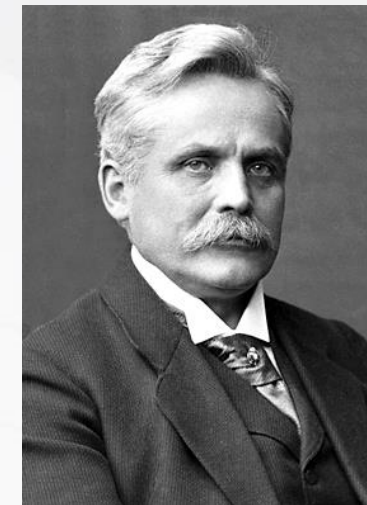




Й. Стефан
1835 - 1893

К последнему десятилетию XIX века, в основном, благодаря развитию теплотехники, электрических технологий, фотографии и др., **изучение излучения**, испускаемого объектом **только за счет его собственной температуры**, стало предметом интенсивных научных исследований. Наличие очень горячих объектов, меняющих цвет при повышении температуры, - явление знакомое многим. Например, твердый железный стержень светится тускло-красным цветом при более низкой температуре, чем когда он светится ярким желтовато-белым цветом при более высокой. Технологической проблемой, с которой столкнулась отрасль электрического освещения на рубеже XX века, была проблема эффективности. Как можно было достичь максимального количества видимого света, излучаемого объектом, используя наименьшее количество энергии? Это был вопрос, ответ на который в конечном итоге зависел от четкого теоретического понимания законов теплового излучения. **Знание тела, которое излучает наибольшее количество энергии по сравнению со всеми другими телами при той же температуре**, стало предметом огромного интереса исследователей и инженеров. Знание характеристик такого тела позволяет ему служить идеальным теоретическим эталоном, с которым можно сравнивать все реальные излучающие тела. Соответствующее понятие, известное как **абсолютно черное тело (АЧТ)**, было впервые представлено в качестве теоретической концепции немецким физиком **Густавом Робертом Кирхгофом в 1860 году**. Прошло еще 40 лет, прежде чем правильное математическое описание излучения, испускаемого АЧТ, было придано окончательной форме **Максом Планком в 1900 году**.



В.Вин
1864-1928



Г. Кирхгофф
1824. – 1887.



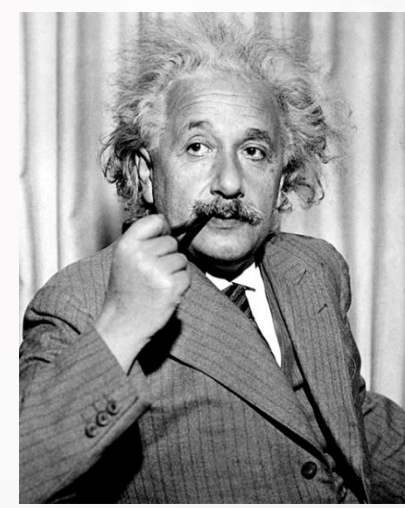
С.Д-У. Релей
1842 -1919



Л. Больцман
1844-1906



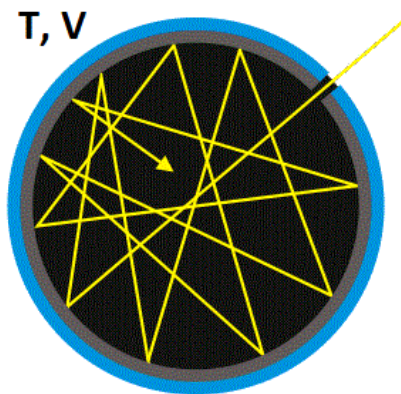
Д.Х.ДЖИНС
1877-1946



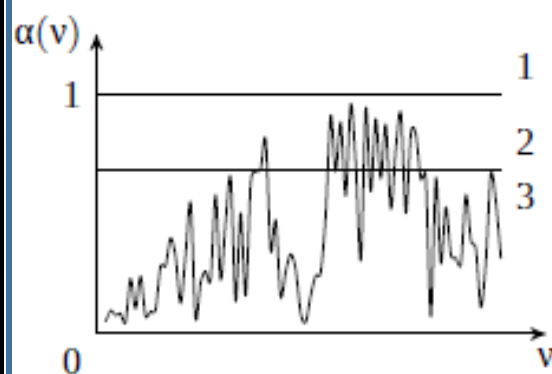
А.Эйнштейн
1879-1955



М.Планк
1858 - 1947

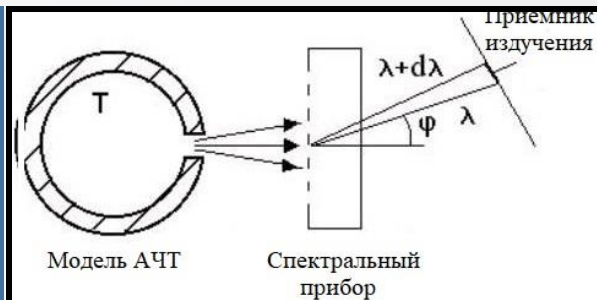


Модель АЧТ



Зависимость поглощательной способности от частоты

- 1) $\alpha(v) = 1$ — АЧТ;
- 2) $\alpha(v) = \text{const} < 1$ — «серое» тело;
- 3) $\alpha(v) = f(v) < 1$ — реальное тело.



Постановка задачи о нахождении универсальной функции АЧТ

Г. Кирхгоф. «Об отношении между испускательной и поглощательной способностями тел для тепла и света». 1860 г.

«АЧТ - тело, которое не отражает и не пропускает, а полностью поглощает всё падающее на него излучение **при всех частотах**».

Применительно к задачам, рассматриваемым в нашем курсе, используется **следующая модель АЧТ**. Рассматривается безграничная сплошная среда, характеризующуюся макроскопическими значениями $T(r, t)$, $P(r, t)$, $p(r, t)$, $C\alpha(r, t)$, $v(r, t)$. Если среда находится в состоянии **полного термодинамического равновесия** (ПТР), то все макроскопические характеристики **постоянны в пространстве и во времени**. Мысленно выделим внутри этой среды **элементарный физический объем (ЭФО)** - объем, характерные размеры которого \ll размера среды (в данном случае ее размер – бесконечность), но обладающий всеми ее макроскопическими характеристиками.

В условиях ПТР процессы излучения, протекающие внутри этого и остальных ЭФО можно описывать в рамках модели АЧТ, т. е. излучение, падающее на ЭФО со стороны соседних ЭФО полностью поглощается и переизлучается таким образом, если этот ЭФО был бы АЧТ при соответствующей температуре, которая в условиях ПТР $T(r, t) = \text{const}$.

«The spectral density of black body radiation . . . Represents something absolute, and since the search for the absolutes has always appeared to me to be the highest form of research, I applied myself vigorously to its solution». (1901)

До М.Планка (Релей-Джинс 1896-1905):

Излучение АЧТ – излучение совокупности частиц – классические гармонические осцилляторы (КГО). Для КГО справедлив классический закон распределения Больцмана:

$$N = N_0 \exp[-\varepsilon_N/kT]$$

Средняя энергия, приходящаяся на один осциллятор: $\bar{E} = \frac{E}{N}$, где E – полная энергия всех КГО; N – полное число КГО. (1/2 kT)!!!

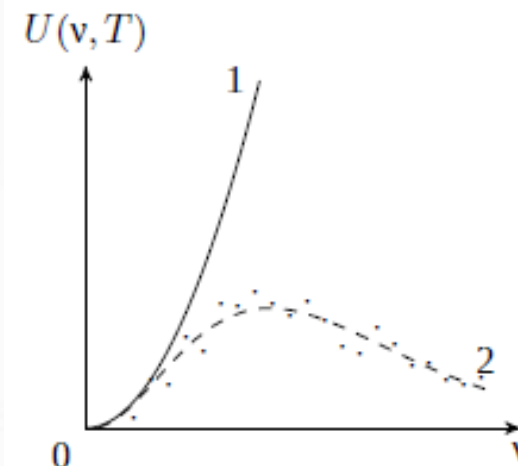


Макс Планк
1858 - 1947

М.Планк и после (1901...)

На рисунке - качественная зависимость $U(\nu, T)$: (1) - формула R-J. 2 — аппроксимация экспериментов с АЧТ. Ультрафиолетовая катастрофа:

$$\int_0^\infty \nu^2 \sim \nu^3 \rightarrow \infty \text{ при } \nu \rightarrow \infty$$



В результате решения чисто классической задачи о колебаниях КГО в замкнутой полости была получена формула для средней полной спектральной плотности энергии излучения системы КГО:

$$U_{R-J}(\nu, T) = \left(\frac{8\pi\nu^2}{c^3} \right) kT - \text{формула Релея-Джинса}$$

Первый сомножитель $\left(\frac{8\pi\nu^2}{c^3} \right)$ - полное число КГО, а второй сомножитель $kT = 1/2kT + 1/2kT$ полная энергия двухстепенного КГО.

В рамках концепции представления поля излучения АЧТ, как излучения системы гармонических осцилляторов (ГО) Планк внес положения, в том числе революционное

1) Система ГО, находящиеся в равновесии при заданной температуре, подчиняется классическому закону Больцмана о распределении числа частиц N , находящихся в энергетическом состоянии ε_N (при $\varepsilon_0 = 0$, $N = N_0$):

$$N = N_0 \exp\left(-\frac{\varepsilon_N}{kT}\right). \quad (1)$$

2) ГО равновесной системы в энергетическом состоянии ε_N излучает только определённую (квантованную) энергию:

$$\varepsilon_N = N h \nu \quad (N = 0, 1, 2, \dots) \quad (2)$$

где $h\nu$ — энергия фотона; h — постоянная величина введённая впервые Планком. (КвГО)

МАКС ПЛАНК

801-96
0026-6

ТЕОРИЯ ТЕПЛОВОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

ПЕРЕВОД С 5-го НЕМЕЦКОГО ИЗДАНИЯ
М. Г. ЧЕРНИХОВСКОГО и С. В. ВОНСОВСКОГО
ПОД РЕДАКЦИЕЙ
М. А. ЕЛЪЯШЕВИЧА

51065

ОНТИ · ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ ОБЩЕТЕХНИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
ЛЕНИНГРАД 1935 МОСКВА

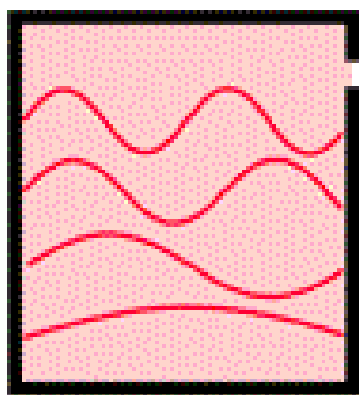


Аннотация

Max Planck. Vorlesungen Ueber die Theorie der Waermestrahlung.

Предлагаемая читателю книга выдающегося немецкого физика Макса Планка (1858–1957) давно уже стала классической. В ней ярко отражен первый период развития квантовой теории, неразрывно связанный с именем Планка. Именно в данной работе наиболее отчетливо выступают характерные для автора продуманность и строгая последовательность изложения. С большой убедительностью показана неизбежность введения квантовых представлений. Книга будет интересна физикам — научным работникам, преподавателям и студентам физических факультетов.

Radiation modes in a hot cavity provide a test of quantum theory

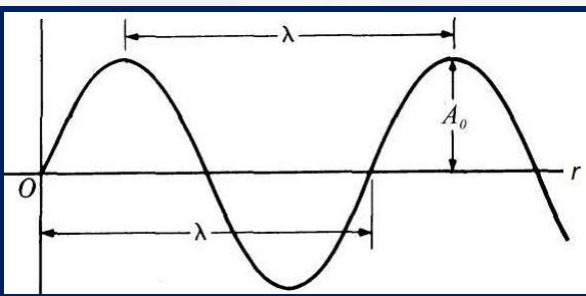


	Modes per unit frequency per unit volume $N_{R-J}(\nu)$	Probability of occupying modes	Average energy per mode \bar{E}
CLASSICAL	$\frac{8\pi\nu^2}{c^3}$	Equal for all modes	kT
QUANTUM	$\frac{8\pi\nu^2}{c^3}$	Quantized modes: require $h\nu$ energy to excite upper modes, less probable	$\frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$

$\frac{dN(\nu)}{d\nu} = N_{R-J}(\nu) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}$ - число независимых мод колебаний стоячих волн с частотой от $(\nu, \nu + d\nu)$ на единицу объема полости АЧТ (коэффициент Релея-Джинса).

\bar{E} - средняя энергия на моду (Классический гармонический осциллятор (КГО) или Квантовый КвГО)

Задача 1. Рассчитать количество энергии излучения $U(\nu)d\nu$, определяемое числом **КГО** $dN(\nu)$ в интервале частот $(\nu, \nu + d\nu)$, в объеме V , при средней энергии одного осциллятора \bar{E} : $U(\nu)d\nu = \frac{dN(\nu)\bar{E}}{V}$, т.е. надо рассчитать $dN(\nu)$ и \bar{E} . Модель Рэля-Джинса: $dN(\nu)$ - равно количеству стоячих электромагнитных волн (ЭМВ) в объеме полости V . Каждая (поперечная) ЭМВ распространяется в определённом направлении (вектор \vec{r}) со скоростью света: синусоида длина волны λ , амплитуда $A(\vec{r}, t)$,



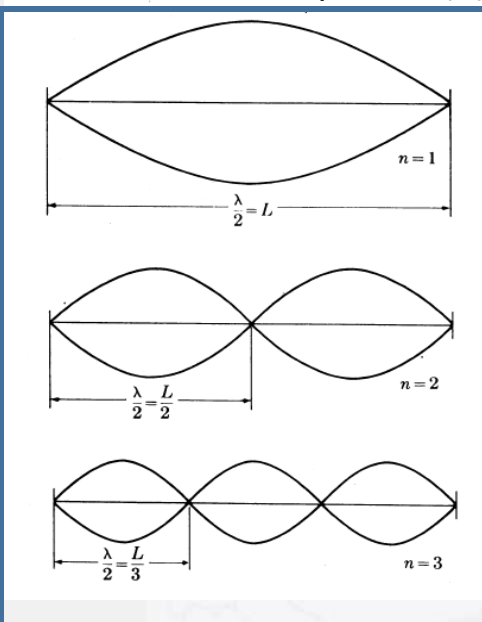
Амплитуда ЭМВ на расстоянии $|\vec{r}| = r$:

$$A(r) = A_0 \sin(\vec{k}\vec{r}) = A_0 \sin(kr) \quad (1),$$

где $|\vec{k}| = \frac{2\pi}{\lambda}$. По истечении времени t :

$$A(r, t) = A_0 \sin(kr') = A_0 \sin(kr - kct) \quad (r = r' + ct) \quad (2).$$

Очевидно, что зависимость амплитуды волны от времени имеет вид $\sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) = \sin(\omega t)$, где $\omega = 2\pi\nu$, а $T = \nu^{-1}$ - период колебаний волны. Таким образом (2): $A(r, t) = A_0 \sin(kr - \omega t) \quad (3)$. $A_{max}(\vec{r}, t) = A_0 \quad (4)$.



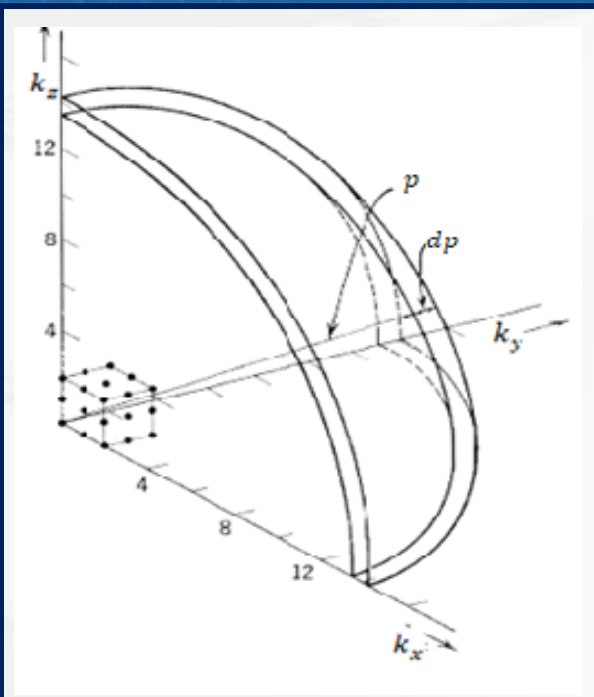
Полость (объем V) – куб (ящик (x, y, z)) со стороной L . На границах (стенки – жесткие) поле ЭМВ равно 0. Т.е. возможны только стоячие волны (колебания ЭМВ),. **кратные** $\frac{1}{2}\lambda$.

В направлениях x, y и z длины волн, которые можно уместить в ящик:

$$\frac{l\lambda_x}{2} = L \quad (5), \quad \frac{m\lambda_y}{2} = L \quad (6) \quad \frac{n\lambda_z}{2} = L \quad (7), \quad \text{где } l, m, n = 1, 2, 3, \dots$$

Амплитуда в направлении x : $A(x) = \sin(k_x x)$, $(k_x = \frac{2\pi}{\lambda_x}$ – составляющая вектора \vec{k} моды ЭМВ в x -направлении).

Поэтому: $k_x = \frac{2\pi l}{2L} = \frac{\pi l}{L} \quad (l = 1, 2, 3, \dots) \quad (8)$. Аналогично: $k_y = \frac{\pi m}{L}; k_z = \frac{\pi n}{L} \quad (m, n = 1, 2, 3, \dots) \quad (9)$



3-х мерная диаграмма с осями k_x, k_y, k_z , показывающая допустимые значения состояний, образующих кубический массив точек, каждая из которых определяется тремя целыми числами l, m и n (k_x (ось l), k_y (ось m), k_z (ось n)).

Волны колеблются в 3-х измерениях, но k_x, k_y и k_z должны быть такими, чтобы они были связаны с одной из точек решетки в k -пространстве. Волна с любым из допустимых значений l, m и n удовлетворяет граничным условиям, поэтому **каждая точка решетки представляет собой возможный режим колебаний, соответствующий граничным условиям.**

Таким образом, в 3-х мерном представлении:

$$A(x, y, z, t) = A_0 \sin(k_x x - \omega t) \sin(k_y y - \omega t) \sin(k_z z - \omega t) \quad (10).$$

Амплитуда $A(x, y, z, t)$ удовлетворяет волновому уравнению:

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} \quad (11).$$

Подставляя (10) в (11), получим: $|\vec{k}|^2 = (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) = \frac{\omega^2}{c^2}$ (12). $k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \frac{\pi^2}{L^2} (l^2 + m^2 + n^2)$ (13) и:

$$\frac{\omega^2}{c^2} = \frac{\pi^2 p^2}{L^2}, \text{ где } p^2 = l^2 + m^2 + n^2 \quad (14) - \text{дисперсионное соотношение } (\omega = 2\pi\nu)$$

Напомним, что мы ищем **полное количество КГО $dN(\nu)$ в интервале частот $(\nu, \nu + d\nu)$ в объеме V** , т.е. необходимо подсчитать соответствующее число мод колебаний. В терминах k_x, k_y, k_z это равносильно вычислению количества точек решетки в интервале k -пространства от k до $k + dk$ (соответствует $\nu, \nu + d\nu$). Т.к. $l > 0, m > 0, n > 0$, рассматриваем только октант (1/8 сферы).

Объем шарового слоя радиуса p и толщины dp $4\pi p^2 dp$, поэтому число точек (мод) в октанте: $dN(p) = N(p) dp = \frac{1}{8} 4\pi p^2 dp$ (15).

$$k = \frac{\pi p}{L} \text{ и } dk = \pi \frac{dp}{L}, \quad dN(p) = \frac{L^3}{2\pi^2} k^2 dk \quad (16). \quad L^3 = V \text{ и } k = \frac{2\pi\nu}{c}. \text{ Т.е.: } dN(p) = \frac{V}{2\pi^2} k^2 dk = \frac{V}{2\pi^2} \frac{8\pi^3 \nu^2}{c^3} d\nu = \frac{4\pi \nu^2 V}{c^3} d\nu \quad (17).$$

Полное число состояний (мод, КГО), соответствующих $(p, p + dp)$ или $(\nu, \nu + d\nu)$ $dN(p) = dN(\nu) = \frac{4\pi\nu^2 V}{c^3} d\nu$ (17).

Для каждого состояния разрешены две независимые моды (поляризации): $dN(\nu) = \frac{8\pi\nu^2 V}{c^3} d\nu$ (18).

На единицу объема: $dN(\nu) = \frac{dN(\nu)}{V} = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} d\nu$ (19). (далее $\frac{dN(\nu)}{d\nu} = N_{R-J}(\nu) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}$ - коэффициент Релея-Джинса)

Напомним, что нас интересует: $U(\nu)d\nu = \frac{dN(\nu)\bar{E}}{V} = dN(\nu)\bar{E}$.

Средняя энергия на моду (на КГО) \bar{E} ?

Энергия одномерного КГО $E(p, q) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2}$ (20), где p и q - соответственно импульс и координата. Равновесное распределение частиц (КГО) по энергиям: $W(E) = A \exp\left(-\frac{E}{kT}\right)$ (21).

$$\bar{E} = \frac{A \iint E(p, q) \exp[-E(p, q)/kT] dp dq}{A \iint \exp[-E(p, q)/kT] dp dq} \quad (22)$$

Пусть: $P = \frac{p}{\sqrt{2m}}$, $Q = q\omega\sqrt{\frac{m}{2}}$. Тогда:

$$\bar{E} = \frac{A \iint (P^2 + Q^2) \exp\left[-\frac{(P^2 + Q^2)}{kT}\right] dP dQ}{A \iint \exp\left[-\frac{(P^2 + Q^2)}{kT}\right] dP dQ} = \frac{\int P^2 \exp(-P^2/kT) dP}{\int \exp(-P^2/kT) dP} + \frac{\int Q^2 \exp(-Q^2/kT) dQ}{\int \exp(-Q^2/kT) dP} \quad (23). \text{ ((23) уметь выводить!)}$$

Интегралы в (23) представляются в виде: $I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n \exp\left(-\frac{x^2}{kT}\right) dx$ (24). В нашем случае $n = 0$ и 2 , т.е. подынтегральная функция в (24) – четная и, следовательно, $I_n = 2 \int_0^{\infty} x^n \exp\left(-\frac{x^2}{kT}\right) dx, n = 0, 2$ (25). Поэтому:

$$\bar{E} = \frac{2I_0 I_2}{I_0^2} = 2 \frac{I_2}{I_0} \quad (26)$$

$$\bar{E} = \frac{2I_0 I_2}{I_0^2} = 2 \frac{I_2}{I_0} \quad (26), \text{ где } I_n = 2 \int_0^\infty x^n \exp\left(-\frac{x^2}{kT}\right) dx, n = 0, 2 \quad (25).$$

$$\Gamma(\xi + 1) = \int_0^\infty t^\xi \exp(-t) dt$$

Для вычисления I_n используем определение **гамма-функции**: $\Gamma\left(\frac{\xi+1}{2}\right) = 2\alpha^{\frac{\xi+1}{2}} \int_0^\infty t^\xi \exp(-\alpha t^2) dt \quad (27)$. В нашем случае

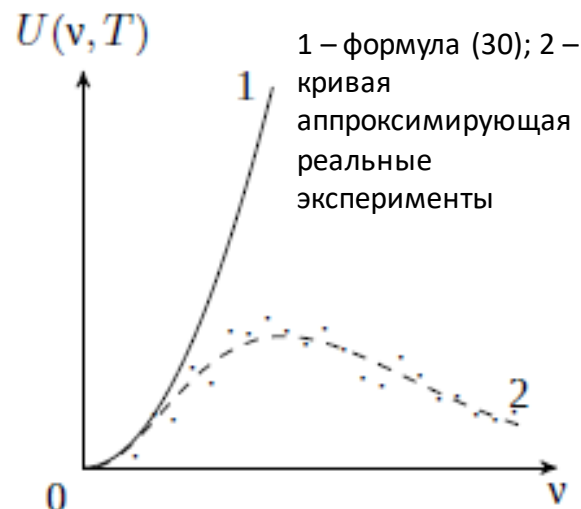
$$(\alpha = (kT)^{-1}). \text{ Т.е. } I_n = \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) (kT)^{\frac{n+1}{2}} \quad (28). \text{ Из (26): } \bar{E} = 2 \frac{I_2}{I_0} = 2 \frac{\Gamma(\frac{3}{2})(kT)^{\frac{3}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2})(kT)^{\frac{1}{2}}} = 2 \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\pi}} kT = kT \quad (29). \text{ Поэтому:}$$

$$U(\nu) d\nu = \frac{dN(\nu) \bar{E}}{V} = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} d\nu \bar{E} = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} kT d\nu \quad (30) - \text{формула (закон) Рэля-Джинса. ПЛОХАЯ НОВОСТЬ!}$$

$$U(T) = \int_0^\infty U(\nu, T) d\nu = \int_0^\infty \frac{8\pi\nu^2}{c^3} kT d\nu = \frac{8\pi}{c^3} kT \int_0^\infty \nu^2 d\nu \rightarrow \infty \quad (31).$$

Интегральная по спектру плотность энергии излучения АЧТ расходится на высоких частотах. **УЛЬТРАФИОЛЕТОВАЯ КАТАСТРОФА!!!**

Задача 2. Рассчитать количество энергии излучения $U(\nu) d\nu$, определяемое числом **КвГО $dN(\nu)$ в интервале частот $(\nu, \nu + d\nu)$, в объеме V , при средней энергии одного осциллятора \bar{E}**



Модель М.Планка (основные постулаты)

- 1) Система КвГо, находящаяся в полости АЧТ при заданной температуре в равновесии, подчиняется классическому закону Больцмана о распределении числа частиц N , находящихся в энергетическом состоянии

$$E_N (E_0 = 0, N = N_0): N = N_0 \exp\left(-\frac{E_N}{kT}\right) \quad (1)$$

- 2) КвГо с энергией E_N излучает только определенную (квантованную) энергию:

$$E_N = N h \nu \quad (2), N = 0, 1, 2, \dots \quad (2) \quad (h - \text{новая фундаментальная константа, введенная М. Планком})$$

- 3) Число КвГо (число состояний) в равновесной системе такое же, как число КГО в классической модели Рэля-

$$\text{Джинса: } \frac{dN(\nu)}{d\nu} = N_{R-J}(\nu) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \quad (2').$$

Вследствие допущения о квантовании энергии (формула (2) на предыдущем слайде) вводится понятие **квантовый гармонический осциллятор** (КвГО). Далее также, как и Релей –Джинс, М. Планк рассчитал среднюю энергию излучения, приходящуюся на каждый КвГО: $E_{Pl} = E/N$, где E — полная энергия системы КвГО, а N — полное число КвГО. Поэтому имеем формулы (3), (4) и (5).

$$N = N_0 + N_0 e^{-\frac{h\nu}{kT}} + N_0 e^{-\frac{2h\nu}{kT}} + \dots =$$

$$= N_0 \left[1 + e^{-\frac{h\nu}{kT}} + \left(e^{-\frac{h\nu}{kT}} \right)^2 + \dots \right] = N_0 \left(1 - e^{-\frac{h\nu}{kT}} \right)^{-1} \quad (3)$$

$$E = N_0 \cdot 0 + h\nu e^{-\frac{h\nu}{kT}} + 2h\nu e^{-\frac{2h\nu}{kT}} + \dots =$$

$$= h\nu N_0 e^{-\frac{h\nu}{kT}} \left[1 + 2e^{-\frac{h\nu}{kT}} + 3 \left(e^{-\frac{h\nu}{kT}} \right)^2 + \dots \right] =$$

$$= N_0 e^{-\frac{h\nu}{kT}} h\nu \left(1 - e^{-\frac{h\nu}{kT}} \right)^{-2} \quad (4)$$

Следовательно:

$$\bar{E}_{Pl}(\nu) = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \quad (5)$$

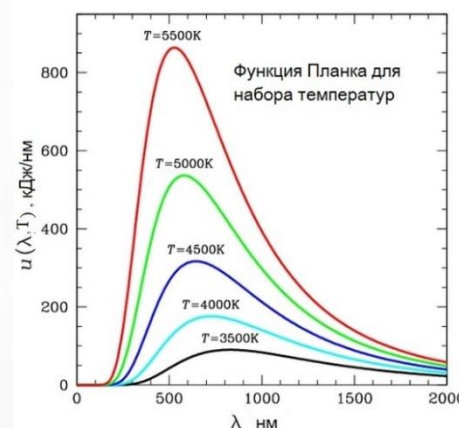
Полная спектральная плотность энергии излучения АЧТ (7) - энергия фотонов, излучаемая ЭФО АЧТ в элементарном диапазоне частот в сферу $(\nu, \nu + d\nu)$ вокруг себя: в телесный угол 4π

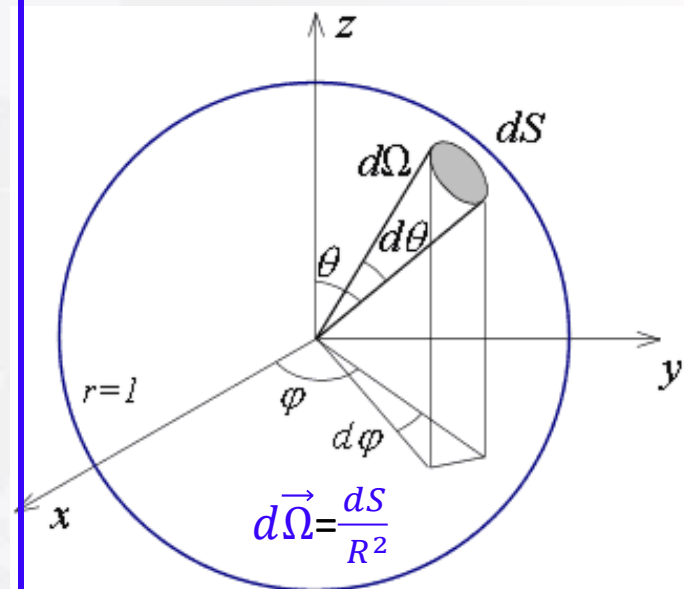
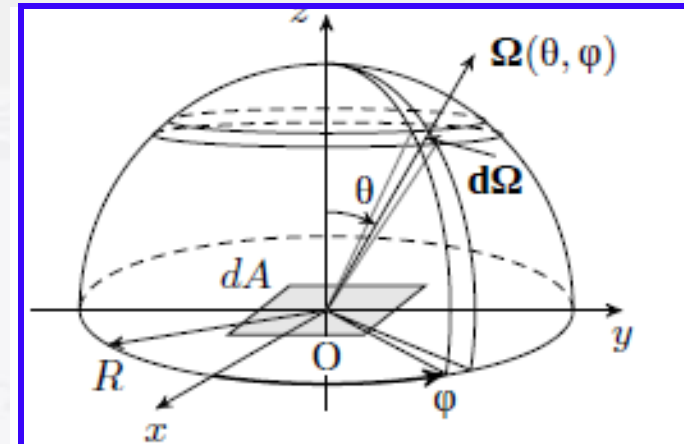
М. Планк предположил, что **полная спектральная плотность энергии равновесного излучения** в рамках предложенной им модели КвГО должна рассчитываться по формуле:

$$U_{Pl}(\nu, T) = N_{R-J}(\nu) \bar{E}_{Pl}(\nu), \quad (6)$$

где $N_{R-J}(\nu) = 8\pi\nu^2/c^3$ — коэффициент в формуле Релея-Джинса. Поэтому (6) примет вид:

$$U_{Pl}(\nu, T) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \quad (7)$$





Спектральная интенсивность излучения АЧТ- поток энергии, излучаемый проекцией элементарной площадки dA (АЧТ при температуре T), перпендикулярной направлению (вектор $\vec{\Omega}(\varphi, \theta)$) в элементарном телесном угле $d\vec{\Omega}$ около $\vec{\Omega}$ в единицу времени в диапазоне частот $(\nu, \nu + d\nu)$ (длин волн $\lambda, \lambda + d\lambda$).

$$B(\nu, T)d\nu \text{ или } B(\lambda, T)d\lambda$$

$$B(\nu, T) = \frac{U_{Pl}(\nu, T)}{4\pi} \cdot c = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \quad (8)$$

Используя энергетическое соотношение:

$$U_{Pl}(\nu, T) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \quad (7)$$

$$B(\lambda, T) d\lambda = B(\nu, T) d\nu \quad (9)$$

и связь $\lambda = c/\nu$ ($d\lambda = -(c/\nu^2) d\nu$), получим формулу для спектральной интенсивности излучения АЧТ в терминах длины волны λ :

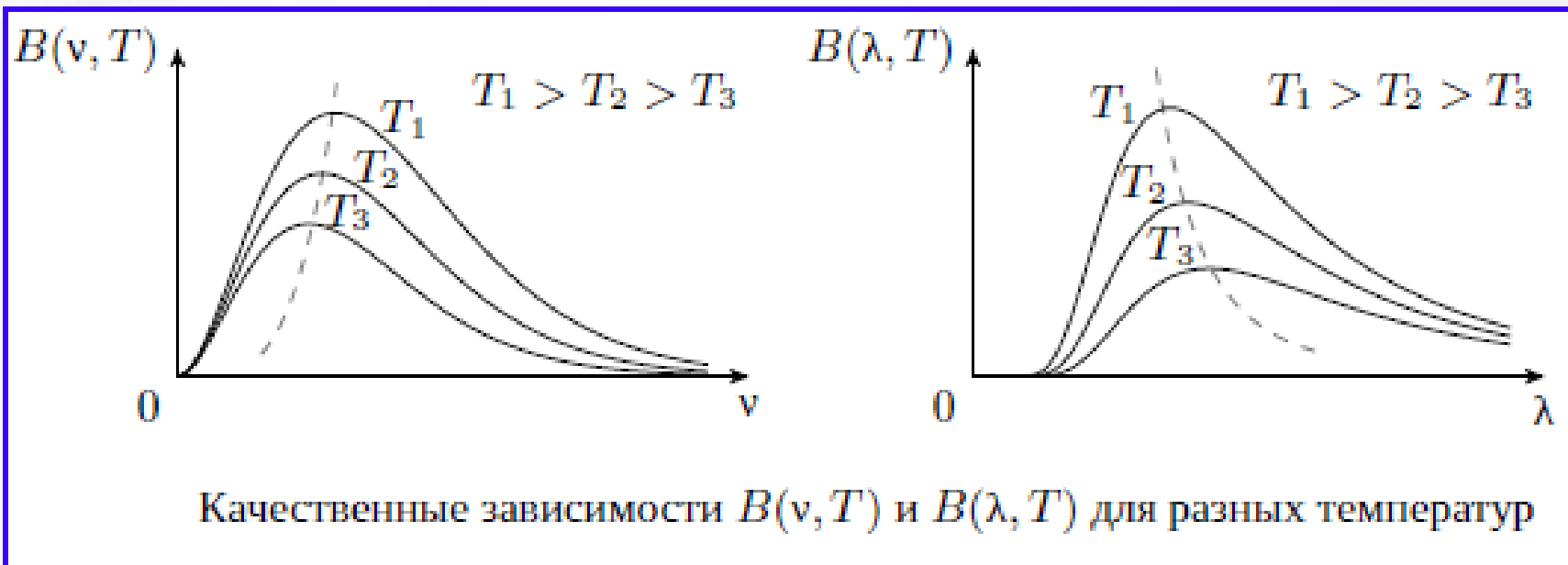
$$B(\lambda, T) = B\left(\frac{c}{\lambda}\right) \frac{d\nu}{d\lambda} = -\frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1} = \frac{2c_1}{\lambda^5 \left(e^{\frac{c_2}{\lambda T}} - 1\right)} \quad (10)$$

где $c_1 = hc^2$, $c_2 = hc/k$.

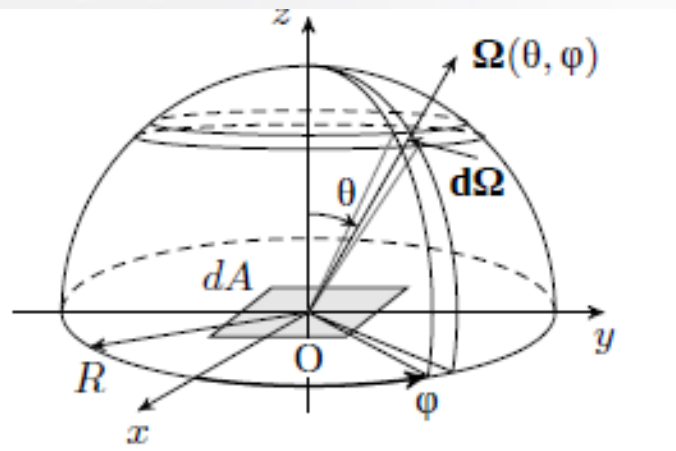
Элементарный телесный угол

$$d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$$

24.09.2024



Упражнение на усвоение понятия спектральной интенсивности излучения АЧТ. Рассчитать энергию, излучаемую элементарной площадкой АЧТ dA в верхнюю полусферу $q^\uparrow(\lambda)$. Элементарный телесный угол:



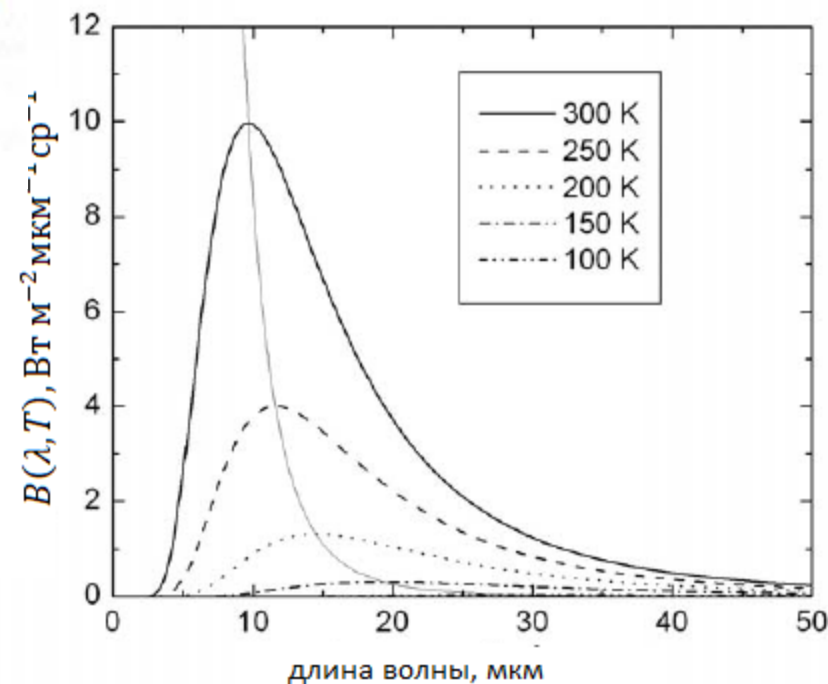
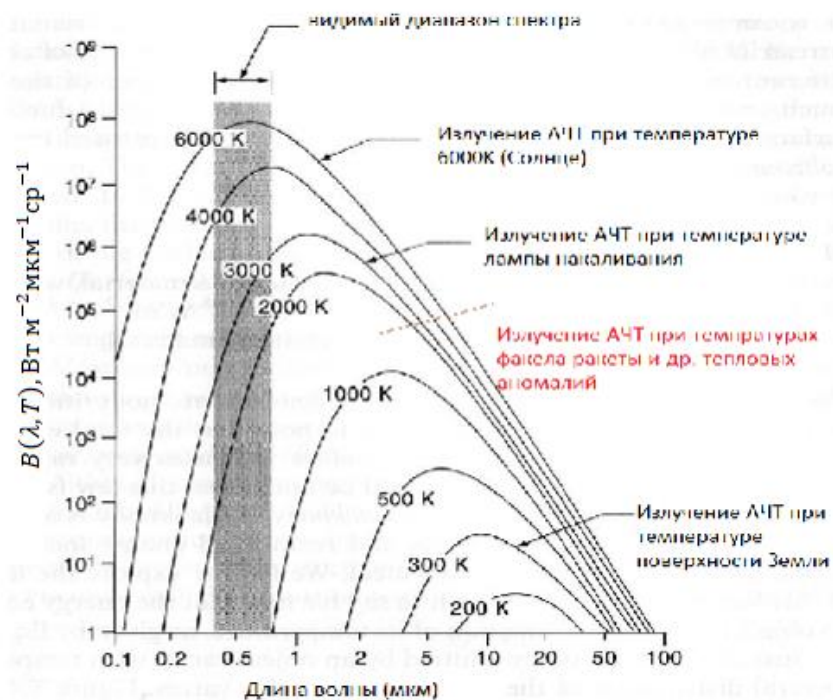
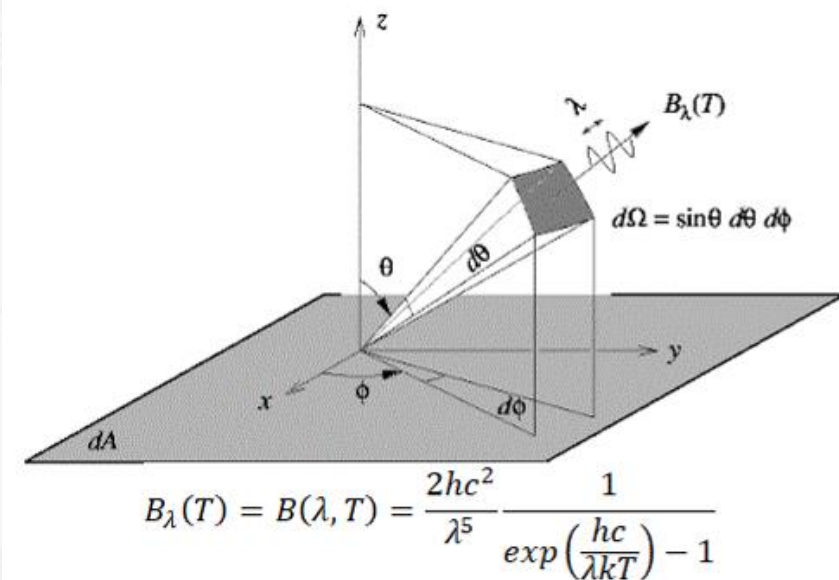
$$d\Omega = \frac{(R d\theta)(R \sin \theta d\varphi)}{R^2} = \sin \theta d\theta d\varphi,$$

$$q^\uparrow(\lambda) = q_\odot = \int_{(+2\pi)} B(\lambda, T) \sin \theta \cos \theta d\theta d\varphi =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} B(\lambda, T) \sin \theta \cos \theta d\theta d\varphi = \pi B(\lambda, T).$$

СПЕКТРАЛЬНАЯ ИНТЕНСИВНОСТЬ ИЗЛУЧЕНИЯ АЧТ (3)

Спектральная интенсивность излучения АЧТ



Спектральная интенсивность излучения АЧТ- поток энергии, излучаемый проекцией элементарной площадки dA (АЧТ при температуре T), перпендикулярной направлению (вектор $\vec{n}(\varphi, \theta)$) в элементарном телесном угле $d\vec{n}$ около \vec{n} в единицу времени в диапазоне частот $(\nu, \nu + d\nu)$ (длин волн $\lambda, \lambda + d\lambda$).
Размерность $B(\lambda, T)$ — Вт м⁻² мкм⁻¹ ср⁻¹

$\frac{\partial B(\lambda, T)}{\partial \lambda} = 0$. В формуле $B(\lambda, T) = \frac{2c_1}{\lambda^5 [\exp \frac{c_2}{\lambda T} - 1]}$ сделаем замену $x = \frac{c_2}{\lambda T}$. В результате получим

$$B(x) = \frac{2c_1}{c_2^5} T^5 x^5 (e^x - 1)^{-1}.$$

Далее из $\frac{dB(x)}{dx} = 0$ получим трансцендентное уравнение

$$5(e^x - 1) - x e^x = 0,$$

решение которого методом последовательных приближений ($x_0 = 5$; $x_1 = 4,966$; $x_2 = 4,965$; ...) приводит к следующему результату:

$$\lambda_{\max} \cdot T \approx 2,898 \cdot 10^3 \text{ мкм} \cdot \text{К}. \quad (11)$$

$\frac{\partial B(\nu, T)}{\partial \lambda} = 0$. В формуле

$$B(\nu, T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} (\exp h\nu/kT)^{-1} \text{ замена } x = \frac{h\nu}{kT}.$$

Из $\frac{\partial B(x, T)}{\partial x} = 0$ имеем трансцендентное уравнение::

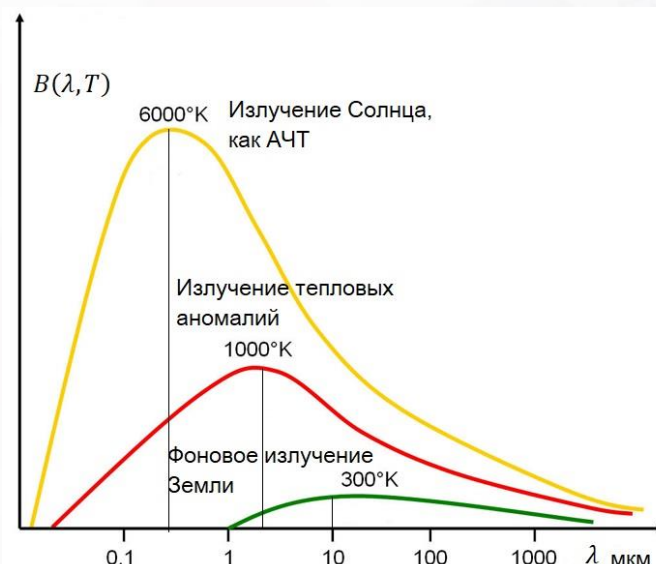
$$x = 3[1 - \exp(-x)].$$

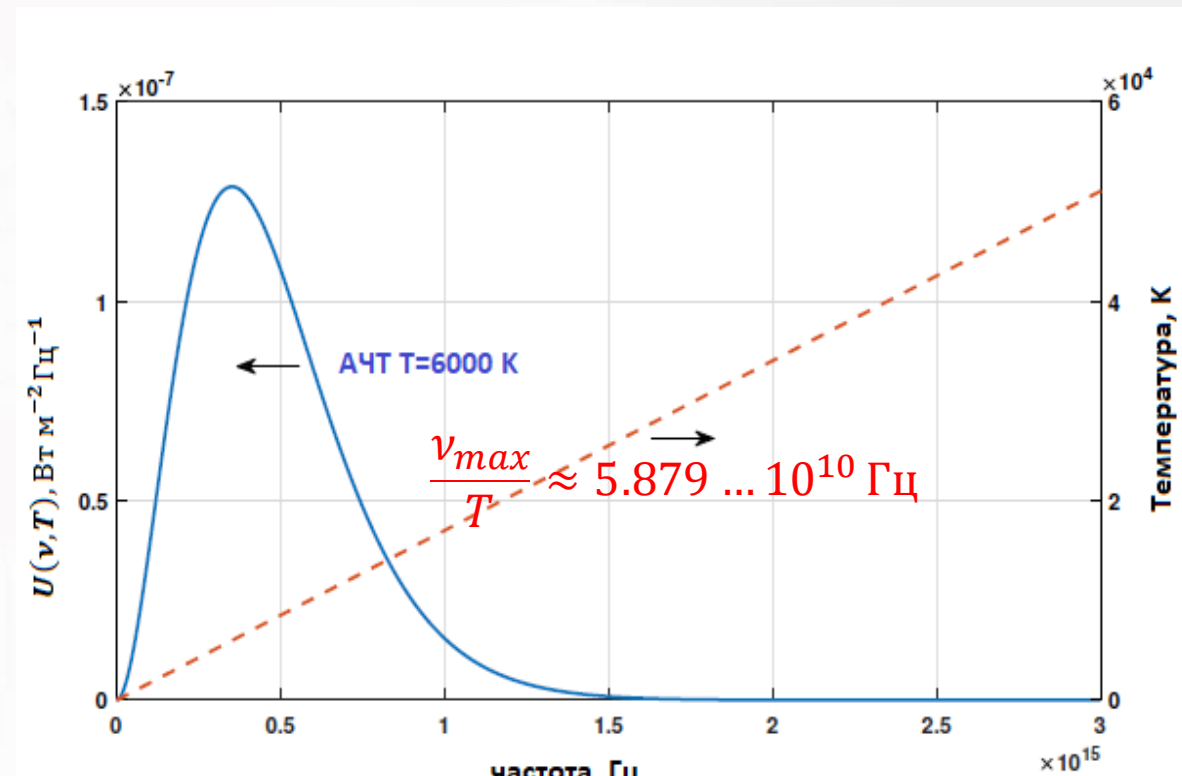
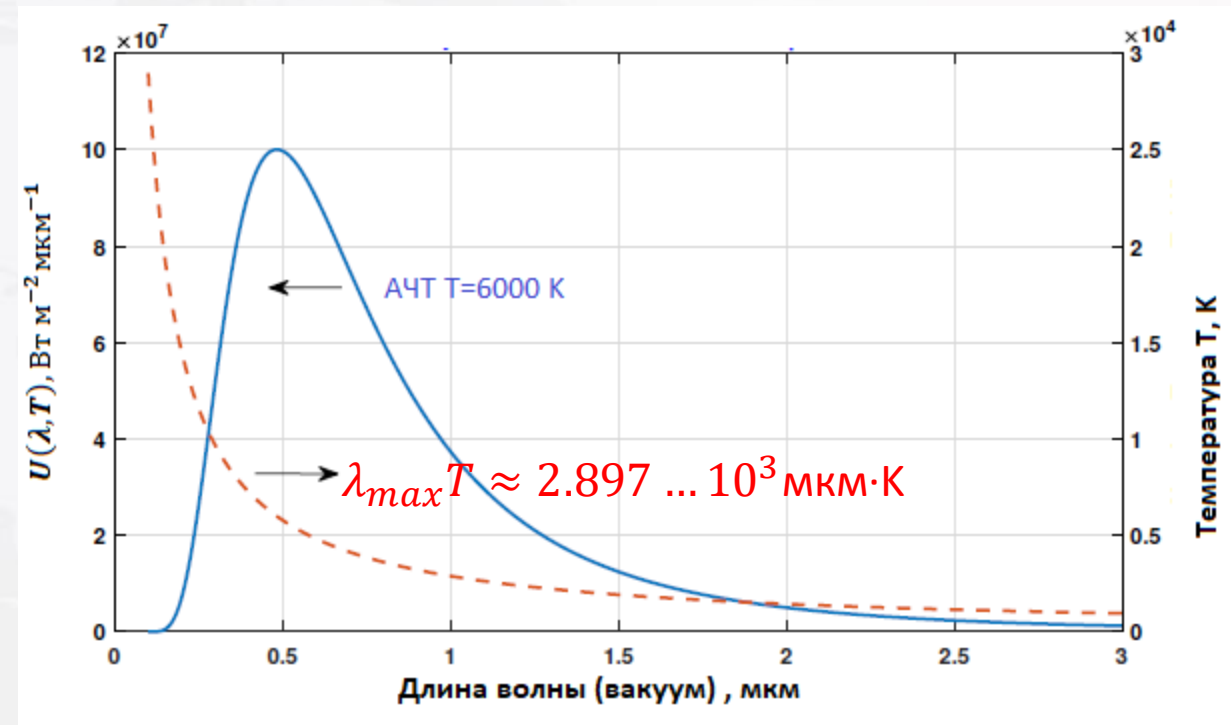
Приближенное решение:

$$x = \frac{h\nu}{kT} \approx 2,821, \quad (12)$$

$$\text{Т.е. } \nu_{\max} \approx 5,879 \dots 10^{10} \cdot T \text{ Гц}$$

- 1) $T_{\odot} \approx 5686 \text{ К}$, $\lambda_{\max} \approx 0,5 \text{ мкм}$ — длина волны, соответствующая максимуму излучения АЧТ моделирующего Солнце.
- 2) $T_f \approx 1000 \text{ К}$, $\lambda_{\max} \approx 3 \text{ мкм}$ — длина волны, соответствующая максимуму излучения АЧТ, моделирующего тепловую аномалию типа лесного пожара, извержения вулкана, факела ракетного двигателя
- 3) $T_{\oplus} \approx 300 \text{ К}$, $\lambda_{\max} \approx 10 \text{ мкм}$ — АЧТ, моделирующее фоновую обстановку на поверхности Земли и в приземном слое атмосферы.





$$B(\nu, T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \quad (8) \quad B(\lambda, T) = \frac{2c_1}{\lambda^5 \left(e^{\frac{c_2}{\lambda T}} - 1 \right)} \quad (10)$$

Важными следствиями основного закона излучения АЧТ, описываемого формулами Планка (8) и (10), являются приближённые соотношения, получаемые, как асимптотики, соответствующие двум предельным случаям: $\frac{h\nu}{kT} \ll 1$ и $\frac{h\nu}{kT} \gg 1$.

В первом случае, учитывая, что $e^{\frac{h\nu}{kT}} \approx 1 + \frac{h\nu}{kT} + \dots$ из (8) и (10) получим, соответственно, соотношения:

$$B_{R-J}(\nu, T) \approx \frac{2\nu^2}{c^2} kT \quad (11)$$

$$B_{R-J}(\lambda, T) \approx \frac{2c_1}{c_2} \lambda^{-4} T \quad (12)$$

Закон Релея-Джинса

Законы Релея – Джинса и Вина дают погрешность в пределах 1% соответственно при значениях $\lambda T > 7,8 \cdot 10^5 \text{ мкм} \cdot \text{К}$ и $\lambda T < 3 \cdot 10^3 \text{ мкм} \cdot \text{К}$.

Во втором случае,

$$\frac{h\nu}{kT} \gg 1 \quad (\lambda T \ll c_2), \quad e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1 \approx e^{\frac{h\nu}{kT}}$$

и поэтому:

$$B_W(\nu, T) \approx \frac{2h\nu^3}{c^2} e^{-h\nu/kT} \quad (13)$$

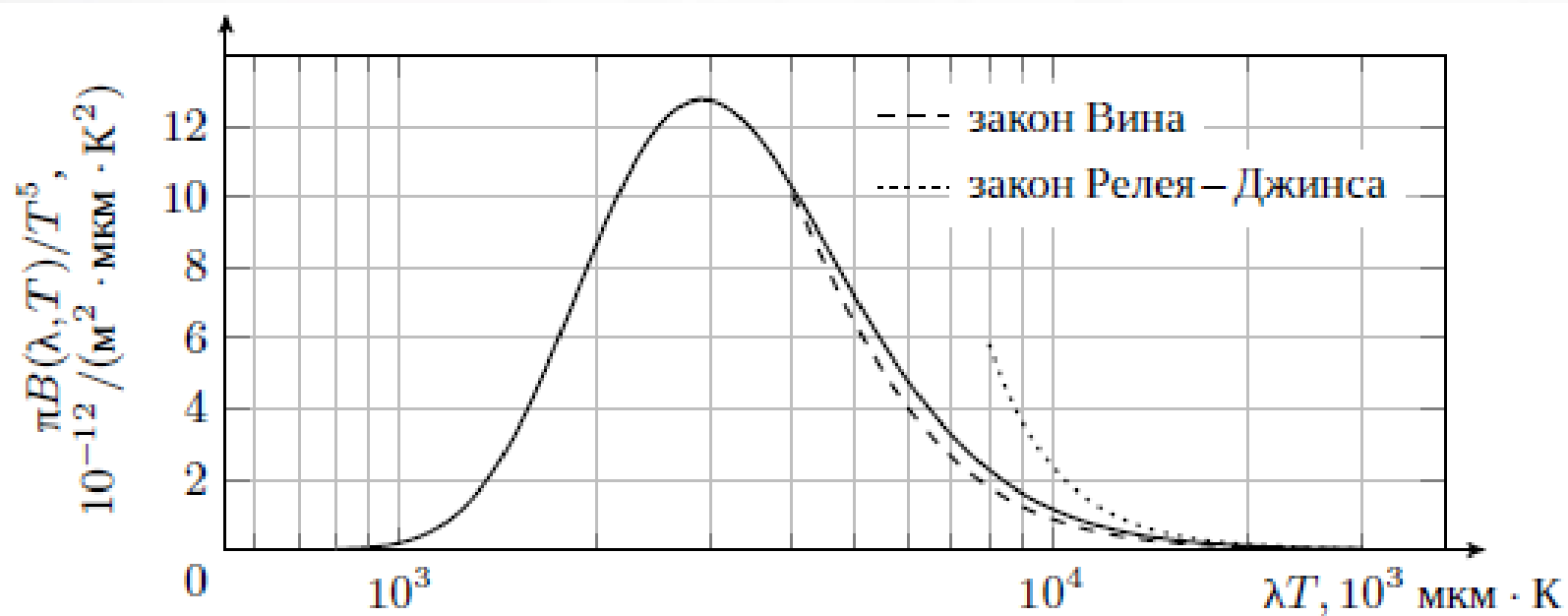
$$B_W(\lambda, T) \approx 2c_1 \lambda^{-5} e^{-c_2/\lambda T} \quad (14)$$

Закон Вина (Wien).

$$B(\lambda, T) = \frac{2c_1}{\lambda^5 \left(e^{\frac{c_2}{\lambda T}} - 1 \right)} \quad (10)$$

$$\frac{B(\lambda, T)}{T^5} = \frac{2 c_1}{(\lambda T)^5 \left(e^{c_2/kT} - 1 \right)} \quad (11)$$

$$q_{\odot}(\lambda \cdot T) = \pi \frac{B(\lambda, T)}{T^5}.$$



Полусферическая спектральная поверхностная плотность потока излучения АЧТ, как универсальная функция $\lambda \cdot T$

$$B(T) = \int_0^{\infty} B(\lambda, T) d\lambda = \int_0^{\infty} \frac{C_1}{\lambda^5 [\exp(\frac{C_2}{\lambda T}) - 1]} d\lambda \quad (1),$$

В (1) замена $x = \frac{C_2}{\lambda T}$, ($d\lambda = -\frac{C_2}{Tx^2} dx$).

$$B(T) = C_1 \left(\frac{T}{C_2} \right)^4 \int_0^{\infty} \frac{x^3}{[\exp x - 1]} dx \quad (2)$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^3}{\exp x - 1} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \left[\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{x^3}{\exp x - 1} dx \right] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \left[\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{x^3 \exp(-x)}{1 - \exp(-x)} dx \right] \quad (3). \text{ Пусть } \exp(-x) = z. \frac{\exp(-x)}{(1 - \exp(-x))} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{n+1} \quad (4)$$

$$\text{Таким образом, } \frac{x^3 \exp(-x)}{(1 - \exp(-x))} = x^3 \sum_{n=0}^{\infty} \exp[-x(n+1)] \quad (5).$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \left[\int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{x^3 \exp(-x)}{(1 - \exp(-x))} dx \right] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \left[\int_{\varepsilon}^{\infty} x^3 \sum_{n=0}^{\infty} \exp[-x(n+1)] dx \right] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_{\varepsilon}^{\infty} x^3 \exp[-x(n+1)] dx \right) \right] = J \quad (6)$$

В (6) замена $(n+1)x = t$.

$$J = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_{(n+1)\varepsilon}^{\infty} \frac{t^3}{(n+1)^4} \exp[-t] dt \right) \right] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{(n+1)^4} \int_{(n+1)\varepsilon}^{\infty} t^3 \exp[-t] dt \right) \right] \quad (7)$$

$$J = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_{(n+1)\varepsilon}^{\infty} \frac{t^3}{(n+1)^4} \exp[-t] dt \right) \right] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{(n+1)^4} \int_{(n+1)\varepsilon}^{\infty} t^3 \exp[-t] dt \right) \right] \quad (7)$$

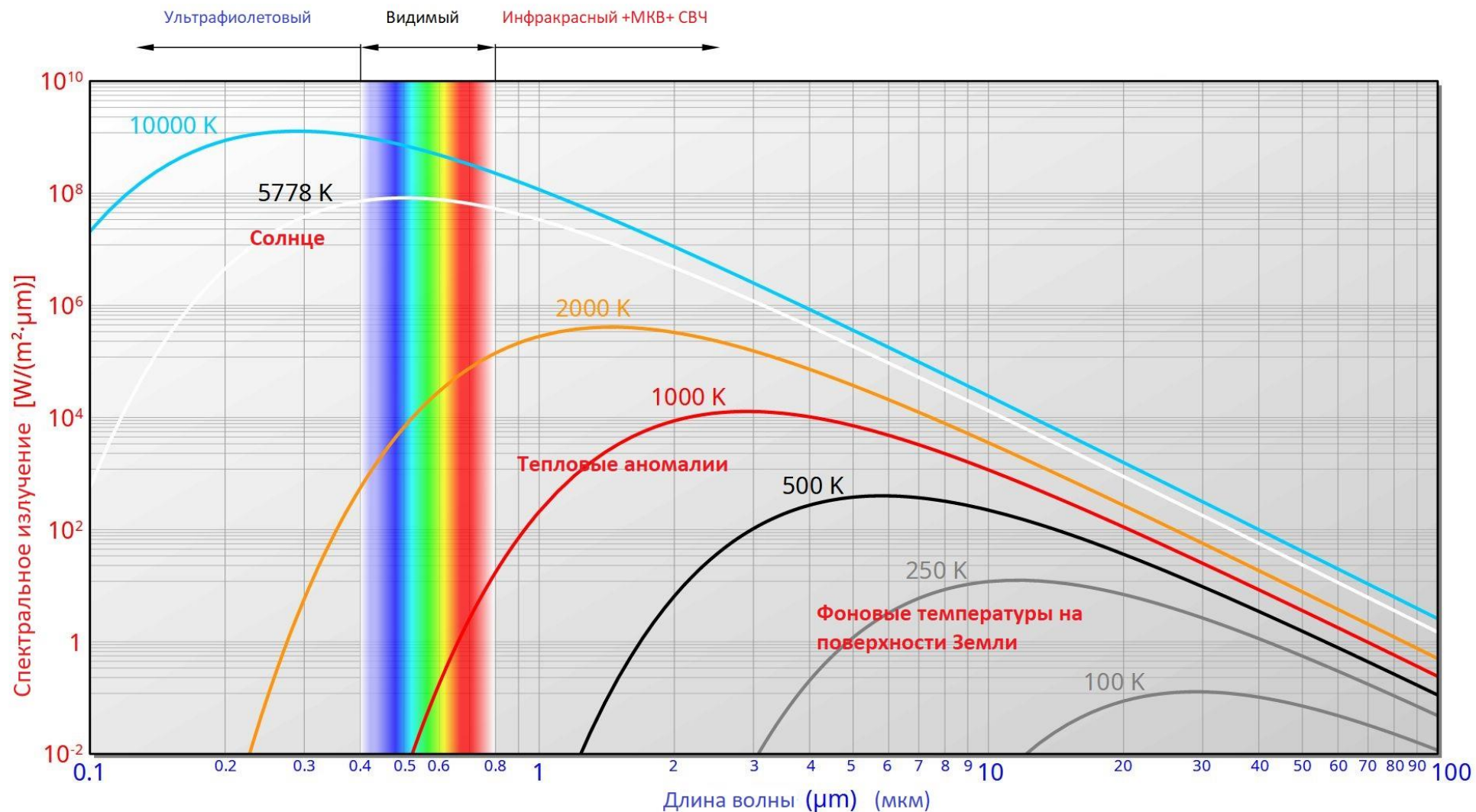
В (7) ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{(n+1)^4} \right)$ сходится, а каждый из интегралов $f_n(\varepsilon) = \int_{(n+1)\varepsilon}^{\infty} t^3 \exp[-t] dt$ ограничен при $\varepsilon \rightarrow 0$ значением гамма-функции Эйлера $\Gamma(s) = \int_{\varepsilon=0}^{\infty} t^{s-1} \exp[-t] dt$. При $s=4$ $\Gamma(4) = 3! = 6$.

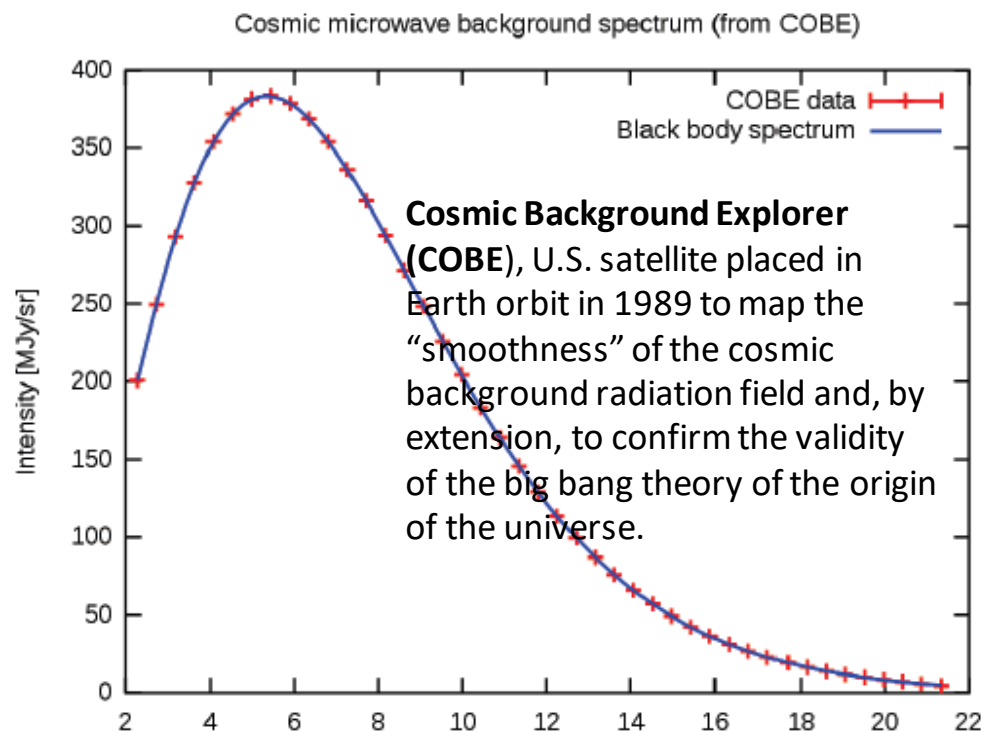
Поэтому (7) примет вид:

$$J = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^4} \left(\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{(n+1)\varepsilon}^{\infty} t^3 \exp[-t] dt \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^4} \Gamma(4) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^4} 6 = \frac{\pi^4}{90} 6 = \frac{\pi^4}{15}.$$

Искомая функция (2): $B(T) = C_1 \left(\frac{T}{C_2} \right)^4 \int_0^{\infty} \frac{x^3}{[\exp x - 1]} dx = \frac{\sigma}{\pi} T^4,$

где $\sigma = \frac{2C_1 \pi^5}{C_2^4 15} = 5,67 \dots 10^{-8} \text{ Вт м}^{-2} \text{ К}^{-4}$ – постоянная Стефана – Больцмана

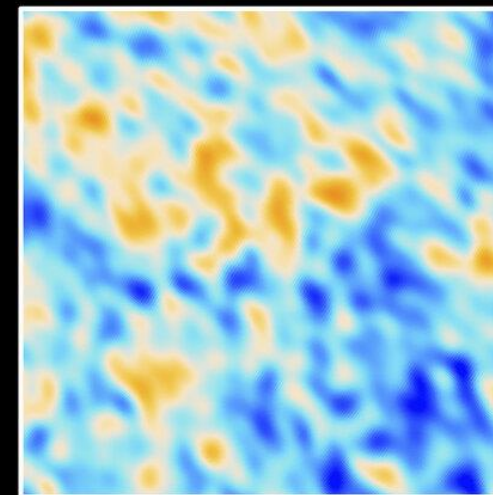
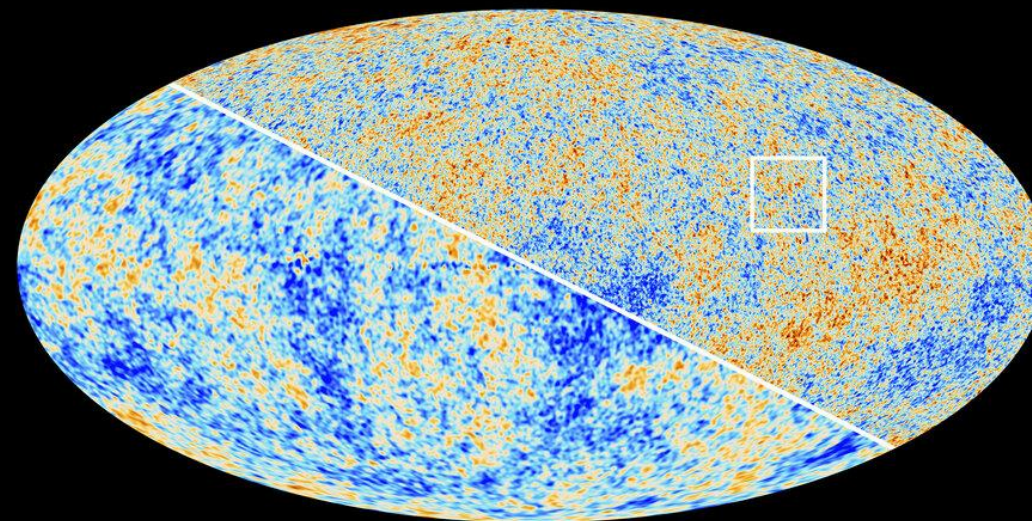




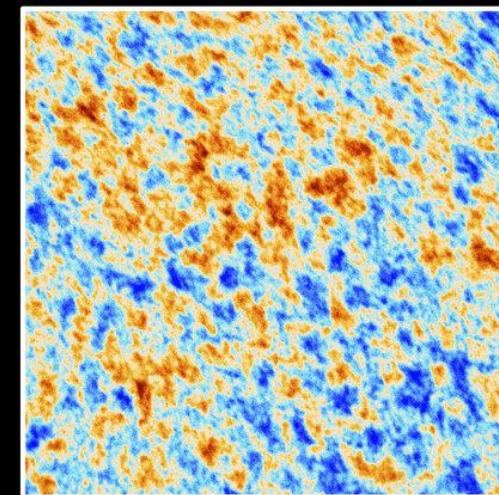
The cosmic microwave background radiation spectrum measured by the FIRAS (Far-InfraRed Absolute Spectrophotometer) instrument on the COBE satellite. This is the most precisely measured blackbody spectrum in nature. The crosses are the measurement points and the continue line is the blackbody radiation theoretical curve for $T = 2.725$ K. The intensity is measured in MJy/sr where $1\text{MJy} = 10^6\text{Jy}$ and $1\text{Jy} = 1\text{Jansky} = 10^{-26}\text{W/m}^2/\text{Hz}$.

24.09.2024

The Cosmic Microwave Background as seen by Planck and WMAP



WMAP



Planck