

T4B - Determinação de módulos elásticos de materiais pelo método das vibrações de umro barro emcastrado e pelo pêndulo de tensão. → Falta nome na identificação

Sérgio Quelhas

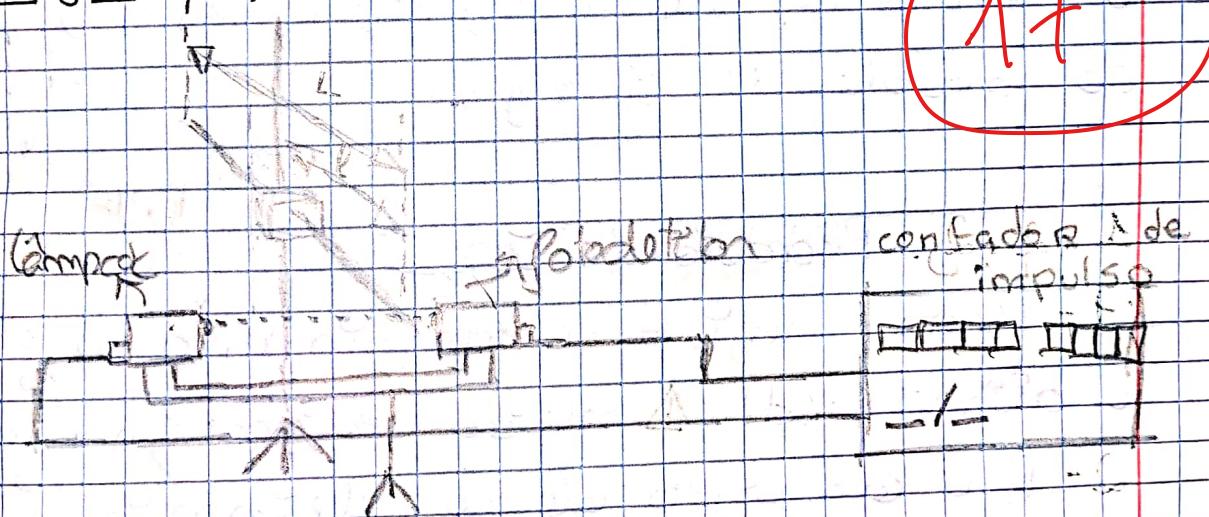
Fernando de Souza PL6 TG2 Sub A, do ficheiro

objectivos:

- Explorar o método de vibrações de barro emcastrado
- Determinar o módulo de Young do material de Almo barro pelo
- Utilizando o pêndulo de tensão, calcular os momentos de inércia das peças suspensas.
- Determinar o módulo de rigidez do material do fio de suspensão.

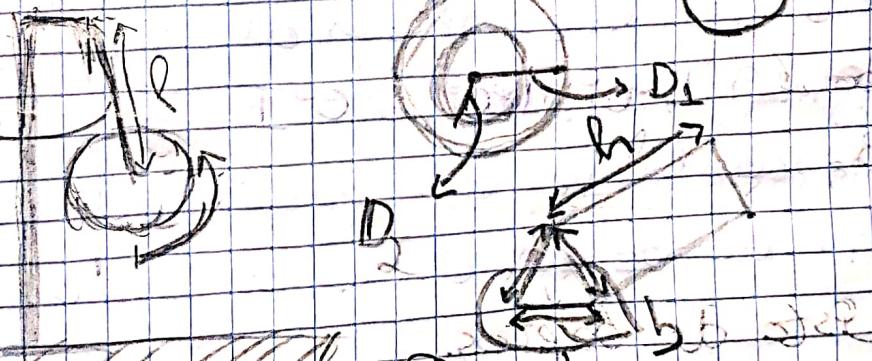
### E Montagem experimental

17



Montagem experimental (1) - Figura 1

fio deve estar esticado



Montagem experimental (2) - Figura 2

## Experição experimental

### 1.2.1. Barra emcastrada

1. Preparar a montagem experimental de Figura 1
2. Registar o tempo que demora a descer para cada ensaio, ( $i$  é número de impulsos),  $i = 52, 101$  e  $151$
3. Fazer uma força vertical contra a barra e realizar medições. Deve utilizar o método mais adequado
4. Escolher o gámo experimental mais adequado com base na equação 1.
- 5 - Distribuir homogeneamente os valores de  $l$ , e para cada medição registar  $l$ ,  $t$  e  $i$ .
- 6 - Através dos valores registados calcula o valor do módulo de Young

### 1.2.2. Pêndulo de Torco

- 1 - Medir e registar o comprimento do fio ( $l$ ), o diâmetro ( $d$ )  $\Delta$  medida realizada em vários pontos do fio
- 2 - Para cada objeto colocado, determinar o tempo  $t$ , correspondente a 10 oscilações completas, para diferentes valores de amplitude máxima ( $\Theta_{max}$ ) [ $90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$ ].
- 3 - Calcula para cada ensaio o momento de inércia de cada objeto utilizado

Lista de objetos.

- Disco + prisma, com o eixo maior vertical
- Disco + prisma, com o eixo maior horizontal
- Disco + cone cilindrica
- Disco + cone cilindrica + prisma como eixo maior horizontal



Não devemos esquecer notação no perímetro

Equações de

$$(1) \frac{T}{\pi D^2} = 5,029 \frac{\rho l^4}{E}, \quad \rho - \text{densidade do material da barra}$$

Fazem  
equações  
evidentes

$$(2) I = \frac{\rho l^4}{128 \pi D^4} \frac{1}{T}$$

E - módulo de Young.

D - diâmetro da barra

T - valor médio do período

l - comprimento da giro barra utilizada

$\mu$  - módulo de rigidez

I - momento de Inércia

l - comprimento do giro

Tabela de cálculo do

Momento de Inércia

Disco  $I_d = \frac{\rho D^4}{8}$

Cone Cônico  $I_{cc} = \frac{\rho}{8} (D_1^2 + D_2^2)$

Prisma triangular relativamente ao eixo maior b  $I_{P_{\text{maior}}} = \frac{\rho b^3}{12}$

Prisma triangular relativamente ao eixo menor b  $I_{P_{\text{menor}}} = \frac{\rho (2h + b^2)}{24}$

Para associar a devemos somar ex:  $I_{P_{\text{maior}}} + I_{P_{\text{menor}}} = \frac{\rho D^4}{8} + \frac{\rho D^4}{12}$

Tabela 1 - Tabela de cálculo do momento de Inércia para cada objeto

Formulão 1  $\Rightarrow E = 5,029 \frac{\pi l^4}{D^2 T} \rho^4 = 5,029 \frac{\pi \rho l}{D^2 m}$

### 3. Análise de dados

\* Valores corretos  
dos objetos rescatados

Parte 1 - Bala embasturada. Pode ser considerada mais eficiente

Registramos os valores de tempo médio para realizar 50, 100 e 150 impulsos ( $i=51$ ,  $i=101$ ,  $i=151$ ). Foi realizada a tabela dos valores e nele aparece os seguintes gráficos.

para  $i=51$  impulsos.

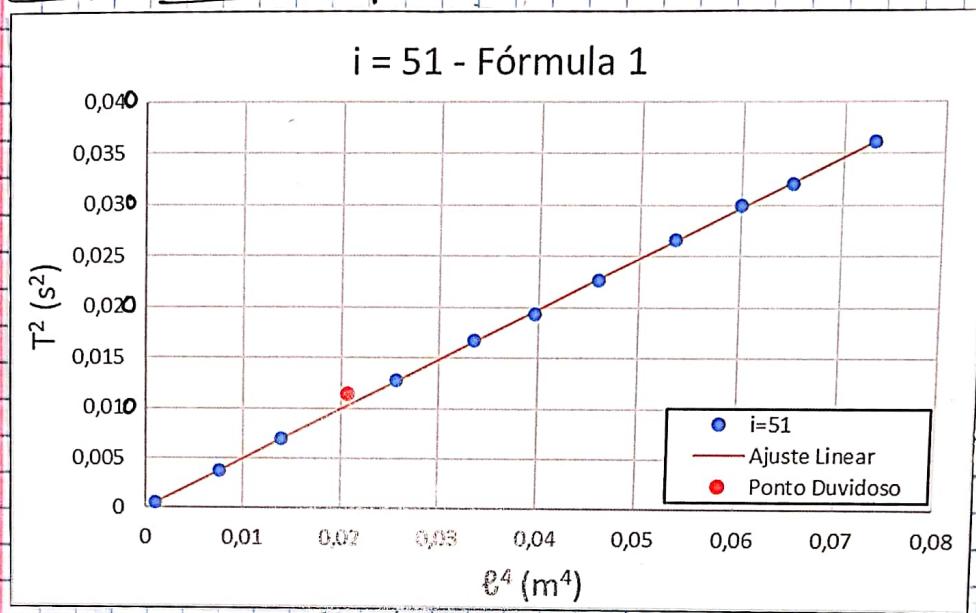


Gráfico 1 - gráfico de  $T^2 (l^4)$  usando Fórmula 1 para  $i=51$

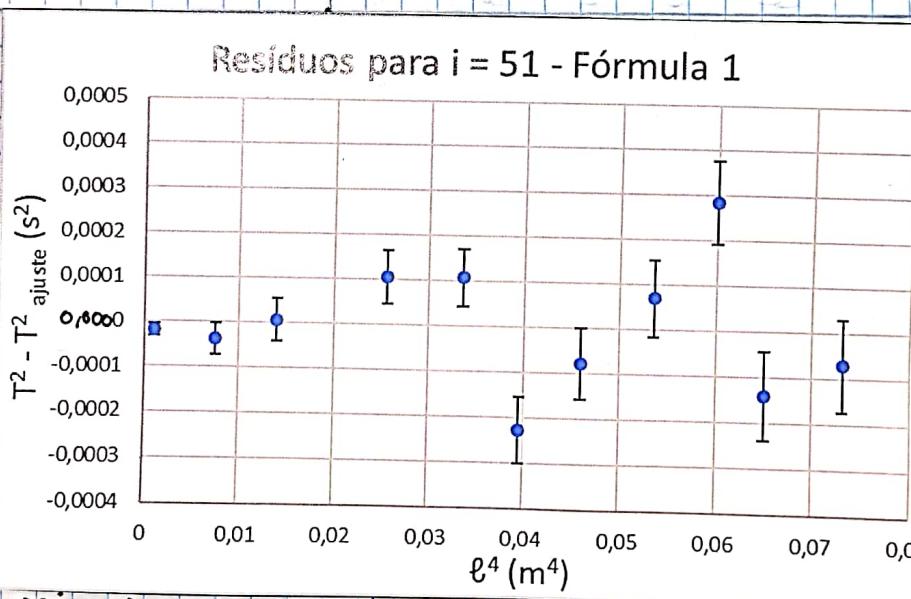


Gráfico 2 - gráfico de resíduos de  $T^2 (l^4)$  usando a Fórmula 1 para  $i=51$

Regressão de  $T^2 (l^4)$  para  $i=51$  - Ajuste 1

m	0,491	0,0003	b
s(m)	0,005	0,0002	s(b)
r <sup>2</sup>	0,9991	0,0004	s(y)

Regressão de  $T^2 (l^4)$  para  $i=51$  - Ajuste 2

m	0,494	0,0001	b
s(m)	0,002	0,0001	s(b)
r <sup>2</sup>	0,99986	0,0001	s(y)

Tabela 2 - Tabela de regressão linear da de  $T^2 (l^4)$  para  $i=51$  (1º Ajuste)

Tabela 3 - Tabela de regressão linear de  $T^2 (l^4)$  para  $i=51$  (2º Ajuste) - 1º ponto de vista

### Linearização para $i=51$ - Fórmula 1

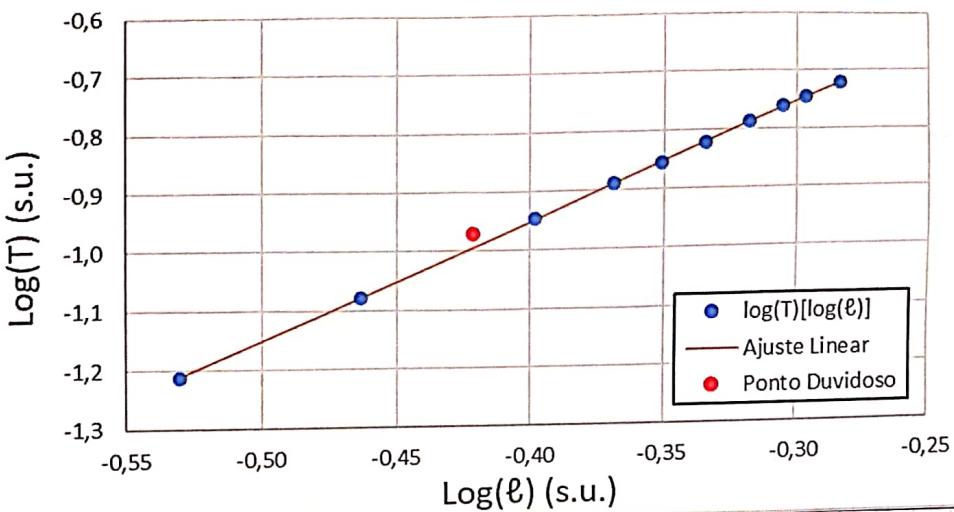


Gráfico 3 - gráfico de  $\log(T)[\log(l)]$  para  $i=51$

### Resíduos da linearização para $i=51$ - Fórmula 1

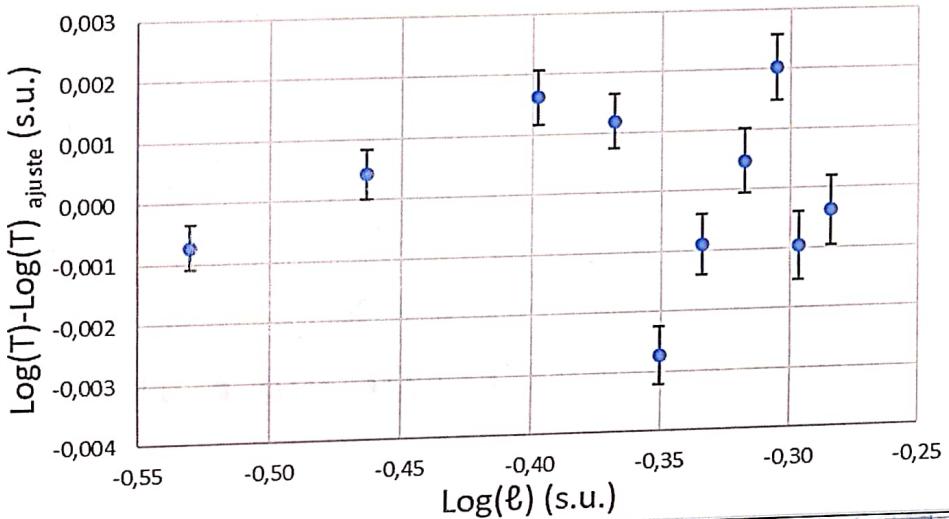


Gráfico 4 - Gráfico de resíduos de  $\log(T)[\log(l)]$  para  $i=51$

Tabela 4 - Tabela de regressão

Regressão de $\log(T)[\log(l)]$ para $i=51$ - Ajuste 1			
$m$	1,97	-0,16	$b$
$s(m)$	0,03	0,01	$s(b)$
$r^2$	0,998	0,007	$s(y)$

Tabela 5 - Tabela de regressão

Regressão de $\log(T)[\log(l)]$ para $i=51$ - Ajuste 2			
$m$	1,99	-0,155	$b$
$s(m)$	0,01	0,002	$s(b)$
$r^2$	0,99992	0,002	$s(y)$

Tabela 4 - Tabela de regressão  
Linear de  $\log(T)[\log(l)]$  para  
 $i=51$  em impulsos

Tabela 5 - Tabela de regressão  
Linear de  $\log(T)[\log(l)]$  para  
 $i=51$  em impulsos

Neste Parágrafo este número de impulsos, podemos  
verificar que os valores para  $l = (37,90 \pm 0,05)$  cm  
Só estes desvios e por isso o valor médio.  
não foi usado para realizar quer o gráfico 2,  
quer o gráfico 4, pois impossível observar  
a certeza e cada das resultados.

Obtivemos então um erro de leitura de  
 $1\%$  (por definição)  $\frac{L}{T} = d$  é uma erro de incerteza  
de  $\pm 5\%$ .

Com os valores obtidos foi possível calcular um valor para o módulo de Young ( $E$ )

$$E = 2,64 \times 10^{11} \pm 4 \times 10^9 \text{ Pa.}$$

, que corresponde a uma incerteza relativa de  $\approx 1,6\%$  e a um erro relativo percentual de  $32\%$  ( $E_{\text{exp}} = 2,60 \times 10^{11} \text{ Pa}$ ).

Para  $i = 101$  impulsos.

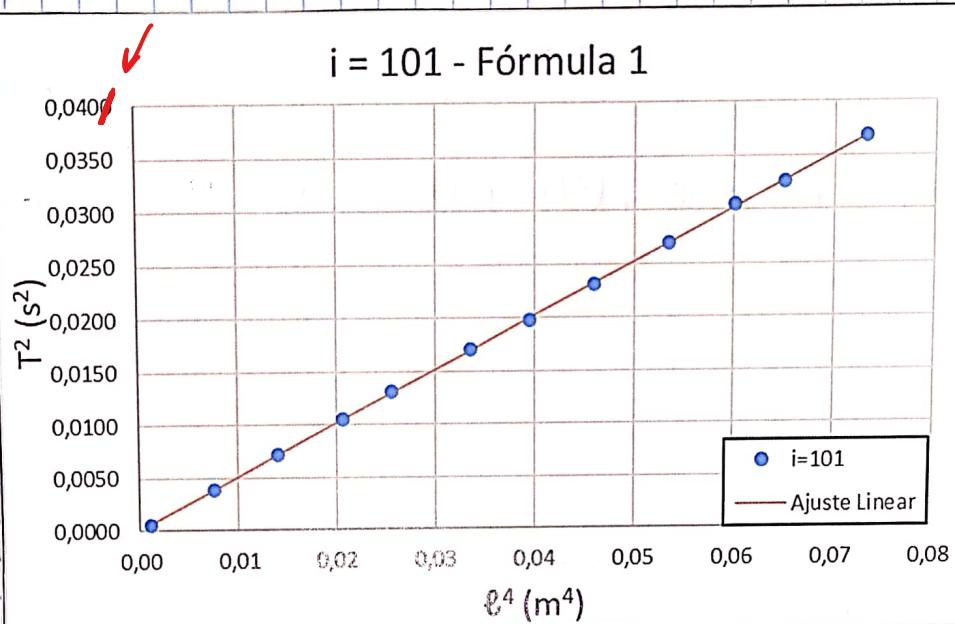


Gráfico 5 - gráfico de  $T^2 (\text{s}^2)$  para  $i = 101$  impulsos

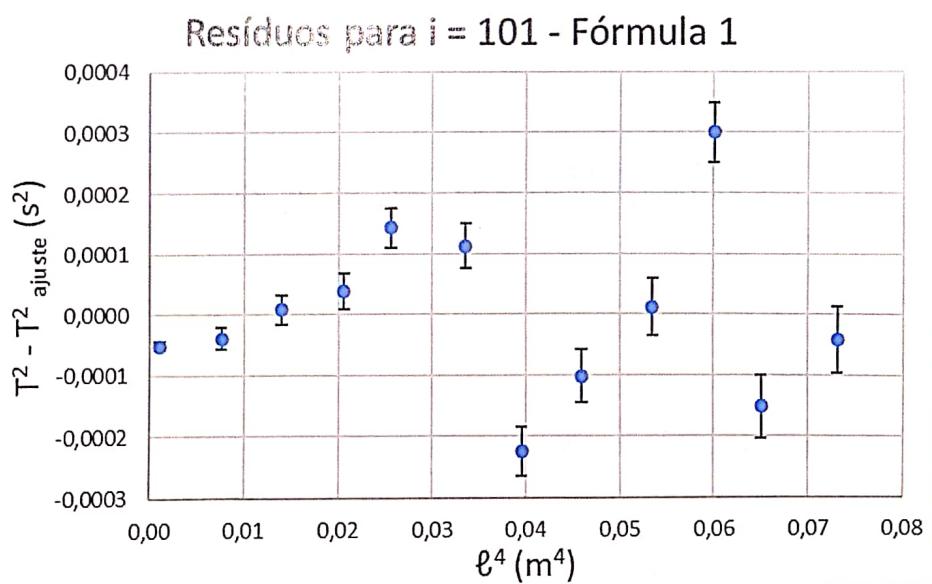


Gráfico 6 - gráfico de resíduos de  $T^2 (\text{E}^4)$  para  $i = 101$  impulsos

Regressão de $T^2 (\text{E}^4)$ para $i = 101$		
$m$	0,503	0,0001
$s(m)$	0,002	0,0001
	0,99986	0,0001
		$b$
		$s(b)$
		$s(y)$

Tabela 6 - Tabela do regressão linear de  $T^2 (\text{E}^4)$  para  $i = 101$  impulsos

## Linearização para $i=101$

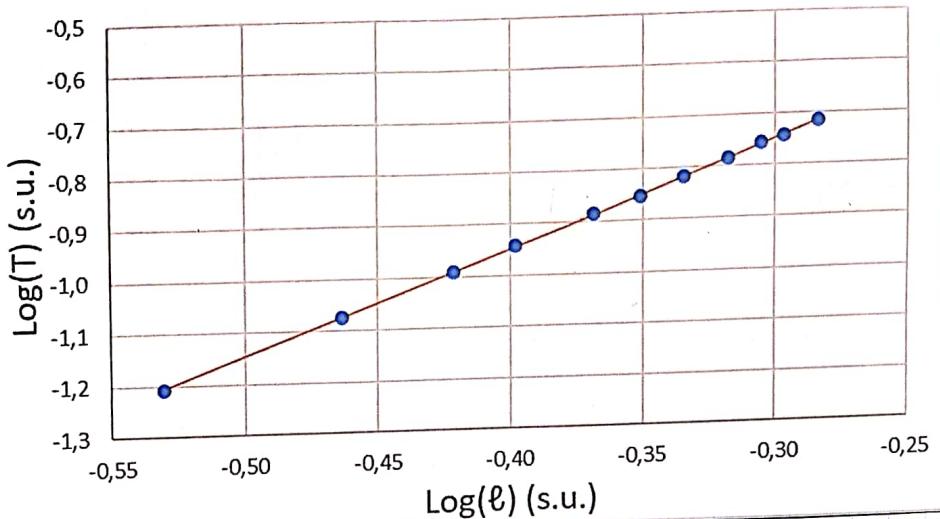


Gráfico 7 - gráfico do resíduos de  $\log(T)[\log(l)]$  para  $i = 101$  impulsos

Resíduos da linearização para  $i=101$  - Fórmula 1

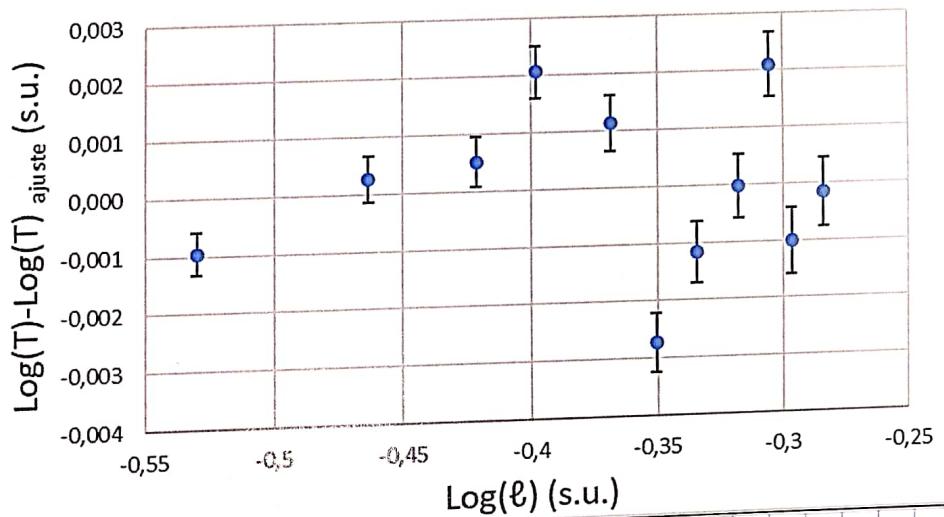


Gráfico 8 - gráfico do resíduos de  $\log(T)[\log(l)]$  para  $i = 101$  impulsos

Tabela 7 - Tabela de regressão linear de  $\log(T)[\log(l)]$  para  $i = 101$  impulsos

Regressão de $\log(T)[\log(l)]$ para $i=101$		
$m$	$-0,152$	$b$
$s(m)$	$0,006$	$s(b)$
$r^2$	$0,99991$	$s(y)$

obtemos um erro de linearização de 40,4% por processo de feito, com uma incerteza de 0,39%. Com os valores obtidos, calculamos

o valor do módulo de Young  $(2,5755948 \times 10^{11} \pm 1 \times 10^{11})$ , que correspondem a um erro de 28% e uma incerteza do 0,00005

# Para i=151 impulsos

i = 151 - Fórmula 1

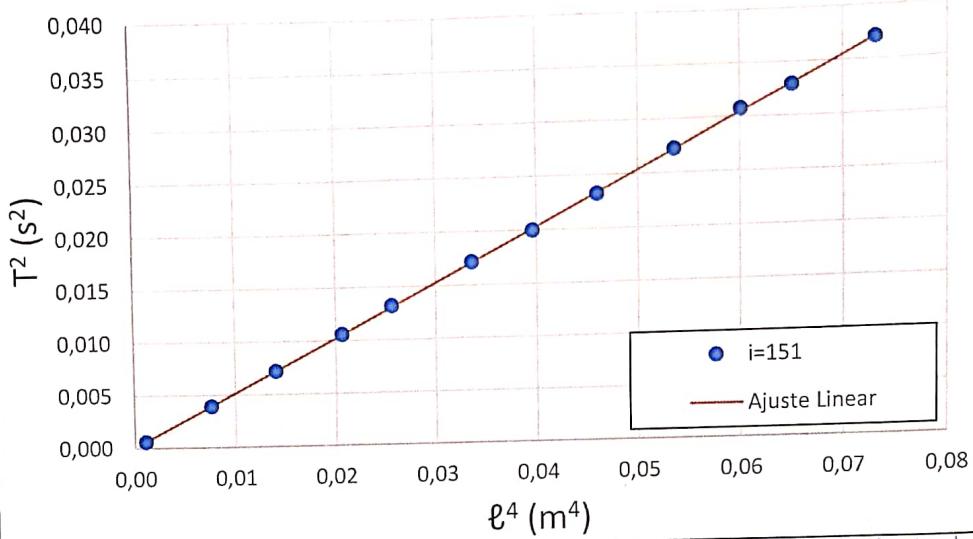


Gráfico 9 - gráfico de  $T^2 (s^2)$  para  $i=151$  impulsos

Linearização para  $i=151$

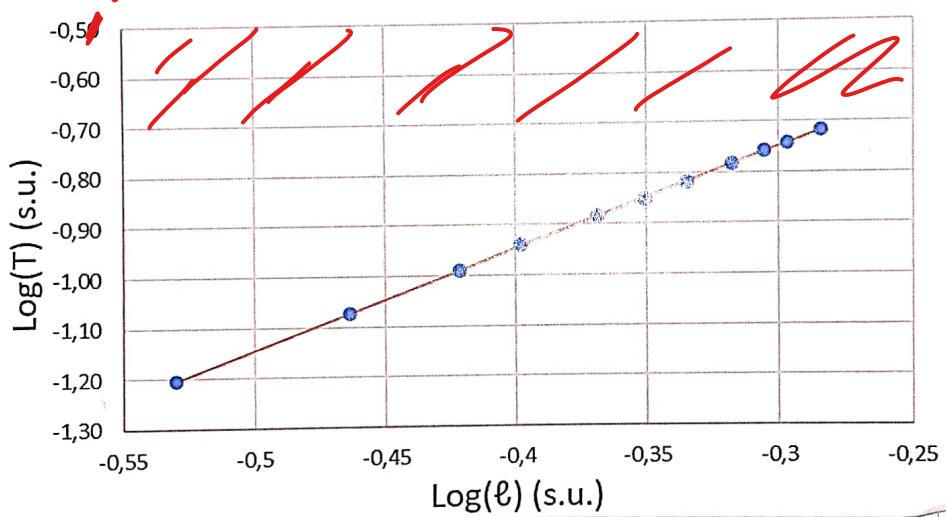


Gráfico 10 - gráfico de  $\log(T)[\log(e)]$  para  $i=151$  impulsos

Regressão de $T^2(e^4)$ para $i=151$			
m	0,506	0,0001	b
s(m)	0,002	0,0001	s(b)
	0,99990	0,0001	s(y)

Tabela - 8 - Tabela de regressão  
Linear de  $T^2(e^4)$  para  
 $i=151$  impulsos

Regressão de $\log(T)[\log(e)]$ para $i=151$			
m	1,987	-0,151	b
s(m)	0,005	0,002	s(b)
$r^2$	0,99994	0,001	s(y)

Tabela 9 - Tabela de regressão  
Linear de  $\log(T)[\log(e)]$   
para  $i=151$  impulsos

### Resíduos para $i = 151$ - Fórmula 1

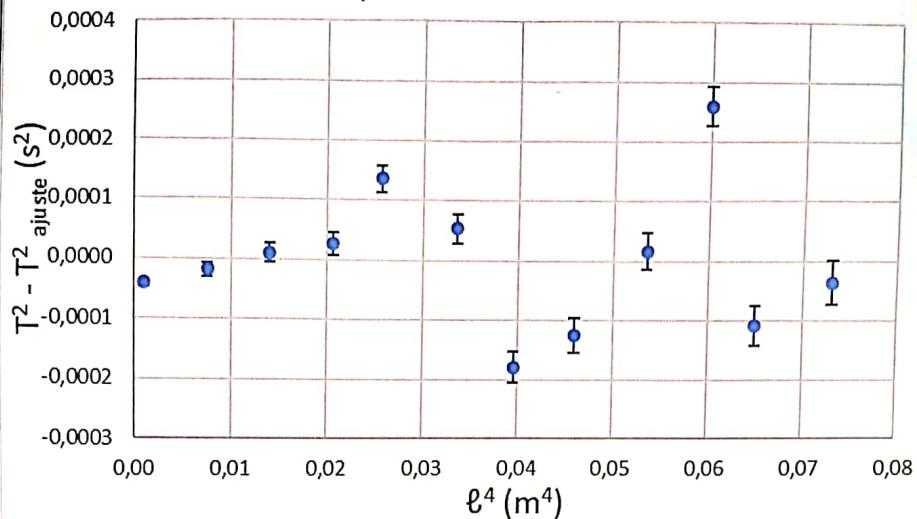


Gráfico 11 - gráfico de resíduos pelo  $T^2(l^4)$  para  $i = 151$  impulso.

### Resíduos da linearização para $i=151$ - Fórmula 1

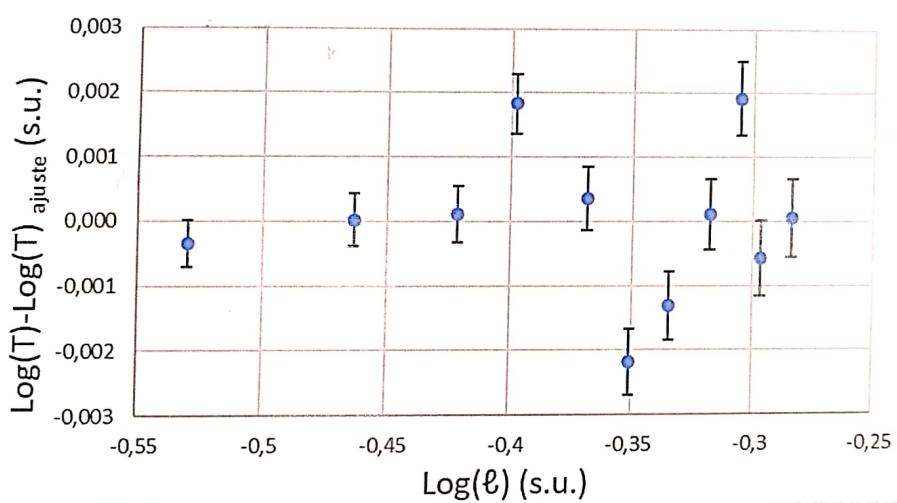


Gráfico 12 - gráfico de resíduos do  $\log(T)/\log(l)$  para  $i = 151$  impulso

obtivemos um erro de ~~0,6%~~ linearizado de 0,6% por degrau e uma imprecisão relativa de 0,3%. Calculamos o valor do módulo de Young =  $(2,55 \pm 8231 \times 10^{-1} \pm 1 \times 10^{-1})$  Pa, que corresponde a um erro de 0,0005% e a soma de 28%.

É de notar que realizamos também a amostra de valores para  $T(S)$  em função de  $l^2 (cm^{-2})$ , e obtivemos melhores erros e incertezas. Sendo que obtivemos erros aleatórios da mesma forma.

A seguir, encontram-se apenas os círculos de regressão para os 3 conjuntos de impulsos (mochs em torno de  $T(l^2)$ ), a título de exemplo, de modo a provar que podemos obter melhores velocidades realizando círculos de  $T(l^2)$ .

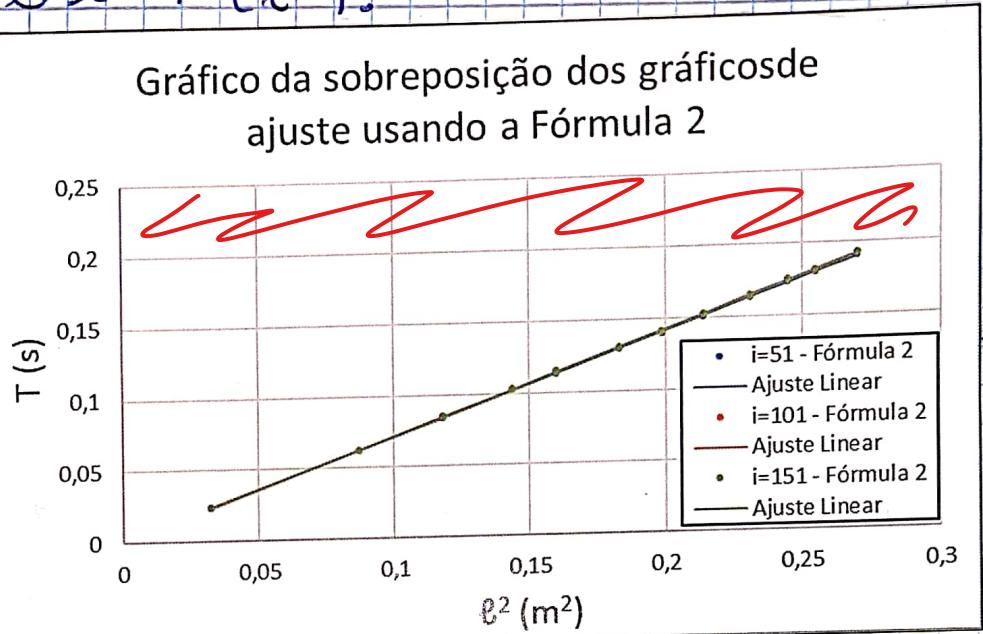


Gráfico 13 - gráfico das 3 conjuntos de impulsos de  $T(l^2)$

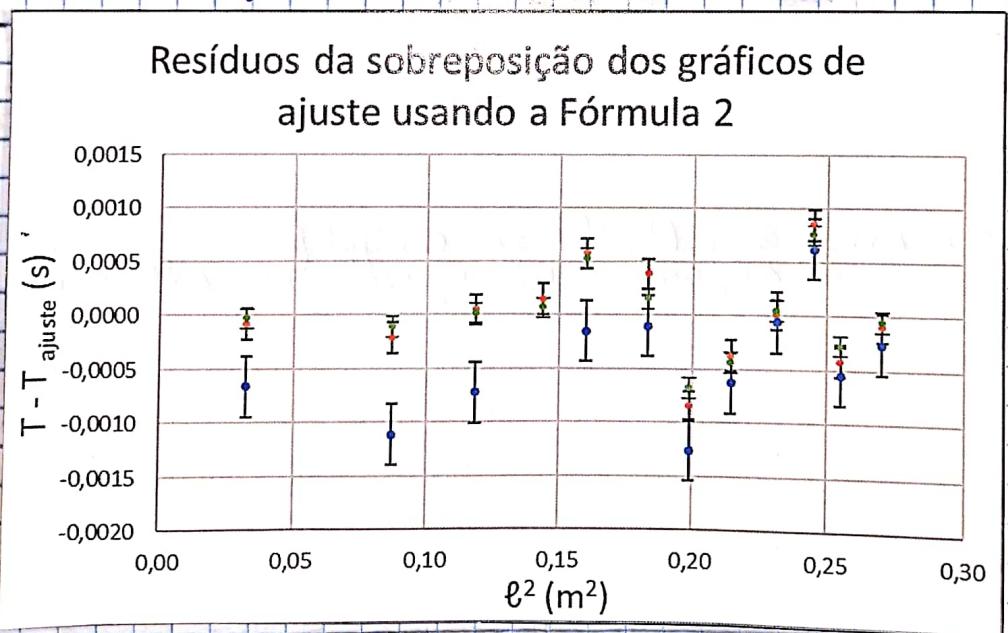


Gráfico 14 - gráfico dos resíduos das 3 conjuntos de impulsos de  $T(l^2)$

Regressão de $T(l^2)$ para $i=51$			
m	0,700	0,0009	b
s(m)	0,002	0,0004	s(b)
r <sup>2</sup>	0,99992	0,0005	s(y)

Tabela 10 - Tabela de abertura  
Linear de  $T(l^2)$  para  $i=51$   
impulsos

Regressão de $T(l^2)$ para $i=101$			
m	0,707	0,0007	b
s(m)	0,002	0,0004	s(b)
r <sup>2</sup>	0,99992	0,0005	s(y)

Tabela 11 - Tabela de abertura  
Linear de  $T(l^2)$  para  $i=101$   
impulsos

Regressão de $T(\ell^2)$ para $i=151$			
m	0,709	0,0007	b
s(m)	0,002	0,0003	s(b)
$r^2$	0,99994	0,00040134	s(y)

Tabela 12 - Tabela da regressão linear  $T(\ell^2)$  para  $i=151$  com impulsos.

Utilizando as tabelas 2, 4 e 6 como referência e comparando-as com os valores obtidos nas tabelas 7, 8 e 3, podemos perceber que os valores da para o declive são:

Isto deve-se pois estamos a obter os valores das componentes. Portanto as equações (1)

$$T^2 = 5,029 \frac{\pi^2 P}{ED^2} \ell^4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T = \frac{\pi \sqrt{5,029}}{D} \frac{P}{E} \ell^2 \cdot (3)$$

Deste modo podemos utilizar o declive ( $T/\ell^2$ ) para determinar o módulo de Young.

Assim, temos a equação:

$$E = \frac{5,029 \pi^2 P}{m^2 D^2} \ell^4 \quad (4)$$

Na enunciado a tabela

do registo das

grandes ap

o clube

os valores

Isto leva-nos a questionar que o valor de  $\mu(E)$  não sei superior neste caso o que vamos (aproximar de seguida) devido ao valor do declive se encontrar ao quechado.

Assim, calculamos o valor do módulo de Young.

bem zero e sua incerteza

impossível

devido

ao

Para 51 impulsos:

$$E = (2,64 \times 10^{11} \pm 2 \times 10^8) \text{ Pa}, \quad \mu(%) = 0,7\%$$

$E_{mo}(%) = 32,8\%$

Para 101 impulsos:

$$E = (2,589 \times 10^{11} \pm 1 \times 10^8) \text{ Pa}, \quad \mu(%) = 0,02\%$$

$E_{mo}(%) = 22\%$

Para 151 impulsos:

$$E = (2,523 \times 10^{11} \pm 1 \times 10^8) \text{ Pa}, \quad \mu(%) = 0,10\%$$

$E_{mo}(%) = 20\%$

Podemos perceber que o valor de  $T^2$  incerteza do deslocamento módulo de Young é superior a  $\Delta T^2(l^4)$ . Por isso inserimos mais ligas apesar a amplitude de  $T^2(l^4)$  no cálculo do módulo de Young final.

Inserimos agora sobrepon os gráficos da amplitude de  $T^2(l^4)$  de modo a avaliar se servem. Numa bar escolho para o cálculo final de  $T^2$ .

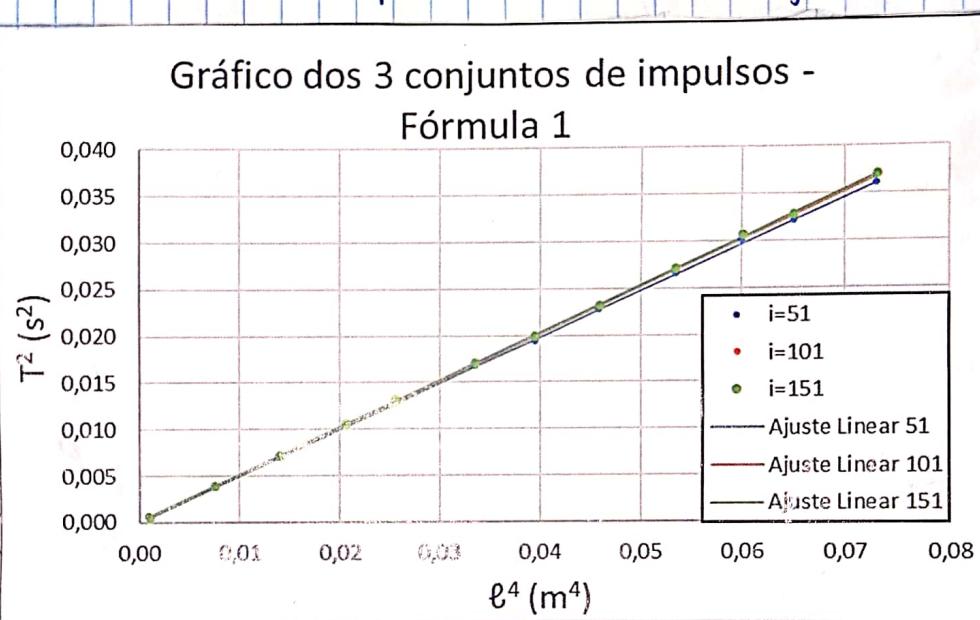


Gráfico 15 - Gráfico de  $T^2(l^4)$  para todos os conjuntos de impulsos sobrepostos.

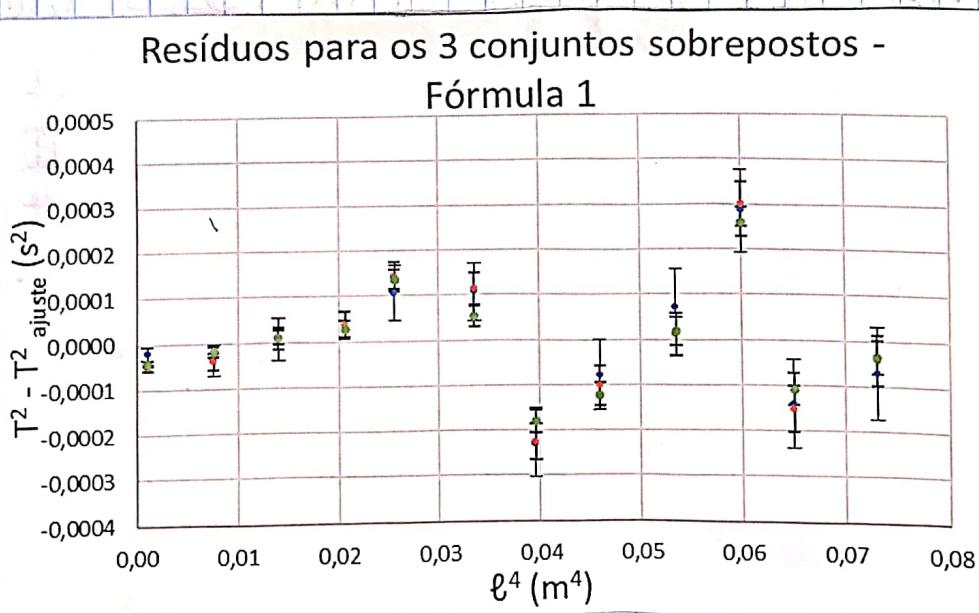


Gráfico 16 - Gráfico de resíduos de  $T^2(l^4)$  para todos os conjuntos de impulsos sobrepostos.

os valores quer dos resíduos, quer dos de  $T^2$  encontram-se muito próximos. Desta maneira, de 30 jatos realizou a média dos  $3 \bar{T}^2$ , para os 3 conjuntos de impulsos e realizar um gráfico e uma regressão linear para determinar o módulo de Young ( $E$ )

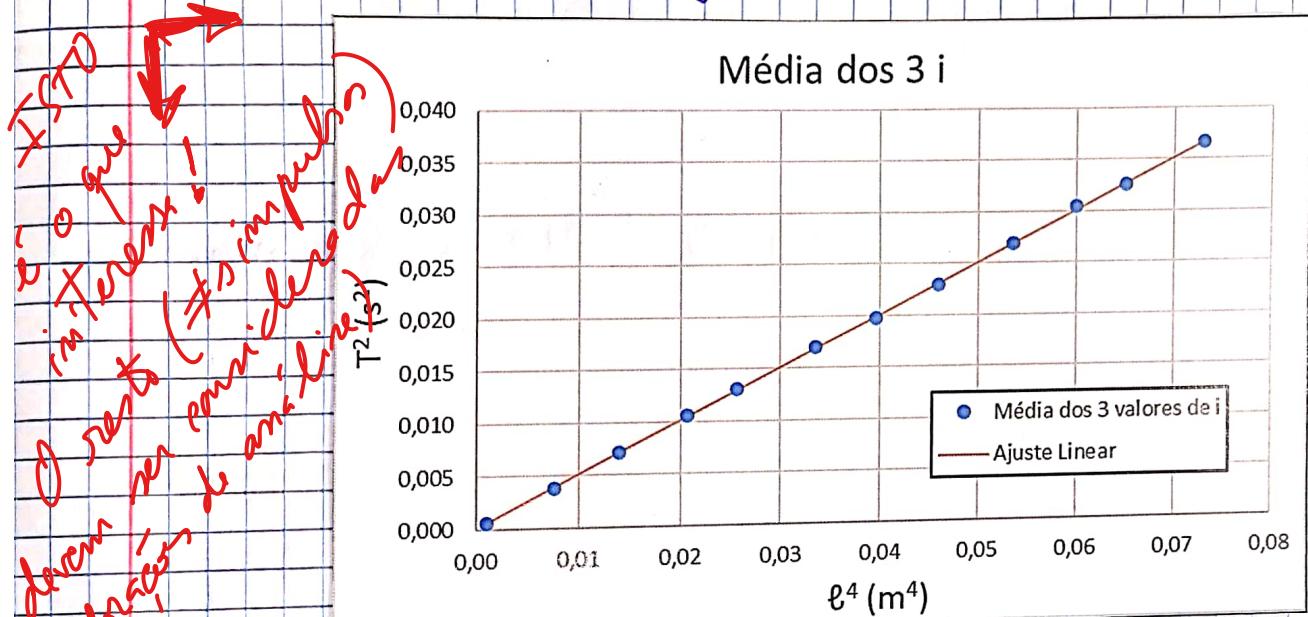


Gráfico 17 - gráfico de  $\bar{T}^2(l^4)$  médio para todos os conjuntos de 3 impulsos

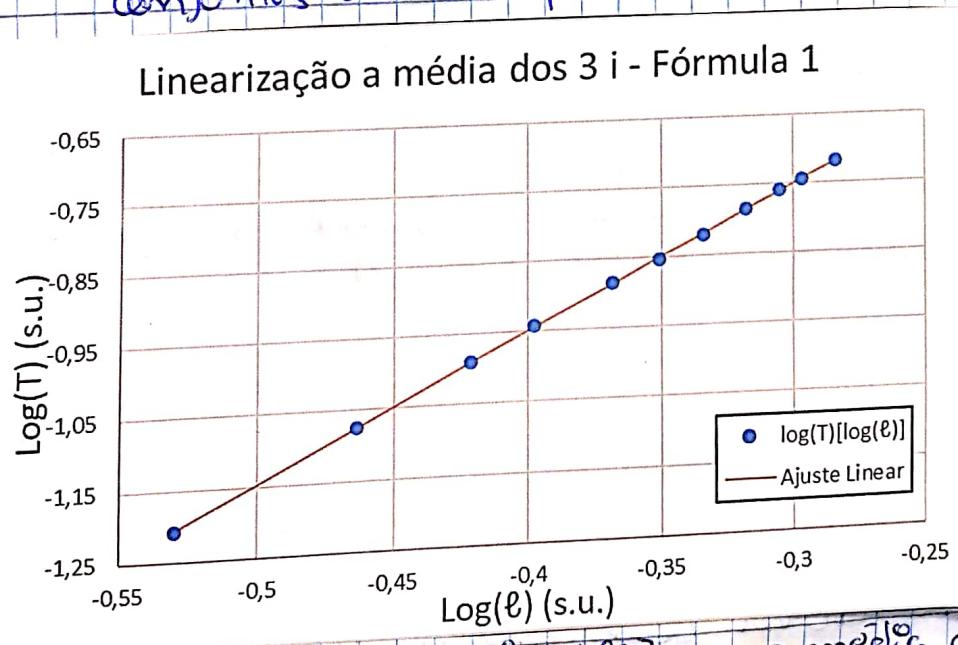


Gráfico 18 - gráfico do  $\log(\bar{T})$  [ $\log(l)$ ] para a média dos i's

Regressão de $\log(\bar{T})[\log(l)]$ para média			
m	1,988	-0,153	b
s(m)	0,006	0,002	s(b)
r <sup>2</sup>	0,99991	0,002	s(y)

Gráfico 13 - tabela de regressão linear de  $\log(\bar{T})[\log(l)]$  para os valores médios

Regressão de $\bar{T}^2(l^4)$ médio			
m	0,501	9E-05	b
s(m)	0,002	8E-05	s(b)
r <sup>2</sup>	0,99987	0,0001	s(y)

Tabela 14 - tabela de regressão linear de  $\bar{T}^2(l^4)$  para os valores médios

### Resíduos para a média dos 3 i - Fórmula 1

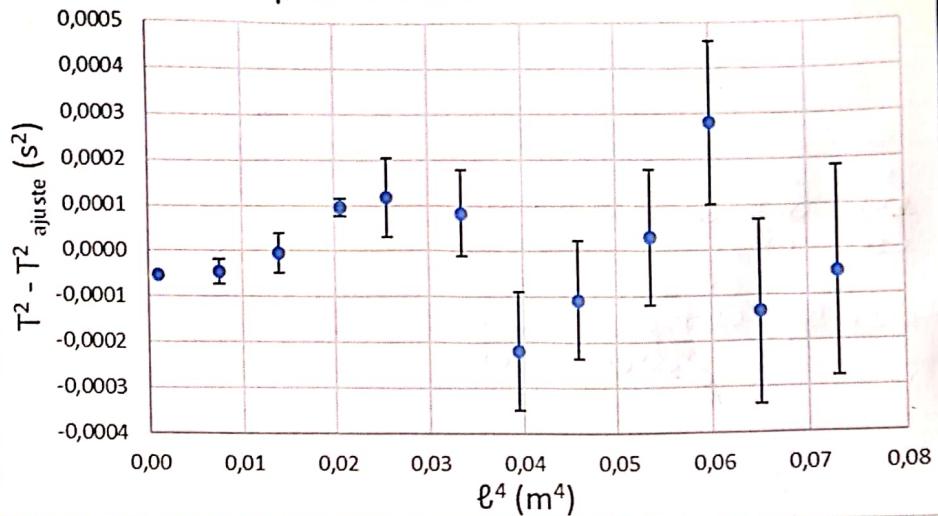


Gráfico 19 - gráfico de resíduos de  $\bar{l}^2 (l^4)$  para os valores médios

### Resíduos da Linearização da média dos 3 i - Fórmula 1

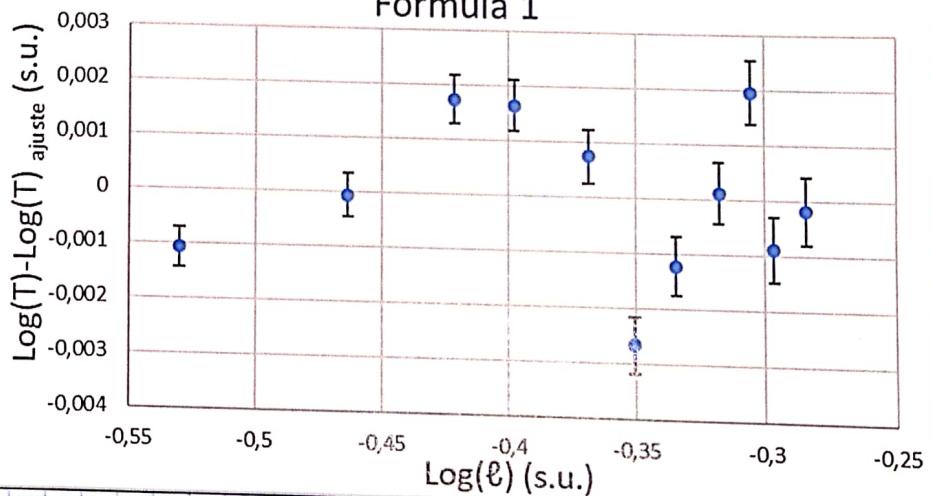


Gráfico 20 - gráfico de resíduos de  $\text{Log}(T) - \text{Log}(l)$  para os valores médios.

Assim, calculamos os Valores da constante de Young final:

$$E = (2,5860890 \times 10^{11} \pm 1 \times 10^9) \text{ Pa}$$

Medições:

É de notar que necessitámos dos valores de massa, comprimento ( $l$ ) e do diâmetro de modo a determinar a densidade e o módulo de Young. Deste modo, as medições efectuadas encontram-se no esboço seguinte:

$$\mu(m) = 0,1 \text{ g}$$

$$\mu(I) = 0,05 \text{ mm}$$

$$\mu(d) = 0,5 \text{ mm}$$

(usados também no pêndulo de torsão)

Medições		
m (g)	I (mm)	d (mm)
21,6	895,0	1,85
21,6	895,2	1,83
21,6	894,8	1,83
21,5	895,1	1,88
21,6	895,0	1,88
Média	0,02158	0,89502
u(média)	0,00002	0,00006
		0,00001

Tabela 15 - Tabela das medições da massa, comprimento e diâmetro do bone

Desse modo calculamos a densidade da bone, obtendo o valor:  $\rho = (8949 \pm 102) \text{ kg m}^{-3}$ , que corresponde a um erro percentual de  $1,1\%$ .

### Pêndulo de torsão

Primeiro realizamos as medições necessárias para obter o momento de inércia dos sólidos.

	Disco		Coroa			Prisma		
	M (g)	D (mm)	M (g)	D1 (mm)	D2 (mm)	M (kg)	h (mm)	b (mm)
1	807,3	200,00	487,1	197,00	179,00	683,5	199,00	28,00
2	807,4	201,00	487,2	199,00	181,00	683,7	199,00	29,00
3	807,4	200,50	487,1	200,00	180,00	683,6	200,00	28,00
4	807,2	201,00	487,2	198,00	180,00	683,5	198,00	28,70
5	807,2	200,00	487,1	197,00	179,00	683,5	199,00	28,30
Média (SI)	807,30	0,16	487,14	198,2	180,0	683,56	199,00	28,30
u (SI)	0,00004	0,03	0,00002	0,0005	0,03	0,00004	0,03	0,0002

Tabela 16 - Tabela das medições de momento de inércia e comprimentos referentes ao eixo de momento de inércia.

E calculamos os valores do momento de

inércia para

cada sólido visto

a tabela 1.

Objeto/Sistema	M.Inércia(I)	u(I)
Disco	0,003	0,001
Coroa	0,0037	0,0005
Prisma - eixo maior b	4,59E-05	6E-07
Prisma - eixo menor b	0,0015	0,0006
Sistema A	0,003	0,001
Sistema B	0,004	0,001
Sistema C	0,006	0,001
Sistema D	0,008	0,001

Tabela 17 - Tabela com os momentos de inércia

Vamos também; como é óbvio, necessitar dos valores das características do fio, que se encontram na tabela seguinte.

Fio		
	$\ell$ (mm)	d (mm)
1	1093,5	0,75
2	1098,0	0,78
3	1096,5	0,75
4	1097,5	0,77
5	1096,4	0,77
Média (SI)	1,0964	0,000765
$u$ (SI)	0,0007	0,000005

parece-me demasiado  
variação!

Tabela 18 - Tabela de medições  
de comprimento e diâmetro do fio  
utilizado no percurso  
com tensão.

DIÂMETRO:  
mais o medidor  
com um micrômetro.

Se sim, a incerteza da medida  
é  $\pm 0,005$  mm!

De seguida realizámos as medidas dos perímetros  
de cada solido para os ângulos  $90^\circ$ ,  $180^\circ$  e  $270^\circ$ .

Realizámos a medida e realizámos um gráfico  
de  $I(T^2)$  → em o gráfico com os bairros  
verticais (para os maiores vizinhos).

Gráfico de  $I$  em função de  $T^2$

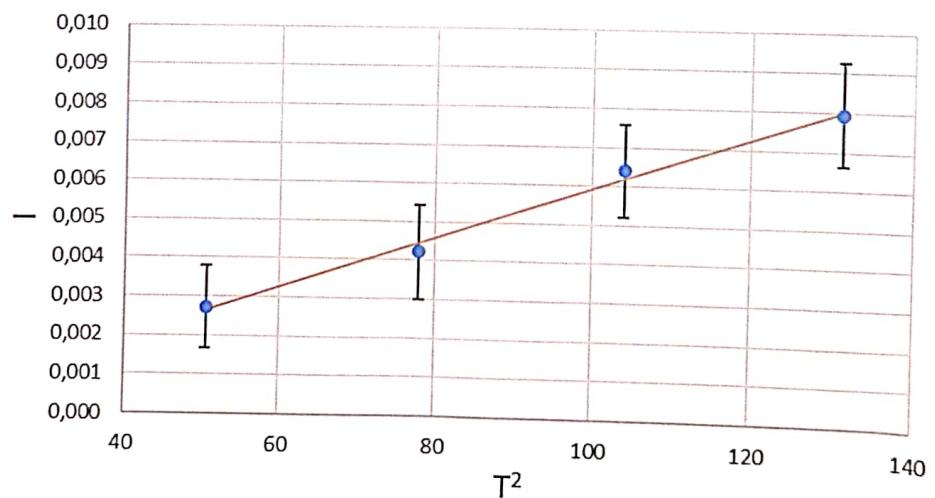


Gráfico 21 - gráfico de  $I(T^2)$  pelo lado solido

Log(I) [Log(T)]			
m	2,3	-4,5	b
s(m)	0,1	0,1	s(b)
$r^2$	0,994	0,02	s(y)

$I(T^2)$			
m	6,6E-05	-0,0007	b
s(m)	4E-06	0,0004	s(b)
$r^2$	0,993	0,0002	s(y)

Tabela 19 - Tabela de regressão  
linear de  $\log(I/T)$  em  $T$ .

Tabela 20 - Tabela de regressão  
linear de  $I(T^2)$ .

Gráfico de  $\log(I)$  em função de  $\log(T)$

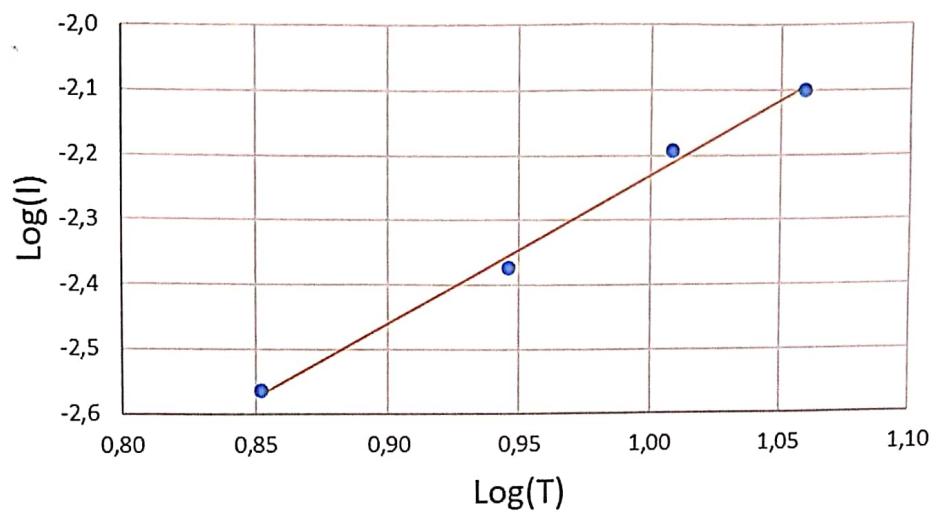


Gráfico 22 - gráfico de  $\log(I)$  [Log(T)]

Resíduos do Gráfico de  $I$  em função de  $T^2$

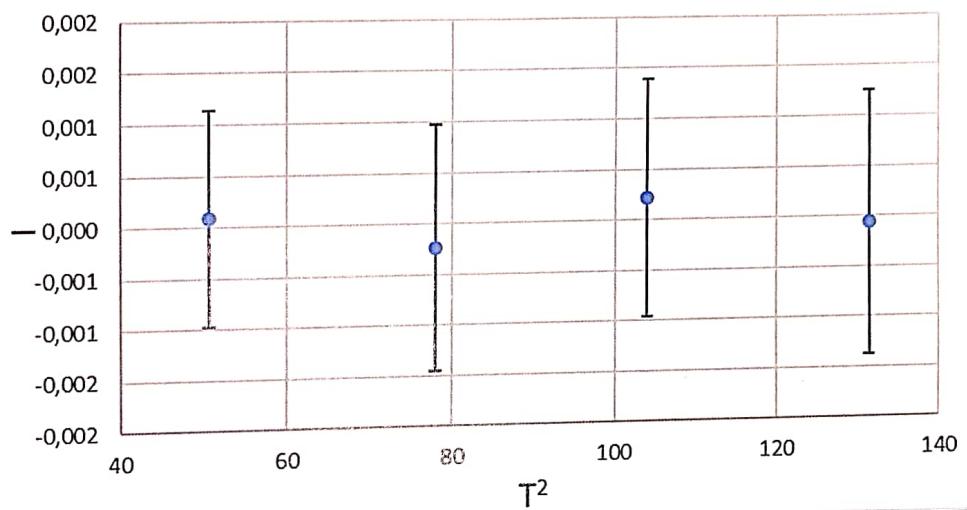


Gráfico 23 - Gráfico dos resíduos de  $I(T^2)$

Resíduos de  $\log(I)$  [ $\log(T)$ ]

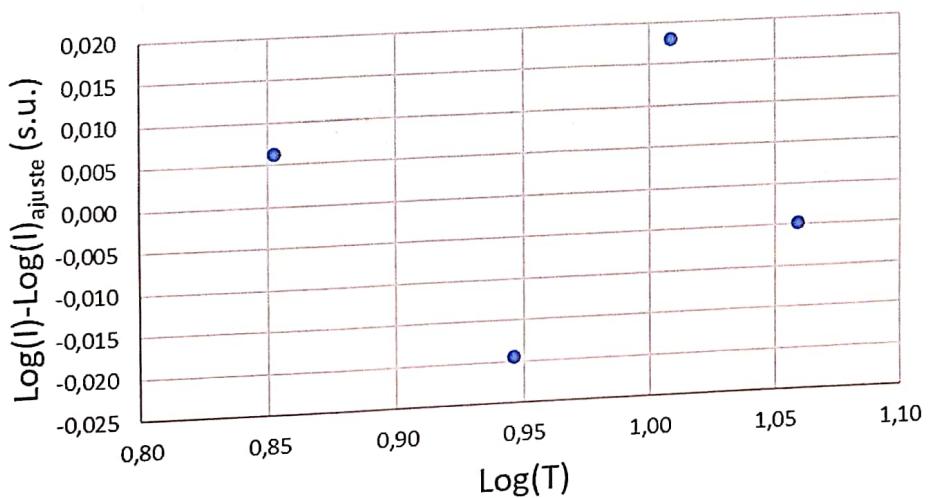


Gráfico 24 - gráfico de resíduos de  $\log(I)$  [ $\log(T)$ ]

Utilizaremos a equação (2) e sabendo com a  
declividade ( $m$ ) temos para  $\mu = (T / T^2)$ .

$$T = \frac{d^4 \mu}{128 \pi L} T^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mu = \frac{m \times 128 \pi L}{d^4} \quad (5).$$

Obtemos assim:

$$\mu = (0,5 \times 10^{10} \pm 6 \times 10^9) \text{ Pa.}$$

Com um erro de linearização de 15,50%  
e um percentual de linearização de 5,50%.

### Discussão e Conclusão

É de notar que todos os gráficos visualizados  
possuem bons de linearização ~~selecionados~~ redigidos

$$\mu(T_{\text{médio}}) = \frac{\text{Peso}}{50} \times \mu(T), \text{M}T = 0,015.$$

Assim

→ ~~nao se fizerem contas  
na conclusão~~

é possível obter o valor do módulo

de Young com um erro de 29% ~~29%~~ e um

percentual de 0,00005% (E = 0,00005%)  
 $= 2 \times 10^{10} \text{ Pa.}$

Também obtemos o valor do módulo de  
rigidez do grá. de ~~cotação~~ com um erro  
de 8% e um percentual de 7% ( $\mu_{\text{rap}} =$   
 $= 79,3 \text{ GPa}$ )

juízo de valor?  
Nem cometa