

2022/2023

Relatório Individual

Determinação De Módulos Elásticos de Materiais
Pelo Método das Vibrações de uma Barra
Encastrada e pelo Pêndulo De Torção

(T4B Lab 046)

→ a apresentação
de "Introdução" pode
ter sido melhorada

17

→ A formatação não é, em alguns
aspectos, a que se pede!

Ver o powerpoint da

aula TP!

— Cálculos e eqs. simples
em anexo!

Sara Raquel Perdigão de Castro Soares
UP200701209

TURMA: PL1

GRUPO: 2B

1. Resumo

Este relatório foi elaborado no âmbito da Unidade Curricular Laboratório de Física II (FIS2020), a qual frequentei como aluna extraordinária (UC singular), tendo sido a experiência realizada no dia 16/05/2023, no laboratório 016 do DFA da FCUP, por todos os elementos do Grupo 2 da turma PL1.

Fez-se o estudo do período de oscilações em função do comprimento de uma barra encastrada, tendo-se determinado a sua densidade e o Módulo de Young, tendo-se obtido uma densidade de $(7881,2 \pm 0,04) \text{ kg/m}^3$ e um valor para o módulo de Young de $(202 \pm 0,01) \text{ GPa}$. Pode concluir-se que o material que compunha a barra era Aço.

Estudaram-se os momentos de Inércia de vários conjuntos de objetos suspensos num fio (Pêndulo de torção) de forma a determinar o módulo de rigidez do fio, tendo-se obtido um valor de $(72,0 \pm 0,4) \text{ GPa}$.

2. Introdução

2.1 - Objetivos

A realização deste trabalho experimental teve como objetivos principais a determinação do módulo de Young de uma barra através do uso do método das vibrações e a determinação do módulo de rigidez do material de um fio através do pêndulo de torção com suspensão de vários conjuntos de objetos.

Foi, ainda, objeto de estudo, o momento de inércia dos conjuntos de objetos usados em suspensão no fio.

2.2 – Módulo de Young e Módulo de Rigidez

O módulo de Young e o módulo de rigidez são duas medidas diferentes de propriedades elásticas dos materiais.

Embora ambos se relacionem com resposta de um material à deformação, descrevem aspetos diferentes do comportamento elástico.

O módulo de Young, ou módulo de elasticidade longitudinal, é uma propriedade mecânica que descreve a rigidez de um material medindo a sua capacidade de resistir à deformação quando submetido a uma força ou tensão ao longo de uma direção longitudinal.

Quanto maior o módulo de Young de um material, maior será a sua capacidade de resistir à deformação, ou seja, mais rígido e menor capacidade de se deformar apresenta o material. Será sempre necessário aplicar uma força de intensidade maior para deformar o material.

Por outro lado, o módulo de rigidez, também conhecido como módulo de cisalhamento ou módulo de torção, é uma medida da rigidez de um material quando submetido a uma deformação de torção que ocorre quando camadas adjacentes de um material deslizam uma sobre a outra em planos paralelos.

O módulo de rigidez descreve a relação entre a força de torção aplicada num material e a deformação angular resultante.

O estudo destas grandezas revela-se de grande importância quer na identificação do material, quer na sua aplicabilidade em determinadas áreas.

2.3 – Barra encastrada

Quando uma barra de secção reta uniforme se encontra fletida com um elevado raio de curvatura, está em compressão na parte inferior e em distensão na parte superior. Existe uma zona intermédia da barra que não sofre alteração nas suas dimensões, como se observa na figura 1.

lei de Hooke : $\sigma = \text{"módulo"} \cdot \epsilon$

$(E) \text{ p/ } \sigma$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{tração} \\ \text{compressão} \end{array} \right.$

$(\mu) \text{ p/ } \tau$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{de corte} \end{array} \right.$

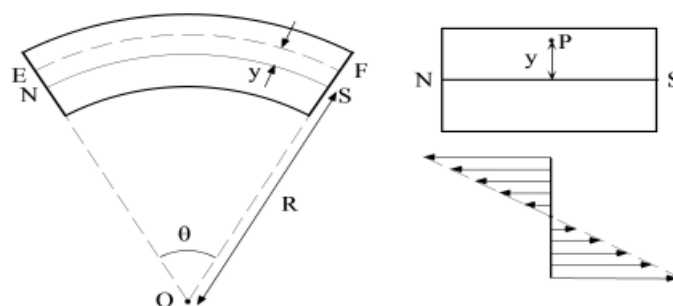


Figura 1 – Esquema de uma barra sujeita a flexão

No caso do estudo que se fez nesta execução experimental, mantém-se uma extremidade fixa da barra, criando uma condição fronteira de oscilação e fez-se oscilar a outra ponta de forma longitudinal, como representado na figura 2.

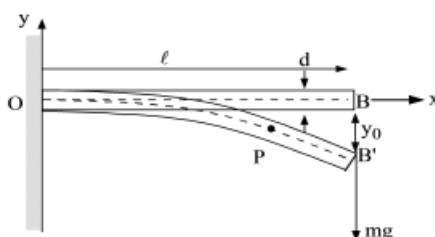


Figura 2 – Barra encastrada de massa m, sujeita a flexão.

A barra encastrada é um processo que pode ser utilizado para o estudo do Módulo de Young, podendo ser verificada a linearidade entre o período médio de oscilação (\bar{T}) e o comprimento desde a extremidade fixa e solta da barra (l), à escala logarítmica, através da equação (1):

$$\log(\bar{T}) = 2 \log(l) + \log \left(\sqrt{\frac{5,029\pi\rho}{ED^2}} \right) \quad (1)$$

e determinado o módulo de Young através da relação entre as duas grandezas, a partir da equação (2):

$$\bar{T}^2 = \frac{5,029\pi^2\rho}{ED^2} l^4 \quad (2)$$

Na qual ρ representa a densidade do material em kg/m^3 , E representa o Módulo de Young (em Pa) e D se refere ao diâmetro da barra, em metros.

A densidade do material, foi também obtida experimentalmente.

2.4 – Pêndulo de Torção

O pêndulo de torção é um sistema físico que consiste num fio suspenso por uma extremidade, no qual é preso uma massa que se faz oscilar em torno de um eixo vertical.

Quando o fio é torcido num determinado ângulo em relação à sua posição de equilíbrio é gerado um torque de restauro que tende a levar o sistema de volta à posição de equilíbrio.

A frequência de oscilação do pêndulo de torção depende de algumas propriedades do sistema, como a rigidez do fio e o momento de inércia da massa de prova. Essas propriedades determinam o período de oscilação, que é o tempo necessário para que o sistema complete uma oscilação completa.

No estudo do módulo de rigidez pelo Pêndulo de Torção, pretende-se verificar que a dependência do quadrado do período médio de oscilação com o momento de inércia dos objetos suspensos, era dada pela equação (3):

NOTA: Introdução → não diz o que "fez", isso pertence à secção "experimental"

$$I = \frac{d^4 \mu}{128 \pi L} T^2 \quad (3)$$

Em que I representa o momento de inércia do objeto ou conjunto de objetos em suspensão (em kg/m^2), d e L são respetivamente o diâmetro e o comprimento do fio e T representa o período de oscilação.

3. Execução experimental e Resultados

3.1 – Determinação do Módulo de Young através da vibração de uma barra encastrada

Executou-se a montagem experimental da figura 3, tendo o cuidado de garantir, para cada ensaio, que a barra era colocada a 1 cm do sensor de forma a que a sombra da barra ficasse alinhada com o sensor e este se encontrava a 3 cm da extremidade da barra (medições executadas com régua) – figura 4 – estas condições foram estabelecidas de forma a minimizar os erros de execução, uma vez que a experiência foi executada por 4 operadores.

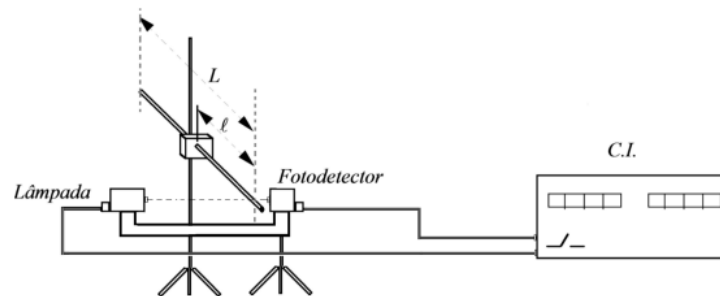


Figura 4 - Montagem experimental



Figura 3 - Condições experimentais garantidas

Para este estudo, foi escolhida uma barra com comprimento suficiente para garantir uma gama de valores em que fosse garantida a flexão apenas longitudinal da barra e que conseguissem ser contabilizados 151 impulsos de forma clara e sem grande variação no tempo entre as medições.

Fez-se a medição do comprimento total da barra (l), com recurso a uma fita métrica, da massa da barra numa balança digital e do diâmetro da barra em vários pontos, usando um micrómetro.

Calculou-se a densidade da barra através da equação 4:

$$\rho = \frac{m}{\pi r^2 L} \quad (4)$$

Os resultados das medições e o valor calculado para a densidade encontram-se na tabela 1 (o valor do registo do diâmetro em vários pontos encontra-se em anexo):

Características da barra		
	Valor	Incerteza
l (m)	0,8950	0,0005
M (kg)	0,0216	0,0001
$D_{\text{méd.}}$ (mm)	1,975	0,04
ρ (kg/m ³)	7881,02	0,04

Tabela 1 - Registo de Dados relativos à Barra e Respetivas Incertezas

Escolheu-se a gama de execução no intervalo [0,26;0,80] cm de modo a garantir que os pontos retirados tinham o mesmo espaçamento na gama escolhida através da equação 5:

$$ld = \frac{l_{\text{min}}^2 - l_{\text{máx}}^2}{N-1} \quad (5)$$

Selecionou-se no contador de impulsos, $i=51$, $i=101$ e $i=151$ (25, 50 e 75 oscilações, respetivamente).

O número de oscilações é dado pela equação (6) e o período de cada oscilação completa é obtido através da equação (7):

$$n = \frac{\text{impulsos}-1}{2} \quad (6)$$

$$T = \frac{t}{n} \quad (7)$$

De forma a garantir que a oscilação imprimida na barra era apenas longitudinal, usou-se uma régua para se controlar vibrações em modos transversais. Procedeu-se ao registo do intervalo de tempo para cada valor de l , como consta na amostra da tabela 2 (tabela integral pode ser consultada nos anexos do relatório):

Registo de dados experimentais para todos os impulsos												
Ensaio	impulsos	oscilações	l (m)	u (l)	l² (m²)	u(l²) (m²)	t (s)	u(t) (s)	T (s)	u(T)(s)	T _{méd.} (s)	u(T _{méd.})(s)
1	51	25	0,2630	0,00005	0,06917	0,00003	1,31	0,01	0,0524	0,0004	0,0519	9E-04
	101	50					2,55	0,01	0,0518	0,0002		
	151	75					3,86	0,01	0,0515	0,0001		
2	51	25	0,3549	0,00005	0,12598	0,00004	2,24	0,01	0,0896	0,0004	0,0897	2E-04
	101	50					4,49	0,01	0,0888	0,0002		
	151	75					6,72	0,01	0,0896	0,0001		
3	51	25	0,4135	0,00005	0,17098	0,00004	3,05	0,01	0,1220	0,0004	0,1218	3E-04
	101	50					6,09	0,01	0,1218	0,0002		
	151	75					9,13	0,01	0,1217	0,0001		

Tabela 2 - Amostra da tabela de Registo de dados experimentais para 51, 101 e 151 impulsos (tabela integral poderá ser consultada em anexo)

3.1 – Determinação do Módulo de Rigidez através do Pêndulo de Torção.

Procedeu-se à medição do comprimento l do fio suspenso e do diâmetro d (medição em vários pontos e considerada a média). Efetuaram-se as medições necessárias para o cálculo do momento de inércia I de cada objeto que ia ser suspenso no fio.

Os valores dos dados relativos ao fio e a cada um dos objetos que constituirá os conjuntos de suspensão, bem como as incertezas associadas podem ser consultados na tabela 3.

Os valores das medições através dos quais se obtiveram os valores médios do diâmetro do fio, da base e da altura do prisma e dos diâmetros interno e externo da coroa, encontram-se em anexo a este relatório.

Dados relativos aos objetos suspensos					
Disco			Momentos de Inércia		
	Valor	Incerteza		Valor	Incerteza
M (kg)	0,8072	0,0001	I_d (kg m ²)	4,07E-03	2,03E-05
D(m)	0,2008	0,0005	I_{cc} (kg m ²)	4,54E-03	1,67E-05
Coroa Cilíndrica			I_{pmaior} (kg m ²)	5,14E-05	2,96E-06
	Valor	Incerteza	I_{pmenor} (kg m ²)	2,27E-03	1,14E-05
M (kg)	0,4871	0,0001	Dados relativos ao fio		
D ₁ (m)	0,1802	0,0005			
D ₂ (m)	0,2053	0,0005			
Prisma Triangular					
	Valor	Incerteza		Valor	Incerteza
M (kg)	0,6836	0,0001	l (m)	1,07E+00	5,00E-04
b (m)	0,0300	8,7E-04	d _{méd.} (mm)	0,85	0,04
h (m)	0,1983	0,0005			

Tabela 3 - Dados Relativos aos Objetos a serem suspensos e ao fio do Pêndulo de Torção (medições efetuadas para valores médios podem ser consultadas em anexo)

As expressões para o cálculo do Momento de Inércia, I (kgm²) encontram-se na tabela 4:

Objeto suspenso	I	
	grandeza	expressão
Disco	I_d	$\frac{MD^2}{8}$
Coroa cilíndrica	I_{cc}	$\frac{M}{8} (D_1^2 + D_2^2)$
Prisma triangular relativamente ao eixo maior b	$I_{P_{maior}}$	$\frac{Mb^2}{12}$
Prisma triangular relativamente ao eixo menor b	$I_{P_{menor}}$	$\frac{M(2h^2+b^2)}{24}$
<i>Exemplo de associação:</i> Disco + Prisma com eixo maior vertical	$I_{P_{menor}} + I_{P_{maior}}$	$\frac{MD^2}{8} + \frac{MD^2}{12}$

Tabela 4 - Expressões para o cálculo dos Momentos de Inércia dos diferentes objetos suspensos (fonte: Protocolo do trabalho T4 do laboratório 016 – DFA)

As incertezas associadas ao Momento de Inércia de cada objeto foram calculadas através das seguintes expressões:

$$u(I_d) = I_d \sqrt{\frac{u(m_d)^2}{m_d^2} + \frac{(2u(D_d))^2}{D_d^2}} \quad (8)$$

$$u(I_{cc})^2 = \left(\frac{D_1^2 + D_2^2}{8}\right)^2 u(m_{cc})^2 + \left(\frac{m_{cc}D_1}{4}\right)^2 u(D_1)^2 + \left(\frac{m_{cc}D_2}{4}\right)^2 u(D_2)^2 \quad (9)$$

$$u(I_{P_{maior}})^2 = \left(\frac{2h^2 + b^2}{24}\right)^2 u(m_p)^2 + \left(\frac{4m_p h}{24}\right)^2 u(h)^2 + \left(\frac{2m_p b^2}{24}\right)^2 u(b)^2 \quad (10)$$

$$u(I_{P_{menor}}) = I_{P_{menor}} \sqrt{\frac{u(m_p)^2}{m_p^2} + \frac{(u(b))^2}{b^2}} \quad (11)$$

Nas equações 8 e 11, como no cálculo do Momento de Inércia as grandezas estão a multiplicar, usou-se a propagação de incertezas relativa, no entanto, não foi possível fazer o mesmo nas equações 9 e 10 uma vez que as grandezas são parcelas do Momento de Inércia.

Suspenderam-se sucessivamente os seguintes conjuntos, para os quais se contabilizou através de cronómetro, o intervalo de tempo decorrido para 10 oscilações completas para valores de θ_{\max} de 90° , 180° e 270° relativamente à posição de equilíbrio:

- Disco + prisma com eixo maior vertical
- Disco + prisma com eixo maior horizontal
- Disco + coroa cilíndrica
- Disco + coroa cilíndrica + prisma com eixo maior horizontal

Durante esta fase do procedimento, teve-se o cuidado de deixar estabilizar o disco e aplicar apenas rotação aos objetos garantindo que o movimento fosse apenas rotacional.

Pode ver-se na tabela 5 o resumo dos dados relevantes para o estudo – o registo de todos os valores recolhidos e das expressões para o cálculo das incertezas pode ser consultado em anexo.

Objeto suspenso	I_{conjunto} (kg m ²)	$u(I_{\text{conjunto}})$ (kg m ²)	$T_{\text{méd.}}$ (s)	$(T_{\text{méd.}})^2$ (s)	$u(T_{\text{méd.}})$ (s)	$u(T_{\text{méd.}})^2$ (s)	Ajuste $(T_{\text{méd.}})^2$	Resíduos $(T_{\text{méd.}})^2$ (s)	2sy	-2sy
Disco + Prisma com eixo maior vertical	4,12E-03	2,03E-05	6,98	48,7	0,02	0,28	4,87E+01	-1,33E-02	0,03	-0,03
Disco + Prisma com eixo maior horizontal	6,33E-03	2,32E-05	8,61	74,1	0,06	1,05	7,41E+01	1,69E-02	0,03	-0,03
Disco + Coroa	8,61E-03	2,62E-05	10,00	100,1	0,05	0,61	1,00E+02	5,74E-03	0,03	-0,03
Disco + Coroa + Prisma com eixo maior horizontal	1,09E-02	2,86E-05	11,22	125,9	0,03	0,69	1,26E+02	-9,36E-03	0,03	-0,03

Tabela 5 - Resumo dos Dados experimentais relevantes para o estudo do módulo de Rigidez

4. Análise e discussão de resultados

4.1 – Determinação do Módulo de Young através da vibração de uma Barra Encastrada

Através dos dados recolhidos para a tabela em anexo cuja amostra se disponibiliza na [tabela 2 \(página 4\)](#), onde foram registados os intervalos de tempo para 51, 101 e 151 impulsos para cada comprimento livre da barra, elaborou-se a tabela 6 onde constam os Períodos médios de oscilação, $T_{\text{méd}}$ (s) para cada valor do quadrado do comprimento livre, l^2 (m):

Ensaio	l^2 (m ²)	$u(l^2)$ (m ²)	$T_{\text{méd.}}$ (s)	$u(T_{\text{méd.}})$ (s)	Ajuste $T_{\text{méd.}}$ (s)	Resíduos $(T_{\text{méd.}})$ (s)	2sy	-2sy
1	0,0692	0,00003	0,0519	0,0009	0,0505	0,0014	0,002	-0,002
2	0,1260	0,00004	0,0897	0,0002	0,0906	-0,0009	0,002	-0,002
3	0,1710	0,00004	0,1218	0,0003	0,1224	-0,0005	0,002	-0,002
4	0,2220	0,00005	0,1582	0,0003	0,1584	-0,0002	0,002	-0,002
5	0,2863	0,00005	0,2036	0,0000	0,2038	-0,0002	0,002	-0,002
6	0,3248	0,00006	0,2312	0,0000	0,2309	0,0003	0,002	-0,002
7	0,3856	0,00006	0,2732	0,0002	0,2739	-0,0006	0,002	-0,002
8	0,4422	0,00007	0,3133	0,0002	0,3138	-0,0005	0,002	-0,002
9	0,4935	0,00007	0,3504	0,0007	0,3500	0,0004	0,002	-0,002
10	0,5383	0,00007	0,3837	0,0005	0,3816	0,0021	0,002	-0,002
11	0,5914	0,00008	0,4194	0,0003	0,4191	0,0003	0,002	-0,002
12	0,6376	0,00008	0,4503	0,0003	0,4517	-0,0014	0,002	-0,002

Tabela 6 - Dados experimentais relevantes para a análise gráfica, com $T_{\text{méd}}$ para cada quadrado do comprimento livre da barra, l^2

A partir da tabela acima, efetuou-se a análise gráfica de $T_{\text{méd}}$ (s) em função de l^2 (m), que se apresenta na figura 5 e a respetiva matriz de ajuste (tabela 6).

A escolha da variável independente e dependente, teve como base a observação dos valores de incerteza para cada uma das grandezas. Decidiu-se representar desta forma, uma vez que $T_{\text{méd}}$ apresenta uma incerteza cerca de 10 vezes superior a l^2 .

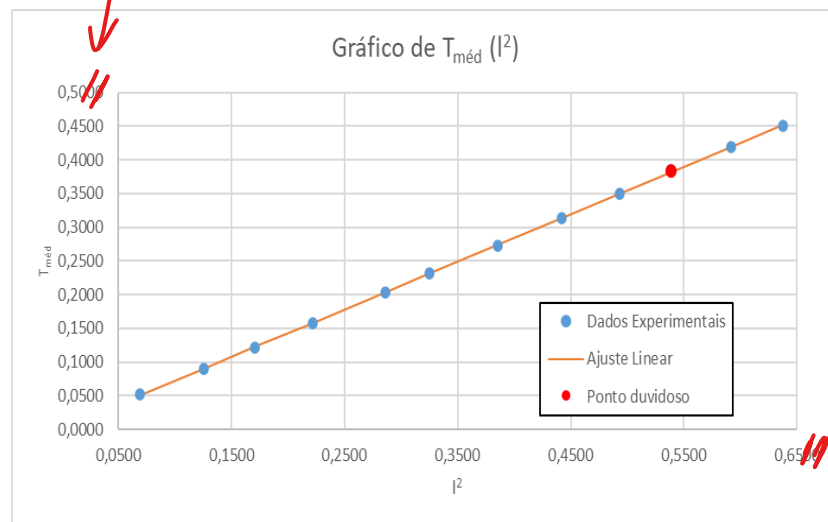


Figura 5 - Gráfico de $T_{\text{méd}}$ (s) em função de l^2 (m) para todos os ensaios tendo sido considerados os dados relativos a 51, 101 e 151 impulsos

Ajuste de $T_{\text{méd}}$ (l^2)			
m	0,7058	0,0017	b
Δm	0,0016	0,0007	Δb
R^2	0,9999	0,001	sy

Tabela 7 – Matriz de ajuste linear do gráfico de $T_{\text{méd}}$ em função de l^2 , através da função PROJ.LIN do Excel(R)

Através da matriz de ajuste linear foi feito o cálculo de Ajuste $T_{\text{méd}}$ (s) que consta na [tabela 6](#) de forma a calcular-se os resíduos de $T_{\text{méd}}$ que se encontram analisados no gráfico seguinte:

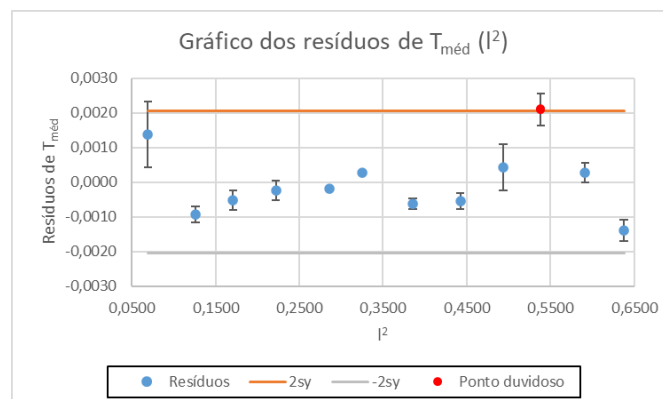


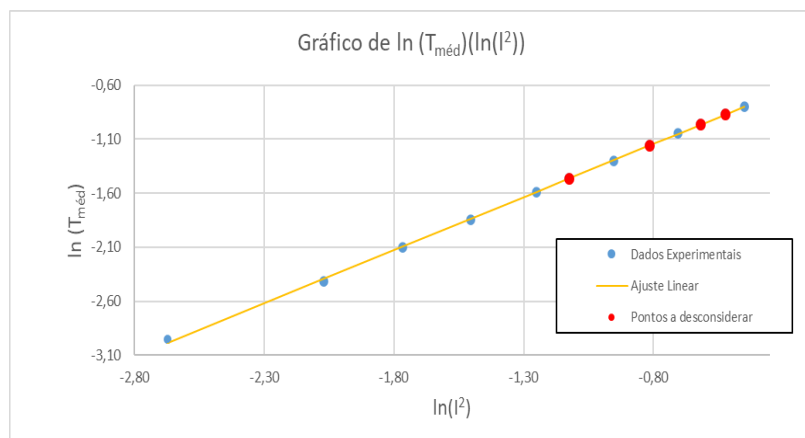
Figura 6 - Gráfico dos resíduos de ajuste de $T_{\text{méd}}$ e intervalo de confiança $[-2sy; 2sy]$

As barras de incerteza do gráfico dos resíduos de ajuste de $T_{\text{méd}}$ foram obtidos através do desvio padrão dos valores de T de 51, 101 e 151 impulsos para cada comprimento l .

Pela análise do gráfico de $T_{\text{méd}}$ em função de l^2 , podemos verificar que existe uma tendência linear entre as duas grandezas. O ponto assinalado a vermelho, correspondente ao ensaio 10, foi considerado duvidoso por se encontrar fora do limite de confiança $[-2sy, 2sy]$ dos resíduos de $T_{\text{méd}}$.

Durante a execução experimental, de forma a verificar que os pontos que estávamos a considerar teriam o mesmo peso dentro da gama escolhida, foi feito o gráfico de $\ln(T_{\text{méd}})$ em função de $\ln(l^2)$, a respetiva matriz de ajuste e gráfico de resíduos de ajuste.

No entanto, por lapso, na parte de troca entre subgrupos, não foi passada corretamente essa informação aos colegas, que como não sabiam que estávamos a ter o cuidado de verificar se os pontos na escala logarítmica estavam igualmente espaçados e se seria necessário retirar mais pontos nalguma região da gama experimental escolhida, e obtivemos os seguintes gráficos:



Ajuste de $\ln(T_{méd})(\ln(l^2))$			
m	0,983	-0,358	b
Δm	0,005	0,007	Δb
R^2	0,9998	0,01	sy

Tabela 8 - Matriz de Ajuste Linear ao gráfico da figura 7

Figura 7 - Gráfico de $\ln(T_{méd})$ em função de $\ln(l^2)$ - a tabela onde constam os dados deste gráfico encontra-se em anexo

Como facilmente se pode verificar, os pontos não estão devidamente espaçados. O ideal, seria terem sido tirados mais pontos entre os comprimentos do 1º e do 5º ensaio (na gama de valores em que $l \in [0,2630; 0,5351]m$) mas como só verificamos esta falha no final da aula, não conseguimos recolher mais dados nessa gama. Por este motivo, decidi fazer um novo ajuste, retirando alguns pontos de forma a tentar manter uma distância similar entre os pontos que seriam considerados num segundo ajuste. Os pontos a desconsiderar no 2º ajuste dos dados, estão assinalados a vermelho no gráfico da figura 7 e na tabela 6 (pág.6).

Com a matriz de ajuste, verificou-se que tal como se esperava, que as grandezas são proporcionais através da expressão

$$\log(T_{méd}) = \log(l^2) + \log\left(\sqrt{\frac{5,029\pi^2\rho}{ED^2}}\right) \quad (12)$$

($m = 0,983 \pm 0,005$ a menos de $u(\%) = 0,5\%$ e $\% \text{ erro} = 1,7\%$) e fez-se o cálculo do ajuste de $\ln(T_{méd})$ e dos resíduos que constam na tabela em anexo, tendo-se obtido o seguinte gráfico de resíduos de ajuste de $\ln(T_{méd})$:

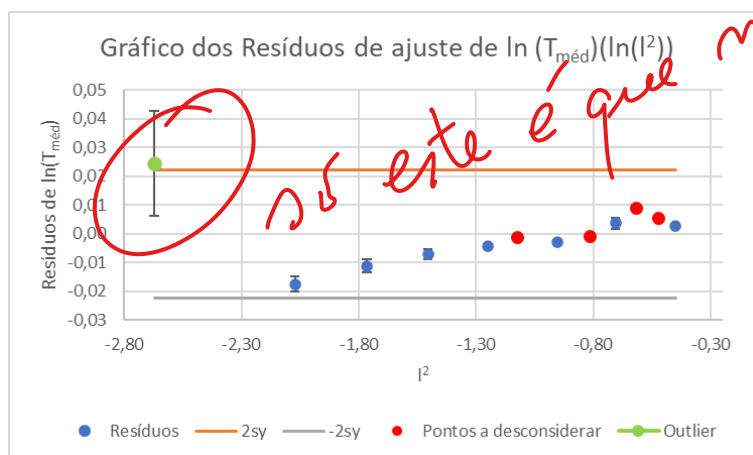


Figura 8 - Gráfico de resíduos de ajuste de $\ln(T_{méd})$

*me parece
duvidoso
Depois de o
retirar deve
olhar p/ o
gráfico de resíduos
e decidir*

As barras de incerteza do gráfico da figura 8 foram obtidas através de:

$$u(\ln(l^2)) = \frac{u(l^2)}{(l^2)} \quad (13)$$

O ponto correspondente ao 1º ensaio, também se encontra demasiado espaçado do 2º ponto, no entanto, apesar de ter estudado o ajuste sem esse ponto de forma a verificar que não estaria a fazer uma má escolha, decidi não o desconsiderar pois iria mudar radicalmente a gama em estudo sem que a sua retirada fosse significativa no ajuste. Por este motivo, apesar de se encontrar fora dos limites do intervalo de confiança $[-2sy; 2sy]$, é considerado um outlier mas não um ponto duvidoso na minha análise.

Após retirar os pontos a desconsiderar, foram obtidos os seguintes gráficos e matrizes de ajuste, cuja análise foi feita da mesma forma que a anterior. Os dados referentes a este 2º ajuste, encontram-se em anexo.

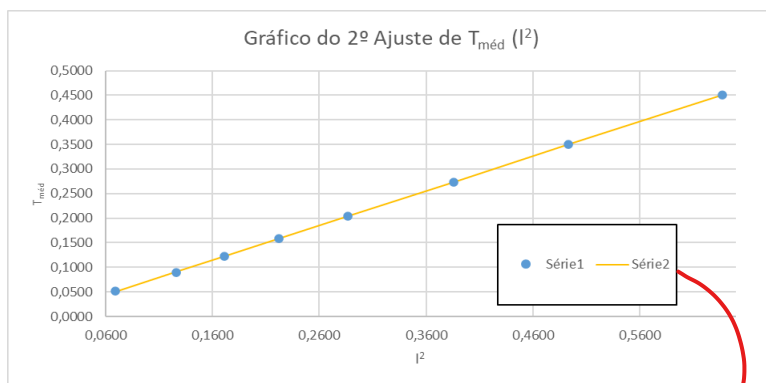


Figura 9 - Gráfico do 2º ajuste de $T_{méd}$ em função de l^2 - tabela de dados experimentais em anexo

2º Ajuste de $T_{méd}(l^2)$			
m	0,7039	0,0020	b
Δm	0,0016	0,0006	Δb
R^2	1,0000	0,0008	sy

Tabela 9 - Matriz de ajuste linear do 2º ajuste Linear de $T_{méd}$

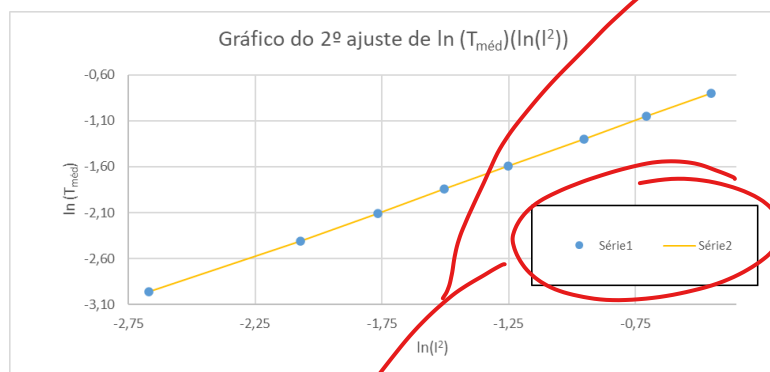


Figura 12 - Gráfico do 2º ajuste de $\ln(T_{méd})$ em função de $\ln(l^2)$ - a tabela onde constam os dados deste gráfico encontra-se em anexo

2º Ajuste de $\ln(T_{méd})(\ln(l^2))$			
m	0,980	-0,364	b
Δm	0,007	0,011	Δb
R^2	0,9997	0,013	sy

Tabela 10 - Matriz de ajuste linear do 2º ajuste de $\ln(T_{méd})$ em função de $\ln(l^2)$

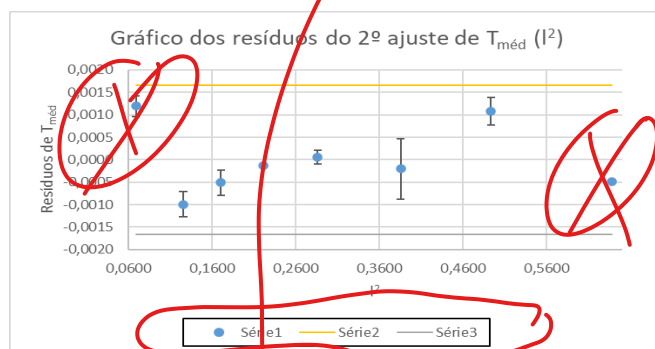


Figura 11 - Gráfico de Resíduos do 2º ajuste de $T_{méd}$

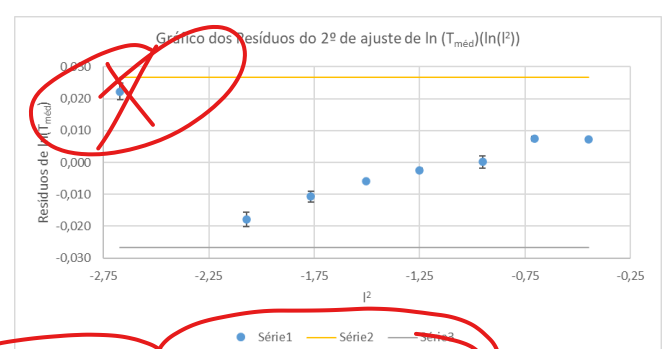


Figura 11 - Gráfico dos resíduos do 2º ajuste de $\ln(T_{méd})$

refazer ajustes!

Verifica-se que os pontos agora estão com um espaçamento melhorado na escala logarítmica, mas que este facto apenas nos garante que os pontos contribuem de igual forma para o ajuste, no entanto, a diferença nos ajustes é pouco significativa, tendo o valor de m diminuído 0,2% relativamente ao do 1º ajuste. O que melhora mais significativamente, são os resíduos ao ajuste que passam a apresentar todos os pontos dentro do intervalo de confiança quer num gráfico quer noutro (incluindo o ponto que era outlier no 1º ajuste) e passam a distribuir-se com uma tendência quadrática mais acentuada.

Através das matrizes de ajuste, obteve-se:

$$m_{1^\circ \text{ ajuste}} = 0,7058 \pm 0,016$$

$$m_{2^\circ \text{ ajuste}} = 0,7039 \pm 0,016$$

Em que m pela [equação 2](#) representa:

$$m = \sqrt{\frac{5,029\pi^2 \rho}{ED^2}} \quad (14)$$

Através do qual se conseguiu obter o valor do Módulo de Young:

$$E_{1^\circ \text{ ajuste}} = (201 \pm 0,02) \text{ GPa a menos de } u(E)(\%) = 0,01\% \text{ e } \text{erro}(\%) = 1,04\%$$

$$E_{2^\circ \text{ ajuste}} = (204 \pm 0,02) \text{ GPa a menos de } u(E)(\%) = 0,01\% \text{ e } \text{erro}(\%) = 0,49\%$$

O Módulo de Young e respetiva incerteza obteve-se através de:

$$E = \sqrt{\frac{5,029\pi^2 \rho}{m^2 D^2}} \quad (15)$$

$$u(E) = E \sqrt{\frac{u(\rho)^2}{\rho^2} + \frac{(2u(D))^2}{D^2} + \frac{(2u(m))^2}{(m^2)^2}}, m = \text{declive} \quad (16)$$

O valor de referência para o Módulo de Young foi obtido através de pesquisa para o valor de E do Aço, uma vez que a densidade obtida experimentalmente nos indica que a barra era constituída por este material, sendo $E_{\text{ref}}=200\text{GPa}$ (quadro da pesquisa em anexo e fonte nas referências bibliográficas).

4.2 – Determinação do Módulo de Rigidez através do Pêndulo de Torção

Através dos dados recolhidos e referenciados [na tabela 5](#) procedeu-se à análise gráfica de T_{med}^2 em função de I_{conjunto} . Esta escolha de variável independente e dependente teve por base a análise das incertezas associadas a cada uma das grandezas. Como T_{med}^2 apresentava uma incerteza superior, foi tido como variável dependente.

Obteve-se o gráfico seguinte e respetivo ajuste linear:

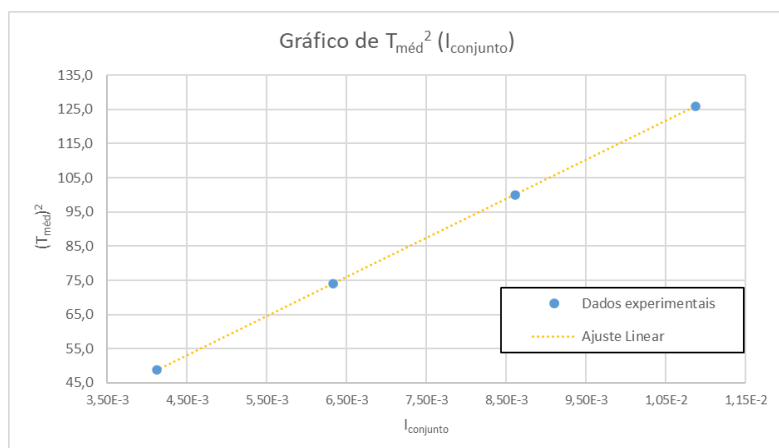


Figura 13 - Gráfico de $T_{\text{med}}^2 \text{ (s}^2\text{)}$ em função de $I_{\text{conjunto}} \text{ (Kg m}^2\text{)}$

Ajuste de $T_{\text{med}}^2(I_{\text{conjunto}})$			
m	1,14E+04	1,64	b
Δm	3,39	0,03	Δb
R^2	1,00	0,02	sy

Tabela 11 - Matriz de ajuste Linear do Gráfico da figura 13

No gráfico de $T_{\text{méd}}^2$ em função de I_{conjunto} verifica-se uma dependência linear praticamente sem desvios para todos os pontos como era de esperar pela [equação 3](#). Verifica-se ainda que o ajuste é ótimo pelo método dos mínimos quadrados com $R^2=1,00$.

Com recurso ao ajuste linear, calcularam-se os valores de ajuste de $T_{\text{méd}}^2$ que constam na [tabela 5](#) e respetivos resíduos para elaborar o seguinte gráfico:

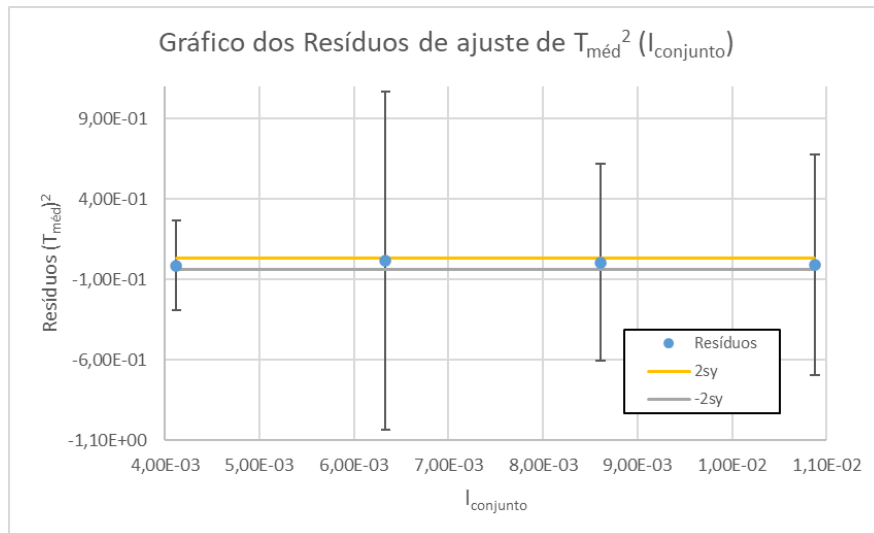


Figura 14 - Gráfico de Resíduos de ajuste de $T_{\text{méd}}$ com barras de incerteza

Como os valores obtidos têm um ajuste linear ótimo, as incertezas associadas aos momentos de Inércia dos conjuntos que foram suspensos, são superiores aos resíduos, pelo que se elaborou u, gráfico sem as barras de incerteza por forma a tirar conclusões sobre os resíduos.

Antes de se proceder à elaboração do gráfico, foram várias vezes verificadas as incertezas dos momentos de inércia e comparadas com vários trabalhos de outros colegas de forma a garantir que não havia qualquer erro nos dados para que o gráfico obtido tivesse este aspeto.

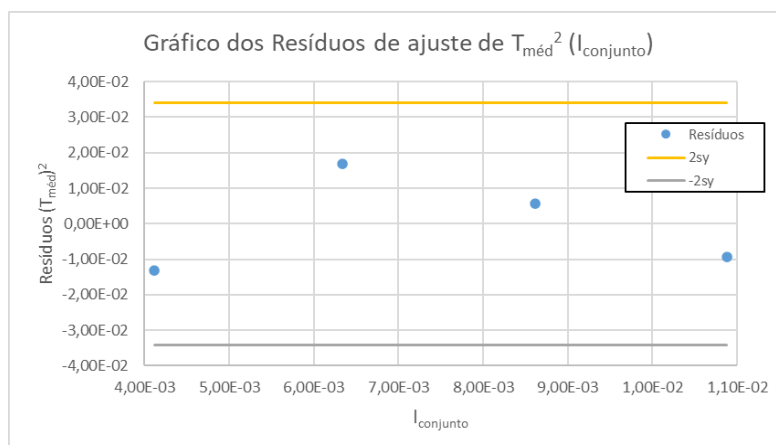


Figura 15 - Gráfico de Resíduos de ajuste de $T_{\text{méd}}$ sem barras de incerteza

Através deste gráfico, podemos verificar que os resíduos se distribuem dentro do intervalo de confiança com uma tendência curvilínea o que indica uma boa gama de estudo.

Através da [equação 3](#) podemos verificar que $m = \frac{128\pi L}{d^4\mu}$ e pelo [ajuste linear](#), obteve-se:

$$m = (1,14 \pm 0,0003) \times 10^4$$

Permitindo-nos calcular o Módulo de Rigidez através da equação 17:

alg. signif. errados

$$\mu = \frac{128\pi L}{m d^4} \quad (17)$$

Obteve-se:

$\mu = (72,0 \pm 0,4) \text{ GPa}$ a menos de $u(\mu)(\%) = 1\%$ e $\text{erro}(\%) = 3\%$

A incerteza do Módulo de Rigidez foi calculada através da expressão seguinte:

$$u(\mu) = \mu \sqrt{\frac{u(L)^2}{L^2} + \frac{u(m)^2}{m^2} + \frac{(4u(D))^2}{D^2}}, m = \text{declive} \quad (18)$$

O valor de referência de μ para o fio de piano é $\mu_{ref} = 73,9 \text{ GPa}$. Este valor foi retirado através do [link](#) disponibilizado nas referências

5. Resultados

Finais

Através do estudo do método das vibrações por uma barra encastrada, foi possível obter os seguintes resultados:

Determinação da Densidade da Barra (ρ)	
$\rho \text{ (kg/m}^3\text{)}$	7881,02
$\rho_{ref} \text{ (kg/m}^3\text{)}$	7860,00
$u(\rho)$	0,04
$u(\rho) (\%)$	0,001%
Erro (%)	0,3%

Tabela 12 - Densidade da Barra

Determinação do Módulo de Young (2º ajuste)		Valores em (GPa)
E (Pa)	2,02E+11	202,50
E _{ref} (Pa)	2,04E+11	203,50
u (E)	1,72E+07	0,02
u (E) (%)		0,01%
Erro (%)		0,49%

Tabela 13 - Módulo de Young da Barra

Através do estudo com o Pêndulo de Torção, obteve-se:

Determinação do Módulo de Rigidez		Valores em GPa
$\mu \text{ (Pa)}$	7,20E+10	72,0
$\mu_{ref} \text{ (Pa)}$	7,39E+10	73,9
u (μ)	4,30E+08	0,4
u (μ) (%)		1%
Erro (%)		3%

Tabela 14 - Módulo de Rigidez do Fio

análise de linearidade proposta?

6. Conclusão

Todos os objetivos propostos foram devidamente alcançados e com bons resultados, quando comparado com outros trabalhos consultados.

Obteve-se uma densidade da barra de $(7881,02 \pm 0,04) \text{ Kg/m}^3$ a menos de 0,001% de incerteza relativa e com erro relativo de 0,3%; um valor de Módulo de Young da barra de $(202,50 \pm 0,02) \text{ GPa}$ a menos de 0,01% de incerteza relativa e com erro relativo de 0,49% e um valor de Módulo de Rigidez do fio do Pêndulo de $(72,0 \pm 0,4) \text{ GPa}$ a menos de 1% de incerteza relativa e erro relativo de 3%.

Através do estudo com a barra encastrada foi possível determinar experimentalmente a densidade do material que constituía a barra, tendo-se concluído que esta era composta por aço.

Apesar de ter sido necessário fazer um segundo ajuste no gráfico $\ln(T_{med})/\ln(I^2)$ por falha na comunicação entre pares, conseguiu obter-se uma ótima relação de linearidade entre as grandezas, com o declive muito próximo do esperado.

A determinação do Módulo de Young veio confirmar a composição do material da barra como sendo aço, dado que se aproxima bastante do valor de referência para este material.

A experiência com o pêndulo de torção torna-se desafiante na medida em que garantir a estabilidade do sistema e que o movimento seja apenas rotacional, não é uma tarefa fácil, no entanto, no caso do nosso grupo, foi uma execução muito bem conseguida, a avaliar pela precisão e exatidão dos resultados.

Na verdade, qualquer valor obtido no decorrer deste trabalho prático tem incertezas e erros relativos bastante baixos.

No protocolo de apoio, torna-se confuso quais as medições a fazer de b do prisma, sendo que tem algumas partes do protocolo que falam em b maior e b menor, quando deveriam referir-se ao eixo. Apesar de ter sido disponibilizada no moodle uma imagem que coloco em anexo para as medições do prisma, deixo a minha sugestão de se rever o protocolo de forma a torná-lo mais claro. Reparei quando consultei relatórios e trabalhos individuais de outros colegas, que a confusão neste ponto é geral, havendo grupos que medem dois valores de b diferentes.

Comparando com outros grupos, o valor obtido pelo nosso grupo, especialmente para o módulo de rigidez, encontra-se muito mais próximo do valor de referência. Acredito que se deve ao facto de realmente termos feito um esforço de impormos medidas dentro das experiências para minimizar erros sistemáticos. No entanto, lamentavelmente, falhou-nos a comunicação de um ponto crucial, pelo que devemos tentar melhorar numa próxima oportunidade.

7. Referências Bibliográficas

https://www.fusehatsu.co.jp/com_info/fusehatsu/about-spring/piano-wire-hard-drawn-steel-wire/wire-diameter-tensile-strength.html

Protocolo do trabalho 4B de Laboratório de Física II, Departamento de Física e Astronomia da Faculdade de Ciências da Universidade do Porto (2023).

https://www.materiais.gelsonluz.com/2017/12/modulo-de-elasticidade-ou-modulo-de-young.html?utm_content=cmp-true

8. Anexos

a. Anexos secção 3 – Execução experimental e resultados

D(mm)	incerteza
1,960	0,01
1,967	0,01
1,955	0,01
2,001	0,01
1,990	0,01

Tabela A 1 - Diâmetro do fio medido em vários pontos

Registo de dados experimentais para todos os impulsos												
Ensaio	impulsos	oscilações	l (m)	u (l)	l ² (m ²)	u(l ²) (m ²)	t (s)	u(t) (s)	T(s)	u(T)(s)	T _{méd.} (s)	u(T _{méd.})(s)
1	51	25	0,2630	0,00005	0,06917	0,00003	1,31	0,01	0,0524	0,0004	0,0519	9E-04
	101	50					2,59	0,01	0,0518	0,0002		
	151	75					3,86	0,01	0,0515	0,0001		
2	51	25	0,3549	0,00005	0,12595	0,00004	2,24	0,01	0,0896	0,0004	0,0897	2E-04
	101	50					4,49	0,01	0,0898	0,0002		
	151	75					6,72	0,01	0,0896	0,0001		
3	51	25	0,4135	0,00005	0,17098	0,00004	3,05	0,01	0,1220	0,0004	0,1218	3E-04
	101	50					6,09	0,01	0,1218	0,0002		
	151	75					9,13	0,01	0,1217	0,0001		
4	51	25	0,4712	0,00005	0,22203	0,00005	3,95	0,01	0,1580	0,0004	0,1582	3E-04
	101	50					7,91	0,01	0,1582	0,0002		
	151	75					11,87	0,01	0,1583	0,0001		
5	51	25	0,5351	0,00005	0,28633	0,00005	5,09	0,01	0,2036	0,0004	0,2036	0E+00
	101	50					10,18	0,01	0,2036	0,0002		
	151	75					15,27	0,01	0,2036	0,0001		
6	51	25	0,5699	0,00005	0,32479	0,00006	5,78	0,01	0,2312	0,0004	0,2312	6E-17
	101	50					11,56	0,01	0,2312	0,0002		
	151	75					17,34	0,01	0,2312	0,0001		
7	51	25	0,6210	0,00005	0,38564	0,00006	6,83	0,01	0,2732	0,0004	0,2732	2E-04
	101	50					13,66	0,01	0,2732	0,0002		
	151	75					20,5	0,01	0,2733	0,0001		
8	51	25	0,6650	0,00005	0,44223	0,00007	7,83	0,01	0,3132	0,0004	0,3133	2E-04
	101	50					15,67	0,01	0,3134	0,0002		
	151	75					23,49	0,01	0,3132	0,0001		
9	51	25	0,7025	0,00005	0,49351	0,00007	8,77	0,01	0,3508	0,0004	0,3504	7E-04
	101	50					17,52	0,01	0,3504	0,0002		
	151	75					26,26	0,01	0,3501	0,0001		
10	51	25	0,7337	0,00005	0,53832	0,00007	9,6	0,01	0,3840	0,0004	0,3837	5E-04
	101	50					19,18	0,01	0,3836	0,0002		
	151	75					28,77	0,01	0,3836	0,0001		
11	51	25	0,7690	0,00005	0,59136	0,00008	10,48	0,01	0,4192	0,0004	0,4194	3E-04
	101	50					20,97	0,01	0,4194	0,0002		
	151	75					31,46	0,01	0,4195	0,0001		
12	51	25	0,7985	0,00005	0,63760	0,00008	11,26	0,01	0,4504	0,0004	0,4503	3E-04
	101	50					22,52	0,01	0,4504	0,0002		
	151	75					33,76	0,01	0,4501	0,0001		

Tabela A 2 - Tabela integral (cuja amostra foi representada na tabela 2) com os dados experimentais para determinação do Módulo de Young

Medições efetuadas				
Fio	Prisma		Coroa	
d(mm)	b(mm)	h(cm)	D1 interno	D2 externo
0,835	30,00	19,5	18,08	20,0
0,830	30,70	20,0	17,95	21,0
0,880	30,20	20,0	Nota: Usado método da folha de papel milimétrico na medição dos diâmetros externos e internos da coroa	
0,875	29,40			
0,850	29,61			
0,845	30,30			
0,835				

Tabela A 3 - Medições efetuadas para os objetos suspensos no pêndulo de torção

Objeto suspenso	I_{conjunto} (kg m ²)	$u(I)$ (kg m ²)	$\theta_{\text{max}}(^{\circ})$	t (s)	$u(t)$ (s)	T (s)	$u(T)$ (s)	T^2	$T_{\text{méd.}}$ (s)	$u(T_{\text{méd.}})$ (s)
Disco + Prisma com eixo maior vertical	0,00412	2,03E-05	90	69,7	0,1	6,97	0,01	48,6	6,98	0,02
	0,00412		180	69,9	0,1	6,99	0,01	48,9		
	0,00412		270	69,8	0,1	6,98	0,01	48,7		
Disco + Prisma com eixo maior horizontal	0,00633	2,32059E-05	90	85,8	0,1	8,58	0,01	73,6	8,61	0,06
	0,00633		180	86,0	0,1	8,6	0,01	74,0		
	0,00633		270	86,4	0,1	8,64	0,01	74,6		
Disco + Coroa	0,00861	2,6232E-05	90	100,2	0,1	10,02	0,01	100,4	10,00	0,03
	0,00861		180	100	0,1	10	0,01	100,0		
	0,00861		270	99,9	0,1	9,99	0,01	99,8		
Disco + Coroa + Prisma com eixo maior horizontal	0,01088	2,85636E-05	90	112,2	0,1	11,22	0,01	125,9	11,22	0,03
	0,01088		180	112,1	0,1	11,21	0,01	125,7		
	0,01088		270	112,4	0,1	11,24	0,01	126,3		

Tabela A 4 - Tabela dos dados experimentais para a determinação do módulo de rigidez

b. Anexos da secção 4 – Análise e Discussão de resultados

Ensaio	(I^2)	$u(\ln(I^2))$	$\ln(T_{\text{méd.}})$	$u(\ln(T_{\text{méd.}}))$	Ajuste $\ln(T_{\text{méd.}})(s)$	Resíduos $\ln((T_{\text{méd.}}))(s)$	$2sy$	$-2sy$
1	-2,67	0,0004	-2,96	0,018	-2,98	0,02	0,02	-0,02
2	-2,07	0,0003	-2,41	0,003	-2,39	-0,02	0,02	-0,02
3	-1,77	0,0002	-2,11	0,002	-2,09	-0,01	0,02	-0,02
4	-1,50	0,0002	-1,84	0,002	-1,84	-0,01	0,02	-0,02
5	-1,25	0,0002	-1,59	0,000	-1,59	0,00	0,02	-0,02
6	-1,12	0,0002	-1,46	0,000	-1,46	0,00	0,02	-0,02
7	-0,95	0,0002	-1,30	0,001	-1,29	0,00	0,02	-0,02
8	-0,82	0,0002	-1,16	0,001	-1,16	0,00	0,02	-0,02
9	-0,71	0,0001	-1,05	0,002	-1,05	0,00	0,02	-0,02
10	-0,62	0,0001	-0,96	0,001	-0,97	0,01	0,02	-0,02
11	-0,53	0,0001	-0,87	0,001	-0,87	0,01	0,02	-0,02
12	-0,45	0,0001	-0,80	0,001	-0,80	0,00	0,02	-0,02

Tabela A 5 - Dados para o Gráfico $\ln(T_{\text{méd.}})$ em função de $\ln(I^2)$

Material	Módulo de Young [GPa]
Diamante	1 000
Carbeto de silício (SiC)	450
Tungstênio	406
Ferro	196
Aços de baixa liga	200 - 207
Ferros-fundidos	170 - 190
Cobre	124
Titânio	116
Vidro (SiO ₂)	94
Alumínio	69
Vidro ((Na ₂ O - SiO ₂))	69
Nylon	2 - 4

Material	Densidade ρ (kg/m ³)	Módulo de Young E (10 ⁹ N/m ²)
Aço	7860	200
Alumínio	2710	70
Vidro	2190	65
Concreto	2310	30
Madeira	525	13
Osso	1900	9
Poliestireno	1050	3

Tabela 4-1: Valor do módulo de elasticidade para alguns materiais
<http://www.mse.cornell.edu/courses/engr111/modulus.htm>Tabela A 6 - Pesquisa para o valor de Módulo de Young de referência (fonte: https://www.materiais.gelsonluz.com/2017/12/modulo-de-elasticidade-ou-modulo-de-young.html?utm_content=cmp=true)

c. Anexos da secção 6 - conclusões

Nota 3: No cálculo do **Momento de Inércia do PRISMA**,



- h** - altura/comprimento do prisma
b - lado da aresta da base do prisma.

Tabela A 7 - Captura de ecrã da página de disciplina sobre as medições do prisma