Занятие 2. δ-символ Кронекера

δ-символ Кронекера – истинный тензор 2 ранга, компоненты которого определяются следующим образом:

$$(\vec{e}_i, \vec{e}_i) = \delta_{ij} \qquad (2.7)$$

здесь $\vec{e}_i$ - орты декартовой системы координат. Таким образом, компоненты δ_{ij} и могут принимать 2 значения:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \qquad (2.8)$$

δ-символ Кронекера можно представить в виде единичной матрицы: $(\delta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Правило суммирования Эйнштейна: если в выражении с индексами встречается хотя бы одна пара одинаковых индексов, то по этим индексам предполагается суммирование.

<u>Пример 2.1.</u> Просуммировать:

1. $\sum_{i=1}^{3} A_i \delta_{i2}$

Решение.

Распишем сумму:

$$\sum_{i=1}^{3} A_i \delta_{i2} = A_1 \delta_{12} + A_2 \delta_{22} + A_3 \delta_{32}$$

Согласно определению *δ*-символа Кронекера, отличным от 0 будет только второе слагаемое, остальные обращаются в 0:

$$\sum_{i=1}^{3} A_i \delta_{i2} = A_1 \cdot 0 + A_2 \cdot 1 + A_3 \cdot 0 = A_2.$$

2. $\sum_{i=1}^{3} A_i \delta_{im}$, индекс m принимает значение $1, 2$ или 3.

Решение.

Распишем сумму: $\sum_{i=1}^{3} A_i \delta_{im} = A_1 \delta_{1m} + A_2 \delta_{2m} + A_3 \delta_{3m}$.

Отличной от нуля останется только компонента δ-символа, для которой немой индекс (индекс суммирования) совпадет со свободным индексом m: $\sum_{i=1}^{3} A_i\delta_{im} = A_m$.

Таким образом, можно записать формальное правило суммирования: если какой-либо из индексов δ-символа одновременно является индексом суммирования, то

- суммирование по этому индексу снимается;
- во всем выражении, стоящим под суммой, этот индекс заменяется на другой индекс в δ-символе Кронекера;
- сам δ-символ Кронекера исчезает.

<u>*Пример 2.2.*</u> Просуммировать:

1. $$\sum_{i,j,k,m=1}^{3} A_{ik}B_{kjm}\delta_{il}\delta_{jn}\delta_{mp}$$

Решение.

Воспользуемся приведенным выше правилом, для удобства будем подчеркивать индекс, по которому происходит суммирование:

$$\sum_{j,k,m=1}^{3} A_{lk}B_{k\underline{j}m}\delta_{\underline{j}n}\delta_{mp} = \sum_{k,m=1}^{3} A_{lk}B_{kn\underline{m}}\delta_{\underline{m}p} = \sum_{k=1}^{3} A_{lk}\,B_{knp}$$

2. $$\sum_{i,j,k=1}^{3} \delta_{\underline{i}k}\,\delta_{kj}\delta_{j\underline{i}}$$

Решение.

$$\sum_{i,j,k=1}^{3} \delta_{\underline{i}k}\,\delta_{kj}\delta_{j\underline{i}} = \sum_{j,k=1}^{3} \delta_{\underline{j}k}\,\delta_{k\underline{j}} = \sum_{k=1}^{3} \delta_{\underline{kk}} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 3$$

<u>*Пример 2.3.*</u> Просуммировать, с учетом выполнения правила суммирования Эйнштейна:

1. $C_{\underline{l}m}F_m\delta_{\underline{l}k}$

Решение.

Здесь можно упростить выражение, просуммировав по индексу l:

$$C_{\underline{l}m}F_m\delta_{\underline{l}k} = C_{km}F_m$$

2. $$\begin{vmatrix} \delta_{ik} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jk} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{kk} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix}$$

Решение:

$$\begin{vmatrix} \delta_{ik} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jk} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{kk} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix} = \begin{matrix} \delta_{i\underline{k}}\delta_{jm}\delta_{\underline{k}n} - \delta_{i\underline{k}}\delta_{jn}\delta_{\underline{k}m} + \delta_{im}\delta_{jn}\delta_{\underline{kk}} - \\ -\delta_{im}\delta_{j\underline{k}}\delta_{\underline{k}n} + \delta_{in}\delta_{j\underline{k}}\delta_{\underline{k}m} - \delta_{in}\delta_{jm}\delta_{\underline{kk}} \end{matrix} =$$

$$= \delta_{in}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jn} + 3\delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{im}\delta_{jn} + \delta_{in}\delta_{jm} - 3\delta_{in}\delta_{jm} =$$

$$= \delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm}$$

Задание. Провести суммирование следующих выражений, содержащих δ-символ Кронекера:

1.	$\sum\limits_{p,q,i}^{3} A_{ip}T_{pq}\delta_{qi}$	2.	$\sum\limits_{m,k,i}^{3} A_{ikim}\delta_{ml}\delta_{kn}$
3.	$\sum\limits_{i,m,l,k}^{3} A_{iklm}\delta_{mi}\delta_{kl}$	4.	$\sum\limits_{i,n,m,k,}^{3} A_{ikn}B_m\delta_{mk}\delta_{in}\,\delta_{kl}$
5.	$\sum\limits_{l,i,m,k}^{3} A_{mn}C_{ikl}\delta_{il}\delta_{mk}$	6.	$\sum\limits_{p,i,m}^{3} A_{pmi}B_i\delta_{qp}\delta_{im}$
7.	$\sum\limits_{i,n,k,m}^{3} A_{ikn}B_m\delta_{mk}\delta_{in}\,\delta_{kl}$	8.	$\sum\limits_{k,n,l,m}^{3} A_{ikl}B_{mn}\delta_{mk}\delta_{ln}$
9.	$\sum\limits_{n,i,l}^{3} A_{mn}F_{ik}\delta_{nl}\delta_{il}$	10.	$\sum\limits_{m,n,s,t,h,i}^{3} A_{mnst}G_iG_nF_hF_t\delta_{im}\delta_{hs}$
11.	$\sum\limits_{n,i,m}^{3} A_{mn}F_{in}\delta_{ni}\delta_{mn}$	12.	$\sum\limits_{n,s,t,i}^{3} A_{inst}G_iG_nF_sF_t\delta_{in}\delta_{ts}$
13.	$A_{ijk}\delta_{jk}$	14.	$T_{ijkm}\delta_{il}\delta_{jl}\delta_{kj}$
15.	$A_{ikl}B_{lm}\delta_{li}\delta_{kn}\delta_{mp}$	16.	$B_{km}C_i\delta_{km}\delta_{ki}$
17.	$C_{ikm}\delta_{ki}\delta_{ml}$	18.	$B_{kl}A_{im}\delta_{ml}\delta_{ik}\delta_{il}$
19.	$T_{ijk}A_{im}\delta_{il}\delta_{km}\delta_{jp}$	20.	$T_{ijkm}A_{il}\delta_{jl}\delta_{kj}$
21.	$A_{ikl}\delta_{im}\delta_{mj}\delta_{kn}$	22.	$D_{iklm}\delta_{im}\delta_{kl}$
23.	$A_{ik}\delta_{ml}\delta_{im}\delta_{kl}$	24.	$T_{ijk}B_{jp}\delta_{kl}\delta_{pi}$
25.	$C_{ijk}\delta_{jm}\delta_{km}$	26.	$C_{ik}\delta_{ik}\delta_{km}\delta_{ml}$
27.	$C_{ijk}\delta_{jm}\delta_{ml}\delta_{li}$	28.	$C_{ijkl}\delta_{il}\delta_{jk}$
29.	$C_{ijkl}\delta_{ik}\delta_{jl}$	30.	$A_{ik}B_{ml}C_{jnt}\delta_{it}\delta_{kl}\delta_{mp}\delta_{jp}$
31.	$A_{ij}B_{jl}\delta_{im}\delta_{nl}$	32.	$D_{iklm}C_{ik}A_{lm}\delta_{ik}\delta_{lm}$
33.	$D_{iklm}C_{ik}A_{lm}\delta_{im}\delta_{lk}$	34.	$D_{ps}F_iF_m\delta_{mp}\delta_{is}$
35.	$A_{mn}F_{ik}\delta_{nl}\delta_{il}\delta_{mk}$	36.	$A_{mn}F_{ik}G_{ts}\delta_{mn}\delta_{ik}\delta_{ts}\delta_{ks}\delta_{mk}$

37.	$S_{kp}A_{pm}A_{mj}S_{ql}\delta_{kl}\delta_{qj}$	38.	$D_{iklm}C_{sp}A_{nj}\delta_{in}\delta_{kj}\delta_{ls}\delta_{mp}$
39.	$\delta_{mk}\delta_{kp}$	40.	$\delta_{st}\delta_{tm}\delta_{ms}$
41.	$\delta_{il}\delta_{ki}\delta_{lj}\delta_{kj}$	42.	$\delta_{ij}\delta_{jk}\delta_{kl}\delta_{lm}\delta_{mi}$
43.	$\delta_{mk}\delta_{kp}\delta_{im}\delta_{pj}$	44.	$\delta_{tm}\delta_{st}\delta_{ps}\delta_{mq}\delta_{ln}$
45.	$\begin{vmatrix} \delta_{ik} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jk} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{kk} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix}$	46.	$\begin{vmatrix} \delta_{nk} & \delta_{nm} & \delta_{nn} \\ \delta_{mk} & \delta_{mm} & \delta_{mn} \\ \delta_{kk} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix}$
47.	$\begin{vmatrix} \delta_{is} & \delta_{il} & \delta_{im} \\ \delta_{ps} & \delta_{pl} & \delta_{pm} \\ \delta_{ss} & \delta_{sl} & \delta_{sm} \end{vmatrix}$	48.	$\begin{vmatrix} \delta_{is} & \delta_{ip} & \delta_{im} \\ \delta_{ps} & \delta_{pp} & \delta_{pm} \\ \delta_{ss} & \delta_{sp} & \delta_{sm} \end{vmatrix}$
49.	$\begin{vmatrix} \delta_{is} & \delta_{ip} & \delta_{ii} \\ \delta_{ps} & \delta_{pp} & \delta_{pi} \\ \delta_{ss} & \delta_{sp} & \delta_{si} \end{vmatrix}$	50.	$\begin{vmatrix} \delta_{nj} & \delta_{nk} & \delta_{ns} \\ \delta_{kj} & \delta_{kk} & \delta_{ks} \\ \delta_{lj} & \delta_{lk} & \delta_{ls} \end{vmatrix}$
51.	$\begin{vmatrix} \delta_{nj} & \delta_{nk} & \delta_{nm} \\ \delta_{kj} & \delta_{kk} & \delta_{km} \\ \delta_{lj} & \delta_{lk} & \delta_{lm} \end{vmatrix}$	52.	$\begin{vmatrix} \delta_{jk} & \delta_{jl} & \delta_{jj} \\ \delta_{kk} & \delta_{kl} & \delta_{kj} \\ \delta_{lk} & \delta_{ll} & \delta_{lj} \end{vmatrix}$
53.	$\begin{vmatrix} \delta_{ps} & \delta_{pp} & \delta_{pk} \\ \delta_{ks} & \delta_{kp} & \delta_{kk} \\ \delta_{ss} & \delta_{sp} & \delta_{sk} \end{vmatrix}$	54.	$\begin{vmatrix} \delta_{ps} & \delta_{pl} & \delta_{pk} \\ \delta_{ks} & \delta_{kl} & \delta_{kk} \\ \delta_{ss} & \delta_{sl} & \delta_{sk} \end{vmatrix}$
55.	$\begin{vmatrix} \delta_{ps} & \delta_{pl} & \delta_{pm} \\ \delta_{ks} & \delta_{kl} & \delta_{km} \\ \delta_{ss} & \delta_{sl} & \delta_{sm} \end{vmatrix}$	56.	$\begin{vmatrix} \delta_{js} & \delta_{jp} & \delta_{jk} \\ \delta_{ks} & \delta_{kp} & \delta_{kk} \\ \delta_{ms} & \delta_{mp} & \delta_{mk} \end{vmatrix}$