1. Fie digraful G = (S, E), unde S = multimea indivizilor din societate, iar E = {uv | v ∊ c(u), v si u din S} (u il cunoaste pe v).

Putem rezolva aceasta problema reducand-o la **problema k-colorarii** unui graf, numarul minim de jurii posibil fiind numarul cromatic al grafului G, X(G). Pe noi ne intereseaza numarul maxim de jurii, asa ca vom afla valoarea maxima a indicelui cromatic. Demonstram ca X(G) <= 2k+1

Construim graful G' = (S, E'), S = multimea indivizilor din societate, iar E' = {uv | uv ∊ E sau vu ∊ E}; cu alte cuvinte, muchia uv este in E' daca u il cunoaste pe v, sau v il cunoaste pe u, sau ambii se cunosc intre ei.

Tinand cont de faptul ca in digraful G, orice individ cunoaste maximum k alti indivizi (c(x) <= k, deci Δ(G) = k), in graful G' avem Δ(G') = 2 * Δ(G) = 2k, deoarece gradul maxim al unui nod va fi 2k (el cunoaste maximum k alti indivizi, iar maximum k alti indivizi il cunosc pe el).

Din colorarea unui graf, stim ca X(G') <= Δ(G')+1, deci avem X(G') <= 2k+1. Asadar, numarul maxim de jurii (dat de indicele cromatic al grafului G') este 2k+1.

O alta idee de rezolvare consta in observarea faptului ca numarul de jurii este egal cu numarul de subgrafuri complete induse in graful complementar al lui G'. Daca un subgraf este complet, inseamna ca nimeni nu cunoaste pe nimeni. In cel mai rau caz, graful complementar lui G' contine doar noduri izolate => Exista n subgrafuri complete (a cate 1 varf) => n jurii, unde n = |G'|

Stiind ca numarul maxim de jurii este n, iar 2k este maximum n-1 (gradul maxim al unui nod in G' este n-1, deci 2k e maxim n-1), reiese ca numarul maxim de jurii este 2k+1 = (n-1)+1 = n.

2. a) A SE ATASA AICI IN ACEST DOCUMENT JM3K O FOAIE PE CARE ESTE DESENAT EXEMPLUL PENTRU D3. MULTUMESC.

POZA POZA POZA WA NEBUN ADU-MI O GAGICA DIN RUSIA POZA POZA

POZDA POZA PIZA PIDA PZA POZA POZA PDZA POZA POZA POZA POZA

b) Dn = (V, E), unde orice x∊V este de forma (x1, x2, …, xn), iar E = {xy | (x2, x3, …, xn) = (y1, y2, …, yn-1).

Fie succ(x) = {y | xy ∊ E}. succ(x) = {(x2, x3, …, xn, 0), (x2, x3, …, xn, 1)} si BFS (x) multimea nodurilor ce pot fi vizitate din x, x de forma (x1, x2, …, xn).

Demonstram ca pentru 2 varfuri aleatorii x, y∊V, exista drum de la x la y in Dn.

BFS (x) = BFS ((x1, x2, …, xn)) =

{(x1, …, xn)} U BFS (succ(x1, x2, …, xn)) =

{(x1, x2, …, xn)} U {(x2, x3, …, xn, 0)} U {(x2, x3, …, xn, 1)} U BFS (succ(x2, …, xn, 0)) U BFS (succ(x2, …, xn, 1)) =

{(x1, x2, …, xn)} U {(x2, x3, …, xn, 0)} U {(x2, x3, …, xn, 1)} U {(x3, …, xn, 0, 0)} U {(x3, …, xn, 0, 1)} U … = $\{0, 1\}^n$

Cum y∊$\{0, 1\}^n$, reiese ca exista drum de la x la y, pentru orice x, y∊V din Dn => Dn tare conex.

Dn admite un parcurs eulerian inchis ⇔ Dn este tare conex si $d_g^+(x)$ = $d_g^-(x)$, pentru orice x∊V

Orice nod x∊V are exact 2 succesori (x2, …, xn, 0), (x2, …, xn, 1) si exact 2 predecesori (0, x1, …, xn-1), (1, x1, …, xn-1) => $d_g^+(x)$ = $d_g^-(x)$ = 2.

Cum Dn este tare conex si $d_g^+(x)$ = $d_g^-(x)$ => Dn admite un parcurs eulerian inchis

c) naiba stie…

3. G = (V, E)

O observatie cheie ce ne va ajuta in rezolvarea problemei e ca daca doua drumuri P si Q intre (s, t) au aceeasi lungime, atunci diferenta de noduri trebuie sa fie para; $|V(P) \Delta V(Q)| = 2*k$, k=>1.

Demonstram ca graful H este conex aratand ca exista drum intre oricare doua varfuri din H, P si Q, prin inductie dupa m, unde $m = |V(P) \Delta V(Q)|$, m >= 2, unde P si Q reprezinta drumuri (s, t) de lungime d in graful G.

Pentru m = 2 ipoteza este adevarata, intrucat P si Q sunt adiacente in H pentru m = 2.

(*) Pp. adevarata ipoteza pentru m = 2*k

Demonstram pentru m = 2*(k+1)

P este de forma (a1, a2, …, ai, p1, p2, …, pm, a(i+m+1), …, ad)

Q este de forma (a1, a2, …, ai, q1, q2, …, qm, a(i+m+1), …, ad)

Construim R, astfel incat $|V(R) \Delta V(Q)| = 2$ si $|V(P) \Delta V(R)| = 2*k$

R este de forma (a1, a2, …, ai, q1, …, qj, p(j+1), p(j+2), q(j+3), …, qm, a(i+m+1), …, ad)

Stim sigur din modul in care P este format ca exista muchie intre p(j+1) si p(j+2). Deoarece qj si pj sunt la aceeasi distanta fata de s, oricare j din [1, m], si datorita faptului ca G este **cordal** rezulta ca avem o coarda intre qj si p(j+1), iar o alta coarda intre p(j+2) si q(j+3). Daca acest lucru nu s-ar intampla, atunci ar exista un C4 fara o coarda.

Avem asadar d(R) = d(Q) = d

Se poate observa din forma lui R ca $|V(R) \Delta V(Q)| = 2$ si $|V(P) \Delta V(R)| = 2*k$. Din ipoteza (*) presupusa adevarata, stim ca exista un drum intre P si R (m = 2*k). Din enunt stim ca R si Q sunt adiacente, deoarece $|V(R) \Delta V(Q)| = 2$. Rezulta asadar ca exista drum intre P si R.

In concluzie, avem drum intre oricare doua drumuri P si Q, $|V(P) \Delta V(Q)| = 2*k$ => H graf conex