

T9-Medidas Ópticas e propriedades da Luz

Tiago Manuel Ribeiro Pinto

Faculdade de Ciências da Universidade do Porto

Laboratórios III

11 de Novembro 2022



Conteúdo

1	Objetivos do estudo	2
2	Fundamentação Teórica	2
2.1	Polarização	3
2.1.1	Controlo do estado de polarização	3
2.2	Determinar a velocidade da luz	4
2.2.1	Modelação do sinal	5
2.2.2	Índice de refração	5
3	Procedimento Experimental	6
3.1	Equipamento	6
3.2	Execução experimental	7
3.2.1	Parte 1: Luz linearmente polarizada	7
3.2.2	Parte 2: Determinar a velocidade da luz	8
4	Análise de Dados	9
4.1	Parte 1: Luz linearmente polarizada	9
4.1.1	Montagem 1: Polarizador	9
4.1.2	Montagem 2: Analisador e Polarizador:	10
4.1.3	Montagem 3: Lâmina retardadora	12
4.2	Parte 2: Determinar a velocidade da luz	14
4.2.1	Montagem 1: Velocidade da luz no ar:	14
4.2.2	Montagem 2: Índice de refração do acrílico	16
5	Resultados Finais:	17
5.1	Parte1: Luz linearmente polarizada:	17
5.2	Parte 2: A velocidade da luz:	18
6	Conclusão:	18

Resumo

Foi determinado o grau de polarização da fonte sendo esta parcialmente polarizada. Também foi verificada a lei de Malus com um erro percentual consideravelmente baixo e conseguimos caracterizar uma lâmina retardadora a partir de uma montagem de polarizadores cruzados. Já na segunda parte da experiência com sucesso conseguimos medir a velocidade da luz no vácuo (no ar na realidade) e a velocidade desta num bloco de acrílico também. Além disso determinamos o índice de refração do acrílico. Todos os erros percentuais foram consideravelmente baixos (abaixo da décima) e tiveram a mesma ordem de grandeza que as incertezas percentuais.

1 Objetivos do estudo

1. Estudar o comportamento de uma fonte de luz monocromática, colimada e polarizada linearmente sob o efeito de polarizadores;
2. Determinar o grau de polarização da fonte, analisando a dependência da potência transmitida através dos polarizadores em função da sua orientação angular;
3. Verificar a lei de Malus;
4. Caracterizar uma lâmina retardadora a partir da montagem de polarizadores cruzados (isto é, quando a diferença entre os ângulos de orientação dos polarizadores é: $\Delta\theta = \frac{\pi}{2}$);
5. Determinar a velocidade da luz em diferentes meios (ar e acrílico), medindo a diferença de fase do sinal luminoso em função da distância percorrida e utilizando técnicas de modelação de sinus;
6. Estimar o índice de refração de um bloco de acrílico;

2 Fundamentação Teórica

Uma onda plana monocromática pode ser definida da seguinte forma:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_o \cos(\omega t + \vec{k} \cdot \vec{r} + \phi_o) = \vec{E}_o e^{i(\omega t + \vec{k} \cdot \vec{r} + \phi_o)} \quad (1)$$

em que E_o é a amplitude do vetor campo elétrico da radiação, w é a frequência e $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ é o comprimento de onda da radiação; a fase da onda é dada por:

$$\phi(\vec{r}, t) = wt + \vec{k} \cdot \vec{r} + \phi_o \quad (2)$$

e reflete o desfazamento entre os respectivos campos eletromagnéticos. O feixe de luz, por sua vez, pode ser modelizado pela sobreposição de ondas planas descritas pela equação 1.

2.1 Polarização

A polarização da onda é definida por $\mathcal{P} = \frac{\vec{E}_o}{E_o}$ e caracteriza a natureza direcional da vibração eletromagnética em propagação. No caso de fontes de luz não polarizada, como a luz solar, a direção dos vetores dos campos (equação 1) varia ao longo do tempo de forma aleatória. No entanto, a maioria dos lasers, incluindo os utilizados nesta experiência, apresentam uma direção predominante, pelo que consideramos que esta luz é polarizada.

É possível controlar a direção de \mathcal{P} utilizando Polarizadores

2.1.1 Controle do estado de polarização

Uma onda é **polarizada linearmente** por um polarizador se o vetor \vec{E} ficar permanentemente orientado segundo o eixo de polarização, θ_P desse polarizador. A onda eletromagnética será então descrita por:

$$\vec{E}_P = (\hat{x}E_{o_x} + \hat{y}E_{o_y}) \cdot \cos(kz - wt) \quad (3)$$

Posteriormente, ao atravessar um segundo polarizador linear (analisador), o vetor campo elétrico passará a ser orientado pelo seu eixo de polarização (θ_A), pelo que o vetor campo passa a ser definido por:

$$\vec{E}_A = \vec{E}_P \cdot \cos(\theta_P - \theta_A) \quad (4)$$

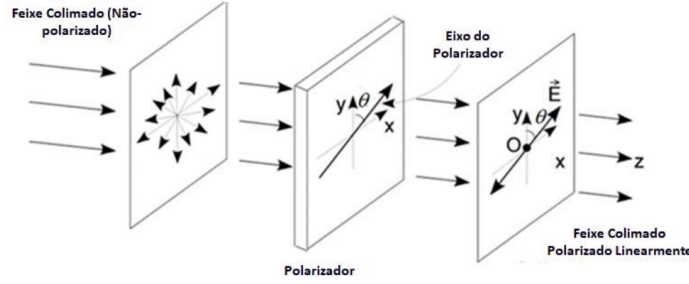


Figura 1: Esquema da polarização linear de uma onda eletromagnética com um polarizador e um analisador.

É importante referir que a lei de Malus deve ser eventualmente reajustada, de modo a ter em conta o facto de os polarizadores não terem o eixo de transmissão máxima identificados, dado que este pode não coincidir com os 0 graus da escala graduada. Este facto induz um erro sistemático nos dados, que pode ser corrigido considerando uma mudança de variável $\theta_P - \theta_A \rightarrow \theta_P - \theta_A + \delta\theta$. Assim, um fotodetetor localizado após o detetor irá medir uma intensidade ótica proporcional a E_A^2 , dando origem à Lei de Malus:

$$P(\theta) = P(0)\cos^2(\theta_P - \theta_A) \quad (5)$$

2.2 Determinar a velocidade da luz

Tendo em conta a definição de onda eletromagnética da equação 1, e sabendo que a relação entre as suas frequências temporal e espacial é dada por $w = k \cdot v$ em que v é a velocidade de propagação, conclui-se que é possível determinar a velocidade da luz a partir da medida da diferença de fase (definida na equação 2).

Existem diferentes formas de o fazer (fixando um ponto no espaço ou um instante de tempo), mas como as frequências temporais e espaciais da luz são muito elevadas, isto exigiria instrumentos de elevada resolução. Para contornar este problema, aplicam-se técnicas de modelação.

2.2.1 Modelação do sinal

A modulação sinusoidal da intensidade $I(t;z)$ de um feixe de luz é conseguida modulando a alimentação do dispositivo emissor; nesse caso, a intensidade luminosa propaga-se na direção z como uma onda descrita por:

$$I(t) = I_0 + \Delta I_0 \cos(2\pi ft - \frac{2\pi}{\Lambda}z + \phi_0) \quad (6)$$

em que I_0 é o valor médio da intensidade da luz e $\Delta I_0, f, \Lambda$ e ϕ_0 se referem à intensidade, frequência, comprimento de onda e fase inicial da modelação, respetivamente. Assim, a diferença de fase entre dois sinais simultâneos (fixando um instante t_0), mas em posições distintas (z_1, z_2), medida por um fotodetector, vai ser a diferença de fase da modelação, dada por:

$$\phi(z, t_0) = 2\pi ft_0 - \frac{2\pi}{\Lambda}z + \phi_0 \Rightarrow \Delta\phi(t_0) = \frac{2\pi}{\Lambda}\Delta z \quad (7)$$

$$c = \frac{\Delta z}{\Delta\phi} \cdot 2\pi f \quad (8)$$

2.2.2 Índice de refração

Para encontrar o índice de refração de um material, basta ajustar a equação 7 ao caso em que a diferença de fase $\Delta\phi$ é causada pela mudança de meio (do ar para o acrílico e novamente para o ar). Nessa situação, efetuam-se duas medições de ϕ , sem variar a distância z do detetor à fonte, com e sem a interferência do material; assim, a velocidade da luz ao atravessar o material vai ser obtida ajustando a expressão encontrada anteriormente:

$$\Delta\phi_{acrílico} = \frac{2\pi f(z - L)}{c} \quad (9)$$

em que L é o comprimento do percurso ótico (neste caso, do bloco de acrílico). Finalmente, tendo em conta a definição de índice de refração: $\frac{c}{v}$

$$n = \frac{c\Delta\phi}{2\pi fL} + n_{ar} \quad (10)$$

em que se pode assumir que $n_{ar} = 1$

3 Procedimento Experimental

3.1 Equipamento

- Kit da *Leybold Didatics* para determinar a velocidade da luz.
- Laser He-Ne de luz monocromática vermelha, linearmente polarizado, modelo 471-830 da *Leybold Didatics*
- Fotodetector de silício
- Polarizadores em suporte rotativo e com escala graduada
- Lâmina retardadora de material birrefringente
- *Chopper* e caixa de controlo
- Fita métrica
- Lente coletora
- Osciloscópio
- Cabos de ligação com terminações BNC
- Fita métrica
- Bloco de acrílico

3.2 Execução experimental

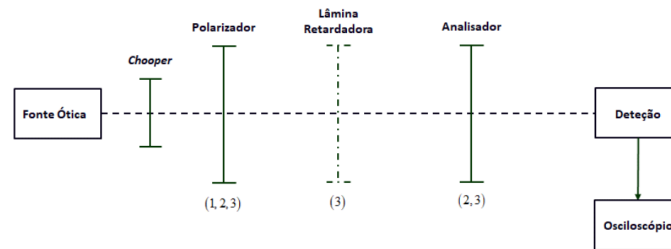


Figura 2: Esquema de montagem para luz polarizada linearmente.

Foram seguidos os passos indicados no protocolo [1]. As diferentes partes da experiência estão apresentadas pela ordem que foram realizadas.

3.2.1 Parte 1: Luz linearmente polarizada

Em primeiro lugar, foi ligado o osciloscópio e efetuada a montagem da figura 2, garantindo-se que a fonte, os polarizadores e o detetor estavam alinhados. As notas que se seguem referem-se a cada uma das montagens realizadas:

1. Montagem 1: Polarizador

Foram recolhidas medidas do sinal captado pelo fotodetetor para diferentes ângulos do polarizador (removendo o analisador e a lâmina da montagem), dentro da gama $[-90, +90]$ graus. Foi possível a partir de um gráfico rápido estimar a polarização do polarizador.

2. Montagem 2: Polarizador e Analisador

Introduzindo o segundo polarizador na montagem (analisador), foram repetidas as medidas, variando apenas a orientação angular do analisador (polarizador mantido na transmissão máxima), de modo a verificar a Lei de Malus.

3. Montagem 3: Lâmina retardadora

Finalmente, foi introduzida a lâmina retardadora no suporte, mantendo o polarizador e analisador nas mesmas posições de modo a que $\theta_P - \theta_A = \frac{\pi}{2}$ (montagem de "polarizadores cruzados"). Foi se variando então a posição angular da lâmina retardadora até se verificar polarização circular (sinal medido independente da posição do analisador). Foram efetuadas medições da intensidade do sinal, variando as posições da lâmina, para verificar a lei de Malus nesta montagem:

$$P = \frac{1}{2}P_0(\cos^2(\Delta\theta) + \cos^2(2\beta - \Delta\theta)) \quad (11)$$

3.2.2 Parte 2: Determinar a velocidade da luz

Como mencionado anteriormente, foi utilizado para esta experiência o Kit da Leybold Didatics.

1. Montagem 1: Velocidade da luz no ar:

Foram realizadas sucessivas medidas da fase(ϕ) e da distância(z) ao longo do comprimento da bancada(2 metros). A distância foi medida entre a posição do laser e uma posição de referência(a cerca de 49 cm do sensor), em que se definiu $\phi_0 = 0$, ajustando o correspondente botão no kit.

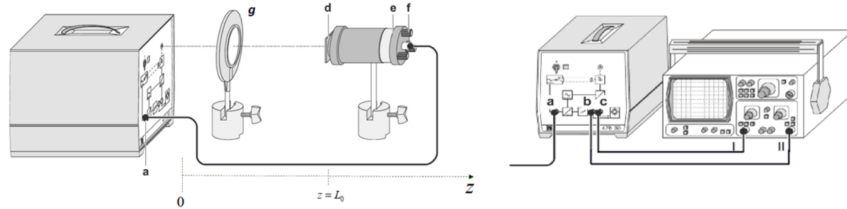


Figura 3: Montagem da velocidade da luz no ar. Figura do protocolo[1]

2. Montagem 2: Índice de refração do acrílico

Para a estimativa do índice de refração do bloco de acrílico, apenas foram efetuadas duas medições, à distância de 124,9 cm do sensor (com e sem o bloco entre a fonte e o sensor). Idealmente, seriam efetuadas mais ensaios, a diferentes distâncias, de modo

a poder corroborar os resultados, mas, por limitações de tempo, apenas foi efetuado 1. O comprimento do bloco de acrílico foi medido com uma craveira, tendo-se obtido $L = (5.010 \pm 0,005)cm$. A partir da equação deduzida no protocolo [1] conseguimos calcular o índice de refração:

$$n_{acrilico} = 1 + \frac{(\Delta t_{osc|ar+acrilico} - \Delta t_{osc|ar})(f_m - f_r)c_0}{f_m L_{acrilico}} \quad (12)$$

e a partir do índice a velocidade:

$$v_{acrilico} = \frac{c_0}{n_{acrilico}} \quad (13)$$

4 Análise de Dados

4.1 Parte 1: Luz linearmente polarizada

4.1.1 Montagem 1: Polarizador

Foram obtidos os seguintes resultados:

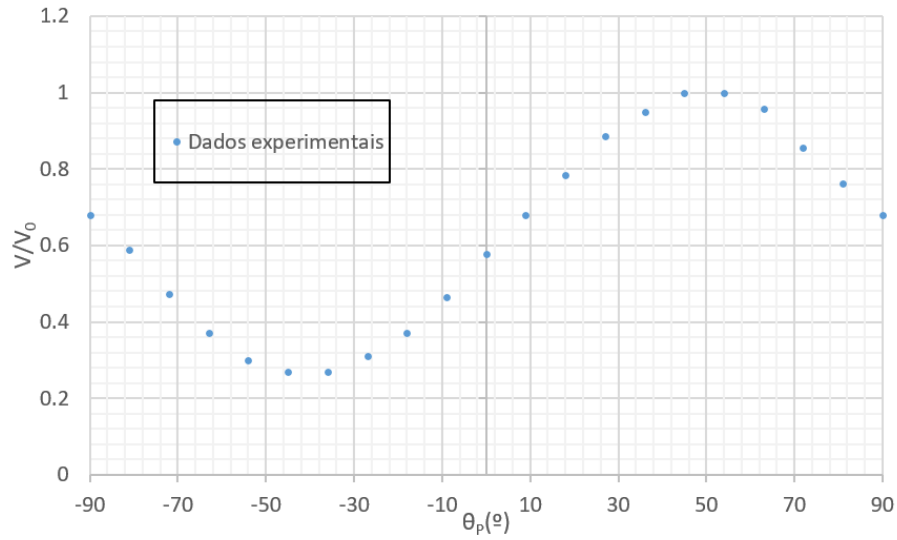


Figura 4: Variação de V/V_0 em função de θ_P

Como é possível ver temos que a nossa fonte parece já emitir luz polarizada linearmente. Caso a luz não fosse, era esperado que a figura 4 fosse uniforme (como por exemplo caso fosse circular).

No entanto, a polarização também não é total, uma vez que:

- os valores de $\frac{V}{V_0}$ nunca se anulam (no ponto mínimo, a $\theta_P = -40$, $\frac{V}{V_0} \sim 0.27$)

Vemos que o nosso máximo é em $\theta_P = 50$ ou seja, a fonte emite luz parcialmente polarizada e o ângulo de polarização do nosso polarizador é 50° .

4.1.2 Montagem 2: Analisador e Polarizador:

Uma vez calculado o θ_P , tal que $\frac{V}{V_0}$ é máximo, foi mantido o polarizador neste ângulo ou seja $\theta_P = 50$, de modo a maximizar a transmissão da luz através deste instrumento. Neste segmento do trabalho, pretende-se verificar a lei de Malus 5. Foram registados então os dados e obtivemos o seguinte: As barras de erro não foram incluídas visto que são muito pequenas relativamente aos dados experimentais, mas estão calculadas no anexo.

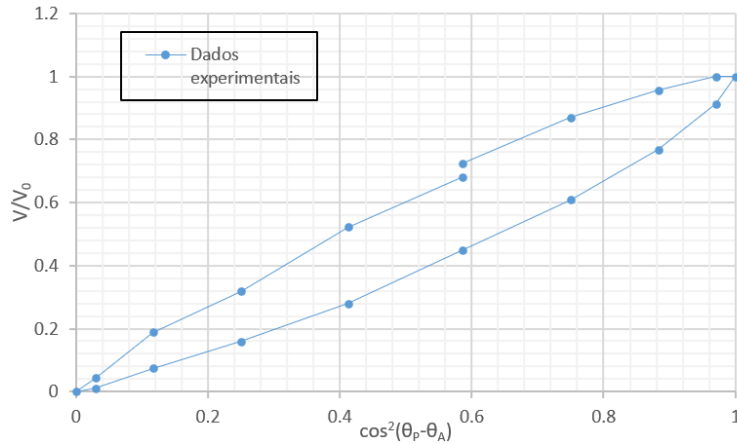


Figura 5: Variação de $\frac{V}{V_0}$ em função de $\cos^2(\theta_P - \theta_A)$

Ora como previsto na introdução teórica 2.1.1, temos que ajustar $\theta_P - \theta_A$, pois temos um erro sistemático nos nossos dados experimentais. Escolheu-se então um δ_θ de forma a minimizar este erro. Com $\delta_\theta = 6.7$ obtivemos então agora o seguinte gráfico:

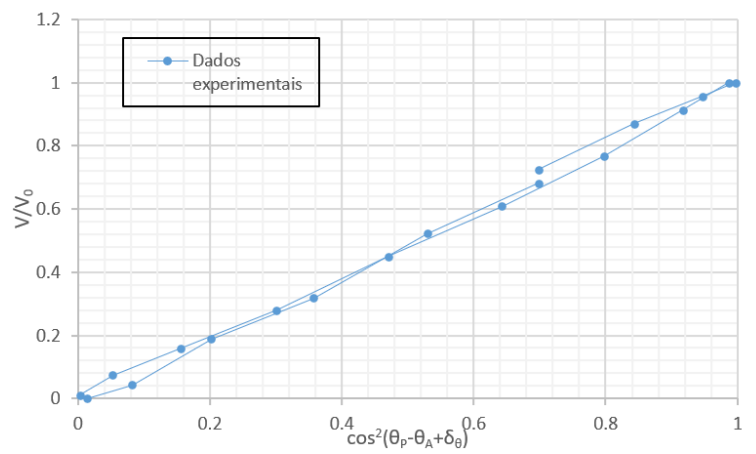


Figura 6: Caption

Parece ter uma dependência linear.

Ora se $\frac{P}{P_0} \propto \frac{V}{V_0} \propto \cos^2(\theta_P - \theta_A)$ então:

$$\log\left(\frac{V}{V_0}\right) = 2 \log(|\cos(\theta_P - \theta_A)|) + \log(m) \quad (14)$$

Aqui logaritmo de base neperiano e m o declive da relação de proporcionalidade. Ora temos então o seguinte gráfico com a seguinte matriz:

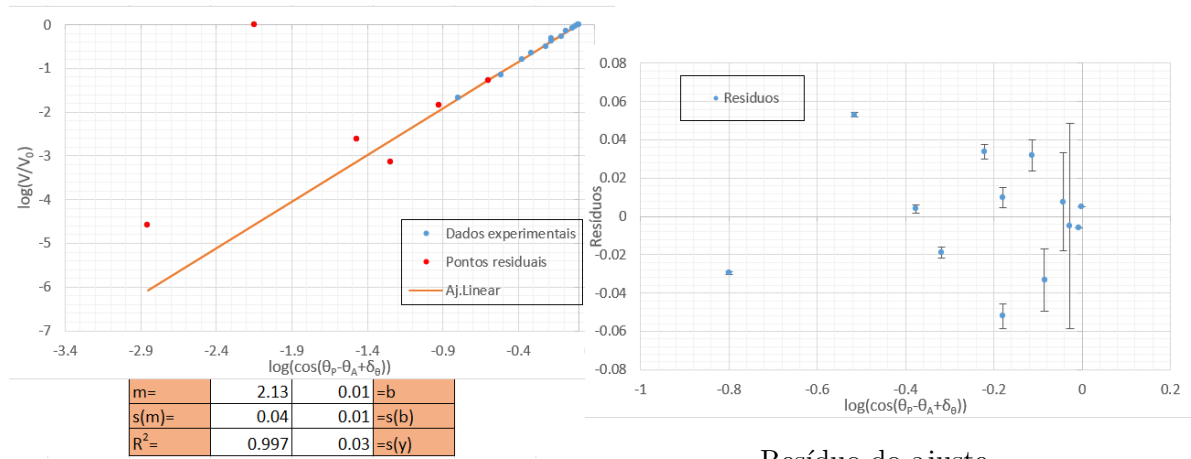


Gráfico do logaritmo

Resíduo do ajuste

Figura 7: Análise da proporcionalidade

Os dados que foram retirados do ajuste estão selecionados no anexo a cor vermelha. O ajuste linear usado é adequado a partir da análise dos gráfico dos resíduos. Temos resíduos completamente aleatórios na gama escolhida. É de notar que retiramos os pontos para o qual $\frac{V}{V_0}$ é menor.

Verificamos então a lei de Malus: $\frac{P}{P_0} \propto \cos^2(\theta_P - \theta_A)$ com as seguintes características

- $Erro\% = \frac{|2-m|}{m} = \frac{2.13-2}{2} = 6.5\%$
- $Inc\% = \frac{s(m)}{m} = \frac{0.04}{2.13} = 2\%$
- Ainda podemos tentar encontrar o declive da relação de proporcionalidade. A partir de 5 é esperado que seja 1. O nosso ajuste tem $b=0.01$ ou seja $m_{proporcionalidade} = e^b \sim 1.01$ que vai de acordo com a lei de Malus.

Vamos agora analisar qualitativamente os nossos dados a partir do gráfico principal 8:

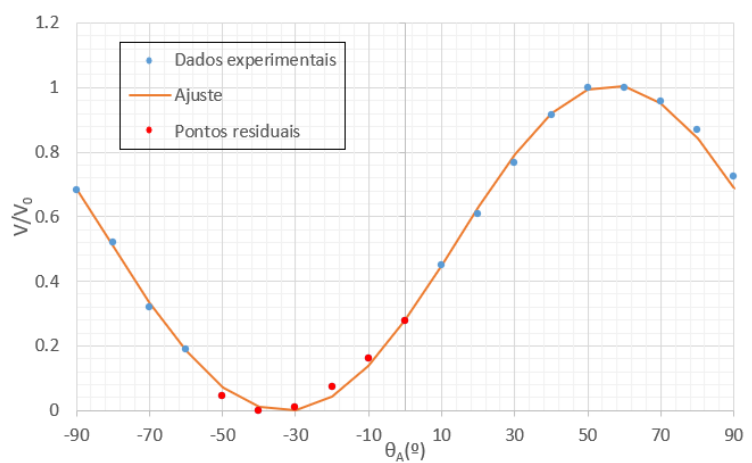


Figura 8: Variação de V/V_0 em função de θ_A

Como era esperado temos um máximo em $\theta_A = 50$ ou seja $\theta_A = \theta_P(=)\theta_A - \theta_P = 0$

4.1.3 Montagem 3: Lâmina retardadora

Ora como o plano da experiência diz, fomos rodando a lâmina retardadora até se verificar polarização circular(ou seja a potência registada é independente do ângulo em que θ_A

está). É de notar que mantivemos também aqui o $\theta_P = 50$ Encontrada esta posição a qual definimos como $\beta = 0$, rodamos 25° de forma a ficar $\beta = 25$ Semelhante ao que aconteceu anteriormente é preciso de um fator δ_θ para corrigir o erro sistemático. A análise vai ser semelhante à análise da secção 4.1.2, mas como vimos a lei de Malus verifica-se e por isso podemos já assumir que $\frac{P}{P_0} \propto \left[\cos(\theta_P - \theta_A)^2 + \cos(2\beta - (\theta_P - \theta_A))^2 \right]$ logo queremos descobrir este fator de proporcionalidade. O esperado é que seja da seguinte forma:

$$\frac{P}{P_0} = \frac{1}{2} \left[\cos(\theta_P - \theta_A)^2 + \cos(2\beta - (\theta_P - \theta_A))^2 \right] \quad (15)$$

Vamos então ver se isto se verifica. Traçamos então o seguinte gráfico já com a correção de $\delta_\theta = -5$:

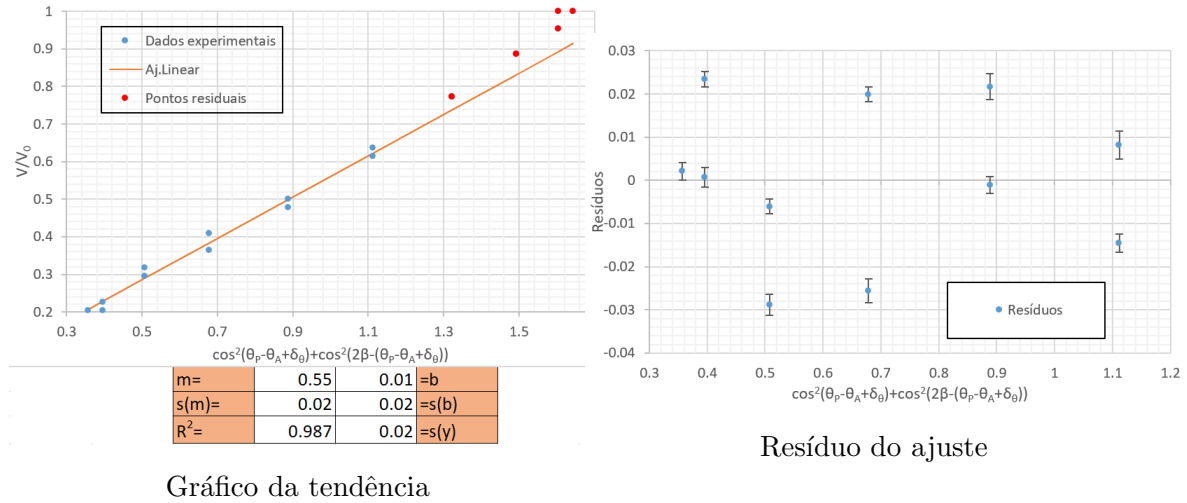


Figura 9: Análise do declive de proporcionalidade

Os pontos residuais estão presentes no anexo e o cálculo do erro no gráfico dos resíduos também.

O nosso ajuste depois de terem sido retirados os pontos residuais, parece ser adequado a partir de uma análise do gráfico de resíduos. Estes são aleatórios mas a sua ordem de grandeza é muito maior que a do erro calculado, o que nos diz que nesta parte da experiência o potencial registado no osciloscópio tem muito mais que 1mV de incerteza.

Ora sendo o ajuste adequado olhamos para o nosso declive e retiramos estas conclusões:

- $m_{declive} = 0.55 \pm 0.2$
- $Erro\% = \frac{m_{declive} - 0.5}{0.5} = \frac{0.55 - 0.5}{0.5} = 10\%$
- $Inc\% = \frac{s(m)}{m} = \frac{0.02}{0.55} \sim 4\%$

Foi verificada então a relação da equação 13 com um erro percentual de 10% que é da mesma ordem de grandeza da nossa incerteza percentual.

4.2 Parte 2: Determinar a velocidade da luz

4.2.1 Montagem 1: Velocidade da luz no ar:

Podemos escrever a equação 8 da seguinte maneira:

$$\Delta z = \frac{c}{2\pi f} \Delta \phi \quad (16)$$

Fizemos então o registo de Δz em função de $\Delta \phi$ e traçamos o seguinte gráfico com o ajuste:

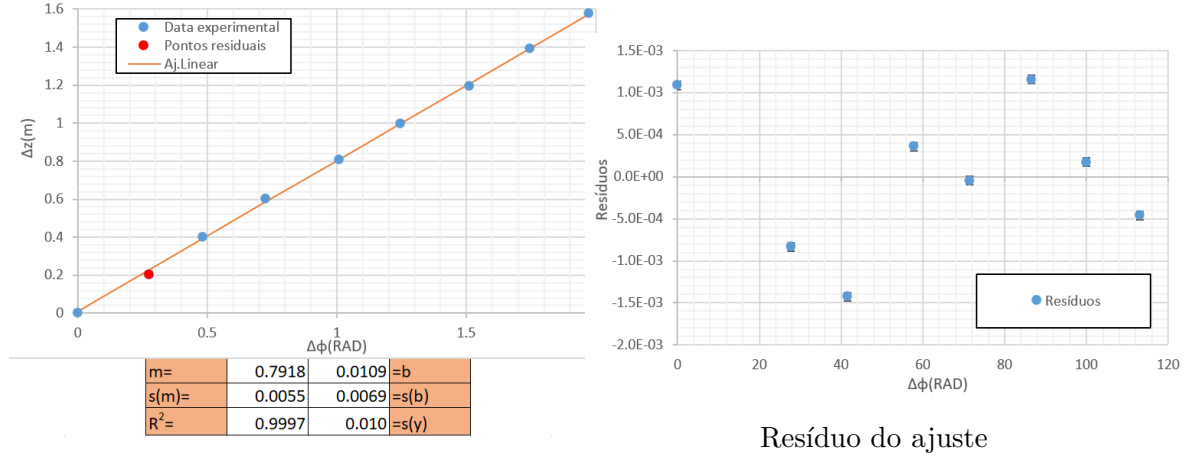


Gráfico da tendência

Figura 10: Análise da velocidade da luz a partir da fase

É possível retirar do gráfico dos resíduos uma distribuição aleatória destes e por isso temos um ajuste adequado na nossa gama experimental. Para agora calcular a velocidade

da luz fazemos uso da equação ?? ou seja:

$$m_{declive} = \frac{c}{2\pi f} \equiv c = 2\pi f m_{declive} \quad (17)$$

A fórmula da incerteza encontra-se no anexo. Usando o valor de referência da velocidade da luz do [2]

- $v_{luz} = (2.98 \pm 0.02) * 10^8 ms^{-1}$
- $Erro\% = 0,44\%$
- $Inc\% = 0.69\%$

Temos então ótimos resultados para a nossa velocidade da luz. Durante a experiência decidimos também além de medir a diferença de fase, medir a diferença de tempo entre cada pico do sinal. Utilizando a expressão deduzida no protocolo [1]:

$$\Delta z = \frac{cf_m}{f_m - f_r} \Delta t_{osc} \quad (18)$$

Ainda podemos tentar chegar à velocidade da luz por outras medições.

Registamos $f_m = 60MHz$ e $f_m - f_r = 101.2KHz$ Análogo ao procedimento que fizemos para a fase:

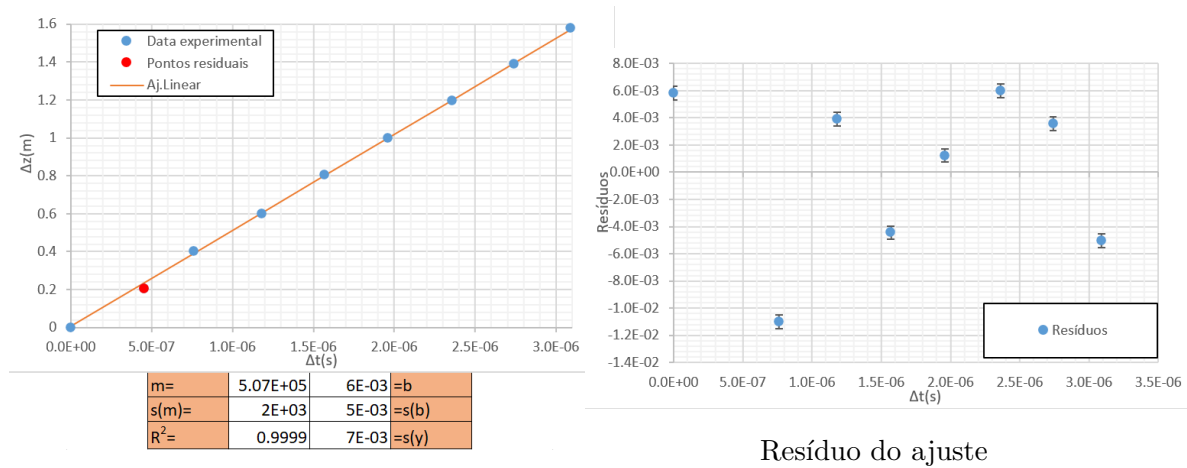


Gráfico da tendência

Figura 11: Análise da velocidade da luz a partir dos tempos

Vemos que semelhante ao caso da fase, obtivemos um bom ajuste linear e o mesmo ponto residual. Mas é de notar que os nossos resíduos são de menor ordem de grandeza! (dá para ver comparando o tamanho relativo das barras de erro nos gráficos das figuras 11 e 10). O tamanho das barras de erro é simplesmente a incerteza da fita métrica (0,5mm). Concluimos então que:

- $v_{luz} = (3.01 \pm 1) * 10^8 m s^{-1}$
- $Erro_{\%} = 0.24\%$
- $Inc_{\%} = 0.48\%$

Obtivemos um erro ainda menor que no cálculo usando as diferenças de fase, mas na mesma ordem de grandeza por isso nenhuma melhoria muito significativa.

Vemos que as Incertezas percentuais são da mesma ordem de grandeza que os erros percentuais nos dois casos, o que nos dá confiança na nossa amostra de dados.

4.2.2 Montagem 2: Índice de refração do acrílico

Para esta secção fazemos uso simplesmente da equação 12. Obtivemos a distancia de 124.9cm:

- $\Delta t_{osc|ar} = (1720 \pm 1)ns$
- $\Delta t_{osc|ar+acrilico} = (1773 \pm 1)ns$

Ou seja, usando para c_0 , o valor de referência [2] e com a expressão da incerteza calculada no anexo:

- $n_{acrilico} = 1.53 \pm 0.04$
- $Erro\% = 2.3\%$
- $Inc\% = 2.6\%$

Ora a velocidade a luz no acrílico é então obviamente a partir de 13:

$$v_{luz} = (1.95 \pm 0.05) * 10^8 ms^{-1}$$

5 Resultados Finais:

5.1 Parte1: Luz linearmente polarizada:

- Ângulo do polarizador: $\theta_P = 50$ e fonte parcialmente polarizada.
- Lei de Malus:

1. $\frac{P}{P_0} \propto \cos^2(\theta_P - \theta_A)$ verificado!
2. $Erro\% = \frac{|2-m|}{m} = \frac{2.13-2}{2} = 6.5\%$
3. $Inc\% = \frac{s(m)}{m} = \frac{0.04}{2.13} = 2\%$

- Lei de Malus modificada:

1. $\frac{P}{P_0} = \frac{1}{2} \left[\cos(\theta_P - \theta_A)^2 + \cos(2\beta - (\theta_P - \theta_A))^2 \right]$ verificado!
2. $Erro\% = \frac{m_{declive}-0.5}{0.5} = \frac{0.55-0.5}{0.5} = 10\%$
3. $Inc\% = \frac{s(m)}{m} = \frac{0.02}{0.55} \sim 4\%$

5.2 Parte 2: A velocidade da luz:

- v_{luz} a partir da fase:

1. $v_{luz} = (2.98 \pm 0.02) * 10^8 m s^{-1}$
2. $Erro_{\%} = 0,44\%$
3. $Inc_{\%} = 0.69\%$

- v_{luz} a partir dos tempos:

1. $v_{luz} = (3.01 \pm 1) * 10^8 m s^{-1}$
2. $Erro_{\%} = 0.24\%$
3. $Inc_{\%} = 0.48\%$

- índice de refração do acrílico:

1. $n_{acrilico} = 1.53 \pm 0.04$
2. $Erro_{\%} = 2.3\%$
3. $Inc_{\%} = 2.6\%$
4. $v_{luz} = (1.95 \pm 0.05) * 10^8 m s^{-1}$

6 Conclusão:

1. Obtivemos bons resultados nas duas partes da experiencia com erros percentuais da ordem de grandeza de 10^{-1} , que consideramos bom.
2. Todos os erros percentuais têm a mesma ordem de grandeza que as nossas incertezas percentuais, o que indica que o procedimento experimental foi bem sucedido e que não foram acrescentados erros sistemáticos além daqueles presentes nos instrumentos.
3. Do ponto de vista experimentalista, era necessário uma amostra maior para o cálculo do índice de refração do acrilico visto que 1 ensaio com dois pontos obviamente não é uma boa amostra estatística.

Referências

- [1] Unidade curricular FIS-3027. Protocolo t9: Medidas Óticas e propriedades da luz.
- [2] Wikipedia. Link: https://en.wikipedia.org/wiki/Speed_of_light.