Электрический ток $\mathcal J$ протекает по проводу, изогнутому так, азано на рис. 70. Найти значение магнитной индукции $\mathcal B$ в в центре $\mathcal O$ окружности радиусом $\mathcal R$.

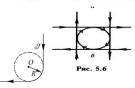


Рис. 70

Найдем магнитное поле в центре окружности, если по проводу, изображенному на рис. 5.6, a, протекает ток f (№ 5.3). Суперпозивши четырех таких проводов, изображенная на рис. 5.6, G, позволяет найти поле от круглого витка (5.4) и четырех прямолинейных проводов (5.2)



Найдем поле на оси **соленоида** (катушки) как сумму полей от набора витков (№ 5.5). На рис. 5.19 показано сечение соленоида и даны его размеры. Обозначая общее число витков N и силу тока I и пользуясь (5.3), получаем поле в точке A от элемента соленоида dx

5.5. Найти индукцию B магнитного поля на оси соленоида в точке A, из которой диаметры торцов видны под углами 2 lpha и 2 eta

(рис. 72). Соленоид состоит из N витков, равномерно намотанных на длине l. и по нему течет ток ${\mathscr J}$.

$$dH = \frac{dI}{c} \frac{2\pi}{R} \sin^3 \varphi; \quad dI = I \frac{N}{l} dx; \quad dx \sin \varphi = R \frac{d\varphi}{\sin \varphi}.$$

 $H = \frac{2\pi I}{c} \frac{N}{I} \int_{0}^{\alpha} \sin \varphi \, d\varphi.$

Откуда

$$H = \frac{2\pi I}{c} \frac{N}{I} (\cos \beta - \cos \alpha). \tag{5.2}$$



6.6. Длинный цилиндр изготовлен из материала с замороженной однородной намагниченностью, направленной по его оси (рис. 89). Индукция в точке A оказалась равной $B_A=10^3~\Gamma {\rm c}$. Найти (приблименно) индукцию B_C вблизи конца короткого цилиндра, изготовленного из того же материала, если $h=5\cdot 10^{-2}D.$

Для короткого постоянного магнита (высотой h и радиусом R) поле определяется током намагничивания. Используя формулу для витка с током (5.4) и то, что это ток намагничивания (6.5), получаем

$$B = \frac{2\pi}{c} cM \frac{h}{R} = B_{\rm T} \frac{h}{R}.$$

 $B=rac{2\pi}{c}cM\,rac{h}{R}=B_{ au}rac{h}{R}.$ магничивания М. Это средний магнитный момент единицы объема магнетика, создаваемый молекулярными токами. Если рассмотреть магнетик цилиндрической формы, магнитный момент которого направлен вдоль оси цилиндра, и обозначить средний магнитный момент молекулы p, а число молекул в единице объемом n, то средний магнитный момент единицы объема M=np. Молекулярные токи соседних молекул в местах их соприкосновения текут в противоположных направлениях и взаимно компенсируют друг друга. Некомпенсированными остаются только молекулярные токи, выходящие на наружную боковую поверхность цилиндра и дающие ток I_m . Для цилиндра, имеющего объем V, высоту I и площадь основания S (V=Ц. Магнитный момент

$$I_m \frac{\mathbf{S}}{c} = V\mathbf{M} = Sl\mathbf{M}.$$

Направление S совпадает с направлением M. Поэтому $I_m = clM$. Следовательно, поверхностный ток, приходящийся на единицу длины цилиндра, равен

$$i_m = cM; \quad \{i_m = M\}.$$
 (6.5)

Если вектор М не направлен по оси цилиндра, то поверхностный ток (6.5) определяется только проекцией **M** на ось цилиндра. Поверхностный ток создает поле, которое можно найти по фор-

муле для соленоида (5.23) и следует добавить к полю, вызвавшему намагниченность:

$$B = H + 4\pi M; \{B = H + M\}.$$
 (6.6)

7.20. Сверхпроводящий шарик летит по направлению к соленоиду вдоль его оси. Индукция поля в центре соленоида B=1000 Гс. Какова должна быть начальная скорость v шарика, чтобы он смог пролететь через соленоид насквозь? Диаметр соленоида много больше диаметра шарика. Плотность материваль индика. — 8 r content = 8 r cала шарика $\rho = 8 \text{ г/см}^3$

Сверхпроводящий шарик (радиусом r) в магнитном поле (H = B) приобретает магнитный дипольный момент (6.17)

$$\mathbf{p}=-r^3\,\frac{\mathbf{B}}{2}.$$

Если такой шарик летит по направлению к соленоиду вдоль его оси, то возникающий дипольный момент тормозит движение шарика там, где есть изменение магнитного поля. В соответствии с (1.11) сила торможения

$$F = p \frac{dB}{dx}$$

где x — координата вдоль оси соленоида. Предполагаем, что радиус соленоида $R \gg r$. Шарик пролетит через соленоид, если работа сил торможения (А) до достижения середины соленоида, где задано магнитное поле B_0 , меньше кинетической энергии шарика:

$$B_0 < rac{4}{3} \pi r^3
ho rac{v^2}{2},$$
 где $ho -$ плотность шарика. Таким образом, $v \geq B_0 \left(rac{3}{8\pi
ho}
ight)^{1/2}.$

$$A = -\int_{-\infty}^{x} F dx = \frac{1}{2} r^{3} \int_{0}^{B_{0}} B dB = \frac{1}{4} r^{3} B_{0}^{2} \le \frac{4}{3} \pi \rho r^{3} \frac{v^{2}}{2}.$$

ловие дифракции Фраунгофера (7.3). Используя (7.1), получаем $D/2 << r_1 = (\lambda L_{\min})^{1/2}$. Откуда $L_{\min} >> D^2/(4\lambda) \approx 10$ м.

Рассмотрим дифракцию параллельного пучка света, который получается либо от очень удаленного источника, либо за собирающей линзой, в фокусе которой находится точечный источник, либо от лазера. Радиусы зон Френеля для такого пучка определяются из (6.6)

$$r_m^2 = bm\lambda. (7.1)$$

$$H = \frac{1}{4} \left(\frac{2\pi I}{cR} + 4 \frac{2I}{cR} \right) = 2 \frac{1}{c} \frac{I}{R} \left(\frac{\pi}{2} + 2 \right).$$

Биб—Савара—Лапласа, позволяющий вычислить напряженность магнитного поля от элементов тока:

$$d\mathbf{H} = \frac{1}{c} I \frac{[d\mathbf{lr}]}{r^3}; \quad \left\{ d\mathbf{H} = I \frac{[d\mathbf{lr}]}{4\pi r^3} \right\}, \tag{5.1}$$

$$dH = \frac{I}{a} dlr \sin \frac{\pi - \alpha}{3} = \frac{I}{a} \cos \alpha \frac{d\alpha}{4}.$$

 $dH=\frac{I}{c}\,dlr\sin\frac{\pi-\alpha}{r^3}=\frac{I}{c}\cos\alpha\frac{d\alpha}{b}.$ Интегрируя по α от $-\pi/2$ до $\pi/2$, получаем $H=\frac{2I}{cb}; \quad \left\{H=\frac{I}{2\pi b}\right\}.$

Прямой проводник с током

Напряженность магнитного поля на оси кругового витка с током в силу осевой симметрии имеет составляющую только в направлении оси. Обозначая радиус витка R, на его оси на расстоянии от элементов r из (5.1) получаем, интегрируя по длине,

$$H=\frac{2\pi RI\sin\alpha}{cr^2},$$

где $\sin \alpha = R/r$. Поэтому окончательно

$$H = \frac{2\pi R^2 I}{cr^3}\,; \quad \left\{ H = \frac{R^2 I}{2r^3} \right\}. \tag{5.3}$$
 В центре кругового витка с током радиусом R получаем

$$H = \frac{2\pi I}{cR}; \quad \left\{ H = \frac{I}{2R} \right\}. \tag{5.4}$$

6.34. Постоянный магнитик с массой m=4,8 г парит в горизонтальном положении на высоте h=4 см над плоской поверхностью сверхпроводника. Применяя метод зеркальных изображений, вычислить напряженность магнитного поля H у поверхности сверхпроводника под магнитиком. При расчетах магнитик считать точечным

Постоянный магнит со сверхпроводящей поверхностью взаимодействует подобно витку, имеющему такой же магнитный момент. Используя метод зеркальных изображений и выражение для поля диполя (1.8) и силы взаимодействия (1.11), обозначая массу магнита m, магнитный момент p, расстояние до поверхности h, получаем

$$mg = \frac{3p^2}{(2h)^4}.$$

Отсюда находим магнитный момент *p*, а по нему магнитное поле у поверхности сверхпроводника от двух диполей (№ 6.34)

$$H=\frac{8}{h}\Big(\frac{mg}{3}\Big)^{1/2}.$$

В изменяющемся по пространству электрическом поле возникасила, вызывающая поступательное движение диполя:

$$F = q\Delta E = q\frac{\partial E}{\partial x}I\cos\alpha = p\frac{\partial E}{\partial x}\cos\alpha$$

 $F=q\Delta E=q\,\frac{\partial E}{\partial x}\,l\cos\alpha=p\,\frac{\partial E}{\partial x}\cos\alpha.$ Здесь поле направлено по оси x. Если **диполь** направлен **по полю**, то

$$F = \rho \frac{\partial E}{\partial x}.$$

Магнитное поле на оси витка (площадью сечения S) с током (I) определяется (5.3). Вдали от витка, на расстоянии $r\gg (S)^{1/2}$, это поле магнитного диполя, определяемого (5.5), равно

$$H = 2\frac{p}{r^3} = 2I\frac{S}{cr^3}.$$

$$P_{M} = \frac{IS}{c} = \frac{\pi R^2 I}{c}; \quad \left\{ P_{M} = IS = \pi R^2 I \right\}. \quad (5.5)$$

2.42. Существуют лазеры, мощность излучения которых в импульсе составляет сотни мегаватт. Допустим, что мощность лазера равна $W=500~\mathrm{MBr}$, а площадь поперечного сечения светового пучка S==1 см 2 . Пусть луч сфокусирован идеальной линзой с фокусным расстоянием f=5 см. Оценить напряженность электрического поля E и давление света P в фокусе такой линзы. Длина волны $\lambda=6943$ Å.

Оценим напряженность электрического поля Е и давление света p в фокусе идеальной линзы (фокусное расстояние f=5 см), на которую падает световой пучок площадью S=1 см² лазера мощностью N = 500 МВт с длиной волны $\lambda = 6943$ Å (№ 2.42). Используя (2.1) и (2.2) для пучка света, падающего на линзу, получаем $N = \langle EH \rangle Sc/(4\pi) = \langle E^2 \rangle Sc/(4\pi)$, а давление $p_0 = N/(Sc)$. Считаем, что

$$E_0 \approx (\langle E^2 \rangle)^{1/2} = [4\pi N/(Sc)]^{1/2} = 1,45 \cdot 10^3$$
 ед. СГСЭ = 4,3 · 10 5 В/см, $S = c$ [E,H]/(4 π). $P_0 \approx 1,67 \cdot 10^5$ дин/см $^2 \approx 0,16$ атм (ε) $^{1/2} E = (\mu)^{1/2} H$. Параболическое зеркало диаметром $D = 1$ м используется как антенна для волн длины $\lambda = 3$ см. Оценить наименьшее расстоя-

7.10. С самолета, летящего на высоте H=5 км, производится ние L_{\min} , на котором следует поместить приемник для снятия диаворофотосъемка местности. Какими следует выбрать фокусное растояние f и диаметр объектива D фотоаппарата, чтобы сфотографировать объекты размером $l\approx 2,5$ см на фотопленку с разрешать объекты размером $l\approx 2,5$ см на фотопленку с разрешатощей способностью n=500 штрих/мм? На какое время τ следует открывать затвор фотоаппарата (экспозиция), чтобы движение самолета со скоростью V=360 км/час не приводило к размытию изображения? бражения?

При аэрофотосъемке местности используется объектив с фокусным расстоянием f=10 см и диаметром D=5 см. Съемка прокусным расстоянием f = 10 см и диаметром D = 5 см. Съемка про-изводится на фотопленку, имеющую разрешающую способность R = 100 мм⁻¹. Определим, какие детали местности могут быть раз-решены на фотографиях, если съемка производится с высоты h = 10 км (№ 7.36). Угол, разрешаемый по дифракции, из (7.17) $\theta_1 = 1.22\lambda/D = 1.22 \cdot 5.5 \cdot 10^{-5}/5 = 1.35 \cdot 10^{-5}$. Угол, разрешаемый на пленке, $\theta_2 = 1/(R) = 10^{-4}$. Так как $\theta_2 > \theta_1$, то он и определяет разрешаемые размеры. Поэтому $I_1 \approx h \theta_2 = 1$ м шаемые размеры. Поэтому $l_{\min} \approx h \ \theta_2 = 1 \ \text{м}.$

водило к размытию изображения (№ 7.10). Как и в предыдущей задаче, получаем

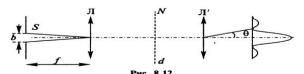
$$D \ge 1,22\lambda h/l = 12 \text{ cm}, f \ge h/(Nl) = 40 \text{ cm}.$$

Размывания картины не будет, если отношение смещения объекта в системе, связанной с самолетом, к высоте полета будет меньше отношения размера зерна пленки (расстояние между штрихами) к фокусному расстоянию фотоаппарата: $V_{\tau}/h < (1/N)/f$. Откуда

$$\tau < h/(NfV) \approx 0.25 \cdot 10^{-3} \text{ c.}$$

8.37. Коллиматорная щель S, освещаемая источником света, помещается в главном фокусе линзы L с фокусным расстоянием $f=20\,\mathrm{cm}$. Пройдя через линзу, свет падает на дифракционную решетку, плоскость которой перпендикулярна к главной оптической оси линзы L. Число штрихов решетки N=1000, ее период $d=0,001\,\mathrm{cm}$. Какова должна быть ширина коллиматорной щели b, чтобы была полностью использована разрещающая способность решетки в окрестности длины волны $\lambda = 5000 \,\text{Å}$?

8.12 показана схема расположения щели и решетки. За решеткой стоит линза Л', которая дает дифракционную картину на экране Э. стоит линза л., которая дает дифракционную кортину по окраще Чтобы полностью использовать разрешающую способность ре-шетки, надо несильно испортить остроту максимумов, которыми определяется способность к разрешению, т. е. должно выполнять-



ся условие: $b/f << \theta \approx \lambda/(Nd)$, отсюда $b < f\lambda/(Nd) \approx 0,001$ см. Можно также воспользоваться тем, что ширина когерентности (3.5) в плоскости решетки должна быть больше размера решетки: $\lambda f/b >$ > Nd, что приводит к тому же результату. $y_m = m\pi/(k\sin\alpha)$,

10.106. Найти время испарения воды из трубки длиной l=10 см, запаянной с одного конца. Температура $t=27\,^{\circ}\mathrm{C}$. Первоначально вода заполняла трубку наполовину; относительная влажность воздуха 50%. Давление насыщенных паров при температуре $27\,^{\circ}\mathrm{C}$ $P_{\mathrm{H}}=20\,$ Тор. Длина свободного пробега λ в системе воздух-пар порядка $10^{-5}\ {\rm cm}.$ Пар у поверхности воды считать насыщенным, капиллярными явлениями пренебречь.

Если при изменении градиента конпентрации (числа частиц в единице объема) во времени диффузионное течение успевает подстраниваться, то его можно считать квазистационарным и использовать (10.16). Рассмотрим, например, испарение воды из запаянной снизу трубки в атмосферу с заданной и постоянной влажностью φ . Таким образом, в трубке на поверхности воды число молекул пара в единице объема $n_{\rm nu}$ и на верхнем конце $\varphi n_{\rm nu}$. В некоторый произвольный момент времени уровень воды, измеряемый от верхнего края трубки (рис. 10.4), изменится от начального x_0 до x 38 время d1 масса воды d2 превратится в пар и уровень воды опустится на dx2. Обозначая плотность воды ρ 3, свободный пробег молекул пара λ 4, их массу m4 и среднюю скорость теплового движения u4, из (10.16) получаем Если при изменении градиента концентрации (числа частиц в еди-

$$dm = \rho dx = \frac{1}{3} \lambda v n_{_{\Pi H}} \left(1 - \varphi \right) m \frac{dt}{x}.$$

Разделяя переменные и интегрируя, находим время испарения (№ 10.105, 10.106, 10.111). Отметим, что для неизменности температуры воды и пара необходимо подводить тепло, расходуемое на превращение водь. В так вращение воды в пар.

В этих задачах предполагается, что над поверхностью жидкости пар является насыщенным. Оценим применимость такой идеализации, предпола-



10.106. $t=rac{9Rt
ho l^2}{4\lambda\overline{
u}P_n\mu}pprox 227$ дней, где μ и ho — молярная масса и плотность

Таким образом, для стационарного потока частиц имеем закон Фика

$$i = -D \frac{dn}{dt} \tag{10.16}$$

Перенос частиц называют диффузией. Он определяется градиентом n (числа частиц в единице объема) и коэффициентом диффузив D, который для идеального газа из (10.15) равен

$$D = \frac{1}{3}\lambda V. \tag{10.17}$$

Плотность потока массы определяется градиентом плотности

$$\frac{dM}{Sdt} = -\frac{Ddp}{dx}. (10.18)$$

10.78. Стеклянный сосуд с толщиной стенок l=5 мм и объемом V=1 л наполнен азотом и окружен вакуумом. В стенке сосуда образовался узкий цилиндрический канал радиусом a=0.1 мм. Начальное давление газа в сосуде настолько мало, что радиус канала пренебрежимо мал по сравнению с длиной свободного пробега молекул газа. Как мецяется во времени концентрация молекул газа в сосуде уменьшится в e раз, если температура поддерживается постоянной и равной $T=300~{\rm K}$. 10.79. Полностью эвакуированный стеклянный сосуд с толщиной стенок l=3 мм и объемом V=1 л погружен в атмосферу углекислого газа ${\rm CO}_2$. В стенке сосуда образовался узкий цилиндрический канал диаметром D=0,1 мм. Давление окружающего газа настолько мало, что диаметр канала пренебрежимо мал по сравнению с длиной свободного пробега молекул газа. Как меняется во времени концентрация молекул газа в сосуде? Определить время τ , по истечении которого давление газа в сосуде будет составлять (e-1)/e=0,632 от давления окружающего газа при условии, что температура подперживается постоянной и равной $T=300~{\rm K}$.

При вытекании через такую цилиндрическую трубку из объема *V* в вакуум для изменения плотности разреженного газа, находящегося в объеме, получаем (№ 10.78)

$$\frac{dN}{dt} = d\frac{nV}{dt} = -\frac{2}{3}\pi r^3 v_{\rm cp} \frac{n}{L}.$$

Разделяя переменные и интегрируя, имеем

где

$$\tau = \frac{3VL}{2\pi r^3 v_{cp}}.$$

Аналогичным образом можно рассмотреть и наполнение полнос-рэвакуированного сосуда (№ 10.79).

свойства не проявляются. При $p \sim 1$, когда, как следует из (7.1), картина определяется некоторым количеством зон Френеля, имеем дифракцию Френеля, рассмотренную в разделе 6. При p >> 1, когда препятствие занимает малую часть первой зоны Френеля, получаем дифракцию Фраунгофера. Расстояние от препятствия до экрана не просто много больше размеров препятствия (b >> D), а должно выполняться условие:

$$(b \ \lambda)^{1/2} >> D.$$
 (7.3)

8.9. Найти условие появления главного дифракционного максимума при наклонном падении лучей на решетку (угол падения θ_0). Какой вид принимает это условие, если $d\gg \lambda$, а порядок спектра $m\ll d/\lambda$?

При наклонном падении света на дифракционную решетку (под углом θ_0 к нормали, рис. 8.3) вместо (8.6) для положения главных максимумов (совпадение фаз пучков) получаем (№ 8.9)

$$d(\sin\theta - \sin\theta_0) = m\lambda. \tag{8.9}$$

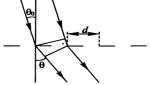
Для дифракционных минимумов вместо (8.4)

$$d(\sin\theta - \sin\theta_0) = (m + p/N)\lambda$$
 где $p = 1, 2, ..., N-1$. (8.10)

Из (8.9) находим

$$d(\sin\theta - \sin\theta_0) = d \cdot 2\cos[(\theta + \theta_0)/2]\sin[(\theta - \theta_0)/2] = m\lambda.$$

При $d >> \lambda$ это соотношение может выполняться только при $\theta \rightarrow \theta_0$ Полагая $\theta \approx \theta_0$, получаем (при условии $d \gg \lambda$



 $d (\theta - \theta_0) \cos \theta_0 \approx m\lambda.$ (8.11)

Постоянная решетки как бы уменьшилась по сравнению со случа-

ем нормального падения и стала равной $d\cos\theta_0$ (вместо d). При этом углы $\theta - \theta_0$, определяющие направления на максимумы, отсчитываются от направления падающего света (или отраженного в отражающей решетке).

Добавочные минимумы, как это следует из (8.3), имеем при $d\sin\theta = \lambda/N$, $d\sin\theta = 2\lambda/N$, $d\sin\theta = 3\lambda/N$, ..., $d\sin\theta = (N-1) \lambda/N$.

В общем виде для добавочных минимумов получаем

$$d\sin\theta = \pm p\lambda/N. \tag{8.4}$$

Здесь p — целые числа, кроме 0, N, 2N, ... Значениям 0, N, 2N, ..., как это видно из (8.3) соответствуют максимумы. Чтобы найти угловую ширину максимума (№ 8.31), надо (8.4) продифференциро-

$$d\cos\theta\delta\theta/\delta p = (\lambda/N)$$

и положить $\delta p = 1$, откуда

вать по *р*:

$$\delta\theta = \lambda/(Nd\cos\theta). \tag{8.5}$$

$$d\sin\theta = \pm m\lambda(m = 0, 1, 2, ...)$$
, причем $m < d/\lambda$. (8.

Эти максимумы называются главными соответствующего порядка т.

10.59. Оценить, на какое среднее расстояние l от своего исходного положения удалится за $t=10\,\mathrm{c}$ молекула воздуха при нормальных условиях.

Подставляя в (10.49) соотношения (10.17), (10.2) и (10.3), при нормальных условиях можем оценить, на какое среднее расстояние удалится от исходного положения молекула в течение заданного времени (№ 10.59).

$$B = \frac{1}{6\pi\eta a}. (10.47)$$

Тепловое движение молекул воздействует и на достаточно крупные частицы, за движением которых можно наблюдать. Такие частицы называют броуновскими (по имени английского ученого, который впервые сообщил об этих наблюдениях). Случайный характер действия молекул, несмотря на изотропность, все же приводит к смещению броуновских частиц. Эйнштейном было получено, что средний квадрат смещения по координате в зависимости от време-HH t

$$\langle x^2 \rangle = 2kTBt = 2Dt. \tag{10.48}$$

По пространству для $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$

$$\langle r^2 \rangle = 6kTBt = 6Dt. \tag{10.49}$$

Длина свободного пробега

$$\lambda = \frac{v}{z} = \frac{1}{n\sigma}.$$
 (10.2)

Это лишь грубая качественная оценка. Молекулы в газе двига-ются с разными скоростями. Общей характеристикой молекулярно-го движения частиц может служить средняя скорость, которая в слу-чае максвелловского распределения по скоростям равна

$$\langle \nu \rangle = \nu_{\rm cp} = \left(\frac{8kT}{\pi m}\right)^{1/2} = \left(\frac{8RT}{n\mu}\right)^{1/2}.$$
 (10.3)

Здесь k — постоянная Больцмана; T — абсолютная температура газа; m — масса молекулы; R — газовая постоянная; μ — молекулярный вес газа.

10.17
$$D = \frac{1}{3} \lambda$$
 скорость молекул воздуха. Газокинетический диаметр молекулы был взят равным 3Å.

10.78.
$$n = n_0 e^{-t/\tau}$$
; $\tau = \frac{3Vl}{2\pi a^3 \overline{v}} = 5 \cdot 10^3 \text{ c} = 83.4 \text{ мин.}$

10.79.
$$n = n_0(1 - e^{-t/\tau}); \ \tau = \frac{12Vl}{\pi D^3 \overline{v}} = 3 \cdot 10^4 \ \mathrm{c} = 8{,}33 \ \mathrm{y}.$$