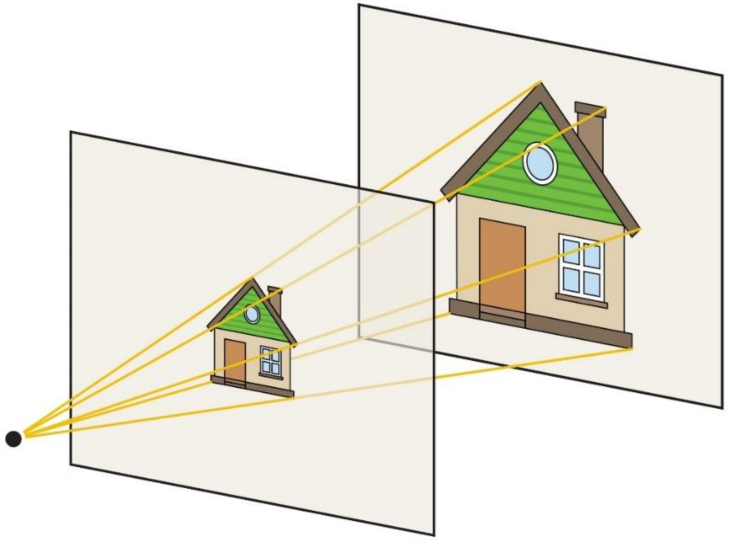
Основы теории размерности и подобия (1))

В физике нет места для путаных мыслей… действительно понимающие природу того или иного явления должны получать основные законы из соображений размерности.

Энрико Ферми



Букингем Э. (1914) О физически подобных системах: иллюстрации использования размерных уравнений, *Phys.Rev., 4*, 345.

Лангхаар Х. Л. (1951) Размерный анализ и теория моделей. Джон Уайли. Нью-Йорк.

Баренблатт Г.И. Автомодельные явления - анализ размерностей и скейлинг. Уч. пособие. МФТИ. Долгопрудный МО, 2009, 216 с.

Ain A. Sonin. The Physical Basis of DIMENSIONAL ANALYSIS. Department of Mechanical Engineering. MIT Cambridge. Second Ed. 2001. 57 p.

Хантли Г. Анализ размерностей. М.: Мир, 1970, 175 с.

Д.И.Трубецков. 2 лекции. Анализ размерностей или райская жизнь в физике. Изв.вузов «ПНД»,т.20,№ 1,2012. сс.16-32.

Иванов М.Г. Размерность и подобие. Долгопрудный. 2013. 68 с.

А.С.Компанеец. Размерность физических величин и подобие явлений. КВАНТ.. №1 1975 г.

Метод размерностей реструктурирует исходные размерные переменные задачи в меньшее подмножество безразмерных конструкций, используя ограничения, налагаемые на них их размерностями. При этом он позволяет определить форму, которую должен принять конкретный физический закон, еще до того, как будет известна его окончательная форма. Хотя метод не может дать точную математическую формулу для конкретного искомого отношения, он, тем не менее, является важным инструментом, который можно использовать для лучшего понимания и описания физических явлений. **Теория размерности предлагает универсальный метод сведения сложных физических проблем к более простым формам, которые позволяют в то же время получить достоверный количественный результат.** Объяснение классика: «**Основное применение метода размерностей состоит в том, чтобы вывести из анализа размерностей переменных в любой физической системе определенные ограничения на форму любых возможных отношений между этими переменными. Этот метод имеет большую общность. и математическую простоту». Bridgman P. 1969.**

1

Основы теории размерности и подобия (2)

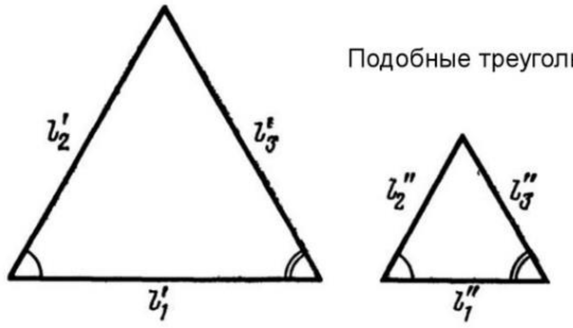
Введение.

В основе (DIMENSIONAL ANALYSIS) размерного анализа лежит **концепция подобия**.

В **физическом смысле подобие** (сходство) означает некоторую эквивалентность между сравниваемыми (двумя) вещами или явлениями, которые на самом деле различны. Например, при некоторых весьма специфических условиях существует прямая связь между силами, действующими на полноразмерный самолет и на его уменьшенную модель. Вопрос в том, каковы эти условия и каково соотношение между силами?

С **математической** точки зрения подобие означает преобразование переменных, которое приводит к уменьшению числа независимых переменных, определяющих проблему. Здесь вопрос в том, какая трансформация работает? Анализ размерностей решает оба этих вопроса. Его основная полезность проистекает из его способности сжимать или делать более краткой функциональную форму физических отношений. Проблема, которая на первый взгляд, кажется трудно разрешимой.

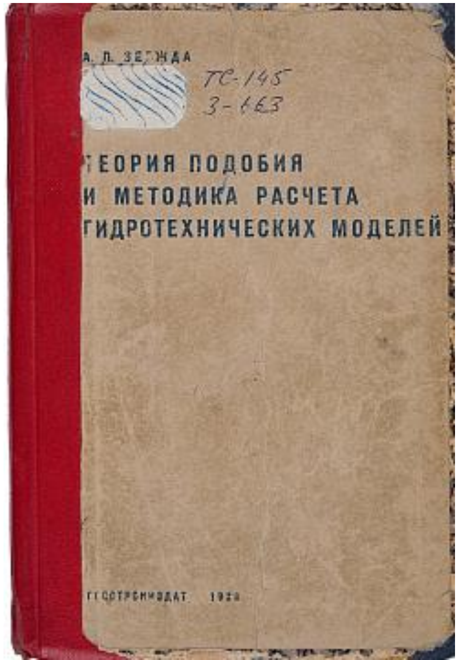
Подобные треугольники



Математическая формулировка геометрического подобия

$$l_1''/l_1' = l_2''/l_2' = l_3''/l_3' = c_l$$

Где Cl – постоянная геометрического подобия



Основные определения теории размерностей

Физические величины выражаются числами, которые получаются путем измерения — прямого или косвенного сравнения с соответствующими единицами измерения. Единицы измерения (ЕИ) разделяются на **первичные (основные) и вторичные (производные).**

Единицы измерения, вводимые опытным путем с помощью произвольных условий или соглашений, называются **основными.** Так, например, вводятся единицы измерения для длины, времени и массы. Для других величин, которые вводятся посредством определений через первичные, единицы измерения определяются через основные. Например, скорость, ускорение, сила и т.д. являются **производными** величинами и их единицы измерения определяются введением основных единиц измерения – массы, длины, времени и т.д.

Совокупность основных ЕИ, достаточная для измерения характеристик рассматриваемого класса явлений, называется системой ЕИ. Выбор системы ЕИ зависит от задачи, иногда, даже от конкретного исследователя: описывая одно и то же явление, могут иметь дело с совершенно различными числами для одних и тех же характеристик.

Механика, например, система ЕИ СГС, в которой за единицу массы принят 1 грамм (г) — 1/1000 массы некоторого специально изготовленного и тщательно сохраняемого эталона, за единицу длины — 1 сантиметр (см) — 1/100 длины другого эталона 1 м и за единицу времени — 1 секунда (с) — 1/86400 доля средних солнечных суток.

Класс систем ЕИ - совокупность систем, отличающихся между собой только величиной основных ЕИ.

СГС входит в класс систем ЕИ, в котором основные ЕИ - г (M), см (L), с (T), где M, L, T — отвлеченные положительные числа, показывающие, во сколько раз изменяются основные единицы массы, длины, времени при переходе от исходной системы СГС к другой системе данного класса. Класс обозначается M L T. К MLT классу принадлежит также, система СИ, в которой единица массы 1 килограмм (кг) = 1000 г — полная масса упомянутого выше эталона массы; единица длины 1 м = 100 см — полная длина эталона длины; за единицу времени — 1 с.

Размерность физической величины - функция, определяющая, во сколько раз изменится численное значение этой величины при переходе от исходной системы ЕИ к другой системе **внутри данного класса.**

Размерные величины - численное значение зависит от выбора ЕИ. **Безразмерные величины** - численное значение не зависит от выбора ЕИ. Размерность безразмерной величины = 1. Численное значение безразмерной величины не меняется при изменении масштабов единиц измерения в произвольное число раз.

Формула размерности. Размерность записывается в виде формул, в которых в зависимости от класса систем ЕИ для обозначения **основных ЕИ** используются специальные символы. Например, в (механических) системах СГС или СИ используются 3 символа: длина - L, время - T, масса - M.
Размерность **производных величин** – комбинации основных символов, соответствующие определению величины:
скорость: $[v] = LT^{-1}$; ускорение: $[a] = LT^{-2}$; сила: $[F] = MLT^{-2}$; плотность: $[\rho] = ML^{-3}$; энергия: $[E] = ML^2T^{-2}$; давление: $[p] = ML^{-1}T^{-2}$, и т.д

Размерность физической величины – степенной одночлен. Строгое доказательство [Г.И.Баренблатт. Подобие, автомодельность, промежуточная асимптотика. Гидрометеоиздат. Л: 1982. 255 с.].

В системе ЕИ (LMT) (СГС, СИ,...) формула размерности для произвольной величины A:

$$[\boldsymbol{A}] = \boldsymbol{L}^{m_1}\boldsymbol{M}^{m_2}\boldsymbol{T}^{m_3} \quad (1)$$

величина	размерность	единица	обозначение
длина	L	метр	м/m
масса	M	килограмм	кг/kg
время	T	секунда	с/s
сила тока	I	ампер	A/A
температура	Θ	кельвин	K/K
количество вещества	N	моль	моль/mol
сила света	J	кандела	кд/kd

Примечание. Расширенная система СИ. Международная система ЕИ СИ включает 7 **основных единиц** (таблица).
Если число основных единиц измерения > 3 (расширенная система СИ ЕИ $a_1, a_2, \dots, a_k$ n=7), **формула размерности** для A:

$$[\boldsymbol{A}] = [\boldsymbol{a_1}]^{m_1}[\boldsymbol{a_2}]^{m_2} \dots [\boldsymbol{a_k}]^{m_k} \quad (2),$$

где $[a_1], \dots [a_k]$ - размерности **основных величин.**

Утверждение. $a_1, a_2, \dots, a_k$ имеют независимую размерность, если размерность ни одной из этих величин нельзя представить в виде произведения степеней размерностей остальных величин. Например, размерности плотности ML^{-3}, скорости LT^{-1} и силы MLT^{-2} **независимы**, а размерности плотности, скорости и давления $ML^{-1}T^{-2}$ **зависимы**.

Закономерности, определяемые в физической теории или в эксперименте, всегда представляются в виде:
$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a_1}, \dots, \boldsymbol{a_k}, \boldsymbol{a_{k+1}}, \dots, \boldsymbol{a_n})$ (3), где $a_1, \dots, a_k, a_{k+1}, \dots, a_n$ - **определяющие параметры**, численные значения которых зависят от выбора системы ЕИ. Размерности обоих частей равенства (3), отражающего физическую закономерность – **одинаковы.**

Анализ размерностей. Рассматривается физическое явление, математическая запись которого представляет собой зависимость определяемого параметра (физическая величина A) от других величин, характеризующих это явление. Закономерности, определяемые в физической теории или в эксперименте, всегда представляются в виде:

$$A = f(a_1, \dots, a_k, a_{k+1}, \dots, a_n) \quad (3),$$

где аргументы $a_1, \dots, a_k, a_{k+1}, \dots, a_n$ - **определяющие параметры**, численные значения которых зависят от выбора системы ЕИ. В другой системе ЕИ, получим другие значения определяющих параметров. С другой стороны, вид функции f не должен зависеть от выбора системы ЕИ, поскольку эта функция выражает физическую закономерность, не связанную с тем, какой наблюдатель ее изучает и какой системой ЕИ пользуется. Поэтому должна существовать запись зависимости (3), не зависящая от выбора системы ЕИ (инвариантная по отношению к выбору). Очевидно, что такая запись должна содержать только безразмерные величины. Теорема, доказывающая возможность записи любого соотношения между размерными величинами, выражающего физическую закономерность, в безразмерном инвариантном виде (**Пи-теорема**). (**Букингем (1912)**)

Доказательство Пи-теоремы.

В (3) $a_1, \dots, a_k, a_{k+1}, \dots, a_n$ – определяющие параметры. О**сновные величины** $a_1, \dots, a_k$ – имеют независимые размерности, а **производные** $\boldsymbol{a_{k+1}}, \dots, \boldsymbol{a_n}$ выражаются через размерности $a_1, \dots, a_k$:

$$\begin{array}{c} [a_{k+1}] = [a_1]^{m_1} \dots [a_k]^{m_k} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ [a_n] = [a_1]^{n_1} \dots [a_k]^{n_k} \end{array} \quad (4)$$

Размерность A должна также выражаться через размерности $a_1, \dots, a_k$:

$$[A] = [a_1]^{s_1} \dots [a_k]^{s_k} \quad (5).$$

Поэтому (3) можно представить в виде:

$$\frac{A}{a_1^{s_1}.a_2^{s_2}\dots a_k^{s_k}} = f^*\left(a_1, \dots, a_k, \frac{a_{k+1}}{a_1^{m_1}.a_2^{m_2}\dots a_k^{m_k}}, \dots, \frac{a_n}{a_1^{n_1}.a_2^{n_2}\dots a_k^{n_k}}\right) \quad (6),$$

где f^* - новая функция, получающаяся из f перераспределением ее аргументов. Безразмерные величины в (6) обозначим:

$$\frac{A}{a_1^{s_1}.a_2^{s_2}\dots a_k^{s_k}} = \Pi; \quad \frac{a_{k+1}}{a_1^{m_1}.a_2^{m_2}\dots a_k^{m_k}} = \Pi_1; \dots; \quad \frac{a_n}{a_1^{n_1}.a_2^{n_2}\dots a_k^{n_k}} = \Pi_{n-k} \quad (7).$$

Т.е. (7): $\Pi = \boldsymbol{f}^*(\boldsymbol{a_1}, \dots, \boldsymbol{a_k}, \Pi_{\boldsymbol{1}}, \dots, \Pi_{\boldsymbol{n-k}}) \quad (8)$

$$\Pi = \boldsymbol{f}^*(\boldsymbol{a_1}, \dots, \boldsymbol{a_k}, \Pi_\mathbf{1}, \dots, \Pi_{\boldsymbol{n-k}}) \quad (8)$$

При произвольном изменении системы ЕИ основных размерных аргументов $a_1, \dots, a_k$ их численные значения будут также произвольно меняться. Пусть при переходе к новой системе ЕИ, меняются в произвольное число раз последовательно каждый из $a_1, \dots, a_k$, при условии, что остальные сохраняются неизменными. Т.е. имеют место:

$$\frac{\partial f^*}{\partial a_1} = 0 \text{ при } a_2 = const(2), \dots . a_k = const(k);$$

$$\dots\dots\dots\dots \quad (9)$$

$$\frac{\partial f^*}{\partial a_k} = 0 \text{ при } a_1 = const(1), \dots a_{k-1} = const(k-1)$$

Т.е. в (8) в отличии от размерных аргументов $a_1, \dots, a_k$ численные значения безразмерных $\Pi_1, \dots, \Pi_{n-k}$ и Π при переходе от одной системы ЕИ к другой внутри данного класса остаются неизменными. Поэтому (8) имеет вид:

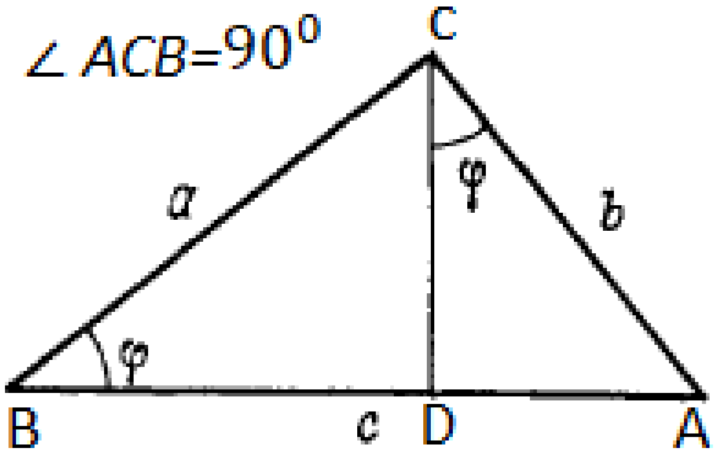
$$\boxed{\Pi = \boldsymbol{\Phi}(\Pi_\mathbf{1}, \Pi_\mathbf{2}, \dots, \Pi_{\boldsymbol{n-k}})} \quad (10)$$

Исходная (анализируемая) функция (3):

$$\boxed{A = f(a_1, \dots, a_k, a_{k+1}, \dots, a_n) = a_1^{s_1} . a_2^{s_2} \dots a_k^{s_k}\, \Phi\left(\frac{a_{k+1}}{a_1^{m_1} . a_2^{m_2} \dots a_k^{m_k}}, \dots, \frac{a_n}{a_1^{n_1} . a_2^{n_2} \dots a_k^{n_k}}\right)} \quad (11)$$

Формулировка Пи-теоремы. Пусть существует физическая закономерность, выраженная в виде зависимости некоторой размерной величины A=$f(a_1, \dots, a_k, a_{k+1}, \dots, a_n)$ от размерных определяющих параметров $a_1, \dots, a_k, a_{k+1}, \dots, a_n$. Эта зависимость может быть представлена в виде зависимости некоторой безразмерной величины от безразмерных комбинаций определяющих параметров. Количество этих безразмерных комбинаций меньше общего числа определяющих параметров на число размерных определяющих параметров с независимыми размерностями.

1) Теорема Пифагора.



Исследуемая физическая зависимость площадь S прямоугольного т-ка ABC. **определяется 2-мя** (определяющие) **параметрами**: длина одной из сторон и величина одного из углов треугольника. Например, гипотенуза ***C*** и меньший из острых углов φ:

$$S = f(c, \varphi) \quad (1.1)$$

Из соображений размерности: $S = C^2\Phi(\varphi)$. Высота *CD* разбивает ABC на два подобных ему прямоугольных треугольника (BDC и ADC), гипотенузы которых - соответственно катеты *a* и *b* основного треугольника. Площади BDC и ADC соответственно:

$$S_{BDC} = a^2\,\Phi(\varphi) \text{ и } S_{ADC} = b^2\,\Phi(\varphi),$$

где $\Phi(\varphi)$— то же, что и в случае основного треугольника.. Т.к. $S = S_{BDC} + S_{ADC}$ то $C^2\Phi(\varphi) = a^2\,\Phi(\varphi) + b^2\,\Phi(\varphi)$ и $C^2 = a^2 + b^2$, ч.т.д.

2) Перепад давлений при установившемся течении вязкой несжимаемой жидкости по цилиндрической трубе от гидродинамических параметров, определяющих это движение.

Определяющие параметры: свойства жидкости: плотность ρ, вязкость μ; **кинематика движения:** средняя по сечению трубы скорость потока v; **геометрические параметры трубы:** диаметр d, длина l и характеристики внутренней поверхности трубы — шероховатость Δ. (Δ - среднее значение величины выступов неровностей поверхности).

Исследуется зависимость перепада давления в 2- х сечениях трубы от 6 определяющих параметров:

$$\Delta p = p_1 - p_2 = f(\rho, \mu, v, d, l, \Delta) \quad (2.1)$$

Продолжение примера 2)

Среди определяющих аргументов $\Delta p = p_1 - p_2 = f(\rho, \mu, v, d, l, \Delta)$ (2.1) есть **основные**, т.е. размерно-независимые и **производные** – размерно-зависимые. **Основные** - ρ, v, d (3 параметра): в размерность скорости входит время, в размерность плотности – масса, а в размерность диаметра только длина. Размерности размерно-зависимых аргументов и исследуемой величины:

$$[\Delta p] = [\rho][v]^2;\ [\mu] = [\rho][v][d];\ [l] = [d];\ [\Delta] = [d] \quad (2.2)$$

(**Вопрос.** Какова размерность коэффициента вязкости $[\mu]$?). $\left(\frac{\mu}{\rho v d} = Re^{-1}[Re] = 1\right)$.

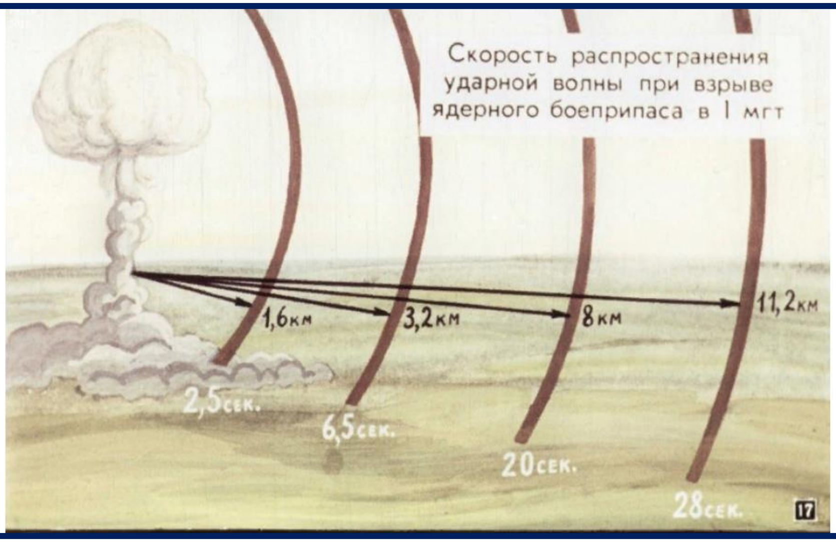
4 безразмерных Пи величины: $\Pi = \frac{\Delta p}{\rho v^2}, \Pi_1 = \frac{\mu}{\rho v d}, \Pi_2 = \frac{l}{d}, \Pi_3 = \frac{\Delta}{d}$ (2.3)

В соответствии с Пи-теоремой зависимость (2.1): $\boxed{\frac{\Delta p}{\rho v^2} = f_1\left(\frac{\mu}{\rho v d}, \frac{l}{d}, \frac{\Delta}{d}\right)}$ (2.4)

В (2.4) $\frac{\mu}{\rho v d} = Re^{-1}$ (Re – число Рейнольдса), $\frac{\Delta}{d} = \varepsilon$ – относительная шероховатость внутренней поверхности трубы. Строгие расчеты показывают, что с увеличением длины участка трубы l перепад давления возрастает линейно, т.е. (2.4) принимает более простой вид:

$$\boxed{\Delta p = f_2(Re, \varepsilon)\frac{l}{d}\rho v^2} \quad (2.5)$$

3) Точечный ядерный взрыв в однородной атмосфере



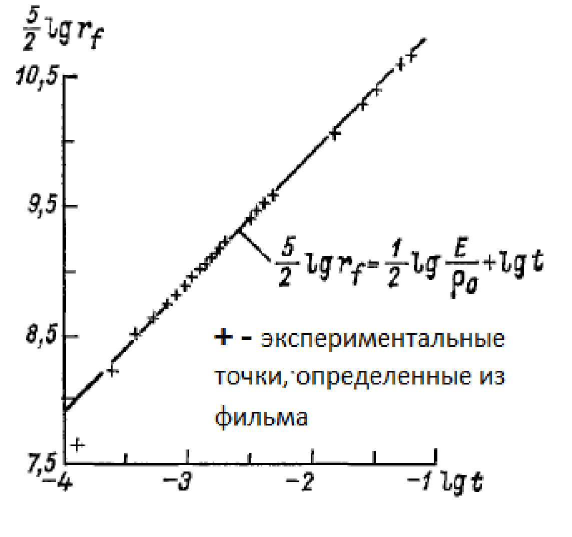
МОДЕЛЬ. На высоте Н в однородной атмосфере в малом объеме (практически точка), почти мгновенно выделяется большая энергия ***E*** (модель воздушного ядерного взрыва). От точки взрыва распространяется мощная сферическая ударная волна (УВ). В первые моменты времени давление за УВ $P_1 \gtrsim 10^5$ атм. $P_1 >> P_0$ -начальное давление воздуха, влиянием которого на первой стадии взрыва можно пренебречь. Радиус фронта ударной волны r_f через промежуток времени t после взрыва зависит от £, t и начальной плотности воздуха в точке взрыва ρ_0:

Исследуется процесс: $\boldsymbol{r_f = r_f(E, t, \rho_0)}$ (3.1), где E, t и ρ_0 – определяющие (основные) параметры $(n = 3)$, размерности которых в классе MLT: $[E] = ML^2T^{-2}$; $[t] = T$; $[\rho_0] = ML^{-3}$. В данном случае $k = 3$ т.е. $n - k = 0$.

Т.е. (11) $f(a_1, \dots, a_k, a_{k+1}, \dots, a_n) = a_1^{s_1}.a_2^{s_2} \dots a_k^{s_k}\,\Phi\left(\frac{a_{k+1}}{a_1^{m_1}.a_2^{m_2}\dots a_k^{m_k}}, \dots, \frac{a_n}{a_1^{n_1}.a_2^{n_2}\dots a_k^{n_k}}\right)$:

$r_f(E, t, \rho_0) = E^{1/5}t^{2/5}\rho_0^{-1/5}\Phi(\quad) = M^{1/5}L^{2/5}T^{-2/5}T^{2/5}M^{-1/5}L^{3/5}\Phi$ (3.2) **(след, слайд)**

где $\Phi = C$- const. $r_f(E, t, \rho_0) = C\left(\frac{Et^2}{\rho_0}\right)^{1/5}$ (3.3) $\boxed{\frac{5}{2}\lg r_f = \frac{5}{2}\lg\left(CE^{1/5}\rho_0^{-1/5}\right) + \lg t}$ (3.4)



По экспериментальной зависимости радиуса фронта от времени можно определить энергию взрыва. Публикация Тейлором этой величины, оказавшейся равной примерно 10^{21} эрг (10^{14} Дж), вызвала в свое время немалое смущение в американских правительственных кругах, поскольку эта цифра **считалась весьма секретной, хотя фильм Мака секретным не был.**

3) Точечный ядерный взрыв в однородной атмосфере (матрица размерностей)

Исследуется процесс: $\boldsymbol{r_f = r_f(E, t, \rho_0)}$ (3.1), где E, t и ρ_0 – определяющие (основные) параметры $(n = 3)$, размерности которых в классе MLT: $[E] = ML^2T^{-2}$; $[t] = T$; $[\rho_0] = ML^{-3}$. В данном случае $k = 3$ т.е. $n - k = 0$.

Т.е. (11) $f(a_1, \dots, a_k, a_{k+1}, \dots, a_n) = a_1^{s_1}.a_2^{s_2} \dots a_k^{s_k}\, \Phi\left(\frac{a_{k+1}}{a_1^{m_1}.a_2^{m_2} \dots a_k^{m_k}}, \dots, \frac{a_n}{a_1^{n_1}.a_2^{n_2} \dots a_k^{n_k}}\right)$;

$r_f = \Phi(\quad) E^{s_1} \rho_0{}^{s_2} t^{s_3} \quad (*)$. Так что функция Φ в (*) не зависит ни от одного аргумента, т.е. Φ=const

Матрица размерностей:

	r	*E*	ρ_0	*t*
L	1	2	-3	0
M	0	1	1	0
T	0	-2	0	1

Из (*): $L^1M^0T^0 = (ML^2T^{-2})^{s_1}(ML^{-3})^{s_2}\,(T)^{s_3} = L^{(2s_1-3s_2)}M^{(s_1+s_2)}T^{(-2s_1+2s_3)}$.

$$\boldsymbol{1 = 2s_1 - 3s_2;\ 0 = s_1 + s_2;\ 0 = -2s_1 + 2s_3}$$

$$\boldsymbol{s_1 = \frac{1}{5};\ s_2 = -\frac{1}{5};\ s_3 = \frac{2}{5};}$$

$r_f(E, t, \rho_0) = E^{1/5}t^{2/5}\rho_0{}^{-1/5}\Phi = M^{1/5}L^{2/5}T^{-2/5}T^{2/5}M^{-1/5}L^{3/5}\Phi$ (3.2), где $\Phi = C$- const

$$\boldsymbol{r_f(E, t, \rho_0) = C\left(\frac{Et^2}{\rho_0}\right)^{1/5}} \quad (3.3) \quad \boldsymbol{\frac{5}{2} lg\, r_f = \frac{5}{2} lg\left(CE^{1/5}\rho_0^{-1/5}\right) + lg\, t} \quad (3.4)$$

Константа *C* определяется либо **экспериментально,** либо из полного численного моделирования явления. Вторая задача – практически неподъемная. Первая вполне реальная!. Важно, что в соответствии с теорией подобия, эксперимент можно проводить в лабораторных условиях. После того, как константа *C* определена (3.3) – **точное соотношение**. $\boldsymbol{E \approx 10^{14}}$ **Дж ~1 мегатонны тринитротолуола**!!!!

Мюллер Р.А. Физика для будущих президентов. М.: АСТ: Астрель: Полиграфиздат, 2011, 411 с.

4) Законы излучения АЧТ. Закон Стефана_Больцмана.

Задача. Оценить зависимость от температуры (T) поток энергии (q), излучаемый АЧТ на всех частотах ЭМС.

Внимание. Необходимо принимать во внимание учет в исходной постановке **фундаментальные мировые константы**, к которым обычно относятся: гравитационная постоянная G, скорость света в вакууме С и постоянная Планка h, которая входит в описание всех физических явлений на квантовом уровне. К таким явлениям относится процессы излучения (поглощения) (излучаемая и поглощаемая энергия квантуется). Энергия кванта $E = h\nu$. Т.е. размерность h в СИ $[h] = \text{кг м}^2\ \text{с}^{-1} = \text{Дж с}$ (в СГС - $[h] = \text{кг м}^2\ \text{с}^{-1} = \text{эрг с}$.

Шаг 1. Физическая постановка: кванты движутся со скоростью света C. Если ввели фактор температуры, то соответствующая энергия - kT. Естественно предположить, что в данном случае функционально связаны величины $((q, kT, C, h)$.

Т.е. искомая зависимость: $\boldsymbol{q = f(k, T, C, h)}$ (4.1).

Шаг 2. Анализ: выделение основных размерностей

5 величин (2 физические переменные: q и T и 3 фундаментальные константы: k, C, h. Т**аблица 1.** Видно, что количество размерных величин - 5, а количество основных размерностей - 4 (M, L, T, Θ), Т.е. в (4.1) $n = k = 4$ $(n - k = 0)$. $\Phi(\ ) = \text{const}$. Пи-теорема: $\boldsymbol{q = T^{\alpha_1} C^{\alpha_2} k^{\alpha_3} h^{\alpha_4} const}$ (4.2)

Шаг 3. М**атрица размерностей (таблица 2).**

Из (4.2) и таблицы 2 имеем:

$$L^0 M^1 T^{-3} \Theta^0 = T^{\alpha_1} C^{\alpha_2} k^{\alpha_3} h^{\alpha_4} const = (L^0 M^0 T^0 \Theta^1)^{\alpha_1} (L^1 M^0 T^{-1} \Theta^0)^{\alpha_2}$$
$$(L^2 M^1 T^{-2} \Theta^{-1})^{\alpha_3} (L^2 M^1 T^{-1} \Theta^0)^{\alpha_4} \text{ const (4.3).}$$

Отсюда:

$$0 + \alpha_2 + 2\alpha_3 + 2\alpha_4 = 0$$
$$0 + 0 + \alpha_3 + \alpha_4 = 1$$
$$0 - \alpha_2 - 2\alpha_3 - \alpha_4 = -3 \quad (4.4)$$
$$\alpha_1 + 0 - \alpha_3 + 0 = 0$$

$\Rightarrow$

$$\alpha_1 = \alpha_3 = 4$$
$$\alpha_2 = -2;\ \alpha_4 = -3$$
$$\boldsymbol{q = T^4 C^{-2} k^4 h^{-3} const} = \frac{const\, k^4}{C^2 h^3} T^4 \sim T^4 \quad (4.5).$$

Строгое решение приводит к $\left({2\pi^5}/{15}\right)\ {k^4}/{C^2 h^3}$ ~постоянная Стефана-Больцмана

Таблица 1

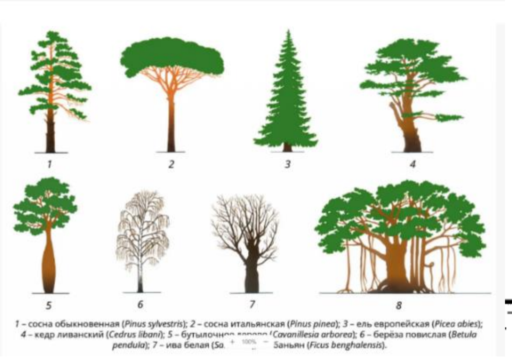
Величина	Обозначение	Система ЕИ СИ	Размерность
Поток излучения	q	$Кг\ \text{с}^{-3}$	MT^{-3}
Температура	T	К	Θ
Скорость света	c	м с^{-1}	mT^{-1}
Постоянная Больцмана	k	$\text{м}^2 Кг/(\text{с}^2 K)$	$ML^2T^{-2}\Theta^{-1}$
Постоянная Планка	h	$\text{м}^2 Кг\ \text{с}^{-1}$	ML^2T^{-1}

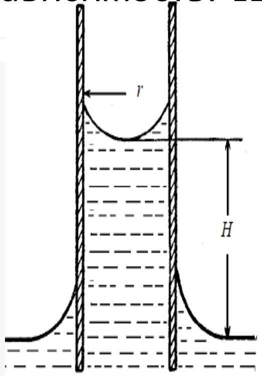
Таблица 2

	q	T	c	k	h
L	0	0	1	2	2
M	1	0	0	1	1
T	-3	0	-1	-2	-1
Θ	0	1	0	-1	0

5) Максимально возможная высота H дерева над поверхностью Земли

Модель. $\boldsymbol{H}$ **–** максимальная высота кроны (листвы). H **–** максимальная высота капилляра, по которому влага, доставляется из почвы до самых верхних листьев. Радиус капилляра – r; плотность жидкости ρ; коэффициент поверхностного натяжения – σ; ускорение свободного падения - g. Исследуется зависимость: $\boldsymbol{H = f(r,\rho,\sigma,g)}$ или $\boldsymbol{F(H,r,\rho,\sigma,g)}$ (5.1)





Особенность задачи: $[H] = [r] = L$, причем H – геометрический размер капиллярного столба, r – толщина капиллярного канала (разный физический смысл) !!! Поэтому далее: $[H] - L_H = \text{см}_H$, а $[r] - L_r = \text{см}_r$. В капилляре объем жидкости формируется из-за изменения высоты, а не за счет радиуса: $[\rho] - ML_H^{-2}L_r^{-1} = \text{гсм}_H^{-2}\text{см}_r^{-1}$.

Таблица 1

Величина	Символ	ЕИ СГС	Размерность
Высота	H	см_H	L_H
Радиус	r	см_r	$L_к$
Плотность ж.	ρ	$\text{гсм}_H^{-2}\text{см}_r^{-1}$	$ML_H^{-2}L_r^{-1}$
Поверхностн. натяжение	σ	гс^{-2}	MT^{-2}
Ускорение	g	$\text{см}_H\text{с}^{-2}$	$L_H T^{-2}$

Таблица 2

	H	r	ρ	σ	g
L_H	1	0	-2	0	1
L_r	0	1	-1	0	0
M	0	0	1	1	0
T	0	0	0	-2	-2

Из табл. 1 и (5.1) $n = k = 4$. $\Phi(\pi_0) - const$

Пи-теорема:

$$\boldsymbol{H = f(r,\rho,\sigma,g) = r^\alpha \rho^\beta \sigma^\gamma g^\delta \mathrm{const}}$$

Из табл. 2:

$$L_H^1 L_r^0 M^0 T^0 = L_H^0 L_r^\alpha M^0 T^0\ L_H^{-2\beta} L_r^{-\beta} M^\beta T^0\ L_H^0 L_r^0 M^\gamma T^{-2\gamma}\ L_H^\delta L_r^0 M^0 T^{-2\delta} const$$ (5.2). Отсюда (5.3):

$$0 - 2\beta + 0 + \delta = 1$$
$$\alpha - \beta + 0 + 0 = 0$$
$$0 + \beta + \gamma + 0 = 0$$
$$0 + 0 - 2\gamma - 2\delta = 0$$

(5.3) $\rightarrow$ $\boldsymbol{\alpha = -1}$, $\boldsymbol{\beta = -1}$, $\boldsymbol{\gamma = 1}$, $\boldsymbol{\delta = -1}$

$\boldsymbol{H = \frac{\sigma}{r\,\rho\,g} const}$ (5.4). const ≈ 1 из лабораторного эксперимента или максимально точного численного моделирования капилляра. $\varrho \approx 70$ дин см; $\rho = 1$ г см$^{-3}$; $g = 10^3$см с$^{-2}$. **Оценка** $\boldsymbol{r}$??? Максимальная оценка H $\rightarrow$ минимапльное **физически обоснованное** значение r. По капилляру движется жидкость – вода, являющаяся сплошной средой, т.е. $r \gtrsim 10^2 d_{H_2O} \sim 10^{-5}$см. Эта величина близка значениям размеров реальных древесных капилляров. Итог: $\boldsymbol{H = \frac{\sigma}{r\,\rho\,g} \lesssim \frac{70}{10^{-5}\ 1\ 10^3} = 70}$ **м.**

Подобие и моделирование физических явлений. Основы!!!

Теория размерностей: открывает законы подобия физических явлений и позволяет осуществлять их моделирование, т.е. позволяет заменять явление в натуре аналогичным явлением в уменьшенном или увеличенном масштабе в условиях эксперимента.
Классические примеры.
1) **Простейший пример геометрического моделирования**. Вычислить радиус окружности, вписанной в треугольник со сторонами 1 км, 2 км и 3 км. Задача легко решается простым алгебраическим расчетом. Альтернатива: На бумаг рисуем уменьшенный треугольник, подобный данному, например со сторонами 10 см, 20 см, 30 см. **Коэффициент подобия =** 10000. Вписав в нарисованный треугольник окружность, измеряем ее радиус, значение которого умножается на коэффициент подобия (10000) = искомому значению радиуса окружности, вписанной в натурный треугольник..
2) **Более сложный пример: проектирование плотин**. Необходимо выяснить, выдержит ли плотина, построенная на реке, напор паводковых вод. Эксперимент в лаборатории. Уменьшенная копия проектируемой плотины устанавливается на модели «реки» в лаборатории. Очевидно: если модель плотины сделать из того же материала, что и проектируемую, или скорость течения «реки» взять такую же, как и в натуре, то правильный ответ на поставленный вопрос не будет найден. Дело в том, что при уменьшении линейных размеров явления, мало обеспечить геометрическое подобие. Нужно специальным образом изменить масштабы и многих других параметров явления.
Подобные явления - физические явления, одинаковые качественно по форме и по содержанию: имеют одну физическую природу, развиваются под действием одинаковых сил и описываются одинаковыми по форме дифференциальными уравнениями и краевыми условиями. **Обязательным условием подобия физических явлений должно быть геометрическое подобие систем, где эти явления протекают**. Два физических явления будут подобны лишь в том случае, если будут подобны все величины, которые характеризуют их. Для всех подобных систем существуют безразмерные комплексы величин, которые называются **критериями подобия**.
Теория подобия базируется на 3-х теоремах. 1)Подобные явления имеют одинаковые критерии подобия. 2) Любая зависимость между переменными, характеризующая какие-либо явления, может быть представлена, в форме зависимости между критериями подобия, составленными из этих переменных (критериальное уравнение). 3) Два явления подобны, если они имеют подобные **условия однозначности и численно одинаковые определяющие критерии подобия.**

Два явления называются подобными, если по заданным параметрам одного из них, аналогичные параметры другого находятся простым пересчетом, таким же, как при переходе от одной системы единиц измерения к другой. Каждое из нескольких подобных явлений называется моделью любого другого явления из этой совокупности.

Критерии подобия и техника моделирования.

Реальное явление (процесс) описывается физической величиной А, определяемой набором физических параметров:

$$A = f(a_1, a_2, \dots, a_n) \quad (1)$$

Модель явления состоит в зависимости аналогичной физической величины A' от тех же физических параметров, значения которых, однако, отличаются от значений параметров, определяющих величину A.

Т.е. **модельная зависимость**:

$$A' = f(a_1', a_2', \dots, a_n') \quad (2)$$

Согласно Пи-теореме зависимости (1) и (2) могут быть переписаны в безразмерном виде:

$$\Pi = f_1(\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_{n-k}) \quad \Pi' = f_1(\Pi'_1, \Pi'_2, \dots, \Pi'_{n-k}) \quad (3),$$

где k — число размерно-независимых параметров среди величин $(a_1, a_2, \dots, a_n)$.

Соотношения (3) показывают, что если параметры $(a'_1, a'_2, \dots, a'_n)$ подобраны таким образом, что выполняются условия:

$\Pi_1' = \Pi_1;\ \Pi_2' = \Pi_2; \dots, \Pi_{n-k}' = \Pi_{n-k}$ (4), то будет выполняться и условие $\Pi' = \Pi$ (5)

Значение исследуемой величины A определяется по значению «модельной» величины A':

$$A = A' \frac{a_1^{m_1} a_2^{m_2} \dots a_k^{m_k}}{a_1'^{m_1} a_2'^{m_2} \dots a_k'^{m_k}} \quad (6)$$

Необходимое и достаточное условие подобия двух явлений (реальное и моделируемое) - равенство безразмерных комплексов (4). При этом: $\Pi' = \Pi$. Безразмерные параметры Π, Π_i $(i = 1,2, \dots, n-k)$ **критерии подобия.**