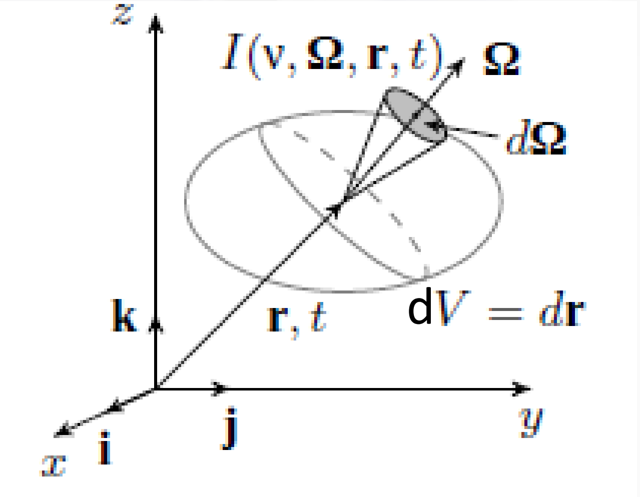
УРАВНЕНИЕ ПЕРЕНОСА ЛУЧИСТОЙ ЭНЕРГИИ ДЛЯ ИЗЛУЧАЮЩЕЙ, ПОГЛОЩАЮЩЕЙ И РАССЕИВАЮЩЕЙ СРЕДЫ (1)

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho\xi\, dV = A_V + A_S$$



(1) Уравнение материального баланса скалярной макроскопической характеристики среды ξ. A_V и A_s -совокупность объемных и поверхностных факторов, приводящих к изменению ξ в ЭФО.

Пусть ξ – спектральная направленная плотность излучения: $\xi = U(\nu, \mathbf{\Omega}, \mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} I(\nu, \mathbf{\Omega}, \mathbf{r}, t)$.

Уравнение (1): $\left[\frac{1}{C}\int_V \frac{\partial}{\partial t} I(\nu,\vec{\Omega},\vec{r},t)d\vec{r}\right] d\nu d\vec{\Omega} = A_V(\nu,\vec{\Omega},\vec{r},t) + A_S'(\nu,\vec{\Omega},\vec{r},t)$ (2)

где: $A_V(\nu,\vec{\Omega},\vec{r},t) = \left[\int_V a(\nu,\vec{\Omega},\vec{r},t)d\vec{r}\right] d\nu d\vec{\Omega}$ (3) - объемные факторы, приводящие к изменению $U(\nu,\vec{\Omega},\vec{r},t)$. Поверхностные факторы:

$$A_S'(\nu,\vec{\Omega},\vec{r},t) = \left\{-\left[\oint_S \frac{1}{C} I(\nu,\vec{\Omega},\vec{r},t)\vec{v}_f d\vec{S}\right] + \oint_S A_{0s}(\nu,\vec{\Omega},\vec{r},t)\, d\vec{S}\right\} d\nu d\vec{\Omega} \quad (4)$$

$A_{0s}(\nu,\vec{\Omega},\vec{r},t)$ – "фотонные" поверхностные факторы ("давление" и "трение" света – $A_{0s}(\nu,\vec{\Omega},\vec{r},t) \approx 0$.)

Поэтому (2): $$\frac{1}{C}\int_V \frac{\partial}{\partial t} I(\nu,\vec{\Omega},\vec{r},t)d\vec{r} + \int_V div[I(\nu,\vec{\Omega},\vec{r},t)\vec{\Omega}]d\vec{r} = \int_V a(\nu,\vec{\Omega},\vec{r},t)d\vec{r} \quad (5)$$

$$\boxed{\frac{1}{C}\frac{\partial}{\partial t} I(\nu,\vec{\Omega},\vec{r},t) + div[I(\nu,\vec{\Omega},\vec{r},t)\vec{\Omega}] = a(\nu,\vec{\Omega},\vec{r},t) \quad (6)}$$

УРАВНЕНИЕ ПЕРЕНОСА ЛУЧИСТОЙ ЭНЕРГИИ ДЛЯ ИЗЛУЧАЮЩЕЙ, ПОГЛОЩАЮЩЕЙ И РАССЕИВАЮЩЕЙ СРЕДЫ (2)

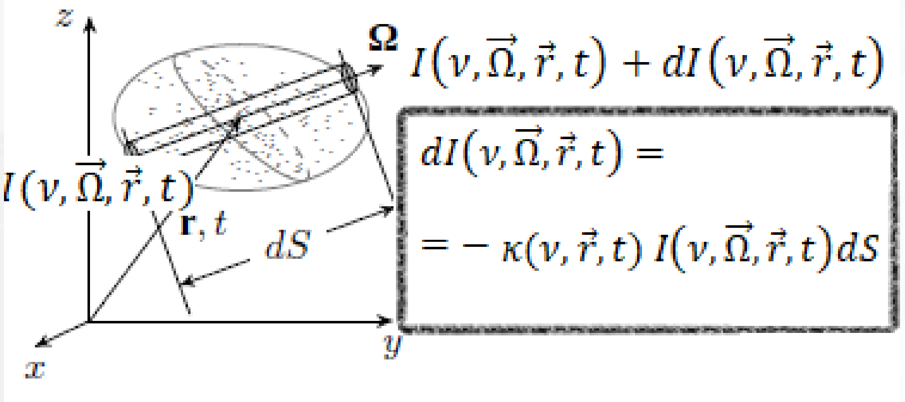
$$\frac{1}{c}\frac{\partial I(\mathbf{v},\mathbf{\Omega},\mathbf{r},t)}{\partial t}+\operatorname{div}\left[\mathbf{\Omega}\cdot I(\mathbf{v},\mathbf{\Omega},\mathbf{r},t)\right]=a(\mathbf{v},\mathbf{\Omega},\mathbf{r},t). \quad (6)$$

В (6) $a(\nu,\vec{\Omega},\vec{r},t)$ –удельный объемный фактор: Место для уравнения.

взаимодействие фотонов с энергиями от *hv* до *h(v + dv)* с частицами, содержащимися в ЭФО: **поглощение** (A)**,**

излучение (E) **и рассеяние** (S)**:** $$\boldsymbol{a(\nu,\vec{\Omega},\vec{r},t)=A(\nu,\vec{\Omega},\vec{r},t)+E(\nu,\vec{\Omega},\vec{r},t)+S(\nu,\vec{\Omega},\vec{r},t)} \quad (7)$$

1) Поглощение $A(\nu,\vec{\Omega},\vec{r},t)$

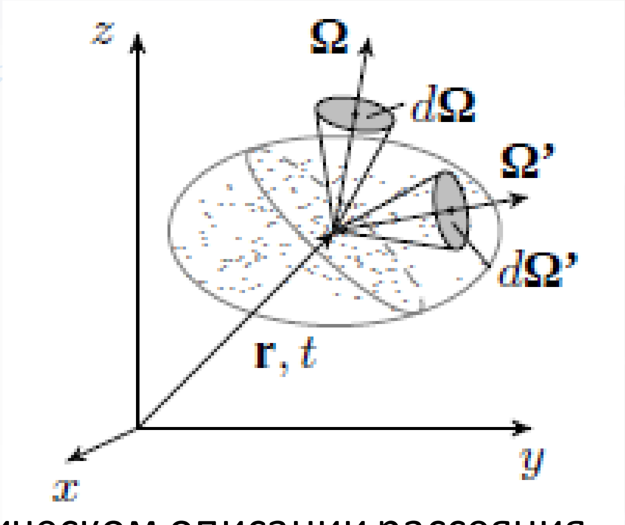


На «входе» в ЭФО - поток энергии *I(v,* $\mathbf{\Omega}$, $\mathbf{r}$, *t)*, а на «выходе», после прохождения элементарного цилиндра длиной dS, — изменение интенсивности за счёт поглощения фотонов в цилиндре в заданном направлении $dI(\nu,\vec{\Omega},\vec{r},t)=-\kappa(\nu,\vec{r},t)\,I(\nu,\vec{\Omega},\vec{r},t)dS$ (8)

Поэтому в (7) $A(\nu,\vec{\Omega},\vec{r},t)=-\kappa(\nu,\vec{r},t)\,I(\nu,\vec{\Omega},\vec{r},t)$ (9). Коэффициент $\kappa(\nu,\vec{r},t)$ – спектральный коэффициент поглощения. Физический смысл $\kappa(\nu,\vec{r},t)$. Размерность $[\kappa(\nu,\vec{r},t)]$ - L^{-1}. $\kappa(\nu,\vec{r},t)=1/l(\nu,\vec{r},t)$. $l(\nu,\vec{r},t)$ –длина свободного пробега фотонов с энергиями [hv, h(v+dv)] в процессе поглощения их частицами ЭФО в точке $\vec{r},t$.
$l(\nu,\vec{r},t)=[(n(\vec{r},t)\cdot\sigma(\nu,\vec{r},t)]^{-1}$, где $n(\vec{r},t)$ – объёмная концентрация частиц (L^{-3}); $\sigma(\nu,\vec{r},t)$ - сечение поглощения частиц (L^{2}).
$\kappa(\nu,\vec{r},t)=n(\vec{r},t)\cdot\sigma(\nu,\vec{r},t)$.
Многокомпонентная среда: $\kappa(\nu,\vec{r},t)=\sum_{\alpha=1}^{N}n_\alpha(\vec{r},t)\cdot\sigma_\alpha(\nu,\vec{r},t)$.

УРАВНЕНИЕ ПЕРЕНОСА ЛУЧИСТОЙ ЭНЕРГИИ ДЛЯ ИЗЛУЧАЮЩЕЙ, ПОГЛОЩАЮЩЕЙ И РАССЕИВАЮЩЕЙ СРЕДЫ (3)

2) Рассеяние $S(\nu,\vec{\Omega},\vec{r},t)$



Процесс (упругое, т.е. без изменения частоты) рассеяния частицами в ЭФО удобно представить в виде:

$$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\nu},\vec{\boldsymbol{\Omega}},\vec{\boldsymbol{r}},\boldsymbol{t})=\boldsymbol{S}^{+}(\boldsymbol{\nu},\vec{\boldsymbol{\Omega}},\vec{\boldsymbol{r}},\boldsymbol{t})-\boldsymbol{S}^{-}(\boldsymbol{\nu},\vec{\boldsymbol{\Omega}},\vec{\boldsymbol{r}},\boldsymbol{t}) \qquad (10)$$

где $S^{+}(\nu,\vec{\Omega},\vec{r},t)$- **увеличение** числа фотонов частоты ν, распространяющихся в момент времени t в точке $\vec{r}$ в направлении $\vec{\Omega}$ в пределах $d\vec{\Omega}$ за счет фотонов, рассеянных в направление $\vec{\Omega}$ из других направлений $\vec{\Omega}\,'$ (прямое рассеяние). $S^{-}(\nu,\vec{\Omega},\vec{r},t)$ - уменьшение числа этих фотонов за счёт рассеяния их на частицах ЭФО из направления $\vec{\Omega}$ в другие направления $\vec{\Omega}'$ (обратное рассеяние). При феноменологическом описании рассеяния вводится функция $\gamma(\nu,\vec{\Omega},\vec{\Omega}\,',\vec{r},t)$, такая, что: $\gamma(\nu,\vec{\Omega},\vec{\Omega}\,',\vec{r},t)=\gamma(\nu,\vec{\Omega}\,',\vec{\Omega},\vec{r},t)$ – условие симметрии.

Функция $\gamma(\nu,\vec{\Omega},\vec{\Omega}\,',\vec{r},t)$ вводится так, что: $S^{+}(\nu,\vec{\Omega},\vec{r},t)=\int\limits_{(4\pi)} I(\nu,\vec{\Omega}',\vec{r},t)\gamma(\nu,\vec{\Omega}',\vec{\Omega},\vec{r},t)d\vec{\Omega}' \quad (11)$

$$S^{-}(\nu,\vec{\Omega},\vec{r},t)=\int\limits_{(4\pi)} I(\nu,\vec{\Omega},\vec{r},t)\gamma(\nu,\vec{\Omega}',\vec{\Omega},\vec{r},t)d\vec{\Omega}'=I(\nu,\vec{\Omega},\vec{r},t)\int\limits_{(4\pi)}\gamma(\nu,\vec{\Omega}',\vec{\Omega},\vec{r},t)d\vec{\Omega}' \qquad (12)$$

$\gamma(\nu,\vec{\Omega},\vec{\Omega}\,',\vec{r},t)$ ($[L^{-1}]$) представим в виде: $\gamma(\nu,\vec{\Omega}',\vec{\Omega},\vec{r},t)=\sigma_S(\nu,\vec{r},t)\chi(\nu,\vec{\Omega}',\vec{\Omega},\vec{r},t)\frac{1}{4\pi}$ (13). Условие нормировки:

$\int\limits_{(4\pi)}\gamma(\nu,\vec{\Omega}',\vec{\Omega},\vec{r},t)d\vec{\Omega}'=4\pi \quad (14)$ В (13) $\sigma_S(\nu,\vec{r},t)$ (размерность $[L^{-1}]$) –спектральный коэффициент полного рассеяния; $\chi(\nu,\vec{\Omega},\vec{\Omega}\,',\vec{r},t)$ – спектральная индикатриса рассеяния

УРАВНЕНИЕ ПЕРЕНОСА ЛУЧИСТОЙ ЭНЕРГИИ ДЛЯ ИЗЛУЧАЮЩЕЙ, ПОГЛОЩАЮЩЕЙ И РАССЕИВАЮЩЕЙ СРЕДЫ (4)

Таким образом, в (10) $S(\nu,\vec{\Omega},\vec{r},t) = S^{+}(\nu,\vec{\Omega},\vec{r},t) - S^{-}(\nu,\vec{\Omega},\vec{r},t)$:

$$S^{(+)}(\nu,\mathbf{\Omega},\mathbf{r},t) = \frac{\sigma_S(\nu,\mathbf{r},t)}{4\pi}\int\limits_{(4\pi)} I(\nu,\mathbf{\Omega'},\mathbf{r},t)\cdot\chi(\nu,\mathbf{\Omega'},\mathbf{\Omega},\mathbf{r},t)\,d\mathbf{\Omega'}, \quad (15)$$

$$S^{(-)}(\nu,\mathbf{\Omega},\mathbf{r},t) = \frac{\sigma_S(\nu,\mathbf{r},t)}{4\pi} I(\nu,\mathbf{\Omega},\mathbf{r},t)\int\limits_{(4\pi)} \chi(\nu,\mathbf{\Omega},\mathbf{\Omega'},\mathbf{r},t)\,d\mathbf{\Omega'} = \sigma_S(\nu,\mathbf{r},t)\cdot I(\nu,\mathbf{\Omega},\mathbf{r},t). \quad (16)$$

УРАВНЕНИЕ ПЕРЕНОСА ЛУЧИСТОЙ ЭНЕРГИИ ДЛЯ ИЗЛУЧАЮЩЕЙ, ПОГЛОЩАЮЩЕЙ И РАССЕИВАЮЩЕЙ СРЕДЫ (5)

Таким образом, в (10) $S(\nu,\vec{\Omega},\vec{r},t) = S^{+}(\nu,\vec{\Omega},\vec{r},t) - S^{-}(\nu,\vec{\Omega},\vec{r},t)$:

Место для уравнения.

$$S^{+}(\nu,\vec{\Omega},\vec{r},t) = \int\limits_{(4\pi)} I(\nu,\vec{\Omega}',\vec{r},t)\gamma(\nu,\vec{\Omega}',\vec{\Omega},\vec{r},t)d\vec{\Omega}' \qquad (15)$$

$$S^{-}(\nu,\vec{\Omega},\vec{r},t) = I(\nu,\vec{\Omega},\vec{r},t)\int\limits_{(4\pi)} \gamma(\nu,\vec{\Omega}',\vec{\Omega},\vec{r},t)d\vec{\Omega}' = \sigma_S(\nu,\vec{r},t)I(\nu,\vec{\Omega},\vec{r},t) \qquad (16).$$

2) Излучение $E(\nu,\vec{\Omega},\vec{r},t)$

В общем случае излучение частицами в ЭФО обусловлено двумя механизмами:

1) **самопроизвольное (спонтанное) испускание** энергии в единицу времени в интервале [hv, h(v + dv)] в направлении **Ω** в пределах d**Ω**; $J_N(\nu,\vec{\Omega},\vec{r},t)$ – спектральный коэффициент спонтанного излучения.

2) **индуцированное (вынужденное) испускание** с такими же свойствами, как и в 1); $J_I(\nu,\vec{\Omega},\vec{r},t)$ - спектральный коэффициент индуцированного излучения.

Спонтанное излучение определяется только локальными макроскопическими свойствами среды: температурой, химическим составом и не зависит от наличия в среде излучения.

Индуцированное излучение, т. е. испускание частицей фотона данной частоты и определённого направления, зависит от имеющейся в той же точке пространства и в тот же момент времени интенсивности излучения той же частоты и того же направления. Вклад процессов излучения в уравнение баланса (6) и (7): $E(\nu,\vec{\Omega},\vec{r},t) = J_N(\nu,\vec{\Omega},\vec{r},t) + J_I(\nu,\vec{\Omega},\vec{r},t)$ (17)

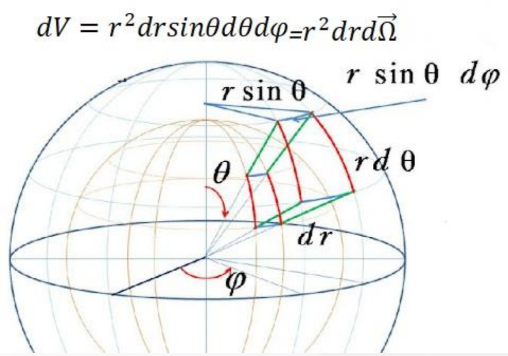
В квантовой теории показывается, что: $J_I(\nu,\vec{\Omega},\vec{r},t) = n(\nu,\vec{\Omega},\vec{r},t)\cdot J_N(\nu,\vec{\Omega},\vec{r},t)$ (18).

Т.е. $E(\nu,\vec{\Omega},\vec{r},t) = J_N(\nu,\vec{\Omega},\vec{r},t)\,[1 + n(\nu,\vec{\Omega},\vec{r},t)]$ (19), где $n(\nu,\vec{\Omega},\vec{r},t)$ **-** число фотонов с определённым направлением поляризации, находящиеся в той же фазовой ячейке, в которую попадает испущенный фотон.

УРАВНЕНИЕ ПЕРЕНОСА ЛУЧИСТОЙ ЭНЕРГИИ ДЛЯ ИЗЛУЧАЮЩЕЙ, ПОГЛОЩАЮЩЕЙ И РАССЕИВАЮЩЕЙ СРЕДЫ (6)

Т.е. $n(\nu, \vec{\Omega}, \vec{r}, t) = \dfrac{\text{число фотонов с определенным направлением поляризаци}}{\text{число фазовых ячеек в элементе фазового объема}}$. В элементе физического пространства: $d\vec{r}d\nu d\vec{\Omega}$

содержится $f(\nu, \vec{\Omega}, \vec{r}, t)\, d\vec{r}d\nu d\vec{\Omega}$ фотонов ($f(\nu, \vec{\Omega}, \vec{r}, t)$ – функция распределения фотонов).



Элементарный фазовый объем: $d\vec{p}\, d\vec{r}$. Так как $\vec{p} = \left(\dfrac{h\nu}{c}\right)\vec{\Omega}$,

$$d\vec{p} = |\vec{p}|^2\, dp d\vec{\Omega} = \left({h^2\nu^2}/{c^2}\right)\left({h}/{c}\right)d\nu d\vec{\Omega} = \left({h^3\nu^2}/{c^3}\right)d\nu d\vec{\Omega}$$

Число фазовых ячеек (число квантовых состояний фотонов) в фазовом объёме с учётом двух состояний

поляризации фотона и того факта, что объём отдельной фазовой ячейки равен h^3: $2\dfrac{d\vec{p}\, d\vec{r}}{h^3}$.

$$n(\nu, \vec{\Omega}, \vec{r}, t) = \frac{f(\nu, \vec{\Omega}, \vec{r}, t)\, d\vec{r} d\nu d\vec{\Omega}}{2\frac{d\vec{p}\, d\vec{r}}{h^3}} = \frac{h^3 I(\nu, \vec{\Omega}, \vec{r}, t) d\nu d\vec{\Omega} d\vec{r}}{(h\nu C) 2 d\vec{P}\, d\vec{r}.} = \frac{I(\nu, \vec{\Omega}, \vec{r}, t)}{2h\nu^3.} c^2.$$

$$\boldsymbol{E(\nu, \vec{\Omega}, \vec{r}, t)} = J_N(\nu, \vec{\Omega}, \vec{r}, t) + J_I(\nu, \vec{\Omega}, \vec{r}, t) = \boldsymbol{J_N(\nu, \vec{\Omega}, \vec{r}, t)\left[1 + \frac{c^2}{2h\nu^3.} I(\nu, \vec{\Omega}, \vec{r}, t)\right]} \qquad (20)$$

УРАВНЕНИЕ ПЕРЕНОСА ЛУЧИСТОЙ ЭНЕРГИИ ДЛЯ ИЗЛУЧАЮЩЕЙ, ПОГЛОЩАЮЩЕЙ И РАССЕИВАЮЩЕЙ СРЕДЫ (7)

$$\frac{1}{c}\frac{\partial I(\nu,\mathbf{\Omega},\mathbf{r},t)}{\partial t}+\operatorname{div}\left[\mathbf{\Omega}\cdot I(\nu,\mathbf{\Omega},\mathbf{r},t)\right]=a(\nu,\mathbf{\Omega},\mathbf{r},t). \quad (1)$$

$$a(\nu,\mathbf{\Omega},\mathbf{r},t)=A(\nu,\mathbf{\Omega},\mathbf{r},t)+E(\nu,\mathbf{\Omega},\mathbf{r},t)+S(\nu,\mathbf{\Omega},\mathbf{r},t). \quad (2)$$

$$A(\nu,\mathbf{\Omega},\mathbf{r},t)=-\varkappa(\nu,\mathbf{r},t)\cdot I(\nu,\mathbf{\Omega},\mathbf{r},t). \quad (3)$$

$$E(\nu,\mathbf{\Omega},\mathbf{r},t)=\mathbf{j}_N(\nu,\mathbf{\Omega},\mathbf{r},t)\left[1+\frac{c^2}{2h\nu^3}I(\nu,\mathbf{\Omega},\mathbf{r},t)\right]. \quad (4)$$

$$S^{(+)}(\nu,\mathbf{\Omega},\mathbf{r},t)=\frac{\sigma_S(\nu,\mathbf{r},t)}{4\pi}\int\limits_{(4\pi)}I(\nu,\mathbf{\Omega}',\mathbf{r},t)\cdot\chi(\nu,\mathbf{\Omega}',\mathbf{\Omega},\mathbf{r},t)\,d\mathbf{\Omega}', \quad (5)$$

$$S^{(-)}(\nu,\mathbf{\Omega},\mathbf{r},t)=\frac{\sigma_S(\nu,\mathbf{r},t)}{4\pi}I(\nu,\mathbf{\Omega},\mathbf{r},t)\int\limits_{(4\pi)}\chi(\nu,\mathbf{\Omega},\mathbf{\Omega}',\mathbf{r},t)\,d\mathbf{\Omega}'= \\ =\sigma_S(\nu,\mathbf{r},t)\cdot I(\nu,\mathbf{\Omega},\mathbf{r},t). \quad (6)$$

$$\operatorname{div}[\mathbf{\Omega}\cdot I(\nu,\mathbf{\Omega},\mathbf{r},t)]=\mathbf{\Omega}\nabla I(\nu,\mathbf{\Omega},\mathbf{r},t)+I(\nu,\mathbf{\Omega},\mathbf{r},t)\underbrace{\operatorname{div}\mathbf{\Omega}}_{0} \quad (7)$$

УПЛЭ

$$\frac{1}{c}\frac{\partial I(\nu,\mathbf{\Omega},\mathbf{r},t)}{\partial t}+\mathbf{\Omega}\nabla I(\nu,\mathbf{\Omega},\mathbf{r},t)= \\ =\underline{-\varkappa(\nu,\mathbf{r},t)I(\nu,\mathbf{\Omega},\mathbf{r},t)}+j_N(\nu,\mathbf{\Omega},\mathbf{r},t)\left[1+\frac{c^2}{2h\nu^3}I(\nu,\mathbf{\Omega},\mathbf{r},t)\right]+ \\ +\frac{\sigma_S(\nu,\mathbf{r},t)}{4\pi}\int\limits_{(4\pi)}I(\nu,\mathbf{\Omega}',\mathbf{r},t)\chi(\nu,\mathbf{\Omega}',\mathbf{\Omega},\mathbf{r},t)\,d\mathbf{\Omega}'-\underline{\sigma_S(\nu,\mathbf{r},t)I(\nu,\mathbf{\Omega},\mathbf{r},t)}. \quad (8)$$

$$\boxed{\begin{aligned}&\frac{1}{c}\frac{\partial I(\nu,\mathbf{\Omega},\mathbf{r},t)}{\partial t}+\mathbf{\Omega}\nabla I(\nu,\mathbf{\Omega},\mathbf{r},t)= \\ &=-\beta(\nu,\mathbf{r},t)I(\nu,\mathbf{\Omega},\mathbf{r},t)+j_N(\nu,\mathbf{\Omega},\mathbf{r},t)\left[1+\frac{c^2}{2h\nu^3}I(\nu,\mathbf{\Omega},\mathbf{r},t)\right]+ \\ &+\frac{\sigma_S(\nu,\mathbf{r},t)}{4\pi}\int\limits_{(4\pi)}I(\nu,\mathbf{\Omega}',\mathbf{r},t)\chi(\nu,\mathbf{\Omega}',\mathbf{\Omega},\mathbf{r},t)\,d\mathbf{\Omega}',\end{aligned}} \quad (9)$$

В (9) $\beta(\nu,\mathbf{r},t)=\varkappa(\nu,\mathbf{r},t)+\sigma_S(\nu,\mathbf{r},t)$ - спектральный коэффициент ослабления (поглощение + полное рассеяние).

Входящие в (8) и (9) $\varkappa(\nu,\mathbf{r},t)$, $\sigma_S(\nu,\mathbf{r},t)$, $j_N(\nu,\mathbf{\Omega},\mathbf{r},t)$ и $\chi(\nu,\mathbf{\Omega},\mathbf{r},t)$ - оптические свойства среды. Для решения уравнений должны быть известны заранее.

ГИПОТЕЗА О ЛОКАЛЬНОМ ТЕРМОДИНАМИЧЕСКОМ РАВНОВЕСИИ

УПЛЭ

$$\frac{1}{c}\frac{\partial I(\nu,\mathbf{\Omega},\mathbf{r},t)}{\partial t}+\mathbf{\Omega}\nabla I(\nu,\mathbf{\Omega},\mathbf{r},t)=$$
$$=-\beta(\nu,\mathbf{r},t)I(\nu,\mathbf{\Omega},\mathbf{r},t)+\underline{j_N(\nu,\mathbf{\Omega},\mathbf{r},t)\left[1+\frac{c^2}{2h\nu^3}I(\nu,\mathbf{\Omega},\mathbf{r},t)\right]}+$$
$$+\frac{\sigma_S(\nu,\mathbf{r},t)}{4\pi}\int\limits_{(4\pi)}I(\nu,\mathbf{\Omega'},\mathbf{r},t)\chi(\nu,\mathbf{\Omega'},\mathbf{\Omega},\mathbf{r},t)\,d\mathbf{\Omega'},$$

УПЛЭ описывает пространственно-временную изменчивость поля излучения в среде в отсутствии равновесия, т.е. $I(\nu,\vec{\Omega},\vec{r},t)\neq B(\nu,\vec{r},t)$ (меньше излучения АЧТ).

Гипотеза о локальном термодинамическом равновесии (ЛТР).

В каждом ЭФО среды, состояние которой описывается УПЛЭ, процесс излучения происходит так, как, если бы имело место ПТР при температуре ЭФО. Т.е. в каждой точке среды, не находящейся в состоянии ПТР, спектральные коэффициенты спонтанного излучения $J_N(\nu,\vec{\Omega},\vec{r},t)$ и поглощения $\kappa(\nu,\vec{r},t)$ связаны соотношениями, справедливыми для ПТР.
Вклад процесса излучения в баланс спектральной интенсивности в УПЛЭ, описывается вторым слагаемым в правой части (красная черта). **Уравнение (УПЛЭ) в предположении ПТР**, где $T(\vec{r},t)$– температура рассматриваемого ЭФО $\left(I(\nu,\vec{\Omega},\vec{r},t)=B(\nu,T(\vec{r},t))\right)$.

$$0=-[\varkappa(\nu,T)+\sigma_S(\nu,T)]B(\nu,T)+j_N(\nu,\mathbf{\Omega},T)\left[1+\frac{c^2}{2h\nu^3}B(\nu,T)\right]+$$
$$+\frac{\sigma_S(\nu,T)}{4\pi}\int\limits_{(4\pi)}B(\nu,T)\chi(\nu,\mathbf{\Omega'},\mathbf{\Omega})\,d\mathbf{\Omega'}\quad(10)$$

УПЛЭ в ПТР

Из (10) следует:

$$j_N(\nu,\mathbf{\Omega},T)\left[1+\frac{c^2}{2h\nu^3}B(\nu,T)\right]=\varkappa(\nu,T)B(\nu,T).$$

$B(\nu,T)$

$$j_N(\nu,\mathbf{\Omega},T)=\varkappa(\nu,T)\frac{2h\nu^3}{c^2}\,e^{-\frac{h\nu}{kT}}\quad(11)$$

$B(\nu,T)$

$$j_N(\nu,\mathbf{\Omega},T)=\varkappa(\nu,T)B(\nu,T)\frac{1}{1+\dfrac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}}-1}}=\varkappa(\nu,T)B(\nu,T)(1-e^{-\frac{h\nu}{kT}})$$

$$j_N(\nu,\mathbf{\Omega},T)=\varkappa'(\nu,T)\cdot B(\nu,T)\quad(12)$$

$$\varkappa'(\nu,T)=\varkappa(\nu,T)(1-e^{-\frac{h\nu}{kT}})$$

(11), (12) Закон Кирхгофа

УРАВНЕНИЕ ПЕРЕНОСА ЛУЧИСТОЙ ЭНЕРГИИ ДЛЯ ИЗЛУЧАЮЩЕЙ, ПОГЛОЩАЮЩЕЙ И РАССЕИВАЮЩЕЙ СРЕДЫ (гипотеза ЛТР)

$$\frac{1}{c}\frac{\partial I(\nu,\mathbf{\Omega},\mathbf{r},t)}{\partial t}+\mathbf{\Omega}\nabla I(\nu,\mathbf{\Omega},\mathbf{r},t)= \\ =-\beta(\nu,\mathbf{r},t)I(\nu,\mathbf{\Omega},\mathbf{r},t)+j_N(\nu,\mathbf{\Omega},\mathbf{r},t)\left[1+\frac{c^2}{2h\nu^3}I(\nu,\mathbf{\Omega},\mathbf{r},t)\right]+ \\ +\frac{\sigma_S(\nu,\mathbf{r},t)}{4\pi}\int\limits_{(4\pi)} I(\nu,\mathbf{\Omega'},\mathbf{r},t)\chi(\nu,\mathbf{\Omega'},\mathbf{\Omega},\mathbf{r},t)\,d\mathbf{\Omega'}, \qquad (13)$$

В (13) $\beta(\nu,\vec{r},t)=\varkappa(\nu,\vec{r},t)+\sigma_S(\nu,\vec{r},t)$

$$j_N(\nu,\mathbf{\Omega},\mathbf{r},t)\left[1+\frac{c^2}{2h\nu^3}I(\nu,\mathbf{\Omega},\mathbf{r},t)\right]$$ = (I-е слагаемое по (12), II –е – по (11))=

$$=\varkappa'(\nu,\mathbf{r},t)B[\nu,T(\mathbf{r},t)]+\varkappa(\nu,\mathbf{r},t)\frac{2h\nu^3}{c^2}e^{-\frac{h\nu}{kT(\mathbf{r},t)}}\cdot\frac{c^2}{2h\nu^3}I(\nu,\mathbf{\Omega},\mathbf{r},t)= \\ =\varkappa'(\nu,\mathbf{r},t)B[\nu,T(\mathbf{r},t)]+\varkappa(\nu,\mathbf{r},t)e^{-\frac{h\nu}{kT(\mathbf{r},t)}}I(\nu,\mathbf{\Omega},\mathbf{r},t) \qquad (14)$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial I(\nu,\mathbf{\Omega},\mathbf{r},t)}{\partial t}+\mathbf{\Omega}\nabla I(\nu,\mathbf{\Omega},\mathbf{r},t)=-\varkappa(\nu,\mathbf{r},t)I(\nu,\mathbf{\Omega},\mathbf{r},t)+ \\ +\varkappa'(\nu,\mathbf{r},t)B[\nu,T(\mathbf{r},t)]+\varkappa(\nu,\mathbf{r},t)e^{-\frac{h\nu}{kT(\mathbf{r},t)}}I(\nu,\mathbf{\Omega},\mathbf{r},t)- \\ -\sigma_S(\nu,\mathbf{r},t)I(\nu,\mathbf{\Omega},\mathbf{r},t)+\frac{\sigma_S(\nu,\mathbf{r},t)}{4\pi}\int\limits_{(4\pi)} I(\nu,\mathbf{\Omega'},\mathbf{r},t)\chi(\nu,\mathbf{\Omega'},\mathbf{\Omega},\mathbf{r},t)\,d\mathbf{\Omega'} \qquad (15)$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial I(\nu,\mathbf{\Omega},\mathbf{r},t)}{\partial t}+\mathbf{\Omega}\nabla I(\nu,\mathbf{\Omega},\mathbf{r},t)= \\ =-\beta'(\nu,\mathbf{r},t)I(\nu,\mathbf{\Omega},\mathbf{r},t)+\varkappa'(\nu,\mathbf{r},t)B[\nu,T(\mathbf{r},t)]+ \\ +\frac{\sigma_S(\nu,\mathbf{r},t)}{4\pi}\int\limits_{(4\pi)} I(\nu,\mathbf{\Omega'},\mathbf{r},t)\chi(\nu,\mathbf{\Omega'},\mathbf{\Omega},\mathbf{r},t)\,d\mathbf{\Omega'}, \qquad (16)$$

В (16) $\beta'(\nu,\vec{r},t)=\varkappa'(\nu,\vec{r},t)+\sigma_S(\nu,\vec{r},t)$, где $\varkappa'(\nu,\vec{r},t)=\varkappa(\nu,\vec{r},t)\left(1-exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right)\right)$ – Спектральный коэффициент поглощения с поправкой на вынужденное испускание

Квазистационарное УПЛЭ для среды в состоянии ЛТР

$$\frac{1}{c}\frac{\partial I(\nu,\mathbf{\Omega},\mathbf{r},t)}{\partial t}+\mathbf{\Omega}\nabla I(\nu,\mathbf{\Omega},\mathbf{r},t)= \tag{16}$$
$$=-\beta'(\nu,\mathbf{r},t)I(\nu,\mathbf{\Omega},\mathbf{r},t)+\varkappa'(\nu,\mathbf{r},t)B[\nu,T(\mathbf{r},t)]+$$
$$+\frac{\sigma_S(\nu,\mathbf{r},t)}{4\pi}\int\limits_{(4\pi)} I(\nu,\mathbf{\Omega'},\mathbf{r},t)\chi(\nu,\mathbf{\Omega'},\mathbf{\Omega},\mathbf{r},t)\,d\mathbf{\Omega'},$$

Оценим соотношение первого и второго слагаемых в левой части уравнения (16):

$$\frac{\left|\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right|}{|\mathbf{\Omega}\nabla|}\sim\frac{1}{c}\frac{L}{\tau\,|\mathbf{\Omega}|}=\frac{\tau_f}{\tau\cdot 1} \tag{17}$$

В (17) L — характерный размер среды, в которой рассматривается перенос лучистой энергии, τ— характерное время (длительность) воздействия источника излучения (например, характерное время изменения солнечного излучения), τ_f= L/c — характерное время пребывания фотона в среде. В случае, если $\tau_f \ll \tau$, то в среде в каждый момент времени успевает установиться так называемый **квазистационарный режим**. Т.е. (16) примет вид (18):

$$\mathbf{\Omega}\nabla I(\nu,\mathbf{\Omega},\mathbf{r},t)+\beta'(\nu,\mathbf{r},t)I(\nu,\mathbf{\Omega},\mathbf{r},t)=\varkappa'(\nu,\mathbf{r},t)B[\nu,T(\mathbf{r},t)]+$$
$$+\frac{\sigma_S(\nu,\mathbf{r},t)}{4\pi}\int\limits_{(4\pi)} I(\nu,\mathbf{\Omega'},\mathbf{r},t)\chi(\nu,\mathbf{\Omega'},\mathbf{\Omega},\mathbf{r},t)\,d\mathbf{\Omega'}. \tag{18}$$

Уравнение (18) – основное для использования при решении Прямой Задачи переноса излучения в среде.

$$\left[\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{\Omega}\nabla+\beta(\nu,\mathbf{r},t)\right]I(\nu,\mathbf{\Omega},\mathbf{r},t)= \tag{19}$$
$$=\frac{\sigma_S(\nu,\mathbf{r},t)}{4\pi}\int\limits_{(4\pi)} I(\nu,\mathbf{\Omega'},\mathbf{r},t)\chi(\nu,\mathbf{\Omega'},\mathbf{\Omega},\mathbf{r},t)\,d\mathbf{\Omega'}+Q(\nu,\mathbf{\Omega},\mathbf{r},t)$$

$$Q(\nu,\mathbf{\Omega},\mathbf{r},t)=j_N(\nu,\mathbf{\Omega},\mathbf{r},t)\left[1+\frac{c^2}{2h\nu^3}I(\nu,\mathbf{\Omega},\mathbf{r},t)\right]\cdot \tag{20}$$

Функция источника

Если коэффициенты в (19) не зависят от времени, применим к (19) преобразование Лапласа:

$$\bar{I}(\nu,\mathbf{\Omega},\mathbf{r},s)=\int\limits_0^\infty I(\nu,\mathbf{\Omega},\mathbf{r},t)\,e^{-st}\,dt$$

$$-\frac{1}{c}\bar{I}(\nu,\mathbf{\Omega},\mathbf{r},0)+\frac{s}{c}\bar{I}(\nu,\mathbf{\Omega},\mathbf{r},s)+\mathbf{\Omega}\nabla\bar{I}(\nu,\mathbf{\Omega},\mathbf{r},s)+\beta\bar{I}(\nu,\mathbf{\Omega},\mathbf{r},s)=$$
$$=\frac{\sigma_S(\nu,\mathbf{r})}{4\pi}\int\limits_{(4\pi)} \bar{I}(\nu,\mathbf{\Omega'},\mathbf{r},s)\chi(\nu,\mathbf{\Omega'},\mathbf{\Omega},\mathbf{r})\,d\mathbf{\Omega'}+\bar{Q}(\nu,\mathbf{\Omega},s) \tag{20}$$

$$\left(\mathbf{\Omega}\nabla+\beta^{(*)}\right)\bar{I}(\nu,\mathbf{\Omega},\mathbf{r},s)=\frac{\sigma_S(\nu,\mathbf{r})}{4\pi}\int\limits_{(4\pi)} \bar{I}(\nu,\mathbf{\Omega'},\mathbf{r},s)\chi(\nu,\mathbf{\Omega'},\mathbf{\Omega},\mathbf{r})\,d\mathbf{\Omega'}+$$
$$+\bar{Q}(\nu,\mathbf{\Omega},s)+\frac{1}{c}I(\nu,\mathbf{\Omega},\mathbf{r},0) \tag{21}$$

$$\beta^{(*)}=\beta+\frac{s}{c};\ I(\nu,\mathbf{\Omega},\mathbf{r},0)$$