Lucrarea nr. 2

Analiza sistemelor dinamice în mediul de simulare Matlab

1 Scopul lucrării

Introducere în studiul sistemelor dinamice, liniare, invariante în timp (LTI).

Modele matematice utilizate în analiza sistemelor continue, liniare, invariante în timp (LTI).

2 Consideraţii teoretice

În teoria sistemelor semnalele fizice (variaţia temperaturii, acţionarea unui întrerupător, etc.) sunt modelate prin semnale abstracte (semnal sinusoidal, semnal treaptă) iar sistemele fizice prin sisteme abstracte (sistem de ecuaţii).

Nivelul la care au ajuns conceptele sistemice, determinat de un ritmul de dezvoltare accelerat, se datorează în cea mai mare măsură progreselor tehnicii de calcul şi informaticii.

Simularea comportamentului sistemelor dinamice, LTI, dispune de facilităţi deosebite de calcul şi reprezentare în mediul Matlab, motiv pentru care se va apela la funcţiile integrate în toolbox-uri specializate.

3 Circuite RLC (serie şi paralel)

Pentru obţinerea unui model compatibil cu mediul de simulare Matlab, pentru circuitul din Figura 3.1 , se vor utiliza notaţiile din Teoria Sistemelor: semnalul de intrare **Vin** se va nota cu u(t), respectiv semnalul de ieşire **Vout** se va nota cu y(t).

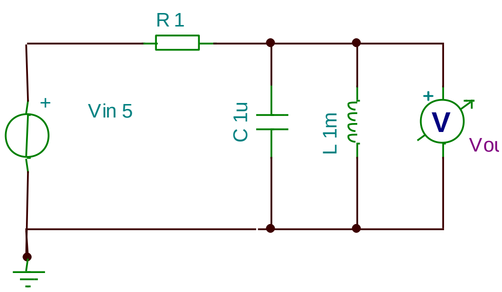

Figura 3.1 Reprezentarea circuitului RLC în mediul de simulare dedicat componentelor electronice

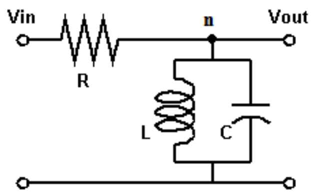

Figura 3.2 Reprezentarea echivalentă a circuitului RLC din Figura 3.1

Pentru a se obţine relaţia matematică dintre intrarea sistemului (Vin) renotată cu u(t) şi ieşirea sistemului (Vout) renotată cu u(t), se utilizează Legea lui Kirchhoff pentru nodul de reţea *n* (Figura 3.2)şi pentru cele două ochiuri de reţea obţinându-se 3 relaţii*:*

$$\begin{cases} i_R(t) = i_C(t) + i_L(t) \\ u(t) = Ri_R(t) + L\dfrac{di_L(t)}{dt} \\ \dfrac{1}{C}\int i_C(t)dt = L\dfrac{di_L(t)}{dt} \end{cases} \quad (1)$$

pentru care se cunoaşte că $y(t)=\frac{1}{C}\int i_C(t)dt$ şi implicit $i_C(t)=C\frac{dy(t)}{dt}$ şi $i_L(t)=\frac{1}{L}\int y(t)dt$.

Utilizând a doua relaţie, se obţine ecuaţia care conţine doar semnalul de intrare şi cel de ieşire al sistemului:

$$u(t)=R\left[C\frac{dy(t)}{dt}+\frac{1}{L}\int y(t)dt\right]+y(t)\quad\left|\frac{d}{dt}\right.\Rightarrow \tag{2}$$

$$RC\frac{d^2y(t)}{dt^2}+\frac{dy(t)}{dt}+\frac{R}{L}y(t)=\frac{du(t)}{dt} \tag{3}$$

4 Analiza în Matlab a ecuaţiilor diferenţiale ordinare (EDO)

Pentru obţinerea expresiei analitice a soluţiei EDO se poate utiliza funcţia **`dsolve`** din Matlab.

Pentru obţinerea soluţiei numerice și a reprezentării grafice a acesteia, se recomandă utilizarea funcţiei **`ode23`** sau **`ode45`**.

Ambele variante necesită transformarea ecuaţiei diferenţiale ordinare de ordinul n într-un sistem de n ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi.

Modul de transformare depinde de tipul variabilelor intermediare introduse. După integrarea succesivă a ecuaţiei diferenţiale ordinare de ordinul 2 (relaţia (4)), introducerea variabilelor intermediare sau de stare este vizibilă în relaţia (5).

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}=-\frac{1}{RC}\frac{dy(t)}{dt}-\frac{1}{LC}y(t)+\frac{1}{RC}\frac{du(t)}{dt}\quad\left|\iint, IC=0\right. \tag{4}$$

$$y(t)=\int\overbrace{\left[-\frac{1}{RC}y(t)+\frac{1}{RC}u(t)+\underbrace{\int\left(-\frac{1}{LC}y(t)\right)dt}_{x_1(t)}\right]dt}^{x_2(t)} \tag{5}$$

Transformarea relaţiei (5) în sistem de 2 ecuaţii diferenţiale ordinare de ordinul I în relaţia (7) permite introducerea parametrilor de proces în sintaxa disponibilă în Matlab pentru funcţiile dedicate EDO.

$$\begin{cases} x_1(t)=\int\left(-\frac{1}{LC}y(t)\right)dt \\ x_2(t)=y(t)=\int\left[-\frac{1}{RC}y(t)+\frac{1}{RC}+x_1(t)\right]dt \end{cases}\quad \overset{\frac{d}{dt}}{\Leftrightarrow} \tag{6}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -\dfrac{1}{LC}y(t) \\ \dot{x}_2(t) = -\dfrac{1}{RC}y(t) + \dfrac{1}{RC}u(t) + x_1(t) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -\dfrac{1}{LC}x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_1 - \dfrac{1}{RC}x_2(t) + \dfrac{1}{RC}u(t) \end{cases} \quad (7)$$

4.1 Soluţia analitică a EDO

Pentru obţinerea expresiei analitice a tensiunii de ieșire, în mediul Matlab este disponibuilă funcţia `dsolve`. Modul de apelare este disponibil în următorul script:

```
clear all
R=1;C=1;L=1;u=1;
%s=dsolve('Dx1=-1/L/C*x2','Dx2=x1-
1/R/C*x2+1/R/C*u','x1(0)=0','x2(0)=0');
s=dsolve('Dx1=-x2','Dx2=x1-x2+1','x1(0)=0','x2(0)=0');
pretty(s.x2)
```

Din rezultatul ultimei comenzi se poate stabili expresia analitică a semnalului de ieșire ca fiind de forma prezentată în relaţia (8):

$$y(t) = \frac{2\sqrt{3}}{3}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)e^{-\frac{t}{2}} \quad (8)$$

Cu expresia analitică obţinută în relaţia (8) care reprezintă un semnal sinusoidal a cărui amplitudine scade exponenţial în timp către zero, se poate continua cu reprezentarea grafică a semnalului *y(t),* pentru care se propune scriptul următor

```
t=0:0.2:10; % timp de simulare
%%% varianta copiata din s.x2 %%%
ys=(2*3^(1/2)*sin((3^(1/2)*t)/2))./(3*exp(t).^(1/2));
%%% varianta explicata in lucrare %%%
yl=2*sqrt(3)/3*sin(sqrt(3)/2*t).*exp(-t/2);
plot(t,ys,'^-',t,yl,'v');
legend(['ys=',s.x2],'yl=2*sqrt(3)/3*sin(sqrt(3)/2*t).*exp(-
t/2);')

text(4,0.4,'$y(t)=\frac{2\sqrt3}{3}sin(\frac{\sqrt{3}}{2}t)e^
{-\frac{t}… …{2}}$','Interpreter','latex','FontSize',20)

title('Semnalul de ie\c{s}ire','Interpreter','latex');
ylable('Timp (sec.)');xlabel('Tensiune (V)');
xlabel('Timp (sec.)');ylabel('Amplitudine')
```

Graficul obţinut în urma rulării scriptului de mai sus, este prezentat în Figura 4.1.

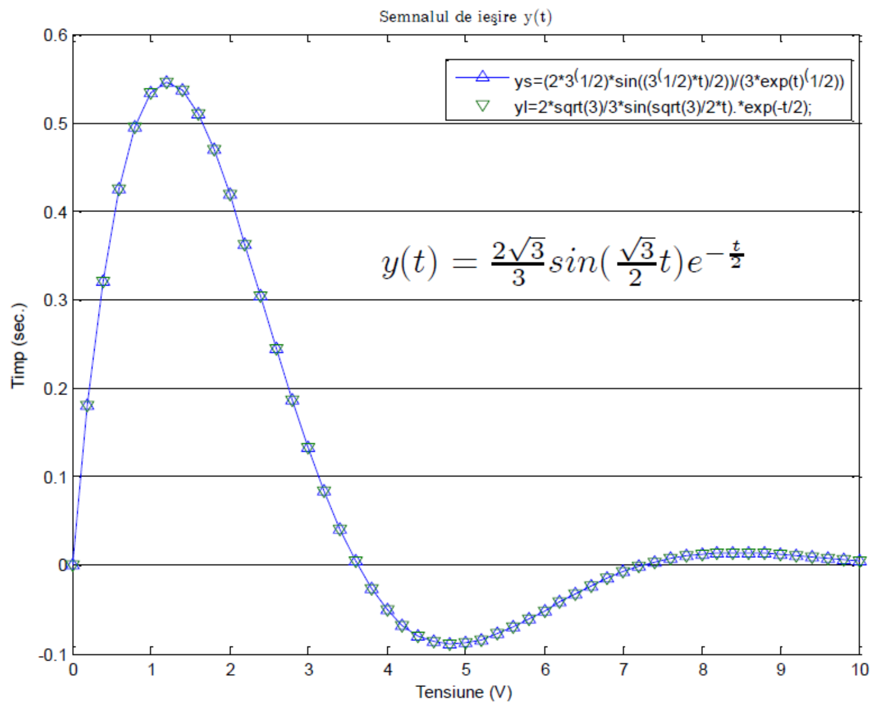

Figura 4.1 Semnalul de ieșire al circuitului din Figura 3.2

4.2 Soluţia numerică a EDO

Pentru reprezentarea grafică a semnalului de ieșire al circuitului din Figura 3.1 se propune următoarea variantă de script în Matlab care utilizează pentru rezolvarea ecuaţiei diferenţiale funcţia **ode23**.

```
%%% fisier de tip "function"
%%% se salveaza fisierul cu numele RLC1%%
function dx=RLC1(t,x)
R=1;L=1;C=1;     %parametrii circuitului
u=1;           %semnal de intrare
dx=[-1/L/C*x(2); x(1)-1/R/C*x(2)+1/R/C*u];

%%% fisier de tip "script"
%%%% salvati fisierul cu numele ex1
tf=10;        % valoare finala a timpul de simulare
x0=[0 0];    %conditii initiale
ode23('RLC1',[0,tf],x0);
legend('solutia x1','solutia x2')

%%%% pentru reprezentarea grafica a lui x2 %%%%
[t,x]=ode23('RLC1',[0,tf],x0);
plot(t,x(:,2));grid;
xlabel('Timp (sec)');ylabel('Tensiune (V)')
```

```
title('Căderea de tensiune pe condensator')
```

5 Desfăşurarea lucrării

1. Pentru valorile componentelor din Figura 3.1 (R=1kΩ, L=1mH, C=1µF) și semnal de intrare o tensiune continuă de 1V, să se obţină:
   a. expresia analitică a tensiunii de ieșire din Figura 3.1 ;
   b. reprezentarea grafică a tensiunii de ieșire din Figura 3.1 , y(t);
   c. relaţia dintre timpul de atingere a valorii staţionare și valorile pentru componentele circuitului (R,L,C).
2. Utilizând funcţia **ode23,** obţineţi reprezentarea grafică a semnalului de ieșire când circuitul este alimentat cu o tensiune alternativă de forma sin(0.1ωt), respectiv sin(ωt), respectiv sin(10ωt), cu $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$. Stabiliţi tipul filtrului conform celor trei simulări realizate.
3. Studiaţi documentaţia disponibilă în Matlab pentru funcţia **ode23,** pentru a seta din exteriorul fișierului de tip **function**, parametrii circuitului și parametrii semnalului de intrare.