Лабораторная работа № 2.1: Определение C_p/C_v по скорости звука в газе

Миллер Сергей 494

5 сентября 2016 г.

Цель работы:1) измерение частоты колебаний и длины волны при резонансе звуковых колебаний в газе, заполняющем трубу; 2) определение показателя адиабаты по скорости звука с помощью уравнения состояния идеального газа.

Теория.

Звуковые волны.

В простых гармонических звуковых волнах, распространяющихся вдоль оси Ox, изменение давления ΔP зависит от координаты x и времени t по закону

$$\Delta P(x,t) = P_0 cos(\omega t \pm kx). \tag{1}$$

Два знака в аргументе косинуса соответствуют двум направлени- ям распространения волны. Между круговой частотой ω, волно- вым числом k, длиной волны λ и скоростью звука $v_{зв}$ выполняются соотношения

$$v_{зв} = \frac{\omega}{k} = \lambda f; \quad k = 2\pi; \quad \omega = 2\pi f; \tag{2}$$

здесь f — частота волны. Важной характеристикой звуковых волн является скорость их распространения. Она определяется инерционными и упругими свойствами среды. Скорость распространения продольных волн в безграничной однородной среде определяется выражением:

$$v_{зв} = \sqrt{\frac{dP}{d\rho}}. \tag{3}$$

Давление P зависит не только от плотности ρ, но и от темпе- ратуры T . Поэтому нужно уточнить, в каком смысле понимается производная $\frac{dP}{d\rho}$. Колебания плотности и связанные с ними колебания темпера- туры в звуковой волне происходят настолько быстро, а теплопро- водности газов настолько малы, что для таких процессов теплооб- меном можно пренебречь, так что процесс распространения зву- ка можно считать *адиабатическим*. Следовательно, производную $\frac{dP}{d\rho}$ необходимо рассчитывать для адиабатического процесса.

Первое начало термодинамики.

Из закона сохранения энер- гии следует, что тепло Q, полученное термодинамической систе- мой, расходуется на изменение её внутренней энергии ΔU и на совершение работы A над внешними телами:

$$Q = \Delta U + A \tag{4}$$

Для бесконечно малого процесса уравнение (4) принимает вид

$$\delta Q = dU + \delta A \tag{5}$$

Поскольку внутренняя энергия является функцией состояния системы, для её элементарного приращения использован знак полного дифференциала dU , а приращения и тепла, и работы не являются полными дифференциалами, а Q и A — не функции состояния(Для интегрирования должен быть задан весь промежуточный процесс, поскольку результат будет зависеть от его вида, а не только от начального и конечного состояний).

Работа газа.

Рассмотрим расширение газа в цилиндре, закрытом подвижным поршнем. На поршень действует сила F , равная про- изведению давления газа F на площадь поршня S. При смещении на малую величину dx газ совершает работу

$$\delta A = F dx = PS dx = P dV. \tag{6}$$

где dV — малое изменение объёма газа. Значит полная работа при некотором процессе имеет вид:

$$A = \int P(V) dV \tag{7}$$

А первое начало термодинамики для газов после использования формулы (6) будет иметь вид:

$$\delta Q = dU + P dV \tag{8}$$

Теплоемкость Отношение количества тепла δQ, поглощённого ν молями газа при некотором процессе, который обозначим ин- дексом x, к повышению его температуры на dT, делённое на число молей ν, называется *молярной теплоемкостью газа*:

$$C = \left(\frac{\delta Q}{dT}\right)_x / \nu \tag{9}$$

Будем считать что $U = U(V, T)$ (так как система описывается тремя параметрами: V, T, P но при этом есть уравнение Менделеева-Клапейрона: $P = P(V, T)$). Значит полный дифференциал для U имеет следующий вид:

$$dU = \left(\frac{\delta U}{\delta T}\right)_V dT + \left(\frac{\delta U}{\delta V}\right)_T dV \tag{10}$$

Подставим его в первое начало термодинамики:

$\delta Q = dU + \delta A = \left(\frac{\delta U}{\delta T}\right)_V dT + \left(\frac{\delta U}{\delta V}\right)_T dV + P dV = \left(\frac{\delta U}{\delta T}\right)_V dT + \left[P + \left(\frac{\delta U}{\delta V}\right)_T\right] dV$

Разделив все на dT найдем теплоемкость C_x в процессе x:

$$C_x = C_v + \left[P + \left(\frac{\delta U}{\delta V}\right)_T\right]\left(\frac{\delta V}{\delta T}\right)_x \tag{11}$$

Здесь производная $\left(\frac{\delta V}{\delta T}\right)_x$ вычисляется с учётом процесса x, при котором происходит подвод тепла, например, при постоянном объёме ($x = V$), при постоянном давлении ($x = P$) или другом условии. Величина $C_v = \left(\frac{\delta U}{\delta T}\right)_V$ в формуле (11) является теплое¨мкостью при постоянном объе¨ме(Дейсвительно, это определение совпадает с определением теплоемкости, так как в процессе $V = const$ выполняется $\delta A = 0$ а значит $U = dQ$).

Теплое¨мкость идеального газа. В модели идеального газа внут- ренняя энергия определяется только кинетическои˘ энергиеи˘ дви- жения молекул, следовательно, внутренняя энергия идеального газа не зависит от объе¨ма: $\left(\frac{\delta U}{\delta V}\right)_T = 0$.

Тогда формула (11) станет более простой:

$$C_x = C_v + P\left(\frac{\delta V}{\delta T}\right)_x \tag{12}$$

Используя уравнение Менделеева-Клапейрона ($PV = \nu RT$), для C_p (то есть процесса $x = P$ с постоянным давлением) получим:

$$C_p - C_v = R \tag{13}$$

где C_p, C_v - *молярные* теплоемкости при постоянных давлении и объеме соответсвенно.

Отношение этих теплоемкостей называется показателем адиабаты:

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} \tag{14}$$

В нешироком диапазоне температур C_v можно считать постоянной, что соответствует пропорциональности внутреннеи˘ энер- гии газа его температуре:

$$U = \nu \int C_v dT = \nu C_v T \tag{15}$$

Энергия, переданная молекуле, распределяется между различны- ми формами ее¨ движения: поступательным, вращательным и ко- лебательным. В статистическои˘ физике доказывается теорема о равномерном распределении энергии между степенями свободы молекулы1, согласно которои˘ на каждую степень свободы прихо- дится в среднем энергия, равная $\frac{RT}{2N_A}$

При i степенях свободы, внутренняя энергия U одного моля такого газа и величина C_v равны соответственно

$$U = \frac{i}{2}RT; \quad C_v = \frac{iR}{2}; \tag{16}$$

где $R = 8,31$Дж/(моль $\cdot$ К) — универсальная газовая постоянная, $N_A = 6,02\Delta1023$моль$^{-1}$ — количество молекул в моле вещества (число Авогадро). В рассматриваемом приближении для показателя адиабаты в соответствии с (13) и (14) получим

$$\gamma = \frac{i+2}{i} \tag{17}$$

Адиабатическии˘ процесс.

Квазистатическии˘ процесс, проис- ходящии˘ без теплообмена с окружающеи˘ средои˘, называется адиа- батическим. Из первого начала термодинамики (6) при $\delta Q = 0$ для ν молеи˘ идеального газа, у которого $dU = \nu C_v dT$, получим:

$$\nu C_v dt + PdV = 0, \tag{18}$$

А так как $PV = \nu RT$, получаем:

$$C_v \frac{dT}{T} + R\frac{dV}{V} = 0 \tag{19}$$

Далее интегрируя и вновь используя уравнение состояния, получим:

$$PV^{\gamma} = const \tag{20}$$

(адиабата Пуассона)

Скорость звука Распространение звуковой волны в газе проис- ходит адиабатически. Сжатия и разрежения в газе сменяют друг друга настолько быстро, что теплообмен между слоями газа, име- ющими разные температуры, не успевает произойти. Используя полученное уравнение адиабаты идеального газа, найдём скорость звука по общей формуле (3).

Заменим в уравнении Пуассона $PV^{\gamma} = const$ объём на плот- ность $\rho = \frac{m}{V}$, после чего получим $P = const\rho^{\gamma}$. Тогда после логарифмирования и дифференцирования этого выражения име- ем:

$$\frac{dP}{P} = \gamma\frac{d\rho}{\rho}, \quad \text{или} \quad \left(\frac{dP}{d\rho}\right)_{\text{адиаб}} = \gamma\frac{P}{\rho}, \tag{21}$$

тогда для скорости звука получаем:

$$v_{\text{зв}}^2 = \left(\frac{dP}{d\rho}\right)_{\text{адиаб}} = \gamma\frac{P}{\rho} = \gamma\frac{RT}{\mu}, \tag{22}$$

где μ - молярная масса газа.

Преобразуя, получим:

$$\gamma = \frac{\mu}{RT}v_{\text{зв}}^2 \tag{23}$$

Таким образом, для определения показателя адиабаты доста- точно измерить температуру газа и скорость распространения зву- ка (молярная масса газа предполагается известной).

Идея эксперимента Звуковые колебания в трубе являются наложением всех отражённых волн и, вообще говоря, очень сложны. Картина упрощается, если длина трубы L равна целому числу полуволн, то есть когда выполняется условие

$$L = n\frac{\lambda}{2} \tag{24}$$

где n — любое целое число. Совпадающие по фазе волны, бегущие в противо- положных направлениях, складываясь, усиливают друг друга, и образуется стоячая звуковая волна: $P\ (x,t) = 2P0\ \cos($[U+1D714]$\,t)\ \sin(kx)$. Амплитуда звуковых колебаний при этом резко возрастает — на- ступает резонанс.

При неизменной частоте f звукового генератора (а следова- тельно, и неизменной длине звуковой волны [U+1D706]) можно из- менять длину трубы L. Для этого применяется раздвижная труба. Длина раздвижной трубы постепенно увеличивает- ся, и наблюдается ряд последовательных резонансов. Воз- никновение резонанса легко наблюдать на осциллографе по резкому увеличению амплитуды колебаний. Для последовательных резонансов имеем

$$L_n = n\frac{\lambda}{2}, L_{n+1} = (n+1)\frac{\lambda}{2}, \dots L_{n+k} = n\frac{\lambda}{2} + k\frac{\lambda}{2} \tag{25}$$

т. е. $\lambda/2$ равно угловому коэффициенту графика, изобража- ющего зависимость длины трубы L от номера резонанса k. Скорость звука находится по формуле (2).

В работе испольуются: звуковой генератор (ЗГ); электронный осциллограф (ЭО); микрофон; раздвижная труба; термометр.

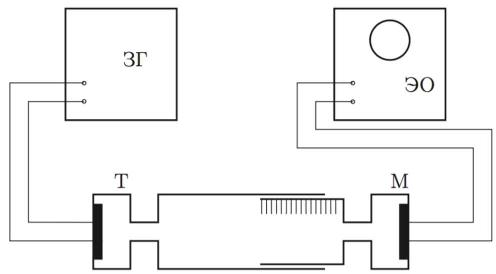

Рис. 1. Установка для измерения скорости звука при помощи раздвижной трубы

Ход работы:

1. Будем медленно удлинять трубу при постоянной частоте и измерять смещение трубы от начального состояния при последовательных резонансах. Так как ожидаемая зависимость длины трубы от номера резонанса $f(n)$ линейная, то построим аппроксимирующие по методу наименьших квадратов прямые вида $f = kn + b$ для каждой измеряемой частоты, а также произведем оценку ошибки(для углового коэффицента k):

$$\hat{k} = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\bar{y}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2}; \quad \hat{\sigma}_k = \frac{2}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{\overline{y^2} - \bar{y}^2}{\overline{x^2} - \bar{x}^2} - \hat{k}^2} \tag{26}$$

Здесь в качестве погрешности для полученной оценки $\hat{k}$ взяли удвоенное стандартное отклонение, в пределах которого в среднем лежит 98% результатов.

После этого найдем скорость звука: $\hat{v}_{зв} = \hat{\lambda} f = 2\hat{k} f$

Тогда получим искомое значение показателя адиабаты: $\hat{\gamma} = \frac{4\mu\hat{k}^2 f^2}{RT}$

А погрешность $\hat{\sigma}_\gamma$ определим из формулы для погрешности функции многих переменных:

$$\left(\frac{\hat{\sigma}_\gamma}{\hat{\gamma}}\right)^2 = 2^2\left(\frac{\hat{\sigma}_k}{\hat{k}}\right)^2 + 2^2\left(\frac{\hat{\sigma}_f}{\hat{f}}\right)^2 + \left(\frac{\hat{\sigma}_T}{\hat{T}}\right)^2 \tag{27}$$

- $f = 1.13$ КГц

n	1	2	3	4	5
f_n [мм]	75	104	130	167	220