Funcţia de transfer; analiza în domeniul frecvenţă

1 Scopul lucrării

Modele matematice utilizate în analiza sistemelor continue, liniare, invariante în timp (LTI).Obţinerea funcţiei de transfer,H(s), pentru circuite RLC. Utilizarea mediului Matlab cu funcţiile elementare dedicate sistemelor de control [1].

2 Consideraţii teoretice

În domeniul ingineriei de control, sistemele LTI reprezintă o clasă de sisteme intens studiate începând cu anii 1930. Primele abordări în analiza acestor tipuri de sisteme sunt bazate pe tehnici de analiză în domeniul frecvenţă (descriere intrare / ieşire sau funcţia de transfer).

Aceste abordări au fost în principal dezvoltate pentru sisteme cu o singură intrare şi o singură ieşire (SISO systems) şi nu conduceau spre analize viabile şi pentru cazul sistemele cu mai multe intrări şi mai multe ieşiri (MIMO systems) care câştigau interes în aplicaţiile de control. În acest context, reprezentarea în spaţiul stărilor revine ca instrument de analiză a sistemelor liniare (Bellman, Kalman).

Reutilizarea modelării în spaţiul stărilor stimulează dezvoltarea sistemelor de control şi în principal conceptul de structură cu reacţie negativă.

În anii 1970 este demonstrat că abordarea intrare / ieşire sau funcţia de transfer a unui sistem SISO poate fi extinsă şi pentru analiza sistemelor MIMO prin intermediul studiului matricelor de transfer.

Se poate concluziona că reprezentarea sub formă de funcţie de transfer (bazată pe metode frecvenţiale) şi impunerea de variabile intermediare prin reprezentarea intrare / stare /ieşire sau Spaţiul Stărilor (metodă bazată pe analiza în timp) reprezintă două extreme ale spectrului larg de posibile descrieri ale unui sistem LTI de dimensiuni finite.

Analiza sistemelor LTI se poate realiza fără dificultăţi cu ambele reprezentări, dar alegerea modelului matematic este în influenţată de natura aplicaţiei şi a tipurilor de teste care sunt prevăzute spre realizare.

Pornind de la definiţia funcţiei de transfer sub forma simplificată din relaţiile (1),(2) şi (3) se propune în desfăşurarea acestei lucrări, analiza circuitelor electrice RLC utilizând formalismul de funcţie de transfer.

$$H(s) = \mathcal{L}\{h(t)\} \tag{1}$$

$$H(s) = \frac{b_m s^m + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} \ldots + a_1 s + a_0} \tag{2}$$

$$H(s) = \frac{\mathcal{L}\{y(t)\}}{\mathcal{L}\{u(t)\}} = \frac{Y(s)}{U(s)} \tag{3}$$

[1] Control Toolbox

3 Circuite RLC (serie şi paralel)

Pentru obţinerea funcţiei de transfer a circuitul din Figura 3.1 , se vor utiliza notaţiile din Teoria Sistemelor: semnalul de intrare **Vin** se va nota cu u(t), respectiv semnalul de ieşire **Vout** se va nota cu y(t).

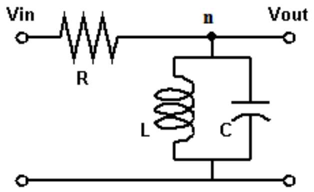


Figura 3.1 Reprezentarea circuitului RLC, conexiune paralel

Există cel puţin două modalităţi de a obţine funcţia de transfer. Una utilizează transformata Laplace pentru ecuaţia diferenţială ordinară care descrie comportamentul sistemului iar cea de-a doua utilizează relaţia dintre impedanţa de ieşire a circuitului în raport cu impedanţa de intrare a circuitului.

3.1 Transformata Laplace

După aplicarea legilor lui Kirchhoff, ecuaţia diferenţială ordinară care modelează dinamica circuitului din Figura 3.1, este prezentată în relaţia (4).

$$RC\frac{d^2y(t)}{dt^2}+\frac{dy(t)}{dt}+\frac{R}{L}y(t)=\frac{du(t)}{dt} \quad (4)$$

Aplicând transformata *Laplace* în condiţii iniţiale nule, se obţine funcţia de transfer ca raport de două polinoame cu coeficienţii formaţi din combinaţii algebrice între parametrii circuitului.

$$H(s)=\frac{\mathcal{L}\{y(t)\}}{\mathcal{L}\{u(t)\}}=\frac{\frac{1}{RC}s}{s^2+\frac{1}{RC}s+\frac{1}{LC}} \quad (5)$$

3.2 Utilizarea impedanţelor

Dacă se consideră raportul dintre impedanţa de ieşire şi cea de intrare a circuitului din Figura 3.1 , în relaţia (6) este prezentat modul similar celui din (5) de obţinere a funcţiei de transfer.

$$\frac{Y(j\omega)}{U(j\omega)}=\left.\frac{\dfrac{j\omega L*\frac{1}{j\omega C}}{j\omega L+\frac{1}{j\omega C}}}{R+\dfrac{j\omega L*\frac{1}{j\omega C}}{j\omega L+\frac{1}{j\omega C}}}\right|_{j\omega\to s}\Rightarrow H(s)=\frac{\dfrac{\frac{L}{C}}{sL+\frac{1}{sC}}}{R+\dfrac{\frac{L}{C}}{sL+\frac{1}{sC}}}=\frac{s\frac{1}{RC}}{s^2+\frac{1}{RC}s+\frac{1}{LC}} \quad (6)$$

Pentru ambele cazuri se impune din considerente de analiză ulterioară, ca numitorul să fie de forma unui polinom cu coeficientul de la cea mai mare putere a lui s egal cu 1.

3.3 Analiza tipului filtrului

Se utilizează raportul *în complex* al semnalului de ieşire în regim staţionar faţă de semnalul de intrare care este de fapt raportul dintre amplitudinea semnalului de ieşire şi amplitudinea semnalului de intrare. În funcţie de valoarea acestui raport, se diferenţiază doua cazuri:

$$\begin{cases} \dfrac{|Y(j\omega)|}{|U(j\omega)|} \geq \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow semnal \quad trecut \\ \dfrac{|Y(j\omega)|}{|U(j\omega)|} < \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow semnal \quad taiat \end{cases}$$

, unde ω reprezintă pulsaţia semnalului de intrare.

Pentru circuitul pentru care s-a dedus funcţia de transfer, comportamentul când pe intrare sunt date semnale de pulsaţie mică ($\omega \to 0$), respectiv mare ($\omega \to \infty$) se poate analiza calculând următoarele limite:

- $\lim\limits_{\omega \to 0} \boldsymbol{H}(j\omega) = 0$ deci semnalele de frecvenţă mică vor fi tăiate;
- $\lim\limits_{\omega \to \infty} \boldsymbol{H}(j\omega) = 0$ deci semnalele de frecvenţă mare vor fi tăiate;
- se observă că doar pentru $\omega = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$, această limită este peste $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, deci doar semnalele cu pulsaţii cuprinse în jurul acestei valori, $\omega = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$, vor fi trecute;

Se poate concluziona că acest circuit se comportă ca un filtru trece bandă, cu banda de trecere în jurul frecvenţei $f = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$

Analiza propusă este una succintă şi incompletă, tratarea adecvată realizându-se prin reprezentări grafice în frecvenţă. Se evidenţiază doar legătura dintre structura funcţiei de transfer şi comportamentul circuitului (sistemului) în frecvenţă.

4 Probleme propuse spre rezolvare

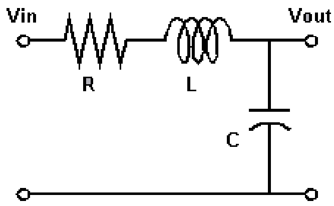
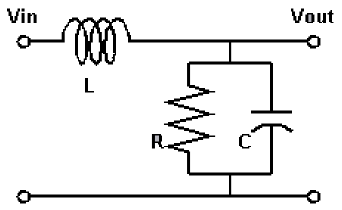
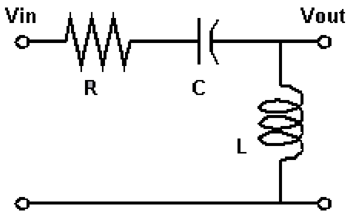
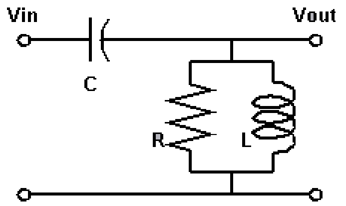
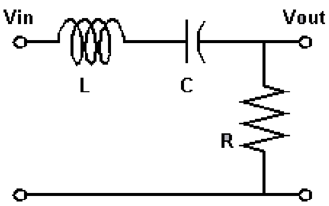
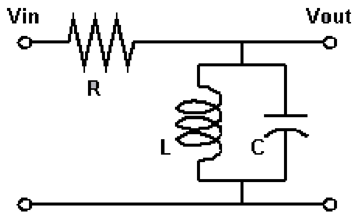
Pentru circuitele RLC prezentate în Tabelul 1:

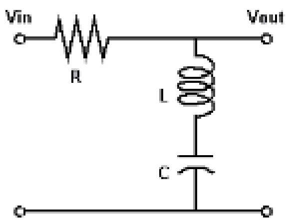
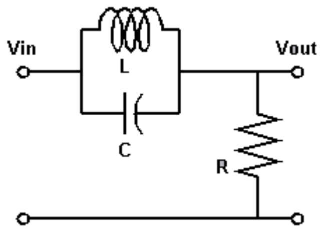
1. Completaţi pentru fiecare circuit în parte funcţia de transfer calculată, conform exemplului din tabel.

Observaţie: funcţia de transfer să fie de forma unui raport de două polinoame în s cu puteri pozitive ($\boldsymbol{H}(s) = \dfrac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0}$);coeficientul lui s la cea mai mare putere de la numitorul funcţiei de transfer să fie 1.

2. Analizaţi tipul filtrului pentru fiecare dintre cele 8 circuite.
3. Comentaţi rezultatele obţinute respectând gruparea circuitelor din tabel.
4. Justificaţi asemănările care apar între funcţiile de transfer prin comentarii tehnice.

Tabelul 1 Gruparea circuitelor RLC, conexiune serie şi paralel

<table>
<tr><th>Conexiune Serie</th><th>Conexiune Paralel</th></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>
</td><td>

$$H(s)=\frac{s\frac{1}{RC}}{s^2+\frac{1}{RC}s+\frac{1}{LC}}$$
Filtru Trece Bandă (FTB)</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

5 Funcţia de transfer în mediul Matlab

Pentru circuitele din Tabelul 1, coloana corespunzătoare conexiunilor în serie, este prezentată o variantă de script în mediul Matlab prin intermediul căreia se pot obţine răspunsurile la semnal treaptă unitate ale celor patru tipuri de filtre.

```
R=1;C=1;L=1;% atribuire de valori la parametrii sistemului

ftj=tf(1/L/C,[1 R/L 1/L/C]);% functia de transfer pt. FTJ
fts=tf([1 0 0],[1 R/L 1/L/C]);% functia de transfer pt. FTS
```

```
ftb=tf([R/L 0],[1 R/L 1/L/C]);% funcţia de transfer pt. FTB
fob=tf([1 0 1/L/C],[1 R/L 1/L/C]);% funcţia de transfer pt.
FOB
% răspunsul la treapta pentru FTJ
subplot(221);step(ftj);legend('FTJ');

% răspunsul la treapta pentru FTS
subplot(222);step(fts);legend('FTS');

% răspunsul la treapta pentru FTB
subplot(223);step(ftb);legend('FTB');

% răspunsul la treapta pentru FOB
subplot(224);step(fob);legend('FOB');
```

O variantă comprimată a scriptului anterior cu rezultatul grafic evidenţiat în Figura 5.1 , este prezentată mai jos.

```
num={1/L/C,[1 0 0],[R/L 0],[1 0 1/L/C]};
den=[1 R/L 1/L/C];
tip={'FTJ','FTS','FTB','FOB'};
for i=1:4
    subplot(1,4,i);step(num{i},den);legend(tip{i});
    axis([-0.1 10 -0.5 1.2]);
    xlabel('Timp (sec.)');ylabel('Tensiune (V)');
    title('Raspunsul la semnal treapta');
end
```

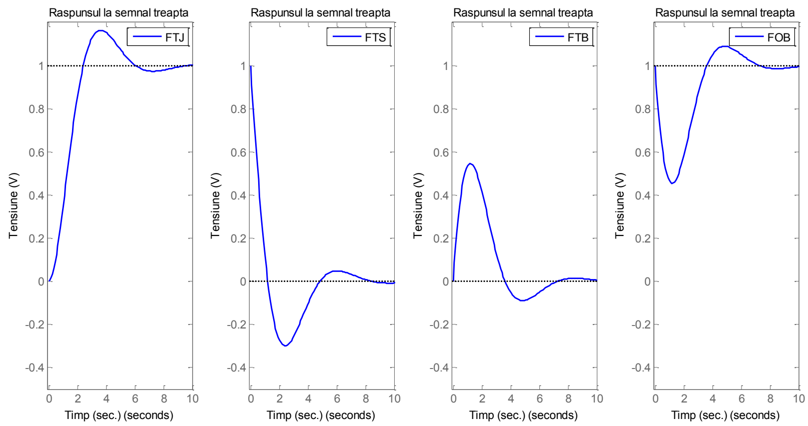


Figura 5.1 Răspunsul la semnal treaptă al circuitelor din prima coloană a Tabelul 1

Simulările în Matlab pentru evidenţierea comportamentului în frecvenţă prin reprezentări grafice în domeniul timp (**Error! Reference source not found.**), pot fi realizate apelând la următoarele comenzi:

```
w=[0.1,0.7,1,5,10];%pulsatii din zona benzii de trecere
ftb=tf([R/L 0],[1 R/L 1/L/C]);% functia de transfer pt. FTB
for i=1:length(w)
    subplot(length(w),1,i);
```

```
    T=2*pi/w(i);%perioada semnalului de intrare
    t=0:T/100:8*T;%timp de simulare
    y=lsim(ftb,sin(w(i)*t),t);%raspunsul la semnal sinus
    plot(t,y,t,sin(w(i)*t));legend('y(t)','u(t)')
    title(['Raspunsul la u(t)=sin(',num2str(w(i)),'t)']);
    ylabel(['A_y_ss=',num2str((max(y)))]);xlabel('Timp
(sec.)')
end
```

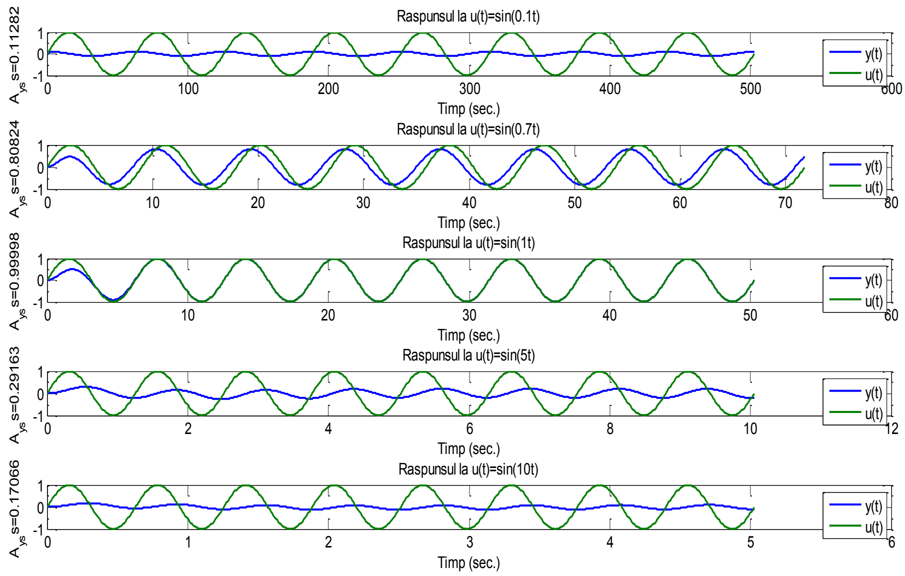


Figura 5.2 Comportamentul circuitului de tip filtru trece bandă, la semnal sinusoidal de pulsaţie din zona benzii de trecere

5.1 Întrebări

- Vectorii în Matlab se declară între paranteze drepte, acolade sau paranteze rotunde?
- Generarea automată a vectorilor se realizează cu pas implicit egal cu 0.1, 1 sau 10?
- Ce tip de variabilă returnează funcţia `tf` din Matlab?
- Funcţia `step` generează grafic un semnal dreptunghiular, un semnal treaptă unitate sau răspunsul unui sistem LTI la semnal treaptă unitate?
- Prin intermediul funcţiei `step` se poate obţine răspunsul sistemului sub formă numerică, nu doar grafică? (studiaţi documentaţia aferentă funcţiei în Matlab)
- Se poate utiliza funcţia `lsim` pentru a obţine grafic răspunsul unui sistem LTI la semnal treaptă unitate?
- In Figura 5.1 Răspunsul la semnal treaptă al circuitelor din prima coloană a Tabelul 1, comentariul corespunzător ordonatei reprezintă o eroare de programare, o referire către argumentul unei variabile complexe 's' sau amplitudinea semnalului y(t) în regim staţionar.

5.2 Probleme suplimentare

Prin intermediul funcţiei `guide` să se realizeze în Matlab o interfaţă grafică (Figura 5.3) prin care să se poată stabili banda de trecere a fiecărui circuit din Tabelul 1.

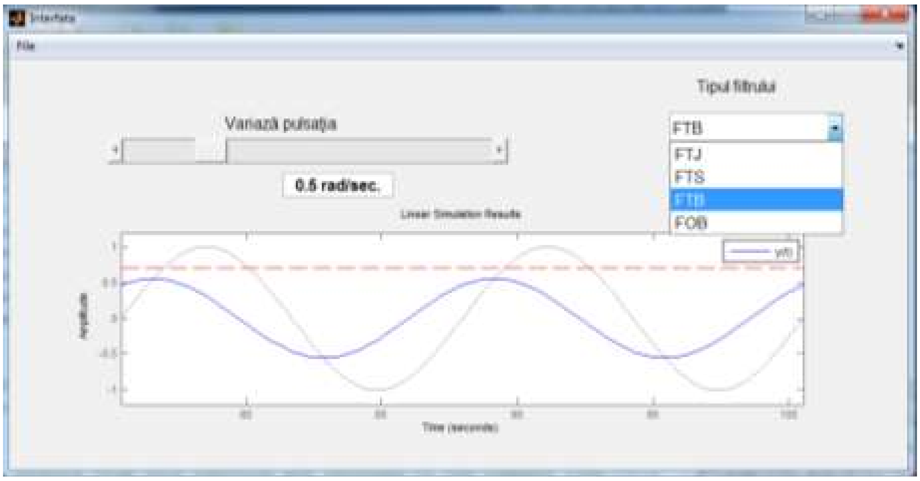


Figura 5.3 Interfaţă grafică în Matlab (funcţia guide)