

13.5

## Coeficiente de viscosidade da água - Lei de Poiseuille

Marta Teixeira

Licenciatura em Engenharia Física

separado do resto

### 1 Resumo

~~2~~ Durante a realização da experiência, foram recolhidos os dados da diferença de alturas manométricas, volume e tempo em vários ensaios para diferentes valores de altura e volumes. Depois, foi feita uma análise gráfica de  $P(Q)$  com os dados médios dos ensaios para cada valor de volume. Obtiveram-se as conclusões desejadas e um valor experimental da viscosidade da água próximo do tabelado:  $\eta = (0.91 \pm 0.03) \text{ mPa} \cdot \text{s}$  com uma incerteza relativa de  $u(\eta) = 3\%$  e um erro percentual de  $\varepsilon\% = 2\%$ . (temperatura ?)

### 2 Introdução

Os objetivos deste trabalho são o estudo da lei de Poiseuille e a determinação experimental do coeficiente de viscosidade da água usando o método do escoamento num tubo capilar cilíndrico.

O teorema de Stevin é dado pela seguinte expressão [2]:

$$P = \rho gh \quad (1)$$

onde  $P$  é diferença de pressão hidrostática,  $\rho$  é a densidade do líquido em questão e  $h$  é a diferença de altura entre as colunas de água.

A expressão que relaciona o caudal com o volume é a seguinte [1]:

$$Q = \frac{V}{\Delta t} \quad (2)$$

onde  $Q$  é o caudal e  $\Delta t$  é o intervalo de tempo.

A lei de Poiseuille é dada pela seguinte expressão [1]:

$$P = \eta \frac{8l}{\pi R^4} Q \Leftrightarrow Q = \frac{\pi R^4}{\eta 8l} P \quad (3)$$

onde  $P$  é diferença de pressão hidrostática,  $\eta$  é a viscosidade do líquido em questão,  $l$  é o comprimento do tubo,  $Q$  é o caudal e  $R$  é o raio do tubo.

### 3 Experiência

#### 3.1 Método Experimental

##### 3.1.1 Montagem Experimental

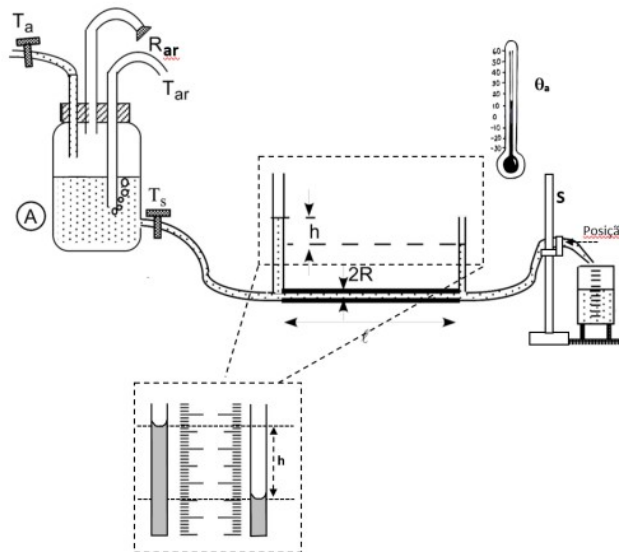


Figura 1: Montagem experimental do método de Poiseuille

##### 3.1.2 Material

- Depósito de água com torneira
- Rolha com tubos
- Tubos de água
- Termômetro
- Proveta
- Suportes
- Régua

### 3.2 Análise e tratamento de dados

$g(\text{ms}^{-2})$	9.80665
$\rho(\text{kg m}^{-3})$ a $T=20^\circ\text{C}$	998.23

*Tabela 1*

~~Figura 2:~~ Constantes relativas à água

Antes de começar a experiência, foram medidos os valores do comprimento,  $l$  e raio,  $R$  do tubo capilar. ~~Foram também registados os valores das incertezas dos instrumentos usados durante a execução da experiência.~~

Tubo capilar	
$R(\text{m})$	3.96E-04
$u(D) (\text{m})$	5.00E-06
$l(\text{m})$	0.326
$u(l) (\text{m})$	0.00005

*Tabela 2*

~~Figura 3:~~ Dimensões do tubo capilar

Incertezas dos instrumentos	
$u(\text{proveta}) (\text{mm})$	0.25
$u(\text{cronómetro}) (\text{s})$	0.01
$u(\text{régua}) (\text{mm})$	0.05

*Tabela 3*

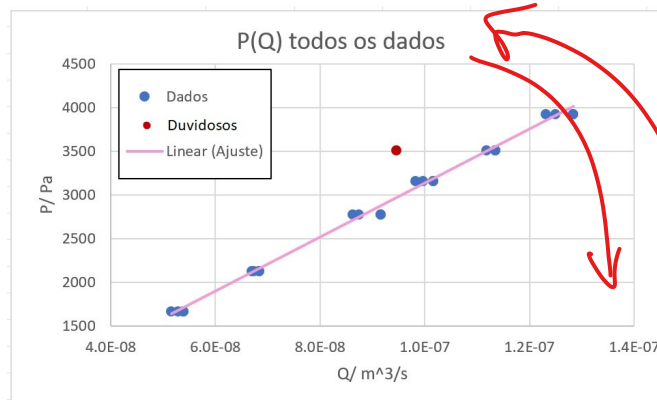
~~Figura 4:~~ Incertezas relativas aos instrumentos usados

Durante a execução da experiência foram registados, ~~na figura 27 em anexo~~, para cada um dos ensaios, os valores de volume,  $V$ , tempo,  $t$ , altura da água nos dois tubo paralelos,  $h_{\text{max}}$  e  $h_{\text{min}}$ , e temperatura,  $T$ . A partir desses valores, foram calculados os valores da diferenças de alturas manométricas,  $h$ , o caudal,  $Q$ , e respetivas incertezas.

Com os dados obtidos, foi traçado o gráfico de  $P(Q)$  para todos os dados.

*como se mostra na*

*fig 2*



~~Figura 2:~~ Gráfico de  $P(Q)$  com todos os dados

*$\mu(Q)$  é mais relevante*

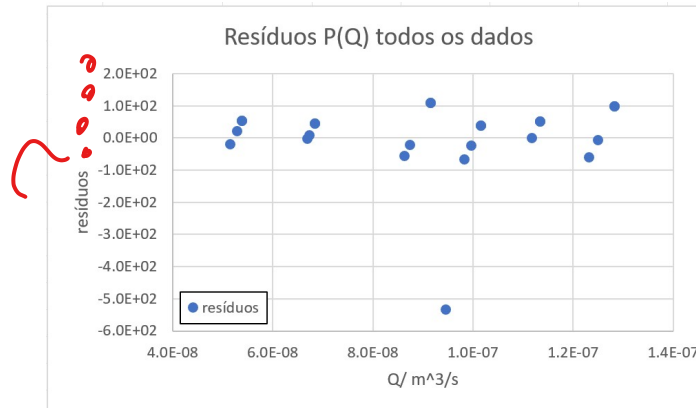
É comprovado pelo valor próximo a 1 de  $R^2$  que  $P$  e  $Q$  têm uma relação de proporcionalidade direta. No entanto, é visível um pouco duvidoso no ajuste, comprovado pelo gráfico de resíduos da figura 7.

*A análise pretendida não é a dada por mas sim por  $\bar{Q}(P)$ !*

⊕ Só assim é que consegue comparar a incl. exp. com a dispersão (em gráfico de resíduos)

m	3.1E+10	41	b
u(m)	1E+09	1E+02	u(b)
R^2	0.98	127	sy

Figura 6: Tabela do ajuste linear do gráfico de  $P(Q)$  com todos os dados



NOTA: Todas as análises preliminares vão p/ anexo!

Figura 7: Gráfico de resíduos de  $P(Q)$  com todos os dados

Observando o gráfico da figura 7, comprova-se a existência do ponto duvidoso. Enquanto que os restantes resíduos estão bastante próximos de 0, existe um dado que se afasta significativamente dos outros. Por isso, foi feita uma segunda análise de todos os gráfico sem o dado duvidoso.

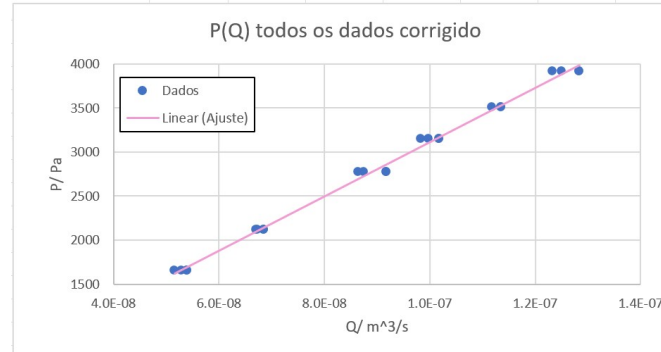


Figura 8: Gráfico de  $P(Q)$  com todos os dados

Observando o novo valor de  $R^2$ , concluímos que a segunda análise é um melhor ajuste aos restantes dos dados.

m	3.1E+10	30	b
u(m)	4E+08	4E+01	u(b)
R^2	0.996	53.1	sy

Figura 9: Tabela do ajuste linear do gráfico de  $P(Q)$  com todos os dados

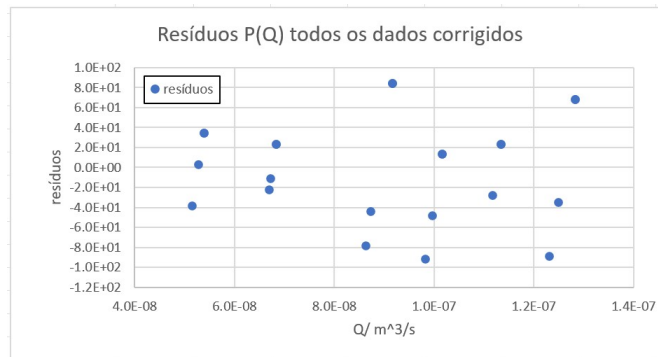


Figura 10: Gráfico de resíduos de  $P(Q)$  com todos os dados

Os resíduos aparentam ser aleatórios e situam-se próximos de 0.

De seguida, foram traçados os gráfico de  $P(Q)$  para cada volume registado:  $5\text{cm}^3$ ,  $10\text{cm}^3$ ,  $15\text{cm}^3$  e  $20\text{cm}^3$ . Os valores usados para traçar todos os gráfico são as médias dos valores de  $P$  e  $Q$  dos ensaios correspondentes a cada posição.

Para  $5\text{cm}^3$ :

Posição	P/Pa	Q/(m3/s)
1	3502	1.2E-07
2	3155	1.1E-07
3	2774	9.4E-08
4	2119	7.3E-08
5	1659	5.7E-08
6	3921	1.4E-07

Figura 11: Tabela dos valores de  $5\text{cm}^3$

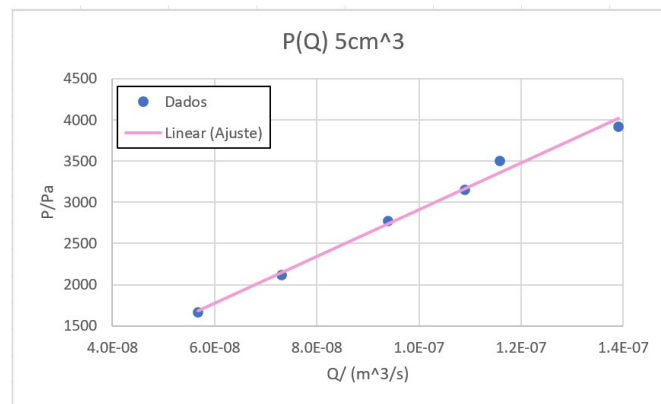


Figura 12: Gráfico de  $P(Q)$  para  $5\text{cm}^3$

m	2.8E+10	74	b
u(m)	1E+09	1E+02	u(b)
R^2	0.991	89.8	sy

Figura 13: Tabela do ajuste linear do gráfico de  $P(Q)$  para  $5\text{cm}^3$

O ajuste linear parece adequado dado que o  $R^2$  é próximo de 1.

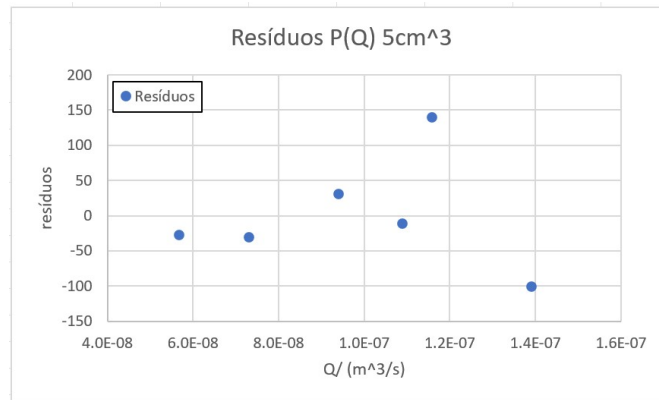


Figura 14: Gráfico de resíduos de  $P(Q)$  para  $5cm^3$

O resíduos aparentam ser aleatórios e próximos de 0. Este encontram-se dentro do intervalo de  $[-2\sigma_y; 2\sigma_y]$ , ou seja, não há pontos duvidosos.

Cálculo de  $\eta$ :

$$m = \eta \frac{8l}{\pi R^4} \Leftrightarrow \eta = \frac{m\pi R^4}{8l}$$

Expressão da incerteza de  $\eta$ :

$$u(\eta) = \sqrt{\left(\frac{4\pi R^3 m u(R)}{8l}\right)^2 + \left(\frac{\pi R^4 u(m)}{8l}\right)^2 + \left(\frac{\pi R^4 u(l)}{8l^2}\right)^2}$$

$$u(R) = \frac{u(D)}{2} \Leftrightarrow u(R) = \frac{5 \cdot 10^{-6}}{2} = 2.5 \cdot 10^{-6}$$

$$u(m) = 1 \cdot 10^9$$

$$u(l) = 5 \cdot 10^{-5}$$

assim,  $\eta(V = 5cm^3) = (0.83 \pm 0.04)mPa \cdot s$

e  $u(\eta) = 5\%$

Para  $10cm^3$ :

Posição	P/Pa	Q/(m3/s)
1	3507	1.1E-07
2	3155	1.0E-07
3	2774	9.2E-08
4	2119	6.8E-08
5	1659	5.4E-08
6	3921	1.3E-07

Figura 15: Tabela dos valores de  $10cm^3$

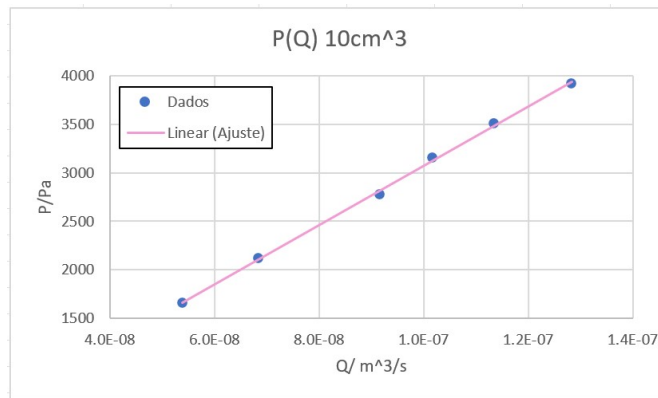


Figura 16: Gráfico de  $P(Q)$  para  $10\text{cm}^3$

<b>m</b>	3.1E+10	14	<b>b</b>
<b>u(m)</b>	5E+08	5E+01	<b>u(b)</b>
<b>R²</b>	0.9990	30.8	<b>sy</b>

Figura 17: Tabela do ajuste linear do gráfico de  $P(Q)$  para  $10\text{cm}^3$

O ajuste linear parece adequado dado que o  $R^2$  é próximo de 1.

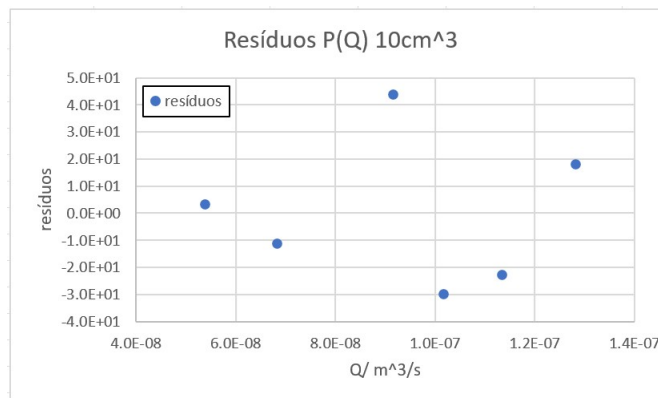


Figura 18: Gráfico de resíduos de  $P(Q)$  para  $10\text{cm}^3$

O resíduos aparentam ser aleatórios e próximos de 0. Este encontram-se dentro do intervalo de  $[-2\sigma_y; 2\sigma_y]$ , ou seja, não há pontos duvidosos. Cálculo de  $\eta$ :

$$\eta(V = 10\text{cm}^3) = (0.92 \pm 0.03)\text{mPa} \cdot \text{s}$$

$$\text{e } u(\eta) = 3\%$$

Para  $15\text{cm}^3$ :

Posição	P/Pa	Q/(m <sup>3</sup> /s)
1	3507	1.1E-07
2	3155	1.0E-07
3	2772	8.7E-08
4	2119	6.7E-08
5	1659	5.3E-08
6	3921	1.2E-07

Figura 19: Tabela dos valores de  $15\text{cm}^3$

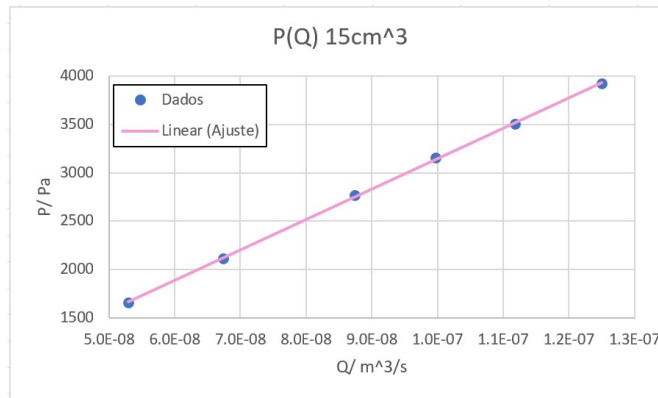


Figura 20: Gráfico de  $P(Q)$  para  $15\text{cm}^3$

<b>m</b>	3.1E+10	11	<b>b</b>
<b>u(m)</b>	3E+08	2E+01	<b>u(b)</b>
<b>R<sup>2</sup></b>	0.9997	15.5	<b>sy</b>

Figura 21: Tabela do ajuste linear do gráfico de  $P(Q)$  para  $15\text{cm}^3$

O ajuste linear parece adequado dado que o  $R^2$  é próximo de 1.

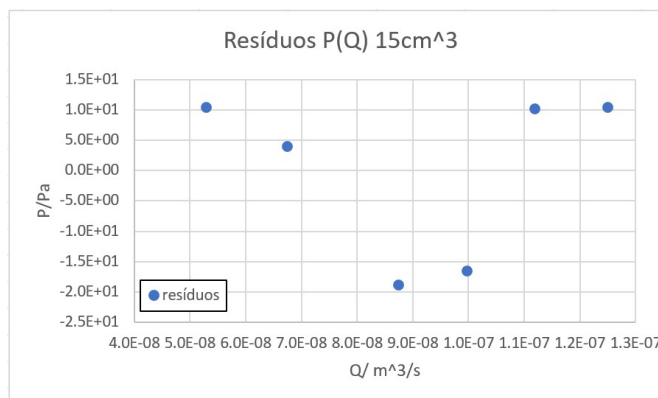


Figura 22: Gráfico de resíduos de  $P(Q)$  para  $15\text{cm}^3$

O resíduos aparentam ser aleatórios e próximos de 0. Este encontram-se dentro do intervalo de  $[-2\sigma_y; 2\sigma_y]$ , ou seja, não há pontos duvidosos.



Cálculo de  $\eta$ :

$$\eta(V = 15\text{cm}^3) = (0.92 \pm 0.02)\text{mPa} \cdot \text{s}$$

$$\text{e } u(\eta) = 2\%$$

Para  $20\text{cm}^3$ :

Posição	P/Pa	Q/(m3/s)
1	3507	9.5E-08
2	3155	9.8E-08
3	2772	8.6E-08
4	2119	6.7E-08
5	1659	5.2E-08
6	3921	1.2E-07

Figura 23: Tabela dos valores de  $20\text{cm}^3$

Os dados a vermelho são correspondentes ao ponto duvidoso comentado no início da análise. Esse ponto não foi incluído nos seguintes gráficos.

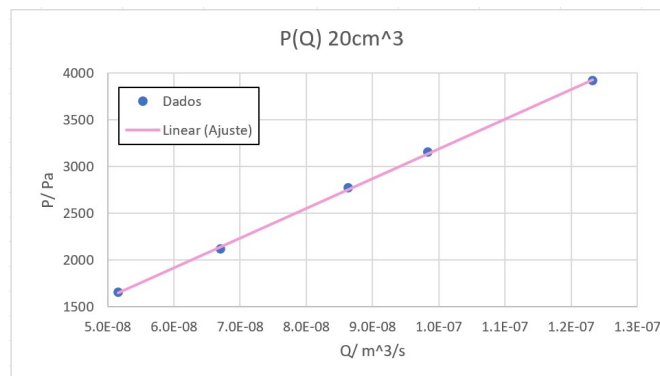


Figura 24: Gráfico de  $P(Q)$  para  $20\text{cm}^3$

m	3.2E+10	14	b
u(m)	4E+08	3E+01	u(b)
R^2	0.9996	19.6	sy

Figura 25: Tabela do ajuste linear do gráfico de  $P(Q)$  para  $20\text{cm}^3$

O ajuste linear parece adequado dado que o  $R^2$  é próximo de 1.

↑ tudo isto, quanto mais, em anexo!  
↓ Isto só serve p/ fazer escolhas sobre  
que dados considerar para  $\bar{Q}(\bar{P})$ !

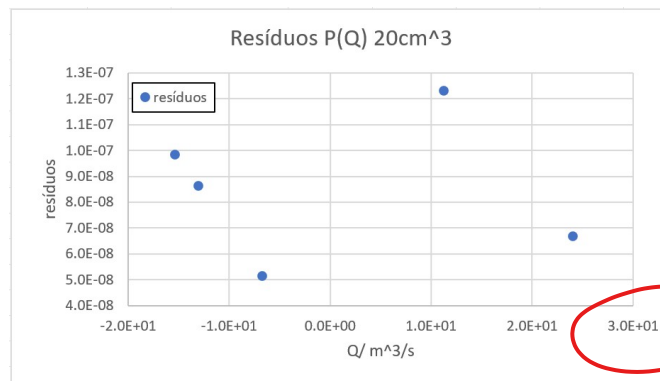


Figura 26: Gráfico de resíduos de  $P(Q)$  para  $20\text{cm}^3$

O resíduos aparentam ser aleatórios e próximos de 0. Este encontram-se dentro do intervalo de  $[-2\sigma_y; 2\sigma_y]$ , ou seja, não há pontos duvidosos.

Cálculo de  $\eta$ :

$$\eta(V = 20\text{cm}^3) = (0.95 \pm 0.03)\text{mPa} \cdot \text{s}$$

$$\text{e } u(\eta) = 3\%$$

A temperatura varia no intervalo de  $[23.6; 24.2]\text{K}$ . Os valores tabelados [3] da viscosidade da água são  $\eta(20^\circ\text{C}) = 1.002\text{mPa} \cdot \text{s}$  e  $\eta(25^\circ\text{C}) = 0.89\text{mPa} \cdot \text{s}$ . Tal como, quer a média aritmética,  $\bar{T} = 23.9\text{K}$ , quer a média geométrica,  $\bar{T} = 23.8\text{K}$ , das temperaturas ao longo da experiência estão mais perto de  $25^\circ\text{C}$ , usaremos  $\eta(25^\circ\text{C}) = 0.89\text{mPa} \cdot \text{s}$  como o valor referência.

Valor médio da viscosidade (média dos valores calculados para cada volume):  $\bar{\eta} = (0.91 \pm 0.03)\text{mPa} \cdot \text{s}$

Incerteza relativa:  $u(\bar{\eta}) = 3\%$

$$\eta_{ref} = 0.89\text{mPa} \cdot \text{s}$$

$$\varepsilon\% = \frac{|\bar{\eta} - \eta_{ref}|}{\eta_{ref}} * 100 = 2\%$$

Concluimos que, como o erro percentual é baixo, o valor obtido é adequado.

## 4 Conclusão

- Conclui-se que foi comprovada a lei de Poiseuille a partir da comprovação de proporcionalidade entre a pressão hidrostática,  $P$ , e o caudal,  $Q$ , e o valor obtido da viscosidade experimentalmente da água,  $\eta$ , pois este se encontra próximo do tabelado.
- O valor obtido experimentalmente para a viscosidade da água foi:

$$\bar{\eta} = (0.91 \pm 0.03)\text{mPa} \cdot \text{s}$$

com uma incerteza relativa de  $u(\bar{\eta}) = 3\%$  e um erro percentual de  $\varepsilon\% = 2\%$  relativo ao valor tabelado [3] para  $25^\circ\text{C}$ .

- É possível chegar à conclusão de que o resultado experimental poderia ter sido melhor não apenas para o caso do valor da temperatura se ter mantido mais estável como também se tivéssemos um valor de referência da viscosidade da água mais perto do valor da temperatura a qual a experiência foi executada.

- Havia duas possíveis formas de calcular experimentalmente a viscosidade da água, quer pelas médias dos valores de  $Q$  e  $P$  para vários ensaios, quer para uma análise gráfica de  $P(Q)$ . A análise apresentada foi feita através da junção das duas técnicas pois foram efetuados vários ensaios para as mesmas alturas e volumes e realizadas análises gráficas.

## 5 Referências

- [1] Protocolo T1: "Coeficiente de viscosidade da água - Lei de Poiseuille" – Laboratórios de Física II - 2022/2023
- [2] Rafael C. Asth, Teorema de Stevin: Lei Fundamental da Hidrostática, [Online; retirado no dia 25 de maio de 2023]. 2023 URL: <https://www.todamateria.com.br/teorema-de-stevin/>
- [3] Gelson Luz, Viscosidade da Água, [Online; retirado no dia 27 de maio de 2023]. 2023 URL: <https://www.materiais.gelsonluz.com/da-agua-tabela.html>

NOTA: a análise não foi feita de forma adequada!

- Não explorou a influência de  $\theta$  sobre  $\eta$ , nem na exp. nem no valor de referência ( $\bar{\theta}$  é errado)
- $Q(P)$ , não  $P(Q)$
- $\bar{Q}(\bar{P})$ , não  $Q_k(P_k)$  e depois tirar médias!

## 6 Anexos

Posição	Ensaio	V (± 0.25 cm³)	V (± 0.25 10 <sup>-6</sup> m³)	t(± 0.01 s)	hmin (± 0.005 cm)	hmax (± 0.005 cm)	h (m)	P(Pa)	Q(m³/s)	u(Q) (m³/s)	T (± 0.1 °C)
1	1	5	0.000005	43.65	6.70	42.45	0.3575	3500	1.1E-07	5.73E-09	23.6
	2	5	0.000005	42.69	6.70	42.50	0.3580	3505	1.2E-07	5.86E-09	23.6
2	1	5	0.000005	47.89	10.65	42.90	0.3225	3157	1.0E-07	5.22E-09	23.7
	2	5	0.000005	44.09	10.70	42.90	0.3220	3152	1.1E-07	5.67E-09	23.7
3	1	5	0.000005	52.77	14.90	43.20	0.2830	2770	9.5E-08	4.74E-09	23.7
	2	5	0.000005	51.55	14.90	43.25	0.2835	2775	9.7E-08	4.85E-09	23.8
	3	5	0.000005	55.37	14.90	43.25	0.2835	2775	9.0E-08	4.52E-09	23.8
4	1	5	0.000005	68.52	22.30	43.95	0.2165	2119	7.3E-08	3.65E-09	23.8
	2	5	0.000005	68.22	22.25	43.90	0.2165	2119	7.3E-08	3.66E-09	23.8
5	1	5	0.000005	87.19	27.50	44.45	0.1695	1659	5.7E-08	2.87E-09	23.8
	2	5	0.000005	88.94	27.50	44.45	0.1695	1659	5.6E-08	2.81E-09	23.9
6	1	5	0.000005	35.14	2.20	42.25	0.4005	3921	1.4E-07	7.11E-09	24.1
	2	5	0.000005	36.83	2.20	42.25	0.4005	3921	1.4E-07	6.79E-09	24.2
1	1	10	0.000010	89.21	6.70	42.50	0.3580	3505	1.1E-07	2.80E-09	23.6
	2	10	0.000010	87.07	6.65	42.50	0.3585	3509	1.1E-07	2.87E-09	23.6
2	1	10	0.000010	101.14	10.65	42.90	0.3225	3157	9.9E-08	2.47E-09	23.7
	2	10	0.000010	95.64	10.70	42.90	0.3220	3152	1.0E-07	2.61E-09	23.7
3	1	10	0.000010	102.26	14.90	43.20	0.2830	2770	9.8E-08	2.44E-09	23.7
	2	10	0.000010	111.07	14.90	43.25	0.2835	2775	9.0E-08	2.25E-09	23.8
	3	10	0.000010	114.70	14.90	43.25	0.2835	2775	8.7E-08	2.18E-09	23.8
4	1	10	0.000010	146.90	22.30	43.95	0.2165	2119	6.8E-08	1.70E-09	23.8
	2	10	0.000010	145.20	22.30	43.95	0.2165	2119	6.9E-08	1.72E-09	23.8
5	1	10	0.000010	184.80	27.50	44.45	0.1695	1659	5.4E-08	1.35E-09	23.8
	2	10	0.000010	186.23	27.50	44.45	0.1695	1659	5.4E-08	1.34E-09	23.9
6	1	10	0.000010	77.38	2.20	42.25	0.4005	3921	1.3E-07	3.23E-09	24.1
	2	10	0.000010	78.47	2.20	42.25	0.4005	3921	1.3E-07	3.19E-09	24.2
1	1	15	0.000015	134.98	6.70	42.50	0.3580	3505	1.1E-07	1.85E-09	23.6
	2	15	0.000015	133.37	6.65	42.50	0.3585	3509	1.1E-07	1.87E-09	23.6
2	1	15	0.000015	153.55	10.65	42.90	0.3225	3157	9.8E-08	1.63E-09	23.7
	2	15	0.000015	147.44	10.70	42.90	0.3220	3152	1.0E-07	1.70E-09	23.7
3	1	15	0.000015	172.25	14.90	43.20	0.2830	2770	8.7E-08	1.45E-09	23.7
	2	15	0.000015	169.99	14.90	43.20	0.2830	2770	8.8E-08	1.47E-09	23.8
	3	15	0.000015	172.42	14.90	43.25	0.2835	2775	8.7E-08	1.45E-09	23.8
4	1	15	0.000015	223.69	22.30	43.95	0.2165	2119	6.7E-08	1.12E-09	23.8
	2	15	0.000015	221.70	22.30	43.95	0.2165	2119	6.8E-08	1.13E-09	23.8
5	1	15	0.000015	282.80	27.50	44.5	0.1695	1659	5.3E-08	8.84E-10	23.8
	2	15	0.000015	284.37	27.50	44.45	0.1695	1659	5.3E-08	8.79E-10	23.9
6	1	15	0.000015	119.33	2.20	42.25	0.4005	3921	1.3E-07	2.10E-09	24.1
	2	15	0.000015	120.69	2.20	42.25	0.4005	3921	1.2E-07	2.07E-09	24.2
1	1	20	0.000020	213.48	6.70	42.50	0.3580	3505	9.4E-08	1.17E-09	23.6
	2	20	0.000020	209.17	6.65	42.50	0.3585	3509	9.6E-08	1.20E-09	23.6
2	1	20	0.000020	206.25	10.65	42.90	0.3225	3157	9.7E-08	1.21E-09	23.7
	2	20	0.000020	200.71	10.70	42.90	0.3220	3152	1.0E-07	1.25E-09	23.7
3	1	20	0.000020	230.93	14.90	43.20	0.2830	2770	8.7E-08	1.08E-09	23.7
	2	20	0.000020	231.59	14.90	43.20	0.2830	2770	8.6E-08	1.08E-09	23.8
	3	20	0.000020	232.36	14.90	43.25	0.2835	2775	8.6E-08	1.08E-09	23.8
4	1	20	0.000020	298.48	22.30	43.95	0.2165	2119	6.7E-08	8.38E-10	23.8
	2	20	0.000020	298.67	22.30	43.95	0.2165	2119	6.7E-08	8.37E-10	23.8
5	1	20	0.000020	393.16	27.50	44.45	0.1695	1659	5.1E-08	6.36E-10	23.8
	2	20	0.000020	382.99	27.50	44.45	0.1695	1659	5.2E-08	6.53E-10	23.9
6	1	20	0.000020	162.36	2.20	42.25	0.4005	3921	1.2E-07	1.54E-09	24.1
	2	20	0.000020	162.21	2.20	42.25	0.4005	3921	1.2E-07	1.54E-09	24.2

Figura 27: Tabelas de dados retirados durante a execução da experiência

Expressão para o cálculo da incerteza do caudal,  $Q$ , na tabela 27:

$$u(Q) = \sqrt{\left(\frac{u(V)}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{u(\Delta t)}{\Delta t^2} V\right)^2} \quad (4)$$