

Внимание! Теория излучения АЧТ может быть получена также из статистики Бозе-Эйнштейна, в которой ключевую роль играет $\bar{n}(E_i) = \frac{1}{e^{(E_i - \mu)/kT} - 1}$ - среднее число невзаимодействующих между собой бозонов в состоянии с энергией E_i (i - набор квантовых чисел, характеризующих квантовое состояние, μ - химический потенциал). Фотоны - безмассовые бозоны (**фотонный газ** $\mu = 0, E_i = h\nu_i$). Поэтому $\bar{n}(\nu_i) = \frac{1}{e^{(h\nu_i)/kT} - 1}$ (*) - среднее число фотонов в квантовом состоянии с энергией $h\nu_i$. Из (*) выводится формула Планка!

В задачах ДЗ мы имеем дело со спектральной интенсивностью излучения в сплошной среде (отличается от идеального вакуума). Из уравнений Максвелла - отличие состоит в том, что скорость распространения ЭМВ в среде отличается от скорости ЭМВ в вакууме $c : c_m = \frac{c}{n}$, в связи с чем длина волны в среде $\lambda_m = \frac{\lambda}{n}$. При строгом рассмотрении поля излучения (не обязательно АЧТ!!!) в **реальной среде** необходимо учитывать, во-первых, наличие во всех уравнениях показателя преломления n и, во-вторых, его зависимость от длины волны $n(\lambda)$ - **среда с дисперсией**.

$B(\lambda, T) = \frac{2C_1}{\lambda^5 [\exp \frac{C_2}{\lambda T} - 1]}$ (1) - спектральная интенсивность излучения АЧТ в вакууме, если: $C_1 = hc^2$; $C_2 = h \frac{c}{k}$ (c - скорость света в вакууме).

В среде (medium) $C_{1m} = h \left(\frac{c}{n}\right)^2$, $C_{2m} = h \frac{c}{kn}$; $\lambda_m = \frac{\lambda}{n}$, где в общем случае $n = n(\lambda)$.

Спектральная интенсивность излучения АЧТ в среде:

$$B(\lambda_m, T) d\lambda_m = \frac{2C_{1m}}{\lambda_m^5 [\exp \frac{C_{2m}}{\lambda_m T} - 1]} d\lambda_m = \frac{2hc^2 n^5(\lambda)}{\lambda^5 n^2(\lambda) [\exp \frac{hcn(\lambda)}{k\lambda T} - 1]} d\left(\frac{\lambda}{n(\lambda)}\right) \quad (2) \text{ (Формула Планка) .}$$

Если $n(\lambda) = n = const$ (среда без дисперсии), основные законы излучения АЧТ :

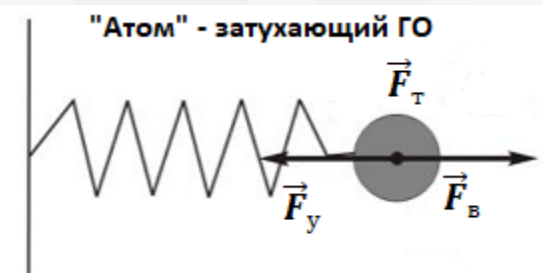
1)- Формула Планка $B(\lambda_m, T) d\lambda_m = \frac{2hc^2 n^2}{\lambda^5 [\exp \frac{hcn}{k\lambda T} - 1]} d\lambda \quad (3)$

2) Закон смещения Вина: $(\lambda_{max})_m = \frac{1}{n} \lambda T \approx 2.808 \dots 10^3 \text{ мкм} \cdot \text{К} \quad (4)$

3) Закон Стефана-Больцмана: $B_m(T) = \int_0^\infty B(\lambda_m, T) d\lambda_m = n^2 B(T) = n^2 \frac{\sigma}{\pi} T^4 \quad (5).$

В случае среды с дисперсией $n = n(\lambda)$ законы излучения АЧТ в аналитическом виде не представляются.

Простейшая модель: а) пренебрегаем взаимодействием между частицами «атомами» (разреженная среда, например, газы); б) электромагнитное поле, действующее на «атом», совпадает с полем падающей на него ЭМВ; в) единственный внешний (оптический) электрон, связанный с ядром (считается неподвижным ($m_e \ll M$)) – гармонический затухающий осциллятор (ГО), если такой электрон вывести из положения равновесия, сообщив ему энергию, он приходит в колебание, затем теряет энергию на излучение, т.е. колебания будут затухающими. Под влиянием поля ЭМВ электрон смещается на некоторое расстояние от положения равновесия, превращая «атом» в электрический диполь. В модели затухающего ГО силы действующие на электрон:



а) вынуждающая сила: $\vec{F}_v = e\vec{E}' + \frac{e}{c}[\vec{v} \times \vec{H}]$, где $\frac{e}{c}[\vec{v} \times \vec{H}]$ – пондермоторная сила (можно пренебречь, т.к. $|\vec{v}| \ll c$).

б) возвращающая сила (упругость «пружины»): $\vec{F}_y = -k\vec{r}$; в) сила трения (поглощение излучения) обусловлена растратой колебательной энергии, связанной, например, с взаимодействием атомов между собой: $\vec{F}_x = -g\dot{\vec{r}}$.

Уравнение движения: $m_e \ddot{\vec{r}} = -k\vec{r} - g\dot{\vec{r}} + e\vec{E}'$ (1) \vec{r} – смещение электрона из положения равновесия. В силу

предположения б) $\vec{E}' = \vec{E}$ – поле падающей ЭМВ. Тогда (1): $\ddot{\vec{r}} + \gamma\dot{\vec{r}} + \omega_0^2\vec{r} = \frac{e}{m_e}\vec{E}(t)$ (2) $\gamma = \frac{g}{m_e}$; $\omega_0^2 = \frac{k}{m_e}$

γ – постоянная затухания; ω_0 – собственная частота ГО. На «атом» (ГО) падает плоская ЭМВ: $\vec{E}(t) = \vec{E}_0(\vec{r})e^{i\omega t} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}$ (3).

Решение (2) $\vec{r}(t) = \vec{r}_0 e^{i\omega t}$. $\vec{r}(t) = \frac{e}{m_e} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma} \vec{E}(t)$ (4). Электрический дипольный момент: $\vec{p}(t) = e\vec{r}(t) = \frac{e^2}{m_e} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma} \vec{E}(t) = \beta(\omega)\vec{E}(t)$ (5).

$\beta(\omega)$ – атомная поляризуемость. Для системы, состоящей из N «атомов» (число ГО в единице объема $[N] = L^{-3}$), вектор поляризации $\vec{P} = N\vec{p}$.

коэффициент поляризуемости системы (восприимчивость): $\alpha(\omega) = N\beta(\omega) = \frac{e^2}{m_e} \frac{N}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma}$ (6).

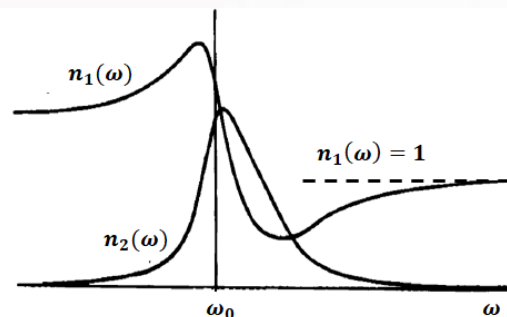
$\alpha(\omega)$ и диэлектрическая проницаемость $\varepsilon(\omega)$ связаны соотношением: $\varepsilon(\omega) = 1 + 4\pi\alpha(\omega) = 1 + \frac{4\pi N e^2 / m_e}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma} = 1 + \frac{\Omega_L^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma}$ (7), где $\Omega_L^2 = 4\pi N e^2 / m_e$ (8) –

ленгмюровская (плазменная) частота. $\varepsilon(\omega)$ – комплексная величина. Показатель преломления: $n(\omega) = \sqrt{\varepsilon(\omega)} = n_1(\omega) - i n_2(\omega)$ (9).

Для разреженной среды: $n(\omega) \approx 1 + \frac{1}{2} \frac{\Omega_L^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma} = 1 + \frac{\Omega_L^2}{2} \frac{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2}$ (10).

$n_1(\omega) = 1 + \frac{\Omega_L^2}{2} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2}$ (11)

$n_2(\omega) = \frac{\Omega_L^2}{2} \frac{\omega\gamma}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2}$ (12)

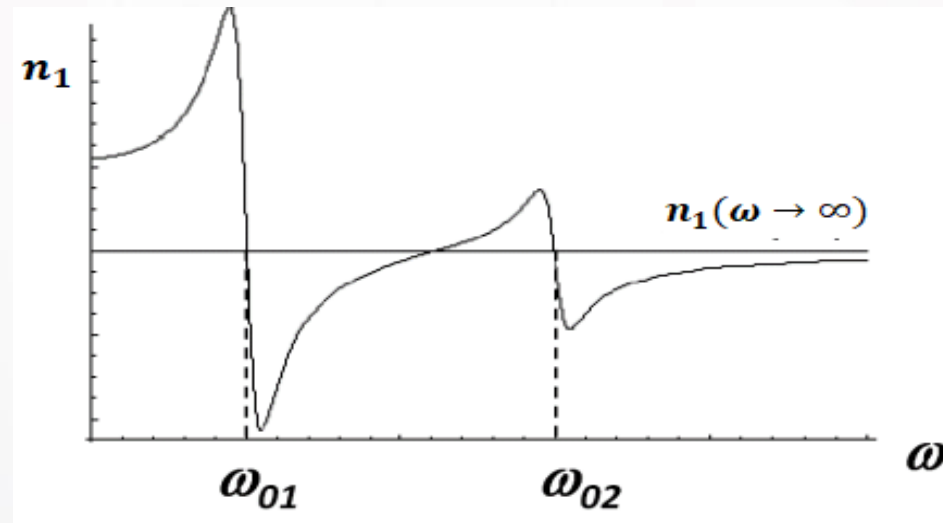


При $|\omega| \rightarrow \omega_0$ $n_2(\omega)$ – резкий максимум (резонанс);

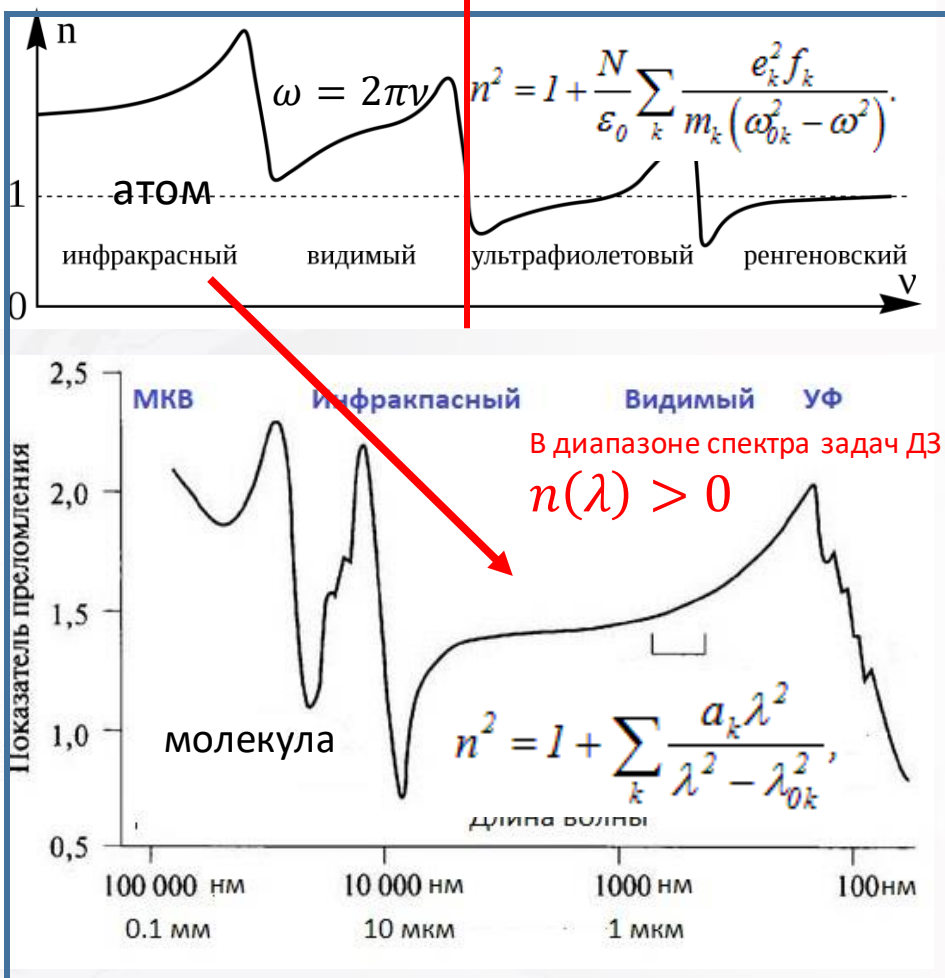
$\frac{dn}{d\omega} < 0$ ($\frac{dn}{d\lambda} > 0$) – аномальная дисперсия.

В областях частот, удаленных от ω_0 , показатель преломления $n(\omega) \approx n_1(\omega)$ причем $\frac{dn}{d\omega} > 0$ ($\frac{dn}{d\lambda} < 0$) – нормальная дисперсия.

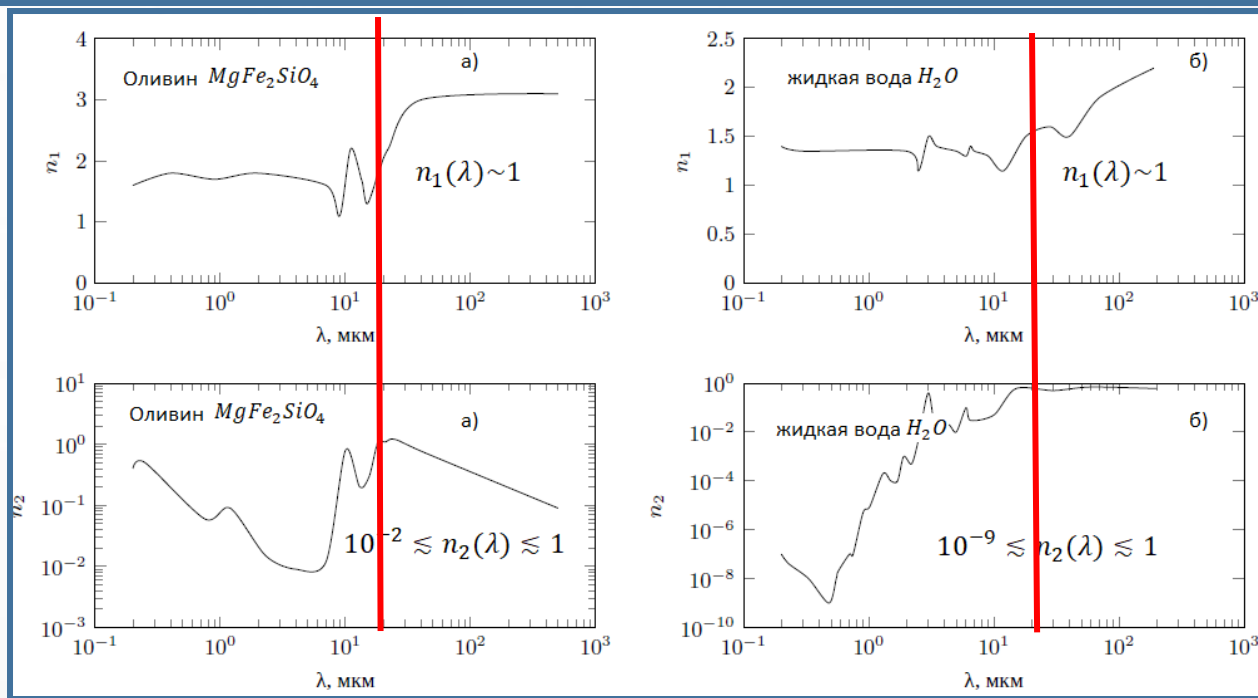
Рассмотренная классическая модель описывает дисперсию показателя преломления и других оптических постоянных в случае, если взаимодействие излучения со средой описывается в рамках **одноосцилляторного** приближения (т.е. только один сорт заряженных частиц - осцилляторов). Однако, для приближения к реальности необходимо учитывать, во-первых, наличие заряженных частиц разных типов (электроны, ионы), и, во-вторых тот факт, что заряженные частицы даже одного сорта могут иметь несколько собственных (резонансных) частот. Новая модель дисперсии описывается более сложной теорией (**многоосцилляторное** приближение), суть которой сводится к необходимости суммирования по осцилляторам разных типов со своими массами, зарядами и собственными частотами. Качественный пример частотной зависимости действительной части показателя преломления для 2-х осцилляторной модели показан на рисунке.



Полный (комплексный) показатель преломления $n(\lambda) = n_1(\lambda) + i n_2(\lambda)$.



В оптическом, МКВ и дальних диапазонах, в отличие от ультракоротковолновых диапазонов (правее УФ и далее рентген и т.д.) дисперсия всегда положительная ($n(\lambda) > 0$). Внизу - зависимости от длины волны в диапазоне ЭМВ (от УФ до МКВ) действительной $n_1(\lambda)$ и мнимой $n_2(\lambda)$ частей показателя преломления для двух веществ: некоторый минерал ОЛИВИН и жидкая вода. На что нужно обратить внимание. 1) В оптическом диапазоне ($\lambda \lesssim 20$ мкм) как для минерала, так и для воды $n_1(\lambda) \approx \text{const} \approx (1.3-2.0) \approx 1.5$. 2) В оптическом диапазоне (но не при всех длинах волн!!!) для минералов и воды можно считать, что $n_2(\lambda) \ll 1$: т.е. там, где $n_2(\lambda)$ сильно зависит от длины волны, а в длинноволновой части спектра, в особенности, для воды $n_2(\lambda) \approx \text{const} = 1$. Таким образом, при решении конкретной практической задачи необходимо иметь ввиду фактор дисперсии при использовании законов АЧТ. Однако, для простоты часто используют простейшую модель АЧТ: среда без дисперсии.

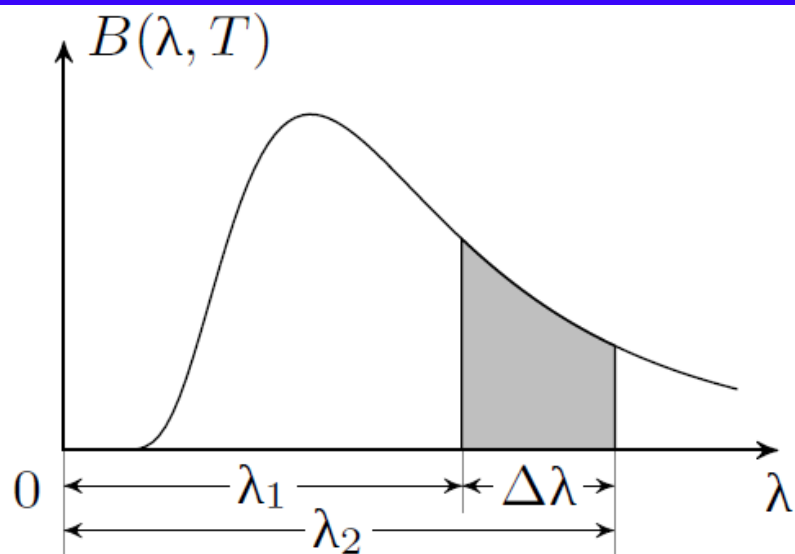


В оптическом, МКВ и дальних диапазонах, в отличие от коротковолновых (правее УФ и далее рентген и т.д.) дисперсия всегда положительная ($n(\lambda) > 0$).

Спектральная интенсивность излучения АЧТ (монохроматическая).

$$B(\lambda, T) d\lambda = \frac{2c_1}{\lambda^5 [\exp \frac{c_2}{\lambda T} - 1]} d\lambda \quad (1)$$

$$B(\nu, T) d\nu = \frac{2h\nu^3}{c^2} (\exp h\nu/kT - 1)^{-1} d\nu \quad (2)$$



1) Эмпирический, состоящий в приближённом представлении: (3)

$$B_{(\lambda_2 - \lambda_1)}(T) = B_{\Delta\lambda}(T), \quad \Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$$

в виде аппроксимационной формулы:

$$B_{\Delta\lambda}(T) \simeq a_{\Delta\lambda} \cdot T^{b_{\Delta\lambda}}. \quad (4)$$

Коэффициент $a_{\Delta\lambda}$ и показатель степени $b_{\Delta\lambda}$ вычисляются заранее для конкретного значения $\Delta\lambda$ с задаваемой точностью. Стоит отметить, что для $\Delta\lambda \in [0, \infty)$ $a_{\Delta\lambda} = \sigma/\pi$, а $b_{\Delta\lambda} = 4$.

$$B_{(\lambda_2 - \lambda_1)}(T) = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} B(\lambda, T) d\lambda \quad (3)$$

2) Построение универсальных функций, что позволяет решить поставленную задачу. Эта функция представляет собой долю энергии, излучаемой АЧТ в конечном спектральном интервале $[\lambda_1, \lambda_2]$ по отношению к энергии, излучаемой в диапазоне $[0, \infty)$:

$$F_{(\lambda_2 - \lambda_1)} = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} B(\lambda, T) d\lambda \bigg/ \int_0^{\infty} B(\lambda, T) d\lambda \quad (5)$$

Представим (5) в следующем виде:

$$F_{(\lambda_2 - \lambda_1)} = \frac{\pi}{\sigma T^4} \left[\int_0^{\lambda_2} B(\lambda, T) d\lambda - \int_0^{\lambda_1} B(\lambda, T) d\lambda \right] = F_{(\lambda_2 - 0)} - F_{(\lambda_1 - 0)} \quad (6)$$

где

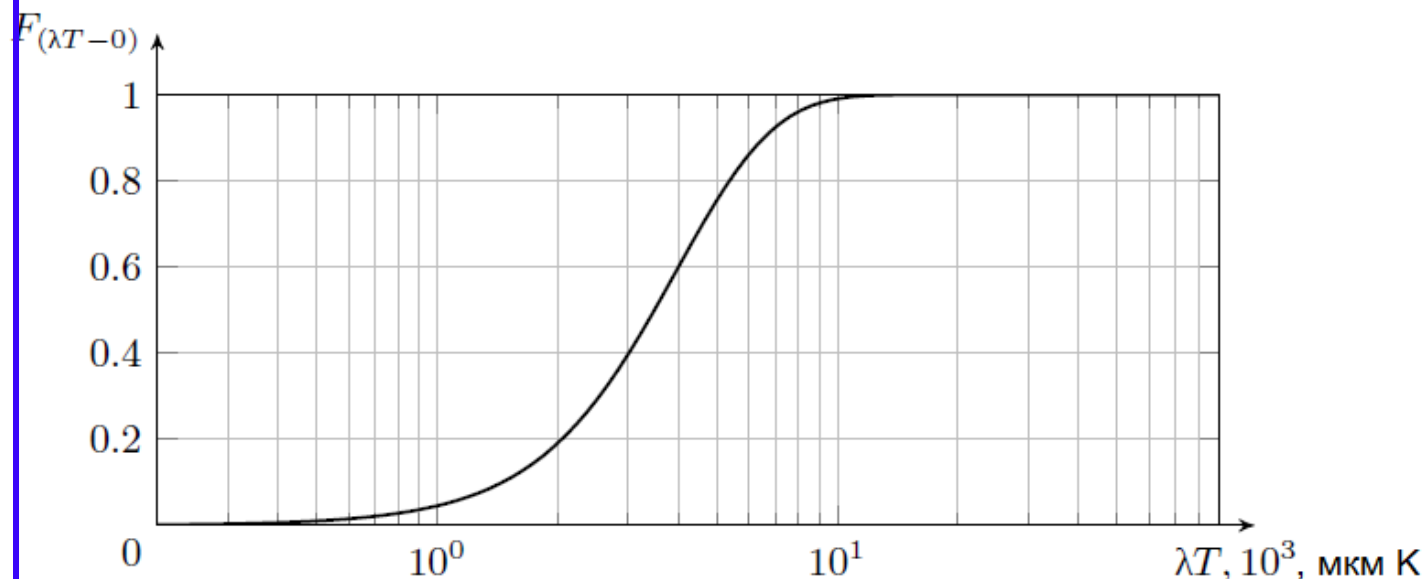
$$F_{(\lambda - 0)} = \frac{\pi}{\sigma T^4} \int_0^{\lambda} \frac{2c_1 d\lambda}{\lambda^5 (e^{c_2/\lambda T} - 1)} \quad (7)$$

В (7) перейдём к переменной $z = \lambda \cdot T$. В результате получим функцию:

$$F_{(\lambda T - 0)} = \frac{2\pi c_1}{\sigma} f(\lambda \cdot T), \quad (8)$$

где

$$f(\lambda \cdot T) = \int_0^{\lambda \cdot T} \frac{dz}{z^5 (e^{c_2/z} - 1)} \quad (9)$$



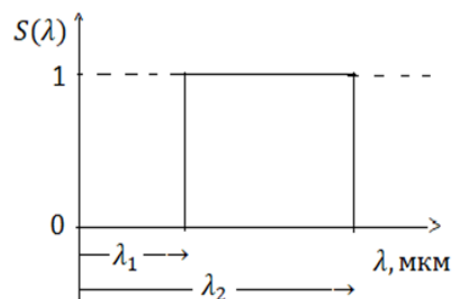
$$F_{(0 - \lambda T)} = (x = \lambda \cdot T) = \quad (10)$$

$$= \begin{cases} \frac{15}{\pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{e^{-nx}}{n^4} (nx^3 + 3n^2x^2 + 6nx + 6) \right] & x \geq 2, \\ 1 - \frac{15}{\pi^4} x^3 \left(\frac{1}{3} - \frac{x}{8} + \frac{x^3}{60} - \frac{x^4}{5040} + \frac{x^6}{272160} - \frac{x^8}{13305600} \right) & x < 2. \end{cases}$$

Задача. 1) С какой **точностью***) приемник ИК-излучения с заданной спектральной чувствительностью (рисунок) будет измерять излучение АЧТ с $T=2778K$.

$\lambda_1 = 0.8 \text{ мкм}$; $\lambda_2 = 5.0 \text{ мкм}$. ?

2) Какую границу λ_1 или λ_2 надо сдвинуть соответственно «влево» или «вправо» для того, чтобы повысить точность измерений.



*) **Точность измерений** – 100% минус долю энергии, не воспринимаемой приёмником (доля энергии, переносимая суммарно от $(0, \lambda_1 = 0.8 \text{ мкм})$ и от $(\lambda_2 = 5.0 \text{ мкм}, \infty)$).

Решение.

$$1) F_{(\lambda_1 T - 0)} + F_{(\lambda_2 T - \infty)} = F_{(\lambda_1 T - 0)} + (1 -$$

*) **Точность измерений** – 100% минус долю энергии, не воспринимаемой приёмником (доля энергии, переносимая суммарно от $(0, \lambda_1 = 0.8 \text{ мкм})$ и от $(\lambda_2 = 5.0 \text{ мкм}, \infty)$).

2) Из графика видно, что если λ_2 сдвигается вправо, то при всех значениях $\lambda \cdot T$ $F_{(\lambda T - 0)} \rightarrow 1$. В то же время в коротковолновой области (левее $\lambda_1 T = 2222.4 \text{ мкм K}$) имеет место сильная зависимость функции $F_{(\lambda T - 0)}$ от $\lambda \cdot T$. Поэтому для повышения точности измерений надо сдвинуть левую границу влево.