se de modo análogo.

1 DETERMINAÇÃO DE MÓDULOS ELÁSTICOS DE MATERIAIS PELO MÉTODO DAS VIBRAÇÕES DE UMA BARRA ENCASTRADA E PELO PÊNDULO DE TORÇÃO

1.1 Objectivos

- Determinar o módulo de Young do material de uma barra, usando o método de vibrações da barra encastrada.
- Efetuar o cálculo dos momentos de inércia das peças suspensas no pêndulo de torsão.
- Determinar o módulo de rigidez do material do fio de suspensão.

1.2 Execução do trabalho

1.2.1 Barra encastrada

- Execute a montagem indicada na figura 1, escolhendo a barra que vai estudar. *Justifique a escolha que fez.*
- Vai ser usada uma barra encastrada (comprimento livre ℓ) em vibração. O sistema optoelectrónico *fotogate* (constituído pela lâmpada e pelo fotodetector) mais o contador de impulsos e de tempos, permite medir o período das oscilações. Para tal, depois de ligar o interruptor de alimentação, prima o botão de “Reset” e escolha o número de impulsos cujo tempo t quer registar. A escolha para o número de impulsos para cada comprimento ℓ deve ser, para cada ensaio, $i = 52, 101$ e 151 . A contagem de tempo efetuada pelo aparelho começa na 1^a interrupção do circuito óptico e acaba quando o número de impulsos coincide com o número pré-selecionado.
- Imprima oscilações verticais à barra, recorrendo ao método que considerar mais adequado (*consultar vídeo de apresentação do trabalho*) e de modo a evitar tanto quanto possível a ocorrência de modos transversais.
- Escolha a gama experimental em que vai fazer o seu estudo, sabendo que a expressão que lhe permite calcular o módulo de Young é dada por eq. 1

$$\bar{T}^2 = 5,029 \frac{\pi^2 \rho}{E D^2} \ell^4 \quad (1)$$

onde \bar{T} é o valor médio do período de oscilação para um dado ℓ , D é o diâmetro da barra e ρ é a densidade do material que constitui a barra (*também determinado experimentalmente*).

- Elabore uma tabela de registo adequada, tendo em vista que as grandezas que regista diretamente são ℓ , t e i e escolhendo a representação que vai usar na sua análise. *Justifique essa escolha, não esquecendo que também deve escolher qual a grandeza que considera como dependente e a que escolhe como independente.*
- Mediante a escolha referida no ponto anterior, distribua adequadamente os valores de ℓ na gama experimental.
- Através de um ajuste linear aos dados experimentais, calcule o valor do módulo de Young E e respetivas incerteza, percentagem de incerteza e percentagem de erro.

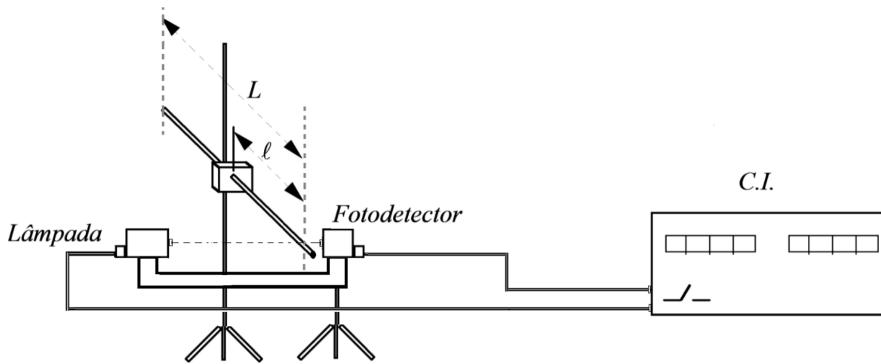


Figura 1: Esquema da montagem experimental. L - comprimento total da barra, ℓ - comprimento da barra em vibração, C.I. - contador de impulsos.

$I_{sist. suspenso}$	θ_{max}	$t = 10T$	$\bar{T} = T_{médio}$
a)	90º
	180º
	270º
.			
.			
.			

Tabela 1: Registo de dados no estudo do pêndulo de torção.

1.2.2 Pêndulo de Torção

Para a realização deste trabalho irá encontrar no laboratório um fio suspenso, na extremidade livre do qual se podem fixar diversos corpos (disco, coroa cilíndrica e prisma). Na execução sugere-se o seguinte procedimento:

- Medir o comprimento ℓ do fio e o seu diâmetro d (a medição de d deverá ser feita em vários pontos do fio, tomando-se depois o diâmetro médio);
- Suspender do fio, sucessivamente:
 - a) Disco+prisma, com o eixo maior vertical
 - b) Disco+prisma, com o eixo maior horizontal
 - c) Disco+coroa cilíndrica
 - d) Disco+coroa cilíndrica+prisma com o eixo maior horizontal
- Para cada um dos casos anteriores determinar o tempo t correspondente a 10 oscilações completas, para valores iniciais da amplitude, θ_{max} , de aproximadamente 90º, 180º e 270º. Elabore uma tabela do tipo da tabela 1, calculando, em cada caso, o momento de inércia I do corpo utilizado (de acordo com as expressões listadas abaixo).
- O movimento oscilatório deve ser exclusivamente de torsão. *Que cuidados deve ter no que diz respeito à implementação da rotação?*
- *Que conclusões tira relativamente ao comportamento do período das oscilações em função da amplitude das mesmas?*

Objeto suspenso	I	
	grandeza	expressão
Disco	I_d	$\frac{MD^2}{8}$
Coroa cilíndrica	I_{cc}	$\frac{M}{8} (D_1^2 + D_2^2)$
Prisma triangular relativamente ao eixo maior b	$I_{P_{maior}}$	$\frac{Mb^2}{12}$
Prisma triangular relativamente ao eixo menor b	$I_{P_{menor}}$	$\frac{M(2h^2+b^2)}{24}$
<i>Exemplo de associação:</i> Disco + Prisma com eixo maior vertical	$I_{P_{menor}} + I_{P_{maior}}$	$\frac{MD^2}{8} + \frac{Mb^2}{12}$

Tabela 2: Expressões para o cálculo dos momentos de inércia dos objetos suspensos, no estudo do pêndulo de torção.

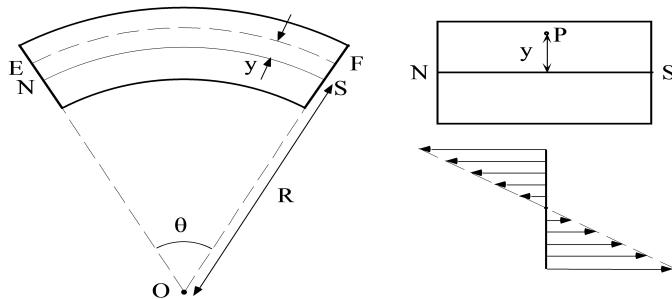


Figura 2: Barra sujeita a flexão.

- Obtenha o módulo de rigidez μ a partir de uma análise gráfica da dependência $I(T)$, dada pela eq. 2

$$I = \frac{D^4 \mu}{128\pi\ell} T \quad (2)$$

- Note que as expressões para cálculo dos diferentes momentos de Inéncias são dadas na tabela 2.

1.3 Introdução Teórica

1.3.1 Flexão de Barras

Considere-se uma barra de secção reta uniforme (por exemplo, retangular) sujeita a flexão com um raio de curvatura elevado. Na figura 2 representa-se uma secção da barra contendo o centro da curvatura O e o eixo longitudinal de simetria.

A barra está em compressão na parte inferior, e em distensão (tração) na parte superior, havendo uma superfície neutra NS em que não se produziu alteração de dimensões. Para a linha EF , o seu comprimento antes da flexão era o mesmo que para $NS(R\theta)$, passando após a flexão a ser $(R + y)\theta$, sendo y a distância á linha neutra dos pontos P dessa linha EF .

A deformação relativa é, portanto, $y\theta/R\theta = y/R$.

Sendo f a força atuando numa secção elementar ΔS , tem-se, por definição do módulo de Young:

$$E = \frac{f/\Delta S}{y/R} \quad (3)$$

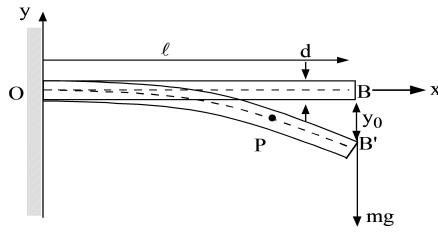


Figura 3: Barra encastrada com massa m aplicada, sujeita a flexão.

Para o equilíbrio, deverá ter-se $\sum f = 0$, donde resulta $\sum y \cdot \Delta s = 0$. Assim, a superfície neutra passa pelo centro de massa da secção reta da barra.

O momento das forças relativamente à superfície neutra é

$$C = \sum f_y = \sum \frac{E}{R} \Delta S y^2 = \frac{E}{R} \sum \Delta S y^2 = \frac{E}{R} I \quad (4)$$

ou

$$\frac{1}{R} = \frac{C}{EI} \quad \text{equação de Euler-Bernoulli} \quad (5)$$

em que $I = \sum \Delta S y^2$ é o momento de inércia geométrico da secção reta da barra relativamente ao eixo definido pelo plano das fibras neutras.

1.3.2 Barra encastrada de massa desprezável

(i) Equilíbrio estático Considere-se a situação da figura 3, com uma massa m carregando o extremo livre da barra encastrada (cuja massa se despreza), de comprimento ℓ .

Seja OB a posição da superfície neutra sem carga aplicada, e OB' com a carga aplicada.

Considerando os eixos Oxy , pequena curvatura da barra, e uma secção da barra segundo P , o momento das forças elásticas será $C(P) = IE/R$, sendo o momento da carga $-mg(\ell - x)$. No equilíbrio:

$$\frac{IE}{R} = mg(\ell - x) \quad (6)$$

O raio de curvatura R em P é:

$$R = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}} \approx \frac{1}{\frac{d^2y}{dx^2}} \quad (\text{para } \frac{dy}{dx} \text{ pequeno}) \quad (7)$$

Assim:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{mg}{IE}(\ell - x) \quad (8)$$

Integrando,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{mg}{IE} \left(\ell x - \frac{x^2}{2} \right) + C_1 \quad (C_1 = 0, \text{ pois } \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0} = 0) \quad (9)$$

$$y = \frac{mg}{IE} \left(\ell \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) + C_2 \quad (C_2 = 0, \text{ pois } (y)_{x=0} = 0) \quad (10)$$

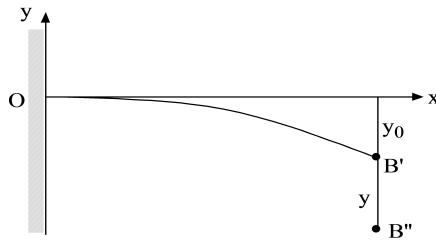


Figura 4: Modelo de uma barra encastrada sujeita a flexão

O deslocamento do extremo livre da barra é, portanto

$$y = \frac{mg}{IE} \frac{\ell^3}{3} \quad (11)$$

Assim, o módulo de Young E do material (da barra encastrada de comprimento ℓ e momento de inércia geométrica da secção reta I) poderia ser medido por este método, observando a deflexão y_0 do seu extremo para uma massa m aplicada no extremo livre:

$$E = \frac{mg}{3I} \frac{\ell^3}{y_0} \quad (12)$$

Para uma barra de secção reta retangular ($b \times d$) ter-se-ia $I = bd^3/12$, donde:

$$E = \frac{4mg\ell^3}{bd^3y_0} \quad (13)$$

(ii) Equilíbrio dinâmico Note-se que se se deformar ligeiramente a barra encastrada em torno da posição de equilíbrio (figura 4), fazendo com que o extremo B' da superfície neutra se desloque de y_0 para $y_0 + y$, produzir-se-á uma força elástica adicional no sentido de restaurar o equilíbrio.

No equilíbrio inicial tem-se, conforme discutido na secção anterior,

$$mg = \frac{3EI}{\ell^3} y_0 \quad (14)$$

e no novo equilíbrio a força elástica será

$$\frac{3EI}{\ell^3} (y_0 + y) \quad (15)$$

Libertando a barra dessa força adicional num certo instante, ela ficará sujeita a uma força de restauro (no caso da figura, para cima):

$$\frac{3EI}{\ell^3} (y_0 + y) - \frac{3EI}{\ell^3} y_0 = \frac{3EI}{\ell^3} y \quad (16)$$

A equação de movimento do extremo da barra será, então

$$m \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{3EI}{\ell^3} y \quad (17)$$

(equação de um oscilador harmónico não-amortecido).

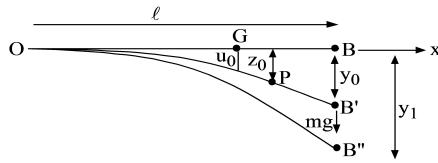


Figura 5: Modelo de uma barra encastrada de massa M e sujeita a flexão.

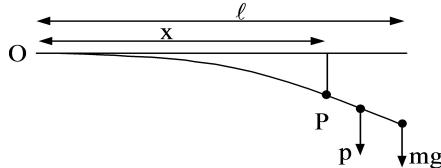


Figura 6: Cálculo dos momentos aplicados no ponto P da barra encastrada de massa M sujeita a flexão.

Por conseguinte, a barra encastrada mover-se-á segundo um movimento oscilatório harmónico, de período

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m\ell^3}{3EI}} \quad (18)$$

O módulo de Young da barra poderia ser medido por este método, através da medição do período das oscilações:

$$E = \frac{m\ell^3}{3I} \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 \quad (19)$$

Note-se que se desprezou a massa da barra e não se consideraram mecanismos de amortecimento das vibrações.

1.3.3 Barra encastrada de massa M

(i) Equilíbrio estático Considere-se agora o efeito da massa da barra, inicialmente em equilíbrio estático com a linha neutra OB , deformada ligeiramente para a posição OB' , e deixada oscilar livremente (Figura 5).

No equilíbrio estático inicial da barra sem massa, os deslocamentos de P e de B são, respectivamente, z_0 e y_0 ; para o centro de gravidade G , será u_0 .

Considerando a massa M da barra, o seu extremo situar-se-á em B'' .

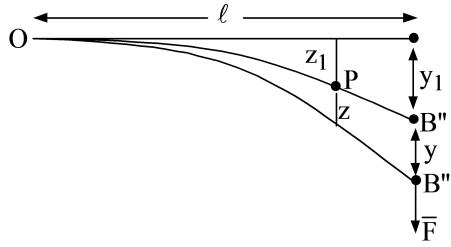
A energia potencial da barra na posição OB'' relativamente à energia na posição OB' varia através da energia elástica aumentada pela maior deformação devida ao efeito da massa M da barra, sendo diminuída da energia potencial gravítica devida às novas posições da barra e da massa m aplicada no extremo da barra. A perda de energia potencial da massa m é $w_m = mgy$.

Para um ponto $P(x)$, o momento das forças elásticas na secção (vertical) da barra é dado, como se viu, por:

$$C(x) = \frac{EI}{R} = EI \frac{d^2y}{dx^2} \quad (20)$$

O momento em P das forças correspondentes às massas pode ser estimado (figura 6):

- **barra:** seja M a massa da barra uniforme de comprimento ℓ ; a massa por unidade de comprimento será $\mu = M/\ell$. O momento do peso p da extensão $(\ell-x)$ da barra,

Figura 7: Barra encastrada de massa M sujeita a oscilações livres.

suposto concentrado no ponto médio dessa secção, vale:

$$C_b = [\mu g(\ell - x)] \times \left[\frac{1}{2}(\ell - x) \right] = \frac{1}{2}\mu g(\ell - x)^2 \quad (21)$$

- **massa m :**

$$C_m = mg(\ell - x) \quad (22)$$

Considerando a equação de equilíbrio estático:

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = mg(\ell - x) + \frac{1}{2}\mu g(\ell - x)^2 \quad (23)$$

Integrando:

$$EI \frac{dy}{dx} = mg \left(\ell x - \frac{x^2}{2} \right) + \frac{1}{2}\mu g \left(\ell x - \ell x^2 + \frac{x^3}{3} \right) \quad \left(\frac{dy}{dx} = 0 \text{ para } x = 0 \right) \quad (24)$$

$$EIy = mg \left(\ell \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) + \frac{1}{2}\mu g \left(\ell^2 \frac{x^2}{2} - \ell \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{12} \right) \quad (y = 0 \text{ para } x = 0) \quad (25)$$

O deslocamento do extremo livre é, portanto:

$$y_1 = \frac{\ell^3 g}{EI} \left(\frac{m}{3} + \frac{M}{8} \right) \quad (26)$$

Donde se poderá determinar o módulo de Young por este método estático, medindo a deflexão do extremo livre (y_1) da barra de massa M sujeita à carga m :

$$E = \frac{g\ell^3}{Iy_1} \left(\frac{m}{3} + \frac{M}{8} \right) \quad (27)$$

(ii) Equilíbrio dinâmico Considere-se agora que se aplicou uma força F no extremo livre da barra, provocando um pequeno deslocamento adicional y para lá do deslocamento estático y_1 (figura 7).

No novo equilíbrio estático (OB''') ter-se-á, da discussão da secção anterior (somando mg com F):

$$\frac{EI}{\ell^3}(y_1 + y) = \frac{mg + F}{3} + \frac{Mg}{8} \quad (28)$$

Donde:

$$F = \frac{3EI}{\ell^3}y \quad (29)$$

O trabalho executado por F será:

$$\int_0^y F(y)dy = \frac{3}{2} \frac{EI}{\ell^3} y^2 \quad (30)$$

A energia potencial graítica perdida pela barra da massa M e pela massa de carga m será:

$$mgy + V \quad (31)$$

em que V é o termo correspondente á massa da barra.

A variação total de energia potencial relativamente á posição de equilíbrio inicial, incluindo a variação da energia potencial graítica e incluindo a energia potencial elástica, será igual ao trabalho efetuado por F :

$$U_p = \frac{3}{2} \frac{EI}{\ell^3} y^2 \quad (32)$$

Libertando a barra, ela entrará em vibração com o extremo oscilando em torno de B'' , existindo portanto também energia cinética.

Para um ponto $P(x)$, no equilíbrio inicial o deslocamento era z_1 , e no equilíbrio final com F aplicado $z_1 + z$, sendo o deslocamento adicional

$$z = \frac{F}{EI} \left(\ell \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) = \frac{3}{\ell^3} \left(\ell \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) y \quad (33)$$

A velocidade do ponto P será:

$$\dot{z} = \frac{3}{\ell^3} \left(\ell \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) \dot{y} \quad (34)$$

onde \dot{y} é a velocidade no extremo livre da barra; a energia cinética de um elemento da barra em P virá:

$$dU_{C_b} = \frac{1}{2} (\mu dx) \left[\frac{3}{\ell^3} \left(\ell \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) \dot{y} \right]^2 \quad (35)$$

onde a energia cinética total da barra:

$$\begin{aligned} U_{C_b} &= \int_0^\ell \frac{1}{2} (\mu dx) \left[\frac{3}{\ell^3} \left(\ell \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) \dot{y} \right]^2 = \frac{1}{2} \mu \left(\frac{9}{\ell^6} \right) \dot{y}^2 \int_0^\ell \left(\frac{\ell^2 x^4}{4} + \frac{x^6}{36} - \frac{2\ell x^5}{12} \right) dx \\ &= \frac{9\mu\dot{y}^2}{2\ell^6} \left(\frac{\ell^7}{20} + \frac{\ell^7}{252} - \frac{2\ell^7}{72} \right) = \frac{33}{280} \mu \ell \dot{y}^2 = \frac{33}{280} M \dot{y}^2 \end{aligned} \quad (36)$$

A energia cinética da massa m no extremo será

$$U_{C_m} = \frac{1}{2} m \dot{y}^2 \quad (37)$$

onde a energia total do sistema:

$$U_C + U_P = \frac{1}{2} \left(m + \frac{33}{140} M \right) \dot{y}^2 + \frac{3EI}{2\ell^3} y^2 \quad (38)$$

que será constante. Diferenciando e dividindo por \ddot{y} :

$$\left(m + \frac{33}{140}M\right)\ddot{y} + \frac{3EI}{\ell^3}y = 0 \quad (39)$$

ou:

$$\ddot{y} + \omega^2y = 0 \quad (\text{equação de movimento harmónico}) \quad (40)$$

com:

$$\omega^2 = \frac{3EI}{\ell^3 \left(m + \frac{33}{140}M\right)} \quad (41)$$

O período da oscilação será $T = 2\pi/\omega$:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\left(m + \frac{33}{140}M\right)\ell^3}{3EI}} \quad (42)$$

O módulo de Young pode ser, assim, determinado através do período das oscilações

$$E = \left(m + \frac{33}{140}M\right) \frac{\ell^3}{3I} \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \quad (43)$$

Considerando o caso de a carga inicial ser nula ($m = 0$), virá

$E = \frac{11}{140} \frac{M\ell^3}{I} \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2$

minipage

(44)

Para uma barra de secção reta retangular ($b \times d$):

$$I = \frac{1}{12}bd^3 \quad (45)$$

Para uma barra de secção reta circular de diâmetro D :

$$I = \frac{\pi}{64}D^4 \quad (46)$$

1.3.4 Pêndulo de Torção

O pêndulo de torção é constituído por um corpo material suspenso dum fio fino e cilíndrico. O estudo do movimento do corpo e a determinação do período T das suas oscilações permite calcular o módulo de rigidez μ do material do fio. Definido por $t_c = \mu\alpha$, o módulo de rigidez é a razão entre a tensão do corte t_c e o ângulo do escorregamento α , grandezas que já exemplificaremos.

Principiemos por estudar a resistência à torção do fio cilíndrico, de comprimento ℓ e raio R . Imaginemos que, sob a ação dum momento C , a base do cilindro que forma o fio roda dum ângulo θ relativamente á outra extremidade, fixa. Consideremos, como indicado na figura 8, um cilindro coaxial de raio r , com a geratriz materializada por uma linha da sua superfície; retilínea antes da deformação, a linha transforma-se num arco de hélice, visto todas as secções estarem sujeitas ao mesmo esforço. Como os pontos da base rodam todos do ângulo θ , o extremo da linha considerada descreve um arco θr , o ângulo de escorregamento (o mesmo em todas as secções) será $\alpha = \theta r/\ell$, e a tensão de corte, de acordo com a definição, $t_c = \mu\theta r/\ell$.

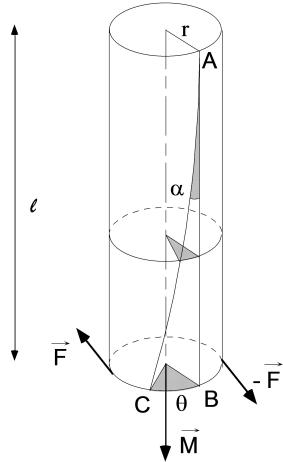


Figura 8: Geometria da deformação do fio de suspensão no pêndulo de torção.

Estas tensões, exercidas tangencialmente em cada secção, devem equilibrar o momento aplicado. Portanto, o momento C será:

$$C = \int_0^R r \cdot df = \int_0^R r \cdot t \cdot dS = \frac{\mu}{\ell} \cdot \int_0^R r^2 \cdot dS \cdot \theta = \frac{\mu I_0}{\ell} \cdot \theta \quad (47)$$

em que I_0 é o momento polar de inércia da secção reta do fio cilíndrico.

O fio oferece um momento resistente proporcional ao ângulo de rotação, armazenando a energia elástica

$$W_e = \int_0^\theta \frac{\mu I_0}{\ell} \cdot \theta \cdot d\theta \quad (48)$$

Abandonado ao momento de torção do fio, o corpo suspenso adquire uma aceleração angular, transferindo-se a energia elástica para a energia cinética do movimento de rotação. Cada ponto, à distância ρ , adquire a velocidade $v = \theta' \cdot \rho$, e a massa em rotação a energia cinética

$$W_c = \frac{1}{2} \int_M v^2 \cdot dm = \frac{\theta'^2}{2} \int_M \rho^2 \cdot dm = \frac{\theta'^2 \cdot I}{2} \quad (49)$$

onde I é o momento de inércia do corpo suspenso.

Quando a torção se anula, a velocidade será máxima, θ'_M , visto só existir então energia cinética. Mas esta energia, não havendo dissipação, terá de ser igual à energia elástica na torção máxima, θ_0 , em que se anula a velocidade. Assim

$$W_c = W_e \quad (50)$$

ou

$$\frac{\theta'^2_M \cdot I}{2} = \frac{\mu I_0}{\ell} \frac{\theta_0^2}{2} \quad (51)$$

Devido à proporcionalidade entre forças e deslocamentos, o movimento obtido é vibratório harmônico. Logo verifica-se a relação seguinte entre a velocidade angular máxima $|\theta'_M|$ e o deslocamento angular máximo θ_0 :

$$\theta'_M = \theta_0 \cdot \omega = \theta_0 \cdot \frac{2\pi}{T} \quad (52)$$

Eliminando a velocidade angular nas fórmulas anteriores, obtém-se

$$\boxed{\mu = \frac{4\pi^2\ell}{I_0} \cdot \frac{I}{T^2}} \quad (53)$$

sendo, de acordo com a dedução,

I_0 - momento de inércia geométrico, relativamente ao centro, da secção reta do fio cilíndrico de suspensão.

I - momento de inércia da massa suspensa relativamente ao eixo de rotação.

ℓ - comprimento do fio de suspensão.

T - período das oscilações.

No nosso trabalho suspendemos diversas massas, para cada uma das quais é necessário calcular o momento de inércia I . Como são sólidos regulares, homogéneos, é fácil estabelecer as fórmulas para o seu cálculo. Quanto a I_0 , obtém-se diretamente da definição ($I_0 = \pi d^4/32$, sendo d o diâmetro do fio).

Notar que a fórmula estabelecida permite concluir que, para um mesmo fio, I/T^2 deverá ser constante qualquer que seja a massa suspensa - é um critério para apreciar a confiança que merecem os resultados. Na fórmula utilizar-se-á uma média dos valores de I/T^2 .

Da fórmula estabelecida ressalta também a necessidade de medir T com grande precisão.

Torção do fio de suspensão Consideremos um fio cilíndrico de secção circular, encastreado numa das bases, e sujeito na outra a um sistema de forças de resultante nula e momento resultante normal a essa base (figura 8).

Sob a ação deste binário o fio sofre uma torção, deformando-se. Como as secções normais ao eixo do fio são circulares, é verificada a hipótese de Coulomb: “as secções planas permanecem planas após a deformação”.

Considere-se uma geratriz AB; após a aplicação do momento torsor M , deforma-se, transformando-se num arco de hélice cilíndrica (AC). A base inferior rodou de um ângulo θ , sendo natural esperar que exista uma relação de proporcionalidade entre M e θ , algo que se irá demonstrar a seguir.

Seja uma porção elementar de fio, limitada por dois planos infinitamente próximos, normais ao seu eixo, e nessa porção um elemento de cilindro, cujas bases são coroas circulares (Fig.9). Deste elemento de cilindro vamos ainda tomar um elemento de material de bases ABCD e EFGH (Fig. 9a). Estas duas bases deslizam uma sobre a outra, pois as forças aplicadas nas coroas superior e inferior têm sentidos opostos. Assim, após a deformação, a geratriz que inicialmente ocupava a posição AE passará a ocupar a posição AE', fazendo com a geratriz primitiva um ângulo α (Fig 9b). Sendo dF a resultante das forças que actuam nas bases de área dS , a tensão de corte é definida como

$$t_c \equiv \frac{dF}{dS} \quad (54)$$

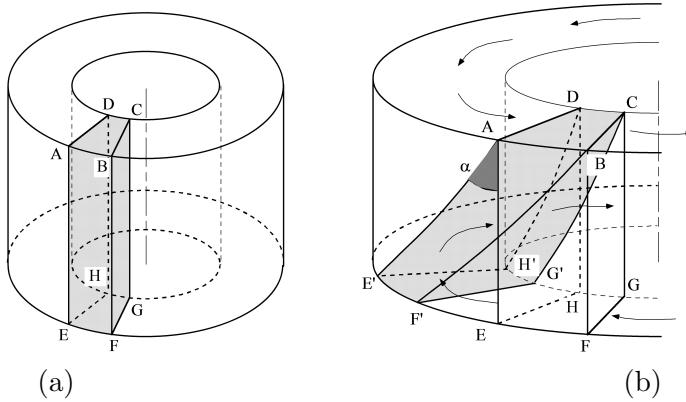


Figura 9: Elemento do fio de suspensão antes (a) e depois (b) da deformação.

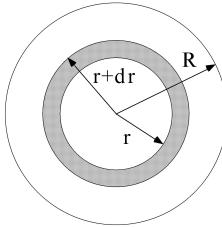


Figura 10: Geometria da deformação do fio de suspensão no pêndulo de torção.

Pela lei de Hooke sabe-se que existe proporcionalidade entre as tensões aplicadas e as deformações resultantes. À constante de proporcionalidade entre as tensões de corte e as respectivas deformações dá-se o nome de **módulo de rigidez** do material, que se designa por μ :

$$t_c = \mu\alpha \quad (55)$$

(i) Equilíbrio estático Para haver equilíbrio é necessário que, em qualquer secção reta, o binário de reação do fio iguale o binário de torção M . O binário de reação é o resultante de todas as forças dF atuando na área da coroa circular de raio r e largura dr . Notar que a área da coroa circular (figura 10) é, a menos de um infinitésimo de ordem superior, identificável com a de um paralelogramo de comprimento $2\pi r$ e largura dr .

Assim:

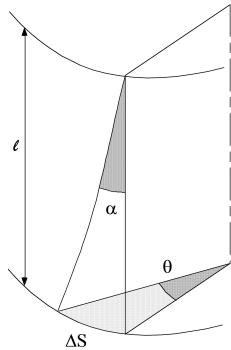
$$dM = \text{for} \ddot{\cup} \frac{1}{2} a \times \text{bra} \ddot{\cup} \frac{1}{2} o = 2\pi r dr t_c \times r \Rightarrow M = \int_0^R 2\pi r^2 t_c dr \quad (56)$$

Como $t_c = \mu\alpha$, vem:

$$M = \int_0^R 2\pi r^2 \mu \alpha dr \quad (57)$$

é necessário agora exprimir o ângulo α em função do ângulo θ . Considere-se a figura seguinte; dela resulta que $\Delta S = r\theta$. Por outro lado, tendo em consideração uma propriedade das hélices cilíndricas, pode-se afirmar que, para α pequeno,

$$\tan \alpha = \frac{\Delta S}{\ell} \cong \alpha \quad (58)$$

Figura 11: Relação entre α e o ângulo de torção θ .

onde ell é o comprimento do fio. Assim,

$$\begin{cases} \Delta S = r\theta \\ \Delta S = \ell\alpha \end{cases} \Rightarrow \alpha = \frac{r\theta}{\ell} \quad (59)$$

Substituindo este valor de α em 57, tem-se

$$M = \mu \frac{\theta}{\ell} \int_0^R 2\pi r dr \quad (60)$$

O integral é precisamente o momento polar de inércia da secção reta relativamente ao seu centro, I_0 .

Para o caso de uma secção circular o cálculo de I_0 é simples. De facto, sendo d o diâmetro do fio, tem-se

$$I_0 = \int_0^R r^2 2\pi r dr = 2\pi \int_0^R r^3 dr = 2\pi \frac{R^4}{4} = \frac{\pi R^4}{2} = \frac{\pi d^4}{32} \quad (61)$$

Donde:

$$M = \mu \frac{\theta}{\ell} I_0 = N\theta \quad (62)$$

com

$$N = \frac{\mu}{\ell} I_0 \quad \text{minipage} \quad (63)$$

A relação 62 estabelece a proporcionalidade entre M e θ .

(ii) Equilíbrio Dinâmico Depois de libertado, o corpo fica a oscilar sob a acção do momento que o fio exerce sobre ele. Em primeira aproximação, o movimento é oscilatório harmónico para um e outro lado da posição de equilíbrio. A condição de equilíbrio dinâmico de rotação do corpo é dada pelo teorema do momento cinético,

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} = \sum M_i \quad (64)$$

onde I é o momento de inércia (mecânico) do corpo relativamente ao eixo de rotação. No presente caso, atendendo a que o momento de reacção do fio é um vector com a mesma direcção e grandeza do momento de torção aplicado, mas de sentido contrário, tem-se

$$\sum M_i = M = -N\theta \quad (65)$$

onde

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} + N\theta = 0 \quad \text{minipage} \quad (66)$$

A solução desta equação diferencial dá a equação de movimento do pêndulo de torção

$$\theta = \theta_{max} \cos(\omega t + \phi) \quad \text{minipage} \quad (67)$$

com a frequência angular

$$\omega = \sqrt{\frac{N}{I}}$$

Verifica-se, assim, que o corpo oscila (roda em torno do eixo) com movimento oscilatório harmónico. Considerando a expressão 63 para N , tem-se

$$\omega = \sqrt{\frac{N}{I}} = \sqrt{\frac{\mu I_0}{\ell I}} \quad (68)$$

O período T da oscilação é

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{\ell I}{\mu I_0}} \Rightarrow T^2 = 4\pi^2 \frac{\ell I}{\mu I_0} \quad (69)$$

Atendendo á expressão 61 para I_0 , tem-se a relação que irá permitir determinar o módulo de rigidez do material que constitui o fio

$$\mu = \frac{4\pi^2 \ell}{I_0} \left(\frac{I}{T^2} \right) = \frac{128\pi\ell}{d^4} \left(\frac{I}{T^2} \right) \quad \text{minipage} \quad (70)$$

Notar que esta fórmula permite concluir que, para um mesmo fio, I/T^2 deverá ser constante, qualquer que seja a massa suspensa. é pois um bom critério para apreciar a confiança que merecem os resultados experimentais. Ressalta também a necessidade de medir o diâmetro do fio d com grande precisão já que este aparece elevado á quarta poéncia. O período T das oscilações deverá, também, ser medido cuidadosamente, pelas mesmas razões (segunda potência).

1.3.5 Momentos de inércia

Vão ser usados diversos corpos suspensos do fio, listando-se os momentos de inércia respetivos:

a) Momento de inércia do disco relativamente ao seu eixo:

$$I_D = \frac{MD^2}{8} \quad (71)$$

b) Momento de inércia da coroa cilíndrica relativamente ao seu eixo:

$$I_{CC} = \frac{M}{8} (D_1^2 + D_2^2) \quad (72)$$

c) Momento de inércia do prisma triangular relativamente ao eixo maior:

$$I_{P_{maior}} = \frac{Mb^2}{12} \quad (73)$$

d) Momento de inércia do prisma triangular relativamente ao eixo menor:

$$I_{P_{menor}} = \frac{M(2h^2 + b^2)}{24} \quad (74)$$

Assim, é apenas necessário determinar as massas M (por pesagem), os diâmetros D , a altura h e largura b duma face do prisma. Notar que o momento de inércia de um conjunto é igual á soma dos momentos de inércia das suas partes constituintes. Por exemplo, para o caso “Disco + Prisma com eixo maior vertical” tem-se

$$I = I_D + I_{P_{maior}} = \frac{MD^2}{8} + \frac{Mb^2}{12}$$

1.4 Referências

1. Worsnop, Flint, “Advanced Practical Physics for Students”, Methuen, cap. IV
2. Karman and Biot, “Mathematical Methods in Engineering”, McGraw-Hill, cap. VII
3. Searle, “Experimental Physics”, Cambridge U. Press, Cap. III
4. Timoshenko, Goodier, “Theory of Elasticity”
5. G. Bruhat, “Mécanique”, 6^a edição, Masson e C^{ie}, 1961

1.6 Ondas harmónicas

No caso de se considerarem apenas ondas do tipo harmónico, a dependência temporal pode escrever-se da forma seguinte (recorrendo a notação fasorial; ver notas do trabalho "Ponte de Anderson"):

$$v(z, t) = V(z)e^{j\omega t} \quad (14)$$

Substituindo na expressão 13 obtemos:

$$\frac{\partial^2 V(z)}{\partial z^2} = RGV(z) + (RC + LG) j\omega V(z) - LC\omega^2 V(z) \quad (15)$$

Sendo $Z = R + j\omega L$ a impedância série por unidade de comprimento e $Y = G + j\omega C$ a admitânciia paralela por unidade de comprimento, podemos escrever a expressão 15 na forma:

$$\frac{\partial^2 V(z)}{\partial z^2} = ZYV(z)$$

(16)

A corrente tem uma expressão semelhante:

$$\frac{\partial^2 I(z)}{\partial z^2} = ZYI(z)$$

(17)

As equações 16 e 17 estabelecem o comportamento da tensão e da corrente ao longo da linha, no caso de excitação harmónica.

Procuremos soluções do tipo $e^{\gamma z}$. Tratando-se de equações lineares de segunda ordem obtemos para $V(z)$ a seguinte expressão:

$$V(z) = V_1 e^{\gamma z} + V_2 e^{-\gamma z} \quad (18)$$

sendo $\gamma = \sqrt{ZY}$ e V_1 e V_2 constantes que podem ser obtidas das condições iniciais ou fronteira.

A constante γ designada por constante de propagação, é um número complexo em que a parte real é a **constante de atenuação** α e a parte imaginária o **número de onda** k :

$$\gamma = \alpha + jk \quad (19)$$

A solução geral da onda de tensão $v(z, t)$ tem finalmente a forma (em notação fasorial):

$$V(z, t) = V_1 e^{\alpha z} e^{j(\omega t + kz)} + V_2 e^{-\alpha z} e^{j(\omega t - kz)} = V_r(z, t) + V_i(z, t)$$

(20)

sendo: ω a **frequência angular**; $\omega = 2\pi\nu$ sendo ν a frequência das ondas; α a constante que caracteriza a **atenuação** por unidade de comprimento das ondas na linha; k o **número de onda**; $k = 2\pi/\lambda$, em que λ é o comprimento de onda e $v = \omega/k$ a velocidade de propagação das ondas; V_1 e V_2 constantes que dependem das condições iniciais ou fronteira.

A primeira parcela da expressão 20 ($V_r(z, t)$) representa uma **onda reflectida** deslocando-se no sentido negativo do eixo dos zz e a segunda parcela ($V_i(z, t)$) a **onda incidente**, que se propaga no sentido positivo. O factor $e^{\alpha z}$ ($e^{-\alpha z}$) indica que a onda de tensão

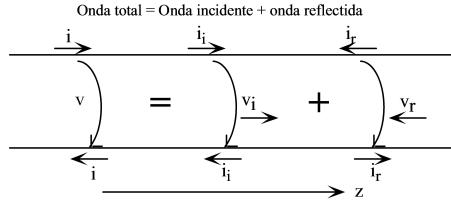


Figura 9: Sobreposição da onda reflectida $V_r(z, t)$ ($I_r(z, t)$) e da onda incidente $V_i(z, t)$ ($I_i(z, t)$)

diminui (diminui) de amplitude à medida que a onda se propaga no sentido negativo (positivo) do eixo dos zz .

Para obter a onda de $i(z, t)$ substitui-se a expressão 20 em 8 e em seguida integra-se em relação a z . Obtém-se finalmente:

$$I(z, t) = -\frac{V_1}{\sqrt{Z/Y}} e^{\alpha z} e^{j(\omega t + kz)} + \frac{V_2}{\sqrt{Z/Y}} e^{-\alpha z} e^{j(\omega t - kz)} = I_r(z, t) + I_i(z, t) \quad (21)$$

Observe-se que a onda de tensão (corrente) se obtém por sobreposição da onda reflectida $V_r(z, t)$ ($I_r(z, t)$) e da onda incidente $V_i(z, t)$ ($I_i(z, t)$), como se representa na figura 11.

Notar que $V(z, t)$ é medido no mesmo sentido entre condutores para ambas as ondas, mas $I(z, t)$ tem sentidos inversos para a onda incidente e a onda reflectida.

1.7 Impedância característica da linha de transmissão

Define-se impedância característica da linha Z_c , considerando uma onda que se propaga no sentido positivo do eixo dos zz , como a razão entre a tensão e a corrente na linha. Utilizando as expressões 20 e 21 obtém-se:

$$Z_c = -\frac{V_i(z, t)}{I_i(z, t)} = \sqrt{\frac{Z}{Y}} \quad (22)$$

Como Z é uma impedância e Y uma condutância, ambas por unidade de comprimento, resulta que Z_c é uma impedância, como seria de esperar. Para linhas ideais ($R = G = 0$), . Para uma linha coaxial ideal,

$$Z_c = \sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{\frac{\frac{\mu}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)}{\frac{2\pi\epsilon}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \quad (23)$$

Se as ondas se propagam no sentido negativo do eixo dos zz obtém-se (ver igualmente as expressões 20 e 21):

$$\frac{V_r(z, t)}{I_r(z, t)} = -Z_c \quad (24)$$

O sinal negativo que se observa na expressão 24 indica que a onda reflectida de corrente tem o sinal oposto ao da correspondente onda de tensão.

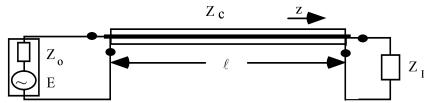


Figura 10: Linha de transmissão de comprimento ℓ e impedância característica Z_c , alimentada por uma fonte de força electromotriz E e impedância Z_o , e terminada por uma impedância de carga Z_L .

1.8 Constante de atenuação, número de onda e velocidade de propagação da fase

A constante de propagação complexa γ vale:

$$\gamma = \alpha + jk = \sqrt{ZY} = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)} \quad (25)$$

- Para uma linha ideal $R = G = 0$:

$$\alpha = 0 \quad (26)$$

$$k = \omega\sqrt{LC} \quad (27)$$

- Para baixas perdas ($R \ll \omega L$, $G \ll \omega C$), vem aproximadamente:

$$\alpha = \frac{1}{2}(RZ_c^{-1} + GZ_c) \quad (28)$$

$$\beta = \omega\sqrt{LC} \quad (29)$$

com $Z_c = \sqrt{L/C}$.

A fase das ondas incidente e reflectida propaga-se com uma velocidade $v = \omega/k$ (no sentido $+z$ para a onda incidente, e no sentido inverso para a onda reflectida).

Sendo, numa linha ideal, $k = \omega\sqrt{LC}$, vem:

$$v = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (30)$$

Para a linha coaxial, vem:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} \quad (31)$$

que é a velocidade de propagação de ondas electromagnéticas no dielétrico da linha. Esta é, aliás, uma conclusão geral, válida para qualquer linha de transmissão.

1.9 Reflexões numa linha de transmissão

Consideremos uma linha de transmissão de comprimento ℓ e impedância característica Z_c , alimentada por uma fonte de força electromotriz E e impedância Z_o , e terminada por uma impedância de carga Z_L (figura 10)

A impedância da carga Z_L pode ser expressa em função das ondas de tensão e de corrente na extremidade da linha ($z = \ell$) da seguinte forma:

$$Z_L = \frac{V(\ell, t)}{I(\ell, t)} \quad (32)$$

1.9.1 Reflexão à saída da linha

O coeficiente de reflexão à saída Γ_L relaciona as amplitudes das ondas de tensão reflectida e incidente à saída da linha ($z = \ell$):

$$\Gamma_L = \frac{V_r(\ell, t)}{V_i(\ell, t)} \quad (33)$$

Utilizando as expressões 20, 21, 22 e 32 pode verificar-se que o coeficiente de reflexão Γ_L se relaciona com a impedância característica Z_c e a impedância da carga Z_L da seguinte forma:

$$\Gamma_L = \frac{V_r(\ell, t)}{V_i(\ell, t)} = -\frac{I_r(\ell, t)}{I_i(\ell, t)} = \frac{Z_L - Z_c}{Z_L + Z_c} \quad (34)$$

A **adaptação da linha** a uma carga colocada na sua extremidade é tanto melhor quanto menor for a amplitude de onda reflectida. O valor ótimo é $Z_L = Z_c$, que resulta em $\Gamma_L = 0$. De forma geral, $0 \leq |\Gamma_L| \leq 1$, e Γ_L será complexo.

Pode considerar-se alguns casos particulares interessantes:

1. $\Gamma_L > 0$: a corrente inverte o sinal mas a tensão não.
2. $Z_L \rightarrow \infty$, $\Gamma_L = 1$ (linha aberta).
3. $Z_L = 0$, $\Gamma_L = -1$: a tensão inverte o sinal mas a corrente não (linha em curto circuito).
4. A adaptação de impedância da carga à linha de transmissão ocorre quando $Z_L = Z_c$; o coeficiente Γ_L é nulo e por isso não há onda reflectida à saída.

1.9.2 Reflexão à entrada da linha

O coeficiente de reflexão à entrada Γ_o relaciona a amplitude da onda reflectida à entrada ($z = 0$) (correspondente à onda que se propaga no sentido negativo do eixo dos zz : onda reflectida na extremidade da linha ($z = \ell$)), com a amplitude da onda incidente no mesmo ponto ($z = 0$).

Seja τ o tempo que a onda demora a propagar-se de um extremo ao outro extremo da linha de comprimento ℓ . A expressão da velocidade de propagação tem a forma $v = \ell/t$. Se ligarmos a fonte no instante de tempo $t = 0$, para $t < 2\tau$ apenas a onda incidente existe no início da linha. Aplicando ao circuito ligado no início da linha a lei das malhas, obtém-se a expressão:

$$E(t) - Z_o I_i(0, t) = V_i(0, t) \quad (35)$$

em que

$$V_i(0, t) = Z_c I_i(0, t) \quad (36)$$

Para tempos iguais ou superiores a 2τ existem três ondas distintas à entrada da linha: a onda incidente (V_i , I_i), a onda reflectida pela carga na saída da linha (V'_i , I'_i) e a onda reflectida desta onda à entrada (V''_i , I''_i). Considerando estas três componentes, a expressão 35 transforma-se em:

$$E(t) - Z_o [I_i(0, t) + I'_i(0, t) + I''_i(0, t)] = V_i(0, t) + V'_i(0, t) + V''_i(0, t) \quad (37)$$

em que

$$I_i = \frac{V_i}{Z_c}, \quad I'_i = -\frac{V'_i}{Z_c} \quad e \quad I'_r = \frac{V'_r}{Z_c} \quad (38)$$

O coeficiente de reflexão Γ_0 à entrada da linha relaciona a onda de tensão reflectida pela carga na saída da linha ($V'_i(0, t)$) e a onda de tensão reflectida desta onda à entrada ($V'_r(0, t)$):

$$\Gamma_0 = \frac{V'_r(0, t)}{V'_i(0, t)} \quad (39)$$

Utilizando as expressões 20, 21, 35 e 37 pode verificar-se que o coeficiente de reflexão Γ_0 se relaciona com a impedância característica Z_c e a impedância da fonte Z_o da seguinte forma:

$$\Gamma_0 = \frac{V'_r(0, t)}{V'_i(0, t)} = -\frac{I'_r(0, t)}{I'_i(0, t)} = \frac{Z_o - Z_c}{Z_o + Z_c} \quad (40)$$

Pode considerar-se alguns casos particulares interessantes:

1. $\Gamma_0 > 0$: a corrente inverte o sinal mas a tensão não.
2. $Z_o \rightarrow \infty$, $\Gamma_0 = 1$.
3. $Z_o = 0$, $\Gamma_0 = -1$: a tensão inverte o sinal mas a corrente não.
4. A adaptação de impedância da carga à linha de transmissão ocorre quando $Z_o = Z_c$; o coeficiente Γ_0 é nulo e por isso não há onda reflectida à saída.

1.10 Referências

1. W.T. Scoot, “The Physics of Electricity and Magnetism”, Wiley, New York
2. R.B. Adler, “Electromagnetic Energy Transmission and Radiation”, Wiley, New York
3. A.M. Portis, “Electromagnetic Fields: Sources and Media”, Wiley, New York
4. D. Halliday and R. Resnick, “Physics”, Wiley, New York
5. “American Institute of Physics Handbook”, McGraw-Hill, New York
6. K.F. Sander, G.A.L. Reed, “Transmission and Propagation of Electromagnetic Waves”, Cambridge University Press
7. S. Ramo, J.R. Whinnery, Th. Van Duzer, “Fields and Waves in Communication Electronics”, J. Wiley