T3 - Interferências Óticas

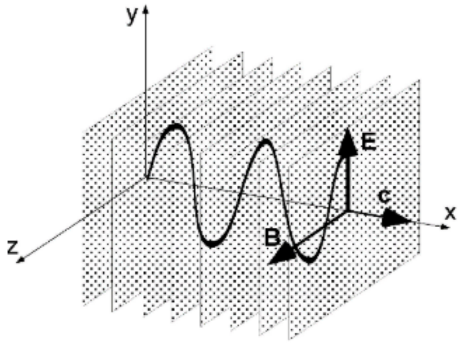
NOTAS do Protocolo

1 - Intro Teórica

1.1 - Ondas

- Fenómeno muito comum que ocorre devido à sobreposição de ondas.
- Ondas eletromagnéticas mais simples são:
  - **Planas** - Amplitude e fase iguais em planos perpendiculares à direção de propagação
  - **Monocromáticas** - Descritas por uma função periódica sinusoidal
  - **Polarização Linear** - O vetor campo elétrico tem origentação constante

  Uma onda dessas:

  em que temos:

  $$\vec{E} = E_y(x,t)\hat{y} = E_{0y}\hat{y}\cos(\omega t - kx + \phi)$$

  em que temos $\lambda = vT \rightarrow v = \lambda/T = \lambda\nu$
- Em meios isotrópicos (que são iguais em todas as direções) temos que:

  $$v = \frac{c}{n} \qquad ; \qquad \lambda = \frac{\lambda_0}{n}$$

  em que n é o índice de refração do meio.

1.2 - Difração

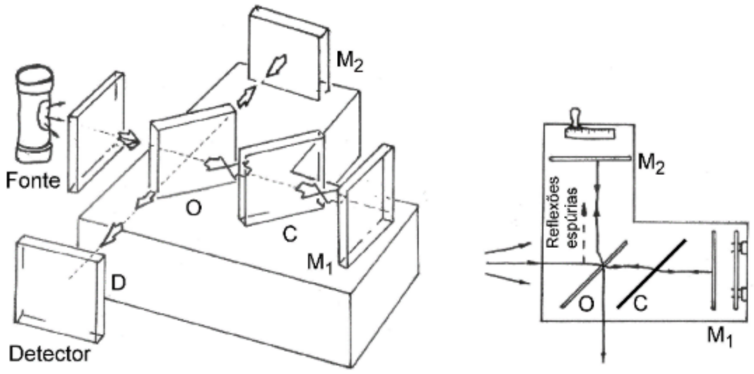
- Fenómeno que ocorre quando uma onda passa por uma abertura ou obstáculo pequeno e que não pode ser explicado por ótica geométrica.
- Ocorre quando uma frente de onda tem a sua amplitude ou fase alteradas devido à interação com um obstáculo.
- Na teoria não há diferença, mas na prática:
  - Interferência - Quando temos um nº de ondas, N, reduzido.
  - Difração - Quando temos $N \rightarrow \infty$

Princípio de Huygens

Cada ponto de uma frente de onda não obstruída constitui, em qualquer instante, uma fonte de ondas esféricas secundárias (com a mesma frequência da onda primária). Deste modo, a amplitude do campo ótico em qualquer ponto do espaço resulta da sobreposição de todas essas ondas (tendo em conta as suas amplitudes e fases relativas).

2 - Inferómetro Michelson

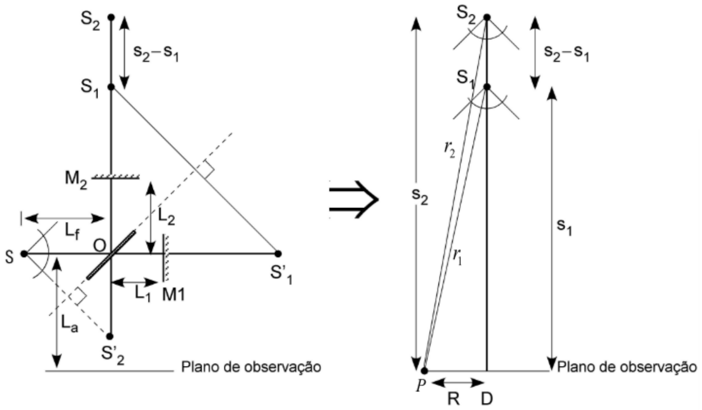
- Inferómetro - Instrumento que permite realizar interferências entre 2+ ondas, de forma controlada. Isto pode ser usado para medir ângulos, distâncias, espetroscopia, etc.
  Interferómetro Michelson:



  (M1, M2 são espelhos, O é o divisor de onda, C a lâmina de compensação e D o detetor)
- A parte do feixe que vai a M_2 atravessa o refletor mais vezes, pelo que se mete C para equilibrar, que deverá ter a mesma espessura que O. No entanto, a espessura de O não tem qualquer efeito sobre o feixe, tornando-se a introdução de C desnecessária. Este deverá ser o caso da experiência que iremos realizar :)

2.1 - Interferência entre 2 ondas esféricas

- O padrão de interferência que se observa no detetor é equivalente a ter 2 fontes esféricas nos espelhos M_1, M_2. Ou seja:



  em que S_1, S_2 são 2 fontes virtuais, tais que:

$$\begin{aligned} s_1 &= 2L_1 + L_f + L_a \\ s_2 &= 2L_2 + L_f + L_a \end{aligned} \tag{Eq.1}$$

- Desde que $s_2 - s_1$ não seja demasiado elevado, temos que quando as 2 ondas chegam a D têm a mesma direção. Assim, podemos tratar o problema de forma escalar, tal que:

$$E = E_1 + E_2 = E_{01}(r_1)\cos(\omega t - kr_1) + E_{02}(r_2 + \phi_1)\cos(\omega t - kr_2 + \phi_2)$$

- Devido à elevada frequência ótica das ondas eletromagnéticas, que não são detetadas pelos fotodetetores atuais, o que importa nesta atividade é a intensidade das ondas, o valor médio temporal do vetor Poyting:

$$I_1 \equiv \langle P_1 \rangle = v\varepsilon \langle E_1^2 \rangle \qquad ; \qquad I_2 \equiv \langle P_2 \rangle = v\varepsilon \langle E_2^2 \rangle$$

  no entanto, só importam as intensidades relativas, pelo que podemos considerar:

$$I_1 = \langle E_1^2 \rangle \qquad ; \qquad I_2 = \langle E_2^2 \rangle$$

- No plano do detetor (D) temos:

$$I = \langle E^2 \rangle = \langle (E_1 + E_2)^2 \rangle = \langle E_1^2 \rangle + \langle E_2^2 \rangle + 2\langle E_1 E_2 \rangle$$

  e podemos escrever:

$$\langle E_1^2\rangle = \frac{E_{01}(r_1)}{2} = I_1(r_1) \quad ; \quad \langle E_2^2\rangle = \frac{E_{02}(r_2)}{2} = I_2(r_2)$$

$$2\langle E_1 E_2\rangle = E_{01}(r_1)E_{02}(r_2)\cos[k(r_1 - r_2) + (\phi_1 - \phi_2)]$$

em que $E_{01}(r_1) = \sqrt{2I_1(r_1)}$, $E_{02}(r_2) = \sqrt{2I_2(r_2)}$. Logo:

$$I = I_1(r_1) + I_2(r_2) + 2\sqrt{I_1(r_1)I_2(r_2)}\cos[k(r_1 - r_2) + (\phi_1 - \phi_2)]$$

- Se considerarmos que E_{01}, E_{02} são aproximadamente constantes no detetor D (uma vez que, conforme a figura acima $R \ll r_1, r_2$) temos $I_1 \approx I_2 = I_0$, logo:

$$I \simeq 2I_0[1 + \cos[k(r_1 - r_2) + (\phi_1 - \phi_2)]]$$

e podemos definir:

$$I \simeq 4I_0\cos^2\left(\frac{\delta}{2}\right) \quad ; \quad \delta = k(r_1 - r_2) + (\phi_1 - \phi_2) \qquad \text{(Eq. 2)}$$

o que nos dá:

$$I_{max} \simeq 4I_0 \rightarrow \delta = 2\pi m \quad ; \quad m = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$$

$$I_{min} \simeq 0 \rightarrow \delta = (2m+1)\pi \quad ; \quad m = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$$

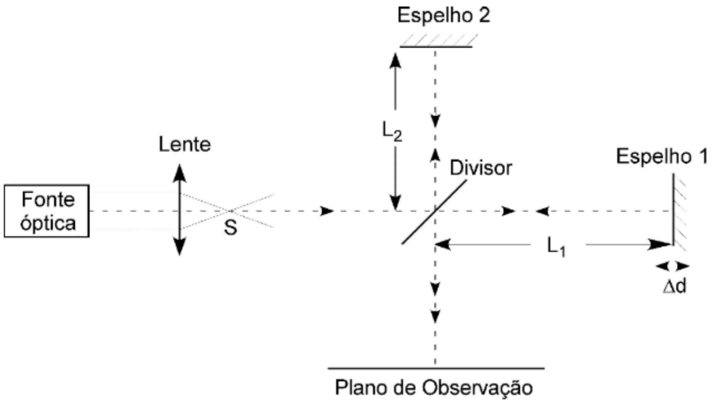
2.2 - Evolução das franjas de interferência com variação do caminho ótico

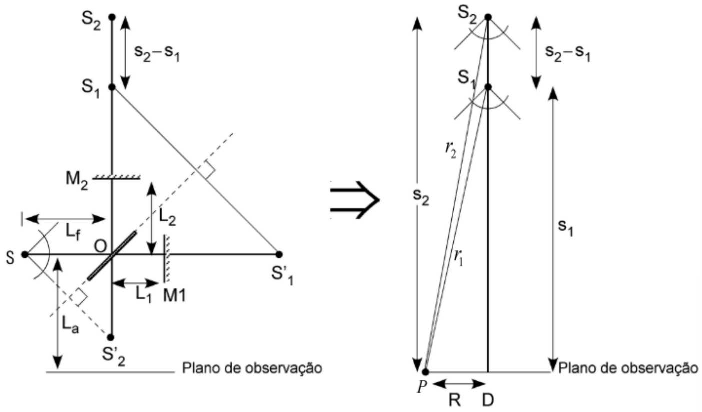
- Consideremos que $\phi_1 = \phi_2$ e da Eq. 2 temos:

$$\delta = k(r_1 - r_2) = \frac{2\pi}{\lambda}(r_1 - r_2) = \frac{2\pi n}{\lambda_0}(r_1 - r_2) \qquad \text{(Eq. 3)}$$

(indo buscar a equação $\lambda = \frac{\lambda_0}{n}$ que nos dá o comprimento de onda para um meio que não o vácuo)
- Com esta igualdade, se conseguirmos determinar δ para um certo $(r_1 - r_2)$ conseguimos obter o índice de refração do meio.
- Por outro lado, se mantermos $(r_1 - r_2)$ constante variarmos o n, a variação de δ permite determinar a variação de n.

2.2.1 - Determinação de n do ar - método 1





- Consideremos que o ponto P está muito próximo do centro do eixo de simetria das ondas observadas no plano D (ou seja: R muito reduzido). Isto faz com que $r_1 - r_2 \sim s_1 - s_2 = 2(L_1 - L_2) = 2\Delta L$ (ver Eq.1). A partir da Eq.3 isto dá-nos:

$$\delta = \frac{4\pi n_a}{\lambda_0}\Delta L$$

ora, na prática, isto significa que no centro do alvo (R muito reduzido) tivermos um máximo de intensidade temos $\delta = 2\pi m$. Caso contrário temos $\delta = (2m+1)\pi$. Assim, para passarmos de ter um máximo no centro para voltar a ter um máximo no centro, δ tem que variar 2π. Isto ocorre quando $\Delta L = \frac{\lambda_0}{2n_a}$. Como no inferómetro que teremos no lab apenas 1 espelho se move (consideremos o espelho 1) consideremos que este valor de ΔL que causa $\Delta\delta = 2\pi$ é $\Delta d_{|2\pi} = \frac{\lambda_0}{2n_a}$. Assim temos:

$$2\pi = \frac{4\pi n_a}{\lambda_0}\Delta d_{|2\pi} \rightarrow n_a = \frac{\lambda_0}{2\Delta d_{|2\pi}}$$

- De forma mais geral, se ao variar a posição do espelho 1 uma distância Δd passamos por N máximos (ou mínimos, se inicialmente tínhamos um mínimo no centro) temos a fórmula:

$$\boxed{n_a = \frac{N\lambda_a}{2\Delta d_{|N}}} \qquad \text{(Eq. 4)}$$

2.2.2 - Determinação de n do ar - método 2

- Veremos agora como se pode determinar n_a conforme varia a pressão do ar.
- Usaremos uma célula com paredes de vidro em que a pressão no interior pode ser manipulada. Iremos variá-la de quase vácuo ($p \simeq 0$) até pressão atmosférica ($p \simeq p_{atm}$). Assim ficamos com $n_a = n_a(p)$, tal que $n_a(p \simeq 0) = 1 \;\; , \;\; n_a(p \simeq p_{atm}) = n_{a|atm}$
- Ora, se a pressão não for muito elevada, n_a aumenta linearmente com a pressão:

$$n_a(p) = n_a(p \simeq 0) + \left(\frac{\Delta n_a}{\Delta p}\right)p \approx 1 + \left(\frac{\Delta n_a}{\Delta p}\right)p$$

ou seja: $n_{a|atm}(p) \approx 1 + \left(\frac{\Delta n_a}{\Delta p}\right) p_{atm}$. Ou seja, o fator que precisamos de obter é o declive da reta $n_a(p)$, pelo que quando $p = p_{atm}$ a equação acima dá-nos $n_{a|atm}$

- Assim:
    1. Colocamos a célula de pressão variável no ramo do espelho 1, perpendicular à direção do espelho.
    2. Colocar $p \simeq 0$ e ajustar a posição do espelho 1 de forma que esteja um máximo no centro do alvo.
    3. Aumentar a pressão gradualmente até $p = p_{atm}$ e contar o número de passagens claro-escuro-claro (N).
- Assim, temos $\Delta p = p_{atm}$ pelo que $\Delta x = N\lambda_0$. Assim:

$$\frac{\Delta x}{\Delta p} = \frac{N}{p_{atm}} \lambda_0$$

- Temos ainda que $\Delta x = 2d_c \Delta n_a$ pelo que:

$$\frac{\Delta x}{\Delta p} = 2d_c \frac{\Delta n_a}{\Delta p}$$

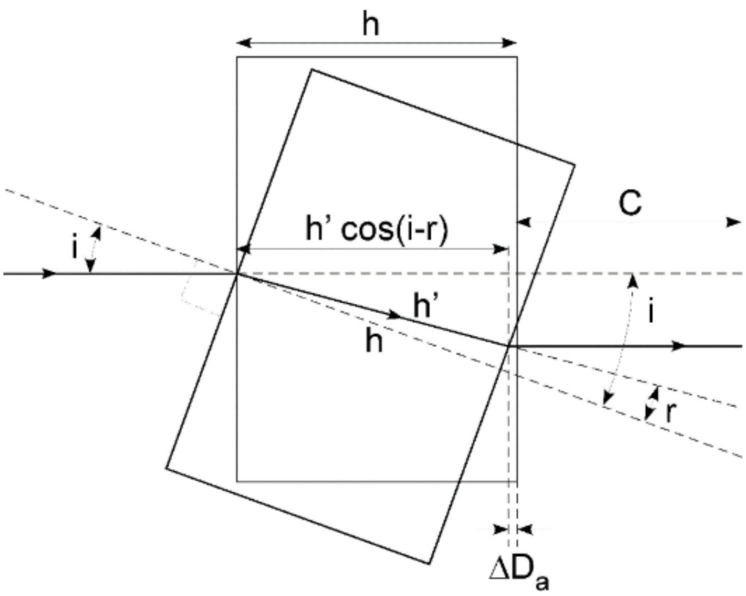
- Juntando as 2 equações acima temos:

$$\frac{\Delta n_a}{\Delta p} = \frac{N\lambda_0}{2d_c p_{atm}}$$

ao substituir em $n_{a|atm}(p) \approx 1 + \left(\frac{\Delta n_a}{\Delta p}\right) p_{atm}$ obtemos:

$$\boxed{n_{a|atm} \approx 1 + \frac{\lambda_0 N}{2d_c}} \qquad \text{(Eq. 5)}$$

2.2.3 - Determinação do n do vidro



- Colocamos uma lâmina de vidro entre o divisor e o espelho 1.
- Começamos com a lâmina perpendicular ao feixe: $i = 0^\circ$. Neste caso, o feixe percorre h dentro do vidro e C no ar.
- Se tivermos $i \neq 0^\circ$, no vidro o feixe percorre h' e $C + \Delta D_a$ no ar. Mais especificamente, no vidro, a variação do percurso é: $h' = h + \Delta D_v$ em que (conforme a figura acima):

$$\Delta D_v = h\left(\frac{1}{\cos r} - 1\right)$$

como $\cos r = \sqrt{1-\sin^2 r}$ e $\sin r = \frac{n_a}{n_v}\sin i$ obtemos:

$$\Delta D_v = h\left(\frac{1}{\cos r} - 1\right) = h\left[\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{n_a}{n_v}\sin i\right)^2}}\right] \approx \frac{h}{2}\left(\frac{n_a}{n_v}\right)^2 \sin^2 i$$

(da 2º para 3º igualdade usou-se a expansão em série de Taylor de $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$)

- Considerando $\Delta d_{|N} = \Delta D_v$ na Eq.4 obtemos:

$$N_v = \frac{h}{\lambda_0}\frac{n_a^2}{n_v}\sin^2 i$$

em que N_v é o número de alternâncias claro-escuro-claro que se observa ao variar o percurso da luz no vidro uma distância ΔD_v.

- A correspondente variação do caminho no ar é dada por:

$$\Delta D_a = h - h'\cos(i-r) = h\left[1 - \frac{\cos(i-r)}{\cos r}\right] \approx h\left(\frac{1}{2} - \frac{n_a}{n_v}\right)\sin^2 i$$

em que a última parte foi obtida usando série de Taylor e magia.

- Considerando $\Delta d_{|N} = \Delta D_a$ na Eq.4 obtemos:

$$N_a = \frac{h}{\lambda_0}\left(n_a - 2\frac{n_a^2}{n_v}\right)\sin^2 i$$

em que N_a é o número de alternâncias claro-escuro-claro que se observa ao variar o percurso da luz no ar uma distância ΔD_a.

- Assim, ao variar o ângulo entre a perpendicular da lâmina e o eixo do feixe de 0° até i teremos N alternâncias claro-escuro-claro no centro do alvo:

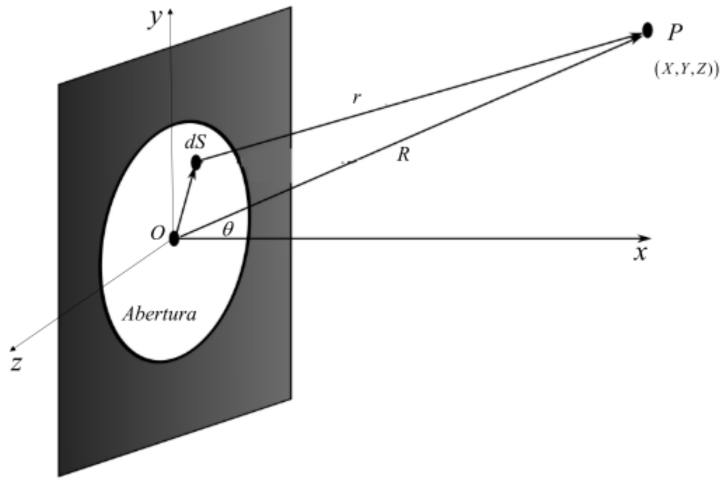
$$N = N_a + N_v = \frac{h}{\lambda_0}\left(n_a - \frac{n_a^2}{n_v}\right)\sin^2 i$$

pelo que conseguimos obter a equação que nos dá o coeficiente de refração do vidro com o ângulo i e o número de alternâncias N:

$$\boxed{n_v = \frac{h n_a^2 \sin^2 i}{h n_a \sin^2 i - N\lambda_0}} \qquad \text{(Eq. 6)}$$

3 - Difração da Luz

3.1 - Considerações Gerais



- Consideremos que temos um caso como acima (luz a vir da esquerda e a passar na abertura, onde sofre difração) e queremos determinar a intensidade luminosa no ponto P.
- Usando o princípio de Huygens, cada elemento infinitesimal de área dS age como uma fonte pontual de ondas esféricas que se propagam até ao ponto P, onde gera um campo elétrico com módulo dado por:

$$dE = \frac{E_a}{r} e^{i(\omega t - kr)} dS \tag{Eq. 7}$$

(em que E_a é o módulo do campo na abertura, onde consideramos o campo constante)

- Considerando que $dS = (0, y, z)$ e $P = (X, Y, Z)$. A distância entre eles é

$$r = \sqrt{X^2 + (Y - y)^2 + (Z - z)^2}$$

- Se considerarmos que P está suficientemente longe da abertura temos $r \sim R$. Isto é uma boa aproximação no denominador da fração $\frac{E_a}{r}$ na equação de dE acima. Mas no termo kr do expoente, essa aproximação é péssima, porque $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ será um valor alto, pelo que o erro da aproximação $r \sim R$ será significativo. Assim, sendo $R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$ ficamos com:

$$r = R\sqrt{1 + \frac{y^2 + z^2}{R^2} - 2\frac{Yy + Zz}{R^2}} \approx \sqrt{1 - 2\frac{Yy + Zz}{R^2}}$$

(a última parte vem de $R \gg y, z$ logo $\frac{y^2+z^2}{R^2} \to 0$)

- A partir da expansão em série de Taylor:

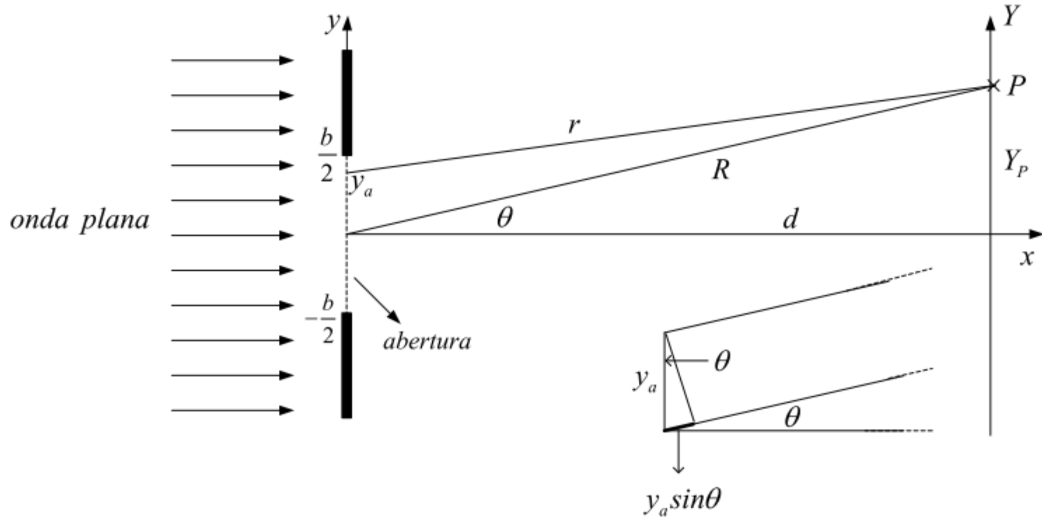
$$r \approx R\left(1 - \frac{Yy + Zz}{R^2}\right) = R - \frac{Yy + Zz}{R} = -\left(-R + \frac{Yy + Zz}{R}\right)$$

o que, ao substituir na equação de dE nos dá: $dE = \frac{E_a}{R} e^{i(\omega T - kR)} e^{ik\frac{Yy+Zz}{R}} dS$. Isto resulta em:

$$\boxed{E(P, t) = \frac{E_a}{R} e^{i(\omega t - kR)} \int_{\text{abertura}} e^{ik\frac{Yy+Zz}{R}} dS} \tag{Eq. 8}$$

3.2 - Padrão de Interferência de Fenda

- Consideremos uma fenda muito comprida, com largura b. Temos abaixo a vista transversal:



- Aqui é mais útil usar a Eq. 8, já que o integral de fontes não é de área, mas sim em 1 dimensão. Temos:

$$dE = \frac{E_a}{r} e^{i(\omega t - kr)} dy_a$$

- Tal como na secção atrás, $r \simeq R$ é uma boa aproximação no denominador, mas não no expoente. Aí, conforme a figura acima (aproximação na esquina inferior direita) podemos considerar que $r \parallel R$ e temos: $r \approx R - y_a \sin\theta$. Assim podemos substituir estas aproximações na Eq.8 e considerar apenas a parte imaginária e temos: $dE = \frac{E_a}{R} \sin(\omega t - k(R - y_a \sin\theta)) dy_a$
- Ao integrar na abertura ($\int_{-b/2}^{+b/2}$) obtemos:

$$E(P,t) = \frac{E_a b}{R} \frac{\sin\left(k\frac{b}{2}\sin\theta\right)}{k\frac{b}{2}\sin\theta} \sin(\omega t - kR)$$

definimos

$$\beta \equiv k\frac{b}{2}\sin\theta = \frac{2\pi}{\lambda}\frac{b}{2}\sin\theta = \frac{\pi n b}{\lambda_0}\sin\theta$$

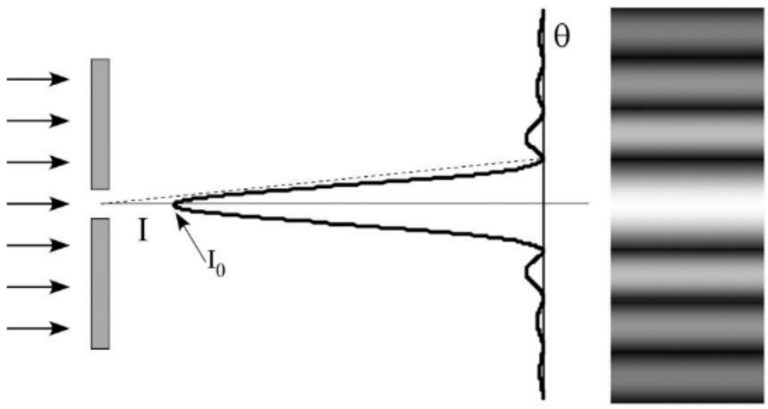
(λ_0 é o compriemndo de onda no vácuo e n o índice de refração do meio)
e ficamos com:

$$E(P,t) = \frac{E_a b}{R} \frac{\sin\beta}{\beta} \sin(\omega t - kR)$$

- A intensidade da radiação em P é dada por $I(P) = v\varepsilon\langle E^2(P,t)\rangle$ (v é a velocidade da luz e ε a permitividade elétrica do meio). Sendo $\langle \sin^2(\omega t - kR)\rangle = \frac{1}{2}$ temos:

$$I(P) = \frac{1}{2}\left(\frac{E_a v\varepsilon b}{R}\right)^2 \left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)^2 \equiv I_0 \text{sinc}\beta \qquad ; \qquad I_0 \equiv \frac{1}{2}\left(\frac{E_a v\varepsilon b}{R}\right)^2$$

isto já nos permite entender onde teremos máximos e mínimos da onda e etc:



sendo que os mínimos ocorrem quando

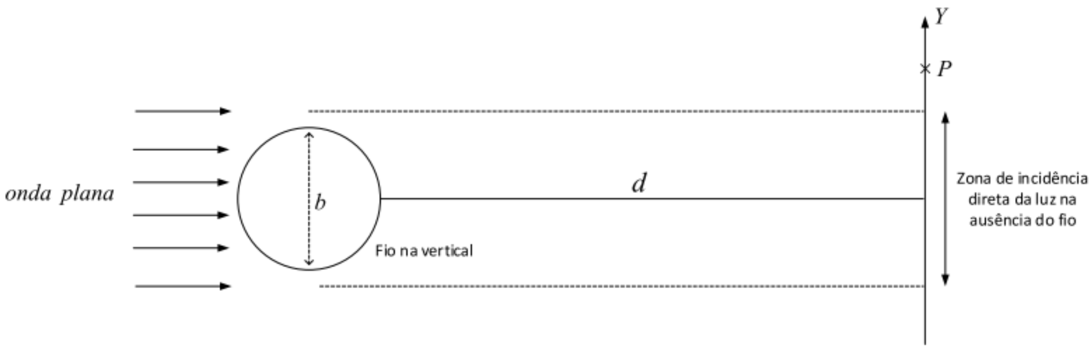
$$\beta = \frac{\pi n b}{\lambda_0}\sin\theta = m\pi \rightarrow \sin\theta = \frac{\lambda_0}{nb}m \quad , \quad m = \pm 1, \pm 2, \ldots$$

- Assim, os primeiros mínimos aparecem em $m = \pm 1$, ou seja $\sin\theta_{\pm 1} = \pm\frac{\lambda_0}{nb}$. Ou seja, não temos mínimos se $|\theta_{\pm 1}| \geq 90^{\circ}$. Assim, não ocorre difração quando: $\lambda_0 \geq nb$
- Conforme a primeira figura desta secção: $\tan\theta = \frac{Y_P}{d}$. Ora, se o ângulo θ for reduzido temos $\sin\theta \sim \tan\theta \sim \theta \sim Y_P/d$. Ou seja temos 2 igualdades:

$$\sin\theta = \frac{Y_P}{d} = \frac{\lambda_0}{nb}m \rightarrow \boxed{b = m\frac{d\lambda_0}{nY_{min|m}} \quad , \quad m = \pm 1, \pm 2, \ldots} \qquad \text{(Eq. 9)}$$

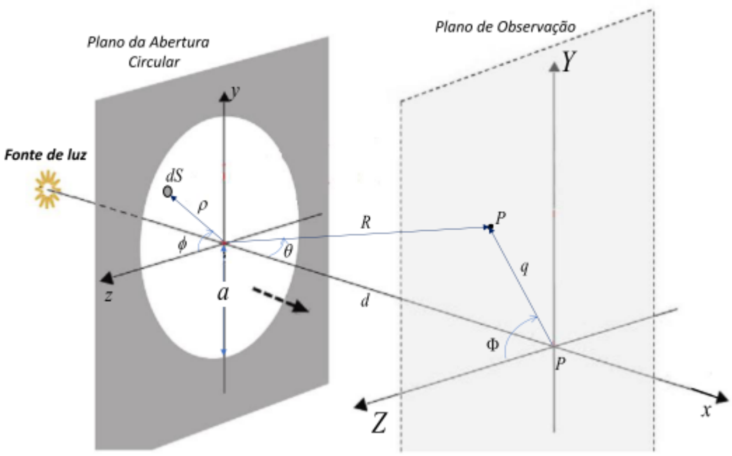
medindo a distância ao centro de um mínimo ($Y_{min|m}$) e sabendo o número do mínimo (m) conseguimos então obter a largura da fenda (b).

3.3 - Padrão de Interferência de um Fio



- Devido a razões muito bem explicadas no protocolo, este caso tem uma "fenda" complementar à da secção atrás. Assim, o comportamento da onda é igual, pelo que podemos obter a espessura do fio usando a Eq. 9.

3.4 - Padrão de Interferência de Abertura Circular



em que começamos por colocar o problema em coordenadas esféricas (imaginar o plano xOy com o ângulo ϕ/Φ nos planos da abertura e de observação):

$$\begin{aligned} z &= \rho\cos\phi \qquad & Z &= q\cos\Phi \\ y &= \rho\sin\phi \qquad & Y &= q\sin\Phi \end{aligned}$$

e temos:

$$dS = \rho\, d\rho d\phi$$

e ficamos com

$$E(P,t)=\frac{E_a e^{i(\omega t-kR)}}{R}\int_0^a\int_0^{2\pi}e^{i\frac{k\rho q}{R}\cos(\phi-\Phi)}\rho\,d\phi d\rho$$

- Ora, acontece que a função a ser integrada não pode ser simplificada, pelo que temos uma famigerada **função de Bessel** (de primeira espécie de ordem zero):

$$J_0(u)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{iu\cos\nu}d\nu$$

e reescrevemos o integral acima como:

$$E(P_{|\Phi=0},t)=\frac{E_a e^{i(\omega t-kR)}}{R}2\pi\int_0^a J_0\left(\frac{k\rho q}{R}\right)\rho\,d\rho$$

- De seguida faz-se uma passagem a função de Bessel para ordem 1 e mudança de variável e obtemos:

$$E(P_{|\Phi=0},t)=\frac{E_a e^{i(\omega t-kR)}}{R}2\pi a^2\left[\frac{J_1\left(\frac{kaq}{R}\right)}{\frac{kaq}{R}}\right]=\frac{2E_aAe^{i(\omega t-kR)}}{R}\left[\frac{J_1\left(\frac{kaq}{R}\right)}{\frac{kaq}{R}}\right]$$

em que $A=\pi a^2$ é a área da abertura.

- Conseguimos ainda obter:

$$I(P_{|\Phi=0})=\frac{2v\varepsilon A^2E_0^2}{R^2}\left[\frac{J_1\left(\frac{kaq}{R}\right)}{\frac{kaq}{R}}\right]^2$$

sendo que no centro do alvo temos $q=0$ logo:

$$I(P_{|\Phi=0},q=0)=\frac{v\varepsilon A^2E_0^2}{2R^2}\equiv I_0$$

e podemos escrever a intensidade da onda incidente no alvo a uma distância q do centro como:

$$I(q)=I_0\left[\frac{2J_1\left(\frac{kaq}{R}\right)}{\frac{kaq}{R}}\right]^2=I_0\left[\frac{2J_1(ka\sin\theta)}{ka\sin\theta}\right]^2$$

- O primeiro zero da função irá aperecer quando:

$$J_1(ka\sin\theta)=0\rightarrow\frac{2\pi}{\lambda}a\sin\theta=3,83\rightarrow\sin\theta\approx\theta=1,22\frac{\lambda}{D}$$

em que $D=2a$ AKA diâmetro da abertura.

- Conforme a figura no início desta secção vemos que $\tan\theta=q/d$. Ora, considerando especificamente o 1º zero da função Intensidade temos:

$$\tan\theta_{pz}=\frac{q_{pz}}{d}\approx\sin\theta_{pz}$$

(em que $q_{pz}=q_{\text{primeiro zero}}$)
Ora, indo acima vemos que um zero da função ocorre quando $ka\sin\theta=3,83$. Ficamos então com:

$$ka\frac{q_{pz}}{d}=\frac{2\pi n}{\lambda_0}a\frac{q_{pz}}{d}=3,83$$

e obtemos a fórmula que nos permite estimar o diâmetro da fenda sabendo a distância do 1º zero ao centro do padrão de interferência:

$$\boxed{D=1,22\frac{\lambda_0}{n}\frac{d}{q_{pz}}}\qquad\text{(Eq. 10)}$$

sendo que, usando o 2º e 3º zeros da função de Bessel de ordem um temos:

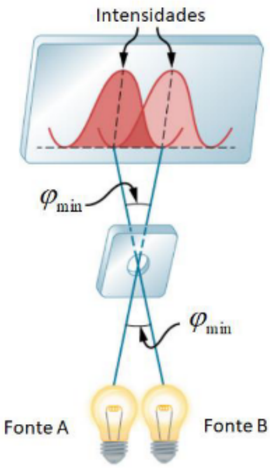
$$D = 2,23 \frac{\lambda_0}{n} \frac{d}{q_{sz}}$$

$$D = 3,24 \frac{\lambda_0}{n} \frac{d}{q_{tz}}$$

(em que $q_{sz} = q_{\text{segundo zero}}$ e $q_{tz} = q_{\text{terceiro zero}}$)

Duas Fontes

- Até aqui, vimos o caso de a fonte estar alinhada com o eixo central da abertura, pelo que o padrão de interferência também o estará.
- Se a fonte estivesse desviada um ângulo φ do eixo central, o padrão de interferência também o estará, para do lado oposto (ver figura abaixo)
- Ora, imaginemos agora que temos 2 fontes, ambas desviadas um ângulo φ do eixo central, mas de lados opostos:



- Ora, prestemos então atenção ao parâmetro φ_{min} que diz a separação mínima entre as 2 fontes (como mostrado na figura acima) para que os padrões de interferência das 2 fontes sejam distinguíveis.
- Ora, a separação mínima será aquela em que o máximo principal de 1 fonte coincide com o 1º mínimo da outra. Assim, como $\varphi_{min} = \theta_{pz}$ obtemos:

$$\boxed{\varphi_{min} = 1,22 \frac{\lambda_0}{nD}} \qquad \text{(Eq. 11)}$$

4 - Execução