-DİFERANSİYEL DENKLEMLER-

$\underline{\text{ÖR}}$: $y'(x) = 2x^2+5$ $\qquad y(x) = \underbrace{\frac{2x^3}{3}+5x+c}_{\text{Genel Çözüm}} = \boxed{\frac{dy}{dx}} \Rightarrow dy = (2x^2+5)dx$

Başlangıç Koşulu $\Rightarrow$ $y' = 2x^2+5$ and $y(1)=-3$ $\quad x_0=1 \quad y_0=-3$ $\Big\}$ → Başlangıç değer problemi

$y(1) = \frac{2.1^3}{3}+5.1+c = -3 \qquad \frac{17}{3}+3=-c \qquad \frac{-26}{3}=c \qquad \Rightarrow Y(x) = \frac{2x^3}{3}+5x-\frac{26}{3}$

$\underline{\text{ÖR}}$: $y'=y$ denk. genel çözümü = ?

$\frac{dy}{dx}=y \Rightarrow \frac{dy}{y}=dx \Rightarrow \int\frac{dy}{y}=\int dx \Rightarrow \ln y + c_1 = x+c_2 \Rightarrow \ln y = x+c \Rightarrow e^{\ln y}=e^{x+c} \Rightarrow$

$c_2-c_1=c$

$y=e^x.e^c = A.e^x$

$y(x) = A.e^x$ (Türevi kendisine eşittir. $=e^x$)

$\underline{\text{ÖR}}$: $y'+2yx^2=0 \qquad y(x)=?$

$\frac{dy}{dx}=-2yx^2 \Rightarrow \frac{dy}{y}=-2x^2.dx \Rightarrow \int\frac{dy}{y}=\int -2x^2.dx \Rightarrow \ln y = -2.\frac{x^3}{3}+c \Rightarrow y = e^{\frac{-2x^3}{3}+c}$

$= A.e^{-2x^3/3}$

$y(0)=5 \Rightarrow 5=A.e^{-2.0^3/3} \Rightarrow A=5$

BİRİNCİ DERECEDEN DİFERANSİYEL DENKLEMLER

$y'=f(x,y) \Rightarrow y(x) \qquad \tilde{x}(t), y(t) \qquad x'-2xt+5=0$

$\frac{dy}{dt}$ dy → Bağımlı, dt → Bağımsız

$y'=f(x,y)$

$y'=-2x^2+xy-3$

Ayrılabilir Dif. Denklemler

$$\boxed{y' = \underbrace{f(x)}\,.\,\underbrace{g(y)}} \qquad y' = \frac{f(x)}{\underbrace{g(y)}}$$

$$\frac{y'}{g(y)} = f(x) \Rightarrow \frac{dy}{g(y)} = f(x).dx \Rightarrow$$ int Alınabilir

SORU = $\frac{dy}{dx} = \frac{4-2x}{3y^2-5}$ $\Rightarrow$ Sadece x / Sadece y $\quad y' = \frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow \boxed{dy.(3y^2-5) = dx.(4-2x)} \Rightarrow y^3-5y = 4x-x^2+C$

$$y^3-5y+x^2-4x+c=0$$

BİRİNCİ DERECEDEN LİNEER D.D.

$u\,(y' + P(x).y) = Q(x).u \qquad \boxed{(uv)' = u'.v + u.v'}$

$\underbrace{u.(x)+y'(x)}_{u.y'} + \underbrace{u(x).P(x).y}_{u'.y} = u(x).Q(x)$

$u.P.\cancel{y} = u'.\cancel{y} \Rightarrow u.P = u' \Rightarrow \frac{u'}{u} = P(x) \Rightarrow \int (\ln u)' = \int P(x) \Rightarrow \ln u = \int P(x).dx \Rightarrow \boxed{u = e^{\int P(x).dx}}$

SORU: $\frac{dy}{dx} - y = e^{-2x} \quad y(0) = 1$ başlangıç değer problemini çözünüz.

ÇÖZÜM: $e^{-x}\left(y' - y = e^{-2x}\right) \Rightarrow \underbrace{u.y'}\ \underbrace{-u.y}_{u'y} = u.e^{-2x}$

$u'y = -u.y \Rightarrow u' = -u \Rightarrow u = e^{-x}$

$$\underbrace{e^{-x}.y' - y.e^{-x}} = e^{-3x}$$

$$\int (e^{-x}.y)' \quad \int e^{-3x} \quad \Rightarrow e^{x}\left(e^{-x}.y = \frac{-1}{3}.e^{-3x} + c\right) \Rightarrow y = \frac{-1}{3}.e^{-2x} + c.e^{x}$$

$$y(0) = -1 \Rightarrow -1 = \frac{-1}{3}.e^{0} + c.e^{0}$$

$$\boxed{y(x) = \frac{-1}{3}.e^{-2x} - \frac{2}{3}.e^{x}} \qquad c = \frac{-2}{3}$$

SORU: $y' - 2xy = e^{x^2}$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

ÇÖZÜM: $y' = P(x)\,y + Q(x)$ $\quad P(x) = -2x \quad Q(x) = e^{x^2}$

$$e^{\int P(x).dx} \Rightarrow \int -2x.dx = -x^2 \Rightarrow e^{-x^2}$$

$$e^{-x^2}.y' - 2x.e^{-x^2}.y = e^{x^2}.e^{-x^2} \Rightarrow \int (y.e^{-x^2})' = \int 1 \Rightarrow y.e^{-x^2} = x + c \Rightarrow y = (x+c).e^{x^2}$$

DÖNÜŞÜMLER VE TAM DİF. DENK.

ÖR: $y' = (\underbrace{4x+y-3}_{u})^2 \qquad 4x+y-3 = u \Rightarrow y = u+3-4x \Rightarrow y' = u'+4$

$$u' - 4 = u^2 \Rightarrow \frac{du}{dx} = u^2+4 \Rightarrow \int \frac{du}{u^2+4} = \int dx \Rightarrow \frac{1}{2}.\arctan\frac{u}{2} = x+c \Rightarrow \arctan\frac{u}{2} = 2x+c \Rightarrow$$

$$\tan\left(\tan^{-1}\frac{u}{2}\right) = \tan(2x+c) \Rightarrow \frac{u}{2} = \tan(2x+c) \Rightarrow u = 2.\tan(2x+c)$$

$$\boxed{y = 2.\tan(2x+c) + 3 - 4x}$$

SORU: $2.x.y.y' = 4x^2 + 3y^2$ denklemini çözünüz.

ÇÖZÜM: $y' = \frac{4x^2}{2xy} + \frac{3y^2}{2xy} \Rightarrow y' = \frac{2x}{y} + \frac{3y}{2x} \Rightarrow y' = 2.\frac{x}{y} + \frac{3}{2}.\frac{y}{x} \Rightarrow u = \frac{y}{x} \Rightarrow y = x.u \Rightarrow y' = u + x.u'$

$$u + x.u' = \frac{2}{u} + \frac{3}{2}.u \Rightarrow x.u' = \frac{2}{u} + \frac{u}{2} \Rightarrow x.u' = \frac{4+u^2}{2u} \Rightarrow \frac{u'.2u}{u^2+4} = \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{du.2u}{u^2+4} = \frac{dx}{x} \Rightarrow$$

$\frac{du}{dx}$

$$\ln(u^2+4) = \ln x + c \Rightarrow \boxed{u^2+4 = A.x} \Rightarrow u^2 = A.x - 4 \Rightarrow u = \sqrt{A.x-4} \Rightarrow \boxed{y = x\sqrt{A.x-4}}$$

BERNOULLI DENKLEMLERİ

$$y' + P(x).y = Q(x).y^{n} \Rightarrow y^{n}.y' + P(x).y^{1-n} = Q(x)$$

$$u = y^{1-n} \Rightarrow \boxed{y = u^{1/1-n}}$$

Bernoulli

$$y' = \frac{1}{1-n}.u^{\frac{1}{1-n}-1}.u' \Rightarrow \boxed{y' = \frac{1}{1-n}.u^{\frac{n}{1-n}}.u'}$$

$$\Rightarrow \boxed{y^{-n} = u^{-n/1-n}}$$

$$u^{\frac{-n}{1-n}}.\frac{1}{1-n}.u^{\frac{n}{1-n}}.u' + P(x).u = Q(x) \Rightarrow \boxed{\frac{u'}{1-n} + P(x).u = Q(x)}$$

SORU: $x.\frac{dy}{dx} + 6y = 3xy^{4/3} \Rightarrow n = \frac{4}{3}, \ u = y^{1-n}$

$$y' + \frac{6}{x}.y = 3.y^{4/3} \Rightarrow \boxed{u = y^{\frac{-1}{3}}} \Rightarrow y = u^{-3} \Rightarrow y' = -3.u^{-4}.u'$$

$$-3.u^{-4}.u' + \frac{6}{x}.u^{-3} = 3.u^{-4} \Rightarrow 3.u' + \frac{6}{x}.u = 3 \Rightarrow \boxed{u' - \frac{2}{x}.u = -1}$$

$$e^{\int P(x).dx} = e^{\int \frac{-2}{x}.dx} = e^{-2.\ln x} = e^{\ln x^{-2}} = x^{-2}$$

$$\underbrace{x^{-2}.u' - \frac{2}{x}.x^{-2}.u}_{} = -x^{-2}$$

$$\int (u.x^{-2})' = \int -x^{-2} \Rightarrow u.x^{-2} = \int -x^{-2}dx = \frac{1}{x} + c \Rightarrow u.x^{-2} = \frac{1}{x} + c \Rightarrow \boxed{u = x + cx^{2}}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{y = (x + cx^{2})^{-3}}$$

TAM DİFERANSİYEL DENKLEMLER

$F(x,y)=c \Rightarrow x^2y+x^3y^5+y^2=3$ (Kapalı Fonksiyon)

$$\boxed{\frac{dF}{dx}=\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\underbrace{\frac{dy}{dx}}_{y'}}$$

$\rightarrow M(x,y)+N(x,y).y'=0 \Rightarrow M(x,y)=\frac{\partial F}{\partial x}$, $N(x,y)=\frac{\partial F}{\partial y}$

$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x} \Rightarrow$ tam dif. denk.

$$\frac{\partial m}{\partial y}=\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}=\frac{\partial^2 F}{\partial y.\partial x}$$

SORU: $(6xy-y^3).\frac{dx}{dx}+(4y+3x^2-3xy^2).\frac{dy}{dx}=0$

$$\underbrace{6xy-y^3}_{M(x,y)}+\underbrace{(4y+3x^2-3xy^2).y'}_{N(x,y).y'}=0$$

$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x} \Rightarrow$ Tam Dif. Denk. $\Rightarrow 6x-3y^2=6x-3y^2 \Rightarrow \frac{dF(x,y)}{dx}=\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}$

$\frac{\partial F}{\partial x}=\int 6xy-y^3 \Rightarrow F(x,y)=3x^2y-y^3.x+C(y)$

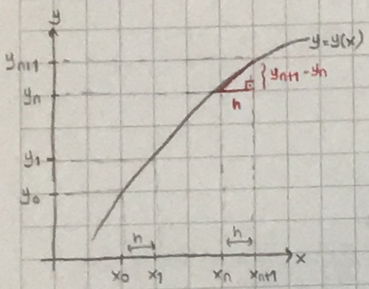
$\frac{\partial F}{\partial y}=\cancel{3x^2}-3y^2+C'(y)=4y+\cancel{3x^2}-3xy^2 \Rightarrow C'(y)=4y \Rightarrow C=2y^2+c$

$F(x,y)=3x^2y-y^3x+2y^2+c$

$\frac{dF}{dx}=\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}.y'=6xy-y^3+(3x^2-3xy^2+4y).y'=0$

$\frac{dF}{dx}=0 \Rightarrow F(x,y)=c \Rightarrow \boxed{3x^2y-y^3x+2y^2=c}$

EULER DENKLEMİ



$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$

$y(x_0) = y_0$ h: adım büyüklüğü

(x_0, y_0) = Başlangıç Noktası → (2,3)

$x_0 + h$ → (2.1,)

h=0.1

$x_1 = x_0 + h$ $y_n = y(x_n)$

$x_2 = x_0 + 2h$ $y_{n+1} =$

$x_n = x_0 + n.h$

$$\boxed{\frac{y_{n+1}-y_n}{h} = y_n'}$$

SORU: $y' = x + \frac{y}{5}$ denklemini [0,5] aralığında h=1 adım büyüklüğü için Euler yöntemiyle çözünüz. $y(0) = -3$

$y_n' = x_n + \frac{y_n}{5} \Rightarrow \frac{y_{n+1}-y_n}{h} = y_n'$

↓

$\frac{y_{n+1}-y_n}{h} = x_n + \frac{y_n}{5} \Rightarrow \boxed{y_{n+1} = y_n + h.x_1 + h.\frac{y_n}{5}} \Rightarrow \boxed{y_{n+1} = x_n + \frac{6y_n}{5}}$ (h=1)

$x_0 = 0$ ise $y_0 = -3$

$x_1 = 1$ " $\Rightarrow y_1 = y(1) = ?$ n=0 $y_1 = -3,6$

$x_2 = 2$ " $\Rightarrow y_2 = y(2) = ?$ n=1 $y_2 = -3,2$

$x_3 = 3$ " $\Rightarrow y_3 = y(3) = ?$ n=2 $y_3 = -1,98$

$x_4 = 4$ " $\Rightarrow y_4 = y(4) = ?$

$x_5 = 5$ " $\Rightarrow y_5 = y(5) = ?$

SORU: $\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2$ ve $y(0) = 1$ başlangıç değer denkleminin yaklaşık çözümünü [0,1] aralığında h=0,1 adım büyüklüğü için bulunuz.

$\frac{y_{n+1}-y_n}{h} = y_n' \Rightarrow \frac{y_{n+1}-y_n}{h} = x_n^2 + y_n^2 \Rightarrow y_{n+1} = y_n + h.x_n^2 + h.y_n^2 \Rightarrow \boxed{y_{n+1} = 0,001.n^2 + y_n + 0,1.y_n^2}$

$x_n = x_0 + n.h \Rightarrow x_0 = 0,\ y_0 = 1 \Rightarrow \boxed{x_n = 0,1.n}$

$n = 0 \Rightarrow y_1 = y_0 + 0,1.y_0^2 = 1 + 0,1.1 = 1,1 \Rightarrow y(0,1) = 1,1$

$n = 1 \Rightarrow y_2 = 0,001 + 1,1 + 0,1.(1,1)^2 = 0,001 + 1,1 + 0,121 = 1,222 \Rightarrow y(0,2) = 1,222$

GELİŞTİRİLMİŞ EULER DENKLEMİ

$$\frac{y_{n+1} - y}{h} = \frac{y_n' + y_{n+1}'}{2}$$

$y' = f(x,y)$

$y_n' = f(x_n, y_n)$

$y_{n+1}' = f(x_{n+1}, y_{n+1})$

SORU : $y' = x + y$, $y(0) = 1$ euler yöntemiyle çözünüz. ($h = 0.1$ adım büyüklüğü) , $[0,2]$

$y_n' = x_n + y_n$

$y_{n+1}' = x_{n+1} + y_{n+1}$

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{h} = \frac{y_n' + y_{n+1}'}{2} \Rightarrow y_{n+1} - y_n = \frac{h}{2}\cdot(y_n' + y_{n+1}') \Rightarrow$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(x_n + y_n + x_{n+1} + y_{n+1}) \Rightarrow x_n = x_0 + n.h = 0,1.n$$

$x_n = 0,1.n$

$x_{n+1} = 0,1.(n+1)$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(0,1n + y_n + 0,1n + y_{n+1} + 0,1) = y_n + 0,05(0,2n + y_{n+1} + y_n + 0,1) = y_n + 0,01n + 0,05y_n + 0,05y_{n+1} + 0,005$$

$$\boxed{y_{n+1} = 1,05.y_n + 0,05.y_{n+1} + 0,01.n + 0,05}$$

$$y_1 = 1,05.y_0 + 0,05.y_1 + 0,05 \Rightarrow 0,95.y = 1,05 + 0,05 \Rightarrow y_1 = \frac{1,1}{0,95}$$

II. MERTEBEDEN LİNEER DİF. DENK.

$$a_2(x).y'' + a_1.(x).y' + a_0.(x).y = f(x)$$

$$x^2.\frac{d^2y}{dx^2} + x.\frac{dy}{dx} + (x^2 - a^2).y = 0$$

→ y ve y'nin türevlerinde, çarpan bir fonksiyon değilse, 2. mertebeden <u>sabit katsayılı</u> lineer denklem denir. ($f(x) = 0$ ise homojen)

$a.y'' + b.y' + c.y = f(x)$ $\qquad$ $a.y'' + b.y' + c.y = 0$

$2y'' - 5.y' - 3y = \sin x + e^{-2x} + 4$ $\qquad$ $y'' - 2.y' - 3.y = 0$

SORU: $y''-2y'-3y=0$ a-) Denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$y(0)=1$, $y'(1)=0$ b-) Başlangıç koşulları için başlangıç değer problemini çözünüz.

ÇÖZÜM: $y=e^{r.x}$, $y'=r.e^{r.x}$, $y''=r^2.e^{r.x}$

a-) Eğer $y=e^{r.x}$ olursa; $r^2.e^{r.x}-2.r.e^{r.x}-3.e^{r.x}=0$

$\underbrace{(r^2-2r-3)}_{=0}(e^{rx})=0 \Rightarrow r^2-2r-3=0$

$(r-3)(r+1)=0 \Rightarrow r_1=3, r_2=-1$

Lineer Bağımsız

$y_1=e^{3x}$ $\quad y_1=c_1.e^{3x}$ $\quad y_1''-2y_1'-3y_1=0$

$y_2=e^{-x}$ $\quad y_2=c_2.e^{-x}$ $\quad y_2''-2y_2'-3y_2=0$

$+$

$(y_1+y_2)''-2.(y_1+y_2)'-3(y_1+y_2)=0$

$$\boxed{y=c_1.e^{3x}+c_2.e^{-x}}$$

※ $a.y''+b.y'+c.y=0$

$a.r^2.e^{r.x}+b.r.e^{r.x}+c.e^{r.x}=0 \Rightarrow \boxed{a.r^2+b.r+c=0}$ Karakteristik Denklem $\quad$ Δ'ya göre işlem yapılır

II. Yol

a-) $\left(\frac{d^2}{dx^2}-2.\frac{d}{dx}-3\right).y=0 \Rightarrow \left(\frac{d}{dx}-3\right)\left(\frac{d}{dx}+1\right).y=0 \Rightarrow \left(\frac{d}{dx}-3\right).u=0 \Rightarrow u'-3u=0 \Rightarrow u'=3u$

$u=y'+y$

$\Rightarrow \boxed{u=c_1.e^{3x}} \Rightarrow y'+y=c_1.e^{3x}$ $\quad e^{\int p(x).dx}=e^x$

$e^x.y'+e^x.y=c_1.e^{4x}$

$\int(e^x.y)'=\int c_1.e^{4x} \Rightarrow e^x.y=c_1.\frac{1}{4}e^{4x}+c_2$

$y=\frac{c_1}{4}.e^{3x}+c_2.e^{-x}$

$c_1=$

$\boxed{y=c_1.e^{3x}+c_2.e^{-x}}$ = Genel Çözüm

b-) $x=0 \quad y=1$

$x=1 \quad y'=0$

$y(x)=c_1e^{3x}+c_2e^{-x}$ $\quad 1=c_1e^0+c_2.e^0$ $\quad c_1+c_2=1$

$y'(x)=3c_1e^{3x}-c_2e^{-x}$ $\quad 0=3.c_1.e^3-c_2e^{-1}$ $\quad c_2=3.c_1.e^4$

$c_1+3.c_1.e^4=1$

$c_1(1+3e^4)=1$

$\boxed{c_1=\frac{1}{(1+3e^4)}}$ $\quad \boxed{c_2=\frac{3.e^4.1}{1+3.e^4}}$ $\Rightarrow \boxed{y=\frac{1}{1+3e^4}.e^{3x}+\frac{3e^4}{1+3e^4}.e^{-x}}$

SORU : $y'' - 2y' + y = 0$ a-) Denklemin genel çözümünü bulunuz.

(Katlı Kökler) $y(0) = 1,\ y'(0) = 0$ b-) Başlangıç koşulları için Başlangıç değer problemini çözünüz

ÇÖZÜM : $y = e^{r.x} \Rightarrow r^2 - 2r + 1 = 0$ karakteristiktir.

$$(r-1)^2 = 0 \Rightarrow \Delta = 0 \Rightarrow \boxed{r_1 = r_2 = 1}$$

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} - 2 \cdot \frac{d}{dx} + 1\right) \cdot y = 0 \Rightarrow \left(\frac{d}{dx} - 1\right)\left(\frac{d}{dx} - 1\right) \cdot y = 0 \Rightarrow \left(\frac{d}{dx} - 1\right) \cdot u = 0 \Rightarrow u' - u = 0 \Rightarrow u' = u$$

$\boxed{u = y' - y}$ olsun

$$\boxed{\Rightarrow u = c_1 \cdot e^x}$$

$$e^{\int p(x).dx} = e^{\int -1.dx} = e^{-x}$$

$$\Rightarrow y' - y = c_1.e^x \Rightarrow \underbrace{e^{-x}.y' - e^{-x}.y}_{(e^{-x}.y)} = c_1.e^x.e^{-x} \Rightarrow e^{-x}.y = c_1.x + c_2 \Rightarrow y = (c_1.x + c_2).e^x$$

$\Delta = 0$ ise katlı kök vardır. $\underline{c.e^{r_1.x}}$ iki katlı kök varsa $\underbrace{(ax+b)}_{\text{1.Derece}}.e^{r.x}$

$$y = c_1.e^{r_1.x} + c_2.e^{r_2.x}$$

17.10.2015
Yrd. Doç. Dr. Tolga ENSARİ
ensari@istanbul.edu.tr
Örnek Sınav Soruları — 2 Kredi, %40 Vize, %60 Final

DİFERANSİYEL DENKLEMLER (DD)

(1. Mertebe / 2. Mertebe / Yüksek Mertebeden / Laplace Dönüşümü)

Lineer Fonksiyon

Bir fonksiyonun lineer olması için ; i-) $f(a.x) = a.f(x)$; a bir sabit (a ile ÖLÇEKLEME özelliği)

ii-) $f(x+y) = f(x)+f(y)$ (TOPLAMSALLIK Öz.)

özelliklerini sağlaması gerekir.

Özetçe, $f(a.x+b.y) = a.f(x)+b.f(y)$ yazılıyorsa, $f(x)$ fonksiyonu lineer'dir

ÖR: Türev operatörü lineer midir? $f(x)$ ve $g(x)$ farklı fonksiyonlar, a ise sbt bir fonk. olsun,

i-) $\frac{d}{dx}\left[a.f(x)\right] = ?\quad a.\frac{d}{dx}.f(x)$

ii-) $\frac{d}{dx}\left[f(x)+f(y)\right] = ?\quad \frac{d}{dx}.f(x)+\frac{d}{dx}.f(y)$ Türev, lineer bir operatördür.

ÖR: İntegral operatörü lineer midir? $f(x)$ ve $g(x)$ farklı fonk.

i-) ✓ ii-) ✓ integral, lineer bir operatördür.

DD'in genel formu

$$F(x, y, x', y', x'', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

$y = f(x)$

Bağımlı Değişken (Dependent Variable) — Bağımsız Değişken

Tanım: Bağımlı değişkenin ve bunun bir veya daha çok bağımsız değişkene göre türevlerini içeren diferansiyel denkleme ADİ (SIRADAN) dif. denklem denir.

Tanım 2: Bağımlı değişkenin birden çok bağımsız değişkene göre türevlerini içeren d.d. KISMİ DD. denir.

ÖR:

a-) $\frac{dy}{dt} + y = t^2 \Rightarrow$ ADİ

b-) $\frac{d^2y}{dt^2} + t.\frac{dy}{dt} = t.e^t \Rightarrow$ ADİ

c-) $\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^4 + \frac{d^2y}{dt^2} + t.\frac{dy}{dt} = 0 \Rightarrow$ ADİ

d-) $\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{du}{dy} = 0$; $u = u(x,y) \Rightarrow$ KISMİ

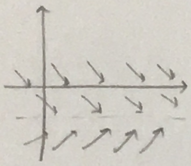
e-) $\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2} = 0$; $u = u(x,y,z) \Rightarrow$ KISMİ

08.10.2015
Thursday

Doğrultu Alanı : Dif. denklemin ve çözümlerinin geometrik yorumları hakkında bilgi sahibi olmak için kullanılır.

$\frac{dy}{dt} = f(t,y)$ → Geometrik olarak bu denklemin bir (t,y) noktasında, çözümün $\frac{dy}{dt}$ eğiminin, $f(t,y)$ tarafından verildiği söylenir.

Bunu, o noktadan geçen $f(t,y)$ eğimine sahip kısa doğrular gösterebiliriz. Bütün bu kısa doğruların ailesine Doğrultu Alanı denir. (Phase Portrait)



$y' = f(x)$ formundaki denklemler

$f(x)$ verilen I aralığında sürekli bir fonk. o.ü., $y' = f(x)$ dif. denk. çözümü $y = \int f(x)dx$ şeklindedir.

$y(x_0) = y_0$ olarak verilen başlangıç koşulu çözümü ise $y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t)dt$ şeklindedir.

ÖR: $y' = 3x^2$

$y = \int 3x^2 dx \Rightarrow y = x^3 + c$

ÖR: $y(3) = 27$ ise Çözüm = ?

$27 = 3^3 + c \Rightarrow y = x^3$

$c = 0$

ÖR: $y'' = \sin x$ d.d. çözünüz.

$y' = \int \sin x . dx \Rightarrow y' = -\cos x + c_1$

$\boxed{\Rightarrow y = -\sin x + c_1 . x + c_2}$

ÖR: $y' = 3x^2 - 6x + 1$

$y(-2) = 0$

$y = x^3 - 3x^2 + x + c$

$0 = -2^3 - 3.(-2)^2 - 2 + c = -8 - 12 - 2 + c \Rightarrow c = 22$ $\boxed{y = x^3 - 3x^2 + x + 22}$

ÖR: $y''' = e^{-x}$, $y(0) = -1$; $y'(0) = 1$; $y''(0) = 3$

$y'' = -e^{-x} + c_1 = -1 + c_1 = 3 \Rightarrow c_1 = 4$

$y' = e^{-x} + 4x + c_2 \Rightarrow y(0) = 1 \Rightarrow c_2 = 0$

$y = -e^{-x} + 2x^2 + c_3 \Rightarrow -1 = -1 + 0 + c_3 = 0$

$\boxed{y = -e^{-x} + 2x^2}$

$y' = f(y)$ formundaki d.d.

$f(y) \neq 0$ sürekli bir fonk. o.ü. $y' = f(y)$ d.d. ; $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(y)}$ şeklinde yazılabilir. $\Rightarrow dx = \frac{dy}{f(y)} \Rightarrow x = \int \frac{dy}{f(y)}$ olarak bilinir.

Eğer, d.d. (x_0, y_0) noktasından geçiyorsa çözüm : $x - x_0 = \int_{y_0}^{y} \frac{dt}{f(t)}$ formundadır.

ÖR: $y' = \underbrace{y^2}_{f(y)}$; $y \neq 0$ ve d.d. $(3,1)$ noktasından geçiyorsa çözünüz.

$\frac{dy}{dx} = y^2$

$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y^2}$

$\int dx = \int \frac{dy}{y^2}$

$x = \frac{-1}{y} + c$

$y = \frac{1}{c-x}$

$1 = \frac{1}{c-3}$

$c = 4$

$\boxed{y = \frac{1}{4-x}}$

ÖR: $y' + \frac{1}{5}y = \frac{3}{5}$ d.d. çözünüz.

$$y' = \frac{-1}{5}(-3+y) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-1}{5}(-3+y) \Rightarrow \int \frac{(-5)\,dy}{-3+y} = \int dx \Rightarrow x = (-5).\ln|y-3| \Rightarrow \frac{-x}{5} = \ln|y-3| \Rightarrow \boxed{y = e^{\frac{-x}{5}} + 3}$$

Değişkenlerine Ayrılabilen D.D.

$f(x)$, $[a,b]$ aralığında sürekli, $g(y)$, $[c,d]$ aralığında sürekli fonksiyonlar ve $g(y) \neq 0$ olsun. Bu durumda, $y' = \frac{f(x)}{g(y)}$ dif. denkleminin çözümü $\int f(x).dx = \int g(y).dy$ formundadır. Eğer çözüm (x_0, y_0) noktasından geçiyorsa $\int_{x_0}^{x} f(x)dx = \int_{y_0}^{y} g(y)dy$ olarak bulunur.

Not: $y' = f(x).g(y)$ diff. denk. için de aynı teorem geçerlidir. Çözüm, $\int f(x)dx = \int \frac{1}{g(y)}dy$ şeklindedir ve çözüm (x_0, y_0)'dan geçiyorsa $\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx = \int_{y_0}^{y} \frac{1}{g(y)}dy$ olarak belirlenir.

ÖR: $y' = x.y^3.\sin x$ ve $y(0) = 0$

$$I = u.v - \int v.du$$

$$y' = \underbrace{x.\sin x}_{f(x)}.\underbrace{y^3}_{g(y)} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = x\sin x.y^3 \Rightarrow \int \frac{dy}{y^3} = \int x.\sin x.dx \Rightarrow \boxed{\frac{-1}{2y^2} = -x.\cos x + \sin x + c}$$

$$\left.\begin{array}{l|l} u = x & \sin x\,dx = dv \\ du = dx & -\cos x = v \end{array}\right\} I = -x.\cos x + \int \cos x\,dx \Rightarrow I = -x.\cos x + \sin x$$

ÖR: $y' = \frac{-y}{x-3}$; $x \neq 3$ d.d. çözünüz.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-y}{x-3} \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{-1}{x-3}.dx \Rightarrow \ln y = -\ln(x-3) + \overbrace{\ln c}^{c} \Rightarrow \ln(y.(x-3)) = c \Rightarrow \boxed{y(x-3) = c}$$

ÖR: $\frac{(3x+8)(y^2+4)dx}{x^2+5x+6} - 4.y.\frac{(x^2+5x+6).dy}{x^2+5x+6} = \frac{0}{x^2+5x+6}$ d.d. çözünüz.

$$\frac{3x+8}{x^2+5x+6}.(y^2+4)dx - 4y\,dy = 0 \Rightarrow \underbrace{\frac{3x+8}{x^2+5x+6}}_{f(x)}.dx - \underbrace{\frac{4y}{y^2+4}}_{f(y)}.dy = 0 \Rightarrow \frac{(3x+8)}{(x+3)(x+2)}.dx - \frac{4y}{y^2+4}.dy = L$$

$$\left[\begin{array}{l} \frac{3x+8}{(x+3)(x+2)} = \frac{A}{(x+3)_{(x+2)}} + \frac{B}{(x+2)_{(x+3)}} \\ 3x+8 = Ax+2A+Bx+3B \\ A = 1 \quad B = 2 \end{array}\right]$$

$$\int\left(\frac{1}{x+3} + \frac{2}{x+2}\right)dx = 2.\frac{2y^{\to du}}{(y^2+4)_{\to u}}.dy \Rightarrow \ln(x+3) + \ln(x+2)^2 = \ln(y^2+4)^2 + \underbrace{\ln c}_{c} \Rightarrow \ln\left[\frac{(x+3).(x+2)^2}{(y^2+4)^2}\right] = c \Rightarrow \boxed{(x+3).(x+2)^2 = c.(y^2+4)^2}$$

15.10.2015
Thursday

ÖR: $x.(y+1)^2.dx + (x^2+1).y.e^y.dy = 0$ d.d. çözünüz.

$$\underbrace{\frac{x}{(x^2+1)}}_{f(x)}dx + \underbrace{\frac{y.e^y}{(y+1)^2}}_{f(y)}.dy = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}.\ln(x^2+1) + \underbrace{\frac{(y+1).e^y - e^y}{(y+1)^2}.dy}_{I} = c \Rightarrow$$

$$I = \int \frac{(y+1).e^y.e^y}{(y+1)^2}.dy - \int \frac{e^y}{(y+1)^2}.dy$$

$$\left[\begin{array}{ll} \text{Kısmi İnt.} & \\ \frac{1}{y+1} = u & e^y dy = dv \\ \frac{-1}{(y+1)}dy = du & e^y = v \end{array}\right\} = u.v - \int v.du = \frac{e^y}{y+1} + \int \frac{e^y}{(y+1)^2}dy$$

$$I = \frac{e^y}{y+1}$$

$y' = f\left(\dfrac{a_1 . x + b_1 . y + c_1}{a_2 . x + b_2 . y + c_2}\right)$ formundaki ADD

$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$ olmak üzere, yukarıdaki ADD çözünüz.

$\boxed{x = X + h}$; $\boxed{y = Y + k}$ değişken değiştirmesi yapılır. Bunu yukarıdaki d.d.'de yazarsak ;

$\dfrac{dY}{dX} = f\left(\dfrac{a_1 . X + b_1 . Y + a_1 . h + b_1 . k + c_1}{a_2 . X + b_2 . Y + a_2 . h + b_2 . k + c_2}\right)$ d.d.'de ;

$\left.\begin{aligned} a_1 . h + b_1 k + c_1 &= 0 \\ a_2 . h + b_2 . k + c_2 &= 0 \end{aligned}\right\}$ olacak şekilde seçilirse

---

$\dfrac{dY}{dX} = f\left(\dfrac{a_1 . X + b_1 . Y}{a_2 . X + b_2 . Y}\right)$ homojen d.d. elde edilir

ÖR : $y' = \dfrac{2x - y + 9}{x - 3y + 2}$ ADD çözümünü bulunuz.

$\underbrace{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}}_{-5} \neq 0$ | $a_1 = 2$, $b_1 = -1$, $c_1 = 9$ | $a_2 = 1$, $b_2 = -3$, $c_2 = 2$ | $x = X + h$, $y = Y + k$

$\dfrac{dY}{dX} = \dfrac{2.(X+h) - Y - k + 9}{X + h - 3Y - 3k + 2} = \dfrac{2X - Y + \overbrace{(2h - k + 9)}^{0}}{X - 3Y + \underbrace{(h - 3k + 2)}_{=0}} \Rightarrow \left.\begin{aligned} 2h - k + 9 &= 0 \\ h - 3k + 2 &= 0 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} h &= -5 \\ k &= 1 \end{aligned}$

$\dfrac{dY}{dx} = \dfrac{2X - Y}{X - 3Y}$ homojen denklemi elde edilir.

$Y \to z.X$

$z = \dfrac{Y}{X} \Rightarrow Y = z.X \Rightarrow \underset{\downarrow \, \frac{dY}{dX}}{Y'} = X . \dfrac{dz}{dX} + z \Rightarrow X \dfrac{dz}{dX} + z = \dfrac{(2 - z)\cancel{X}}{(1 - 3z)\cancel{X}} + z \Rightarrow X . \dfrac{dz}{dX} = \dfrac{3z^2 - 2z + 2}{1 - 3z} \Rightarrow$

$\displaystyle\int \frac{1 - 3z}{3z^2 - 2z + 2} . dz = \int \frac{1}{X} . dX \Rightarrow \frac{-1}{2} . \ln(3z^2 - 2z + 2) = \ln X + \ln c \Rightarrow \frac{-1}{2} . \ln\left(3 . \frac{Y^2}{X^2} - 2 . \frac{Y}{X} + 2\right) = \ln X + \ln c \Rightarrow$

$x = X - 5$ $\qquad y = Y - 1$

$\Rightarrow x + 5 = X$ $\qquad y + 1 = Y$

22.10.2015
Thursday

Homojen Adi D.D

$f(t_x, t_y) = t^n f(x,y) \to n$ dereceden homojen fonksiyon $\Rightarrow \boxed{y' = f\left(\frac{x}{y}\right)}$

ADD homojen olup / olmaması $\Rightarrow f(t_x, t_y) = f(x,y)$

$$y' = \ln x - \ln y + \frac{x+y}{x-y}$$

$$z(x) = \frac{y(x)}{x} \Rightarrow y(x) = x.z(x) \Rightarrow y'(x) = z + z'(x).x$$

ÖR: $y' = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$ ADD'in çözümünü bulunuz.

$$u = \frac{y}{x} \Rightarrow y = u.x \Rightarrow y' = u + u'x \Rightarrow u + x.u' = e^u + u \Rightarrow x.u' = e^u \Rightarrow x.e^{-u}.u' = 1 \Rightarrow e^{-u}.u' = \frac{1}{x} \Rightarrow e^{-u}.\frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \Rightarrow$$

$$e^{-u}.du = \frac{dx}{x} \Rightarrow -e^{-u} = \ln x - \ln c \Rightarrow -e^{-u} = \ln\frac{x}{c} \Rightarrow +u = \ln\left(\ln\frac{x}{c}\right) \Rightarrow \boxed{\frac{y}{x} = \ln\left(\ln\frac{x}{c}\right)}$$

ÖR: $(3x^2+9xy+5y^2)dx - (6x^2+4xy)dy = 0$ A.D.D. çözünüz.

$u = \frac{y}{x}$

$y = u.x$

$y' = u + x.u'$

$$\frac{3x^2+9xy+5y^2}{6x^2+4xy} = \frac{dy}{dx} \to y'$$

$$u + x.u' = \frac{3\cancel{x^2}+9u\cancel{x^2}+5u^2\cancel{x^2}}{6\cancel{x^2}+4.u.\cancel{x^2}} \Rightarrow u + x.u' = \frac{3+9u+5u^2}{6+4u} \Rightarrow x\underbrace{u'}_{\frac{du}{dx}} = \frac{3+9u+5u^2-6u-4u^2}{6+4u} \Rightarrow$$

$$\int \frac{6+4u}{u^2+3u+3}.du = \int\frac{dx}{x} \Rightarrow 2.\int\frac{3+2u}{u^2+3u+3}.du = \ln x + \ln c \Rightarrow 2.\ln(u^2+3u+3) = \ln(x.c.) \Rightarrow$$

$$\ln(u^2+3u+3)^2 = \ln(x.c) \Rightarrow \boxed{\left(\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 3.\frac{y}{x} + 3\right)^2 = x.C}$$

19.11.2015
Thursday

LİNEER ADD

$y' + a(x)\,y = b(x)$ formundadır (1)

$a(x), b(x)$ I aralığında sürekli olsunlar.

$y' + a(x).y = 0$ formundaki 1 dd'de karşılık gelen homojen lineer d.d. denir (2)

(2) denklemi için $\int \frac{dy}{y} = -\int a(x).dx \Rightarrow \ln(c.y) = -\int a(x).dx \Rightarrow c.y = \exp(-\int a(x).dx) \Rightarrow y = C.\exp(-\int a(x).dx)$

genel çözümü elde edilir.

Asıl çözümü = "Parametrelerin değişimi" olarak adlandırılan yöntemle bulmaya çalışalım.

(1)'in genel çözümü; c x'in bir fonksiyonu o.ü. şöyle önerilsin; $y = c(x).\exp(-\int a(x).dx)$

Önerilen bu çözümün diferansiyeli bulalım. $y' = c'(x).\exp(-\int a(x).dx) - c(x).[a(x).\exp(-\int a(x).dx)]$

$y' + a(x).y = b(x)$ denkleminde gerçeklersek

$$c'(x).\exp(-\int a(x).dx) \cancel{- c(x).a(x).\exp(-\int a(x)dx)} \cancel{+ a(x).c(x).\exp(-\int a(x).dx)} = b(x) \Rightarrow c'(x).\exp(-\int a(x)\,dx) = b(x)$$

$\Rightarrow \int c'(x) = \int b(x).\exp(\int a(x)dx) \Rightarrow c(x) = \int b(x).\exp(\int a(x).dx) + c_1 \Rightarrow y = c(x).\exp(-\int a(x).dx)$ olarak önerilmişti

o halde, yukarıda bulunan $c(x)$, bu denklemde yerine konulursa $y = \exp(-\int a(x).dx).\left[\int b(x).\exp(\int a(x).dx) + c_1\right]$ genel çözümü elde edilir.

ÖR: $y' + 2.x.y = x^3$ ADD çöz. bulunuz.

$y' + a(x).y = b(x) \Rightarrow a(x) = 2$ ve $b(x) = x^3$ lineer add çözümünden

$y = e^{-\int a(x).dx}.\left[\int b(x).e^{\int a(x).dx}.dx + c_1\right]$ çözümü kullanılır.

$$y = e^{-\int 2x.dx}\left[\int x^3.e^{\int 2x.dx}.dx + c_1\right] = e^{-x^2}.\left[\int \underbrace{x^3}_{x^2 x}.e^{x^2}.dx + c_1\right] = \left[\begin{matrix} x^2 = u & \int x.e^{x^2}dx = \int dv \\ 2x\,dx = du & \frac{1}{2}.e^{x^2} = v \end{matrix}\right] \Rightarrow$$

Kısmi İnt.

$$y = e^{-x^2}.\left[\frac{1}{2}.e^{x^2} - \frac{1}{2}\int 2x.e^{x^2}dx + c_1\right] \Rightarrow y = e^{-x^2}\left[\frac{1}{2}.x^2.e^{x^2} - \frac{1}{2}.e^{x^2} + c_1\right] \Rightarrow \boxed{y = \frac{1}{2}.x^2 - \frac{1}{2} + c_1.e^{-x^2}}$$

bulunur.

Bernoulli Tipi D.D.

$y' + a(x).y = b(x).y^n$ formundadır.

$a(x)$ ve $b(x)$ I aralığında sürekli olsun.

$\frac{y'}{y^n} + \frac{a(x).y}{y^n} = b(x)$ elde edilir

$z \stackrel{\text{olsun}}{=} \frac{1}{y^{n-1}} = y^{-n+1}$ olsun. $\longrightarrow z' = (-n+1).y^{-n}.y' \rightarrow z' = (-n+1).\frac{y'}{y^n}$

Denklemde yerine yazılırsa; $\frac{z'}{(-n+1)} + a(x).z = b(x)$ lineer d.d. elde edilir ve çözülür.

ÖR: $y' + x.y = x.y^3$ dd çözümünü bulunuz.

$a(x) = x$, $b(x) = x$, $n = 3$

bernoulli tipi d.d. çözümü $= \frac{z'}{(-n+1)} + a(x).z = b(x)$

$$\frac{z'}{(-z)} + x.z = x \Rightarrow \frac{z'}{(-z)} = x.(z-1) \Rightarrow \frac{z'}{1-z} = -z.x \Rightarrow \frac{z'}{z-1} = z.x \Rightarrow \frac{\frac{dz}{dx}}{z-1} = 2x \Rightarrow$$

$$\frac{dz}{z-1} = 2x\,dx \Rightarrow \ln(z-1) = x^2 + c \Rightarrow z = y^{-2} \text{ kullanılıp } (z = y^{-n+1}) \Rightarrow \boxed{\ln(y^{-n+1}) = x^2 + c} \Rightarrow y^{-2} = e^{x^2+c} + 1$$