

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)

М. Ю. Овчинников

# ВВЕДЕНИЕ В ДИНАМИКУ КОСМИЧЕСКОГО ПОЛЁТА

*Допущено*

*Учебно-методическим объединением высших учебных заведений РФ  
по образованию в области прикладных математики и физики в качестве  
учебного пособия для студентов вузов, обучающихся по направлению подготовки  
«Прикладные математика и физика», а также по другим математическим  
и естественнонаучным направлениям и специальностям*

МОСКВА  
МФТИ  
2016

*Поддержано Российским научным фондом (грант № 14-11-00621)*

УДК 629.78(075)

ББК 39.62я73

О35

Рецензенты:

Кафедра теоретической механики Московского авиационного института

Доктор физико-математических наук *А. А. Буров*

**Овчинников, М. Ю.**

О35 Введение в динамику космического полета : учеб. пособие / М. Ю. Овчинников. – М. : МФТИ, 2016. – 208 с.: ил., табл.

ISBN 978-5-7417-0588-9

В доступной форме даны основы динамики космического полета. Рассматривается движение центра масс небесных тел и космического аппарата. Излагаются элементы теории невозмущенного и возмущенного движений, основы теории маневрирования, относительного движения в группе, коррекция межпланетных траекторий, гравитационные маневры, определение элементов орбиты по наблюдениям, делается упор на проблемы в динамике, вытекающие из современных тенденций в развитии космонавтики.

Предназначено для студентов МФТИ. Может оказаться полезным аспирантам и молодым исследователям, выбирающим свой путь в профессиональной жизни.

**УДК 629.78(075)**

**ББК 32.62я73**

**ISBN 978-5-7417-0588-9**

© Овчинников М. Ю., 2016

© Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Московский физико-технический институт (государственный университет)», 2016

# Оглавление

Предисловие.....	6
Введение.....	8
<b>1. Задача двух тел .....</b>	<b>12</b>
1.1. Уравнения движения. Первые интегралы движения .....	12
1.2. Интеграл энергии .....	15
1.3. Интеграл площадей.....	16
1.4. Интеграл Лапласа.....	18
<b>2. Качественное исследование движения.</b>	
Законы и уравнение Кеплера.....	24
2.1. Законы Кеплера .....	24
2.2. Качественный анализ свойств эллиптических орбит .....	26
2.3. Уравнение Кеплера .....	31
<b>3. Возмущенное движение. Задача <math>n</math> тел.....</b>	<b>36</b>
3.1. Первые интегралы в задаче $n$ тел.....	36
3.2. Планетная форма уравнений относительного движения .....	39
<b>4. Возмущенное движение. Задача трех тел .....</b>	<b>41</b>
4.1. Кеплеровы движения .....	41
4.2. Планетоидная задача трех тел.....	45
4.3. Особые точки поверхности нулевой скорости .....	51
4.4. Инвариантные многообразия как способ экономного передвижения по Солнечной системе .....	55
<b>5. Грависферы .....</b>	<b>61</b>
5.1. Сфера притяжения .....	61
5.2. Сфера действия (грависфера Лапласа).....	63
5.3. Сфера влияния (грависфера Кислика).....	69
<b>6. Уравнения движения в оскулирующих элементах.....</b>	<b>76</b>
6.1. Системы координат.....	76
6.2. Уравнения возмущенного движения.....	79
6.3. Введение оскулирующих элементов. Основная операция ...	79

<b>7. Движение КА в атмосфере Земли.....</b>	<b>92</b>
7.1. Торможение КА в атмосфере.....	92
7.2. Парадокс падающего спутника.....	98
7.3. О движении под действием малой тяги .....	101
<b>8. Влияние несферичности Земли на движение КА .....</b>	<b>105</b>
8.1. Модели гравитационного поля Земли.....	105
8.2. Гравитационное поле несферичной Земли .....	108
8.3. Вычисление возмущающего ускорения.....	111
8.4. Эволюция экваториальной орбиты в поле несферичной Земли.....	114
8.5. Прецессия наклонной орбиты в поле несферичной Земли ..	116
8.6. Специальные орбиты .....	120
<b>9. Движение КА при наличии двух притягивающих центров.....</b>	<b>125</b>
<b>10. Основы теории маневрирования КА .....</b>	<b>130</b>
10.1. Характеристическая скорость .....	130
10.2. Матрица маневра.....	131
10.3. Маневр изменения плоскости орбиты.....	136
10.4. Маневры в плоскости орбиты .....	140
10.5. Маневр снижения .....	144
10.6. Коррекция периода обращения.....	147
<b>11. Коррекция межпланетных траекторий .....</b>	<b>149</b>
11.1. Движение КА в окрестности планеты назначения.....	150
11.2. Гелиоцентрический участок номинальной траектории движения КА .....	152
11.3. Свойства матрицы коррекции.....	155
11.4. Двухпараметрическая коррекция .....	157
11.5. Об оптимальном положении точки коррекции на траектории.....	158
11.6. Вырождение матрицы маневра .....	160
<b>12. Относительное движение двух КА. Маневрирование при их сближении.....</b>	<b>164</b>
12.1. Относительное движение двух аппаратов .....	166

12.2. Маневрирование и сближение КА .....	172
<b>13. Гравитационные маневры.....</b>	<b>177</b>
13.1. Использование гравитационного маневра при межпланетных перелетах .....	181
13.2. Изменение наклона плоскости гелиоцентрической орбиты .....	184
<b>14. Определение элементов орбиты по наблюдениям .....</b>	<b>188</b>
14.1. Метод наименьших квадратов .....	189
14.2. Рекуррентные методы.....	191
Заключение.....	195
Литература .....	197
Предметный указатель .....	198
Список иллюстраций.....	202
Список таблиц.....	205

## Предисловие

Предлагаемое читателям учебное пособие базируется на семестровом курсе лекций, читаемых автором студентам Московского физико-технического института третьего года обучения факультета аэрофизики и космических исследований по специальности «Динамика полета и управление».

Назначение курса заключается в том, чтобы дать общее представление о небесной механике в рамках теории невозмущенного и возмущенного движений, влиянии различных факторов на движение центра масс космического аппарата КА, основах теории маневрирования, формирования и коррекции межпланетных траекторий и сближении с другим КА, распределенных систем, малых аппаратов. Иными словами – дать представление о наиболее общих и важных вопросах динамики космического полета. Основное внимание уделяется качественному изложению процессов и методов. За пределами курса порой остаются количественные соотношения, требующие проведения сложных выкладок. При этом указывается на возможные пути их получения и ожидаемые окончательные результаты. В процессе изложения даются указания на наиболее интересные, с точки зрения автора, расширения тематики со ссылками на актуальные работы. По возможности они выбираются из размещенных на интернет-ресурсах.

Основы курса были заложены академиком Б. В. Раушенбахом в его бытность заведующим кафедрой теоретической механики МФТИ. Большой вклад в становление курса на кафедре внесла доцент, к.ф.-м.н. Н. М. Трухан. Автор выражает им глубокую благодарность, а также благодарность рецензентам настоящей работы и своим коллегам, способствовавшим улучшению содержания и изложения материала в настоящем пособии. За последние годы курс претерпел изменения, дополнен сведениями о современных задачах,

лежащих в предметной области механики космического полета, но сохраняет дух его основателей.

В сносках даны ссылки на оперативно обновляемые интернет-ресурсы, обращение к ним были выполнены в декабре 2015 года. Они включают краткие биографические справки упоминаемых в тексте ученых и ссылки на источники, не включенные в список литературы.

В конце книги приведены предметный указатель, список рисунков и таблиц, таблица с основными характеристиками планет Солнечной системы. Обозначения, используемые в разных разделах, могут пересекаться, если это не приводит к неоднозначному толкованию излагаемого материала.

## Введение

Динамика космического полета как предметная область науки накопила обширный объем знаний по движению естественных небесных тел до космической эры и дополнила знаниями по движению рукотворных космических аппаратов с ее началом. Процесс накопления знаний до космической эры вначале происходил в виде созерцания неба, а затем и по наблюдениям неба с использованием оптических приборов. Постепенно строились и совершенствовались, говоря современным языком, математические модели движения небесных тел. С появлением космических аппаратов, созданных человеком, потребность в знаниях *почему и как движутся* искусственные и естественные небесные тела резко возросла, что породило еще и вопросы *как обеспечить* необходимое движение аппаратов. Естественно возникает вопрос – а зачем сейчас это надо? Аппараты летают, и все уже известно. Вопрос не простой, и ответов много.

Можно сказать, что Человек обречен заниматься космосом. Его всегда интересовало и будет интересовать, откуда и как мы произошли и куда мы уйдем. И этот процесс не имеет границ ни по времени, ни по пространству. Космос, как и атом, неисчерпаем. Но помимо философского интереса, космос – это ареал, где решается широкий круг научных, технологических, народно-хозяйственных и оборонных задач. Все они требуют знаний о движении космических аппаратов на этапах разработки, конструирования и реализации миссий. Динамика космического полета является одним из ключей наряду с ключами по другим системам и технологиям, если пользоваться технологией «нескольких ключей», при которой открыть дверь в будущее можно только одновременно поворачивая в замках все ключи. Речь идет о том, что динамика космического полета отвечает на вопрос заказчика миссии – можем ли мы ее реализовать при текущем уровне знаний, технологий и инженерии с точки зре-



ния законов небесной механики. Если да, то как, и если нет, то что надо доработать или как умерить аппетиты заказчика. Можем ли мы разместить постоянно аппарат в зените над Москвой? Если нет, то почему, а если можем, то как? И оба варианта ответа могут быть правильными. Как нам вырваться из гравитационных объятий Солнца и покинуть Солнечную систему или как добраться до Меркурия, когда возможного запаса топлива в принципе не хватает для реализации столь грандиозных планов? Или как, долетев до Юпитера, затормозиться около него и перейти на орбиту вокруг одного из его спутников, практически не затратив на эти действия драгоценного топлива? Увод спутника после окончания времени функционирования с орбиты, где сопротивление атмосферы ничтожно, привлекая только природные силы, например давление солнечной радиации, также является актуальной задачей небесной механики, особенно с образованием критического количества космического мусора на околоземных орбитах.

Новые научные идеи и помыслы порождают новые вопросы к специалистам по прикладной небесной механике и управлению движением космических аппаратов – сможем ли мы реализовать задуманную миссию с точки зрения механики и как это реализовать?

Вряд ли стоит повторять прописные истины о том, что надо овладеть накопленными знаниями, чтобы воспользоваться ими для реализации своих замыслов и получить новые знания о природе и явлениях в ней. Если обратиться к читаемому студентам вводному курсу, то на начальном этапе длинного пути познания скорее важно заинтересовать желающих заниматься данной предметной областью. Новичку необходимо показать, с одной стороны, «деревья», а с другой стороны, как из этих деревьев образуется «лес». Его необходимо провести, причем не затрачивая на это путешествие много времени, дорогами и тропинками в этом дивном лесу под названием *динамика космического полета*, чтобы у путешествующего возникло ощущение причастности и умения хотя бы на простом уровне провести анализ и даже синтез динамических аспектов задуманной миссии. На каждом шаге он должен приобретать новые знания, складывающиеся с ранее полученными в логические цепочки с расширяющейся зоной возможностей. Здесь необходимо не забывать об исторических аспектах, делая упор на заслуги и отече-

ственных ученых, инженеров, конструкторов космической техники, внесших свой вклад в общемировую сокровищницу знаний.

«Лес» и «деревья» динамики космического полета не будут привлекательными для молодых исследователей без рассмотрения современных трендов в развитии космонавтики, из которых особо выделяется зародившиеся пару-тройку десятилетий назад уже как класс *малоразмерные космические аппараты* (собирательное название – *микроспутники*). Их массовое появление на рынке повлекло за собой новый всплеск интереса к динамике космического полета, ибо пришлось решать задачи динамики и управления при весьма жестких ограничениях на массогабаритные, энергетические, информационные возможности микроспутников, финансовые возможности разработчиков. С одной стороны, хлынувший в эту область поток молодых разработчиков потребовал к себе внимания педагогов, а с другой стороны, умения оригинально, нестандартно мыслить, и молодой пытливый ум приводят к новым идеям, зачем, куда и как лететь. Инициаторы появления микроспутников – технические университеты. Локомотивами их развития наряду с университетами стали небольшие, естественно, частные компании. Позже подтянулся крупный космический бизнес. Интерес начали проявлять и национальные космические агентства. Естественно, речь идет о среднестатистическом пути развития. Были исключения и всплески интересов, выпадающие из этого магистрального пути развития. Дело в том, что в семейство малогабаритных аппаратов по признакам размеров и массы попали и дорогие аппараты, например, для дальних миссий. Их разрабатывают крупные космические фирмы. Но уже и здесь проявляется тренд по выходу университетов и малых предприятий на путь разработки и создания межпланетных аппаратов на базе так называемых *кубсатов* (аппараты массой 1 кг и размером в 10 см), например, для полета на Луну. Следует подчеркнуть, что таким проектам в части организации конкурсов на финансирование и помощи в выводе аппаратов на орбиту уделяют пристальное внимание западные да и восточные космические агентства. Хочется надеяться, что и в России произойдут реальные сдвиги в этом направлении. Это, кстати, тоже может служить мотивацией для молодых исследователей с точки зрения новых интересных задач и востребованности на рынке труда.

В предлагаемом учебном пособии наряду с классическими устоявшимися разделами внимание читателя обращается и на современные тренды в динамике космического полета. Появление столь ограниченных по своим возможностям и ресурсам малогабаритных аппаратов потребовало разработки принципиально новых подходов к перемещению аппаратов в пространстве. Конечно, речь не идет о фантастических машинах времени, «кротовых норах» и телепортаторах. Есть вполне реальные механизмы, которые, конечно же, не позволяют переместиться мгновенно в нужную точку, но дают возможность с минимальными затратами энергии передвигаться по Солнечной системе. Это так называемый *межпланетный хайвей*, построенный на комбинации устойчивых и неустойчивых многообразий, резонансных орбит, использовании точек либрации и многочисленных гравитационных маневров. Не раскрывая сейчас детали и понятия, стоит лишь отметить, что теория динамических систем, требующая высокой математической культуры исследователя, лежит в основе данного тренда динамики космического полета. Он может стать привлекательным для молодых амбициозных исследователей.

# 1. Задача двух тел

Рассмотрим задачу двух тел. Точнее, задачу о движении двух гравитирующих по закону Ньютона материальных точек. Она носит название *невозмущенная задача*. Говоря «тело», будем подразумевать, что это либо материальная точка, либо тело со сферически симметричным распределением масс, потенциал которого эквивалентен потенциалу точки с массой, равной массе тела.

## 1.1. Уравнения движения. Первые интегралы движения

Рассмотрим систему, состоящую из двух тел – материальных точек (далее – точек) с массами  $m_1$  и  $m_2$ , положение которых в инерциальном пространстве задается соответственно векторами  $\mathbf{R}_1$  и  $\mathbf{R}_2$  относительно некоторой точки  $O_a$  (рис. 1.1). Согласно закону всемирного тяготения на точку массой  $m_1$  со стороны точки массой  $m_2$  действует сила

$$\mathbf{F}_1 = \gamma m_1 m_2 \frac{1}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad (1.1)$$

где  $\gamma$  – универсальная гравитационная постоянная,  $\mathbf{r} = \mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1$  – радиус-вектор точки с массой  $m_2$  относительно точки с массой  $m_1$ ,  $r = |\mathbf{r}|$ . Поле, обладающее указанной зависимостью силы от расстояния, носит название *центрального ньютоново поле*. Уравнения движения этих двух материальных точек имеют вид

$$m_1 \frac{d^2 \mathbf{R}_1}{dt^2} = \mathbf{F}_1, \quad m_2 \frac{d^2 \mathbf{R}_2}{dt^2} = \mathbf{F}_2. \quad (1.2)$$

Складывая эти два уравнения с учетом соотношения между действующими на точки силами  $\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2$ , получаем

$$\frac{d^2 (m_1 \mathbf{R}_1 + m_2 \mathbf{R}_2)}{dt^2} = 0. \quad (1.3)$$

Введем барицентр системы этих двух точек. Его положение определяется радиус-вектором  $\mathbf{R}_c$ , удовлетворяющим соотношению

$$m_1 \mathbf{R}_1 + m_2 \mathbf{R}_2 = (m_1 + m_2) \mathbf{R}_c. \quad (1.4)$$

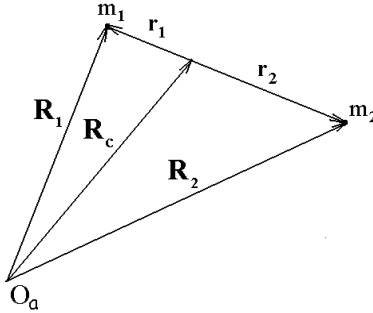


Рис. 1.1. Система из двух материальных точек

Подставляя (1.4) в (1.3), получаем уравнение, описывающее движение барицентра системы:

$$\frac{d^2 \mathbf{R}_c}{dt^2} = 0,$$

где произведено деление на положительную величину  $(m_1 + m_2)$ . Дважды интегрируя это уравнение, получаем два векторных первых интеграла

$$\frac{d\mathbf{R}_c}{dt} \equiv \mathbf{V}_c = \mathbf{C}_1, \quad \mathbf{R}_c = \mathbf{V}_c t + \mathbf{C}_2. \quad (1.5)$$

Здесь  $\mathbf{C}_1$ ,  $\mathbf{C}_2$  – постоянные первых интегралов и введено обозначение  $\mathbf{V}_c$  для скорости центра масс системы. Напомним, что *первым интегралом* называется функция, зависящая от координат, скоростей и времени, остающаяся постоянной в силу уравнений движения на любых движениях системы. Наличие полученных шести скалярных первых интегралов отражает вполне очевидный факт, что центр масс системы, не подверженной действию внешних сил, движется прямолинейно и равномерно в инерциальном пространстве.

Перенесем начало координат в центр масс системы. Для этого подставим выражения  $\mathbf{R}_j = \mathbf{R}_c + \mathbf{r}_j$  ( $j=1,2$ ) в (1.4), откуда получаем

$$m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 = 0. \quad (1.6)$$

Здесь  $\mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{r}_2$  суть радиус-векторы точек относительно их общего центра масс. Подставляя выражения  $\mathbf{R}_j = \mathbf{R}_c + \mathbf{r}_j$  ( $j=1,2$ ) в уравнения (1.2), имеем

$$m_1 \frac{d^2 \mathbf{r}_1}{dt^2} = \mathbf{F}_1, \quad m_2 \frac{d^2 \mathbf{r}_2}{dt^2} = \mathbf{F}_2. \quad (1.7)$$

Выражаем из (1.6)  $\mathbf{r}_2 = -m_1 \mathbf{r}_1 / m_2$  и подставляем в  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ , тогда формула (1.1) для гравитационной силы, действующей на точку с массой  $m_1$ , принимает вид

$$\mathbf{F}_1 = -\gamma m_1 (m_1 + m_2) \frac{1}{r^3} \mathbf{r}_1.$$

Введем обозначение  $\mu = \gamma(m_1 + m_2)$ , именуемое *гравитационным параметром системы*, и перепишем с учетом полученного выражения для силы первое уравнение из (1.7):

$$\frac{d^2 \mathbf{r}_1}{dt^2} = -\mu \frac{\mathbf{r}_1}{r^3}. \quad (1.8)$$

Аналогичные операции можно провести со вторым уравнением из (1.7), а проще выразить  $\mathbf{r}_2 = -m_1 \mathbf{r}_1 / m_2$  из (1.6) и подставить его в (1.8). В результате получаем

$$\frac{d^2 \mathbf{r}_2}{dt^2} = -\mu \frac{\mathbf{r}_2}{r^3}. \quad (1.9)$$

Вспоминая, что  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ , вычтем почленно из уравнения (1.9) уравнение (1.8):

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -\mu \frac{\mathbf{r}}{r^3}. \quad (1.10)$$

Последние три уравнения (1.8), (1.9) и (1.10) показывают, что движение каждой точки вокруг общего центра масс, как и движение одной относительно другой, подобны. Уравнение (1.10) можно интерпретировать как уравнение, описывающее движение точки в поле притягивающего центра.

Вводя проекции  $x, y, z$  вектора  $\mathbf{r}$  на оси инерциальной системы координат, перепишем уравнение (1.10) в координатном виде

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\mu \frac{x}{r^3}, \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = -\mu \frac{y}{r^3}, \quad \frac{d^2 z}{dt^2} = -\mu \frac{z}{r^3}. \quad (1.11)$$

Исследуя далее уравнение (1.10), будем иметь в виду, что результаты можно будет перенести и на движения, описываемые подобными ему уравнениями (1.8) и (1.9).

Теперь найдем недостающие шесть *первых интегралов* уравнения (1.10).

## 1.2. Интеграл энергии

Умножим левую и правую части уравнения (1.10) скалярно на  $2 \frac{d\mathbf{r}}{dt}$  и получим

$$2 \frac{d\mathbf{r}}{dt} \frac{d}{dt} \left( \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right) = -\frac{\mu}{r^3} 2\mathbf{r} \frac{d\mathbf{r}}{dt}.$$

Используя очевидные равенства

$$\frac{d\mathbf{r}^2}{dt} = \frac{dr^2}{dt}, \quad \mathbf{r} \frac{d\mathbf{r}}{dt} = r \frac{dr}{dt},$$

вытекающие из определения скалярного произведения, получаем

$$\frac{d}{dt} \left[ \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 - \frac{2\mu}{r} \right] = 0.$$

Интегрируем это уравнение и, вводя обозначение  $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{V}$ , получаем окончательно *интеграл энергии*

$$V^2 = \frac{2\mu}{r} + h, \quad (1.12)$$

где  $h$  – постоянная интегрирования, именуемая *постоянной энергии*. Именно она определяет характер движения, что можно символически классифицировать следующим образом:

при $h > 0$ и $r \rightarrow \infty$	$V$ – вещественная
при $h = 0$ и $r \rightarrow \infty$	$V = 0$
при $h < 0$ и $r \rightarrow \infty$	$V$ – мнимая

В последнем случае мнимость  $V$  означает, что движение финитное, то есть существует конечное расстояние между материальными точками, дальше которого они разойтись не могут.

### 1.3. Интеграл площадей

Умножим левую и правую части уравнения (1.10) векторно на  $\mathbf{r}$ :

$$\mathbf{r} \times \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = 0. \quad (1.13)$$

Продифференцируем выражение

$$\frac{d}{dt} \left( \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} + \mathbf{r} \times \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{r} \times \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2}.$$

Тогда уравнение (1.13) приобретает вид

$$\frac{d}{dt} \left( \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right) = 0.$$

Его интегрирование немедленно дает векторный *интеграл площадей*

$$\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{c}. \quad (1.14)$$

Переходя к обозначению скорости, перепишем этот интеграл в виде

$$\mathbf{r} \times \mathbf{V} = \mathbf{c}. \quad (1.15)$$

Постоянная интегрирования – вектор  $\mathbf{c}$  – по сути, это вектор кинетического момента, отнесенного к массе системы. Если обозначить через  $i, j, k$  орты инерциальной системы координат, центр которой совпадает с притягивающей точкой, то можно



записать  $\mathbf{c} = c_1 \mathbf{i} + c_2 \mathbf{j} + c_3 \mathbf{k}$ ,  $\mathbf{r} = xi + yj + zk$ , и векторный интеграл (1.15) приобретает вид

$$c_1 = y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt}, c_2 = z \frac{dx}{dt} - x \frac{dz}{dt}, c_3 = x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt}. \quad (1.16)$$

Умножая левую и правые части выражения (1.15) скалярно на  $\mathbf{r}$  и записывая скалярное произведение в координатном виде, имеем

$$c_1 x + c_2 y + c_3 z = 0. \quad (1.17)$$

Следовательно, координаты  $x, y, z$  движущегося тела удовлетворяют уравнению плоскости, идущей через начало координат, совпадающее с центральным телом, и ортогональной вектору  $\mathbf{c}$ . Таким образом, движение тела – плоское.

Если орт  $\mathbf{k}$  направить вдоль вектора  $\mathbf{c}$ , то в такой системе

$$\mathbf{r} = xi + yj, \quad \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt} \mathbf{i} + \frac{dy}{dt} \mathbf{j}, \quad \mathbf{c} = ck,$$

причем  $c = x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt}$ . В выбранной системе координат перейдем к полярным координатам  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$ . В новых переменных постоянная  $c$  приобретает вид

$$c = x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} = r \cos \theta \left( \frac{dr}{dt} \sin \theta + r \frac{d\theta}{dt} \cos \theta \right) - r \sin \theta \left( \frac{dr}{dt} \cos \theta - r \frac{d\theta}{dt} \sin \theta \right) = r^2 \frac{d\theta}{dt}.$$

То есть

$$c = r^2 \frac{d\theta}{dt},$$

что позволяет сделать некоторые важные следующие выводы.

1. Из вида  $\frac{d\theta}{dt} = \frac{c}{r^2}$  следует, что угловая скорость тем меньше, чем дальше тело удалено от притягивающего центра.
2. За малый промежуток времени  $\Delta t$  радиус-вектор тела сместится на малый угол  $\Delta \theta$ , замечая площадь сектора (рис. 1.2).

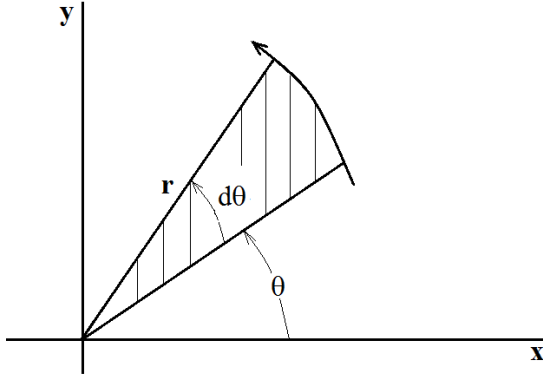


Рис. 1.2. Заметаемая радиус-вектором площадь за элементарный промежуток времени

С точностью до  $O((\Delta\theta)^2)$  площадь сектора определяется выражением  $\Delta S = r^2 \Delta\theta / 2$ . Рассматривая предел, получаем цепочку соотношений:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2} c.$$

Производная  $dS/dt$  называется *секториальной скоростью*, сохраняющейся при движении в центральном поле. Площадь  $S$ , заметаемая радиус-вектором за время от момента  $t_1$  до момента  $t_2$ , определяется квадратурой

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dS = \frac{1}{2} c (t_2 - t_1).$$

#### 1.4. Интеграл Лапласа

Воспользуемся уравнением (1.10). Умножим его правую и левую части справа на вектор  $\mathbf{c}$ :

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} \times \mathbf{c} = -\mu \frac{\mathbf{r}}{r^3} \times \mathbf{c}.$$

В левой части заменим  $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$  на  $\mathbf{V}$  и внесем вектор  $\mathbf{c}$  под знак производной. Воспользуемся выражением для двойного векторного произведения  $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$  в правой части, подставив выражение для  $\mathbf{c}$  из (1.14):

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{V} \times \mathbf{c}) = -\mu \frac{1}{r^3} \left[ \mathbf{r} \left( \mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right) - \frac{d\mathbf{r}}{dt} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) \right].$$

Продолжим преобразования правой части этого уравнения:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{V} \times \mathbf{c}) = -\mu \frac{1}{r^3} \left[ \mathbf{r} \mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} - \frac{d\mathbf{r}}{dt} r^2 \right].$$

После сокращения числителя и знаменателя в правой части на  $r$  и «усмотрения» в выражении, оставшемся в квадратных скобках, производной дроби получаем уравнение

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{V} \times \mathbf{c}) = \mu \frac{d\mathbf{r}}{dt} \frac{\mathbf{r}}{r}.$$

Интегрируя его, имеем *интеграл Лапласа*<sup>1</sup>:

$$\mathbf{V} \times \mathbf{c} - \mu \frac{\mathbf{r}}{r} = \mathbf{f}.$$

Итак, получено семь скалярных первых интегралов, описывающих вращательное движение системы, при порядке уравнения (1.10), равном шести, и ни один из них не содержит явно времени. Поэтому необходимо установить две связи между полученными первыми интегралами и найти один неавтономный первый интеграл.

Легко напрямую убедиться, что интеграл Лапласа  $\mathbf{f}$  связан с вектором  $\mathbf{c}$  соотношением  $\mathbf{c}\mathbf{f} = 0$ . Действительно,

$$\mathbf{c}\mathbf{f} = (\mathbf{r} \times \mathbf{V}) \left( \mathbf{V} \times \mathbf{c} - \mu \frac{\mathbf{r}}{r} \right) = \mathbf{c}(\mathbf{V} \times \mathbf{c}) - \mu (\mathbf{r} \times \mathbf{V}) \frac{\mathbf{r}}{r} = 0.$$

---

<sup>1</sup> Пьер-Симон, маркиз де Лаплас (Pierre-Simon de Laplace, 1749–1827) – французский математик, механик, физик и астроном. Работы по небесной механике, дифференциальным уравнениям. Один из создателей теории вероятностей.

Последнее равенство в этой цепочке справедливо в силу ортогональности векторов в скалярных произведениях.

Вычислим квадрат вектора Лапласа, записав цепочку выражений:

$$\begin{aligned} f^2 &= \left( \mathbf{V} \times \mathbf{c} - \mu \frac{\mathbf{r}}{r} \right)^2 = (\mathbf{V} \times \mathbf{c})^2 - 2(\mathbf{V} \times \mathbf{c}) \mu \frac{\mathbf{r}}{r} + \mu^2 \left( \frac{\mathbf{r}}{r} \right)^2 = \\ &= V^2 c^2 - 2(\mathbf{r} \times \mathbf{V}) \mu \frac{\mathbf{c}}{r} + \mu^2 = c^2 \left( V^2 - 2 \frac{\mu}{r} \right) + \mu^2. \end{aligned}$$

Подставляя в круглые скобки в последнем выражении этой цепочки постоянную энергии  $h$  из интеграла энергии (1.12), окончательно получаем вторую связь между интегралами:

$$f^2 = \mu^2 + hc^2. \quad (1.18)$$

Следовательно, модуль вектора  $\mathbf{f}$  определен постоянными энергии и момента количества движения и сам вектор, будучи нормальным вектору  $\mathbf{c}$ , лежит в плоскости движения. Свободный параметр – это его положение в плоскости движения.

Вычислим скалярное произведение радиус-вектора  $\mathbf{r}$  точки относительно притягивающего центра и интеграла Лапласа:

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{f} = \mathbf{r} \cdot \left( \mathbf{V} \times \mathbf{c} - \mu \frac{\mathbf{r}}{r} \right) = c^2 - \mu r.$$

Зададим вектор Лапласа его проекциями  $f_1, f_2, f_3$  на оси ранее упомянутой инерциальной системы координат. Тогда траектория движения точки определяется этим произведением, записанным через введенные проекции вектора  $\mathbf{f}$ , и полученным ранее (1.17) уравнением плоскости движения:

$$c^2 - xf_1 - yf_2 - zf_3 = \mu r, \quad c_1 x + c_2 y + c_3 z = 0.$$

Введем новую систему координат с осями  $O\xi, O\eta, O\zeta$ , направив  $O\xi$  по вектору  $\mathbf{f}$ , а  $O\zeta$  – по  $\mathbf{c}$ . Это можно сделать, так как  $\mathbf{cf} = 0$ . Тогда выполняются равенства  $c_1 = c_2 = 0$ ,  $c_3 = c$ ,  $f_1 = f$ ,  $f_2 = f_3 = 0$  и предыдущая система приобретает вид

$$\mu r = c^2 - \xi f, \quad \zeta = 0,$$

где  $r = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$ . Перейдем к полярным координатам (радиус-вектору  $\mathbf{r}$  и истинной аномалии  $\nu$ ) по стандартным формулам:

$$\xi = r \cos \nu, \quad \eta = r \sin \nu.$$

Тогда

$$\mu r = c^2 - f r \cos \nu$$

или

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \nu}, \quad (1.19)$$

где введены обозначения

$$p = \frac{c^2}{\mu}, \quad e = \frac{f}{\mu}. \quad (1.20)$$

Из (1.19) следует, что материальные точки (небесные тела в приближении материальными точками) движутся по коническим сечениям. Выражения (1.20) устанавливают связь между параметрами конического сечения и постоянными первых интегралов, а следовательно, и начальными условиями движения материальных точек. При  $\nu = 0$  величина  $r$  имеет наименьшее значение; назовем соответствующую ей точку траектории *перицентром*, наиболее удаленную точку, достигаемую при  $\nu = \pi$ , – *апоцентром*. При  $\nu = 0$  вектор  $\mathbf{r}$  направлен вдоль вектора  $\mathbf{f}$ , поэтому можно говорить, что вектор Лапласа направлен на перицентр. Прямая, совпадающая с большой полуосью орбиты и направленная вдоль вектора Лапласа, называется *линией апсид*.

Как следует из (1.20), *эксцентриситет*  $e$  определяется модулем вектора Лапласа. При  $0 \leq e < 1$  движение происходит по эллипсу; при  $e = 1$  – по параболе и при  $e > 1$  – по гиперболе. Если есть необходимость выразить  $e$  не через  $f$ , а через постоянные интегралов энергии и площадей, то воспользовавшись формулами (1.18) и (1.20), получаем цепочку равенств

$$e = \frac{\sqrt{\mu^2 + hc^2}}{\mu} = \sqrt{1 + \frac{c^2}{\mu^2} h}. \quad (1.21)$$

С другой стороны, можно сделать наоборот – постоянные этих интегралов выразить через параметры конического сечения. Из первого соотношения в (1.20) имеем

$$c = \sqrt{p\mu}. \quad (1.22)$$

Теперь из (1.18) выражаем  $h$ , подставляем в получившееся выражение  $f$  из второй формулы (1.20) и используем (1.22), тогда

$$h = \frac{\mu}{p}(e^2 - 1). \quad (1.23)$$

Вспоминая, что  $p = a(1 - e^2)$ , получаем важное выражение

$$h = -\frac{\mu}{a}, \quad (1.24)$$

где  $p$  носит название *параметр орбиты*, или просто – *параметр*,  $a$  – *большая полуось* орбиты. Обратим внимание, что большая полуось фактически является мерой энергии.

Найдем первый интеграл, дающий явную связь координат со временем (фактически, это *второй* интеграл, так как отсутствует зависимость его от скорости), пользуясь введенной полярной системой координат. Как было показано выше, интеграл площадей в этой системе имеет вид

$$r^2 \frac{dv}{dt} = c. \quad (1.25)$$

Подставляя сюда выражение (1.19) для  $r$ , получаем после интегрирования квадратуру

$$t - \tau = \frac{p^2}{c} \int_0^v \frac{dv}{(1 + e \cos v)^2}, \quad (1.26)$$

где  $\tau$  – постоянная, именуемая *эпохой* – это момент первого пересечения перицентра движущимся небесным телом. Заметим, что, хотя квадратура (1.26) дает формально решение задачи,

воспользоваться ею при аналитическом изучении движения затруднительно.

Таким образом, найдены все шесть первых интегралов и шесть соответствующих констант, описывающих вращательное движение системы двух гравитирующих материальных точек. Эти константы в результате выбора подходящей системы координат имеют три нулевых значения в силу того, что плоскость  $(x, y)$  совпадает с плоскостью движения точек, а ось  $Ox$  направлена по вектору  $\mathbf{f}$  на перицентр. В результате решение содержит лишь три отличных от нуля постоянных – это  $p, e, \tau$ . Оставшиеся три константы задают положение плоскости орбиты в пространстве и ее ориентацию в этой плоскости.

## 2. Качественное исследование движения.

### Законы и уравнение Кеплера

#### 2.1. Законы Кеплера

Сформулируем три закона Кеплера<sup>2</sup>.

Первый закон, открытый Кеплером в 1605 году (опубликован в 1609 году), звучит так: *каждая планета Солнечной системы обращается по эллипсу, в одном из фокусов которого находится Солнце.*

Второй закон, открытый им в 1602 году и опубликованный в 1609 году, гласит: *каждая планета движется в плоскости, проходящей через центр масс Солнца, причём за равные промежутки времени радиус-вектор, соединяющий центры Солнца и планеты, описывает равные площади.*

Третий закон, открытый Кеплером в 1618 году и опубликованный в 1619 году: *квадраты периодов обращения планет вокруг Солнца относятся как кубы больших полуосей орбит планет.*

Все три закона были открыты Кеплером эмпирически как результат обработки наблюдений Тихо Браге<sup>3</sup>. Но, оказывается, обладая современными знаниями в механике, это законы можно получить аналитически. Действительно, формула (1.19) показывает, что материальные точки в рамках задачи двух тел движутся по коническим сечениям, в фокусе находится притягивающий центр. Закон сохранения площадей гласит, что за равные промежутки

---

<sup>2</sup> Иоганн Кеплер (Johannes Kepler, 1571–1630). Немецкий астроном. Родился в Вюртембурге. Начав с изучения богословия в Тюбингенской академии, увлекся математикой и астрономией и вскоре получил приглашение на должность преподавателя математики в гимназии австрийского города Грац. Начиная с 1598 года Кеплер и другие протестанты стали подвергаться в католическом Граце жестоким религиозным гонениям, и в 1600 году ученый по приглашению Тихо Браге переехал в Прагу. Работы Кеплера основывались на наблюдениях, сделанных Тихо Браге.

<sup>3</sup> Тихо Браге (Tycho Brahe, 1546–1601). Датский астроном, астролог и алхимик эпохи Возрождения. Первым в Европе начал проводить систематические и высокоточные астрономические наблюдения.



времени радиус-вектор заметает равные площади, а движение происходит в неподвижной плоскости.

Получим третий закон Кеплера. Рассмотрим период обращения тела по орбите. Из формулы для заметаемых площадей

$$S = \frac{1}{2} c(t_2 - t_1)$$

следует, что при одном обороте по орбите  $S = \pi ab$ , где  $a$  и  $b$  – большая и малая полуоси эллипса, а время движения равно периоду обращения  $T_{rev}$ , то есть

$$\pi ab = \frac{1}{2} c T_{rev}.$$

Поскольку из определения  $p$  (1.22) следует  $c = \sqrt{p\mu}$ , то

$$2\pi ab = \sqrt{p\mu} T_{rev},$$

но из аналитической геометрии известно, что  $b = a\sqrt{1-e^2}$ , поэтому получаем

$$T_{rev} = 2\pi \frac{a^{3/2}}{\sqrt{\mu}}. \quad (2.1)$$

Отсюда следует, что если две планеты обращаются около большой центральной массы (Солнца), так что значение  $\mu$  в основном определяется массой Солнца, а не планеты, то времена обращения планет  $T_1$  и  $T_2$  будут удовлетворять условию

$$\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 = \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^3,$$

то есть квадраты их периодов соотносятся как кубы больших полуосей (средних расстояний).

Обратим внимание, что второй закон Кеплера о постоянстве секториальной скорости справедлив для любого центрального поля, а остальные два закона справедливы лишь для ньютонова поля.

## 2.2. Качественный анализ свойств эллиптических орбит

Преобразуем выражение для интеграла энергии (1.12) с учетом выражения для константы энергии (1.24):

$$V^2 = \mu \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right). \quad (2.2)$$

Рассмотрим элементарную теорию эволюции орбит, основываясь на равенстве (2.2).

Эволюция орбиты в результате приложения мгновенного импульса. Мгновенный импульс не меняет координат, а меняет лишь скорость материальной точки. Поэтому в равенстве (2.2) произойдет мгновенное изменение  $V^2$  и связанное с этим изменение  $a$ , то есть переход с орбиты «1» на другую орбиту «2».

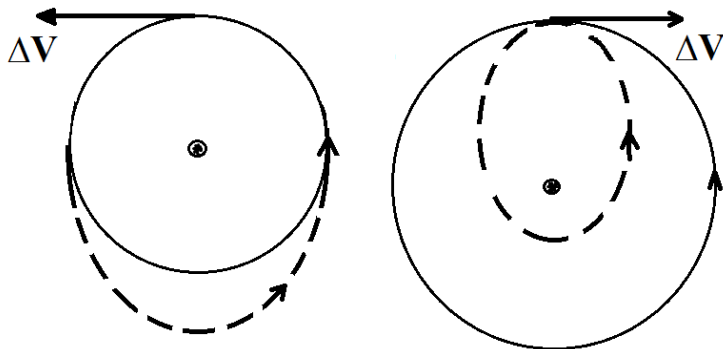


Рис. 2.1. Изменение первоначально круговых орбит импульсами, направленными «по скорости» и «против скорости»

На рис. 2.1 приведено изменение первоначально круговых орбит импульсами  $\Delta V$ , направленными «по скорости» и «против скорости» (импульсы *разгона* и *торможения*). Как видно из схем, орбита испытывает наибольшее геометрическое смещение в области, противолежащей точке, в которой телу был сообщен импульс.

Двухимпульсный переход необходим тогда, когда исходная орбита и требуемая орбита не имеют общих точек – например, перелет с одной круговой орбиты на другую. На рис. 2.2 приведен

переход с орбиты «1» на орбиту «3» с использованием промежуточной орбиты «2». Для такого перехода необходимо сообщение двух импульсов  $\Delta V_1$  и  $\Delta V_2$ . Переходный эллипс «2» называют *эллипсом Гомана*<sup>4</sup>.

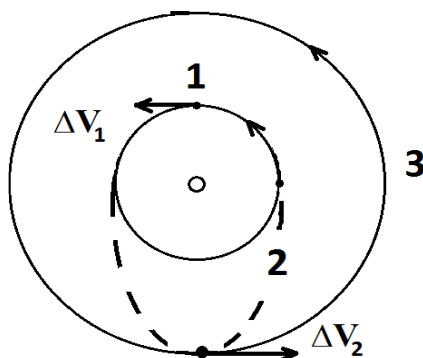


Рис. 2.2. Двухимпульсный переход с использованием промежуточной орбиты

Торможение в атмосфере. Пусть исходная орбита – эллиптическая. Считаем, что в перигентре происходят «мгновенные» торможения точки атмосферой, которые приводят к прогрессивному уменьшению высоты апоцентра. В результате с каждым оборотом орбита становится «меньше» и приближается по форме к окружности (рис. 2.3). Когда она «вся» окажется лежащей в атмосфере, торможение окажется столь интенсивным, что материальная точка упадет на Землю. Эта критическая высота орбиты имеет порядок 100 км. В реальном полете проще наблюдать уменьшение периода обращения  $T_{rev}$ , который (2.1) изменяется в степени  $3/2$  с изменением большой полуоси орбиты  $a$ .

---

<sup>4</sup> Вальтер Гоман (1880–1943) – немецкий ученый в области механики космического полета. Доказал, что оптимальным при естественных допущениях и с точки зрения затрат энергии является переход с одной круговой орбиты на другую по эллипсу, касательному к этим орбитам. Справедливости ради стоит заметить, что в это же время русский исследователь и инженер Фридрих Цандер (1887–1933) получил аналогичный результат. Работы обоих авторов были опубликованы в 1925 году.

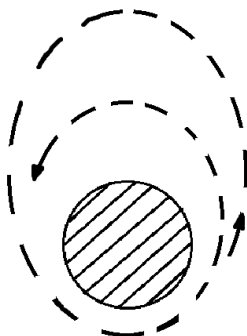


Рис. 2.3. Торможение в атмосфере

Затраты энергии на межпланетные перелеты. Интегралу энергии (2.2) можно придать вид

$$V^2 = \frac{\mu}{r} \left( 2 - \frac{r}{a} \right).$$

Если считать, что  $r$  определяет (по порядку величины) место старта, то есть равен радиусу Земли, а  $2a$  – расстояние до орбиты планеты назначения (рис. 2.4) сразу видно, что потребная для перелета скорость  $V$  практически мало зависит от  $a$ , так как для Луны отношение  $\frac{r}{a} \approx \frac{6}{400}$  становится пренебрежимо малым по сравнению с двойкой. Поэтому потребные скорости разгона для полета к Луне и Марсу имеют сравнимые порядки. Их различие связано с необходимостью учитывать движение относительно Солнца.

Первая космическая (круговая) скорость. Положив в интеграле энергии (2.2)  $r=a$ , получаем выражение для круговой скорости движения материальной точки вокруг притягивающего центра

$$V_{circ} = \sqrt{\frac{\mu}{r}}. \quad (2.3)$$

Из полученного выражения следует, что круговая скорость изменяется обратно пропорционально корню квадратному из удаления от центрального тела. Следовательно, существует сколько угодно круговых скоростей.

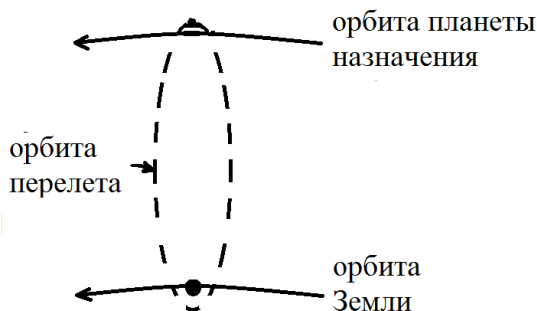


Рис. 2.4. Межпланетный перелет

Рассмотрим две идеализированные схемы выведения на орбиту материальной точки – искусственного спутника безатмосферной сферической планеты (рис. 2.5). Первая схема сводится к сообщению точке мгновенного импульса в горизонтальном направлении, обеспечивающего достижение круговой скорости, а вторая – к вертикальному подъему, с последующим горизонтальным импульсом, позволяющим развить скорость, меньшую круговой, но достаточную, чтобы спутник не упал на планету.

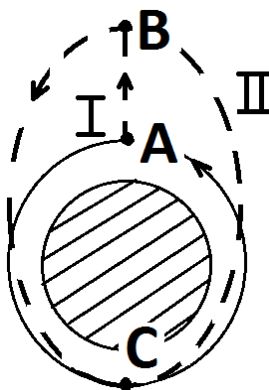


Рис. 2.5. Две схемы выведения на орбиту искусственного спутника безатмосферной сферической планеты

Первая траектория идет через точки  $A$  и  $C$  на малом расстоянии  $\varepsilon$  от поверхности планеты, вторая состоит из подъема по прямой  $AB$  и последующего движения по эллипсу, идущему через

точки  $B$  и  $C$ . Поскольку в точке  $C$  обе орбиты касаются, они имеют одинаковый радиус  $r$ . В то же время орбита II характеризуется большей полуосью  $a$ , чем орбита I. Следовательно, в точке  $C$  скорость тела, движущегося по орбите II, больше, чем скорость тела, движущегося по орбите I. Таким образом, учитывая, что начало разгона (точка  $A$ ) у обеих орбит совпадает, для получения орбиты II надо затратить больше энергии, чем для получения орбиты I. Это значит, минимальная затрата энергии разгона соответствует круговому движению вокруг планеты на сколь угодно малой высоте. Соответствующая круговая скорость называется *первой космической скоростью* и получается по формуле (2.3), где в качестве радиуса  $r$  берется радиус планеты. В зарубежной литературе первая космическая скорость именуется *circular velocity*.

На практике из-за наличия у Земли атмосферы траектория выведения имеет в начале старта вертикальное направление, чтобы обеспечить, возможно, быстрый проход атмосферного участка, а затем постепенно приближается к траектории движения, находящейся на постоянном удалении от центра Земли, чтобы не совершать при разгоне работы против сил тяжести.

Значения первой космической скорости  $V_I$  для различных планет Солнечной системы приведены в табл. 1.

Вторая космическая (параболическая) скорость. Если при разгоне спутнику сообщить достаточно большую скорость, то его движение перестанет быть финитным. Наименьшая скорость будет соответствовать той, которая обеспечит движение по параболе. Рассматривая параболу как предельный случай эллипса с полуосью  $a \rightarrow \infty$ , на основании формул (2.2) и (2.3) найдем, что параболическая скорость имеет вид

$$V = \sqrt{\frac{2\mu}{r}} = \sqrt{2}V_{\text{circ}}.$$

Связывая параболическую скорость с первой космической, можно получить значение *второй космической скорости*:

$$V_{II} = \sqrt{2}V_I.$$

Итак, вторая космическая скорость – это минимальная скорость, достаточная для того, чтобы разогнанная до  $V_{II}$  материаль-

ная точка улетела (конечно же, в рамках задачи двух тел) на бесконечность. В зарубежной литературе эта скорость носит название *escape velocity*.

Реально разгон до  $V_{II}$  у Земли вовсе не означает удаление КА на бесконечность, так как помимо Земли существует Солнце, тяготение которого заставит такой аппарат двигаться по эллипсу вокруг Солнца. Но, с другой стороны, он не останется спутником Земли и уйдет от нее. Величины второй космической скорости для планет Солнечной системы приведены в табл. 1.

Таблица 1

### Космические скорости для планет Солнечной системы

Планета	$V_I$ , км/с	$V_{II}$ , км/с
Меркурий	3.014	4.263
Венера	7.316	10.35
Земля	7.905	11.18
Марс	3.552	5.023
Юпитер	42.16	59.62
Сатурн	25.12	35.53
Уран	15.39	21.77
Нептун	16.55	23.40
Плутон	0.857	1.212
Луна	1.679	2.376

### 2.3. Уравнение Кеплера

Полученная ранее квадратура (1.26), дающая в явном виде связь координат движения (истинную аномалию) со временем, имеет весьма сложный вид. Точнее, по положению точки на орбите, отвечающей этому положению, момент времени вычислить не так сложно. Гораздо сложнее получить положение на орбите в заданный момент времени – необходимо обращать квадратуру. Поэтому для той же цели предпочитают использовать *уравнение Кеплера*, которое было им получено в 1609 году. Перейдем к выводу этого уравнения.

Построим эллипс с заданными полуосями  $a$  и  $b$ , опирающийся на concentрические окружности радиусов  $a$  и  $b$  (рис. 2.6).

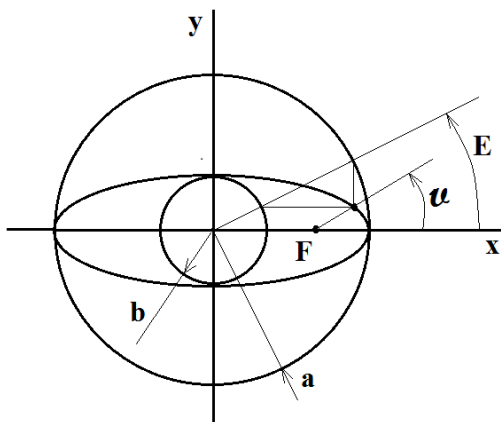


Рис. 2.6. Построение эллипса с помощью двух concentрических окружностей

Введя угол  $E$  (*эксцентрисическую аномалию*), найдем координаты точек, принадлежащих эллипсу, по формулам

$$x = a \cos E, \quad y = b \sin E.$$

Точка  $F$  суть фокус построенного эллипса. Ее удаление от центра эллипса составляет  $ae$ . Запишем выражения для катетов треугольника, гипотенуза которого образована радиус-вектором  $r$  построенной только что точки эллипса из фокуса  $F$ ,

$$r \cos u = a \cos E - ae, \quad r \sin u = b \sin E. \quad (2.4)$$

Возводя обе части этих равенств в квадрат, складывая и приравнивая сумму квадрату гипотенузы  $r^2$ , а также вспоминая, что малая полуось  $b$  выражается через большую полуось эллипса  $a$  и его эксцентриситет  $e$  по формуле  $b = a\sqrt{1-e^2}$ , получаем после извлечения квадратного корня выражение для  $r$ :

$$r = a(1 - e \cos E). \quad (2.5)$$



Перейдем в формулах (2.4) к половинному углу  $\nu/2$  :

$$2r \cos^2 \frac{\nu}{2} = r + a \cos E - ae, \quad 2r \sin \frac{\nu}{2} \cos \frac{\nu}{2} = b \sin E.$$

Теперь подставим  $r$  из (2.5) в правую часть первого уравнения, а  $b = a\sqrt{1-e^2}$  – во второе уравнение и перейдем в обоих уравнениях к половинному углу  $E/2$ , тогда соответственно получим

$$2r \cos^2 \frac{\nu}{2} = 2a(1-e) \cos^2 \frac{E}{2},$$

$$2r \sin \frac{\nu}{2} \cos \frac{\nu}{2} = 2a\sqrt{1-e^2} \sin \frac{E}{2} \cos \frac{E}{2}.$$

Разделив второе равенство на первое, имеем в итоге

$$\operatorname{tg} \frac{\nu}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{E}{2}. \quad (2.6)$$

Тем самым угол  $E$  однозначно определяет обычные координаты точек эллипса  $(r, \nu)$ . Интеграл площадей (1.25) с учетом (1.22) и выражения для  $p = a(1-e^2)$  имеет следующий вид:

$$r^2 \frac{d\nu}{dt} = \sqrt{\mu a(1-e^2)}. \quad (2.7)$$

Перепишем интеграл энергии (2.2) так:

$$V^2 = \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 + r^2 \left( \frac{d\nu}{dt} \right)^2 = \mu \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right).$$

Исключая здесь  $\frac{d\nu}{dt}$  с помощью (2.7), имеем

$$\left( \frac{dr}{dt} \right)^2 = \frac{\mu}{r^2 a} [a^2 e^2 - (a-r)^2].$$

Введем *среднее движение*

$$n = \frac{2\pi}{T_{\text{rev}}} = \frac{\sqrt{\mu}}{a^{3/2}},$$

где период обращения взят из формулы (2.1). Механический смысл  $n$  – это *средняя угловая скорость* обращения точки вокруг центрального тела. Тогда можно переписать предыдущую формулу в виде

$$\frac{dr}{dt} = n \frac{a}{r} \sqrt{a^2 e^2 - (a - r)^2},$$

и, разделяя переменные, имеем

$$ndt = \frac{rdr}{a\sqrt{a^2 e^2 - (a - r)^2}}.$$

Подставляя  $r$  из (2.5), находим

$$ndt = (1 - e \cos E) dE$$

и, интегрируя, получаем

$$n(t - t_0) = (E - E_0) - e(\sin E - \sin E_0).$$

Выберем начало отсчета времени  $t_0$  соответствующим значению  $E_0 = 0$ . Тогда, как видно из равенства (2.6), значение  $\nu = 0$ , то есть  $E_0 = 0$ , соответствует перигею. Следовательно, в качестве  $t_0$  можно взять эпоху  $\tau$ . Поэтому последнее уравнение будет иметь вид

$$n(t - \tau) = E - e \sin E$$

или

$$E - e \sin E = M, \quad (2.8)$$

где  $M = n(t - \tau)$  называется *средней аномалией*, так как соответствует углу поворота радиус-вектора движущегося тела, если бы оно вращалось вокруг центрального тела с постоянной угловой скоростью, равной среднему движению  $n$ .

Уравнение (2.8) называется *уравнением Кеплера*, и, несмотря на предельно простой вид, оно не имеет решений в элементарных функциях. Это уравнение может быть использовано для решения достаточно очевидных задач.

- Для заданного положения движущегося тела (заданных  $r, \nu$ ) найти соответствующее ему время  $t$ . Решение элементарно –

по известному значению истинной аномалии  $\nu$  определяем значение  $E$ , используя формулу (2.6), а по средней аномалии  $M$  (2.8) находим  $t$ .

- Нахождение  $r, \nu$  для заданного  $t$  связано с нахождением  $E$  по заданному  $M$ . Это возможно лишь приближенными методами, например методом итераций. Определим связь  $(n+1)$ -го приближения  $E = E_{n+1}$  с предыдущим  $E_n$ , следующим из уравнения Кеплера итерационным выражением

$$E_{n+1} = e \sin E_n + M.$$

При  $e < 1$  такой итерационный процесс сходится к единственному решению  $\overline{E}$ , где  $\overline{E}$  – корень уравнения

$$E = e \sin E + M.$$

Действительно, при возрастании  $E$  от  $-\infty$  до  $+\infty$  функция  $E + e \sin E$  монотонно возрастает, так как ее производная всюду положительная. Отсюда следует, что уравнение Кеплера при любом значении средней аномалии  $M$  имеет единственное решение. При небольших значениях эксцентриситета  $e$  переменные  $r$  и  $\nu$  удобно представить с помощью рядов в виде явных функций времени.

Следует отметить, что уравнение Кеплера в классической форме описывает движение только по эллиптическим орбитам, то есть при  $0 \leq e < 1$ . Движение по гиперболическим орбитам ( $e > 1$ ) подчиняется гиперболическому уравнению Кеплера, сходному по форме с классическим. Движение по прямой линии ( $e = 1$ ) описывается радиальным уравнением Кеплера. Наконец, для описания движения по параболической орбите ( $e = 1$ ) используется уравнение Баркера:

$$\operatorname{tg} \frac{\nu}{2} + \frac{1}{3} \left( \operatorname{tg} \frac{\nu}{2} \right)^3 = M.$$

.

### 3. Возмущенное движение. Задача $n$ тел

В небесной механике «невозмущенным» считается движение, происходящее по законам взаимодействия двух тел. Обычно такое движение называют *кеплеровым*. Поэтому все случаи отклонения законов движения от кеплеровых относят к разделу *возмущенное движение*. В частности, задача  $n$  тел, не дающая при  $n > 2$ , вообще говоря, кеплеровых траекторий, является классическим примером возмущенного движения.

#### 3.1. Первые интегралы в задаче $n$ тел

Рассмотрим  $n$  материальных точек, взаимодействующих по закону тяготения Ньютона. Найдем первые интегралы такого движения. Обозначим массы этих точек  $m_0, m_1, \dots, m_{n-1}$ . Очевидно, что сила  $\mathbf{F}_{ij}$ , действующая на  $i$ -ю материальную точку со стороны  $j$ -й с радиусами-векторами соответственно  $\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j$  относительно начала инерциальной системы координат, будет определяться выражением

$$\mathbf{F}_{ij} = \gamma m_i m_j \frac{\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i}{r_{ij}^3}.$$

Поэтому система уравнений, описывающих движение гравитирующих между собой материальных точек, приобретает вид

$$m_i \frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} = \gamma \sum_0^{n-1(i)} m_i m_j \frac{\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i}{r_{ij}^3}. \quad (3.1)$$

Здесь  $r_{ij} = |\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|$ ;  $\sum_0^{n-1(i)}$  – сумма по  $j$  от  $j=0$  до  $j=n-1$ , за исключением слагаемого с  $j=i$ . Эти векторные уравнения в проекциях на оси декартовой системы координат  $O\xi\eta\zeta$  имеют вид

$$m_i \frac{d^2 \xi_i}{dt^2} = \gamma \sum_0^{n-1(i)} m_i m_j \frac{\xi_j - \xi_i}{r_{ij}^3}, \dots, m_i \frac{d^2 \zeta_i}{dt^2} = \gamma \sum_0^{n-1(i)} m_i m_j \frac{\zeta_j - \zeta_i}{r_{ij}^3}. \quad (3.2)$$

Введем функцию

$$U = \gamma S \frac{m_i m_j}{r_{ij}},$$

где  $S$  – сумма, в которой каждая комбинация  $i$  и  $j$  встречается лишь один раз и нет членов с  $i=j$ . Тогда система уравнений (3.2) приобретает вид

$$m_i \frac{d^2 \xi_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial \xi_i}, \quad \dots, \quad m_i \frac{d^2 \zeta_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial \zeta_i} \quad (i=0, \dots, n-1).$$

Умножая почленно каждое уравнение на  $\frac{d\xi_i}{dt}$ ,  $\frac{d\eta_i}{dt}$ ,  $\frac{d\zeta_i}{dt}$  соответственно и складывая, получаем

$$\sum_0^{n-1} m_i \left( \frac{d\xi_i}{dt} \frac{d^2 \xi_i}{dt^2} + \frac{d\eta_i}{dt} \frac{d^2 \eta_i}{dt^2} + \frac{d\zeta_i}{dt} \frac{d^2 \zeta_i}{dt^2} \right) = \frac{dU}{dt}$$

и, интегрируя,

$$T - U = h, \quad (3.3)$$

где

$$T = \frac{1}{2} \sum_0^{n-1} m_i \left[ \left( \frac{d\xi_i}{dt} \right)^2 + \left( \frac{d\eta_i}{dt} \right)^2 + \left( \frac{d\zeta_i}{dt} \right)^2 \right]$$

– кинетическая энергия системы,  $U$  – силовая функция системы,  $h$  – постоянная интеграла энергии, каковым является соотношение (3.3). Другие первые интегралы можно попытаться получить из следующих соображений. Система  $n$  материальных точек находится под действием только внутренних сил, и поэтому главный вектор импульса системы равен нулю. То же самое можно сказать и о главном моменте. Из уравнений (3.1) следует после выполнения суммирования правых частей, что

$$\sum_0^{n-1} m_i \frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} = 0, \quad \sum_0^{n-1} \mathbf{r}_i \times m_i \frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} = 0.$$

Интегрируя первое уравнение дважды, а второе однократно, получим

$$\sum_0^{n-1} m_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \mathbf{a}, \quad \sum_0^{n-1} m_i \mathbf{r}_i = \mathbf{a}t + \mathbf{b}, \quad \sum_0^{n-1} m_i \left( \mathbf{r}_i \times \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} \right) = \mathbf{c}. \quad (3.4)$$

Эти интегралы содержат три векторные константы –  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ . Тем самым получено еще девять скалярных первых интегралов. Их механический смысл очевиден – первые два соотношения говорят о том, что центр масс системы движется прямолинейно и равномерно, а последнее говорит о постоянстве кинетического момента системы.

Наличие последнего из трех в (3.4) первого интеграла позволяет указать на удобную для расчетов систему координат  $O\xi'\eta'\zeta'$ . Если выбрать ее начало в центре масс системы  $O$ , а ось  $O\eta'$  направить параллельно вектору  $\mathbf{c}$ , то плоскость  $O\xi'\zeta'$  будет неподвижной в пространстве относительно инерциальной системы отсчета, движущейся вместе с центром масс системы. Плоскость  $O\xi'\zeta'$  обычно называют *плоскостью Лапласа*. В задаче двух тел плоскость Лапласа совпадает с плоскостью, в которой лежит траектория движения небесного тела.

Итак, всего вместе с интегралом энергии найдено *десять первых интегралов*. Их обычно называют *классическими*. Многочисленные попытки найти другие первые интегралы задачи  $n$  тел оказались безрезультатными. В XIX веке Брунс<sup>5</sup>, Пуанкаре<sup>6</sup> и Пенлеве<sup>7</sup> доказали, что уравнения движения (3.1) не имеют других не-

<sup>5</sup> Карл Христиан Брунс (Karl Christian Bruhns, 1830–1881). Немецкий астроном и метеоролог. В 1856 году, защитив диссертацию на тему «О малых планетах», занял место директора обсерватории и кафедру астрономии в Лейпциге. Им были произведены наблюдения по определению положения планет, комет, звезд, благодаря чему были открыты множество небесных тел.

<sup>6</sup> Жюль Анри Пуанкаре (фр. Jules Henri Poincaré, 1854–1912). Французский математик, механик, физик, астроном и философ. Глава Парижской академии наук (1906), член Французской академии (1908) и ещё более 30 академий мира, в том числе иностранный член-корреспондент Петербургской академии наук (1895).

<sup>7</sup> Поль Пенлеве (Poul Painlevé, 1863–1933). Французский математик, механик, государственный и политический деятель, доктор математических

зависимых алгебраических первых интегралов и даже первых интегралов, выражающихся через однозначные трансцендентные функции, если  $n > 2$ .

Наличие первых интегралов позволяет понизить порядок системы уравнений. Следовательно, классические первые интегралы понижают порядок системы на 10 единиц. Кроме того, оказывается возможным понизить его еще на две единицы, используя тот факт, что действующие силы зависят не от координат точек, а от их взаимных расстояний, и исключив время  $t$  путем перехода к новой независимой переменной  $\varphi$  и добавления квадратуры:

$$\varphi = \int \frac{d\varphi}{dt} dt .$$

В качестве переменной  $\varphi$  можно использовать одну из независимых переменных исходной задачи. Следовательно, в задаче  $n$  тел возможно понижение порядка на 12 единиц. Если, например, считать, что Солнечная система состоит из 10 тел, то порядок соответствующей системы уравнений будет 60. Возможное понижение порядка системы дает новую систему, имеющую порядок 48. Однако изучать систему 60-ти простых уравнений лучше, чем иметь дело с 48 сложными уравнениями.

### 3.2. Планетная форма уравнений относительного движения

*Планетная форма* уравнений удобна в том случае, когда изучается относительное движение материальных точек в рамках задачи  $n$  тел и одно из тел имеет массу, во много раз большую, чем остальные тела, например, при изучении движения планет вокруг Солнца.

Возьмем за основное тело материальную точку  $m_0$ . Перенесем начало в нее, введя систему координат  $O_0xyz$  с осями, параллельными осям системы  $O\xi\eta\zeta$ . Получим формулы пересчета координат:

$$\xi_i = \xi_0 + x_i, \dots, \zeta_i = \zeta_0 + z_i .$$

---

наук (1887), член Парижской академии (1900). Его математические работы относятся к теории дифференциальных уравнений. Особенно известны его исследования о поведении интегралов дифференциальных уравнений вблизи особых точек.

Тогда уравнения (3.2) после деления их на  $m_i$  принимают вид

$$\begin{aligned}\frac{d^2 \xi_i}{dt^2} &= \gamma \sum_0^{n-1(i)} m_j \frac{x_j - x_i}{r_{ij}^3} = -\gamma m_0 \frac{x_i}{r_{0i}^3} + \gamma \sum_1^{n-1(i)} m_j \frac{x_j - x_i}{r_{ij}^3}, \\ \frac{d^2 \xi_0}{dt^2} &= \gamma \sum_0^{n-1(0)} m_j \frac{x_j - 0}{r_{0j}^3} = \gamma m_i \frac{x_i}{r_{0i}^3} + \gamma \sum_1^{n-1(i)} m_j \frac{x_j}{r_{0j}^3},\end{aligned}$$

где записаны уравнения только для координаты  $x$ , остальные уравнения для координат  $y, z$  имеют аналогичный вид. Здесь во втором уравнении выделено  $i$ -е слагаемое ( $i \neq 0$ ). Полагая для краткости записи  $r_{0i} = r_i$  и вычитая из первого уравнения второе, получим

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} = -\gamma(m_0 + m_i) \frac{x_i}{r_i^3} + \gamma \sum_1^{n-1(i)} m_j \left( \frac{x_j - x_i}{r_{ij}^3} - \frac{x_j}{r_j^3} \right).$$

Введем *пертурбационную функцию*  $R = \sum R_i$ , где

$$R_i = \gamma \sum_1^{n-1(i)} m_j \left( \frac{1}{r_{ij}} - \frac{x_i x_j + y_i y_j + z_i z_j}{r_j^3} \right).$$

Тогда уравнения движения для  $i = 1, \dots, n-1$  можно записать так:

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} + \gamma(m_0 + m_i) \frac{x_i}{r_i^3} = \frac{\partial R_i}{\partial x_i}, \dots, \frac{d^2 z_i}{dt^2} + \gamma(m_0 + m_i) \frac{z_i}{r_i^3} = \frac{\partial R_i}{\partial z_i}. \quad (3.5)$$

Если положить  $R_i = 0$ , то система уравнений (3.5) распадается на  $3(n-1)$  независимых уравнений, каждое из которых будет иметь тот же вид, что и уравнение движения в задаче двух тел. Механический смысл результата заключается в следующем. Равенство  $R_i = 0$  говорит об отсутствии взаимного влияния планет на движение их вокруг Солнца, но тогда задача естественно распадается на  $(n-1)$  отдельных задач двух тел. На самом деле  $R_i \neq 0$ , но для Солнечной системы производные от  $R_i$  по координатам достаточно малы, и поэтому движение планет вокруг Солнца в основном правильно описывается в рамках задачи двух тел, а взаимное влияние планет на их движение можно рассматривать как относительно малые возмущения основного движения. Малость  $R_i$  является следствием очевидного неравенства  $m_0 \gg m_i$ .



## 4. Возмущенное движение.

### Задача трех тел

Поскольку задача  $n$  тел в общем виде не решается, естественна попытка решить ее для наименьшего  $n > 2$ , то есть для  $n = 3$ . В 1912 году Зундман<sup>8</sup> дал ее полное решение в виде сходящихся рядов, однако было видно, что сходятся они слишком медленно и для вычислений не пригодны. Произведенная в 1933 году оценка показала, что для вычислений с точностью обычных астрономических ежегодников надо взять  $10^{8000000}$  членов ряда. Таким образом, решение Зундмана имеет, скорее, теоретический, а не вычислительный интерес. Более обозримые результаты оказалось возможным получить, наложив на задачу трех тел дополнительные условия на начальные условия и соотношение масс тел. Наложение дополнительных условий на начальные условия движения тел приводит к случаям *Эйлера и Лагранжа*. Рассмотрим их.

#### 4.1. Кеплеровы движения

Эйлер и Лагранж сформулировали вопрос о том, существуют ли такие начальные условия для трех тел произвольной массы, которые приведут к движению каждого из трех тел по кеплеровым орбитам. Пусть три тела имеют конечные массы  $m_0, m_1, m_2$ . Найдем такие начальные условия, при которых все три тела будут двигаться по кеплеровым орбитам (коническим сечениям). Векторы  $\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$  соединяют эти массы (рис. 4.1) в треугольник. Очевидно соотношение  $\mathbf{r}_0 + \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 = 0$ .

Уравнения относительного движения в планетной форме имеют вид для движения точки с массами  $m_1$  и  $m_2$  относительно  $m_0$  и с массой  $m_2$  относительно  $m_1$  соответственно:

---

<sup>8</sup> Карл Фрирьёф Зундман, или Сундман (швед. Karl Frithiof Sundman, 1873–1949) – финский астроном и математик шведского происхождения, нашедший в 1906–1912 годах общее аналитическое решение задачи трех тел в виде сходящихся рядов. В 1913 году эти исследования были отмечены премией Финской академии наук.

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 \mathbf{r}_2}{dt^2} &= -\gamma(m_0 + m_1) \frac{\mathbf{r}_2}{r_2^3} + \gamma m_2 \left( \frac{-\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{r_0^3} - \frac{-\mathbf{r}_1}{r_1^3} \right) = \\
&= -\gamma(m_0 + m_1) \frac{\mathbf{r}_2}{r_2^3} + \gamma m_2 \left( \frac{\mathbf{r}_0}{r_0^3} + \frac{\mathbf{r}_1}{r_1^3} \right), \\
\frac{d^2 \mathbf{r}_1}{dt^2} &= -\gamma(m_0 + m_2) \frac{\mathbf{r}_1}{r_1^3} + \gamma m_1 \left( \frac{-\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{r_0^3} + \frac{\mathbf{r}_2}{r_2^3} \right) = \\
&= -\gamma(m_0 + m_2) \frac{\mathbf{r}_1}{r_1^3} + \gamma m_1 \left( \frac{\mathbf{r}_0}{r_0^3} + \frac{\mathbf{r}_2}{r_2^3} \right), \\
\frac{d^2 \mathbf{r}_0}{dt^2} &= -\gamma(m_1 + m_2) \frac{\mathbf{r}_0}{r_0^3} + \gamma m_0 \left( \frac{-\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_0}{r_1^3} - \frac{-\mathbf{r}_2}{r_2^3} \right) = \\
&= -\gamma(m_1 + m_2) \frac{\mathbf{r}_0}{r_0^3} + \gamma m_0 \left( \frac{\mathbf{r}_1}{r_1^3} + \frac{\mathbf{r}_2}{r_2^3} \right).
\end{aligned}$$

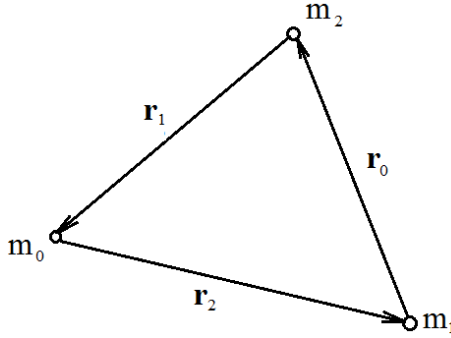


Рис. 4.1. К задаче трех тел в случаях Эйлера и Лагранжа

Так как движения должны быть по условию кеплеровыми, то они должны удовлетворять уравнениям

$$\frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} = -\gamma h_i \frac{\mathbf{r}_i}{r_i^3} \quad (i = 0, 1, 2),$$

где  $h_i$  – константы. Иначе говоря, должны быть справедливы три тождества:

$$(m_0 + m_1 - h_2) \frac{\mathbf{r}_2}{r_2^3} - m_2 \left( \frac{\mathbf{r}_0}{r_0^3} + \frac{\mathbf{r}_1}{r_1^3} \right) = 0,$$

$$(m_0 + m_2 - h_1) \frac{\mathbf{r}_1}{r_1^3} - m_1 \left( \frac{\mathbf{r}_0}{r_0^3} + \frac{\mathbf{r}_2}{r_2^3} \right) = 0,$$

$$(m_1 + m_2 - h_0) \frac{\mathbf{r}_0}{r_0^3} - m_0 \left( \frac{\mathbf{r}_1}{r_1^3} + \frac{\mathbf{r}_2}{r_2^3} \right) = 0.$$

Или с учетом того, что  $\mathbf{r}_0 + \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 = 0$ , получаем равенства

$$\mathbf{r}_0 \left( \frac{m_2}{r_0^3} + \frac{m_0 + m_1 - h_2}{r_2^3} \right) + \mathbf{r}_1 \left( \frac{m_2}{r_1^3} + \frac{m_0 + m_1 - h_2}{r_2^3} \right) = 0,$$

$$\mathbf{r}_1 \left( \frac{m_0}{r_1^3} + \frac{m_1 + m_2 - h_0}{r_0^3} \right) + \mathbf{r}_2 \left( \frac{m_0}{r_2^3} + \frac{m_1 + m_2 - h_0}{r_0^3} \right) = 0,$$

$$\mathbf{r}_2 \left( \frac{m_1}{r_2^3} + \frac{m_2 + m_0 - h_1}{r_1^3} \right) + \mathbf{r}_0 \left( \frac{m_1}{r_0^3} + \frac{m_2 + m_0 - h_1}{r_1^3} \right) = 0.$$

Эти тождества выполняются в следующих двух случаях. В первом случае – когда величины, стоящие в круглых скобках, отличны от нуля, но векторы  $\mathbf{r}_i$  коллинеарны. Тогда три массы  $m_0, m_1, m_2$  должны всегда находиться на прямой. Это возможно, если расстояния между ними и начальные скорости подобрать специальным образом. Просто напросто в этом случае для каждой точки центробежная сила инерции, присутствующая во вращающейся системе координат, связанной с прямой, на которой находятся точки, должна уравниваться силами гравитационного притяжения со стороны оставшихся двух точек. Задача усугубляется полиномиальным уравнением пятой степени, но решение ее найти удастся. Эти случаи называются *эйлеровыми*<sup>9</sup>. Их три, со следующими порядками следования масс:

$$m_0 m_1 m_2; \quad m_0 m_2 m_1; \quad m_1 m_0 m_2.$$

---

<sup>9</sup> В 1767 году Леонард Эйлер обнаружил этот класс движений.

Второй случай – если стоящие в скобках величины – нули. Это дает три пары уравнений:

$$\begin{aligned}\frac{m_0 + m_1 - h_2}{r_2^3} &= -\frac{m_2}{r_0^3} = -\frac{m_2}{r_1^3}, \\ \frac{m_1 + m_2 - h_0}{r_0^3} &= -\frac{m_0}{r_1^3} = -\frac{m_0}{r_2^3}, \\ \frac{m_2 + m_0 - h_1}{r_1^3} &= -\frac{m_1}{r_2^3} = -\frac{m_1}{r_0^3}.\end{aligned}$$

Откуда получаем равенство  $r_0 = r_1 = r_2$  и, следовательно,  $h_0 = h_1 = h_2 = m_0 + m_1 + m_2$ . Таким образом, если массы  $m_0, m_1, m_2$  будут все время находиться в вершинах равностороннего треугольника, то движение будет кеплеровым. Необходимые начальные условия такого движения следующие: массы  $m_i$  должны быть расположены в вершинах равностороннего треугольника, а их относительные скорости удовлетворять условию

$$\frac{d\mathbf{r}_0}{dt} + \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} + \frac{d\mathbf{r}_2}{dt} = 0$$

при равенстве их модулей – это следствие требования  $r_1 = r_2 = r_0$  в любой момент времени  $t$ . Очевидно, что в этом случае относительные скорости тоже составляют равносторонний треугольник. Тогда в следующее мгновение действительно сохранится равенство  $r_1 = r_2 = r_0$ . Так как три тела можно расположить в вершинах треугольника двумя разными способами –  $m_0, m_1, m_2, m_0$  и  $m_0, m_2, m_1, m_0$ , то существует два решения поставленной задачи. Рассмотренные случаи называются *лагранжевыми*<sup>10</sup>.

В 1951 году было показано (Штумпф<sup>11</sup>), что, кроме этих случаев, других начальных условий для получения кеплеровых траек-

<sup>10</sup> В 1772 году Лагранж опубликовал свой знаменитый мемуар «О задаче трех тел», в котором, исследуя решения задачи трех тел, он указывал на существование двух классов несложных движений.

<sup>11</sup> Карл Штумпф (Karl Stumpff, 1895–1970). Немец по происхождению, он был назначен профессором астрономии в Граце и затем в Геттингене. Изучал орбиты движения Земли и Луны. Функции Штумпфа, используе-

торий не существует. Хотя полученные результаты выглядят весьма искусственными, они имеют практическое значение, которое будет обсуждаться ниже.

#### 4.2. Планетоидная задача трех тел

Следующее упрощение – это предположение, что масса одного из трех тел пренебрежимо мала по сравнению с массами остальных двух тел. В этом случае два «массивных» тела не будут испытывать возмущений со стороны малого тела и, следовательно, взаимное движение массивных тел полностью описывается в рамках задачи двух тел. Что касается третьего малого тела, то оно уже не будет двигаться по кеплеровой орбите, а будет совершать сложное движение под действием двух притягивающих центров.

Первоначально этот метод использовался для изучения движения системы Солнце–Земля–Луна, но сегодня его со значительно бóльшим основанием можно использовать при рассмотрении траекторий космических аппаратов при межпланетных перелетах, когда их движение вблизи планет можно рассматривать в рамках динамики системы Солнце–планета–космический аппарат.

Частным случаем планетоидной задачи трех тел является, так называемая, *круговая ограниченная задача трех тел*. В этой задаче предполагается, что два массивных тела движутся по круговым орбитам. Рассмотрим ее более подробно.

Даны тела (материальные точки)  $S, J, P$  с массами  $m_1 \geq m_2 \gg m$ . В нашем рассмотрении масса  $m$  пренебрежимо мала и она не оказывает влияния на движение остальных двух тел. Поместим начало координат  $O$  в центре масс системы тел  $S$  и  $J$ . В качестве плоскости  $Oxy$  выберем плоскость движения тел  $S$  и  $J$ , ось  $Ox$  направим вдоль вектора из тела  $S$  в тело  $J$  (рис. 4.2).

Пусть  $d_1$  и  $d_2$  суть расстояния тел  $S$  и  $J$  от начала координат, тогда их координаты в выбранной системе имеют вид  $(-d_1, 0, 0)$  и  $(d_2, 0, 0)$ . Пусть  $n$  – угловая скорость вращения системы двух тел вокруг оси  $Ox$  относительно инерциального про-

---

мые в универсальных преобразованиях переменных в задаче двух тел, носят его имя.

странства. Очевидно, что  $d_1 + d_2 = R = \text{const.}$  Тогда по закону Кеплера (2.1), учтя, что  $n = 2\pi / T_{\text{rev}}$ , получим соотношения

$$n^2(d_1 + d_2)^3 = \mu, \quad \mu = \gamma(m_1 + m_2). \quad (4.1)$$

Положительное направление оси  $Oz$  выбираем так, чтобы  $n$  было положительным числом, а ось  $Oy$  дополняла выбранную пару осей до правой системы координат.

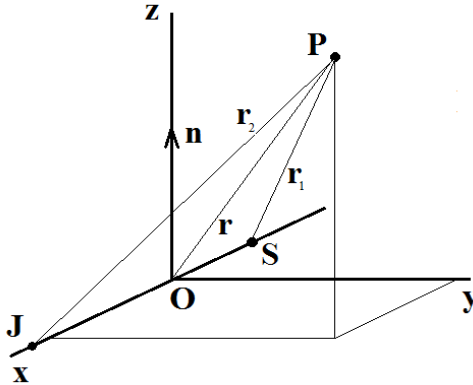


Рис. 4.2. К планетоидной задаче трех тел

Рассмотрим движение материальной точки  $P$ , координаты которой во введенной системе отсчета  $x, y, z$ . Компоненты абсолютной скорости точки  $P$  определяются соотношениями  $\left(\frac{dx}{dt} - ny, \frac{dy}{dt} + nx, \frac{dz}{dt}\right)$ , кинетическая энергия точки  $P$  –

$$T = \frac{m}{2} \left[ \left( \frac{dx}{dt} - ny \right)^2 + \left( \frac{dy}{dt} + nx \right)^2 + \left( \frac{dz}{dt} \right)^2 \right].$$

Запишем уравнение Лагранжа второго рода для точки  $P$ :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} = \frac{\partial U}{\partial q},$$

обозначив точкой операцию дифференцирования по времени  $t$ , а  $q$  – обобщенную координату. Силовая функция  $U$  в нашем случае будет иметь вид

$$U = \gamma \left( \frac{mm_1}{r_1} + \frac{mm_2}{r_2} + \frac{m_1m_2}{R} \right).$$

Последнее слагаемое, являющееся константой, может быть опущено. Отнесем  $U$  и  $T$  к массе  $m$  и введем

$$\tilde{U} = \frac{U}{m}, \quad \tilde{T} = \frac{T}{m}.$$

Запишем уравнения Лагранжа в явном виде:

$$\ddot{x} - 2n\dot{y} - n^2x = \tilde{U}_x, \quad \ddot{y} + 2n\dot{x} - n^2y = \tilde{U}_y, \quad \ddot{z} = \tilde{U}_z,$$

причем

$$\tilde{U} = \gamma \left( \frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} \right).$$

Введем функцию

$$\Omega = \frac{1}{2}n^2(x^2 + y^2) + \gamma \left( \frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} \right). \quad (4.2)$$

Тогда уравнения движения точки  $P$  в ограниченной круговой задаче трех тел имеют вид

$$\ddot{x} - 2n\dot{y} = \Omega_x, \quad \ddot{y} + 2n\dot{x} = \Omega_y, \quad \ddot{z} = \Omega_z.$$

Умножая каждое из этих уравнений на  $2\dot{x}$ ,  $2\dot{y}$ ,  $2\dot{z}$  соответственно, складывая их и интегрируя получившееся выражение, получим *интеграл Якоби*<sup>12</sup>

$$(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2 + (\dot{z})^2 = 2\Omega - C', \quad (4.3)$$

---

<sup>12</sup> Карл Густав Якоб Якоби (Carl Gustav Jacob Jacobi, 1804–1851). Немецкий математик и механик. Внёс огромный вклад в комплексный анализ, линейную алгебру, динамику и другие разделы математики и механики.

где  $C'$  – постоянная интеграла Якоби. Интеграл Якоби напоминает интеграл энергии, отнесенный к массе, но не следует забывать, что в левой части равенства стоит не абсолютная, а относительная скорость материальной точки  $P$ .

Найденный первый интеграл движения позволяет произвести качественное исследование движения точки  $P$ . Поверхность  $(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2 + (\dot{z})^2 = 0$  будет отделять области, в которых относительная скорость вещественна, от тех, где она могла бы принимать мнимое значение. Уравнение этой поверхности, как видно из (4.3), имеет следующий вид:

$$2\Omega = C' . \quad (4.4)$$

Для упрощения анализа выберем подходящую систему единиц. Пусть в ней  $k = 1$ ,  $d_1 + d_2 = 1$ . Тогда из равенства (4.1) следует, что

$$n^2 = m_1 + m_2 ,$$

и уравнение (4.4) с учетом (4.2) записывается так:

$$(m_1 + m_2)(x^2 + y^2) + \frac{2m_1}{r_1} + \frac{2m_2}{r_2} = C' . \quad (4.5)$$

Уравнение (4.5) определяет поверхность нулевой относительной скорости во вращающейся вместе с телами  $S$  и  $J$  системе координат.

Сравнение выражений (4.3) и (4.2) показывает, что для заданной точки (в координатах  $(x, y, z)$ ) уменьшению константы  $C'$  соответствует увеличение модуля относительной скорости. Воспользуемся этим фактом для рассмотрения вопроса об изменении конфигурации поверхности нулевой относительной скорости в зависимости от модуля относительной скорости тела  $P$ . Начнем рассмотрение с малых относительных скоростей, которым соответствуют большие  $C'$ .

Если предположить, что  $C'$  велико, то из уравнения (4.5) можно заключить, что это будет иметь место в трех областях пространства  $(x, y, z)$  – при больших  $x^2 + y^2$  (и, следовательно, больших  $r_1$  и  $r_2$ ) и при малых  $r_1$  или  $r_2$ . Для этих трех случаев уравнение (4.5) удобно записать в трех различных видах:



$$\begin{aligned}
(m_1 + m_2)(x^2 + y^2) &= C' - \varepsilon_1(x, y, z), \\
2\frac{m_1}{r_1} &= C' - \varepsilon_2(x, y, z), \\
2\frac{m_2}{r_2} &= C' - \varepsilon_3(x, y, z),
\end{aligned}
\tag{4.6}$$

где  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  суть некоторые функции от  $(x, y, z)$ , имеющие относительно малую величину. Если положить функции  $\varepsilon_i$  равными нулю, то первое уравнение из (4.6) будет уравнением кругового цилиндра с осью, совпадающей с осью  $Oz$ , а второе и третье уравнения из (4.6) будут уравнениями сфер с центрами в точках  $S$  и  $J$ . Таким образом, поверхность нулевой скорости (4.5) распалась на три отдельные поверхности. Учет малых слагаемых  $\varepsilon_i$  несколько деформирует конфигурацию этих трех поверхностей, и поэтому они носят название *квазицилиндра* и *квазисфер*. Квазицилиндр имеет наименьший диаметр в плоскости  $(x, y)$ , а квазисферы – яйцевидную форму с острыми концами, направленными к началу координат.

По мере увеличения относительной скорости (то есть уменьшения  $C'$ ) размеры квазицилиндра будут уменьшаться, а квазисфер – расти, так что первоначально отдельные поверхности начнут сближаться и сливаться. Этот процесс показан на рис. 4.3, где дана эволюция сечений поверхности (4.5) плоскостями  $Oxy$  и  $Oxz$ . Уменьшению  $C'$  соответствует переход вправо от рисунка к рисунку. Области, в которых движение невозможно, то есть для которых  $(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2 + (\dot{z})^2$  становится отрицательной величиной, заштрихованы.

Поясним механический смысл изображенных на рис. 4.3 диаграмм. По мере уменьшения  $C'$  происходит увеличение относительной скорости тела  $P$  и область «досягаемости» увеличивается. При очень малых относительных скоростях (левая диаграмма) тело  $P$  может лишь незначительно удаляться от мощных притягивающих центров  $S$  и  $J$ . По мере увеличения относительной скорости область досягаемости настолько увеличивается, что, например, на правой диаграмме тело  $P$  как при «старте» с  $S$ , так и с  $J$  может удалиться в бесконечность.

Первоначально такой подход был применен Хиллом<sup>13</sup> в 1878 году к анализу движения Луны. Рассматривая три тела – Солнце, Землю и Луну – и считая Луну малой сравнительно с двумя другими небесными телами, Хилл показал, что реализуется диаграмма типа самой левой на рис. 4.3 – Луна движется глубоко внутри квазисферы Земли. В связи с этим говорят, что движение Луны относительно Земли *устойчиво по Хиллу*.

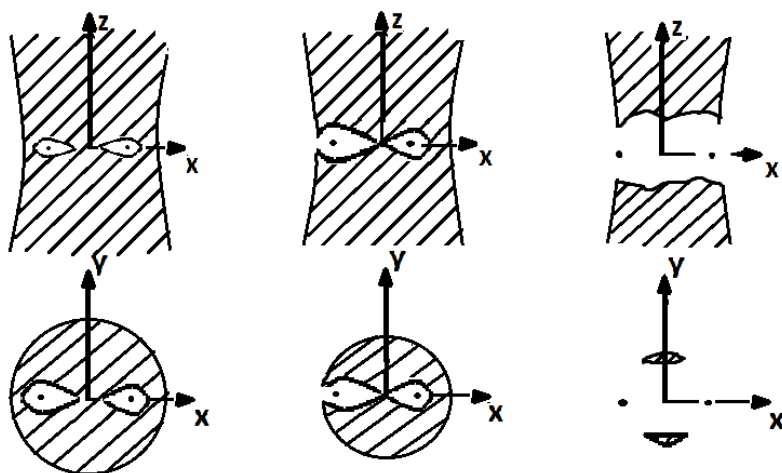


Рис. 4.3. Эволюция сечений поверхности (4.5) плоскостями  $Oxy$  и  $Oxz$

Интеграл Якоби используется нередко для отождествления вновь открытой периодической кометы. Рассматривая Солнечную систему как совокупность двух тел – Солнца и Юпитера, находят из наблюдений движения кометы константу  $C'$  системы Солнце–Юпитер–комета. При повторном появлении этой кометы необходимым условием ее тождественности с ранее наблюдавшейся является близость констант Якоби  $C'$ .

<sup>13</sup> Джордж Уильям Хилл (George William Hill, 1838–1914) – американский астроном и математик. Известен своими работами в области небесной механики и, в частности, в области теории движения Луны, Юпитера и Сатурна.

### 4.3. Особые точки поверхности нулевой скорости

Особая точка поверхности  $F(x, y, z) = 0$  должна удовлетворять условиям  $F_x = 0, F_y = 0, F_z = 0$ . Рассмотрим свойства особых точек поверхности (4.4). На этой поверхности по определению  $(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2 + (\dot{z})^2 = 0$ , а следовательно,  $\dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = 0$ . В особых точках дополнительно выполняются равенства  $\Omega_x = \Omega_y = \Omega_z = 0$ . Вычислив  $\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z$  для (4.2), запишем

$$\ddot{x} - 2n\dot{y} = \ddot{y} + 2n\dot{x} = \ddot{z} = 0.$$

Откуда с учетом того, что  $\dot{y} = \dot{x} = 0$ , получаем

$$\ddot{x} = \ddot{y} = \ddot{z} = 0.$$

Следовательно, материальная точка  $P$ , находясь в особой точке поверхности (4.4) и имея соответствующее значение константы  $C'$ , будет не только неподвижна в системе координат  $Oxyz$ , но и её ускорения будут равны нулю. Таким образом, это будут точки, в которых  $P$  находится в состоянии относительного равновесия. С известными оговорками об устойчивости такого положения равновесия можно утверждать, что при сформулированных выше условиях  $P$  будет «вечно» находиться в подобной точке.

Поиск таких точек можно провести обычными методами анализа, однако используем другой подход. Если в особых точках поверхности (4.4) точка  $P$  оказывается неподвижной относительно тел  $S$  и  $J$ , то, поскольку и расстояние между телами  $S$  и  $J$  тоже является постоянной величиной, можно утверждать, что все три тела  $S, J, P$  будут вращаться вокруг общего центра масс вместе с плоскостью  $Oxy$ , в которой все они должны лежать. Для тел  $S$  и  $J$  это следует из выбора системы координат, для тела  $P$  — из условия  $\ddot{z} = 0$ . Но тогда не только тела  $S$  и  $J$  будут совершать круговое движение, но круговое движение будет свойственно и точке  $P$ . Следовательно, всем трем объектам будут свойственны движения по кеплеровым орбитам. Но выше уже говорилось, что это возможно лишь в пяти случаях: трех случаях коллинеарного движения (движение Эйлера) и двух случаях триагонального движения (движение Лагранжа). Следовательно, особые точки поверхности (4.4) совпадают с положениями относительного равновесия, найденными Эйлером и Лагранжем.

Если материальная точка  $P$  находится в малой окрестности особой точки поверхности нулевой относительной скорости и имеет малую относительную скорость, то дальнейшее ее поведение зависит от характера поля ускорений, то есть величин  $\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}$ . Оно может быть таким, что ускорения будут «уводить»  $P$  от особой точки или, напротив, стремиться привести  $P$  в особую точку. В первом случае следует говорить о том, что положение равновесия является неустойчивым, а во втором – устойчивым. В случае устойчивости отклонение  $P$  от идеального равновесия, то есть наличие малых относительных скоростей и отклонений координат от координат особой точки, при отсутствии диссипации механической энергии приведет к незатухающим колебаниям (либрациям) точки  $P$  в малой окрестности особой точки поверхности нулевой относительной скорости. Поэтому особые точки называются обычно *точками либрации*. Эйлеровы точки называют еще *коллинеарными точками либрации*, а лагранжевы – *треугольными точками либрации*.

В системе Земля–Луна коллинеарная точка, лежащая за Луной, обозначается  $L_2$ , между Землей и Луной –  $L_1$ , за Землей –  $L_3$ . Треугольные обозначаются  $L_4$  и  $L_5$ . Аналогично и в системе Солнце–Земля.

Если обозначить координаты точки либрации во вращающейся системе координат  $Oxyz$  через  $x_0, y_0, z_0$ , через  $\xi, \eta, \zeta$  – малые отклонения  $P$  от этого положения, то, применяя обычные методы линеаризации, можно сформулировать и решить задачу об устойчивости движения тела  $P$  в малой окрестности точки  $(x_0, y_0, z_0)$ . Наибольший интерес представляет движение точки  $P$  в плоскости  $Oxy$ . Соответствующие уравнения движения будут иметь вид  $\ddot{\xi} + \dots = 0, \ddot{\eta} + \dots = 0$ , где многоточиями обозначены слагаемые, содержащие производные порядка, ниже второго, и следовательно, характеристическое уравнение этой системы дифференциальных уравнений будет четвертой степени. Оказывается, что оно приводится к биквадратному уравнению вида

$$\lambda^4 + a\lambda^2 + b = 0,$$

которое и дает ответ на вопрос об устойчивости движения тела. Анализ показывает, что коллинеарные точки либрации всегда характеризуются неустойчивостью, а треугольные точки либрации дают устойчивое движение в тех случаях, когда

$$\frac{m_2}{m_1 + m_2} < 0.038 \quad \text{или} \quad \frac{m_2}{m_1 + m_2} > 1 - 0.038. \quad (4.7)$$

Представляет интерес поверхность потенциальной энергии над координатной плоскостью движения двух массивных тел <sup>14</sup> (рис. 4.4). Здесь на плоскости показаны коллинеарные точки либрации и проекции уровней энергии.

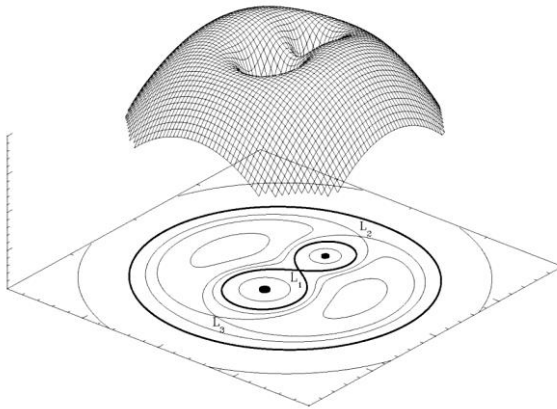


Рис. 4.4. Поверхность потенциальной энергии для двойной звезды с отношением масс 2:1

Устойчивые точки либрации замечательны тем, что помещенное в их малой окрестности небесное тело, если свойственная ему константа  $C'$  имеет нужное значение, будет находиться там «вечно», причем для обеспечения этой неподвижности нет необходимости затрачивать энергию. Это может быть использовано для расположения ретранслятора радиосигналов, излучаемых по каналу  $ABC$  с невидимой с Земли стороны Луны (рис. 4.5). Неподвижность ретранслятора в системе координат, связанной с Луной и

<sup>14</sup> <http://hemel.waarnemen.com/Informatie/Sterren/hoofdstuk6.html#h6.2>

Землей (неподвижность точки  $B$  относительно точек  $A$  и  $C$ ), значительно упрощает проблему обеспечения связи: направленные радиоприемники в точках  $A$  и  $B$  могут сохранять постоянное направление, не требуя постоянного слежения. Треугольные точки либрации – подходящая база для создания радиointерферометра<sup>15</sup>.

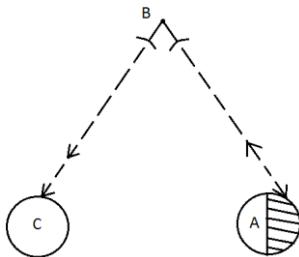


Рис. 4.5. Расположения ретранслятора радиосигналов, излучаемых по каналу  $ABC$  с невидимой с Земли стороны Луны

Устойчивость геометрии взаимных расположений точек  $A, B, C$  следует из того, что входящая в условия (4.7) величина  $m_2/(m_1 + m_2)$  имеет в рассматриваемом случае порядок 0.01.

Наличие устойчивых точек либрации приводит к тому, что области этих точек становятся своего рода «мусорными ямами», в которых накапливается межпланетная материя – пыль и другие мелкие частицы, которые в результате взаимных столкновений случайно приобрели нужное значение константы  $C'$  в окрестности устойчивой точки либрации.

В.А. Егоров<sup>16</sup> вычислил скорости на поверхности гипотетической сферы, удаленной от поверхности Земли на 200 км, необхо-

<sup>15</sup> Улыбышев Ю.П. Точки Лагранжа. Перспективы их использования в космической деятельности. Доступно и популярно способы использования точек Лагранжа изложены на ресурсе:

<http://gagarin.energia.ru/past-future/174-tochki-lagranzha-perspektivy-ikh-ispolzovaniya-v-kosmicheskoy-deyatelnosti.html>

<sup>16</sup> Всеволод Александрович Егоров (1930–2001) – советский и российский учёный-математик и механик. С 1966 года работал в Институте прикладной математики АН СССР. Профессор МГУ, доктор физ.-мат. наук. Работы

димые для достижения точек либрации в системе Земля–Луна. Оказалось, что они равны 10.85 км/с с точностью в несколько метров в секунду и различаются друг от друга для всех пяти точек либрации<sup>17</sup>.

#### **4.4. Инвариантные многообразия как способ экономного передвижения по Солнечной системе**

Продолжим изучение точек либрации, но сейчас обратим наше внимание на коллинеарные точки. Опустим вывод уравнений движения, линеаризованных в окрестности коллинеарной точки, и получение их характеристического уравнения. Собственные числа линейной системы, описывающей движение в плоскости орбиты массивных тел, можно представить в виде  $\pm\lambda$  и  $\pm i\nu$ , где  $\lambda > 0$ ,  $\nu > 0$ ,  $i$  – мнимая единица и для уравнения, описывающего движение в перпендикулярном этой плоскости направлении, в виде  $\pm iw$ , где также  $w > 0$  (см., например, W.S. Koon<sup>18</sup>). Что означает неустойчивость коллинеарных точек либрации. Более того, фазовым портретом в окрестности коллинеарной точки либрации оказывается комбинация «седла» и «центра».

В достаточно малой окрестности коллинеарных точек либрации можно выделить четыре класса движений и соответствующие им орбиты:

- периодические орбиты, известные также как орбиты Ляпунова<sup>19</sup>;
- асимптотические орбиты, стремящиеся к орбитам Ляпунова или уходящие от них;

---

по динамике космических полётов. Был первым исследователем траекторий перелетов Земля–Луна. Лауреат Ленинской премии (1962).

<sup>17</sup> Егоров В.А. О некоторых задачах динамики полета к Луне // Успехи физических наук. 1957. Т. 63, вып. 1а. С. 73–118.

<sup>18</sup> Koon W.S. et al. Dynamical systems, the three-body problem and space mission design. Marsden Books, 2011. 312 p.

<sup>19</sup> Орбита Ляпунова – периодическая орбита вокруг неустойчивой коллинеарной точки либрации в ограниченной круговой задаче трех тел. Различают плоские, лежащие в плоскости движения двух массивных тел, и вертикальные орбиты.

- орбиты, соответствующие транзитным орбитам. Движение КА в этом случае происходит из области главного тела в область второго тела или во внешнюю область;
- орбиты, соответствующие нетранзитным орбитам. Движение КА между областями в этом случае не происходит.

Тем самым движение КА в окрестности коллинеарной точки либрации рассматривается как суперпозиция трех типов реальных движений: устойчивого, неустойчивого и ограниченного. На рис. 4.6 представлены<sup>20</sup> плоские и вертикальные орбиты Ляпунова.

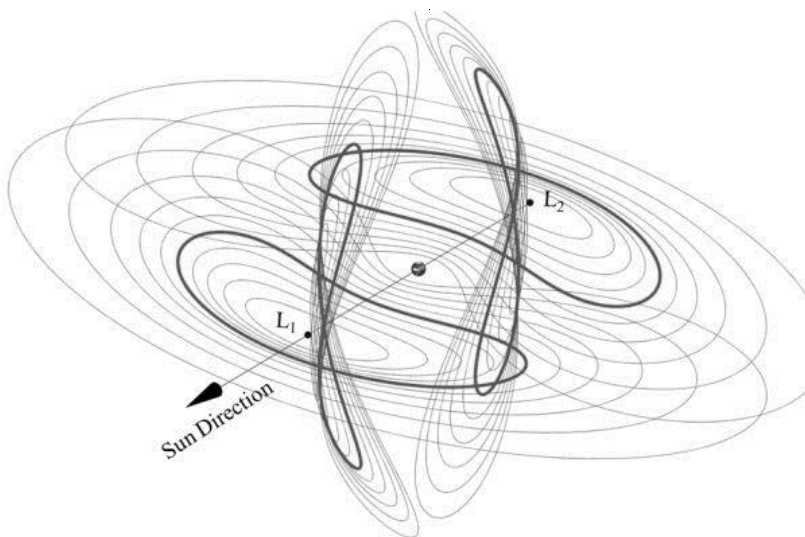


Рис. 4.6. Плоские и вертикальные орбиты Ляпунова в окрестностях коллинеарных точек либрации системы Солнце–Земля

Однако в рамках ограниченной круговой задачи трех тел помимо орбит Ляпунова существуют также и другие виды периодических орбит. Их существование определяется нелинейными эффектами задачи трех тел (в первом и даже втором приближении они

<sup>20</sup> García Yáñez D., Sanchez J.P., McInnes C.R. Easily retrievable objects among the NEO population // *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. August 2013. V. 116, I. 4. P. 367–388.



не существуют), и это доказано аналитически Ляпуновым и Мозером<sup>21</sup>.

Среди периодических орбит, отличных от орбит Ляпунова, самыми популярными являются так называемые *гало-орбиты*. Впервые они были обнаружены Фаркуа<sup>22</sup> в 1960-х годах в рамках «лунной гонки», когда появилась идея создания станции связи в коллинеарной точке либрации  $L_2$  системы Земля–Луна. Эта орбита достаточно велика, ее не закрывает Луна, и она позволяет держать постоянной радиосвязь с объектами на обратной стороне Луны (рис. 4.7).

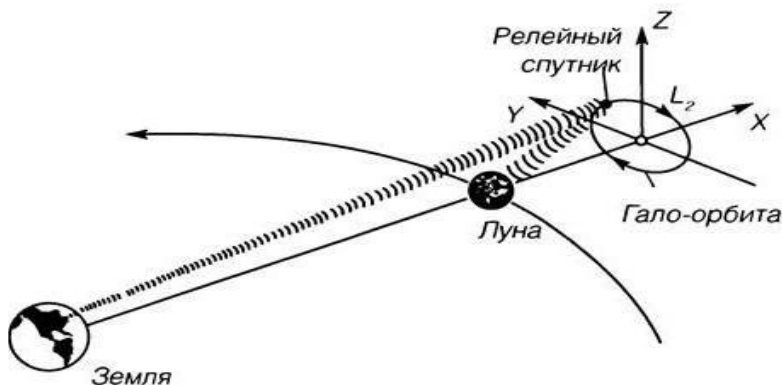


Рис. 4.7. Схема расположения КА на гало-орбите около точки либрации  $L_2$

Сделаем несколько замечаний. Во-первых, отметим существование устойчивых и неустойчивых инвариантных многообразий, движение вдоль которых приближает либо удаляет КА от перио-

<sup>21</sup> Юрген Курт Мозер (Jürgen Kurt Moser, 1928–1999). Германский, американский и швейцарский математик. Основные результаты получены в области дифференциальных уравнений и теории динамических систем. Один из создателей КАМ-теории хаоса (теории Колмогорова–Арнольда–Мозера).

<sup>22</sup> Farquhar R.W. Station-keeping in the vicinity of collinear libration points with an application to a Lunar communications problem // Space Flight Mechanics, Science and Technology Series. New York: American Astronautical Society, 1967. V. 11. P. 519–535.

дической орбиты. Во-вторых, асимптотические орбиты оказываются частями устойчивого и неустойчивого многообразий орбиты Ляпунова, разделяющие два типа движения: транзитные орбиты и нетранзитные орбиты (рис. 4.8). Другими словами, в фазовом пространстве эти многообразия представляют собой некие поверхности, которые не могут пересекать другие траектории той же энергии. Поэтому если какая-нибудь траектория приближается к этим поверхностям, то она либо «отразится» от них, либо пройдет «вблизи» и проникнет из одной области (окрестность, например, Солнца) в другую область (окрестность Земли). Тем самым асимптотические орбиты здесь играют роль сепаратрис. В-третьих, все качественные результаты, полученные здесь для динамики системы линеаризованных уравнений, сохраняются также и для нелинейных уравнений. Это означает существование всех указанных выше видов орбит, а также устойчивых и неустойчивых инвариантных многообразий<sup>23</sup> и в нелинейной динамике.

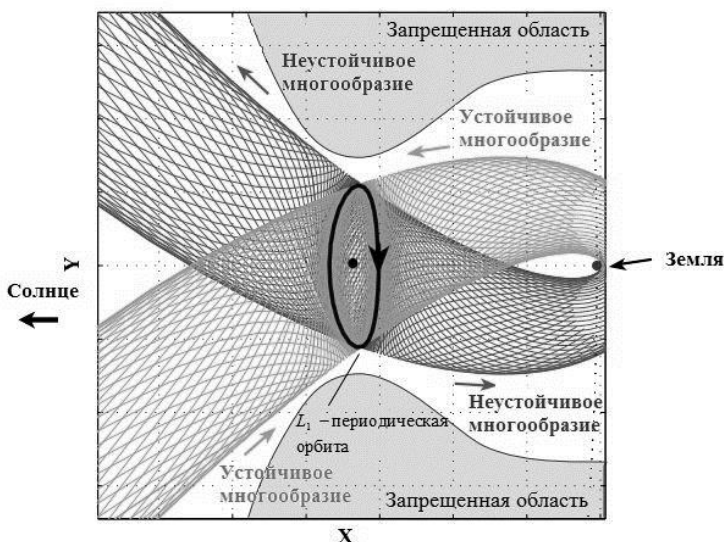


Рис. 4.8. Асимптотические траектории, связанные с орбитами Ляпунова

<sup>23</sup> Инвариантное многообразие динамической системы – подмногообразие фазового пространства динамической системы, инвариантное относительно фазового потока (сдвигов по времени).

Как же осуществляется проектирование периодических траекторий, а также связанных с ними асимптотических орбит, проходящих вдоль устойчивых или неустойчивых многообразий? Пошагово алгоритм построения асимптотических орбит выглядит следующим образом.

- Выбирается подходящий уровень энергии.
- Рассчитываются начальные условия периодической траектории линеаризованной системы уравнений движения.
- С помощью *метода дифференциальной коррекции*<sup>24</sup> и метода продолжения по параметру рассчитываются периодические орбиты исходной нелинейной системы уравнений.
- Рассчитываются устойчивые и неустойчивые собственные векторы матрицы монодромии. Исходя из них, вычисляются направления в фазовом пространстве, интегрирование вдоль которых позволяет строить асимптотические траектории.

Орбиты Ляпунова построены в работе И.С. Ильина и др.<sup>25</sup> с подробным изложением методики нахождения периодических решений применительно в проектируемым отечественным миссиям.

Следует заметить, что орбиты Ляпунова бывают плоские (они малоинтересны для приложений) и бывают вертикальные орбиты, имеющие вид восьмерки. Орбиты Ляпунова существуют и в линейном, и в нелинейном приближении. Гало-орбиты существуют только в нелинейном приближении. Существует амплитуда плоской орбиты Ляпунова, для которой происходит бифуркация, тогда кроме большей орбиты Ляпунова появляются еще гало-орбиты (так называемая северная и южная гало-орбита).

Можно сделать вывод, что поскольку межпланетное пространство пронизано инвариантными многообразиями – описанное выше касалось напрямую лишь орбит Ляпунова, еще присутствуют квазипериодические *орбиты Лиссажу*, окружающие точки либрации

---

<sup>24</sup> Метод *дифференциальной коррекции* – итеративная процедура, использующая аналитическое приближение периодической орбиты линеаризованных уравнений движения в качестве начального приближения. Этот метод позволяет получать начальные условия, соответствующие периодической орбите нелинейных уравнений движения.

<sup>25</sup> Ильин И.С., Сазонов В.В., Тучин А.Г. Построение ограниченных орбит в окрестности точки либрации  $L_2$  системы Солнце–Земля // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2012. № 65. 28 с.  
(<http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2012-65>)

различных пар планет и пар планета–Солнце, то при небольшой энергетической разнице траекторий на этих многообразиях можно совершать переходы с одного многообразия на другое, передвигаясь из одного уголка Солнечной системы в другой – космический HighWay<sup>26</sup>. Хотя здесь не все так просто. Проблема заключается в том, что инвариантные многообразия внутренних планет (до Марса включительно) не пересекаются, поэтому с Земли до Марса лететь все же придется традиционным способом – на химических источниках или на малой тяге.

Многообразия внешних планет (начиная от Юпитера) пересекаются, поэтому там можно почти «бесплатно» перебраться от Юпитера до Плутона. Схему передвижения можно проинтерпретировать как переход-пересадка из одного поезда в другой, летящих по параллельным путям в одном направлении с близкими скоростями (вот где важно требование энергетической близости), в дальнейшем уходящих один на север, а другой на восток.

---

<sup>26</sup> <http://www.nasa.gov/mission-pages/genesis/media/jpl-release-071702.html>

## 5. Грависферы

В целом ряде случаев задача  $n$  тел, если одно из них обладает очень большой, а одно пренебрежимо малой массой, может быть заменена  $(n-1)$  задачами двух тел. Поясним это на примере межпланетных перелетов. Пусть траектория космического аппарата, стартовавшего с Земли, проходит мимо Марса. Тогда, считая, что аппарат не влияет на движение планет вокруг Солнца, можно предположить, что в начале полета его движение определяет система аппарат–Земля, затем аппарат–Солнце, затем аппарат–Марс, если полет продолжается, то вновь аппарат–Солнце и так далее. Истинная траектория заменяется приближенной, «склеенной» из отрезков конических сечений, определяемых последовательным решением задач двух тел в названном выше порядке. Условия склейки очевидны: параметры конечной точки траектории, полученной в системе аппарат–Земля, должны совпадать (в абсолютном пространстве) с параметрами начальной точки участка, получаемого в системе аппарат–Солнце и так далее. Параметры, о которых идет речь, – это положение КА и вектор его абсолютной скорости.

Такой подход требует решения задачи о положении введенных выше точек склейки траектории. Здесь можно допустить, что каждая планета окружена некоторой сферой (конечно, не в геометрическом смысле этого слова), отделяющей области пространства, в которых «командует» гравитационное поле планеты от области, где эта роль переходит к Солнцу. Существуют разные подходы к нахождению этих сфер, носящих название *гравитационных сфер* или *грависфер*.

Будем рассматривать случай, когда масса Солнца  $m_1$ , планеты  $m_2$  и космического аппарата  $m$  подчиняются очевидным условиям  $m_1 \gg m_2$ , а  $m$  пренебрежимо мала. Начнем рассмотрение с простейшего случая.

### 5.1. Сфера притяжения

Казалось бы, наиболее естественным определением грависферы является условие, по которому силы притяжения аппарата со стороны Солнца и планеты на поверхности грависферы должны стать равными между собой по модулю.

Пусть  $\mathbf{R}$  и  $\mathbf{r}$  – гелиоцентрические координаты  $m_2$  и  $m$ ,  $\mathbf{s}$  – геоцентрическая координата  $m$  (рис. 5.1).

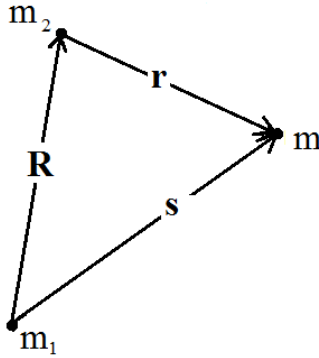


Рис. 5.1. Взаимное расположение Солнца ( $m_1$ ), планеты ( $m_2$ ) и КА ( $m$ )

В силу условия  $m_1 \gg m_2$  граница сферы притяжения планеты лежит на малом расстоянии от нее, и, следовательно, можно предположить, что  $R \approx s$ . Пусть силы притяжения Солнца и планеты, действующие на  $m$ , будут равны друг другу по модулю. Тогда после сокращения на  $\gamma m$  найдем

$$m_1 r^2 = m_2 s^2 \approx m_2 R^2.$$

Приравнявая первое и последнее выражения в этой цепочке, получаем радиус сферы притяжения

$$r = R \sqrt{\frac{m_2}{m_1}}. \quad (5.1)$$

На самом деле, следуя строгим выкладкам, граница сферы притяжения – действительно сфера (она носит название *сфера Аполлония*), но ее центр не совпадает с центром планеты, а отстоит от него на расстоянии

$$R \frac{m_2}{m_1} / \left( 1 - \frac{m_2}{m_1} \right)$$

в сторону, противоположную  $m_1$ . Ее радиус –

$$R \sqrt{\frac{m_2}{m_1}} / \left( 1 - \frac{m_2}{m_1} \right).$$

Так, например, для системы Луна–Земля отношение их масс  $m_2/m_1 \approx 1/81$ , а взаимное расстояние  $R \approx 380\,000$  км. Радиус сферы притяжения и смещение центра сферы от центра Луны, вычисленные по вышеприведенным формулам, составляют 42 750 км и 4750 км соответственно. Вычисление радиуса этой грависферы по формуле (5.1) дает не сильно отличающийся результат – приблизительно 42 000 км.

Полученное уравнение границы сферы притяжения не решает, однако, поставленной задачи. Дело в том, что ход рассуждений, хотя и носит, казалось бы, естественный характер, на самом деле содержит грубую ошибку. Он неявно исходит из предположения о взаимной неподвижности тел  $m_1$  и  $m_2$  и является типично статическим. На самом деле, под действием гравитационных полей находится не только тело  $m$ , но и тела  $m_1$  и  $m_2$ , которые взаимно притягиваются. Поэтому решение задачи о грависферах следует решать, основываясь не на законах статики, а на законах динамики.

## 5.2. Сфера действия (грависфера Лапласа)

Лаплас решал задачу о движении тела  $m$  под действием гравитационных полей тел  $m_1$  и  $m_2$  методом численного интегрирования уравнений движения. При этом возник вопрос о том, в какой системе координат такое интегрирование потребовало бы наименьших усилий (не следует забывать, что в то время еще не существовало электронно-вычислительных машин, поэтому исследователям приходилось идти на всякие ухищрения для проведения численного интегрирования). В любой точке пространства тело  $m$  находится под действием двух сил, связанных с существованием тел  $m_1$  и  $m_2$ . В качестве естественных систем координат можно избрать *гелиоцентрическую* или *планетоцентрическую*. В первом случае будем использовать индексы «1», а во втором – индексы «2». Следовательно, суммарное ускорение тела  $m$  можно записать в виде

$\mathbf{B}_1 + \mathbf{b}_1$  или  $\mathbf{B}_2 + \mathbf{b}_2$ . Здесь буквой  $\mathbf{B}$  с соответствующим индексом обозначено «главное» ускорение, вызванное телом, центр которого принят за начало системы отсчета, а буквой  $\mathbf{b}$  с тем же индексом – ускорение, вызванное другим телом, которое естественно назвать возмущающим. Очевидно, что, чем меньше возмущающее ускорение (и чем ближе, следовательно, задача к задаче двух тел), тем удобнее вести расчеты. Следовательно, из двух возможных систем координат надо выбирать ту, в которой возмущающее ускорение меньше.

Поскольку тело  $m$  движется, оно может перейти из области, где предпочтительна гелиоцентрическая система координат, в область, где следует предпочесть планетоцентрическую (или наоборот). Лаплас предложил определять границу между этими двумя областями равенством

$$\frac{|\mathbf{b}_1|}{|\mathbf{B}_1|} = \frac{|\mathbf{b}_2|}{|\mathbf{B}_2|}, \quad (5.2)$$

то есть считать определяющим параметром величину относительного возмущающего ускорения.

Назовем *сферой действия* (или *грависферой Лапласа*) поверхность, окружающую планету, на которой выполняется условие (5.2). Запишем уравнения движения тел  $m_1, m_2, m$  в инерциальной системе координат с центром в точке  $O$ , учитывая, что масса тела  $m$  пренебрежимо мала (рис. 5.2), то есть движение тел  $m_1, m_2$  определяется их взаимным притяжением, а движение аппарата – притяжением обоих этих тел:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \mathbf{r}_1}{dt^2} &= -\gamma m_2 \frac{-\mathbf{R}}{R^3}, \\ \frac{d^2 \mathbf{r}_2}{dt^2} &= -\gamma m_1 \frac{\mathbf{R}}{R^3}, \\ \frac{d^2 \mathbf{r}_m}{dt^2} &= -\gamma \left[ m_1 \frac{\mathbf{s}}{s^3} + m_2 \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right]. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Вычитая из второго и третьего уравнений в (5.3) первое, перейдем к гелиоцентрической системе координат:



$$\begin{aligned}\frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2} &= -\gamma(m_1 + m_2)\frac{\mathbf{R}}{R^3}, \\ \frac{d^2\mathbf{s}}{dt^2} &= -\gamma\left[m_1\frac{\mathbf{s}}{s^3} + m_2\left(\frac{\mathbf{r}}{r^3} + \frac{\mathbf{R}}{R^3}\right)\right].\end{aligned}\quad (5.4)$$

Первое из полученных уравнений тривиально, оно говорит о том, что планета движется вокруг Солнца по кеплеровой орбите. Второе уравнение (5.4) описывает движение тела  $m$  в гелиоцентрической системе координат. Первое слагаемое в квадратных скобках определяет «главное» ускорение  $\mathbf{B}_1$ , связанное с гравитационным полем Солнца, а второе – возмущающее ускорение  $\mathbf{b}_1$ , вызванное полем притяжения планеты.

Чтобы записать движение тела  $m$  в планетоцентрической системе координат, следует вычесть из второго уравнения первое в (5.4), что приводит к выражению

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -\gamma\left[m_2\frac{\mathbf{r}}{r^3} + m_1\left(\frac{\mathbf{s}}{s^3} - \frac{\mathbf{R}}{R^3}\right)\right].\quad (5.5)$$

Как и в уравнениях (5.4), здесь первое слагаемое описывает основное (теперь планетоцентрическое) ускорение  $\mathbf{B}_2$ , а второе – возмущающее (теперь связанное с Солнцем) ускорение  $\mathbf{b}_2$ .

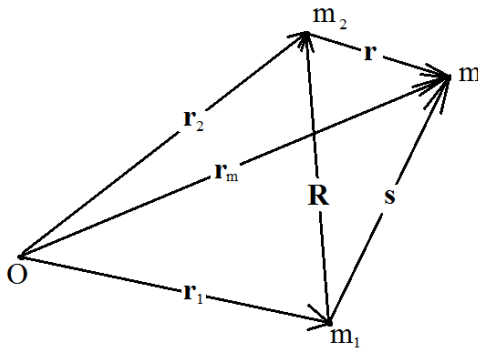


Рис. 5.2. Взаимное расположение Солнца ( $m_1$ ), планеты ( $m_2$ ) и КА ( $m$ ) относительно точки  $O$

Уравнения (5.4) и (5.5) описывают одно и то же движение и совершенно эквивалентны. Вопрос о предпочтительности того или иного уравнения – это вопрос простоты вычислений. Если использовать для определения условий рациональности перехода от одной возможной записи к другой равенство (5.2), то это приведет к следующему определению поверхности сферы действия:

$$\frac{\left| m_2 \left( \frac{\mathbf{r}}{r^3} + \frac{\mathbf{R}}{R^3} \right) \right|}{\left| m_1 \frac{\mathbf{s}}{s^3} \right|} = \frac{\left| m_1 \left( \frac{\mathbf{s}}{s^3} - \frac{\mathbf{R}}{R^3} \right) \right|}{\left| m_2 \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right|}. \quad (5.6)$$

Стоящие в числителе и знаменателе функции координат допускают упрощения, приводящие к приближенным равенствам, получаемым с учетом связи  $\mathbf{s} = \mathbf{R} + \mathbf{r}$  и в предположении малости величины  $r/R$  (фактически проведем разложение дробей в ряды Тейлора, считая отношение  $r/R$  малым):

$$\begin{aligned} \left| \frac{\mathbf{s}}{s^3} \right| &\approx \frac{1}{R^2} \left( 1 + O\left( \frac{r}{R} \right) \right), & \left| \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right| &\approx \frac{1}{r^2}, \\ \left| \frac{\mathbf{r}}{r^3} + \frac{\mathbf{R}}{R^3} \right| &\approx \frac{1}{r^2} \left| \frac{\mathbf{r}}{r} + \left( \frac{r}{R} \right)^2 \frac{\mathbf{R}}{R} \right| \approx \frac{1}{r^2} \left( 1 + O\left( \frac{r^2}{R^2} \right) \right), \\ \left| \frac{\mathbf{s}}{s^3} - \frac{\mathbf{R}}{R^3} \right| &= \left| \frac{\mathbf{R} + \mathbf{r}}{|\mathbf{R} + \mathbf{r}|^3} - \frac{\mathbf{R}}{R^3} \right|. \end{aligned} \quad (5.7)$$

При этом

$$|\mathbf{R} + \mathbf{r}|^{-3} = [(\mathbf{R} + \mathbf{r})^2]^{-3/2} \approx \frac{1}{R^3} \left( 1 - 3 \frac{\mathbf{R}\mathbf{r}}{R^2} \right).$$

Тогда, сохраняя лишь величины не выше  $r/R$  порядка малости, преобразуем последнее выражение из (5.7) к виду

$$\left| \frac{\mathbf{s}}{s^3} - \frac{\mathbf{R}}{R^3} \right| \approx \left| \frac{\mathbf{R}}{R^3} \left( 1 - 3 \frac{\mathbf{R}\mathbf{r}}{R^2} \right) + \frac{\mathbf{r}}{r^3} - \frac{\mathbf{R}}{R^3} \right| = \frac{1}{R^3} \left| \mathbf{r} - 3 \frac{\mathbf{R}\mathbf{r}}{R^2} \mathbf{R} \right|. \quad (5.8)$$

Следовательно, уравнению (5.6) с учетом (5.7) и (5.8) можно придать следующий вид (знаки приближенного равенства опускаем):

$$\left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2 \left(\frac{R}{r}\right)^5 = \left| \frac{\mathbf{r}}{r} - 3 \frac{\mathbf{R} \mathbf{r} \mathbf{R}}{R r} \right|.$$

Если обозначить угол между  $\mathbf{R}$  и  $\mathbf{r}$  через  $\psi$ , то последнее равенство переходит в выражение

$$r = R \left( \frac{m_2}{m_1} \right)^{2/5} \frac{1}{F^{1/5}(\psi)}, \quad (5.9)$$

где

$$F(\psi) = \left| \frac{\mathbf{r}}{r} - 3 \frac{\mathbf{R}}{R} \cos \psi \right|. \quad (5.10)$$

Выражение (5.9) определяет радиус сферы действия. Функцию  $F^{1/5}(\psi)$  можно считать величиной, близкой единице, поскольку квадрат выражения (5.10), связывающего два орта, удовлетворяет неравенствам  $1 \leq F^2(\psi) \leq 4$ , так как по теореме косинусов  $F^2(\psi) = 1 + 3 \cos^2 \psi$ . Следовательно, сфера действия является поверхностью, близкой шаровой. Приближенное выражение для сферы действия будет следующим:

$$r \approx R \left( \frac{m_2}{m_1} \right)^{2/5}. \quad (5.11)$$

Видно, что величина сферы действия зависит от двух главных факторов – расстояния планеты от Солнца и отношения их масс. Приведем радиусы сфер действия для некоторых планет Солнечной системы (табл. 2).

Таблица 2

**Радиусы сфер действия (млн км)**

Меркурий	0.15	Юпитер	47.1
Венера	0.60	Сатурн	54.4
Земля	0.90	Уран	50.7
Марс	0.60	Нептун	86.2
Луна (отн. Земли)	0.066	Плутон	15.1

Оценим значение выражения  $|\mathbf{b}|/|\mathbf{B}|$  на границе сферы действия. Воспользовавшись полученными выше выражениями, найдем

$$\frac{|\mathbf{b}_2|}{|\mathbf{B}_2|} = \frac{m_1}{m_2} r^2 \left| \frac{\mathbf{s}}{s^3} - \frac{\mathbf{R}}{R^3} \right| \approx \frac{m_1}{m_2} \frac{r^3}{R^3} F(\psi). \quad (5.12)$$

Подставив  $r/R$  в соответствии с соотношением (5.9), получим

$$\frac{|\mathbf{b}_2|}{|\mathbf{B}_2|} = \left( \frac{m_1}{m_2} \right)^{1/5} F^{2/5}(\psi).$$

Соответствующие значения относительного ускорения – отношения возмущающего и основного ускорений для некоторых планет при  $F = 1$  – приведены в табл. 3.

Таблица 3

**Относительные ускорения на границах грависфер**

Земля	0.08
Марс	0.05
Юпитер	0.25

Таким образом, для планет земной группы относительное значение ускорения, вызванного учетом притяжения, составляет на границе сферы действия единицы процентов. Для больших планет (Юпитер) эти величины могут достигать 25%. Если ограничиться околоземным пространством, то относительное значение возмущающего ускорения Солнца имеет порядок 8% на расстоянии 900 000 км от Земли. Луна находится на расстоянии порядка 380 000 км от Земли. Так как возмущающие ускорения изменяются пропорционально кубу расстояния от планеты (см. (5.12)), можно утверждать, что около Луны возмущающее ускорение от Солнца будет менее 1%, а на траекториях искусственных спутников Земли вообще пренебрежимо мало.

### 5.3. Сфера влияния (грависфера Кислика<sup>27</sup>)

Рассмотренная выше сфера действия, впрочем, как и любая другая грависфера, не может быть признана безупречным решением проблемы наилучшего разделения пространства на «солнечные» и «планетные» области. Лаплас, вводя ее, искал наилучшее разделение с точки зрения удобств численного интегрирования уравнений движения, и этому требованию сфера действия удовлетворяет. Сфера действия исходит из локального подхода – на траектории ищется точка, удовлетворяющая равенству (5.2). В то время может оказаться предпочтительным интегральный подход, учитывающий свойства всей траектории движения, а не в какой-нибудь одной ее точке. Рассмотрим разделение, дающее наилучшее приближение «склеенной» из отрезков конических сечений траекторий космического аппарата к ее истинной форме<sup>28</sup>.

При интегральном подходе возникает проблема оценки степени приближения «склеенной» траектории к истинной, точнее – способа простой численной оценки этого приближения. На границе разделения пространства на «солнечные» и «планетные» области нельзя пренебрегать влиянием на движение космического аппарата ни Солнца, ни планет, то есть оказывается предпочтительной планетоидная задача трех тел. Учитывая реальные свойства планетных орбит солнечной системы, можно воспользоваться решением круговой ограниченной задачи трех тел. Как известно, эта задача имеет специфический первый интеграл – интеграл Якоби (4.3), и поэтому представляется разумным использовать его при попытках найти новую грависферу, поскольку константа первого интеграла характеризует не локальные свойства некоторой точки траектории, а свойства траектории в целом.

Желая рассмотреть общие свойства окружающего планету пространства, можно использовать для этой цели какую-либо под-

---

<sup>27</sup> Михаил Дмитриевич Кислик (1922–1994). Труды по космической баллистике. Участвовал в запуске первых ИСЗ, лунных и межпланетных автоматических станций. Внес существенный вклад в развитие теории и практики радиолокации планет Солнечной системы. Предложил новое понятие сферы влияния планеты, получившее в последующем название *гравитационной сферы Кислика*.

<sup>28</sup> Кислик М.Д. Сферы влияния больших планет и Луны // Космические исследования. 1964. Т. 2, вып. 6. С. 853–858.

ходящую модельную траекторию движения КА, которая, будучи простой, допускающей аналитическое рассмотрение, в то же время правильно отражала бы основные закономерности, свойственные реальным траекториям. Введем с этой целью простейшую траекторию со стартом ракеты-носителя, несущей КА по вертикали и лежащей в плоскости орбиты Солнца и планеты. Приближенная траектория будет в этом случае в начальной части прямой, идущей через центр Земли (для определенности будем говорить о Земле), а после выхода из сферы влияния Земли – эллипсом, в одном из фокусов которого находится Солнце. Задача сводится к нахождению на этой траектории такой точки  $A$ , чтобы при переходе в ней от прямолинейного подъема к движению по эллипсу вокруг Солнца получившаяся траектория была по возможности наиболее близкой к истинной. Последнюю на самом деле дал бы вертикальный старт с учетом действия сил притяжения как Земли, так и Солнца на всю траекторию.

Рассмотрим траекторию вертикального подъема в рамках задачи двух тел – Земли и аппарата. Тогда интеграл энергии (1.12) будет иметь вид

$$h = V_{abs}^2 - \frac{2\gamma m_2}{r_2},$$

где  $V_{abs}$  – абсолютная скорость КА,  $r_2$  – расстояние от центра Земли до КА (массой КА по сравнению с массой Земли пренебрегаем).

Обратимся к задаче трех тел Солнце–Земля–КА. Введем новую систему единиц:  $m_1 + m_2$  – единица массы,  $R = d_1 + d_2$  – единица длины, скорость планеты в ее гелиоцентрическом движении  $V_{hel}$  – единица скорости. Здесь  $m_1, m_2$  – массы Солнца и Земли,  $R$  – расстояние между Солнцем и Землей,  $d_1, d_2$  – расстояния от Солнца и Земли до их общего центра масс соответственно. В новых единицах угловая скорость вращения линии Солнце–Земля  $n = 1$ , так как  $n = V_{hel} / R$ . Учитывая, что планета движется вокруг Солнца по окружности, ее скорость является круговой (2.3). Вспомнив далее, что  $\mu = \gamma(m_1 + m_2)$ , с учетом значений введенных здесь единиц

получим  $\gamma = 1$ . Это позволяет придать интегралу энергии для точки старта (считаем старт мгновенным) следующий вид:

$$h = V_*^2 - \frac{2\kappa}{r_{20}}. \quad (5.13)$$

Здесь

$$\kappa = \frac{m_2}{m_1 + m_2},$$

$r_{20}$  – расстояние КА от центра Земли в начальное мгновение,  $V_*$  – начальное значение абсолютной скорости КА в задаче двух тел.

Константа интеграла Якоби  $C'$  на основании равенств (4.2) и (4.3) определяется выражением

$$C' = n^2(x^2 + y^2) + 2\gamma \left( \frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} \right) - V_{rel}^2,$$

или в новой системе единиц –

$$C' = r^2 + \frac{2\kappa}{r_2} + 2\frac{1-\kappa}{r_1} - V^2, \quad (5.14)$$

где  $V$  – относительная скорость в новой системе единиц (в ограниченной круговой задаче трех тел), а переход от  $x^2 + y^2$  к  $r_2$  произведен с учетом того, что траектория КА лежит в плоскости  $Oxy$ .

Найдем связь между абсолютной скоростью  $V_*$  и относительной  $V$ . В начальный момент  $r_2 = r_{20}$  и из приведенного на рис. 5.3 треугольника скоростей видно, что поскольку  $n=1$ , то  $V^2 = V_*^2 + r_{20}^2$ .

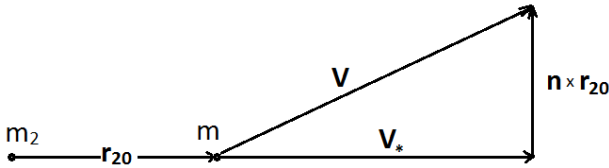


Рис. 5.3. Связь между абсолютной скоростью  $V_*$  и относительной скоростью  $V$

Следовательно, для начального момента времени, обозначенного, как и выше, индексом «нуль», константа интеграла Якоби (5.14) будет иметь вид

$$C' = r_0^2 + \frac{2\kappa}{r_{20}} + 2 \frac{1-\kappa}{r_{10}} - V_*^2 - r_{20}^2.$$

Сделаем предположение, что старт осуществляется не с поверхности планеты, имеющей конечный радиус, а с материальной точки  $m_2$ . Воспользовавшись интегралом энергии (5.13) и устремив затем  $r_{20} \rightarrow 0$ , найдем

$$C' = \kappa^2 - 4\kappa + 3 - h$$

с учетом того, что при  $r_{20} \rightarrow 0$ ,  $r_{10} \rightarrow 1$ , а  $r_0 \rightarrow 1 - \kappa$ . Полученное значение  $C'$  соответствует идеализированным условиям старта. В истинном движении для всех точек такой траектории полета будет выполняться равенство

$$C' = \text{const}. \quad (5.15)$$

Если истинную траекторию заменить приближенной, составленной из отрезка прямой и дуги эллипса, то, вычисляя для точек такой траектории величины  $C'$  по формуле (5.14), мы сразу обнаружим нарушение равенства (5.15), что совершенно естественно, поскольку эта составная траектория не совпадает с той, которую дало бы точное решение круговой ограниченной задачи трех тел.

Построим, основываясь на выражении (5.14), функцию

$$C' = r^2 + \frac{2\kappa}{r_2} + 2 \frac{1-\kappa}{r_1} - V^2$$

для точек эллиптической части составной траектории, являющейся приближенной траекторией движения КА в «солнечной» области. Найдем отклонение этой функции от точного значения константы интеграла Якоби:

$$\Delta C = C' - (\kappa^2 - 4\kappa + 3 - h).$$

Величина  $\Delta C$  зависит от ряда очевидных параметров, в том числе и от значений  $r_{2A}$  и  $\alpha$ . Первый из них дает положение точки  $A$ , в которой происходит «склеивание» прямолинейного и эллиптичес-



кого участков траектории, а угол  $\alpha$  определяет направление старта с Земли (рис. 5.4).

Чтобы исключить влияние малосущественного параметра  $\alpha$ , введем функцию

$$J = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\Delta C)^2 d\alpha,$$

которая дает осредненную по  $\alpha$  величину квадрата  $\Delta C$ . Будем искать такое положение точки «склейки»  $A$ , где функция  $J$  будет иметь минимум, то есть

$$\frac{\partial J}{\partial r_{2A}} = 0. \quad (5.16)$$

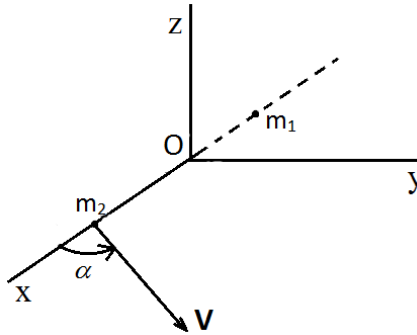


Рис. 5.4. Введение угла  $\alpha$

Найденное из условия (5.16) значение  $r_{2A}$  будет соответствовать такому характеру сопряжения «земного» и «солнечного» участков приближенных траекторий полета КА, при котором начальная точка «солнечного» участка будет иметь константу интеграла Якоби, наиболее близкую к значению этой константы в момент старта. Это позволяет надеяться, что полученная для таких начальных значений эллиптическая «солнечная» траектория будет ближе всего к истинной.

Опускаемые здесь вычисления дают для уравнения (5.16) решение

$$r_{2A} \approx 1.12(\kappa)^{1/3}.$$

Выше предполагалось, что старт с Земли происходит в плоскости  $Oxy$ . Обычно это всегда имеет место, так как практически все КА совершают межпланетные перелеты в плоскости эклиптики. Если это не так, то окончательный вывод почти не изменится – произведя осреднение не только по углу  $\alpha$ , но и по углу между вектором  $\mathbf{V}$  и плоскостью  $Oxy$ , в конечном итоге получим

$$r_{2A} \approx 1.16(\kappa)^{1/3}.$$

Взяв некоторое округленное значение коэффициента перед знаком корня, пренебрегая  $m_2$  по сравнению с  $m_1$  и переходя к обычным линейным переменным, найдем окончательно выражения для радиуса сферы влияния

$$r = 1.15R \left( \frac{m_2}{m_1} \right)^{1/3}. \quad (5.17)$$

Минимум  $J$  еще не означает, что приближенная траектория действительно является наилучшей. Это пока всего лишь предположение. Истинность или ошибочность его могут продемонстрировать сравнительные расчеты на ЭВМ. На рис. 5.5 показаны ошибки в определении величин большой полуоси эллипса  $\Delta a$  и эксцентриситета  $\Delta e$ , полученные как разница между точными и приближенными значениями.

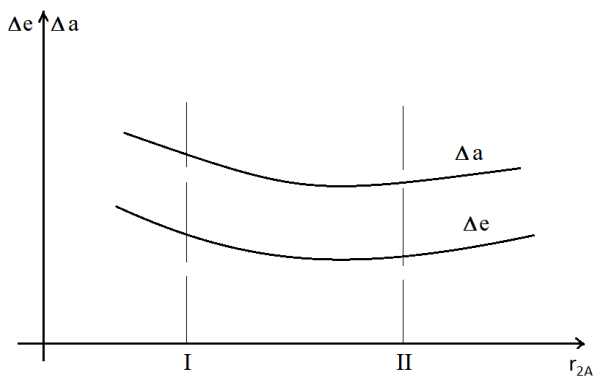


Рис. 5.5. Ошибки в определении величин большой полуоси эллипса  $\Delta a$  и эксцентриситета  $\Delta e$

В области II наблюдается явный минимум, причем численные значения  $r_{2A}$  близки к значениям, задаваемым формулой (5.17). Область I соответствует сфере действия Лапласа (5.11). Из графика видно, что «склейка», осуществляемая с использованием локального подхода Лапласа, дает худшее приближение, чем «склейка», основанная на интегральном подходе. Типичные значения радиусов сфер влияния приведены в табл. 4, откуда видно, что размер сфер влияния в 2–3 раза больше сфер действия (ср. с табл. 2).

Таблица 4

**Радиусы сфер влияния (млн км)**

Меркурий	0.36		Юпитер	88
Венера	1.70		Сатурн	108
Земля	2.50		Уран	116
Марс	1.80		Нептун	194

## 6. Уравнения движения в оскулирующих элементах

Перейдем к иному способу представления движения космических аппаратов. Для этого введем и иную систему координат взамен декартовой.

### 6.1. Системы координат

Выше использовались декартовы системы координат. Во многих случаях в небесной механике предпочтительна сферическая система координат, опирающаяся на представление о небесной сфере. Один из возможных вариантов такой системы координат будет использован ниже. Представим себе сферу единичного радиуса, центр которой совпадает с центром масс Земли (рис. 6.1).

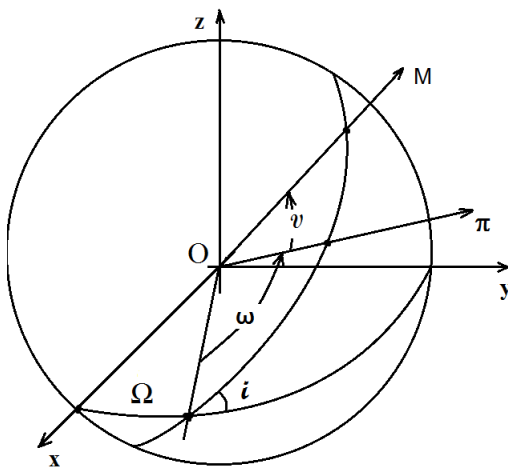


Рис. 6.1. Сферическая система координат

Если небесное тело совершает движение вокруг Земли, то в рамках задачи двух тел его траектория согласно первому закону Кеплера будет лежать в некоторой плоскости, проходящей через центр масс Земли (точка  $O$  на рис. 6.1). Взяв плоскость  $Oxy$ ,

совпадающей с плоскостью земного экватора, рассмотрим дуги больших кругов, получаемые на единичной сфере от сечения ее плоскостью  $Oxy$  и плоскостью, в которой происходит движение небесного тела. Пусть одна из точек пересечения этих двух кругов лежит в первой четверти плоскости  $Oxy$  и пусть этой точке соответствует переход небесного тела из южного полушария в северное. Назовем ее *восходящим узлом* орбиты. Угол между осью  $Ox$  и прямой, соединяющей точку  $O$  с восходящим узлом, назовем *долготой восходящего узла* и обозначим  $\Omega$ . Угол между плоскостью экватора и плоскостью траектории небесного тела обозначим  $i$  и назовем его *наклоном орбиты* к плоскости экватора. Если из центра единичной сферы провести прямые в характерные точки орбиты – перицентр  $\pi$  и мгновенное положение небесного тела  $M$ , то соответствующие углы, отсчитываемые в плоскости орбиты, будут:  $\omega$  – *аргумент перицентра*, то есть угловое расстояние перицентра от восходящего узла и  $\nu$  – *истинная аномалия* – угловое расстояние небесного тела от направления на перицентр. Иногда удобно рассматривать сумму двух последних углов

$$u = \omega + \nu, \quad (6.1)$$

носящую название *аргумент широты*.

Углы  $\Omega, i$  полностью определяют положение плоскости орбиты в инерциальном пространстве, а угол  $u$  дает направление на мгновенное положение небесного тела. Если в этом направлении отложить величину радиус-вектора небесного тела, то его положение будет полностью определено.

Найдем связь декартовых координат с вновь введенными (рис. 6.2). Если прямая  $OM$  пересекает единичную сферу в точке  $M'$ , то очевидно, что

$$x = r \cos(M', x), \quad y = r \cos(M', y), \quad z = r \cos(M', z). \quad (6.2)$$

Воспользуемся теоремой косинусов сферической тригонометрии

$$\begin{aligned} \cos a &= \cos b \cdot \cos c + \sin b \sin c \cos A, \\ \cos A &= -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a, \end{aligned} \quad (6.3)$$

где строчными буквами даны стороны сферических треугольников (дуги больших кругов, измеряемые соответствующими централь-

ными углами), а прописными – двугранные углы между плоскостями больших кругов, причем противолежащие стороны и углы обозначены одинаковыми буквами. Применяя теорему косинусов к сферическим треугольникам  $x'M'\Omega'$ ,  $\Omega'M'y'$  и  $M'z'\Omega'$ , найдем на основании равенств (6.2):

$$\begin{aligned}x &= r(\cos\Omega\cos u - \sin\Omega\sin u\cos i), \\y &= r(\sin\Omega\cos u + \cos\Omega\sin u\cos i), \\z &= r\sin u\sin i.\end{aligned}\tag{6.4}$$

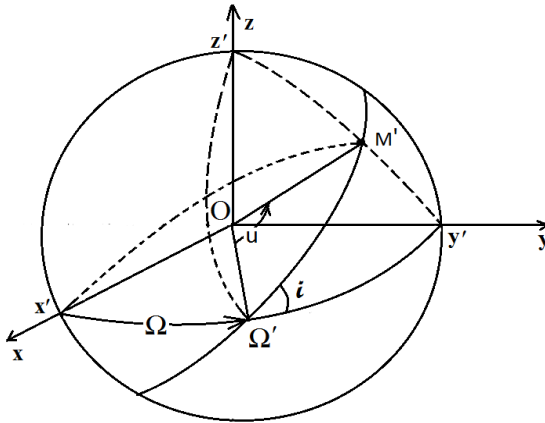


Рис. 6.2. Переход от декартовой к сферической системе координат

Если дополнить равенства (6.4) полученными ранее равенствами (1.19), (6.1) и (1.26)

$$r = \frac{p}{1 + e\cos v}, \quad u = \omega + v, \quad t - \tau = \frac{p^2}{c} \int_0^v \frac{dv}{(1 + e\cos v)^2}, \tag{6.5}$$

то оказывается возможным представить декартовы координаты небесного тела как явные функции времени:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t).$$

Что касается величин  $\Omega$ ,  $i$ ,  $\omega$ ,  $p$ ,  $e$ ,  $\tau$ , то они являются константами первых интегралов движения. Совокупность равенств (6.4) и (6.5) является общим решением системы уравнений (1.11).

## 6.2. Уравнения возмущенного движения

Найденное здесь общее решение системы (1.11) соответствует классической задаче о двух материальных точках, движущихся под действием сил взаимного гравитационного притяжения. Выше было показано, что уже введение в рассмотрение третьей материальной точки, а тем более  $n$  материальных точек, вообще говоря, приводит к значительно более сложным движениям. Дело еще больше усложняется, если учесть, что планеты далеко не всегда можно считать материальными точками, и если еще учитывать не только силы гравитации, но и силы давления солнечной радиации или тормозящий эффект верхней разряженной атмосферы планет, работу ракетных двигателей космического аппарата и так далее. Поэтому примем, что движение КА около некоторой материальной точки происходит не только под действием сил притяжения последней, но и под действием возмущающих сил, природа которых может быть достаточно произвольной. Тогда уравнения движения (1.11) придадим такой вид –

$$\begin{aligned}\frac{d\dot{x}}{dt} &= X_0 + X, & \frac{d\dot{y}}{dt} &= Y_0 + Y, & \frac{d\dot{z}}{dt} &= Z_0 + Z, \\ \frac{dx}{dt} &= \dot{x}, & \frac{dy}{dt} &= \dot{y}, & \frac{dz}{dt} &= \dot{z},\end{aligned}\tag{6.6}$$

где  $X_0 = -\mu \frac{x}{r^3}$ ,  $Y_0 = -\mu \frac{y}{r^3}$ ,  $Z_0 = -\mu \frac{z}{r^3}$  – компоненты «основного» ускорения за счет притяжения центрального тела, а величины  $X, Y, Z$  суть ускорения, испытываемые аппаратом в результате действия всех внешних сил за исключением силы притяжения центрального тела, принимаемого за материальную точку.

## 6.3. Введение оскулирующих элементов. Основная операция

Совокупность равенств (6.4) и (6.5) теперь не будет общим решением системы (6.6). Воспользуемся этими равенствами в качестве уравнений преобразования для перехода от шести исходных переменных  $x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$  к шести новым переменным  $\Omega, i, \omega, p, e, \tau$ , ведь при наличии возмущений они уже не константы. Если проде-

лать нужные выкладки, то вместо системы уравнений (6.6) получим новую систему

$$\begin{aligned}\frac{d\Omega}{dt} &= f_1(\Omega, i, \omega, p, e, \tau, t), \\ \frac{di}{dt} &= f_2(\Omega, i, \omega, p, e, \tau, t), \\ &\dots, \\ \frac{d\tau}{dt} &= f_6(\Omega, i, \omega, p, e, \tau, t),\end{aligned}\tag{6.7}$$

эквивалентную исходной.

Совокупность переменных  $x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$  дает для каждого  $t$  положение КА и компоненты его вектора скорости. Геометрически это соответствует заданию точки на траектории и касательной к ней. В этом случае траектория получается как огибающая семейства прямых (касательных).

Совокупность переменных  $\Omega, i, \omega, p, e, \tau$  дает для каждого  $t$  некоторое мгновенное коническое сечение и положение на нем КА (при этом однозначно определен и вектор скорости КА). Траектория движения КА получается в этом случае как огибающая семейства конических сечений.

Переход от обычного (в декартовых координатах) представления траектории к новому имеет смысл лишь в тех случаях, когда возмущающие ускорения с компонентами  $X, Y, Z$  много меньше «основного»  $X_0, Y_0, Z_0$ . В этих случаях задание шести элементов  $\Omega, i, \omega, p, e, \tau$  позволяет получить не только точные координаты и скорость КА для некоторого момента времени  $t$ , но и в силу малости возмущений – приближенный вид траектории его движения на достаточно большом интервале значений  $t$ , в то время как для задания обычных шести элементов  $x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$  для некоторого  $t$  позволяет судить лишь о мгновенном значении координат и вектора скорости и не дает ни малейшего представления о характере предшествующего и последующего движений КА. Поэтому переход от сравнительно простой системы уравнений движения (6.6) к более громоздкой системе (6.7) имеет смысл только при малых возму-



щающих ускорениях, хотя сама система (6.7) справедлива для любых значений возмущающих ускорений. Поскольку геометрически истинная траектория получается в последнем случае как огибающая мгновенных конических сечений, каждое такое коническое сечение называется *оскулирующим* (касательным), шесть элементов  $\Omega, i, \omega, p, e, \tau$  – *оскулирующими элементами*, а  $t$  – *моментом (эпохой) оскуляции*. Иными словами, оскулирующими элементами для момента  $t$  называются такие  $\Omega, i, \omega, p, e, \tau$ , которые дают положение и скорость для этого  $t$  по формулам кеплерова движения. Координаты и скорость КА выражаются через оскулирующие элементы одинаково с той лишь разницей, что в невозмущенном движении они остаются постоянными, а в возмущенном – изменяются со временем.

Использование равенств (6.4) и (6.5) для перехода от системы (6.6) к системе (6.7) приводит к неоправданно громоздким выкладкам. Систему уравнений движения (6.7) можно получить проще, зная первые интегралы движения.

Пусть

$$F(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = C \quad (6.8)$$

– один из первых интегралов кеплерова движения, то есть системы уравнений (1.11). Тогда, учтя, что в этом случае

$$\ddot{x} = X_0, \quad \ddot{y} = Y_0, \quad \ddot{z} = Z_0,$$

получаем

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial F}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial F}{\partial z} \dot{z} + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} X_0 + \frac{\partial F}{\partial \dot{y}} Y_0 + \frac{\partial F}{\partial \dot{z}} Z_0 = 0.$$

Если движение будет возмущенным, то равенство (6.8) останется справедливым, если считать величину  $C$  не постоянной, а функцией времени. Тогда, учитывая уравнение (6.6), получаем

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial F}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial F}{\partial z} \dot{z} + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} (X_0 + X) + \frac{\partial F}{\partial \dot{y}} (Y_0 + Y) + \frac{\partial F}{\partial \dot{z}} (Z_0 + Z) = \frac{dC}{dt}.$$

Так как для любого момента времени  $t$  координаты и скорости истинного и оскулирующего движений совпадают, то, вычитая почленно из последнего равенства предыдущее, найдем

$$\frac{dC}{dt} = \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} X + \frac{\partial F}{\partial \dot{y}} Y + \frac{\partial F}{\partial \dot{z}} Z.$$

Записанное здесь соотношение иногда называют *основной операцией*. Она сводится к дифференцированию по  $t$  первых интегралов (6.8) при формальном допущении, что стоящие под знаком функции  $F$  координаты и время  $t$  являются постоянными, и подстановке вместо производных от скоростей возмущающих ускорений. Используем основную операцию для вывода уравнений в оскулирующих элементах.

Применим основную операцию к интегралам площадей кепле-рова движения (1.16). В результате получим

$$\begin{aligned}\frac{dc_1}{dt} &= yF_z - zF_y = M_x, \\ \frac{dc_2}{dt} &= zF_x - xF_z = M_y, \\ \frac{dc_3}{dt} &= xF_y - yF_x = M_z.\end{aligned}\tag{6.9}$$

Здесь  $F_x, F_y, F_z$  суть компоненты возмущающих ускорений,  $M_x, M_y, M_z$  — компоненты соответствующих моментов возмущающих ускорений.

Перейдем от координат  $Oxyz$  к координатам  $O\xi\eta\zeta$ , непосредственно связанным с мгновенным оскулирующим коническим сечением. Направим ось  $O\xi$  по линии узлов орбиты, ось  $O\zeta$  — по вектору кинетического момента  $\mathbf{c}$ , а ось  $O\eta$  — так, чтобы образовалась правая система координат (рис. 6.3).

В новой системе координат уравнения (6.9) принимают вид

$$\frac{dc_\xi}{dt} = M_\xi, \quad \frac{dc_\eta}{dt} = M_\eta, \quad \frac{dc_\zeta}{dt} = M_\zeta.\tag{6.10}$$

Проекции  $dc_\xi, dc_\eta, dc_\zeta$  возникнут вследствие элементарного изменения вектора  $\mathbf{c}$ , а именно — элементарных (малых) поворотов вокруг оси  $O\eta$ , вокруг оси  $O\xi$  и вследствие изменения его модуля  $c = \sqrt{\mu p}$  (1.22).

Рассмотрим приращение  $dc_\xi$ . При малом повороте вектора  $\mathbf{c}$  вокруг оси  $O\eta$  на угол  $d\alpha$  получим  $dc_\xi = c d\alpha$  (рис. 6.4).

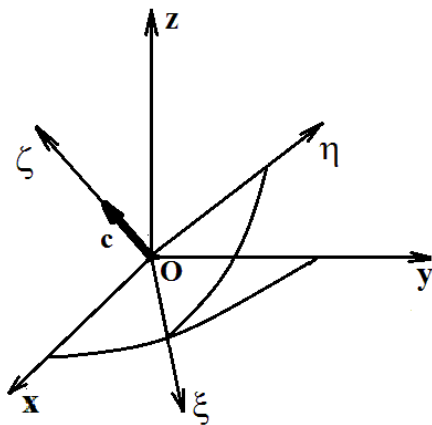


Рис. 6.3. Переход от координат  $Oxyz$  к координатам  $O\xi\eta\zeta$

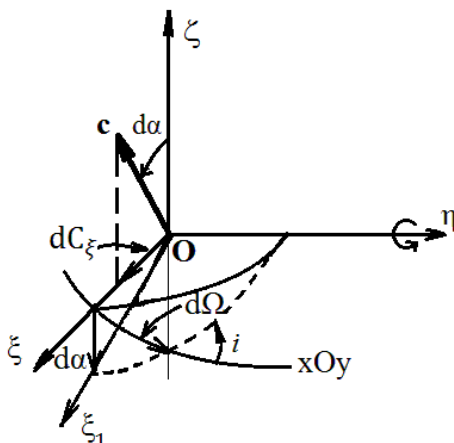


Рис. 6.4. Связь между элементарным приращением  $dc_\xi$  и элементарным поворотом  $d\Omega$

В связи с поворотом вектора  $\mathbf{c}$  повернется и плоскость  $O\xi\eta$  в новое положение  $O\xi_1\eta$ . Тогда на неизменной плоскости  $Oxy$

произойдет смещение восходящего узла в новое положение на величину  $d\Omega$ . Это дает  $d\alpha = \sin i d\Omega$ . Следовательно,

$$dc_\xi = \sqrt{\mu p} \sin i d\Omega. \quad (6.11)$$

Аналогично, составляющая  $dc_\eta$  связана с элементарным поворотом вектора  $\mathbf{c}$  вокруг оси  $O\xi$  на угол  $di$  (рис. 6.5).

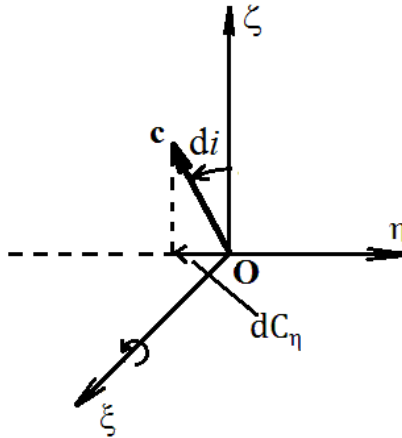


Рис. 6.5. Связь между элементарным приращением  $dc_\eta$  и элементарным поворотом  $di$

Очевидно, что

$$dc_\eta = -\sqrt{\mu p} di. \quad (6.12)$$

Составляющая  $dc_\xi$  связана с изменением модуля вектора  $\mathbf{c}$  и получается его дифференцированием:

$$dc_\xi = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu}{p}} dp. \quad (6.13)$$

Найдем теперь соответствующие компоненты вектора момента возмущающих ускорений (рис. 6.6).

Пусть космический аппарат находится в точке  $M$ , принадлежащей плоскости  $O\xi\eta$  (напомним, что эта плоскость совпадает

с мгновенной плоскостью оскулирующей орбиты). Тогда положение  $M$  определяется углом  $u$  и радиус-вектором  $\mathbf{r}$ . Пусть возмущающее ускорение разложено на три ортогональные составляющие  $S, T, W$ , направленные вдоль  $\mathbf{r}$ , перпендикулярно  $\mathbf{r}$  и перпендикулярно плоскости  $O\xi\eta$  соответственно. Положительными направлениями для  $S, T, W$  примем совпадающие с направлением радиуса, направлением вращения по орбите и направлением вектора кинетического момента соответственно. Тогда очевидно, что

$$M_\xi = Wr \sin u, \quad M_\eta = -Wr \cos u, \quad M_\zeta = Tr. \quad (6.14)$$

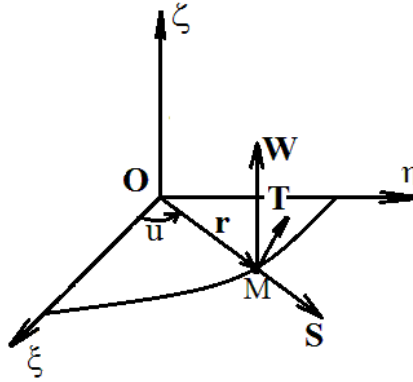


Рис. 6.6. Определение компонент вектора момента возмущающих ускорений

Подставляя найденные значения из (6.11), (6.12), (6.13) и (6.14) в (6.10), получим

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{r}{\sqrt{\mu p}} \frac{\sin u}{\sin i} W, \quad \frac{di}{dt} = \frac{r}{\sqrt{\mu p}} \cos u W, \quad \frac{dp}{dt} = 2\sqrt{\frac{p}{\mu}} r T. \quad (6.15)$$

Эти уравнения являются тремя из шести искоемых уравнениями движения, записанными через оскулирующие элементы.

Найдем соответствующие уравнения для  $e$  и  $\omega$ . Изменение аргумента перигея  $\omega$ , вообще говоря, связано с двумя причинами: смещением направления на перигей и смещением восходящего узла, от которого начинается отсчет угла  $\omega$ . Рассмотрим

следствие первой из названных причин. Угловое расстояние от восходящего узла до направления на небесное тело  $M$  определяется выражением  $u = \omega + \nu$ , причем в нашем случае  $u = \text{const}$ , поскольку узел не смещается в силу сделанного предположения, а тело  $M$  считается «неподвижным» в рамках применяемой основной операции. Но тогда

$$\frac{d\omega}{dt} + \frac{d\nu}{dt} = 0. \quad (6.16)$$

Здесь следует подчеркнуть, что величина  $\frac{d\nu}{dt}$  не описывает в рассматриваемом случае движения КА во времени, а говорит об изменении вследствие движения начала отсчета этого угла – линии узлов.

Вторая причина изменения  $\omega$  – смещение восходящего узла, что дает (рис. 6.7)

$$d\omega = -\cos i d\Omega. \quad (6.17)$$

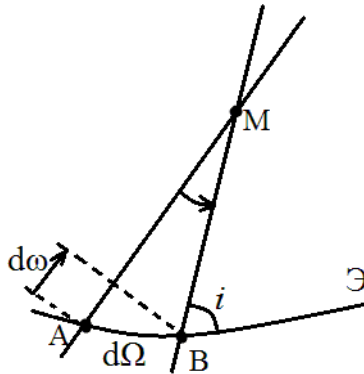


Рис. 6.7. Изменение  $\omega$

Действительно, неподвижность точки  $M$  (в силу основной операции) делает возможным смещение  $\omega$  лишь вследствие поворота плоскости орбиты. Пусть первоначально плоскость орбиты пересекалась с плоскостью экватора  $\mathcal{E}$  в точке  $A$ , а вследствие элементарного поворота первой плоскости стала пересекать ее

в точке  $B$ . Тогда «уменьшение» углового расстояния  $M$  от восходящего узла будет соответствовать изменению расстояния  $AM$  до  $BM$ .

Учет обеих причин изменения  $\omega$  (6.16) и (6.17) приводит окончательно к зависимости

$$d\omega = -dv - \cos i d\Omega. \quad (6.18)$$

Интеграл энергии позволяет вычислить только модуль скорости КА. Найдем проекции  $V_r = \frac{dr}{dt}$ ,  $V_n = r \frac{dv}{dt}$  вектора скорости КА на радиальное и нормальное направления. В выбранной системе координат с учетом того, что  $c = \sqrt{\mu p}$ , интеграл площадей сводится к выражению

$$r^2 \frac{dv}{dt} = \sqrt{\mu p}. \quad (6.19)$$

Тогда, используя равенства (1.19) и (6.19), можно написать

$$V_r = \frac{dr}{dv} \frac{dv}{dt} = \sqrt{\frac{\mu}{p}} e \sin v \quad (6.20)$$

и

$$V_n = r \frac{dv}{dt} = \sqrt{\frac{\mu}{p}} (1 + e \cos v). \quad (6.21)$$

Полученные выражения (6.20) и (6.21) тоже является первыми интегралами системы (1.11), так как связывают  $e$  и  $p$  с переменными  $V_r(t)$ ,  $V_n(t)$  и  $v(t)$ .

Применим основную операцию к первым интегралам кеплерова движения (6.20) и (6.21), подставив вместо производных  $\frac{dV_r}{dt}$  и  $\frac{dV_n}{dt}$  соответствующие возмущающие ускорения  $S$  и  $T$ :

$$\begin{aligned}\frac{de}{dt}\sin\upsilon + e\frac{d\upsilon}{dt}\cos\upsilon &= \sqrt{\frac{p}{\mu}}S + \frac{1}{2}\frac{1}{p}\frac{dp}{dt}e\sin\upsilon, \\ \frac{de}{dt}\cos\upsilon - e\frac{d\upsilon}{dt}\sin\upsilon &= \sqrt{\frac{p}{\mu}}T + \frac{1}{2}\frac{dp}{dt}(1 + e\cos\upsilon).\end{aligned}$$

Подставив сюда  $\frac{dp}{dt}$  из (6.15) и выражая  $\frac{de}{dt}$  и  $\frac{d\upsilon}{dt}$ , получим

$$-e\frac{d\upsilon}{dt} = -\sqrt{\frac{p}{\mu}}S\cos\upsilon + \sqrt{\frac{p}{\mu}}T\left(1 + \frac{r}{p}\right)\sin\upsilon \quad (6.22)$$

и

$$\frac{de}{dt} = \sqrt{\frac{p}{\mu}}S\sin\upsilon + \sqrt{\frac{p}{\mu}}T\left(1 + \frac{r}{p}\right)\cos\upsilon + e\frac{r}{\sqrt{\mu p}}T. \quad (6.23)$$

Используя равенства (6.18) и (6.22), найдем

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{e}\left[\sqrt{\frac{p}{\mu}}S\cos\upsilon + \sqrt{\frac{p}{\mu}}T\sin\upsilon - e\frac{r}{\sqrt{\mu p}}W\sin\upsilon\operatorname{ctgi}\right]. \quad (6.24)$$

Уравнения (6.23) и (6.24) являются еще двумя уравнениями движения, записанными через оскулирующие элементы. Чтобы замкнуть систему, следует получить еще уравнение, определяющее  $d\tau/dt$ . Это здесь не делается, так как для дальнейшего изложения последнее уравнение не играет особой роли и использоваться не будет, но в окончательном виде приведем. Перепишем систему уравнений движения в оскулирующих элементах в окончательном виде:

$$\begin{aligned}\frac{d\Omega}{dt} &= \frac{r}{\sqrt{\mu p}}\frac{\sin u}{\sin i}W, \\ \frac{di}{dt} &= \frac{r}{\sqrt{\mu p}}\cos uW, \\ \frac{dp}{dt} &= 2\sqrt{\frac{p}{\mu}}rT,\end{aligned} \quad (6.25)$$



$$\begin{aligned}
\frac{de}{dt} &= \sqrt{\frac{p}{\mu}} S \sin \nu + \sqrt{\frac{p}{\mu}} T \left( 1 + \frac{r}{p} \right) \cos \nu + e \frac{r}{\sqrt{\mu p}} T, \\
\frac{d\omega}{dt} &= \frac{1}{e} \left[ -\sqrt{\frac{p}{\mu}} S \cos \nu + \sqrt{\frac{p}{\mu}} T \left( 1 + \frac{r}{p} \right) \sin \nu - e \frac{r}{\sqrt{\mu p}} W \sin u \operatorname{ctgi} \right], \quad (6.25) \\
\frac{d\tau}{dt} &= \frac{r^2}{e\mu} \left[ -(\cos \nu - eN \sin \nu) S + \frac{p}{r} NT \right],
\end{aligned}$$

где

$$N(\nu) = 2 \frac{p^2}{r^2} \int_0^\nu \frac{\cos \nu d\nu}{(1 + e \cos \nu)^3}.$$

Следует сразу отметить, что полученные уравнения в оскулирующих элементах выписаны для эллиптической орбиты. В случае круговой орбиты уравнения для  $\omega$  и  $\tau$  вырождаются (в правых частях в знаменателях стоит эксцентриситет  $e$ ), поэтому для такого случая вводятся новые переменные  $\lambda_1 = e \cos \omega$ ,  $\lambda_2 = e \sin \omega$ . Получающиеся уравнения для  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  особенности при  $e=0$  не имеют.

Обычно зависимость оскулирующих элементов от  $t$  представляет второстепенный интерес, тем более, что, как правило, возмущающие ускорения  $S$ ,  $T$ ,  $W$  не являются явными функциями времени. Чаще всего вместо  $t$  вводят новую независимую переменную, связанную с угловой координатой движения по орбите, в частности  $u$ .

Рассмотрим интеграл площадей, но чтобы не быть связанными с уже применявшимися обозначениями, используем для обозначения длины дуги на единичной сфере букву  $\sigma$ . Тогда интеграл площадей принимает вид

$$r^2 \frac{d\sigma}{dt} = \sqrt{\mu p}. \quad (6.26)$$

Пусть в некоторый момент времени  $t$  точка на единичной сфере, дающая мгновенные угловые координаты небесного тела, находилась в  $M$ , а через отрезок времени  $dt$  перешла в  $M_1$ , пройдя отрезок дуги  $d\sigma$  (рис. 6.8). Рассмотрим изменение аргу-

мента широты  $u$  при таком переходе. Во-первых, он увеличится на  $d\sigma$ , и, во-вторых, изменится начало отсчета (оно перейдет из  $A$  в  $B$ ). В результате имеем

$$du = d\sigma - \cos i d\Omega.$$

Тогда первый интеграл (6.26) примет вид

$$r^2 \left( \frac{du}{dt} + \cos i \frac{d\Omega}{dt} \right) = \sqrt{\mu p}.$$

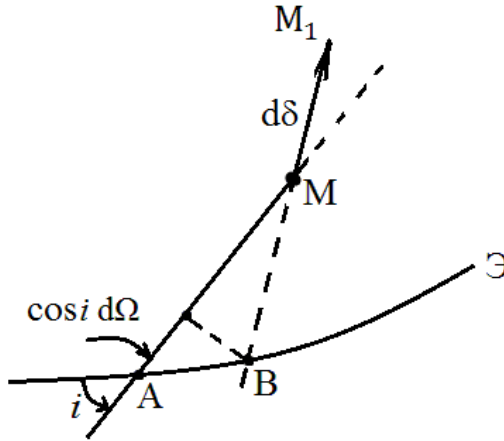


Рис. 6.8. Изменение аргумента широты  $u$

Взяв значение  $\frac{d\Omega}{dt}$  из системы (6.25), получим окончательное соотношение

$$\frac{du}{dt} = \frac{\sqrt{\mu p}}{r^2} \left( 1 - \frac{r^3}{\mu p} W \operatorname{ctg} i \sin \nu \right). \quad (6.27)$$

Воспользовавшись выражением (6.27), можно перейти в системе уравнений (6.25) к независимой переменной  $u$ . При этом правые части уравнений, которые в системе (6.25) являются линейными функциями  $S, T, W$ , станут дробными, что должно

привести к заметным трудностям при интегрировании вновь полученной системы. Поэтому сделаем предположение о малости  $W$ , позволяющее пренебречь соответствующими слагаемыми. Тогда вместо точного равенства (6.27) можно воспользоваться приближенным (опуская это слагаемое)

$$\frac{du}{dt} = \frac{\sqrt{\mu p}}{r^2}$$

и вместо точной системы (6.25) написать приближенную систему уравнений движения:

$$\begin{aligned}\frac{d\Omega}{du} &= \frac{r^3}{\mu p} \frac{\sin u}{\sin i} W, \\ \frac{di}{du} &= \frac{r^3}{\mu p} \cos u W, \\ \frac{dp}{du} &= \frac{2r^3}{\mu} T, \\ \frac{de}{du} &= \frac{r^2}{\mu} \left[ S \sin \nu + \left( 1 + \frac{r}{p} \right) T \cos \nu + \frac{er}{p} T \right], \\ \frac{d\omega}{du} &= \frac{r^2}{e\mu} \left[ -S \cos \nu + \left( 1 + \frac{r}{p} \right) T \sin \nu - \frac{er}{p} W \sin u \operatorname{ctgi} \right].\end{aligned}\tag{6.28}$$

В этой системе опущено уравнение для  $\frac{d\tau}{du}$ , поскольку в дальнейшем оно не понадобится. Приведенных уравнений вполне достаточно для определения геометрических характеристик движения.

## 7. Движение КА в атмосфере Земли

Рассмотрим полученные выше уравнения движения в оскулирующих элементах применительно к возмущениям различной природы. Начнем с влияния сопротивления атмосферы на орбитальное движение космического аппарата.

### 7.1. Торможение КА в атмосфере

В верхних разреженных слоях атмосферы на высотах 200 км и более над поверхностью Земли, когда аппарат еще совершает орбитальное движение, происходит его медленное торможение. Рассмотрим эволюцию его орбиты при таком торможении. Будем считать, что Земля шарообразная и плотность атмосферы уменьшается с увеличением высоты одинаковым образом для всех географических пунктов, то есть она обладает свойством центральной симметрии. Примем также, что КА при своем движении в атмосфере испытывает лишь силу сопротивления без боковых аэродинамических составляющих. Это означает, что снижение аппаратов с большим аэродинамическим качеством (как американский «Шаттл» и отечественный «Буран») мы не рассматриваем. Тем самым сила аэродинамического сопротивления подчиняется обычному закону

$$R_x = c_x \frac{\rho V^2}{2} F,$$

где  $c_x$  – коэффициент сопротивления,  $F$  – площадь миделева сечения КА,  $\rho$  – текущая плотность атмосферы. Перейдя от сил к ускорениям (рис. 7.1), получим две цепочки соотношений

$$S = -\frac{R_x}{m} \frac{V_r}{V} = -c_x \frac{F}{m} \frac{\rho V}{2} V. \quad (7.1)$$

$$T = -\frac{R_x}{m} \frac{V_n}{V} = -c_x \frac{F}{m} \frac{\rho V}{2} V_n. \quad (7.2)$$

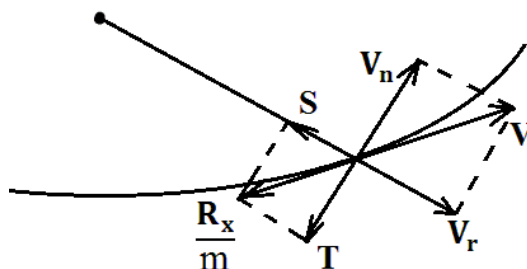


Рис. 7.1. К определению составляющих силы сопротивления

Поскольку было сделано предположение о том, что боковые составляющие аэродинамической силы отсутствуют, то справедливо равенство

$$W = 0. \quad (7.3)$$

Что касается двух других составляющих полного ускорения торможения, то они легко могут быть вычислены с использованием соотношений (7.1), (7.2) и выражений для проекций вектора орбитальной скорости КА (6.20) и (6.21) по формулам

$$S = -\frac{C\rho}{2}V\sqrt{\frac{\mu}{p}}e\sin\nu, \quad T = -\frac{C\rho}{2}V\sqrt{\frac{\mu}{p}}(1+e\cos\nu),$$

где  $C = c_x F/m$  – баллистический коэффициент. Для фактического интегрирования системы (6.28) следует задаться еще зависимостью  $\rho = \rho(r)$ , входящей в выражения для компонент ускорения. Такие зависимости существуют и хорошо известны, например<sup>29</sup>, однако обращение к ним приводит к громоздким выкладкам и сложным вычислениям. Ограничимся качественным анализом решения системы (6.28).

Равенство (7.3) приводит первые два уравнения (6.28) к виду

$$\frac{d\Omega}{du} = 0, \quad \frac{di}{du} = 0,$$

<sup>29</sup> ГОСТ 4401-81. Атмосфера стандартная. Параметры. Введ. 1982-07-01. М.: ИПК Изд-во стандартов, 2004. 180 с. Существуют также международная модель, разработанная под эгидой COSPAR, – CIRA-86 и более сложная модель NASA – MSIS-86.

откуда сразу следует

$$\Omega = \text{const}, \quad i = \text{const},$$

что говорит о неизменном положении плоскости орбиты в пространстве. Следовательно, задачу аэродинамического торможения можно рассматривать как плоскую задачу.

Третье уравнение из (6.28) дает следующее изменение параметра орбиты  $p$  за один оборот КА вокруг Земли:

$$\Delta p = \int_0^{2\pi} \frac{2r^3}{\mu} T du = -\frac{C}{\mu} \int_0^{2\pi} r^3 \rho V V_n du. \quad (7.4)$$

Все стоящие под знаком интеграла переменные положительны. Для  $V_n$  это следует из равенства (6.21), поскольку для орбит вокруг Земли выполняется неравенство  $e < 1$ . Для других переменных это очевидно. Следовательно, в процессе аэродинамического торможения происходит монотонное уменьшение параметра  $p$ :

$$\Delta p < 0. \quad (7.5)$$

Рассмотрим изменение эксцентриситета орбиты за один оборот КА вокруг Земли. Четвертое уравнение из (6.28) дает цепочку равенств

$$\begin{aligned} \Delta e = & -\frac{C}{2\sqrt{\mu}} \int_0^{2\pi} \frac{r^2 \rho V}{\sqrt{p}} \left[ e \sin^2 \nu + \cos \nu (1 + e \cos \nu) \left( 1 + \frac{1}{1 + e \cos \nu} \right) + \right. \\ & \left. + e(1 + e \cos \nu) \frac{1}{1 + e \cos \nu} \right] du = -\frac{C}{2\sqrt{\mu}} \int_0^{2\pi} \frac{r^2 \rho V}{\sqrt{p}} (e + \cos \nu) du. \end{aligned} \quad (7.6)$$

Стоящий под знаком последнего интеграла множитель заведомо положителен, в то время как первое слагаемое в скобках положительно, а второе – знакопеременное. Рассмотрим поэтому более подробно интеграл

$$\int_0^{2\pi} \frac{r^2 \rho V}{\sqrt{p}} \cos \nu du.$$

Сделаем естественное предположение о малости возмущающих ускорений  $S$  и  $T$ . Тогда на некотором интервале времени изменением величин  $p, e, \omega$  можно пренебречь. Пусть этот интервал

времени имеет порядок периода обращения. Тогда за время одного оборота можно считать, что  $p \approx \text{const}$ ,  $e \approx \text{const}$ ,  $\omega \approx \text{const}$ , а, следовательно, опуская знак приближенного равенства,

$$du = dv + d\omega = dv \quad (7.7)$$

и

$$\int_0^{2\pi} \frac{r^2 \rho V}{\sqrt{p}} \cos \nu du = \int_0^{2\pi} \frac{r^2 \rho V}{\sqrt{p}} \cos \nu dv. \quad (7.8)$$

Обычно эллиптичность орбит невелика, и поэтому величины  $r$  и  $V$  можно считать функциями, слабо зависящими от  $\nu$ . Что касается плотности атмосферы  $\rho$ , то эта величина варьируется с изменением  $r$  чрезвычайно сильно по закону, близкому к экспоненциальному. Величина  $\nu$  изменяется за один оборот вокруг планеты на  $2\pi$ . Следовательно, значение интеграла (7.8) будет, прежде всего, определяться величиной

$$\int_0^{2\pi} \rho \cos \nu dv. \quad (7.9)$$

На рис. 7.2 приведен график функции  $\cos \nu$  и функции  $\rho = \rho(\nu)$ . При построении последней функции учтено, что  $\nu = 0$  соответствует перигею, то есть нижней точке траектории, в которой  $\rho$  достигает максимального значения, а  $\nu = \pi$  соответствует апогею, где  $\rho$  имеет наименьшее значение. Очевидно, что знак интеграла (7.9) зависит от тех  $\nu$ , где плотность  $\rho$ , играющая роль весового коэффициента в произведении  $\rho \cos \nu$ , имеет наибольшее значение, и, следовательно, можно утверждать, что этот интеграл положительный, а следовательно, и

$$\int_0^{2\pi} \frac{r^2 \rho V}{\sqrt{p}} \cos \nu du > 0.$$

Но тогда и стоящий в правой части равенства (7.6) интеграл тоже положителен. Это приводит к неравенству

$$\Delta e < 0, \quad (7.10)$$

говорящему о монотонном уменьшении эксцентриситета орбиты КА, то есть приближении ее формы к окружности.

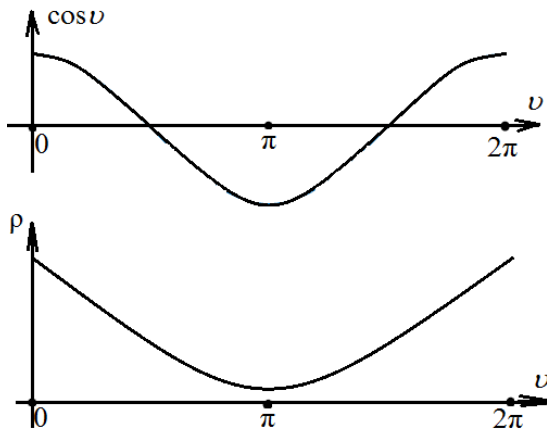


Рис. 7.2. Графики функций  $\cos \nu$  и  $\rho = \rho(\nu)$

Воспользуемся выражением для параметра орбиты  $p = a(1 - e^2)$ . Проварьируем его и получим  $\Delta p = \Delta a(1 - e^2) - 2ae\Delta e$ . Полагая, что изначально орбита мало отличается от круговой и можно пренебречь слагаемым, пропорциональным  $e^2$ , получаем выражение для приращения  $\Delta a$ :

$$\Delta a = \Delta p + 2ae\Delta e. \quad (7.11)$$

В соответствии с неравенствами (7.5) и (7.10) отсюда следует, что наряду с приближением формы к окружности размер орбиты (ее большая полуось) уменьшается, то есть в результате торможения КА атмосферой его орбита будет уменьшаться в размерах и приближаться по форме к окружности без изменения положения плоскости орбиты. Легко убедиться, что если исходная орбита была круговой ( $e = 0$ ), то это ее свойство будет сохраняться в процессе эволюции орбиты, связанной с торможением. Здесь уместно напомнить, что сформулированные выше выводы основаны на использовании приближенных зависимостей, в частности, последнее утверждение надо понимать в том смысле, что КА будет



снижаться по спирали, каждый виток которой будет близок к окружности.

Рассмотренная выше эволюция орбиты позволяет решать задачу о «времени жизни» искусственного спутника Земли. Если ограничиться грубой оценкой, то тело, движущееся с круговой скоростью в некоторой точке круговой орбиты на высоте 100 км от поверхности Земли, испытывает столь сильное торможение атмосферой, что достигает поверхности Земли («падает»), сделав менее одного оборота вокруг Земли. Поэтому можно условиться, что искусственный спутник Земли перестает существовать после того, как его траектория снижается до некоторой критической высоты  $H_{crit}$  порядка 100 км.

Из формулы (1.19) следует, что для перигея ( $v = 0$ )

$$r = r_{\pi} = \frac{P}{1+e},$$

и, следовательно, для орбит, близких к круговым ( $e \approx 0$ ), выполняется равенство  $\Delta p = \Delta r$ . Одновременно с учетом близости орбиты к круговой изменение высоты полета за один виток  $\Delta H$  будет определяться равенством

$$\Delta H \approx \Delta p.$$

Поэтому сумма  $\Delta p$  за  $N$  витков будет в известной степени характеризовать изменение высоты полета в перигее за эти  $N$  витков. Если вспомнить, что  $\Delta p$  пропорционально константе  $C$  и сильно зависящей от высоты полета плотности  $\rho$  (см. формулу (7.4)), то зависимость  $\Delta p$  от  $N$  и  $C$  может быть представлена диаграммой, построенной на рис. 7.3 для некоторой начальной высоты перигея  $H_{\pi}$ . Эта диаграмма показывает, что сначала (на больших высотах)  $\Delta p$  изменяется сравнительно слабо, и поэтому высота в перигее почти не будет уменьшаться по мере увеличения числа совершенных вокруг Земли оборотов. Зато позже величина  $\Delta p$  начинает резко увеличиваться, следовательно, перигей начнет быстро понижаться и к некоторому значению числа совершенных вокруг Земли оборотов достигнет столь малых высот, что опустится до критического значения  $H_{crit}$ , после чего КА прекратит свое

существование. Определяемое этим моментом «время жизни» КА, измеряемое обычно числом витков, которое он может совершать, будет функцией его относительного сопротивления  $C$ .

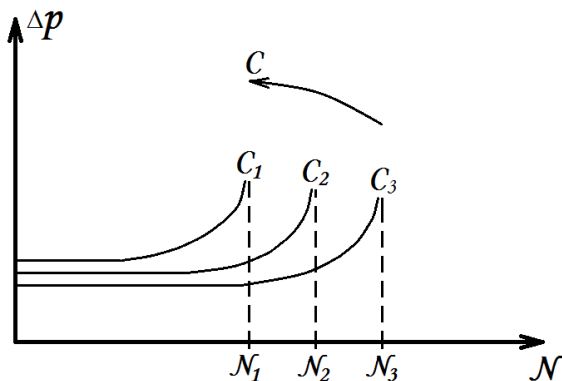


Рис. 7.3. Диаграмма изменения параметра орбиты  $p$  от числа витков  $N$  для различных значений  $C$

Зависимость времени жизни  $N_1, N_2, N_3$  от соответствующих величин относительного сопротивления  $C_1, C_2, C_3$  совершенно естественна.

## 7.2. Парадокс падающего спутника

Кажется очевидным, что из-за сопротивления атмосферы скорость КА будет уменьшаться. Рассмотрим случай, когда аппарат, двигаясь по близкой к круговой орбите под действием сопротивления атмосферы, снижается по спиралевидной траектории. Предположим, что угол  $\alpha$  между вектором  $\mathbf{V}$  скорости КА и касательной к орбите остается постоянным, то есть  $d\alpha/d\varphi = 0$ , что справедливо для однородной атмосферы, где  $\varphi$  есть полярный угол радиус-вектора  $\mathbf{r}$  центра масс КА (рис. 7.4).

Введем силу  $\mathbf{P}$  гравитационного притяжения Земли, действующую на КА,

$$\mathbf{P} = -\frac{\mu_g m}{r^3} \mathbf{r},$$

где  $\mu_g$  – гравитационный параметр Земли (произведение универсальной гравитационной постоянной на ее массу). Значения гравитационных параметров Солнца и планет Солнечной системы приведены в табл. 5.

Таблица 5

**Гравитационные параметры основных тел  
Солнечной системы**

Небесное тело	Гравитационный параметр, км <sup>3</sup> с <sup>-2</sup>
Солнце	1 327 124 400 000
Меркурий	22 032
Венера	324 859
Земля	398 600
Луна	4902
Марс	42 828
Юпитер	126 686 534
Сатурн	37 931 187
Уран	579 393 900
Нептун	6 836 529
Плутон	8710

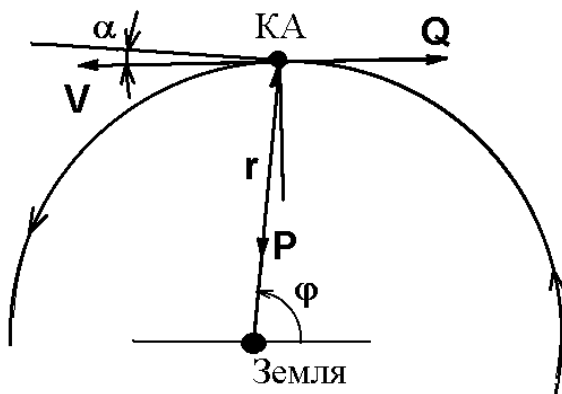


Рис. 7.4. Космический аппарат, снижающийся по спирали

Обозначим через  $\mathbf{Q}$  силу сопротивления атмосферы, которая направлена противоположно вектору скорости  $\mathbf{V}$ . Запишем векторное уравнение движения КА

$$m\dot{\mathbf{V}} = \mathbf{P} + \mathbf{Q}.$$

Спроецируем это уравнение на направление вектора  $\mathbf{V}$  –

$$m\dot{V} = P \sin \alpha - Q \quad (7.12)$$

и на направление, ему перпендикулярное:

$$mV\dot{\phi} = P \cos \alpha. \quad (7.13)$$

Вектор ускорения  $\dot{\mathbf{V}}$  представлен как сумма вектора величины  $\dot{V}$ , направленного вдоль вектора  $\dot{\mathbf{V}}$  в (7.12) и вектора величины  $V\dot{\phi}$  в перпендикулярном направлении в (7.13).

Подставляя в (7.13) выражение для  $\dot{\phi}$  из равенства  $V \cos \alpha = r\dot{\phi}$  и выражение для  $P$ , получаем связь между переменными  $V$  и  $r$ :

$$V^2 = \frac{\mu_g}{r}.$$

Принимая во внимание геометрическую связь  $\dot{r} = -V \sin \alpha$  и выражение для модуля вектора  $\mathbf{P}$ , запишем цепочку выражений:

$$m\dot{V} = m \frac{dV}{dr} \frac{dr}{dt} = m \frac{dV}{dr} (-V \sin \alpha) = -\frac{m \sin \alpha}{2} \frac{dV^2}{dr} = \frac{\mu_g m \sin \alpha}{2r^2} = P \frac{\sin \alpha}{2}.$$

Приравнявая последнее выражение в этой цепочке выражению, стоящему в правой части уравнения (7.12), получаем  $Q = P \sin \alpha / 2$  и, следовательно,

$$m\dot{V} = Q.$$

Тем самым скорость  $V$  увеличивается под действием силы сопротивления  $Q$ . Таким образом приходим к тому, что называется *парадоксом падающего спутника* – при снижении в атмосфере спутник движется под действием силы, равной силе сопротивления и направленной по вектору его скорости (хотя аппарат на самом деле подвержен силе сопротивления, но его скорость возрастает). Конечно же, никакого парадокса нет, потому

как более детальное рассмотрение показывает, что компонента гравитационной силы притяжения аппарата к Земле, направленная вдоль вектора скорости КА (см. (7.12)), будучи в два раза больше силы аэродинамического сопротивления, направленной в противоположном направлении, и порождает увеличение скорости.

Рассмотрим движение КА в верхних слоях атмосферы на финальном сегменте (на высотах менее высоты условного перигея в 100 км), где предположение  $d\alpha/d\varphi = 0$  более не работает, так как угол  $\alpha$  растет быстрее, чем угол  $\varphi$ . Качественно показано<sup>30</sup>, что в этих условиях

$$\frac{1}{\cos \alpha} \frac{d\alpha}{dt} = \frac{g}{V}, \quad (7.14)$$

где  $g$  – ускорение свободного падения у поверхности Земли. Подставляя в (7.14) выражение для  $V$ , осредненное вдоль финальной траектории, и интегрируя это уравнение, можно получить зависимость  $\alpha$  от  $t$ , показывающее, что снижение происходит практически вдоль отвесной линии из-за малости в несколько десятков раз  $V$  по сравнению с орбитальной скоростью КА.

### 7.3. О движении под действием малой тяги

Уравнения в оскулирующих элементах (6.28) описывают движение под действием ускорений, малых по сравнению с ускорением центрального притягивающего тела. Пока мы рассмотрели действие природного ускорения – от сопротивления атмосферы. Само слово «возмущение» подразумевает, что это вредное и ненужное действие. Но изворотливый человеческий ум попытался использовать эти возмущения на свою пользу. Оказывается, можно создавать такие возмущения «искусственно». Появление ионных, плазменных электрореактивных двигателей, в которых реактивная сила создается за счет возобновляемого на борту источника энергии – солнечных батарей и небольшого расхода рабочего тела, дает эту возмож-

---

<sup>30</sup> Балк М.Б. Элементы динамики космического полёта. М.: Наука. Глав. ред. физ.-мат. лит., 1965.

ность. Конечно, ускорение в несколько мм/с<sup>2</sup>, создаваемое такими двигателями, не даст оторваться от Земли, но, будучи реализованным на борту уже движущегося на орбите КА, позволит медленно, но целенаправленно изменять его траекторию.

Полученные чуть выше результаты можно частично использовать для простого анализа движения КА под действием малой тяги. Пусть постоянная по величине тяга направлена по вектору скорости аппарата (так же, как была направлена выше сила лобового сопротивления). Разница только в том, что сила сопротивления зависела от скорости КА, а введенная малая тяга постоянна. Обозначив величину вектора ускорения от тяги через  $q$ , запишем по аналогии с ускорением от силы сопротивления выражения

$$S = q \frac{e \sin \nu}{\sqrt{1 + 2e \cos \nu + e^2}}, \quad T = q \frac{1 + e \cos \nu}{\sqrt{1 + 2e \cos \nu + e^2}}$$

для проекций ускорения под действием малой тяги. Ясно, что положение орбиты меняться не будет. Подставляя выражение для  $T$  в уравнения для оскулирующего параметра орбиты  $p$ , имеем выражение для его изменения за оборот КА по орбите с учетом принятых выше допущений:

$$\Delta p = \int_0^{2\pi} \frac{2r^3}{\mu} T du = \frac{2p^3 q}{\mu} \int_0^{2\pi} \frac{1}{(1 + e \cos \nu)^2 \sqrt{1 + 2e \cos \nu + e^2}} d\nu > 0. \quad (7.15)$$

Выражение для приращения эксцентриситета за оборот КА по орбите имеет вид

$$\Delta e = \frac{2p^2 q}{\mu} \int_0^{2\pi} \frac{(\cos \nu + e)}{(1 + e \cos \nu)^2 \sqrt{1 + 2e \cos \nu + e^2}} d\nu. \quad (7.16)$$

К сожалению, использованные при анализе выражения (7.6) с помощью интеграла (7.9) рассуждения о знаке интеграла для знакопеременной подынтегральной функции не удастся перенести на выражение (7.16). Тем не менее сохранение под знаком интеграла в (7.16) слагаемых степени по  $e$  не выше первой дает нулевое значение приращения эксцентриситета. Тогда из (7.11) с учетом неравенства (7.15) следует, что большая полуось будет возрастать.

Конечно, при произвольном эксцентриситете процесс описывается гораздо более сложными уравнениями. Для их решения приходится привлекать численные методы. Решением является раскручивающаяся спираль [8], [9]. Примером применения «спирали» для реализации межпланетного перелета является европейский малый КА SMART-1, достигший Луны за 16 месяцев.

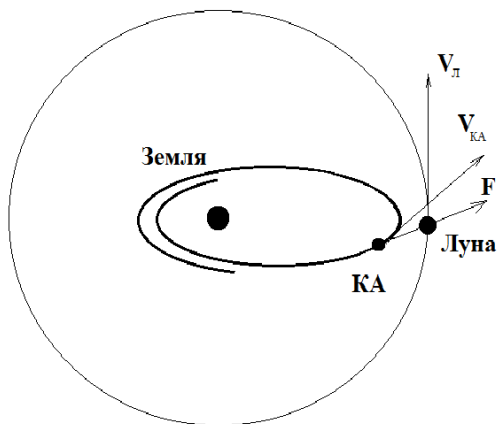


Рис. 7.5. Эффект резонансного сближения КА с Луной

SMART-1 был первым КА, который использовал только малую тягу на пути к Луне. Медленно раскручиваясь по спиралевидной траектории, аппарат достиг Луны чуть более чем через год после старта (сравните с 3–4 днями в миссиях с большой тягой). Интересно отметить, что увеличить орбиту ему помогли регулярные и сильные возмущения от Луны, сконцентрированные на апогейной части орбиты – так называемые *резонансные сближения*. Резонанс в системе Земля–Луна–КА наступает, когда орбитальные периоды движения КА и Луны вокруг Земли соотносятся как целые числа, например 2:1 или 8:3. Оказывается, что если КА находится вблизи апогея незадолго до максимального сближения с Луной и Луна несколько «опережает» его в своем движении, то сила ее притяжения **F** обеспечивает проекцию ускорения КА на направление вектора его скорости **V<sub>КА</sub>** (рис. 7.5). Происходит почти скачкообразное увеличение скорости КА в апогее. Тем самым Луна сильно воздей-

ствуется на орбиту, скачком поднимая ее перигей на десятки тысяч километров. Резонансное движение сделало эти возмущения регулярными, что и позволило увеличить орбиту КА SMART-1 до нужных размеров за несколько витков. Следует отметить, что если КА будет опережать в своем движении к апогею Луну, то ее притяжение будет производить обратный эффект – перигей орбиты КА будет понижаться. В связи с распространением малых КА этот эффект, обнаруженный еще в начале космической эры, только сейчас находит свое применение в приложениях.

Здесь уместно упомянуть имя Эдварда Бельбруно (родился в 1951 году в Германии), который открыл новый класс траекторий перелета – так называемые низкоэнергетические траектории – и показал, как их строить с помощью концепции границы слабой устойчивости<sup>31</sup> и применил эту концепцию к конструированию траектории японского лунного КА «Hiten» (1990 г.). Иногда такой подход к построению низкоэнергетических траекторий называют методом Бельбруно. Другой подход к построению низкоэнергетических траекторий – использование аппарата теории динамических систем (в частности, гиперболических инвариантных многообразий) – стал развиваться чуть позже, но стал более популярным, так как обладает математической строгостью и потому более понятен (см. раздел 4.4).

---

<sup>31</sup> Belbruno E.A., Miller J.K. Sun-perturbed Earth-to-Moon Transfers with Ballistic Capture // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 1993. V. 16, I. 4. P. 770–775.



## 8. Влияние несферичности Земли на движение КА

### 8.1. Модели гравитационного поля Земли

Гравитационное поле Земли обладает сферической асимметрией по причине отсутствия сферической симметрии в форме Земли и неоднородным распределением масс в ее теле. Наибольший вклад в асимметрию дает экваториальное «вздутие» или «утолщение» вдоль экватора, приведшее к разности экваториального и полярного радиусов в 21 км. Разница же в экваториальных радиусах, разнящихся широтой места, составляет чуть больше двух сотен метров.

Запишем потенциал  $U$  гравитационного поля Земли в виде его разложения по сферическим гармоникам

$$U = \frac{\mu_g}{r} \left[ 1 - \sum_{n=2}^{\infty} J_n \left( \frac{R_{ev}}{r} \right)^n P_n(\sin \varphi) + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=1}^n J_{nm} \left( \frac{R_{ev}}{r} \right)^n P_n^m(\sin \varphi) \cos m(\lambda - \lambda_{nm}) \right], \quad (8.1)$$

используя сферические координаты  $(r, \lambda, \varphi)$ , где  $r$  – геоцентрическое расстояние,  $\lambda$  – географическая долгота, отсчитываемая от гринвичского меридиана, и  $\varphi$  – геоцентрическая широта, отсчитываемая от плоскости экватора,  $R_{ev}$  – средний экваториальный радиус,  $P_n^m$  – присоединенная функция Лежандра степени  $n$  и порядка  $m$ ;  $P_n$  – полином Лежандра порядка  $n$ ,  $J_n, J_{nm}$  – гармонические коэффициенты,  $\lambda_{nm}$  – фазовый угол, соответствующий  $J_{nm}$ . Имеют место следующие соотношения между  $J_{nm}$ ,  $\lambda_{nm}$  и  $C_{nm}$ ,  $S_{nm}$ :

$$J_{nm}^2 = C_{nm}^2 + S_{nm}^2, \quad \lambda_{nm} = \frac{1}{m} \arctg \frac{S_{nm}}{C_{nm}} \quad (n \geq 2, \quad 1 \leq m \leq n).$$

Коэффициенты  $J_n$  именуются *зональными гармоническими коэффициентами*. Если  $n \neq m$ , то  $C_{nm}$  и  $S_{nm}$  называются *тессеральными гармоническими коэффициентами*. Если же  $n = m$ , то они называются *секторальными гармоническими коэффициентами*.

Заметим, что сила  $\mathbf{F}$ , действующая на материальную точку массой  $m$ , лежащую вне Земли, вычисляется по формуле

$$\mathbf{F} = m\nabla U,$$

где потенциал  $U$  определен в (8.1),  $\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$ ,  $x, y, z$  — координаты точки.

Зональные гармоники определяются полиномами  $P_n$ , где зависимость потенциала от долготы пренебрегается и поле считается симметричным относительно полярной оси Земли. Для любого полинома  $P_n(\sin \varphi)$  существует  $n$  параллелей, вдоль которых  $P_n$  равно нулю и меняет знак, и, следовательно, сфера разделяется на  $n+1$  широтных зон, в которых этот полином принимает положительные и отрицательные значения. Этот член называется *зональной гармоникой* порядка  $n$ . Член  $J_2$  описывает основное отличие потенциала от сферического и отражает полярное сжатие Земли. Приведем численные значения зональных гармонических коэффициентов:  $J_2 = 1.082 \cdot 10^{-3}$ ,  $J_3 = -2.53 \cdot 10^{-6}$ ,  $J_4 = -1.61 \cdot 10^{-6}$ . Как видно,  $J_2$  почти в 400 раз больше следующего коэффициента  $J_3$ .

Тессеральные гармоники. Функции  $P_n^m(\sin \varphi) \cos m\lambda$  и  $P_n^m(\sin \varphi) \sin m\lambda$  называются *тессеральными гармониками*, когда  $n \neq m$ , при этом Земля покрывается «мозаикой» доменов, чередующихся знаков, обращающихся в нуль на  $n - m$  параллелях, вдоль которых  $\frac{d^m P_n(\sin \varphi)}{d(\sin \varphi)^m} = 0$ , в то время как члены  $\cos m\lambda$  и  $\sin m\lambda$  обращаются в нуль вдоль  $2m$  меридианов.

Секторальные гармоники появляются, когда  $n = m$ . Поскольку полиномы  $P_n^n(\sin \varphi)$  остаются постоянными, то  $\cos n\lambda$  и  $\sin n\lambda$  равны нулю для  $2n$  различных величин  $\lambda$ . В этом случае линии, вдоль которых функции  $P_n^n(\sin \varphi) \cos n\lambda$  и  $P_n^n(\sin \varphi) \sin n\lambda$  равны нулю, являются меридианами, делящими сферу на  $2n$  чередующихся по знакам секторов – положительных и отрицательных.

Примеры<sup>32</sup> указанных выше гармоник показаны на рис. 8.1.

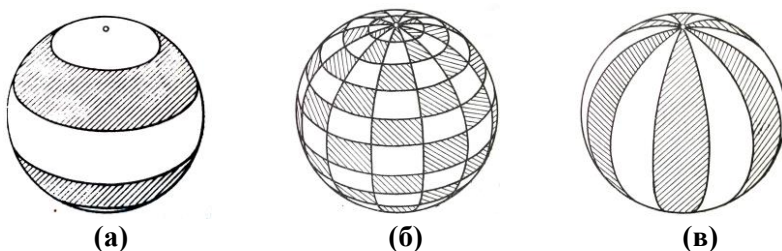


Рис. 8.1. Положительные и отрицательные значения зональной гармоники для  $n=4$  (а); Положительные и отрицательные значения тессеральной гармоники для  $n=10$  и  $k=6$  (б); Положительные и отрицательные значения секторальной гармоники для  $n=6$  (в)

Тессеральные и секторальные гармоники описывают аномалии в распределении масс по долготе. Хотя эти аномалии значительно слабее, чем аномалии, вызванные зональными гармониками, тем не менее, вековой вклад первых становится заметным на больших интервалах времени, например, для геосинхронных КА. Для других орбит влияние этого эффекта мало из-за «усредняющего» действия орбитального движения КА, но влияние зональных гармоник необходимо принимать во внимание. Сечение Земли экваториальной плоскостью имеет форму эллипса. Главная тессеральная гармоника –  $J_{22}$  и соответствующая линия симметрии, обозначаемая  $\lambda_{22}$ , имеет долготу  $-14.7^\circ$  относительно гринвичского меридиана.

Здесь можно сделать небольшое отступление о потенциале гравитационного поля и проблеме интегрируемости уравнений

<sup>32</sup> Рисунки взяты из книги Аксенов Е.А. Теория движения искусственных спутников Земли. М.: Наука. Главная ред. физ.-мат. лит.-ры, 1977.

движений спутника. Эта проблема интересовала не одно поколение исследователей. Оказывается, если поместить неподвижно на *мнимом* (!) расстоянии две материальные точки с *мнимыми* массами (!), то суммарный потенциал их гравитационных полей в главных членах можно сделать совпадающим с гравитационным потенциалом Земли. В главных – это в первых четырех членах. Именно столько свободных параметров содержит выражение для потенциала двух неподвижных материальных точек. Конечно, в силу осесимметричности поля вокруг прямой, соединяющей эти материальные точки, речь идет об аппроксимации зональных гармоник. Это дает возможность значительно продвинуться в задаче интегрируемости уравнений движений спутника в гравитационном поле и получить ее решение, по крайней мере, в виде квадратур<sup>33</sup>.

## 8.2. Гравитационное поле несферичной Земли

Перейдем к анализу влияния несферичности Земли на ее гравитационное поле. Введем прямоугольную систему координат  $Oxuz$ , находящуюся в центре масс Земли (рис. 8.2).

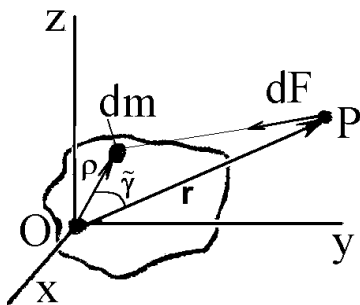


Рис. 8.2. Связанная с Землей прямоугольная система координат и притягиваемая Землей точка  $P$

В точке  $P$ , лежащей вне Земли, находится материальная точка массы  $m_0$ . Обозначим потенциал гравитационного поля Земли

<sup>33</sup> Демин В.Г. Движение искусственного спутника в нецентральной поле тяготения. М.: Наука, 1968. В понятной форме с достаточной степенью строгости эта задача изложена в [8].

в точке  $P$  через  $U$ . Тогда частные производные от него по координатам будут определять соответствующие гравитационные ускорения, действующие на материальную точку  $P$ ,

$$\frac{F_x}{m_0} = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad \frac{F_y}{m_0} = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad \frac{F_z}{m_0} = \frac{\partial U}{\partial z},$$

или, учтя обозначения, введенные при написании системы (6.6), получим

$$\frac{\partial U}{\partial x} = X_0 + X, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = Y_0 + Y, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = Z_0 + Z.$$

Следуя геометрическому методу Мак-Куллага<sup>34</sup>, который дает интуитивное сочетание гравитации и инерции<sup>35</sup>, и воспользовавшись рис. 8.2, представим косинус угла  $\tilde{\gamma}$ , образуемого векторами  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{r}$ , исходящими из центра масс Земли в элементарную массу  $dm$  и в притягиваемую точку  $P$ , используя скалярное произведение этих векторов —  $\cos \tilde{\gamma} = \mathbf{r}\mathbf{p}/(r\rho)$ . Расстояние  $l$  между  $P$  и  $dm$  определяется выражением

$$l = r \left[ 1 - 2 \frac{\rho}{r} \cos \gamma + \left( \frac{\rho}{r} \right)^2 \right]^{1/2}.$$

Применяя общую формулу для потенциала

$$U = \gamma \int \frac{dm}{r} \quad (8.2)$$

и ее разложение по сферическим функциям

$$\left[ 1 - 2 \frac{\rho}{r} \cos \gamma + \left( \frac{\rho}{r} \right)^2 \right]^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{\rho}{r} \right)^n P_n(\cos \tilde{\gamma}),$$

<sup>34</sup> Джеймс Мак-Куллаг (James McCullagh, 1809–1847). Ирландский математик, профессор Trinity College в Дублине. Геометр, исследовал эллипсоиды и другие поверхности второго порядка.

<sup>35</sup> MacCullagh J. On the Attraction of Ellipsoids with a New Demonstration of Clairut's Theorem // Transactions of the Royal Irish Academy. Dublin, 1855. V. 22, Part 1. P. 379–395.

где  $P_n(\cos \tilde{\gamma})$  – полиномы Лежандра, перепишем (8.2) в следующем виде:

$$U = \frac{\gamma}{r} \int \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{\rho}{r} \right)^n P_n(\cos \tilde{\gamma}) dm. \quad (8.3)$$

Запишем первые три члена из разложения (8.3):

$$U = \frac{\gamma}{r} \int dm + \frac{\gamma}{r^2} \int \rho \cos \tilde{\gamma} dm + \frac{\gamma}{2r^3} \int \rho^2 (3 \cos \tilde{\gamma} - 1) dm.$$

Интегрирование по всему объему Земли позволяет переписать это выражение в виде

$$U = \frac{\mu_g}{r} + \frac{\gamma}{2r^3} (A_E + B_E + C_E - 3J_p), \quad (8.4)$$

где  $A_E, B_E, C_E$  суть главные центральные моменты инерции Земли и  $J_p$  – ее момент инерции вокруг оси  $OP$ . Форма потенциала (8.4) носит название *приближение Мак-Куллага*.

Первое слагаемое в (8.4) дает приближение потенциала Земли как материальной точки и определяет  $X_0, Y_0, Z_0$ . Эти компоненты подчиняются обратно-квадратичной зависимости от  $r$ . В сказанном нетрудно убедиться дифференцированием по  $r$ . Второе слагаемое в (8.4) определяет возмущающее ускорение с компонентами  $X, Y, Z$ .

Рассмотрим условие, при котором Земля будет обладать гравитационным полем, эквивалентным полю материальной точки. Это реализуется в двух случаях.

1. При  $r \rightarrow \infty$ , то есть когда на достаточно больших расстояниях от притягивающего тела его формой можно пренебречь и рассматривать его как материальную точку.
2. При шарообразной форме Земли, поскольку в этом случае  $A_E = B_E = C_E = J_p$  для всех направлений  $OP$ . Именно поэтому лишь несферичность Земли может привести к появлению отличных от нуля возмущающих ускорений.

Несферичность Земли проявляется в виде двух эффектов.

1. Если ограничиться первыми двумя членами разложения (8.4), то сила притяжения материальной точки  $M$  Землей не будет

подчиняться привычной зависимости типа  $1/r^2$ , но будет содержать член с  $1/r^4$ .

2. Эквипотенциальные поверхности перестанут быть сферами с центрами в начале координат, так как потенциал  $U$  может, вообще говоря, зависеть от направления  $OP$ , поскольку от него может зависеть  $J$ . Это приведет к нецентральности поля тяготения (сила притяжения точки  $M$  Землей не будет проходить через начало координат, поскольку производные от функции  $U$  по направлениям, нормальным к  $OP$ , перестанут быть нулевыми).

### 8.3. Вычисление возмущающего ускорения

Точная форма Земли достаточно сложная. В качестве первого (после сферы) приближения ее нередко представляют эллипсоидом вращения. Для этого случая потенциал  $U$  может быть представлен выражением

$$U = \frac{\mu_g}{r} - \frac{\varepsilon}{3r^3}(3\sin^2\psi - 1), \quad (8.5)$$

где  $\psi$  – географическая широта точки  $P$ , а  $\varepsilon = 3\mu_g R_{ev}^2 J_2 / 2$  – введенная для сокращения формул постоянная, зависящая от сжатия эллипсоида и равная нулю для сферы.

Первое слагаемое в правой части (8.5) дает потенциал Земли, рассматриваемый как потенциал материальной точки или однородной сферы, а второе слагаемое – некоторую добавку, вызванную полярным сжатием Земли.

Найдем, воспользовавшись выражением (8.5), составляющие возмущающего ускорения  $S, T, W$ . Дифференцируя  $U$  вдоль радиуса  $r$  и перпендикулярно ему в плоскости меридиана вдоль дуги  $s$  меридиана, определим радиальную и меридиональную составляющие возмущающего ускорения по формулам

$$g_r = \frac{\partial U}{\partial r} = -\frac{\mu_g}{r^2} + \frac{\varepsilon}{r^4}(3\sin^2\psi - 1), \quad (8.6)$$

$$g_m = \frac{\partial U}{\partial s} = \frac{\partial U}{\partial \psi} \frac{d\psi}{ds} = -\frac{\varepsilon}{r^4} \sin 2\psi. \quad (8.7)$$

Широтная составляющая, направленная параллельно плоскости экватора, равна нулю в силу симметрии потенциала вокруг оси вращения Земли. При получении выражения (8.7) было использовано очевидное соотношение  $ds = r d\psi$ . Второе слагаемое в (8.6) является возмущающим ускорением, направленным вдоль вектора  $\mathbf{r}$ , то есть составляющей  $S$ . Откуда сразу получаем формулу

$$S = \frac{\varepsilon}{r^4} (3 \sin^2 \psi - 1). \quad (8.8)$$

Для нахождения  $W$  и  $T$  следует вычислить соответствующие проекции меридионального ускорения (8.7). Пусть плоскость орбиты пересекает плоскость экватора под углом  $i$  (рис. 8.3).

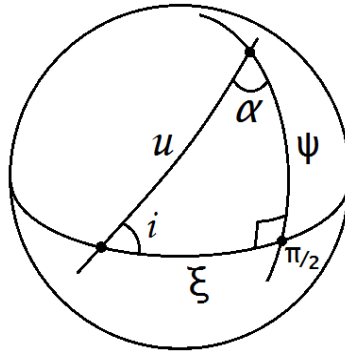


Рис. 8.3. Пересечение плоскости экватора плоскостью орбиты под углом  $i$

Рассмотрим сферический треугольник, образованный тремя дугами больших кругов, соответствующих плоскостям экватора, орбиты и меридиана. Углы этого сферического треугольника составляют соответственно  $i$ ,  $\pi/2$  и некоторый угол  $\alpha$ , а «стороны» – дуги больших кругов суть  $u$ ,  $\psi$  и некоторая дуга  $\xi$ .

Обозначим строчными буквами дуги сторон сферического треугольника, а прописными буквами – двугранные углы между плоскостями, в которых эти дуги лежат. Тогда теорема синусов



$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}$$

для сферического треугольника дает в рассматриваемом случае соотношение

$$\frac{\sin u}{\sin \pi / 2} = \frac{\sin \psi}{\sin i},$$

откуда

$$\sin \psi = \sin u \cdot \sin i, \quad (8.9)$$

и с учетом (8.8) получаем

$$S = \frac{\varepsilon}{r^4} (3 \sin^2 u \cdot \sin^2 i - 1). \quad (8.10)$$

Теоремы косинусов (6.3) для сферического треугольника, примененные для прямоугольного сферического треугольника, если  $A$  – прямой двугранный угол, дают два выражения

$$\cos a = \cos b \cos c, \quad \cos B = \sin C \cos b.$$

Отсюда имеем три нужных соотношения

$$\begin{aligned} \cos u &= \cos \psi \cdot \cos \xi, \\ \cos \alpha &= \cos \xi \cdot \sin i, \\ \cos i &= \cos \psi \cdot \sin \alpha, \end{aligned} \quad (8.11)$$

полученных для дуги  $u$  и двух прилежащих к ней двугранных углов –  $\alpha$  и  $i$ .

Для точки единичной сферы, соответствующей пересечению плоскостей орбиты и меридиана, разложение ускорения  $g_m$  представлено на рис. 8.4. Но тогда

$$T = g_m \cos \alpha, \quad W = g_m \sin \alpha,$$

и, воспользовавшись выражениями (8.7), (8.9) и (8.11), находим

$$T = -\frac{\varepsilon}{r^4} \sin 2u \cdot \sin^2 i, \quad (8.12)$$

$$W = -\frac{\varepsilon}{r^4} \sin 2i \cdot \sin u. \quad (8.13)$$

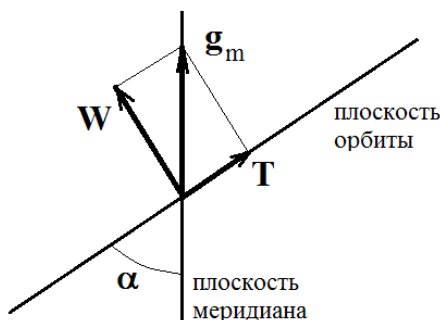


Рис. 8.4. Разложение ускорения  $g_m$

#### 8.4. Эволюция экваториальной орбиты в поле несферичной Земли

Чтобы продемонстрировать действие центрального, но не ньютонова поля, проанализируем эволюцию орбиты КА, когда возмущающее ускорение направлено в центр масс Земли. В нашем случае это связано с появлением слагаемого, пропорционального  $1/r^4$ , в возмущающем ускорении. Для этого рассмотрим эволюцию орбиты экваториального КА, то есть аппарата, движущегося в плоскости экватора, поскольку в силу симметрии возмущающее ускорение будет в этом случае направлено к центру масс Земли. Иногда говорят, что рассматривается *возмущение движения центральными силами*.

Если орбита является экваториальной ( $i = 0$ ), то из (8.10), (8.12) и (8.13) следует, что

$$S = -\frac{\varepsilon}{r^4}, \quad T = 0, \quad W = 0. \quad (8.14)$$

Полагая, как и выше, возмущения малыми, будем считать, что за время одного оборота КА по орбите вокруг Земли величины  $\Omega, i, p, e, \omega$  можно считать постоянными, а их фактическое изменение – описывать скачкообразными изменениями  $\Delta\Omega, \Delta i, \Delta p, \Delta e, \Delta\omega$  в конце каждого оборота. Это соответствует замене некоторой гладкой кривой, близкой ей функцией «ступенчатого» типа.

Система уравнений (6.28) сразу дает для первых трех оскулирующих элементов уравнения

$$\frac{d\Omega}{du}=0, \quad \frac{di}{du}=0, \quad \frac{dp}{du}=0,$$

то есть постоянство этих переменных<sup>36</sup>, а следовательно, и их изменение за оборот КА по орбите приведет к выражениям

$$\Delta\Omega=0, \quad \Delta i=0, \quad \Delta p=0. \quad (8.15)$$

Далее, для изменения эксцентриситета цепочка квадратур дает

$$\Delta e = - \int_0^{2\pi} \frac{\varepsilon}{\mu_g r^2} \sin \nu du = - \frac{\varepsilon}{\mu_g p^2} \int_0^{2\pi} (1 + e \cos \nu)^2 \sin \nu d\nu = 0.$$

Здесь использованы равенства (1.19) и (7.7). Следовательно, материальная точка, возмущающаяся центральной силой, не изменяет ни плоскости движения ( $\Delta i = 0$ ,  $\Delta\Omega = 0$ ), ни формы и размеров своей орбиты ( $\Delta p = 0$ ,  $\Delta e = 0$ ). Результат этот вполне естественен – плоскость орбиты не поворачивается, так как нормальное к ней возмущающее ускорение  $W=0$ , и орбита не изменяется по величине и форме, поскольку движение по замкнутой кривой в консервативном поле не может изменить энергии ( $h = \text{const}$ ). Центральные силы не могут изменить вектор кинетического момента ( $\mathbf{c} = \text{const}$ ), следовательно,  $p$  и  $e$  остаются постоянными (см. (1.20) и (1.21)). Рассмотрим изменение  $\omega$ :

$$\Delta\omega = \int_0^{2\pi} \frac{\varepsilon}{e\mu_g r^2} \cos \nu du = \frac{\varepsilon}{e\mu_g p^2} \int_0^{2\pi} (1 + e \cos \nu)^2 \cos \nu d\nu = \frac{2\pi\varepsilon}{\mu_g p^2}. \quad (8.16)$$

Таким образом, единственным возмущенным орбитальным элементом будет аргумент перигея, определяющий направление на перицентр и изменяющийся с каждым витком на постоянную величину  $\Delta\omega$  (это связано с изменением константы векторного интеграла Лапласа), и, следовательно, траектория движения КА будет иметь характер, изображенный на рис. 8.5.

---

<sup>36</sup> Внимательный читатель уже заметил, что здесь мы слухавили, не раскрыв неопределенность вида  $0/0$ , возникающую при  $i=0$ , но об этом чуть позже.

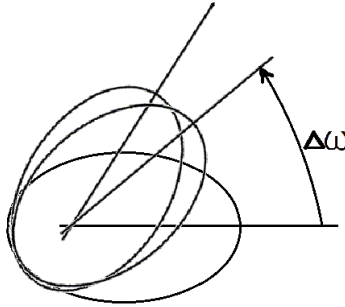


Рис. 8.5. Характер траектории движения КА в плоскости экватора

### 8.5. Прецессия наклонной орбиты в поле несферичной Земли

В том случае, если возмущающее ускорение содержит компоненты, обусловленные нецентральностью поля тяготения Земли, возникает движение, нередко называемое *прецессией орбиты*. Рассмотрим общий случай эволюции орбиты, связанной с полярным сжатием Земли, который даст пример подобной прецессии.

Пусть наклонение плоскости орбиты  $i \neq 0$ . Тогда подстановка значений  $S, T, W$ , взятых из (8.10), (8.12), (8.13) в систему (6.28), и интегрирование этих уравнений при обычных предположениях, в частности, в предположении справедливости равенства (7.7), дают

$$\begin{aligned} \Delta i &= 0, \quad \Delta p = 0, \quad \Delta e = 0, \\ \Delta \Omega &= -\frac{\varepsilon \cos i}{\mu_g p^2} 2\pi, \quad \Delta \omega = \frac{\varepsilon}{\mu_g p^2} (4 - 5 \sin^2 i) \pi. \end{aligned} \quad (8.17)$$

Неизменность формы и размеров эллипса ( $\Delta p = 0, \Delta e = 0$ ), по которому в нашем приближении движется КА, имеет ту же причину, что и выше, – движение КА происходит в консервативном поле по замкнутой траектории. Эволюция направления на перицентр ( $\Delta \omega \neq 0$ ) уже описывалась в предыдущей задаче. В отличие от обоих предыдущих случаев (торможение спутника в атмосфере и эволюция орбиты экваториального спутника) плоскость орбиты будет теперь поворачиваться ( $\Delta \Omega \neq 0$ ), правда, с сохранением

наклоения ( $\Delta i = 0$ ). Такое вращение плоскости орбиты и называется ее прецессией. Употребление этого термина указывает на связь рассматриваемого явления с теорией гироскопа. Покажем это, прибегнув к качественным соображениям.

Пусть искусственный спутник Земли вращается вокруг нее по круговой орбите. Мысленно «размазав» массу аппарата по орбите, получим вращающееся кольцо с кинетическим моментом  $\Gamma$ . Пусть плоскость орбиты  $AB$  составляет угол  $i$  с плоскостью экватора  $CD$ , и, следовательно, вектор  $\Gamma$  повернут на угол  $i$  относительно оси симметрии Земли  $NS$ . Как уже говорилось, шарообразная Земля эквивалентна материальной точке, поэтому новые эффекты можно ожидать лишь от осесимметричного тела, дополняющего Землю до эллипсоида вращения (на рис. 8.6 дано в сечении и заштриховано).

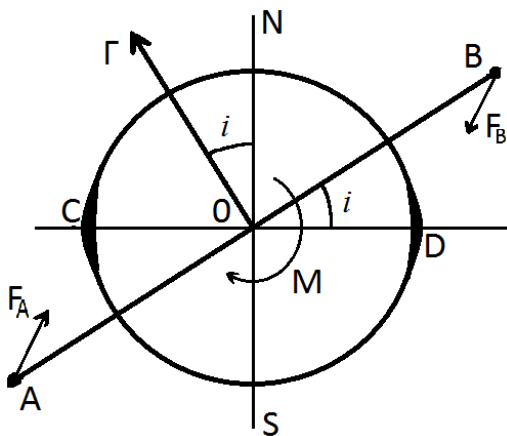


Рис. 8.6. К качественной интерпретации влияния эллипсоида инерции Земли на движение КА

Если рассмотреть гравитационное взаимодействие этого тела с кольцом «гироскопа», то можно утверждать, что точка  $B$  кольца в основном притягивается областью  $D$  тела (область  $C$  от нее слишком далека), что изображено силой  $F_B$ , а точка  $A$  – областью  $C$  (сила  $F_A$ ). Это приведет к возникновению возмущающего момента  $M$ , который заставит «гироскоп» прецессировать. При

этом, как известно, вектор кинетического момента  $\Gamma$  будет двигаться по конусу, сохраняя угол  $i$  постоянным. Вращение в результате прецессии плоскости  $\Gamma ON$  дает в конечном итоге  $\Delta\Omega \neq 0$ , а постоянство угла  $i$  даст  $\Delta i = 0$ , как это и следует из точного решения (8.17).

Рассмотрим зависимость прецессии орбиты от угла  $i$ . Первое выражение (8.17) показывает, что при  $i = \pi/2$  прецессия орбиты наблюдаться не будет ( $\Delta\Omega = 0$ ). Это вполне естественно, поскольку для полярных орбит, которые расположены в плоскости меридиана, в силу осесимметричности рассматриваемой модели Земли сумма сил, аналогичных силам  $\mathbf{F}_A$  и  $\mathbf{F}_B$ , показанным на предыдущей схеме, будет проходить через начало координат и никакого момента создавать не сможет. Если положить  $i = 0$  (движение в плоскости экватора), то первое выражение из (8.17) даст приращение  $\Delta\Omega = -2\pi\varepsilon/(\mu p^2)$ , то есть наиболее интенсивную прецессию. Однако этому формальному результату противоречит то обстоятельство, что и в этом случае силы  $\mathbf{F}_A$  и  $\mathbf{F}_B$  будут идти через начало координат и никакой прецессии быть не должно. Разберемся с возникшим противоречием.

Формальное монотонное увеличение прецессии по мере того, как орбита КА все более приближается к плоскости экватора, связано с тем, что эта прецессия в нашем случае измеряется приращением  $\Delta\Omega$ . При  $i \rightarrow 0$  происходит вырождение введенной таким способом системы координат, а при  $i = 0$  узел просто теряет смысл, поскольку в этом случае плоскость орбиты не пересекает плоскость экватора, а лежит в ней. Не вдаваясь в неуместные здесь геометрические тонкости, покажем суть происходящего на качественной (плоской) схеме (рис. 8.7).

Обозначим двугранный угол между двумя последовательными положениями плоскости орбиты через  $\Delta\beta$ . Тогда очевидно, что с уменьшением угла  $i$  измеряемый в плоскости экватора угол  $\Delta\Omega$  будет при том же значении  $\Delta\beta$  становиться все больше. В плоском случае при  $\Delta\beta = \text{const}$  будет  $\Delta\Omega \rightarrow \infty$  для  $i \rightarrow 0$ . На сфере предельное значение  $\Delta\Omega$  будет, естественно, конечным.

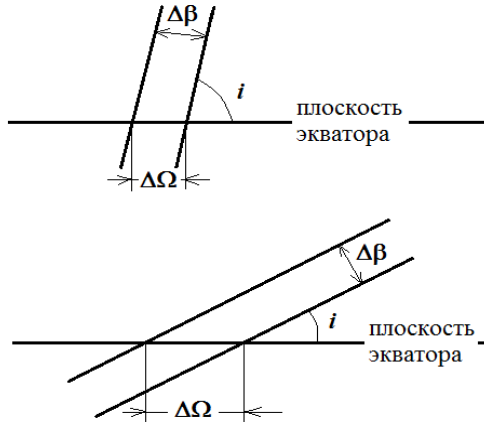


Рис. 8.7. К качественной интерпретации эффекта вырождения узла при  $i \rightarrow 0$

Если измерять прецессию приращением  $\Delta\beta$ , то очевидное соотношение  $\Delta\beta = \Delta\Omega \sin i$  и первая формула из (8.17) дают выражение

$$\Delta\beta = -\frac{\pi\varepsilon}{\mu p^2} \sin 2i.$$

В полном соответствии со здравым смыслом  $\Delta\beta = 0$  для полярных и экваториальных орбит, и  $\Delta\beta$  принимает максимальное значение для  $i = \pi/4$ .

При  $i = 0$  (экваториальная орбита) имеем

$$\Delta\omega = \frac{4\pi}{\mu p^2} \varepsilon,$$

что, очевидно, противоречит формуле (8.16), где та же самая величина оказалась вдвое меньше. Однако полученное несоответствие является лишь кажущимся. Как известно, угол  $\omega$  отсчитывается от восходящего узла орбиты. В случае экваториальной орбиты оба эти угла, определяющие долготу восходящего узла и направление на перицентр, лежат в одной плоскости и поэтому могут складываться алгебраически. Если взять в указанной плоскости некоторое неподвижное в абсолютном пространстве направление, то изменение направления на перицентр относительно

этого неподвижного направления будет задаваться суммой  $\Delta\Omega + \Delta\omega$ . В случае, рассмотренном ранее (см. (8.15) и (8.16)), эта сумма равна  $\left(0 + \frac{2\pi}{\mu p^2}\right)\varepsilon$ . В рассматриваемом же здесь случае (8.17) поворот направления на перицентр в абсолютном пространстве будет равен  $\left(-\frac{2\pi}{\mu p^2} + \frac{4\pi}{\mu p^2}\right)\varepsilon$ , то есть оба решения дают одно и то же движение в абсолютном пространстве. Разница между двумя значениями  $\Delta\omega$  связана с тем, что первое было получено в неподвижной в абсолютном пространстве системе координат ( $\Delta\Omega = 0$ ), а второе – во вращающейся  $\left(\Delta\Omega = -\frac{2\pi}{\mu p^2}\varepsilon\right)$ .

Это, в свою очередь, зависит от того, что в первом случае было положено  $i = 0$ , а во втором  $i \rightarrow 0$ . Именно на это обращалось ранее<sup>36</sup>.

Суммируя вышесказанное, можно утверждать, что несферичность Земли приводит, вообще говоря, к сложному движению КА: плоскость его орбиты вращается вокруг оси симметрии Земли, а эллиптическая траектория КА вращается, в свою очередь, как целое в этой плоскости. Причем здесь речь идет о так называемых *вековых изменениях*, то есть об эволюционных изменениях параметров орбиты, накапливаемых от витка к витку вокруг Земли. Если же посмотреть на уравнения движения (6.28), то нетрудно видеть, что внутри витка все оскулирующие элементы претерпевают изменения, то есть орбита постоянно «дышит».

## 8.6. Специальные орбиты

Вековая прецессия плоскости орбиты – это существенный элемент динамики космического полета. При наклонениях орбиты, характерных для большинства российских КА, величина указанной прецессии имеет порядок  $4^\circ$  в сутки. Если учесть, что морская миля соответствует угловой минуте, то суточное смещение траектории КА относительно Земли может иметь порядок более 200 морских миль или около 400 км. Эффекты такого масштаба, безусловно, следует учитывать. Иногда эти эффекты носят отрицательный,



иногда положительный характер. В качестве примера, когда прецессия плоскости орбиты может оказаться полезной, рассмотрим задачу получения карты звездного неба. Пусть КА ориентирован так, что оптическая ось телескопа всегда направлена по местной вертикали, и поэтому фотографируются звезды, находящиеся в зените. За один виток КА способен сфотографировать звезды, находящиеся в узкой кольцевой зоне, симметричной относительно плоскости орбиты. Если бы прецессии орбиты не существовало, то КА постоянно фотографировал бы одни и те же звезды. Однако при указанной выше суточной величине прецессии вся доступная КА часть небесной сферы будет отснята за 45 суток без каких-либо затрат топлива на поворот плоскости орбиты, а ниже будет показано, что такие затраты были бы огромны.

Последнее равенство из (8.17) указывает на характер изменения направления на перицентр. Это изменение зависит от наклона плоскости орбиты  $i$ , и для его значений, удовлетворяющих условию  $4 - 5\sin^2 i = 0$ , величина  $\Delta\omega = 0$ . При этом значении  $i$  плоскость орбиты будет прецессировать, но расположенная в этой плоскости эллиптическая орбита не будет «вертеться» – изменять положение своей оси симметрии в этой плоскости. Указанное значение  $i$  приблизительно равно  $63.4^\circ$ . Орбита с таким наклоном носит название *орбита Молнии* по названию серии отечественных КА связи «Молния», и она широко использовалась при создании систем связи. Орбиты этих аппаратов имеют аргумент перицентра  $-90^\circ$  и период обращения 12 часов. Большую часть времени на орбите спутник проводит в районе апогея высотой около 40 000 км, который для орбиты Молнии проходит над северным полушарием Земли. На рис. 8.8 показаны орбита и положение КА на ней с шагом в один час<sup>37</sup>. Чтобы покрыть всю территорию северного полушария, требуется по крайней мере три КА, в реальности использовались четыре пары спутников «Молния», орбиты которых были смещены на  $90^\circ$  относительно друг друга. При таком наклоне линия узлов орбиты «естественно» прецессирует, поэтому «розочка» с орбитами-«лепестками» над северным полушарием прецессирует как одно целое вокруг оси вращения Земли.

---

<sup>37</sup> Рисунок взят из <http://earthobservatory.nasa.gov/Features/OrbitsCatalog/page2.php>

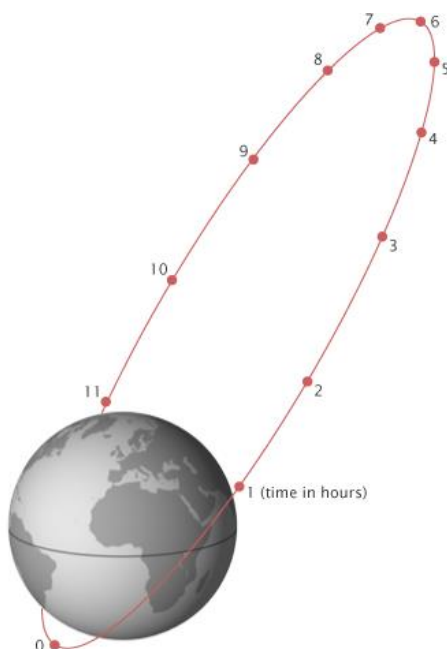


Рис. 8.8. Положение КА с шагом в один час на орбите Молнии

Другие орбиты, также широко используемые на практике, называются *солнечно-синхронные орбиты* (или *гелиосинхронные орбиты*). Космический аппарат, находящийся на них, проходит над любой точкой земной поверхности приблизительно в одно и то же местное солнечное время. Но тогда и угол освещения земной поверхности Солнцем будет одинаковым на всех проходах КА. Такие условия освещения хорошо подходят для КА дистанционного зондирования Земли и метеоспутников. Параметры орбиты выбираются таким образом, чтобы орбита прецессировала в восточном направлении на 360 градусов в год (приблизительно на 1 градус в день), компенсируя вращение Земли вокруг Солнца. Первое равенство из (8.17) позволяет определить наклонение орбиты при заданных ее параметрах, то есть требуемое наклонение зависит от высоты орбиты, если она круговая. Поделив левую и правую части этого равенства на  $2\pi$ , получим справа выражение для скорости

прецессии линии узлов орбиты ( $d\Omega/du$ ). Для орбит высотой 600–800 км требуемое наклонение орбиты составляет около  $98^\circ$ .

К третьему типу специальных орбит относятся *геосинхронные орбиты*. Перепиывая формулу (2.1), получаем выражение для большой полуоси орбиты в зависимости от периода обращения спутника:

$$a = \left( \frac{\mu T_{rev}^2}{4\pi^2} \right)^{1/3}.$$

Подставляя сюда значение *сидерического (звездного) периода*, соответствующего одному обороту аппарата вокруг Земли относительно инерциального пространства, который равен 23 часам 56 минутам и 4 секундам (солнечный период равен 24 часам), получаем значение большой полуоси геосинхронной орбиты. Если орбита имеет отличное от нуля наклонение и нулевой эксцентриситет, то при наблюдении с Земли аппарат в течение суток описывает на небосводе «восьмёрку». Если же наклонение и эксцентриситет отличны от нуля, то восьмёрка может, в зависимости от наклонения и эксцентриситета, вырождаться в эллипс или в отрезок прямой, лежащий в плоскости экватора (при ненулевом эксцентриситете и нулевом наклонении).

Частным случаем геосинхронной орбиты является геостационарная орбита – круговая орбита, лежащая в плоскости земного экватора, для которой спутник в небе неподвижен. Геостационарная орбита имеет радиус 42 164 км с центром, совпадающим с центром Земли, что соответствует ее высоте 35 786 км над уровнем моря. Именно этот тип орбит получил широкое применение для обеспечения связи, так как спутник, расположенный на ней, покрывает практически целиком полушарие Земли. Однако гравитационное поле Земли преподносит и здесь свои сюрпризы. Полярное сжатие нашей планеты, представляемое в разложении потенциала (8.1) гармоникой  $J_2$ , не приводит к асимметрии в экваториальной плоскости, в то время как вторая тессеральная гармоника  $J_{22}$ , наоборот, представляет небольшую эллиптичность в экваториальном сечении Земли. В соответствии с этими двумя гармониками эллипсоид планеты имеет следующие размеры больших полуосей: две экваториальные – 6 378 266.3 м и 6 378 053.7 м и полярную –

6 356 774.72 м. Разница между экваториальными полуосями почти на два порядка меньше, чем разница между полярной и экваториальными полуосями. Тем не менее, как полярное сжатие Земли оказывает сильное влияние на эволюцию орбит спутников, движущихся вокруг Земли, так и экваториальное сжатие вносит свою лепту и заставляет принимать во внимание его наличие. Вспоминая, как представлялось полярное сжатие (см. рис. 8.6), аналогично можно представить и экваториальное сжатие планеты двумя симметричными, лежащими в экваториальной плоскости на противоположных сторонах диаметра «нашлепками» дополнительных масс. Тогда, зная, что центральное поле не приводит к анизотропии в положениях равновесия спутника на геостационарной орбите, его притяжение этими нашлепками зависит от расстояния до них. Существует две точки на орбите, где спутник равноудален от нашлепок, и две точки, лежащие на том же диаметре, что и нашлепки. Именно эти четыре точки и являются положениями равновесия спутника на геостационарной орбите. Будучи помещенным в другие точки орбиты, спутник будет дрейфовать, смещаясь вдоль орбиты. Но это еще не все ограничения на размещение спутника. Легко сообразить из баланса сил притяжения спутника нашлепками, что из этих четырех точек только две будут устойчивы – лежащие на упомянутом диаметре. Их координаты соответственно равны  $75^\circ$  и  $255^\circ$  восточной долготы. Направление, совпадающее с этим диаметром, носит название *гравитационной долины* (*gravitational valley*). Одна устойчивая точка лежит над Атлантическим океаном, вторая расположена над Тихим океаном. Понятно, что интерференция радиоволн с близкими частотами, заставляет разносить спутники как по долготе, так и по частоте передатчиков. Есть специальная международная организация – Международный союз электросвязи, который распределяет точки стояния и радиочастоты между спутниками. Поэтому приходится решать задачу удержания спутника в заданной точке геостационарной орбиты. На практике геостационарные спутники в количестве более трех сотен распределены достаточно равномерно по орбите<sup>38</sup>, несмотря на наличие указанных точек.

---

<sup>38</sup> <http://dic.academic.ru/dic.nsf/ruwiki/354072>

## 9. Движение КА при наличии двух притягивающих центров

Фактически в этом разделе вновь идет речь о планетоидной задаче трех тел. В отличие от предыдущего покажем, как могут быть получены количественные оценки путем обращения к системе уравнений движения, записанных в оскулирующих элементах.

Будем предполагать, что оба небесных тела (для определенности – Солнце и Земля), в поле тяготения которых движется КА, являются материальными точками или шарообразными телами и они лишены атмосфер. Будем далее предполагать, что КА движется внутри сферы действия Земли, и поэтому Солнце сказывается на его движении как источник малых ускорений  $S$ ,  $T$ ,  $W$ . Эту задачу в более общей постановке о влиянии притяжения Луны и Солнца на высокие орбиты искусственных спутников Земли решил М.Л. Лидов<sup>39</sup>.

Уравнение движения КА в геоцентрической системе координат (5.5) содержит в качестве слагаемого, дающего вектор возмущающего ускорения  $\mathbf{b}$ , выражение

$$\mathbf{b} = -\gamma m_1 \left( \frac{\mathbf{s}}{s^3} - \frac{\mathbf{R}}{R^3} \right),$$

которому с учетом равенства (5.8) может быть придан вид

$$\mathbf{b} = -\frac{\gamma m_1}{R^2} \cdot \frac{r}{R} \left( \frac{\mathbf{r}}{r} - 3 \frac{\mathbf{R}\mathbf{r}}{Rr} \cdot \frac{\mathbf{R}}{R} \right). \quad (9.1)$$

Здесь использованы обозначения, введенные на рис. 5.2. Найдем  $S$ ,  $T$ ,  $W$  с помощью выражения (9.1). Предположим, что движение является плоским (траектория КА лежит в плоскости земной орбиты

---

<sup>39</sup> Михаил Львович Лидов (1926–1993). Советский и российский учёный в области прикладной небесной механики, главный научный сотрудник ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. Известен своими результатами по устойчивости орбит КА в присутствии возмущений от других небесных тел, баллистическими расчетами для осуществления мягкой посадки на Луну, а также пионерскими работами по определению плотности верхних слоев атмосферы по траекторным измерениям первого ИСЗ.

The diagram shows a three-body system with masses  $m_1$ ,  $m_2$ , and  $m$ . The center of mass is at the origin of a coordinate system with axes  $\mathbf{R}/R$  and  $\mathbf{r}/r$ . The position of mass  $m_1$  is given by  $\mathbf{r}_1 = r \mathbf{e}_r + R \mathbf{e}_R$ . The position of mass  $m_2$  is given by  $\mathbf{r}_2 = -r \mathbf{e}_r + R \mathbf{e}_R$ . The position of mass  $m$  is given by  $\mathbf{r}_m = r \mathbf{e}_r + R \mathbf{e}_R$ . The angle between  $\mathbf{r}_1$  and  $\mathbf{r}_2$  is  $\alpha$ . The angle between  $\mathbf{r}_1$  and  $\mathbf{r}_m$  is  $\beta$ . The angle between  $\mathbf{r}_m$  and  $\mathbf{r}_2$  is  $\psi$ . The angle between  $\mathbf{r}_1$  and the  $\mathbf{R}/R$  axis is  $\nu$ . The angle between  $\mathbf{r}_2$  and the  $\mathbf{R}/R$  axis is  $\nu$ . The angle between  $\mathbf{r}_m$  and the  $\mathbf{R}/R$  axis is  $\nu$ .

Пренебрегаем годичным движением Земли вокруг Солнца. Как известно, за одни сутки угол  $\alpha$  изменяется приблизительно на один угловой градус (точнее, на 360 градусов за 365 дней), и, следовательно, предполагается, что такое изменение  $\alpha$  малосущественно, если рассматривать интервал времени порядка периода обращения КА вокруг Земли. Поэтому положим, что угол  $\alpha$ , определяющий направление на Солнце, будет постоянным.

$$W=0. \quad (9.2)$$
$$S = \mathbf{b} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} = -\frac{\gamma m_1}{R^2} \cdot \frac{r}{R} (1 - 3 \cos^2 \psi)$$
$$S = -\frac{\gamma m_1}{R^2} \cdot \frac{r}{R} [1 - 3 \cos^2(\alpha - \nu)]. \quad (9.3)$$

Аналогично, компонента возмущающего ускорения  $T$  может быть найдена как проекция вектора  $\mathbf{b}$  на направление орта  $\mathbf{e}_T$ , нормального к  $\mathbf{r}$ :

$$T = \mathbf{b} \mathbf{e}_T = -\frac{\gamma m_1}{R^2} \cdot \frac{r}{R} (0 - 3 \cos \psi \cos \beta)$$

или после несложных тригонометрических преобразований с учетом соотношения  $\beta = \alpha - \nu + \pi/2$  (см. рис. 9.1):

$$T = \frac{3\gamma m_1}{R^2} \cdot \frac{r}{R} \cos(\alpha - \nu) \sin(\alpha - \nu). \quad (9.4)$$

Полученные значения  $W$  (9.2),  $S$  (9.3) и  $T$  (9.4) позволяют найти изменение всех оскулирующих элементов после одного обращения КА вокруг Земли по методике, применявшейся выше. Равенство (9.2) сразу дает

$$\Delta\Omega = 0, \quad \Delta i = 0.$$

Поскольку в нашем случае Солнце считается неподвижным ( $\alpha = \text{const}$ ), то гравитационное поле двух притягивающих центров становится консервативным. Но тогда движение по замкнутой траектории (эллипсу) не может изменить энергии КА, а следовательно, и полуось  $a$ , являющуюся мерой энергии, поэтому  $\Delta a = 0$ .

Громоздкие выкладки<sup>40</sup> позволяют найти приближенное выражение для изменения эксцентриситета за оборот КА по орбите

$$\Delta e = -15\pi \frac{m_1}{m_2} \left( \frac{a}{R} \right)^3 e \sqrt{1 - e^2} \cos \alpha \sin \alpha. \quad (9.5)$$

Таким образом, в результате возмущающего действия Солнца орбита не будет изменять плоскости своего движения и размера (большой полуоси), но будет изменять форму (эксцентриситет). Этот эффект не будет проявляться у круговых орбит ( $e = 0$ ) и сильно вытянутых, приближающихся к параболическим ( $e = 1$ ).

---

<sup>40</sup> Лидов М.Л. Эволюция орбит искусственных спутников планет под действием гравитационных возмущений внешних тел // Искусственные спутники Земли. 1961. Вып. 8. С. 5–45.

Наибольший эффект, как очевидно следует из соотношения (9.5), свойственен орбитам, имеющим  $e=1/\sqrt{2} \approx 0.7$ , то есть с достаточно ярко выраженной эллиптичностью.

Изменение эллиптичности орбиты может привести к «падению» КА на Землю. Рассмотрим, как это происходит. Из приведенных на рис. 9.2 обозначений следует, что высота пролета КА над поверхностью шарообразной Земли радиуса  $r_2$ , обозначенная через  $H$ , будет равна  $H=a(1-e)-r_2$ . Если окажется, что изменение этой высоты  $\Delta H = -a\Delta e$  будет иметь «нужный» знак и удовлетворять неравенству  $|\Delta H| > H$ , то КА «врезается» в Землю (затормозится в её атмосфере и упадет на поверхность Земли).

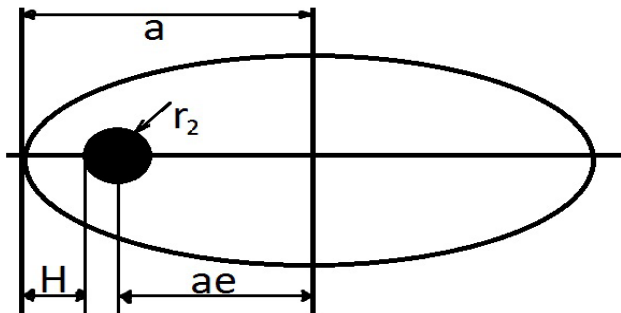


Рис. 9.2. К возможности падения КА на Землю

Интересно отметить, что характер изменения высоты пролета КА над Землей (будет эта высота увеличиваться или уменьшаться) зависит от знака  $\Delta e$  (см. (9.5)), который, в свою очередь, зависит от угла  $\alpha$ . Но угол  $\alpha$  отражает годичное движение Солнца, то есть эффект изменения высоты пролета над поверхностью Земли оказывается, условно говоря, функцией сезона – весной он один, а зимой и летом – другой.

Если не делать допущений о плоском характере движения, то возмущающее ускорение  $W$  оказалось бы отличным от нуля. Это сильно усложнило бы анализ явления, но его общий характер не изменится. Когда орбита КА ортогональна плоскости орбиты возмущающего тела, эволюция орбиты в конечном счете приводит



к падению КА на поверхность планеты. Это помогает понять, почему орбиты почти всех естественных спутников планет лежат в плоскости эклиптики. Исключение составляют спутники Урана, орбита которых почти перпендикулярна эклиптике. Оказалось, что спутники Урана являются исключением из-за значительной нецентральностью его гравитационного поля и его удаленностью от Солнца. Если бы наша Луна вздумала двигаться по орбите, перпендикулярной плоскости эклиптики, то жить бы ей довелось всего четыре с половиной года.

Практический пример реализации этой теории – вход в плотные слои атмосферы Земли КА «Луна-3», сделавшего первый снимок обратной стороны Луны в 1959 году. Его геоцентрическая орбита имела наклонение  $80^\circ$  и изначально высоту апогея 480 000 км и перигея 47 000 км. Через 11 оборотов вокруг Земли КА вошел в плотные слои атмосферы и сгорел. Другой наглядный пример торжества знаний теории являет собой американский КА «Explorer-6», время жизни которого снизилось с ожидаемых 20-ти лет до двух. Перигей его высокоэллиптической орбиты благодаря притяжению Луны каждые три месяца опускался до 250–160 км (влияние угла  $\alpha$  см. в (9.5)), что и привело к преждевременной деградации его орбиты.

## 10. Основы теории маневрирования КА

### 10.1. Характеристическая скорость

Выше рассматривалась в известном смысле непреднамеренная эволюция орбиты КА благодаря природным эффектам (сопротивление атмосферы, сжатие Земли, третье тело). Теперь рассмотрим маневры КА, то есть преднамеренные изменения его траектории. Вот примеры, когда необходимо совершать маневры:

- для сближения с другим КА, для коррекции траектории на подлете к планете назначения;
- для низколетящих, например, пилотируемых орбитальных станций необходимы периодические маневры увеличения высоты полета, монотонно уменьшающейся вследствие сопротивления атмосферы;
- маневры изменения периода обращения бывают нужны для точного прохождения над заданным пунктом земной поверхности, например, над стартующим КА, с которым предполагается сближение;
- посадочный импульс, переводящий КА на траекторию снижения, является важным частным случаем маневра.

Такие преднамеренные изменения траектории движения КА связаны с включением реактивных двигателей, изменяющих его вектор скорости. О «цене» нужного для изменения элементов орбиты импульса скорости судят по соответствующему расходу топлива. Естественно, что важен не абсолютный расход, а относительный, например, по отношению к массе всего КА. Обычно для оценки расхода топлива пользуются не массой или объемом топлива, а другой величиной, связанной с его относительным расходом взаимно однозначным соответствием – характеристической скоростью. *Характеристическая скорость*  $V_x$  – это скорость, которую КА развил бы в пространстве, лишенном полей тяготения и в отсутствии сопротивления движению или иного побочного силового воздействия. Для установления связи между расходом топлива и оставшимся запасом характеристической скорости, то есть способностью к изменению скорости, воспользуемся *формулой Циолковского*:

$$V_x = w \ln \frac{m_0}{m}, \quad (10.1)$$

где  $w$  – относительная скорость истечения продуктов сгорания топлива;  $V_x$  – текущее значение скорости КА;  $m_0$  – его начальное и  $m$  – текущее значение массы КА.

Очевидно, что относительная масса израсходованного на текущее мгновение  $T$  топлива  $m_T$  определяется выражением

$$\frac{m_T}{m_0} = \frac{m_0 - m}{m_0}. \quad (10.2)$$

С помощью равенств (10.1) и (10.2) можно найти связь, устанавливающую, сколько характеристической скорости израсходовано:

$$V_{x, \text{израсход}} = w \ln \frac{m_0}{m_0 - m_T}. \quad (10.3)$$

Вместо того, чтобы говорить о количестве израсходованного топлива  $m_T$ , это соотношение позволяет говорить о количестве «израсходованной» характеристической скорости. Чтобы вместо емкости заполненных топливных баков говорить о «запасе» характеристической скорости, необходимо преобразовать формулу (10.3) к виду

$$V_{x, \text{остаток}} = w \ln \frac{m_0 - m_T}{m_0 - m_f},$$

где  $m_f$  – начальная суммарная масса топлива, запасенного на борту КА для выполнения маневров. Этот способ оценки запаса и расхода топлива обладает большой наглядностью, так как маневрирование КА сводится к изменению его вектора скорости, и поэтому утверждение, что на КА имеется еще 200 кг топлива, говорит намного меньше, чем утверждение, что он обладает запасом характеристической скорости в 100 м/с.

## 10.2. Матрица маневра

Относительно маневрирования КА сделаем предположение, что изменение его вектора скорости, вызванное работой реактивного

двигателя, происходит за малое время  $t_n$ . «Малость»  $t_n$  понимается как малость по сравнению с некоторым характерным временем процесса, например, периодом обращения КА по орбите вокруг Земли. Малость  $t_n$  позволяет рассматривать маневр как изменение вектора скорости КА под действием мгновенного импульса. Обычно время включения двигателя измеряется секундами или десятками секунд, в то время как период обращения спутника Земли составляет не менее полутора часов. В силу сказанного из рассмотрения исключаются такие режимы, как разгон с первой до второй космической скорости или режим посадки на безатмосферную планету. Исключение подобных режимов надо признать естественным, так как они по своему характеру фактически совпадают с режимом разгона КА ракетой-носителем и их уместно изучать в курсах динамики ракет, а не динамики КА. Мгновенный характер изменения вектора скорости КА приведет к тому, что в уравнениях движения изменение скорости не будет связано с изменением координат, в рассматриваемом случае – с изменением истинной аномалии  $\nu$  или аргумента широты  $u$ .

Воспользуемся уравнениями движения КА в оскулирующих элементах, записанных в форме (6.25), где в качестве независимой переменной времени используется время  $t$ . Будем интегрировать эту систему, основываясь на предположении о малости  $t_n$  и о малости сообщаемой КА характеристической скорости по сравнению с текущей. Последнее предположение позволит использовать прием, применявшийся выше, то есть считать, что за время работы двигателя  $t_n$  оскулирующие элементы изменяются не непрерывным образом, а скачком к моменту выключения двигателя. Так, например, изменение оскулирующего элемента  $\Omega$  будет, как это следует из первого уравнения (6.25), определяться выражением

$$\Delta\Omega = \frac{r}{\sqrt{\mu p}} \frac{\sin u}{\sin i} \int_0^{t_n} W dt = \frac{r}{\sqrt{\mu p}} \frac{\sin u}{\sin i} \Delta V_w. \quad (10.4)$$

Здесь знак  $\Delta$  означает малое приращение и в соответствии со сделанными предположениями возмущающее ускорение  $W$

(точнее, ускорение, связанное с включением двигателя и возмущающее исходную траекторию) мало, как мало и время  $t_n$ . Это приводит к малому изменению  $\Delta V_w$  составляющей вектора скорости КА, определяемому очевидным образом:

$$\Delta V_w = \int_0^{t_n} W dt. \quad (10.5)$$

Малость  $\Delta V_w$  приводит к малому изменению  $\Delta \Omega$ . Как уже говорилось, при дальнейшем рассмотрении сообщенный КА управляющий импульс  $\Delta V_w$  будем предполагать мгновенным, а «ответом» КА на этот импульс будет мгновенное изменение угла  $\Omega$  на величину  $\Delta \Omega$ .

Аналогичные соображения можно привести и при рассмотрении изменения других оскулирующих элементов  $i, p, e, \omega, \tau$ , а также при рассмотрении таких включений реактивного двигателя, которые дадут отличные от нуля компоненты вектора мгновенного изменения скорости полета КА —  $\Delta V_s$  и  $\Delta V_T$ , определяемые равенствами типа (10.5) и связанные с возмущающими ускорениями  $S$  и  $T$ . Таким образом, полный вектор мгновенного изменения скорости КА  $\Delta \mathbf{V}$  с компонентами  $(\Delta V_s, \Delta V_T, \Delta V_w)$  приведет к мгновенному изменению оскулирующих элементов на величины  $\Delta \Omega, \Delta i, \Delta p, \Delta e, \Delta \omega, \Delta \tau$ . Ограничим дальнейшее рассмотрение маневров КА лишь основными геометрическими параметрами движения КА: положением плоскости орбиты  $(\Omega, i)$ , размерами и формой орбиты  $(p, e)$ .

Малость модуля вектора  $\Delta \mathbf{V}$  и приращений оскулирующих элементов  $\Delta \Omega, \Delta i, \Delta p, \Delta e$  позволяет использовать *принцип суперпозиции* и написать

$$\begin{aligned} \Delta \Omega &= A_{11} \Delta V_s + A_{12} \Delta V_T + A_{13} \Delta V_w, \\ \Delta i &= A_{21} \Delta V_s + A_{22} \Delta V_T + A_{23} \Delta V_w, \\ \Delta p &= A_{31} \Delta V_s + A_{32} \Delta V_T + A_{33} \Delta V_w, \\ \Delta e &= A_{41} \Delta V_s + A_{42} \Delta V_T + A_{43} \Delta V_w, \end{aligned} \quad (10.6)$$

причем численным коэффициентам  $A_{11}, \dots, A_{43}$  естественно дать следующие обозначения:

$$\begin{aligned} A_{11} &= \frac{\partial \Omega}{\partial V_s}, & A_{12} &= \frac{\partial \Omega}{\partial V_T}, & A_{13} &= \frac{\partial \Omega}{\partial V_w}, \\ A_{21} &= \frac{\partial i}{\partial V_s}, & A_{22} &= \frac{\partial i}{\partial V_T}, & A_{23} &= \frac{\partial i}{\partial V_w}, \\ A_{31} &= \frac{\partial p}{\partial V_s}, & A_{32} &= \frac{\partial p}{\partial V_T}, & A_{33} &= \frac{\partial p}{\partial V_w}, \\ A_{41} &= \frac{\partial e}{\partial V_s}, & A_{42} &= \frac{\partial e}{\partial V_T}, & A_{43} &= \frac{\partial e}{\partial V_w}. \end{aligned} \quad (10.7)$$

Определение величин  $\frac{\partial \Omega}{\partial V_s}, \dots$  труда не представляет. Действительно, пусть, например,  $\Delta V_s = \Delta V_T = 0$ . Тогда, считая, что символом  $\Delta$  обозначены линейные приращения функций, запишем

$$\frac{\partial \Omega}{\partial V_w} = \frac{\Delta \Omega}{\Delta V_w}, \quad \frac{\partial i}{\partial V_w} = \frac{\Delta i}{\Delta V_w}, \quad \frac{\partial p}{\partial V_w} = \frac{\Delta p}{\Delta V_w}, \quad \frac{\partial e}{\partial V_w} = \frac{\Delta e}{\Delta V_w}. \quad (10.8)$$

Но связь между приращением оскулирующего элемента и компонентой вектора  $\Delta V$  дается соотношениями типа (10.4), из которого, в частности, следует, что

$$\frac{\Delta \Omega}{\Delta V_w} = \frac{r}{\sqrt{\mu p}} \frac{\sin u}{\sin i}.$$

Тогда  $\frac{\partial \Omega}{\partial V_w}$ , как это следует из равенств (10.8) и системы уравнений движения (6.25), совпадает с соответствующим коэффициентом при возмущающем ускорении  $W$  в первом из уравнений этой системы. Совершенно аналогично могут быть найдены и все другие значения коэффициентов (10.7) линейного преобразования (10.6).

Если выписать по указанному правилу матрицу этих коэффициентов

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial \Omega}{\partial V_w} \\ 0 & 0 & \frac{\partial i}{\partial V_w} \\ 0 & \frac{\partial p}{\partial V_T} & 0 \\ \frac{\partial e}{\partial V_s} & \frac{\partial e}{\partial V_T} & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{r}{\sqrt{\mu p}} \frac{\sin u}{\sin i} \\ 0 & 0 & \frac{r}{\sqrt{\mu p}} \cos u \\ 0 & 2r\sqrt{\frac{p}{\mu}} & 0 \\ \sqrt{\frac{p}{\mu}} \sin \nu & \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left(1 + \frac{r}{p}\right) \cos \nu + \frac{er}{\sqrt{\mu p}} & 0 \end{pmatrix},$$

то она дает представление (конечно, в ограниченном объеме) о свойствах, присущих маневру КА, и поэтому ее называют *матрицей маневра*. В частности, для исходной круговой орбиты ( $e = 0$ ) матрица маневра принимает вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{r}{\sqrt{\mu p}} \frac{\sin u}{\sin i} \\ 0 & 0 & \frac{r}{\sqrt{\mu p}} \cos u \\ 0 & 2r\sqrt{\frac{p}{\mu}} & 0 \\ \sqrt{\frac{p}{\mu}} \sin \nu & 2\sqrt{\frac{p}{\mu}} \cos \nu & 0 \end{pmatrix}. \quad (10.9)$$

Изучение маневров для случая исходной круговой орбиты позволяет получить ряд наглядных аналитических выражений, способных дать оценки, справедливые и для эволюции эллиптических орбит.

### 10.3. Маневр изменения плоскости орбиты

Этот маневр связан с изменением  $\Delta\Omega$  и  $\Delta i$ , следовательно, связан с двумя первыми строками матрицы  $A$ . Следуя выражениям (10.6) и (10.7), получим с использованием матрицы (10.9)

$$\Delta\Omega = \frac{r}{\sqrt{\mu p}} \frac{\sin u}{\sin i} \Delta V_w, \quad (10.10)$$

$$\Delta i = \frac{r}{\sqrt{\mu p}} \cos u \Delta V_w. \quad (10.11)$$

Для круговой орбиты справедливы равенства

$$r = p = a, \quad e = 0, \quad V_{circ} = \sqrt{\frac{\mu}{p}}, \quad T_{rev} = 2\pi \frac{a^{3/2}}{\sqrt{\mu}}. \quad (10.12)$$

Последние два равенства, по сути, повторяют формулы (2.3) и (2.1). Воспользовавшись равенствами (10.12), придадим соотношениям (10.10) и (10.11) следующий вид:

$$\Delta\Omega = \frac{1}{V_{circ}} \frac{\sin u}{\sin i} \Delta V_w, \quad (10.13)$$

$$\Delta i = \frac{1}{V_{circ}} \cos u \Delta V_w. \quad (10.14)$$

Полученные формулы позволяют указать на два важных обстоятельства.

1. *Эффективность маневра* в сильной степени связана с координатой  $u$ , определяющей точку траектории КА, в которой ему был сообщен мгновенный импульс маневра. Так, при  $u = 0$  долгота восходящего узла  $\Omega$  не может быть изменена, в то время как наклонение орбиты  $i$  претерпит наибольшее изменение. При  $u = \pi/2$  картина будет обратной. Эти свойства имеют вполне ло-



гичное объяснение. Поскольку величина  $u$  отсчитывается от узла, то есть от экватора, то соответствующая схема маневра выглядит так, как показано на рис. 10.1.

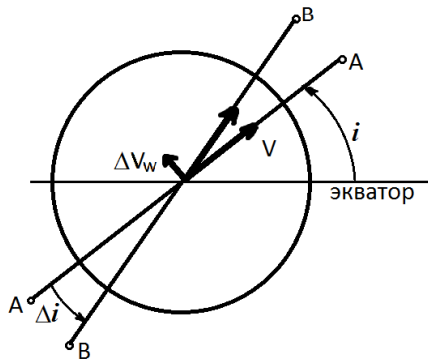


Рис. 10.1. Маневр КА над экватором при  $u = 0$

Пусть первоначальное положение плоскости орбиты задано прямой  $AA$ , проходящей через восходящий узел. Пусть также КА обладает при пересечении плоскости экватора скоростью  $V$  и в этот момент времени ему будет мгновенно сообщена дополнительная скорость  $\Delta V_w$ , перпендикулярная первоначальной плоскости орбиты. Новой плоскостью орбиты станет  $BB$ , причем, естественно, восходящий узел не сдвинется, то есть будет выполняться равенство  $\Delta\Omega = 0$ , а изменение претерпит наклонение орбиты  $i$ .

Пусть теперь импульс скорости  $\Delta V_w$  сообщается КА при  $u = \pi/2$ . Для простоты рассуждений положим  $i = \pi/2$ , то есть рассмотрим первоначальное движение КА, происходящее в плоскости меридиана. При  $u = \pi/2$  КА будет находиться над Северным полюсом (рис. 10.2). Теперь мгновенный импульс  $\Delta V_w$  переводит плоскость орбиты из положения  $AA$  в положение  $BB$ . Линия пересечения плоскостей этих орбит (линия узлов) будет проходить по прямой, соединяющей полюса Земли. Новая орбита опять лежит в плоскости меридиана, то есть новое значение угла  $i$  будет вновь  $i = \pi/2$ , то есть  $\Delta i = 0$ . Что же касается восходящего узла,

то он сдвинется на экваторе в новое положение на угол  $\Delta\Omega \neq 0$ , соответствующее новой плоскости меридиана, по которой теперь движется КА (рис. 10.2).

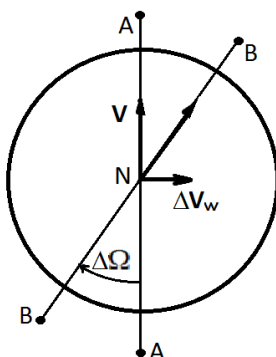


Рис. 10.2. Маневр КА над полюсом при  $u = \pi / 2$

2. Другим важным свойством рассматриваемых маневров является их чрезвычайная «дороговизна». Действительно, формула (10.14) показывает, что для изменения наклона плоскости орбиты на один радиан по меньшей мере требуется  $\Delta V_w = V_{circ}$ . Конечно, в этом случае маневр уже не является «малым» и применимость этой формулы должна вызывать справедливые сомнения, однако этот результат правильно передает тенденцию. Космодромы России не позволяют производить старты с малыми значениями наклона  $i$ . Нетрудно сообразить, что угол  $i$  не может быть меньше географической широты точки старта. Для объяснения этого факта нужно просто принять во внимание, что плоскость орбиты должна проходить через центр масс Земли. Минимально возможное наклонение орбиты можно получить, если только запустить КА вдоль параллели, то есть на восток. При отклонении направления запуска к северу или к югу наклонение орбиты будет только увеличиваться, точнее, будет увеличиваться угол между нормалью к плоскости орбиты и осью вращения Земли. Зачастую наклонение  $i$  орбиты выводимых в России искусственных спутников Земли имеет значения, близкие к одному радиану. Но тогда для перевода КА на стационарную экваториальную орбиту ( $i = 0$ ), например, для геостационарных спутников связи, требуется характеристиче-

ская скорость того же порядка, что и для вывода КА на орбиту. Это говорит о полной бесперспективности такого перевода бортовыми средствами КА. Для столь энергоемкого процесса потребуется специальный ракетный разгонный блок, а это еще одна дополнительная ступень ракеты-носителя. В этом смысле российская космонавтика находится в более тяжелых условиях, чем американская, так как самый южный космодром, доступный для запуска российских ракет, находится на широте  $46.5^\circ$ , да и то на территории сопредельного независимого государства Казахстан, в то время как американский космодром имени Кеннеди на мысе Канаверал расположен на широте  $28^\circ$ . Строящийся новый российский космодром «Восточный» в Амурской области находится на широте  $51.5^\circ$ . Если ограничиться «малыми» поворотами плоскости орбиты, то, предположив, что необходим поворот всего на один угловой градус, найдем требуемое значение:  $\Delta V_w = 140$  м/с. Что касается изменения положения восходящего узла, то формула (10.13), имеющая ту же структуру, что и формула (10.14), говорит о столь же «дорогой» цене получения сколько-нибудь значительных величин.

Формальное увеличение  $\Delta\Omega$  при  $i \rightarrow 0$  не отражает сути дела. Как уже было показано выше при обсуждении прецессии орбиты, это связано с вырождением используемой системы координат при  $i \rightarrow 0$ .

Таким образом, при маневрировании в космосе необходимо всячески избегать маневра поворота плоскости орбиты. Тем не менее существуют разные способы решения этой проблемы. Если все же надо изменить наклонение орбиты, то можно вначале дать разгонный импульс, с помощью которого КА перейдет на сильно вытянутую орбиту с высоким апогеем. В районе апогея скорость КА будет совсем невелика, и направление движения можно изменить, приложив небольшой импульс, ведь изменение наклонения будет определяться отношением текущей скорости КА в этой точке и приложенным импульсом  $\Delta V_w$  перпендикулярно плоскости орбиты. В районе перицентра этого вытянутого эллипса дается тормозной импульс, который переводит аппарат на нужную круговую орбиту уже с требуемым наклонением. Этот маневр, именуемый «межорбитальным перелетом с высоким апогеем», особенно актуален при запуске геостационарных спутников, которые первона-

чально выводятся на низкую орбиту с наклоном к экватору, равным широте космодрома, а потом переводятся на геостационарную орбиту. Использование такой биэллиптической траектории, предложенной и обоснованной А. Штернфельдом<sup>41</sup> позволяет заметно сэкономить топливо.

Другой подход, когда удалось избежать изменения наклона орбиты, был реализован при стыковке космических кораблей «Союз» и «Аполлон» в 1975 году. Если бы они стартовали одновременно, то плоскости их орбит оказались бы несовпадающими и потребный для сближения маневр энергетически невыполнимым. Поэтому «Аполлон» «ждал» до тех пор, пока проворачивающаяся под орбитой «Союза» Земля доставила космодром имени Кеннеди в плоскость орбиты «Союза», которая оставалась в первом приближении неподвижной в абсолютном пространстве, а затем был осуществлен старт «Аполлона» с наклоном  $i$ , совпадающим с наклоном плоскости орбиты «Союза». Это можно было выполнить, так как широта места старта «Аполлона» меньше наклона орбиты «Союза». При такой методике старта второго корабля процесс сближения происходил в основном без изменения положения плоскости орбиты. Рассмотрим теперь маневрирование в плоскости орбиты без ее поворотов.

#### 10.4. Маневры в плоскости орбиты

Ограничимся ниже рассмотрением только эволюции наиболее интересных параметров траектории КА, характеризующих ее размер (параметр  $p$ ) и форму (эксцентриситет  $e$ ). Третья строка матрицы маневра  $A$  в (10.9) указывает на то, что изменение  $p$

---

<sup>41</sup> Ари Абрамович Штернфельд (1905–1980). Учёный, один из пионеров современной космонавтики со сложной жизненной судьбой. Рассчитал и теоретически исследовал траектории космических полётов, определив энергетически оптимальные. Траектории с предварительным удалением от цели, позволяющие значительно экономить топливо, называют *штернфельдовскими*. Ввёл понятие космических скоростей и рассчитал их значения. Термины *космонавтика*, *первая космическая скорость*, *космодром* введены им впервые в книге «Введение в космонавтику» (1934). Его научные и научно-популярные труды были опубликованы на 40 языках в 39 странах всех пяти континентов.

связано только с компонентой  $\Delta V_T$ , причем  $\frac{\partial p}{\partial V_T} = 2r \sqrt{\frac{p}{\mu}}$ . Если учесть круговой характер орбиты (10.12), то легко убедиться, что

$$\frac{\partial p}{\partial V_T} = \frac{T_{rev}}{\pi}. \quad (10.15)$$

Для обычных КА  $T_{rev} \approx 90$  мин, и тогда

$$\frac{\partial p}{\partial V_T} \approx \frac{90 \cdot 60}{\pi} \approx 1.7 \frac{\text{км}}{\text{м/с}}. \quad (10.16)$$

Таким образом, мгновенный импульс скорости всего в 1 м/с дает увеличение параметра орбиты  $p$  на 1.7 км. Это следует признать весьма «дешевым» маневром. Действительно, импульс 140 м/с, которого хватило бы лишь для едва заметного поворота плоскости орбиты на  $1^\circ$ , дает возможность изменить высоту полета на 240 км, то есть на весьма существенную величину, если учесть, что обычно высота полета спутников и орбитальных станций составляет несколько сотен километров над поверхностью Земли.

Рассмотрим другую эволюцию орбиты – изменение ее формы (изменение  $e$ ) из круговой орбиты. Как следует из последней строчки матрицы маневра  $A$  (10.9), изменение  $e$  связано как с импульсом  $\Delta V_T$ , так и с импульсом  $\Delta V_S$ . Изучим их действие раздельно.

В случае сообщения КА *тангенциального импульса*  $\Delta V_T$  изменение  $\Delta e_T$  определяется соответствующим элементом матрицы маневра и вычисляется по формуле

$$\Delta e_T = 2 \sqrt{\frac{p}{\mu}} \cos \nu \Delta V_T. \quad (10.17)$$

Затруднение, которое возникает при попытке воспользоваться им, связано с определением истинной аномалии  $\nu$ . Как известно, этот угол отсчитывается от направления на перицентр, но у орбиты КА, движущегося по круговой орбите, такого направления нет. Выходом из положения является рассмотрение изменения орбиты как бы при двухступенчатом сообщении КА импульса маневра – сначала бесконечно малого импульса, который на сколь угодно малое время

предшествует основному, а затем второго – основного импульса. Будучи бесконечно малым, первый импульс не способен привести к конечному изменению траектории движения: круговая орбита перейдет в бесконечно близкую ей эллиптическую орбиту, а у эллиптической орбиты (независимо от величины  $e$ ) уже есть направление на перигейтр. На рис. 10.3 приведена исходная круговая орбита I и бесконечно близкая ей эллиптическая орбита II, возникшая в результате сообщения КА импульса  $\Delta V_T > 0$ .

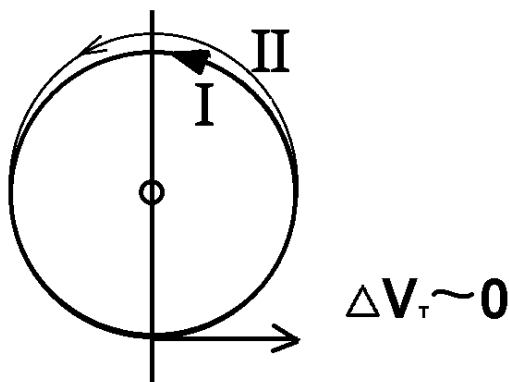


Рис. 10.3. Исходная круговая орбита I и бесконечно близкая ей эллиптическая орбита II, полученная бесконечно малым импульсом  $\Delta V_T > 0$

Из этого рисунка видно, что в этом случае точка сообщения импульса лежит на направлении на возникший перигейтр, и, следовательно, для нее  $\nu = 0$ . Но тогда с учетом равенств (10.12) и (10.17) имеем

$$\Delta e_T = \frac{2}{V_{circ}} |\Delta V_T|. \quad (10.18)$$

Знак абсолютной величины при  $\Delta V_T$  поставлен для того, чтобы если изменить направление  $\Delta V_T$  и повторить приведенные выше рассуждения, то и при  $\nu = \pi$  формула (10.18) сохранила силу.

В случае сообщения КА *нормального (радиального) импульса*  $\Delta V_s$  соответствующий элемент матрицы маневра  $A$  (10.9) равен

$\sqrt{\frac{p}{\mu}} \sin \nu$  и неопределенность для круговой орбиты угла  $\nu$  снимается аналогичными рассуждениями.

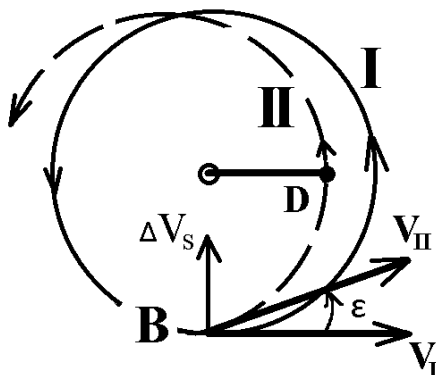


Рис. 10.4. Получение направления на перигей (точка  $D$ ) бесконечно малым импульсом  $\Delta V_s < 0$

Пусть в точке  $B$  КА сообщен бесконечно малый импульс  $\Delta V_s$ , направленный к центральному телу (рис. 10.4). Тогда вектор скорости движения КА изменит свое направление на бесконечно малый угол  $\varepsilon$ , не изменив (с точностью до бесконечно малых высших порядков) своей величины. Следовательно, не сможет измениться по сравнению с исходной большая полуось орбиты, то есть новая траектория будет сколь угодно близка к окружности II, полученной из исходной орбиты I путем поворота ее вокруг точки  $B$  на бесконечно малый угол  $\varepsilon$ . В результате возникнет направление на перигей (точка  $D$ ) и для точки  $B$  исходной орбиты следует положить  $\nu = 3\pi/2$ . Тогда

$$\Delta e_s = \frac{1}{V_{circ}} |\Delta V_s|. \quad (10.19)$$

Знак модуля появился здесь потому, что  $\sin \nu < 0$  и  $\Delta V_s < 0$ , поскольку сообщенный импульс скорости был направлен в сторону уменьшения  $r$ . Если направить  $\Delta V_s$  в другую сторону ( $\Delta V_s > 0$ ),

то формула (10.19) остается справедливой, поскольку в этом случае оказывается, что  $\nu = \pi / 2$ ,  $\Delta V_s > 0$ .

Выражения (10.18) и (10.19) не дают оснований для заключения о затратах характеристической скорости, необходимых для совершения разумных маневров КА. Это связано с малой наглядностью такого параметра, как эксцентриситет  $e$ . Чтобы придать полученным результатам наглядность и, с другой стороны, рассмотреть важный маневр, обратимся к нахождению посадочного импульса искусственного спутника Земли.

### 10.5. Маневр снижения

Поскольку Земля обладает плотной атмосферой, то полное торможение КА вовсе не обязательно. Достаточно сравнительно малым посадочным импульсом «столкнуть» КА с орбиты, чтобы он в какой-то части своей эллиптической траектории хотя бы слегка погрузился в плотную атмосферу. Дальнейшее торможение будет осуществляться уже за счет сопротивления атмосферы. Понятие «плотной» атмосферы несколько неопределённо. Примем, что высотой полета над поверхностью Земли, соответствующей плотной атмосфере, является такая высота, которая приводит к полному торможению КА на участке траектории, меньшем одного полного оборота вокруг Земли. Практика полетов показывает, что верхняя граница плотной атмосферы имеет порядок 100 км над поверхностью Земли. Поэтому в своих расчетах будем полагать, что снижение некоторого участка орбиты до высот, меньших 100 км, означает посадку КА. Следует отметить, что вход в плотную атмосферу должен осуществляться полого (угол входа – единицы углового градуса), так как иначе аэродинамическое торможение будет излишне энергичным и в случае пилотируемых полетов возникающая перегрузка может привести к гибели космонавтов. Для беспилотных КА величина перегрузки не так критична, но «крутой» вход означает, что КА был сообщен излишне большой посадочный импульс, а это свидетельствует об излишних затратах характеристической скорости.

Пусть КА движется вокруг Земли по круговой орбите. Путем сообщения ему посадочного импульса он переводится на эллиптическую орбиту с нужной величиной условного перигея. *Условным*



*перигеем* называется такой перигей, который возник бы у орбиты КА в случае отсутствия у Земли атмосферы. Очевидно, что условный перигей должен быть достаточно низким над поверхностью Земли, чтобы обеспечить эффективное торможение КА в атмосфере. Его потребная величина естественным образом связана с введенной выше границей плотной атмосферы. Легко сообразить, что, в каком бы направлении ни сообщить КА импульс  $\Delta \mathbf{V}$ , на его новой траектории обязательно будет существовать участок, который располагается ниже исходной круговой орбиты. Следовательно, теоретически КА можно снизить импульсом произвольного направления. Единственным исключением из этого будет случай, когда КА сообщается импульс чистого разгона ( $\Delta V_T$ ). Тогда все точки новой орбиты будут лежать выше точек старой, за исключением точки, в которой КА был сообщен мгновенный импульс приращения скорости. Эта точка будет общей для обеих орбит. Следовательно, перигей новой орбиты будет иметь ту же величину, что и радиус исходной, то есть спуск окажется невозможным.

Как правило, посадочные импульсы являются тормозными. Так осуществлялась, например, посадка КА «Союз». Однако это не единственно возможный случай. Рассмотрим более подробно импульс, направленный против вектора скорости КА. Это так называемое *чистое торможение*, в отличие от *чистого прижатия*, когда импульс дается в радиальном направлении. В этом случае КА сообщается только импульс  $\Delta V_T < 0$ , который, как показывает матрица маневра  $A$  (10.9), приведет к изменению как  $p$ , так и  $e$ . Численные значения соответствующих элементов матрицы  $A$  находим из равенства (10.9). Ищем изменение высоты полета в области условного перигея. Для него  $\nu = 0$ , и уравнение (1.19) дает

$$r = r_\pi = \frac{p}{1+e}.$$

Пусть для совершения посадки необходимо снижение высоты полета над Землей на величину  $\Delta H$ . Тогда изменение  $r$  в точке перигея  $\Delta r_\pi = \Delta H$  или

$$\Delta H = \Delta r_\pi = \Delta \left( \frac{p}{1+e} \right) = \Delta p - p \Delta e. \quad (10.20)$$

Последнее равенство получено в линейном приближении, причем учтено, что для исходной орбиты  $e = 0$ . Допустимость линейного приближения проистекает из того, что обычные высоты полета КА над Землей составляют сотни километров, в то время как радиус Земли составляет около 6400 км.

Сравним оба слагаемых правой части равенства (10.20). Первое из них равно  $\frac{T_{rev}}{\pi} \Delta V_T$  (см. (10.15)), а второе –  $\frac{2r}{V_{circ}} |\Delta V_T|$

(см. (10.18)). Поскольку  $T_{circ} = \frac{2\pi r}{V_{circ}}$ , то очевидно, что они численно

совпадают. Из этого следует, что изменения высоты полета в области перигея вследствие изменения эксцентриситета  $e$  или параметра  $p$  имеют для обычных орбит один порядок (и совпадают для круговых орбит). Но тогда можно заключить, что затраты характеристической скорости, связанные с изменением эксцентриситета  $e$ , столь же относительно «дешевы», что и затраты для изменения  $p$ , и маневрирование за счет изменения  $e$  является вполне разумным.

Если перейти к численной оценке затрат характеристической скорости на маневр снижения перигея за счет торможения скорости полета КА, то произведенная выше оценка (10.16) и полученный только что вывод говорят о том, что при  $\Delta V_T < 0$  (торможение)

$$\Delta H \approx -3.4 |\Delta V_T| \text{ км}, \quad (10.21)$$

если  $\Delta V_T$  измеряется в м/с.

Полученные выражения позволяют оценить потребную для посадки величину затрат характеристической скорости. Пусть исходная высота орбиты имеет порядок 400 км. Для получения условного перигея, меньшего, чем 100 км (то есть лежащего внутри плотной атмосферы), необходимо иметь  $\Delta H \geq 300$  км. В случае чистого торможения это даст в соответствии с формулой (10.21)  $|\Delta V_T| \geq 90$  м/с. Практика полетов подтверждает, что посадочные импульсы имеют порядок 100 м/с.

Возвращаясь вновь к вопросу о рассмотренных выше маневрах в плоскости орбиты, можно утверждать, что сравнительно с маневрами поворота плоскости орбиты они несравненно более «де-

шевые». Поэтому стратегия маневрирования в космосе должна сводиться к тому, чтобы по возможности избегать или сводить к минимуму изменения положения плоскости орбиты КА.

Замена маневра поворота плоскости орбиты маневром в плоскости орбиты возможна в том, например, случае, когда этот поворот необходим для изменения положения траектории КА относительно какого-либо географического пункта на поверхности Земли. Если при этом необходимо изменить долготу, то можно воспользоваться тем, что плоскость орбиты КА неподвижна (с точностью до таких эффектов, как прецессия, которые легко учитываются) в абсолютном пространстве, в то время как Земля совершает суточное вращение. Изменив период обращения КА, можно добиться того, что новая траектория КА пройдет восточнее или западнее прежней в районе нужного географического пункта. Этот эффект будет тем значительнее, чем раньше будет произведена коррекция периода обращения и чем более энергичной будет она.

## 10.6. Коррекция периода обращения

Воспользуемся выражением (2.1), которое свидетельствует о том, что для изменения  $T_{rev}$  следует изменить большую полуось орбиты  $a$ . Учтя зависимость последней только от энергии КА, сразу приходим к выводу, что для изменения  $a$  следует воспользоваться импульсом  $\Delta V_T$ , поскольку он целиком суммируется с орбитальной скоростью КА. Ограничиваясь, как и прежде, линейным приближением, запишем

$$\frac{\partial T_{rev}}{\partial V_T} = \frac{3\pi}{\sqrt{\mu}} \sqrt{a} \frac{\partial a}{\partial V_T}.$$

Используем выражение  $p = a(1 - e^2)$ , и тогда

$$\frac{\partial p}{\partial V_T} = (1 - e^2) \frac{\partial a}{\partial V_T} - 2ea \frac{\partial e}{\partial V_T}.$$

Для случая круговой орбиты ( $e = 0$ ) имеем

$$\frac{\partial p}{\partial V_T} = \frac{\partial a}{\partial V_T}$$

или с учетом равенств (10.12) и (10.15) получаем цепочку

$$\frac{\partial T_{rev}}{\partial V_T} = 3 \sqrt{\frac{a}{\mu}} T_{rev} = \frac{3T_{rev}}{V_{circ}}.$$

Оценим величину полученного выражения численно. Взяв  $V_{circ} = 7900$  км/с, а  $T_{rev} = 90$  мин, получим, что импульс  $\Delta V_T = 10$  м/с даст изменение  $T_{rev}$  на величину около 20 с. Смещение вследствие вращения Земли точки экватора за 20 с имеет порядок 10 км. Полученная величина дает смещение орбиты относительно некоторого географического пункта на экваторе за один виток КА. За сутки (16 витков) это смещение достигает величины 160 км. Приведенный пример показывает, что сравнительно слабыми импульсами можно погасить ошибки выведения КА на орбиту. Этот прием применяется, в частности, для того, чтобы добиться точного прохождения плоскости орбиты КА через точку старта второго КА, если в дальнейшем предполагается их стыковка.

## 11. Коррекция межпланетных траекторий

Коррекция траектории является частным случаем маневра. Главное отличие ее от маневра в широком смысле слова сводится к тому, что ее назначение – незначительное исправление фактической траектории КА с целью выполнения поставленной перед КА задачи, в то время как маневр приводит, вообще говоря, к существенному изменению режима полета КА. В рассмотренных выше случаях к первому типу можно отнести коррекцию периода обращения для компенсации ошибок выведения КА ракетой-носителем, ко второму – маневр перехода от орбитального полета к посадке КА.

В настоящем разделе будет рассмотрена только коррекция траектории движения КА с целью получения нужной орбиты в районе планеты назначения (например, попадание на планету, пролет на заданном расстоянии от нее), имеющая целью исправление ошибок выведения. Потребные точности движения в окрестности планеты назначения могут быть весьма высоки. Так, чтобы обратить подлетающий к Марсу КА в его спутник с использованием атмосферы планеты для торможения, точность выдерживания номинальной траектории должна иметь порядок десятков километров. В то же время ошибка в скорости в момент окончания работы двигателя ракеты-носителя у Земли в 1 м/с (при величине ее модуля порядка второй космической скорости – 11 000 м/с) даст промах у Марса порядка нескольких десятков *тысяч* километров. Этот пример и практика межпланетных перелетов показывают практическую неизбежность коррекции межпланетных траекторий.

Поскольку бортовые запасы рабочего тела для корректирующего реактивного двигателя всегда ограничены, то величина корректирующих импульсов не может быть большой, а следовательно, допустимо рассматривать всю задачу в линейном приближении. Промах в десятки тысяч километров, о котором говорилось выше и который надо скорректировать, можно все же считать «малым», поскольку протяженность самой траектории имеет порядок сотен миллионов километров.

Расстояния, с которыми приходится иметь дело при коррекции траектории вблизи планеты, действительно «малы» по сравнению с

характерными размерами гелиоцентрических расстояний, но они перестают быть «малыми», если рассматривать их в планетоцентрической системе координат. Фактически это означает, что изменение гравитационного поля Солнца в рассматриваемой окрестности планеты малосущественно, в то время как гравитационное поле самой планеты будет в той же области изменяться сильно. Решение задачи заметно упростится, если можно не учитывать гравитационное поле планеты. Для осуществления намеченного подхода надо прибегнуть к одному искусственному приему.

### 11.1. Движение КА в окрестности планеты назначения

Рассмотрим движение КА в непосредственной близости планеты назначения, например, внутри ее сферы действия (на рис. 11.1 эта сфера показана штриховой окружностью).

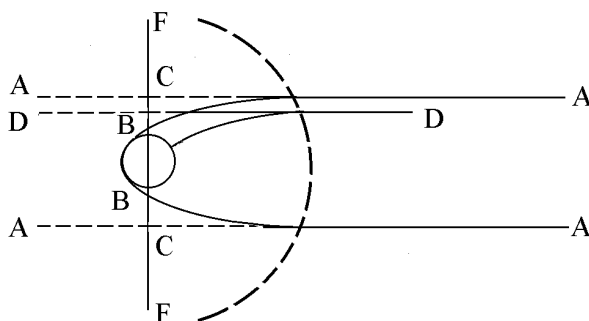


Рис. 11.1. Движение КА внутри сферы действия планеты назначения

Пусть траектории, которые имел бы КА в случае отсутствия планеты, представлены линиями  $AA$ . Здесь рассмотрен сравнительно «узкий» и «мало протяженный» пучок траекторий, который в силу этого условия можно рассматривать как совокупность взаимно параллельных отрезков прямых. Если учесть гравитационное поле планеты, то заметное влияние этого поля на конфигурацию траектории начнет проявлять себя после пересечения КА границ соответствующей грависферы, например сферы действия. На рис. 11.1 показаны истинные траектории, по которым будет двигаться КА, в виде линий  $AB$ . Причем эти траектории выбраны на рисунке такими, которые отделяют совокупность «попадающих

траекторий» от совокупности «пролетных». Все траектории, которые лежат внутри трубки траектории, ограниченной линиями  $AB$ , пересекутся с поверхностью планеты, то есть «попадут» в нее.

Очевидно, каждая реальная траектория сближения с планетой состоит во взаимно однозначном соответствии с некоторой невозмущенной траекторией  $DD$ , полученной без учета гравитационного поля планеты. Идея почерпнута из ядерной физики при рассмотрении движения заряженной частицы около ядра<sup>42</sup>. Используя это обстоятельство, можно ввести в рассмотрение *картинную плоскость*  $FF$ , идущую через центр планеты и нормальную к пучку невозмущенных планетой траекторий. Граница трубки, отделяющей множество невозмущенных попадающих траекторий от остальных (совокупность траекторий  $AA$  на рис. 11.1), пересекает картинную плоскость  $FF$  в точках  $C$ . Эти точки в совокупности дадут границу «яблочка» плоской «мишени» (картинную плоскость), в которое следует попасть при движении по невозмущенной траектории, чтобы реальная траектория пересекла поверхность планеты. Очевидно, что в проекции на картинную плоскость можно отобразить и другие геометрические особенности реальных траекторий, которые могут нас интересовать: попадание в определенную область планеты, пролет мимо нее с заданными величиной и положением перицентра и так далее.

Искусственный прием, о котором говорилось выше, сводится к тому, что вместо рассмотрения реальных траекторий рассматриваются фиктивные, построенные без учета гравитационного поля планеты, но зато вместо задачи о положении реальной траектории относительно реальной планеты решается задача о положении в картинной плоскости точки пересечения фиктивной траектории с этой плоскостью. По сути, этот прием имеет целью подобрать конечные параметры задачи таким образом, чтобы она могла быть

---

<sup>42</sup> Платонов А.К. О построении движений в баллистике и мехатронике // Прикладная небесная механика и управление движением: сб. статей, посвященный 90-летию со дня рождения Д.Е. Охотимского / сост.: Т.М. Энеев, М.Ю. Овчинников, А.Р. Голиков. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, 2010. С. 127–222. Эту книгу рекомендую тем, кто интересуется «как это все начиналось» (все – это зарождение практической космической баллистики в нашей стране). Есть ее Интернет-версия: <http://keldysh.ru/memory/okhotsimsky/>

сформулирована в линейной постановке. Учет локальных нелинейных эффектов (притяжения КА планетой) должен в этом случае производиться отдельно, например, с помощью нелинейных кеплеровых соотношений, дающих хорошее приближение к истинному движению внутри сферы влияния. При этом начальные параметры такого планетоцентрического движения будут совпадать с соответствующими параметрами невозмущенного планетой гелиоцентрического движения на границе сферы действия (или иной подходящей грависферы). Таким образом, штриховая окружность на рис. 11.1 будет служить местом «склейки» гелиоцентрического и планетоцентрического движений.

## 11.2. Гелиоцентрический участок номинальной траектории движения КА

Рассмотрим гелиоцентрический участок некоторой номинальной траектории движения КА, идущей через центр  $O$  планеты, которую будем рассматривать как точку, не имеющую массы (рис. 11.2). Пусть на этой траектории будет дана другая точка  $B$ , находящаяся на расстоянии  $s$ , взятом вдоль номинальной траектории, от точки начала полета к планете, соответствующей концу активного участка последней ступени ракеты-носителя. Очевидно, что каждому расстоянию  $s$  соответствует свое время полета  $t$ . Построим в точке  $B$  систему ортогональных координат  $Bxyz$ , должным образом расположенных относительно звезд. Такая система удобна с практической точки зрения, поскольку ориентация КА перед запуском корректирующего ракетного двигателя обычно производится путем использования звезд (в том числе Солнца) в качестве опорных ориентиров.

Пусть в точке  $B$  КА сообщен импульс скорости  $\Delta \mathbf{V}$ . Чтобы наиболее полно и наглядно оценить свойства коррекции, рассмотрим все множество возможных единичных импульсов  $|\Delta \mathbf{V}| = 1$ . Их совокупность определит так называемую *сферу единичных импульсов* с центром в точке  $B$ . Она показана на рис. 11.2 штриховой линией. Каждому импульсу (каждой точке этой сферы) будет соответствовать своя траектория последующего движения КА, определяемая без учета гравитационного поля планеты назначения. Рассмотрим множество точек этих траекторий, соответствующих



времени  $t_k$  достижения точки  $O$  при движении по номинальной траектории. Введем в точке  $O$  систему ортогональных координат  $O\xi\eta\zeta$ , направив ось  $O\zeta$  по направлению вектора скорости невозмущенного движения, взяв оси  $O\xi$  и  $O\eta$  так, чтобы образовалась правая система координат. Очевидно, что картинная плоскость будет совпадать с плоскостью  $O\xi\eta$ .

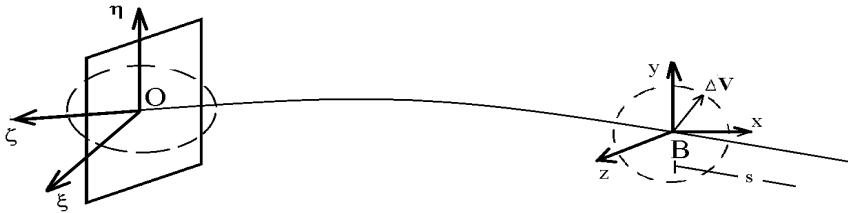


Рис. 11.2. Гелиоцентрический участок некоторой номинальной траектории движения КА, идущей через центр планеты  $O$

В случае движения по номинальной траектории (без сообщения импульса  $\Delta\mathbf{V}$ ) к моменту времени  $t_k$  координаты КА будут следующими:  $\xi = \eta = \zeta = 0$ . Если КА сообщен импульс  $\Delta\mathbf{V}$  с компонентами  $V_x, V_y, V_z$ , то к моменту времени  $t_k$  координаты КА будут иметь иное значение. Предполагая малость импульса скорости и допустимость рассмотрения задачи в линейной постановке, запишем значения координат  $\xi, \eta, \zeta$  в момент времени  $t_k$  в виде

$$\begin{aligned}\xi &= \frac{\partial \xi}{\partial V_x} \Delta V_x + \frac{\partial \xi}{\partial V_y} \Delta V_y + \frac{\partial \xi}{\partial V_z} \Delta V_z, \\ \eta &= \frac{\partial \eta}{\partial V_x} \Delta V_x + \frac{\partial \eta}{\partial V_y} \Delta V_y + \frac{\partial \eta}{\partial V_z} \Delta V_z, \\ \zeta &= \frac{\partial \zeta}{\partial V_x} \Delta V_x + \frac{\partial \zeta}{\partial V_y} \Delta V_y + \frac{\partial \zeta}{\partial V_z} \Delta V_z.\end{aligned}\tag{11.1}$$

Здесь пока не делается предположение о том, что  $|\Delta\mathbf{V}| = 1$ . Прежде чем идти дальше, следует обратить внимание на следующее принципиальное обстоятельство. Как известно, траектория КА определяется шестью параметрами. Их можно задавать различным образом

– в виде шести оскулирующих элементов для  $t = t_k$  или, например, шести величин  $\xi, \eta, \zeta, \dot{\xi}, \dot{\eta}, \dot{\zeta}$ , соответствующих  $t = t_k$ , или каким-либо иным способом. Коррекция траектории производится путем сообщения КА некоторого импульса  $\Delta \mathbf{V}$ , то есть воздействия, имеющего всего три независимые компоненты. Поэтому у новой траектории, полученной после сообщения КА импульса скорости  $\Delta \mathbf{V}$ , можно целенаправленно изменить лишь три координаты из шести. Система (11.1) показывает, что в рассматриваемом случае предполагается целенаправленное изменение  $\xi, \eta, \zeta$ , но тогда  $\dot{\xi}, \dot{\eta}, \dot{\zeta}$  будут изменяться некоторым неконтролируемым образом. Это означает, что, выбрав должным образом  $\Delta \mathbf{V}$ , можно получить заранее заданные координаты  $\xi = \xi_k, \eta = \eta_k, \zeta = \zeta_k$  на момент времени  $t = t_k$ , но нельзя, вообще говоря, одновременно удовлетворить требованию о величине вектора скорости КА в этот момент времени.

Если вернуться к случаю сообщения КА единичного импульса скорости  $|\Delta \mathbf{V}|=1$ , то систему (11.1) можно рассматривать как аффинное преобразование сферы  $(\Delta V_x)^2 + (\Delta V_y)^2 + (\Delta V_z)^2 = 1$ . Как известно, аффинное преобразование, вообще говоря, переводит сферу в эллипсоид. Следовательно, точки траектории КА для  $t = t_k$  лягут на поверхность эллипсоида с центром в точке  $O$ . Этот эллипсоид, полученный преобразованием сферы единичных импульсов, называют *эллипсоидом влияния*. На рис. 11.2 он показан штриховой линией в окрестности точки  $O$ .

Матрицу аффинного преобразования (11.1) естественно назвать *матрицей коррекции*

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial V_x} & \frac{\partial \xi}{\partial V_y} & \frac{\partial \xi}{\partial V_z} \\ \frac{\partial \eta}{\partial V_x} & \frac{\partial \eta}{\partial V_y} & \frac{\partial \eta}{\partial V_z} \\ \frac{\partial \zeta}{\partial V_x} & \frac{\partial \zeta}{\partial V_y} & \frac{\partial \zeta}{\partial V_z} \end{pmatrix}. \quad (11.2)$$

Выписанная матрица является функцией положения центра  $B$  сферы единичных импульсов на траектории. Это можно записать как  $A(s)$  или  $A(t)$ , где  $t$  – время движения по орбите перелета. Очевидная зависимость матрицы маневра  $A$  от положения точки коррекции на орбите приводит к задаче об оптимальном положении точек коррекции  $B$  с позиции минимизации расходов топлива на коррекцию. Чтобы решать эту задачу, рассмотрим свойства матрицы коррекции подробнее.

### 11.3. Свойства матрицы коррекции

Пусть определитель матрицы  $A$  отличен от нуля. При аффинном преобразовании любая прямая переходит в прямую, а любая плоскость – в плоскость. Рассмотрим некоторые замечательные направления (прямые) и плоскости, связанные со сферой единичных импульсов и эллипсоидом влияния.

Среди направлений единичных импульсов  $\Delta \mathbf{V}$  будет в силу невырожденности преобразования (11.1) обязательно существовать такое, которое даст  $\xi = 0$ ,  $\eta = 0$ ,  $\zeta \neq 0$ . Строго говоря, это будут два направления, лежащие на одной прямой и соответствующие  $\zeta > 0$  и  $\zeta < 0$ . Мы не будем их различать, а будем говорить об одном направлении, имея в виду ту общую прямую, которой оба соответствуют. Указанному направлению единичных импульсов принято присваивать наименование *нуль-направление*, имея в виду, что такие импульсы не изменяют положение точки пересечения траектории КА с картинной плоскостью. В частности, номинальная траектория, которая пересекает картинную плоскость при  $\xi = 0$ ,  $\eta = 0$ , после сообщения КА импульса вдоль нуль-направления остается номинальной.

Примем нуль-направление за одну из осей новой ортогональной системы координат, имеющей начало в центре сферы единичных импульсов, и обозначим ее  $Bz'$ . Любые другие направления вектора  $\Delta \mathbf{V}$  с модулем, равным единице, дадут на ось  $Bz'$  проекции, меньшие единицы. Это означает, что соответствующие точки на эллипсоиде влияния будут иметь координаты  $|\zeta| < \zeta_1$ , где  $\zeta_1$  – абсолютная величина такой координаты при сообщении КА импульса точно в направлении  $Bz'$ . Но тогда оказывается, что вдоль

оси  $O\xi$  расположена одна из главных центральных осей эллипсоида влияния. Дальнейшим следствием этого является расположение двух других его главных осей в плоскости, перпендикулярной  $O\xi$  и проходящей через центр эллипсоида, то есть в плоскости  $O\xi\eta$ . Обозначим соответствующие направления через  $O\xi'$  и  $O\eta'$ . Тогда оси планетоцентрической системы координат  $O\xi'\eta'\zeta'$  будут расположены вдоль главных центральных осей эллипсоида влияния. Пусть при аффинном преобразовании системе таких осей соответствует ортогональная же система осей на единичной сфере, преобразованием которой получен эллипсоид. Обозначим эту систему координат  $Bx'y'z'$ . Тогда плоскость  $Bx'y'$ , перпендикулярная нуль-направлению  $Bz'$ , будет соответствовать картинной плоскости  $O\xi\eta$ , или, что то же самое,  $O\xi'\eta'$ . Плоскость  $Bx'y'$  называют *плоскостью оптимальной коррекции*. Это наименование связано с тем, что если вектор импульса коррекции  $\Delta V$  расположен точно в этой плоскости, то соответствующие точки эллипсоида влияния расположены точно в картинной плоскости, и, следовательно, энергетические затраты КА при коррекции идут только на «боковые» в картинной плоскости смещения траектории. Если целью коррекции является смещение траектории в боковом направлении (например, получение траектории, проходящей через заданную точку картинной плоскости), то это будет наиболее экономичный вид коррекционного маневра. Добавление любой составляющей вдоль нуль-направления потребует соответствующих затрат характеристической скорости, но никак не скажется на положении точки пересечения траектории с картинной плоскостью. На практике<sup>42</sup> процедура коррекции сложнее.

Приведенные здесь соображения могут вызвать впечатление, что корректирующие импульсы вдоль нуль-направления всегда нежелательны. Однако это не так. Импульс, направленный вдоль оси  $Bz'$ , изменяет координату  $\zeta$  КА – расстояние от КА до картинной плоскости, то есть центра планеты, к моменту времени  $t = t_k$  номинального пересечения картинной плоскости КА. Следовательно, импульс вдоль нуль-направления корректирует время достижения заданной точки в окрестности планеты. Коррекция времени прилета к планете иногда чрезвычайно важна. Пусть,

например, требуется совершить посадку на поверхность Венеры. Вследствие высоких температур, свойственных ее атмосфере, время жизни научной аппаратуры определяется временем ее нагрева до недопустимой величины. Опыт показывает, что это время имеет порядок одного часа. Следовательно, процесс спуска в атмосфере Венеры надо было наблюдать во время первых миссий непосредственно. Такие наблюдения возможны тогда, когда Венера находится над горизонтом Земли в точке расположения пункта дальней космической связи (в более поздних миссиях использовался для передачи информации на Землю в реальном времени спутник-ретранслятор, обращающийся по орбите вокруг Венеры). Поэтому, если траекторные наблюдения говорят о том, что КА достигает планеты, когда она будет под горизонтом при наблюдении с Земли, коррекция времени прилета к планете становится обязательной.

В свете сказанного становится понятным, почему в теории коррекционных маневров обычно различают два основных типа коррекций – *двухпараметрическую* и *трехпараметрическую*. В первом случае корректируют лишь положение точки пересечения траектории КА и картинной плоскости, а во втором – корректируют и время этого пересечения.

#### **11.4. Двухпараметрическая коррекция**

Рассмотрим далее двухпараметрическую коррекцию. В этом случае изучению подлежит сечение сферы единичных импульсов плоскостью оптимальной коррекции и сечение эллипсоида влияния картинной плоскостью. Эти сечения образуют взаимно связанные окружность единичных импульсов в плоскости оптимальной коррекции и эллипс влияния в картинной плоскости. Обе эти фигуры приведены на рис. 11.3.

Вытянутость эллипса влияния говорит о неравноценности (по затратам характеристической скорости) направлений в картинной плоскости. Пусть фактическая траектория КА идет через точку  $C$  картинной плоскости вместо того, чтобы идти через начало координат. Вектор отклонения  $OC$  пересекает эллипс влияния в точке  $D$ . Точке  $D$  соответствует точка  $E$  на окружности единичных импульсов. Следовательно, для получения вектора коррекции, равного  $OC$ , следует сообщить КА импульс в направлении  $BE$ .

Что касается величины корректирующего импульса  $\Delta \mathbf{V}_k$ , то вследствие линейности преобразования он будет определяться цепочкой равенств

$$|\Delta \mathbf{V}_k| = |BF| = \frac{OC}{OD} BE = \frac{OC}{OD} \cdot 1. \quad (11.3)$$

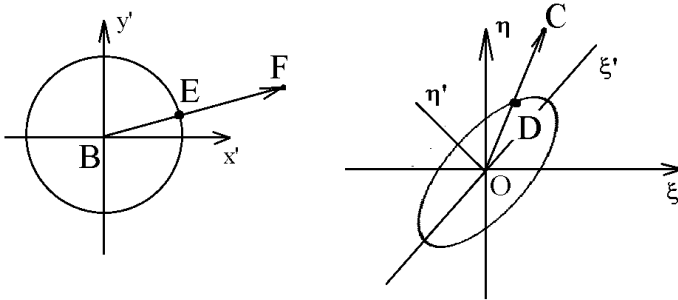


Рис. 11.3. Окружность единичных импульсов в плоскости оптимальной коррекции и эллипс влияния в картинной плоскости

Обратная пропорциональность  $|\Delta \mathbf{V}_k|$  величине  $OD$  и говорит о неравноценности направлений в картинной плоскости. Очевидно, что наименее энергоемки коррекции, близкие по направлению к оси  $O\xi'$ , и наиболее энергоемки – близкие к  $O\eta'$ . Эти рассуждения позволяют строить общую стратегию коррекций межпланетных траекторий.

До настоящего времени всегда рассматривался случай, когда положение точки коррекции на межпланетной траектории (координата  $s$ ) задано. Следует, однако, изучить вопрос о наилучшем (оптимальном) значении координаты  $s$ , где следует выполнять коррекцию.

### 11.5. Об оптимальном положении точки коррекции на траектории

В качестве самой общей тенденции можно указать на то, что с увеличением длительности измерений растет точность определения фактической траектории КА, и поэтому момент коррекции, а следовательно, и расстояние  $s$  от отправной точки межпланетного

полета следует делать как можно больше. С другой стороны, чем больше  $s$ , а следовательно, чем ближе КА к планете назначения, тем большую характеристическую скорость следует затратить на выполнение одного и того же маневра. Учет этих противоречивых требований приводит к необходимости поиска оптимума значения  $s$ , исходя из соображений, связанных с точностью траекторных измерений и с точностью исполнения маневра коррекции. Эту сторону проблемы оставим здесь без внимания. Будем предполагать, что фактическая траектория КА известна всегда с нужной точностью и необходимая точность исполнения коррекции всегда обеспечена. Это позволит рассмотреть проблему коррекции как задачу небесной механики, не осложненную вопросами точности измерений и исполнения коррекции.

Построим эллипсы влияния для различных положений КА на номинальной траектории, соответствующих постоянно нарастающей длительности полета. Они строятся для номинальной траектории (вычисляются до начала полета), но ими можно пользоваться при управлении полетом, поскольку фактическая траектория близка номинальной. Типичная диаграмма такого рода приведена на рис. 11.4 (для полета к Марсу), где изображены эллипсы влияния для одних суток полета, а затем с интервалом в один месяц<sup>42</sup>.

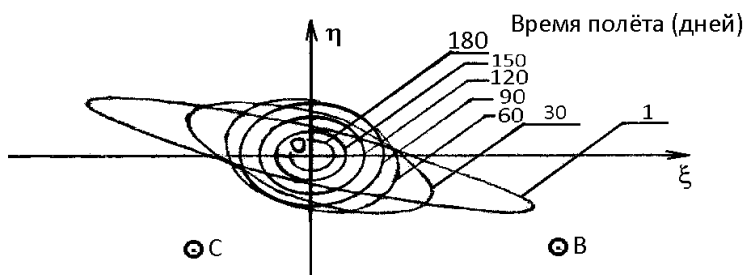


Рис. 11.4. Эллипсы влияния для разных положений КА на номинальной траектории, соответствующих нарастающей длительности полета

Из этого рисунка видно, что если, например, фактическая траектория оказалась такой, что она характеризуется точкой  $B$  (промахом  $OB$ ), то коррекцию надо проводить как можно раньше, а если точкой  $C$ , то ее следует приурочить ко второму или третьему месяцу полета. Та же диаграмма говорит о том, что «затягива-

ние» коррекции с третьего месяца полета увеличит потребные запасы топлива примерно в три раза. Этот пример иллюстрирует одну из сторон оперативного принятия решений о необходимых маневрах КА при управлении полетом.

Приведенный анализ был выполнен в предположении, что ранг матрицы маневра  $A$  (11.2) был равен трем. Возможны ситуации, когда ранг матрицы понижается до двух.

## 11.6. Вырождение матрицы маневра

Рассмотрим возникающие при вырождении аффинного преобразования (11.1) особенности выполнения коррекции траектории. Как известно, в случае вырождения аффинного преобразования рассматриваемого ранга трехмерное пространство отображается на плоскость и, следовательно, сфера единичных импульсов переходит не в эллипсоид влияния, а в соответствующую плоскую фигуру (формально величина одной из главных осей эллипсоида обратится в нуль). В этом случае сечение эллипсоида влияния картинной плоскостью даст, вообще говоря, не эллипс влияния, а отрезок прямой (формально одна из полуосей эллипса обратится в нуль). Но тогда и проведение коррекции в направлении, перпендикулярном этому отрезку прямой, станет принципиально невозможным, потому как величина, аналогичная  $OD$ , в формуле (11.3) обратится в нуль. Таким образом, при понижении ранга матрицы маневра возникают ситуации, когда осуществление произвольной коррекции становится невозможным. Проиллюстрируем сказанное примером.

Пусть необходимо скорректировать траекторию КА, движущегося по круговой гелиоцентрической орбите и находящегося в точке  $B$ , в картинной плоскости, проходящей через точку  $O$ . Пусть угловое расстояние между точками  $B$  и  $O$  равно  $\pi$  (см. рис. 11.5). Построим в точке  $B$  сферу единичных импульсов, взяв за три взаимно ортогональных направления нормаль, касательную и бинормаль орбиты, вдоль которых направлены проекции  $\Delta V_s$ ,  $\Delta V_T$ ,  $\Delta V_w$ . Совершенно очевидно, что любые  $\Delta V$ , лежащие в плоскости орбиты – в плоскости, определяемой  $\Delta V_s$ ,  $\Delta V_T$ , – могут изменить траекторию движения КА только без изменения положения этой плоскости. В картинной плоскости это дает смещение вдоль оси  $O\xi$ , а учитывая, что модуль вектора  $\Delta V$  ограничен



( $|\Delta \mathbf{V}| = 1$ ), то любые  $\Delta \mathbf{V}$ , имеющие составляющую  $\Delta V_w = 0$ , дадут положение точек пересечения соответствующего пучка траекторий с картинной плоскостью в пределах некоторого отрезка в картинной плоскости.

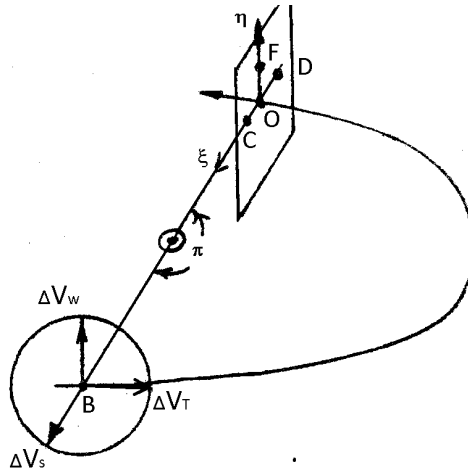


Рис. 11.5. Пример ситуации, когда при понижении ранга матрицы маневра осуществление произвольной коррекции становится невозможным

Предположим, что необходимая коррекция такова, что исправленная траектория должна пройти через точку  $F$ . Только что было показано, что этого достичь нельзя никакими импульсами, лежащими в плоскости орбиты. Рассмотрим поэтому последнюю оставшуюся возможность – сообщение КА импульса  $\Delta V_w$  в направлении бинормали. Две первые строки матрицы маневра (10.9) указывают, что произойдет поворот плоскости орбиты.

Рассмотренные при обсуждении формул (10.13) и (10.14) примеры говорят далее о том, что точка сообщения импульса  $\Delta V_w$  лежит на линии узлов – прямой, образованной пересечением плоскостей исходной и новой орбиты. Но тогда по аналогии со сказанным в рассматриваемом случае положения исходной  $I$  и новой  $II$  плоскостей орбит будет таким, как это изображено на рис. 11.6.

Поворот плоскости орбиты на угол  $\Delta \alpha$  вокруг линии узлов  $BO$  не может дать смещение точки пересечения орбиты с картин-

ной плоскостью в направлении оси  $O\eta$ . Поэтому никаким импульсом, сообщенном КА в точке  $B$ , нельзя получить смещение траектории вдоль оси  $O\eta$ , в частности, получить траекторию, идущую через точку  $E$ . Сказанное связано с вырождением эллипса влияния в отрезок  $CD$ . Вырождение матрицы (11.2) есть следствие того, что все коэффициенты преобразования (11.1), стоящие во второй строке, обратились в нули.

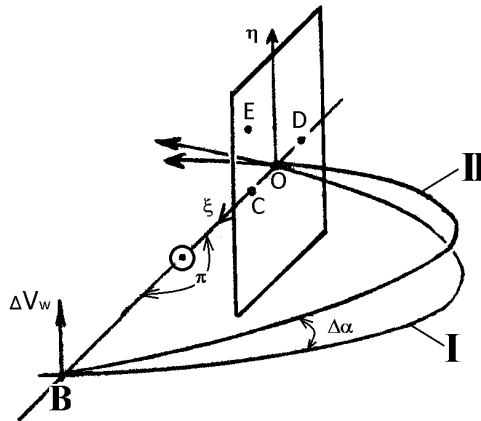


Рис. 11.6. Положения исходной I и новой II плоскостей орбиты КА

Как поступить в рассмотренном случае, если все же необходимо скорректировать движение в направлении  $\xi$  или в направлении  $\eta$ , например, чтобы получить новую траекторию, идущую через точку  $E$ ? Единственным выходом является перенос точки исполнения коррекции  $B$  в новое положение  $B^*$ . Геометрически очевидно, что наибольшее смещение в направлении  $\eta$  будет в том случае, если угловое расстояние от точки коррекции до картинной плоскости будет равно  $\pi/2$ . Здесь две плоскости – новая и старая – дают наибольшее линейное смещение «по вертикали» между соответственными точками двух рассматриваемых траекторий. Следует, правда, заметить, что такой перенос точки коррекции невыгоден для получения смещений вдоль оси  $O\xi$ , так как он связан с увеличением требуемого импульса. Причина этого тоже очевидна. Ранее при обсуждении посадочных импульсов было показано, что

наиболее «дешевым» импульсом для смещения траектории КА в плоскости орбиты является импульс, в основном изменяющий его энергию, то есть направленный приблизительно параллельно вектору скорости. При этом наибольшее смещение орбита испытывает в области, противоположащей той, в которой КА был сообщен импульс скорости, то есть на угловом расстоянии  $\pi$ . Но тогда вырисовывается следующая оптимальная в смысле затрат характеристической скорости стратегия коррекции: в точке  $B$  (на угловом расстоянии  $\sim \pi$  от картинной плоскости) дать оптимальный импульс  $\Delta V_1$ , приблизительно параллельный скорости КА, для получения нужной координаты  $\xi$ , а затем в точке  $B^*$  (на угловом расстоянии  $\sim \pi/2$  от картинной плоскости) дать импульс  $\Delta V_2$  для получения нужного смещения по оси  $O\eta$  (рис. 11.7).

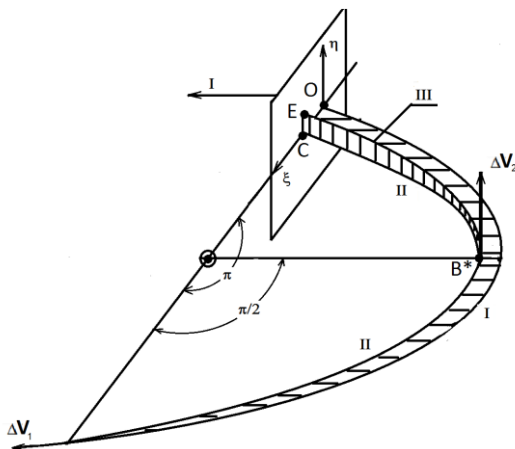


Рис. 11.7. Оптимальная стратегия двухточечной коррекции при вырождении матрицы коррекции: I – исходная орбита, II – орбита, полученная после первой коррекции, III – орбита, полученная после второй коррекции

Рассмотренный пример свидетельствует о том, что в некоторых случаях оптимальной является многоразовая коррекция даже без учета ошибок прогнозирования орбиты и исполнения маневров коррекции.

## 12. Относительное движение двух КА. Маневрирование при их сближении

Рассмотрим относительное движение двух КА, находящихся на небольшом расстоянии друг от друга по сравнению с их расстояниями до притягивающего центра, например до центра масс Земли. Эта задача представляет интерес при анализе относительного движения группы аппаратов, образующих так называемую *формацию*<sup>43</sup>. Формации получили свое развитие в настоящее время благодаря возможности использования в качестве ее элементов малогабаритных спутников<sup>44</sup>. Неоспоримыми преимуществами формаций является возможность одновременного проведения наблюдений и измерений в точках пространства на небольшом удалении друг от друга. Фактически эти аппараты замечают «трубку» в пространстве, то есть обследуют трехмерную область в отличие от одиночного аппарата, замещающего пространство множества меры нуль, двигаясь по единственной траектории. Для их группового вывода на орбиту может быть использована одна ракета-носитель, а в силу их малости («легкости») может быть использована даже ракета легкого класса. Это значительно сокращает стоимость всего проекта.

Развитием формаций являются *Formation Flying*, *пой* (*Swarm*), *кластер* (*Cluster*), *созвездие* (*Contellation*). Эти разновидности распределенных спутниковых систем объединены составом (они состоят из нескольких аппаратов) и различаются размером покрываемой ими области пространства, способами управления взаимодействием аппаратов в системе и выстраиваемой иерархией. Так,

---

<sup>43</sup> Овчинников М.Ю. Эх, мчится тройка удалая... : сб. научно-популярных статей – победителей конкурса РФФИ 2012 года / под ред. чл.-корр. РАН В.А. Шахнова. М.: Изд-во «ИТЦ МОЛНЕТ», 2013. Вып. 16. С. 20–34. (<http://www.keldysh.ru/events/3.pdf>)

<sup>44</sup> Овчинников М.Ю. «Малыши» завоевывают мир: сб. научно-популярных статей – победителей конкурса РФФИ 2007 года / под ред. чл.-корр. РАН В.И. Конова. М.: Изд-во «Октопус», 2008. Вып. 11. С. 17–29. (<http://www.keldysh.ru/events/ovch.pdf>)

например, *Constellation*<sup>45</sup> покрывает весь земной шар (системы глобальной навигации и радиосвязи) и используется индивидуальное управление каждым аппаратом. *Formation Flying* или *Cluster* используется для проведения научных и прикладных измерений окружающего Землю космического пространства и ее поверхности – с ее помощью удастся получать пространственную информацию об объектах исследования. Аппараты взаимодействуют друг с другом, один из них должен быть главным в этой группе, осуществлять общее руководство и координацию даже автономно от командного центра на Земле. *Swarm* лишен централизованного управления и координации, и его элементы принимают решение о своем функционировании (движении, выполнении полезных действий) автономно, например, ориентируясь на своих ближайших соседей.

Безусловным толчком к развитию распределенных систем послужило появление малых спутников, причем малых не столько по критерию малых массы и размера, хотя это тоже сыграло свою роль, но, скорее, по иной идеологии разработки и создания таких аппаратов – в это направление уже хлынул, можно сказать, поток любителей и профессионалов, привнесший свои мотивации и правила, хотя в начале 90-х годов энтузиастов, кто начинал это дело, в том числе и в России, были единицы. Чтобы было понятно, о каких аппаратах идет речь, введена условная классификация спутников по их массе. Их ассоциация с названием и ориентировочной стоимостью приведена<sup>46</sup> в табл. 6.

---

<sup>45</sup> На Западе основоположником *Constellation* считается Уолкер (Walker J.G. Satellite constellations // Journal of the British Interplanetary Society. 1984. V. 37. P. 559–571), у нас – Можаяев (Можаяев Г.В. Синтез орбитальных структур спутниковых систем. Теоретико-групповой подход // Машиностроение, 1989).

<sup>46</sup> Barnhart D.J., Vladimirova T., Sweeting M.N. Very-Small-Satellite Design for Distributed Space Missions // Journal of Spacecraft and Rockets. 2007. V. 44, N 6. P. 1294–1306. Третий автор этой статьи доктор Мартин Свитинг за заслуги перед Великобританией в становлении и развитии космонавтики получил почетный титул «Сэр» от английской королевы. Создал и долгие годы возглавлял SSTL Ltd – компанию по созданию и производству миниатюрных спутников, с 90-х годов ставшей мировым «законодателем мод» в этой области и несколько лет назад приобретенной европейской корпорацией EADS Astrium.

## Условная классификация спутников по массе

Category	Категория	Масса, кг	Стоимость, US \$
Large satellite	Большой спутник	>1000	0.1÷2 млрд
Medium satellite	Средний спутник	500÷1000	50÷100 млн
Minisatellite	Миниспутник	100÷500	10÷50 млн
Microsatellite	Микроспутник	10÷100	2÷10 млн
Nanosatellite	Наноспутник	1÷10	0.2÷2 млн
Cubesat	Кубсат	1	
Picosatellite	Пикоспутник	0.1÷1	20÷200 тыс.
Femtosatellite	Фемтоспутник	<0.1	0.1÷20 тыс.

Каким бы классом распределенных систем мы ни занимались, для описания их относительного движения необходимы уравнения. Начнем с простейших уравнений относительного движения.

## 12.1. Относительное движение двух аппаратов

Получим линеаризованные уравнения относительного движения в предположении, что один из КА (назовем его главным) движется по круговой орбите. Все переменные с индексом «с» («chief») будем относить к главному спутнику, с индексом «d» («deputy») – ко второму (дочернему) спутнику. Тогда уравнение движения каждого спутника относительно центра масс Земли (точка  $O_a$  на рис. 12.1) будет иметь следующую форму:

$$\ddot{\mathbf{r}}_i + \frac{\mu_g \mathbf{r}_i}{r_i^3} = 0 \quad (i = c, d).$$

Введем вектор относительного положения  $\mathbf{p} = \mathbf{r}_d - \mathbf{r}_c$ , как показано на рис. 12.1. Тогда уравнение относительного движения этих двух аппаратов имеет вид

$$\ddot{\mathbf{p}} + \mu \left( \frac{\mathbf{r}_d}{r_d^3} - \frac{\mathbf{r}_c}{r_c^3} \right) = 0. \quad (12.1)$$

Проведем выкладки при условии  $\rho \ll r_c$ , раскладывая члены этого уравнения по степеням малого безразмерного параметра  $\rho/r_c$  и удерживая слагаемые первого порядка малости по этому параметру. Воспользуемся тем, что справедлива цепочка равенств

$$\frac{(\mathbf{r}_c + \boldsymbol{\rho})^3}{r_c^3} = \frac{(r_c^2 + \rho^2 + 2(\mathbf{r}_c, \boldsymbol{\rho}))^{3/2}}{r_c^3} \approx 1 + 3 \left( \frac{\mathbf{r}_c, \boldsymbol{\rho}}{r_c^2} \right).$$

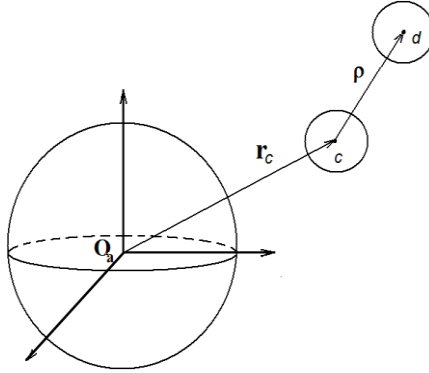


Рис. 12.1. Конфигурация формации в инерциальном пространстве

В результате выражение в круглых скобках в (12.1) приводится к виду

$$\frac{\mathbf{r}_c + \boldsymbol{\rho}}{(|\mathbf{r}_c + \mathbf{a}|)^3} - \frac{\mathbf{r}_c}{r_c^3} \cong \frac{1}{r_c^3} \left( \mathbf{r}_c + \boldsymbol{\rho} - 3 \frac{(\mathbf{r}_c, \boldsymbol{\rho})}{r_c^2} (\mathbf{r}_c + \boldsymbol{\rho}) - \mathbf{r}_c \right) \cong \frac{1}{r_c^3} \left( \boldsymbol{\rho} - \frac{3(\mathbf{r}_c, \boldsymbol{\rho})}{r_c^2} \mathbf{r}_c \right).$$

Тогда уравнение движения дочернего спутника относительно главного после линеаризации левой части (12.1) запишется следующим образом:

$$\ddot{\boldsymbol{\rho}} + \mu \left( \frac{\boldsymbol{\rho}}{r_c^3} - \frac{3(\mathbf{r}_c, \boldsymbol{\rho}) \mathbf{r}_c}{r_c^5} \right) = 0.$$

Перейдем в *орбитальную систему координат* *Охуз*, начало которой поместим в центр масс главного спутника, а оси направим по трансверсали (нормаль к радиус-вектору в сторону движения), бинормали (нормаль к плоскости орбиты) и его радиус-вектору отно-

сительно центра масс Земли. Запишем уравнение в этой системе координат. Для этого вспомним связь между абсолютным (*abs*) и относительным (*rel*) изменением произвольного вектора **a** :

$$\left(\frac{d\mathbf{a}}{dt}\right)_{abs} = \left(\frac{d\mathbf{a}}{dt}\right)_{rel} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a},$$

где  $\boldsymbol{\omega}$  – угловая скорость вращения орбитальной системы координат относительно инерциальной. Тогда вторая производная запишется следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{d\mathbf{a}}{dt}\right)_{abs} &= \frac{d}{dt}\left(\left(\frac{d\mathbf{a}}{dt}\right)_{rel} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a}\right) = \\ &= \left(\frac{d^2\mathbf{a}}{dt^2}\right)_{rel} + 2\boldsymbol{\omega} \times \left(\frac{d\mathbf{a}}{dt}\right)_{rel} + \left(\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\right)_{rel} \times \mathbf{a} + \boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a}]. \end{aligned}$$

После применения преобразования уравнение относительного движения в орбитальной системе координат будет выглядеть так:

$$\ddot{\mathbf{p}} + \left[\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}, \mathbf{p}\right] + 2\left[\boldsymbol{\omega}, \frac{d\mathbf{p}}{dt}\right] + [\boldsymbol{\omega}, [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{p}]] = -\frac{\mu_g \mathbf{p}}{r_c^3} + 3\frac{(\mathbf{r}_c, \mathbf{p})\mathbf{r}_c}{r_c^5}.$$

Учтем, что орбита главного спутника круговая, тогда производная вектора орбитальной скорости по времени в орбитальной системе координат равна нулю, так как на круговой орбите орбитальная система координат вращается с постоянной угловой скоростью относительно инерциальной. Запишем теперь уравнение в проекциях на оси орбитальной системы координат, не забывая о том, что для круговой орбиты значение угловой скорости вращения определяется выражением  $\mu/r_c^3 = \omega_0^2$ , а  $\mathbf{p} = (x, y, z)$ . В случае отсутствия возмущений получим следующую систему линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + 2\omega_0 \dot{z} &= 0, \\ \ddot{y} + \omega_0^2 y &= 0, \\ \ddot{z} - 2\omega_0 \dot{x} - 3\omega_0^2 z &= 0. \end{aligned} \tag{12.2}$$



Система уравнений относительного движения (12.2), именуемая в зарубежной литературе уравнениями Хилла или Клохесси–Уилтшира<sup>47</sup>, описывает движение дочернего спутника относительно главного. Запишем ее решение:

$$\begin{aligned}x &= C_4 - 3C_1\omega_0 t + 2C_2 \cos \omega_0 t - 2C_3 \sin \omega_0 t, \\y &= C_5 \sin \omega_0 t + C_6 \cos \omega_0 t, \\z &= 2C_1 + C_2 \sin \omega_0 t + C_3 \cos \omega_0 t.\end{aligned}\tag{12.3}$$

Чтобы лучше представить вид траектории, описываемой дочерним спутником, заметим, что координаты  $x$  и  $z$  связаны следующим соотношением:

$$\frac{(z - 2C_1)^2}{C_2^2 + C_3^2} + \frac{[x - (C_4 - 3C_1\omega_0 t)]^2}{4(C_2^2 + C_3^2)} = 1.$$

Это – уравнение эллипса в каноническом виде. Из него видно, что периодические движения дочернего спутника относительно главного возможны только в том случае, когда  $C_1 \equiv 0$ . В проекции на плоскость орбиты главного спутника траектория относительного движения дочернего спутника показана на рис. 12.2. Масштабы по осям различные.

Период этих движений совпадает с периодом обращения главного спутника по орбите, а сами движения в плоскости орбиты происходят по эллипсу, центр которого лежит в точке  $x^* = C_4$ ,  $z^* = 0$ . Но достаточно сколь угодно мало изменить начальные данные так, чтобы  $C_1 \neq 0$ , как периодичность нарушается, и приходим к общему случаю движения. В результате равномерное и периодическое движения складываются, и получается, что одновременно с движением спутника по эллипсу центр этого эллипса успевает сместиться вдоль оси  $OX$  орбитальной системы коор-

---

<sup>47</sup> Clohessy W.H., Wiltshire R.S. Terminal Guidance System for Satellite Rendezvous // Journal of Aerospace Science. 1960. V. 27. P. 653–658. Авторы адаптировали уравнения, полученные Хиллом для исследования движения Луны (Hill G.W. Researches in the Lunar Theory // American Journal of Mathematics. 1878. V. 1. P. 5–26), применительно к движению КА.

динат. Пример относительного движения при  $C_1 = -0.25$  показан на рис. 12.3 в проекции на плоскость орбиты главного спутника.

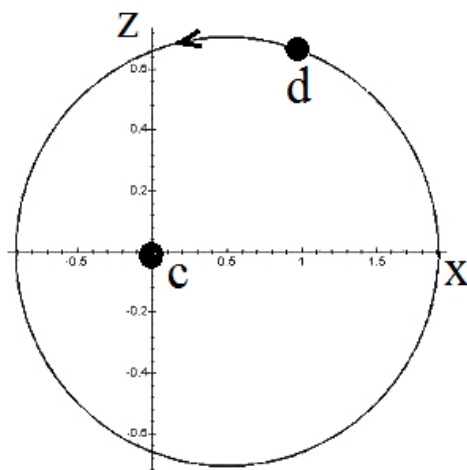


Рис. 12.2. Проекция траектории на плоскость орбиты главного спутника при  $C_1 = 0$

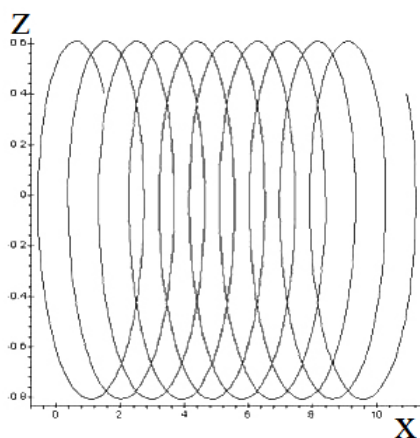


Рис. 12.3. Траектория относительного ухода дочернего спутника

Для существования периодического решения необходимо выполнение следующего соотношения для начальных условий:

$$-2\omega_0 z(0) = \dot{x}(0).$$

Заметим, что отсутствие векового ухода в направлении оси  $OX$  в относительном движении спутников по орбите в центральном гравитационном поле означает равенство периодов двух спутников. А так как величина периода определяется величиной большой полуоси орбиты, то отсутствие относительных вековых уходов означает равенство больших полуосей их орбит.

Рассмотрим типовые ограниченные траектории в центральном гравитационном поле. Выражения (12.3) для периодического случая (то есть  $C_1 = 0$ ) можно привести к следующему виду:

$$x = A_1 \cos(\omega_0 t + \alpha_0) + C_4,$$

$$y = A_2 \sin(\omega_0 t + \alpha_0),$$

$$z = (A_1/2) \sin(\omega_0 t + \alpha_0).$$

Здесь начальная фаза  $\alpha_0$  выражается через постоянные интегрирования из (12.3). Тогда в зависимости от значений постоянных интегрирования получаем следующие типы ограниченных формаций.

1. Если  $A_1 = A_2 = \rho$ ,  $C_4 = 0$ , то в этом случае в плоскости, перпендикулярной плоскости орбиты и радиусу-вектору главного спутника (локально-горизонтальная плоскость), траектория относительного движения представляет собой окружность (*Projected Circular Orbit*).
2. Если  $A_1 = \rho$ ,  $A_2 = \sqrt{3}\rho/2$ ,  $C_4 = 0$ , то в этом случае траектория относительного движения представляет собой окружность (*Global Circular Orbit*).
3. В случае выбора  $A_1 = A_2 = 0$ ,  $C_4 \neq 0$  получаем формацию с последовательным (друг за другом) движением дочернего и главного спутников (*Leader-follower formation*).

Уравнения Хилла могут использоваться при построении управления с целью выполнения сближения и стыковки аппаратов. Для этого надо дополнить соответствующее уравнение в (12.1) управляющим ускорением в правой части. На практике относи-

тельное движение подвержено возмущениям, наиболее значимым из которых является полярное сжатие Земли. Полученные выше формулы показывают, что вековые факторы – скорости прецессии линии узлов и прецессии линии апсид – зависят от наклона орбиты и ее параметра. Именно поэтому даже при небольшом начальном удалении друг от друга спутники имеют разные орбитальные параметры, и, следовательно, скорости прецессии их орбит тоже разные, и формация «разваливается» с течением времени. Седвиком были предложены модернизированные уравнения Клохесси–Уилтшира, учитывающие гармонику от сжатия Земли<sup>48</sup>. Существуют различные способы поддержания формаций, основанные на импульсном управлении, использовании двигателей малой тяги, предлагаются экзотические способы – электростатическое взаимодействие, дифференциальное аэродинамическое сопротивление, давление солнечной радиации и даже переброс массы между аппаратами.

## 12.2. Маневрирование и сближение КА

Рассмотрим теперь вопросы взаимного маневрирования применительно к задачам сближения аппаратов и их стыковки. Пусть сближение происходит в гравитационном поле планеты, например, Земли. Предположим далее, что один из КА является «пассивным», то есть движется по некоторой геоцентрической орбите, не маневрируя, а другой – «активным», выполняющим маневры сближения. Это обычная схема маневрирования при сближении двух КА. Здесь вполне допустимо использовать результаты, полученные выше при рассмотрении коррекции межпланетных траекторий. Действительно, в обоих случаях одно небесное тело (планета или пассивный КА) движется по неизвестной кеплеровской орбите, а маневрирующий КА – по орбите, которая в номинале имеет общую точку с первой. Более того, в этой общей точке оба небесных тела оказываются в один момент времени. Это приводит к попаданию в планету при межпланетных перелетах или к стыковке двух КА. В обоих случаях

---

<sup>48</sup> Sedwick R.J., Miller D., Kong E. Mitigation of Differential Perturbations in Clusters of Formation Flying Satellites // AIAA/AAS Space Flight Mechanics Conference. Breckenridge, Colorado, 1999. V. 102, Part. 1. AAS 99–124. P. 323–342.

номинальная траектория маневрирующего КА строится так, чтобы обеспечить встречу, и в обоих случаях маневрирование сводится к коррекции неизбежных при выведении КА на эту номинальную орбиту ошибок.

Рассмотрим тот этап сближения двух КА, когда они находятся на расстояниях, обеспечивающих прямую видимость одного КА с другого, то есть этап, на котором могут быть применены бортовые средства наведения (например, соответствующие радиолокационные или оптические устройства).

Если количество измеряемых в полете параметров является настолько полным, что на борту активного КА есть информация не только о взаимном движении обоих КА, но и информация о его собственном движении относительно Земли, то в принципе существует возможность мысленно построить в центре масс пассивного КА картинную плоскость и, вычислив матрицу маневров активного КА, осуществить нужную коррекцию. Здесь задача даже проще рассмотренной ранее, так как гравитационным полем пассивного КА можно пренебречь и, следовательно, не учитывать нелинейные эффекты.

И все же задача маневрирования при сближении имеет принципиальное отличие от рассмотренных ранее. Если, как говорилось выше, при межпланетных перелетах достаточно двух- или трехпараметрической коррекции траектории, то при сближении КА она должна быть *шестипараметрической*. Ведь сближение КА, осуществляемое, например, для стыковки, должно не только привести оба КА в одну точку, но и уравнять их скорости. Следовательно, надо скорректировать не только три линейные координаты (или две координаты в картинной плоскости и время пересечения ее), но и три компоненты скорости активного КА.

Как уже говорилось, поскольку вектор импульса скорости  $\Delta \mathbf{V}$  имеет три компоненты, то и скорректировать с его помощью можно лишь три параметра. Следовательно, для шестипараметрической коррекции нужна, по крайней мере, двухкратная коррекция траектории. Проще всего представить ее себе следующим образом: сначала импульсом  $\Delta \mathbf{V}_1$  добиваются того, чтобы в некоторый последующий момент времени активный КА оказывается (теоретически) в той же точке пространства, что и пассивный, и в этот момент

времени активному кораблю сообщается второй импульс  $\Delta V_2$ , который, как всякий мгновенный импульс, не может привести к мгновенному изменению координат, но дает мгновенное изменение скорости движения. Этот импульс  $\Delta V_2$  выбирается так, чтобы уравнивать скорости обоих кораблей. Таким образом, задача сближения с пассивным кораблем сводится к сообщению активному кораблю импульса «догона»  $\Delta V_1$ , а в непосредственной близости от пассивного корабля приложению к активному КА импульса «относительного» торможения  $\Delta V_2$ . Можно показать (здесь этого не делается), что такой метод сближения является оптимальным с точки зрения расходования характеристической скорости. Он носит название *метод свободных траекторий*<sup>49</sup>.

Недостатком описанного метода является то, что наряду с информацией о взаимном движении КА необходимо обладать информацией о движении активного КА относительно Земли, то есть знать его орбиту до начала маневрирования и угловое положение относительно осей, связанных с Землей, чтобы иметь возможность сообщить ему импульс нужной величины и нужного направления для целенаправленного изменения орбиты. Получение подобной орбитальной информации и информации об ориентации КА с нужной степенью точности – достаточно сложная техническая задача. Кроме того, вычисление характеристик нужных импульсов предполагает использование бортовой вычислительной машины. Возникает естественное желание разработать более простую методику маневрирования, основанную только на знании относительного движения двух КА.

Одним из методов маневрирования, обладающего указанным свойством, является так называемый *метод параллельного наведения*<sup>49</sup>. Пусть  $B$  является пассивным КА, а  $C$  – активным (рис. 12.4).

Выберем точку  $B$  в качестве начала *относительной системы координат*, описывающей движение  $C$  относительно  $B$ . Тогда положение  $C$  активного КА будет определяться расстоянием

---

<sup>49</sup> Ермилов Ю.А., Иванова Е.Е., Пантюшин С.В. Управление сближением космических аппаратов. М.: Наука. Главная редакция физ.-мат. лит.-ры, 1977.

$BC = \rho$  и некоторым углом  $\alpha$ , образованным прямыми  $BC$  и  $xx$ . Здесь рассматривается лишь плоский случай. Современная техника, использующая, например, радиолокационные и гироскопические приборы, установленные на активном КА, позволяет измерять  $\rho, \dot{\rho}$  и  $\dot{\alpha}$ . Если теперь заставить активный КА маневрировать таким образом, чтобы всегда выполнялось условие  $\dot{\alpha} = 0$ , то он будет двигаться во введенной относительной системе координат по прямой  $BC$ .

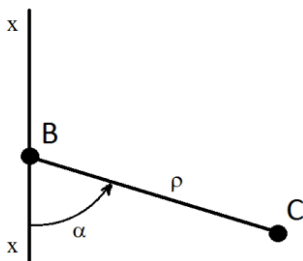


Рис. 12.4. Система координат, связанная с пассивным КА

Для осуществления сближения надо будет сообщить активному КА сближающий импульс, чтобы выполнялось неравенство  $\dot{\rho} < 0$ , а при  $\rho \rightarrow 0$  сообщить тормозной импульс, который дал бы  $\dot{\rho} = 0$ . Это очень простая схема сближения осложняется, однако, тем, что по условию  $\dot{\alpha} = 0$ . «Естественным» движением в промежутке времени между сближающим и тормозным импульсами является движение по криволинейной траектории – ведь оба КА движутся в это время по орбитам вокруг Земли. Чтобы «выпрямить» эту естественную кривизну траектории относительного движения, надо выдерживать условие  $\dot{\alpha} = 0$ , приложив к активному КА силу, развиваемую реактивным двигателем и перпендикулярную  $BC$ . Поскольку такая сила не изменяет  $\dot{\rho}$ , то она является «паразитной», связанной с дополнительными затратами топлива, фактически не участвующего в процессе изменения  $\rho$  – цели маневра сближения. Эти дополнительные затраты характеристической скорости являются той ценой, которую приходится платить за существенное упрощение системы управления движением

активного КА. Здесь не нужно уже знание своей геоцентрической орбиты и своего углового положения относительно нее. Алгоритмы управления настолько просты, что можно не применять бортовые вычислительные машины.

Затраты характеристической скорости при использовании *метода параллельного наведения* (это название связано с тем, что вектор относительной скорости активного КА  $\dot{\rho}$  остается все время параллельным самому себе) становятся тем ближе к затратам, свойственным методу свободных траекторий (методу, описанному в начале настоящего раздела), чем «прямее» траектория естественного (свободного) движения между импульсами сближения и торможения. Очевидно, что эта «прямизна» увеличивается с уменьшением начального расстояния  $BC$ . Поэтому на сравнительно малых начальных расстояниях (порядка нескольких километров) нередко предпочтительнее становится относительно простой метод параллельного наведения, в то время как при начальных расстояниях порядка десятков километров необходимо переходить к требующему более совершенного приборного оснащения КА методу свободных траекторий.

Схема, при которой в момент окончания процесса сближения координаты центров масс обоих КА совпадают, является, конечно, идеализированной. На самом деле этот процесс заканчивается тогда, когда расстояние между обоими КА имеет порядок десятков метров. После этого начинается этап *причаливания*, который осуществляется уже не сближающей двигательной установкой, а целой системой относительно малых ракетных двигателей причаливания, позволяющих поступательно перемещать активный КА в трех взаимно ортогональных направлениях, что необходимо для обеспечения условий нормального функционирования стыковочных узлов<sup>50</sup>.

---

<sup>50</sup> Про стыковки, стыковочные узлы и вообще про то, как развивалась отечественная космонавтика глазами непосредственного участника событий тех лет, интересно прочитать в книге: Сыромятников В.С. 100 рассказов о стыковке и о других приключениях в космосе и на Земле. Часть 1. Двадцать лет назад. М.: Логос, 2003. 586 с.; Часть 2. 20 лет спустя. М.: Логос, 2008. 568 с.



### 13. Гравитационные маневры

Все рассмотренные выше маневры были основаны на том, что КА изменяет свою траекторию в результате включения ракетного двигателя. Однако оказывается возможным существенное изменение его орбиты путем использования гравитационных полей небесных тел. Пусть КА совершает гелиоцентрическое движение по некоторой номинальной эллиптической орбите. В рамках задачи двух тел эта эллиптическая орбита никогда не изменится. Но если движущийся по орбите КА окажется в некоторый момент времени вблизи планеты, то гравитационное поле этой планеты может существенным образом изменить его гелиоцентрическое движение.

Будем, как и прежде, считать, что внутри грависферы планеты движение КА целиком определяется гравитационным полем планеты, в то время как вне ее – гравитационным полем Солнца. Рассмотрим движение КА внутри грависферы в планетоцентрической системе координат. Начнем это рассмотрение с определения скорости КА на границе грависферы. Поскольку предполагается, что КА «входит» в грависферу планеты, постольку будем считать, что его планетоцентрическая скорость на границе грависферы конечна. Если бы она была равна нулю и КА стал бы «падать» на планету, то у поверхности планеты его скорость практически была бы параболической. Действительно, по определению параболической скорости у планеты соответствует нулевая скорость в бесконечности. Но, как уже говорилось, за границами грависферы гравитационное поле планеты принимается пренебрежимо малым, следовательно, пренебрежимо малой будет в этом случае и скорость КА на границе грависферы. Поскольку мы приняли, что на этой границе планетоцентрическая скорость КА конечна, то, следовательно, КА движется относительно планеты с гиперболической скоростью. Таким образом, рассматривая движение КА в окрестности планеты, следует пользоваться соотношениями, справедливыми для гиперболических траекторий.

Иными словами, в рамках понятия грависферы аппарат, находящийся на ее границе, ощущает себя на бесконечном расстоянии от планеты, если проводить параллель с задачей двух тел – планета

и КА. Поэтому, если на границе грависферы его скорость относительно планеты равна нулю, то это равносильно его нулевой скорости на бесконечности в рамках задачи двух тел, то есть имеем параболическое движение КА. Если на границе грависферы скорость ненулевая, то имеем гиперболическое движение.

Для гиперболических траекторий постоянная  $h$  в интеграле энергии (1.12) положительна и при  $r \rightarrow \infty$

$$h = V_{\infty}^2. \quad (13.1)$$

В силу того, что, как уже говорилось, гравитационное поле планеты за пределами ее грависферы пренебрежимо мало, будем принимать, что ускорение гравитационным полем планеты движущегося КА начинается после пересечения им границ этой грависферы. Поэтому скорость на границе грависферы будем обозначать  $V_{\infty}$  и считать, что она определяется формулой (13.1). Для КА, движущегося по орбите, определяемой коническим сечением, справедливо равенство (1.23):

$$h = \frac{\mu}{p}(e^2 - 1).$$

С учетом соотношения (13.1), а также известного для гипербол соотношения

$$e = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$$

и соотношения, справедливого для любых конических сечений

$$p = \frac{b^2}{a},$$

получим

$$a = \frac{\mu}{V_{\infty}^2}. \quad (13.2)$$

Траектория движения КА будет иметь при этом вид, изображенный на рис. 13.1.

Планета предполагается находящейся в точке  $P$ , а граница ее грависферы дана штриховой линией  $BC$ . Скорость входа в грависферу  $\mathbf{V}_B$  параллельна асимптоте (ибо таково ее теоретическое

направление при  $r \rightarrow \infty$ ) и равна по модулю  $V_\infty$ . После облета планеты по гиперболической траектории на выходе из грависферы в точке  $C$  ее скорость, обозначенная на схеме  $\mathbf{V}_C$ , будет по модулю тоже равна  $V_\infty$  в силу закона сохранения энергии (1.12) и направлена (с точностью до пренебрегаемых величин) вдоль другой асимптоты. При этом произойдет поворот вектора скорости на угол, определяемый асимптотами гиперболы. Найдем этот угол, обозначив его  $\varphi$ . Из геометрии известно соотношение

$$OE = FO,$$

если точка  $F$  получена ортогональным проектированием  $P$  на  $BO$ . Кроме того, очевидна цепочка формул

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \frac{FO}{FP} = \frac{OE}{FP} = \frac{a}{c}. \quad (13.3)$$

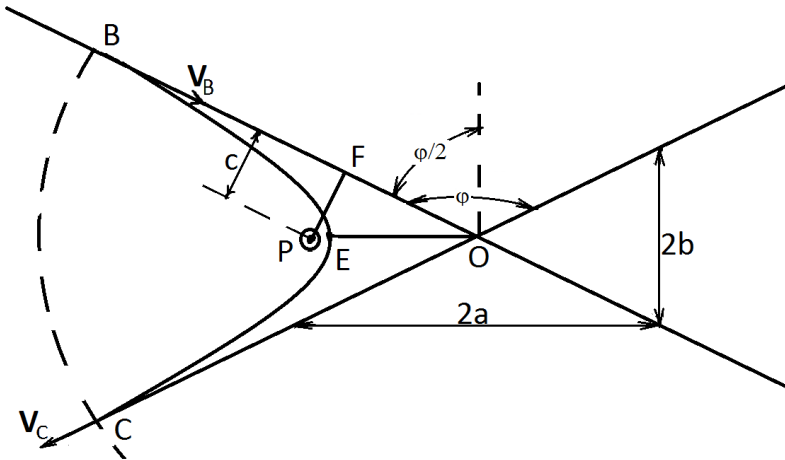


Рис. 13.1. Траектория движения КА в поле планеты при гравитационном маневре

Величина  $FP = c$  называется *прицельной дальностью* – это наименование связано с тем, что отрезок  $c$  получен как расстояние между направлением скорости в бесконечности и центром масс планеты. Асимптоты гиперболы в данном случае являются

аналогом линии прицеливания обычного ружья, которая, как известно, вовсе не совпадает с траекторией полета пули. Комбинируя равенства (13.2) и (13.3), получим выражение

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \frac{\mu}{c V_{\infty}^2}, \quad (13.4)$$

связывающее поворот вектора планетоцентрической скорости с прицельной дальностью и начальной скоростью сближения с планетой.

Выражение (13.4) показывает, что, варьируя прицельную дальность  $c$ , то есть выбирая нужную точку пересечения невозмущенной планетой траектории движения КА с картинной плоскостью, можно в значительной степени изменять угол  $\varphi$ . Варьирование  $V_{\infty}$ , как правило, затруднительно. Эта скорость получается исходя из требований, предъявляемых к предыдущим участкам гелиоцентрического движения, да и изменение  $V_{\infty}$  путем включения ракетного двигателя слишком дорого, ведь главный смысл гравитационного маневра – маневрирование без использования тяги ракетных двигателей. Хотя известен и *активный гравитационный маневр*, когда в перицентре дается дополнительный импульс скорости. В этом случае возникает эффект Оберта (Hermann Oberth) – приращение кинетической энергии КА при активном гравитационном маневре тем больше, чем при большей скорости он выполняется, что позволяет использовать Солнце для выполнения маневра в миссиях в дальний космос.

Теоретическим предельным значением угла  $\varphi$  будет  $\varphi = \pi$ , которое соответствует  $c = 0$ . Следовательно, рассматривая планету в качестве материальной точки, можно, условно выражаясь, «повернуть обратно» (конечно, в планетоцентрической системе координат). Практически предельным значением угла поворота  $\varphi$  будет тот, который получается при  $c = R$ , где  $R$  – радиус планеты. Учитывая выражение для круговой скорости (2.3), на основании формулы (13.4) можно получить

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi_{\lim}}{2} = \frac{V_1^2}{V_{\infty}^2}, \quad (13.5)$$

где  $V_1$  – первая космическая скорость, свойственная планете, а  $\varphi_{\text{lim}}$  – предельное, практически достижимое значение угла поворота вектора скорости КА. Это значение достаточно велико, ведь планетоцентрическая скорость «в бесконечности»  $V_\infty$  заметно меньше первой космической скорости планеты.

Представляют интерес максимально возможные приращения скорости при совершении гравитационного маневра у планет Солнечной системы (табл. 7).

Таблица 7

**Максимально возможные приращения скорости, км/с**

Меркурий	3.0	Юпитер	42.7
Венера	7.3	Сатурн	25.6
Земля	7.9	Уран	15.2
Луна	1.7	Нептун	16.7
Марс	3.6	Плутон	1.1

### 13.1. Использование гравитационного маневра при межпланетных перелетах

Рассмотрим использование гравитационного маневра при межпланетных перелетах. На рис. 13.2 приведена часть Солнечной системы с траекториями трех планет, из которых внутренняя траектория I – орбита Земли. Пусть стоит задача достижения КА орбиты планеты, обозначенной III. Эта задача может потребовать разгона КА при старте с Земли до столь больших скоростей, что решение ее обычным способом с использованием реактивного двигателя станет невозможным.

Пусть ракета-носитель способна разогнать КА лишь до таких значений скорости, при которых траектория КА опишет эллипс, касательный в точке  $B$  к орбите II и обозначенный на рис. 13.2 через  $C$ . Если подобрать момент старта так, чтобы КА и планета II оказались в области точки  $B$  одновременно, то планета будет «обгонять» КА. Это следует из того, что большая полуось орбиты планеты II больше большой полуоси орбиты КА  $C$ , а значит,

больше и ее скорости в общей обоим небесным телам области пространства  $B$ . Будем для простоты рассуждений полагать планету II материальной точкой, а прицельную дальность встречи КА с планетой равной нулю. В начале встречи с планетой (когда планета обгоняла корабль) гелиоцентрическая скорость планеты –  $\mathbf{V}_{pl}$ , гелиоцентрическая скорость КА –  $\mathbf{V}_{SC}$ . Вектор относительной скорости КА определяется выражением

$$\mathbf{V}_{\infty} = \mathbf{V}_{SC} - \mathbf{V}_{pl}$$

и, следовательно, направлен вправо. Вектор  $\mathbf{V}_{pl}$  тогда направлен влево (см. верхнюю диаграмму на рис. 13.3).

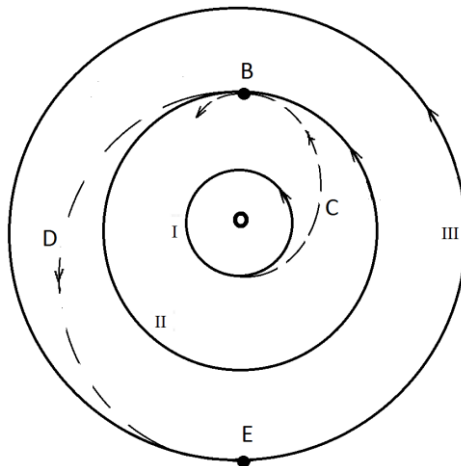


Рис. 13.2. Схема межпланетного перелета с гравитационным маневром

Во время маневра вектор планетоцентрической скорости КА  $\mathbf{V}_{\infty}$  «разворачивается», то есть поворачивается на угол  $\varphi = \pi$ . Таким образом, после того как аппарат «прошел» планету, его вектор скорости  $\mathbf{V}_{\infty}$  направлен влево и относительная скорость КА задается выражением

$$-\mathbf{V}_{\infty} = -\mathbf{V}_{SC} + \mathbf{V}_{pl}.$$

Это означает, что КА увеличил скорость в окрестности планеты на  $2\mathbf{V}_\infty$ , так что его гелиоцентрическая скорость стала равна

$$\mathbf{V}_{pl} + (-\mathbf{V}_{sc} + \mathbf{V}_{pl}),$$

достигнув величины больше, чем  $\mathbf{V}_{pl}$ , то есть она стала больше, чем гелиоцентрическая скорость планеты II (см. нижнюю диаграмму на рис. 13.3). Как результат, КА перешел на эллиптическую орбиту  $D$ , которая пересекает орбиту III третьей планеты в точке  $E$ . Таким образом, решение задачи оказалось возможным лишь путем использования гравитационного поля планеты II для дополнительного ускорения КА. Конечно, приведенный пример передает лишь идею маневра, ведь прицельная дальность, равная нулю, нереальна.

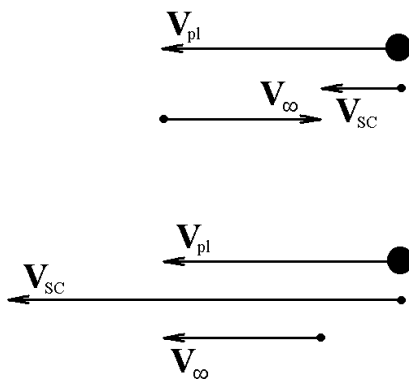


Рис. 13.3. Диаграмма скоростей перед (верхняя) и после (внизу) гравитационного маневра

Другим типичным гравитационным маневром является маневр изменения направления движения КА. Формулы (13.4) и (13.5) позволяют найти такую прицельную дальность  $s$ , которая обеспечит нужное значение угла поворота траектории (конечно, в планетоцентрической системе координат),  $\varphi \leq \varphi_{lim}$ . Следует обратить внимание на то, что параметр, с помощью которого изменяется угол поворота  $\varphi$  — прицельная дальность — должен выдерживаться

с большой точностью, если желательно получение точного значения  $\varphi$ . Это указывает на необходимость точных трехпараметрических коррекций на участках между планетами.

### 13.2. Изменение наклона плоскости гелиоцентрической орбиты

Гравитационный маневр способен привести к изменению наклона плоскости гелиоцентрической орбиты. Рассмотрим простой пример. Пусть плоскость  $O\xi\eta$  является картинной плоскостью планеты, которая используется для гравитационного маневра (рис. 13.4) и пусть прицельная дальность  $s$  такова, что угол поворота траектории КА  $\varphi = \pi / 2$ . Тогда, пересекая картинную плоскость на оси  $O\xi$  в точке  $B$ , КА после того, как обогнет планету, будет обладать планетоцентрической скоростью  $V_B$ , направленной параллельно оси  $O\xi$ . Если же он пересечет картинную плоскость в точке  $D$ , то скорость КА на выходе из грависферы планеты будет равна  $V_D$  и направлена параллельно оси  $O\eta$ . Следовательно, в зависимости от того, где выбрать точку пересечения картинной плоскости КА, окажется возможным повернуть его планетоцентрическую траекторию в любом направлении, следовательно, повернуть и гелиоцентрическую скорость, а с ней и плоскость гелиоцентрической орбиты.

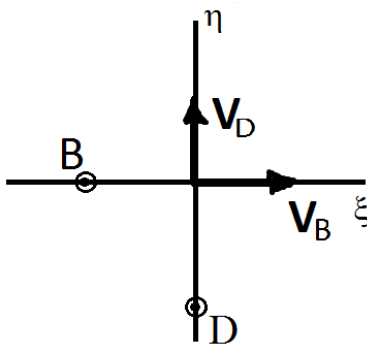


Рис. 13.4. Картинная плоскость планеты, используемая для расчета гравитационного маневра



Гравитационные маневры используются в космонавтике с большой эффективностью. Впервые такой маневр был применен при полете КА «Луна-3» (1959 г.), когда производилось первое фотографирование обратной стороны Луны. Казалось бы, наиболее естественной была бы траектория КА, изображенная на рис. 13.5.

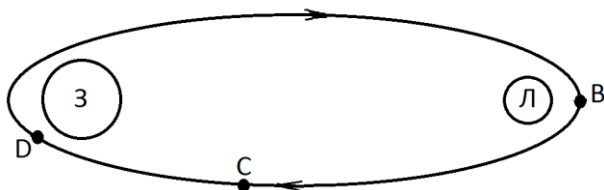


Рис. 13.5. «Естественная» траектория полета к Луне

После старта с Земли КА движется по эллиптической орбите и в точке *B* орбиты производит фотографирование Луны. Недостатком этой траектории было признано то, что при возвращении к Земле КА будет приближаться к ней с юга. В результате наиболее близкий к Земле участок траектории возвращения *CD* не сможет наблюдаться с территории Советского Союза. Поэтому была выбрана траектория с гравитационным маневром. Направление оси симметрии начальной эллиптической траектории было «опущено под Луну» (рис. 13.6), и если бы не гравитационное поле Луны, эта траектория продолжалась бы после точки *D*, как показано штриховой линией.

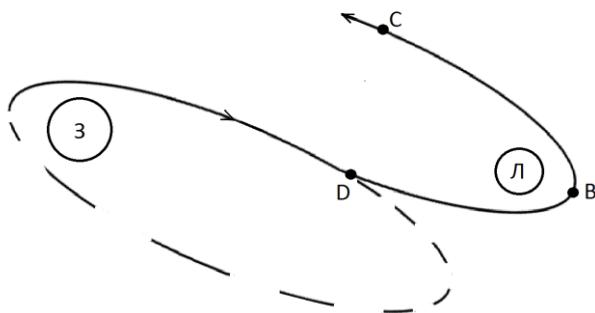


Рис. 13.6. Траектория полета к Луне с гравитационным маневром

Однако под влиянием лунного гравитационного поля траектория приобрела вид  $DC$  (с фотографированием в точке  $B$ ). В результате КА приближался к Земле с севера и практически все время возвращения, когда на Землю передавалась научная информация, наблюдался отечественными станциями управления.

Без гравитационных маневров, в частности, связанных с «до-разгонами», было бы невозможным и осуществление практически всех миссий с автоматическими КА к дальним планетам Солнечной системы. Пожалуй, замечательным примером использования гравитационных маневров являются миссии Voyager (КА «Voyager-1» и «Voyager-2»). Будучи выведенными на межпланетные траектории в 1977 году с интервалом в 15 дней, «Voyager-1» выполнил два гравитационных маневра – у Юпитера и Сатурна, а «Voyager-2» выполнил четыре гравитационных маневра – около Юпитера, Сатурна, Урана и Нептуна (у Нептуна гелиоцентрическая скорость была даже чуть снижена, чтобы пролететь вблизи его спутника Тритона), и после маневра у Нептуна аппарат изменил наклонение орбиты и сейчас движется под углом  $48^\circ$  к плоскости эклиптики. Оба аппарата уже вышли за пределы Солнечной системы и в октябре 2015 года находились на расстоянии более 133 а.е.<sup>51</sup> («Voyager-1») и более 109 а.е. («Voyager-2») от Солнца<sup>52</sup>. Схема полета этих аппаратов в пределах Солнечной системы показана на рис. 13.7.

Первоначально миссия Вояджеров носила название Большой тур, так как планеты-гиганты выстроились в узком секторе по одну сторону от Солнца, и была рассчитана на 5 лет, но потом специалисты сумели, несмотря на возникшие трудности и неполадки, продолжить миссии, и уже 38 лет аппараты успешно работают на благо человечества, демонстрируя наши возможности в познании Вселенной.

Еще один аппарат, впервые реализовавший гравитационный маневр около Юпитера, был американский КА «Pioneer-10». Он

---

<sup>51</sup> Астрономическая единица (а.е.) – единица измерения расстояния в небесной механике и астрономии, равная 149 597 870 700 м, что приблизительно соответствует среднему расстоянию от Солнца до Земли. Свет проходит это расстояние за 8 мин 20 с.

<sup>52</sup> <http://voyager.jpl.nasa.gov/> – сайт Jet Propulsion Laboratory (NASA), посвященный истории и текущему состоянию проекта Voyager.

достиг грависферы Юпитера в декабре 1973 года с гелиоцентрической скоростью 10.6 км/с. Перицентр гиперболической траектории находился на минимальном расстоянии 130 000 км от верхнего края атмосферы. Гелиоцентрическая скорость КА при выходе из грависферы Юпитера достигла 22.1 км/с.

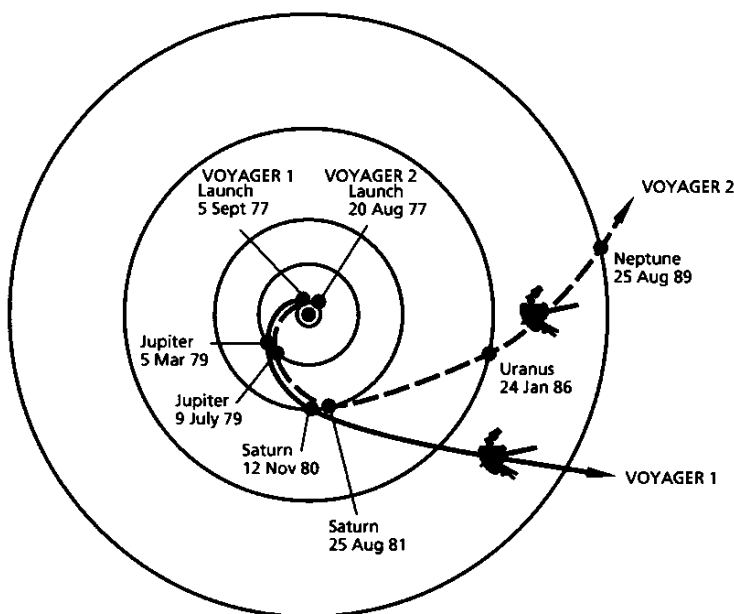


Рис. 13.7. Схема полета КА «Voyager-1» и «Voyager-2» с указанием дат и планет, где выполнялись гравитационные маневры

В настоящее время, пожалуй, нельзя назвать ни одной межпланетной миссии, которая планируется или была реализована без гравитационных маневров<sup>53</sup>.

<sup>53</sup> <http://galspace.spb.ru/orbita/12.htm>

## 14. Определение элементов орбиты по наблюдениям

Чтобы осуществлять управление полетом – определять моменты времени, когда те или иные наземные пункты управления и связи с КА могут установить с ним радиосвязь, определять вид и время маневров, включать и выключать аппаратуру и тому подобное, – надо прежде всего с достаточной точностью знать фактическую орбиту КА. Орбита определяется с помощью ЭВМ путем обработки траекторных измерений. Такие измерения сводятся, как правило, к определению соответствующих некоторым моментам времени  $t_1, t_2, \dots, t_n$  расстояний до КА и радиальных составляющих его скорости. Эти измерения ведутся радиосредствами, а в последнее время и с помощью лазерных приборов с разных пунктов, и их увязка и обработка в конце концов были бы элементарной задачей при их абсолютной точности, независимости и числе, равном шести. Основываясь на них, можно вычислить шесть оскулирующих элементов, которые и дали бы представление о фактической орбите для некоторого интервала времени. Поскольку фактическое движение всегда в той или иной степени является возмущенным, такие определения орбиты следовало бы осуществлять достаточно часто, чтобы следить за ее эволюцией.

Другой подход к определению параметров орбиты был предложен Ламбертом<sup>54</sup> по двум положениям небесного тела в некоторые моменты времени. Метод подробно описан в литературе по небесной механике.

Дело, однако, усложняется тем, что с целью увеличения точности определения элементов орбиты число фактически произво-

---

<sup>54</sup> Иоганн Генрих Ламберт (Johann Heinrich Lambert, 1728–1777). Немецкий физик, философ, математик. Исследовал особенности вращения Юпитера и Сатурна. Ввел понятие двойных звезд, выдвинул идею иерархического строения Вселенной. Изучал кометные орбиты, предложил метод приближенной оценки расстояния от Земли до кометы. Его утверждение, что по небольшим возмущениям в движении небесного тела можно обнаружить другое, массивное, тело подтверждено открытием в 1846 г. восьмой большой планеты – Нептуна.

димых измерений ее элементов значительно превышает минимально необходимое и возникает задача определения шести элементов орбиты при избыточности подлежащих обработке измерений. Классическим методом такой обработки является *метод наименьших квадратов*, предложенный Гауссом<sup>55</sup>.

#### 14.1. Метод наименьших квадратов

Пусть измеряются некоторые параметры движения КА  $x, y, z$  (их число не обязательно равно трем), которое можно представить как известные однозначные функции элементов орбиты  $a_1, a_2, \dots, a_6$  и времени  $t$ . Тогда можно записать

$$\begin{aligned}x &= x(a_1, a_2, \dots, a_6, t), \\y &= y(a_1, a_2, \dots, a_6, t), \\z &= z(a_1, a_2, \dots, a_6, t).\end{aligned}\tag{14.1}$$

Если произведено  $m > 6$  измерений (здесь не существенно, измеряются ли разнородные величины или однородные для разных моментов времени  $t_1, t_2, \dots$ ), то, используя равенства (14.1), можно записать систему уравнений

$$\Phi_1(a_1, a_2, \dots, a_6) = b_1, \dots, \Phi_m(a_1, a_2, \dots, a_6) = b_m, \tag{14.2}$$

где  $\Phi_i$  – известные функции ( $i = 1, \dots, m$ ), а  $b_i$  – величины, определяемые из проведенных измерений и, следовательно, содержащие ошибки. Допустим, что известно грубое приближение искомого решения

$$a_i = a_i^{(0)}, \dots, a_6 = a_6^{(0)}. \tag{14.3}$$

Обозначим разницу между приближенными и точными значениями элементов орбиты буквой  $\Delta$ ,

$$a_i - a_i^{(0)} = \Delta_i \quad (i = 1, \dots, 6).$$

---

<sup>55</sup> Иоганн Карл Фридрих Гаусс (Johann Carl Friedrich Gauß, 1777–1855). Немецкий математик, астроном и физик, считается одним из величайших математиков всех времён, «королём математиков». Лауреат медали Копли (1838), иностранный член Шведской (1821) и Российской (1824) Академий наук, английского Королевского общества.

Считая функции  $\Phi_i$  дифференцируемыми, запишем

$$\Phi_i(a_1, \dots, a_6) - \Phi_i(a_1^{(0)}, \dots, a_6^{(0)}) = \sum_{k=1}^6 \frac{\partial \Phi_i}{\partial a_k} \Delta_k, \quad (14.4)$$

где частные производные  $\frac{\partial \Phi_i}{\partial a_k}$  ( $i, k = 1, \dots, 6$ ) берутся для точки  $(a_1^{(0)}, \dots, a_6^{(0)})$ . Подставляя (14.4) в (14.2), получаем систему линейных уравнений

$$\sum_{k=1}^6 A_{1k} \Delta_k = B_1, \quad \dots, \quad \sum_{k=1}^6 A_{mk} \Delta_k = B_m, \quad (14.5)$$

где

$$B_i = b_i - \beta_i \quad (i = 1, \dots, m).$$

Причем  $\beta_i = \Phi_i(a_1^{(0)}, \dots, a_6^{(0)})$ , а  $A_{ik} = \frac{\partial \Phi_i}{\partial a_k}$ .

Чтобы избавиться от избыточности системы (14.5), следует обратиться к решению задачи в иной постановке, которая накладывает на нее новые условия. Пусть ими будет требование минимума величины  $T$ , определяемое выражением

$$T = \left[ \sum_{k=1}^6 A_{1k} \Delta_k - B_1 \right]^2 + \dots + \left[ \sum_{k=1}^6 A_{mk} \Delta_k - B_m \right]^2.$$

Очевидно, что это требование говорит о стремлении отыскать такие  $\Delta_k$  ( $k = 1, \dots, 6$ ), которые дадут в некотором смысле минимальные ошибки определения  $a_k$ . Необходимое условие минимума  $T$  имеет вид

$$\frac{\partial T}{\partial \Delta_k} = 0 \quad (k = 1, \dots, 6).$$

В отличие от системы (14.5) последняя система содержит точно шесть уравнений, решение которых дает значения  $\Delta_1, \dots, \Delta_6$ , позволяющие уточнить принятое выше приближение (14.3)

$$a_k^{(1)} = a_k^{(0)} + \Delta_k. \quad (14.6)$$

Это первое приближение можно, в свою очередь, уточнить, повторив описанную процедуру, в которой вместо значений  $(a_1, \dots, a_6)$ , взятых из (14.3), берутся значения  $a_k = a_k^{(1)}$ , определяемые равенствами (14.6). Процесс последовательных уточнений прекращается, как только разность между двумя последовательными значениями вычисленных элементов  $a_k$  станет меньше заданной величины. Здесь опускаются доказательство сходимости описанного процесса и изложение различных возможных усовершенствований метода.

Метод наименьших квадратов широко применяется в науке в силу его простоты, универсальности и свойственной ему оптимальности. Однако ему свойственны и недостатки. Применительно к задачам космонавтики одним из основных недостатков является, условно говоря, его «статичность». Он прекрасно приспособлен для обработки некоторого неизменного массива измерительной информации. Представим себе, однако, что этот массив все время пополняется новыми измерениями и ждать конца процесса измерений нельзя. Тогда задачу можно поставить так. Пусть на момент  $t$  имеется  $m$  измерений. Определяем элементы орбиты, исходя из этого числа измерений. На момент  $t_2 > t_1$  число измерений возрастает и становится, например, равным  $m + 1$ . Тогда новое определение элементов орбиты будет, вообще говоря, точнее, поскольку число измерений увеличилось. Следовательно, после каждого нового измерения следует производить новое определение элементов орбиты. Если пользоваться методом наименьших квадратов или иным аналогичным методом, то после каждого нового измерения следовало бы заново проводить всю достаточно громоздкую процедуру вычислений. Возникает естественное желание: определив элементы орбиты, основываясь на  $m$  измерениях, после каждого очередного измерения не вычислять их заново, а уточнять их, основываясь на этом новом измерении. Так возникает идея *рекуррентных методов*.

## 14.2. Рекуррентные методы

Пусть известен вектор состояния  $\mathbf{a}$  с компонентами  $a_1, \dots, a_6$ , полученный путем обработки массива информации, состоящего из

$m$  измерений. Укажем на это обстоятельство индексом  $m$  при обозначении вектора  $\mathbf{a}$ . Пусть выполнено  $(m+1)$ -е измерение. Обозначим его  $\mathbf{b}_{m+1}$ . Тогда для реализации высказанной идеи нужно построить алгоритм  $\Psi$  такой, чтобы оказалось справедливым равенство

$$\mathbf{a}_{m+1} = \Psi(\mathbf{a}_m, \mathbf{b}_{m+1}). \quad (14.7)$$

Такие методы разработаны, они обычно называются *рекуррентными алгоритмами фильтрации*. Примером такого фильтра является распространенный *фильтр Калмана*<sup>56</sup>. При всем разнообразии реализации фильтра (расширенный фильтр Калмана, сигма-точечный фильтр Калмана, фильтр Калмана–Бьюси, гибридный фильтр Калмана) его идея весьма простая. По схеме предиктор–корректор (предсказание–корректировка) на основании линеаризованной и дискретизированной динамической модели по известному на текущему момент фазовому состоянию механической системы с учетом неточного знания модели предсказывается ее фазовое состояние на следующий момент времени. По поступающему в этот момент времени измерению с учетом погрешности предсказанное состояние корректируется. Далее процесс повторяется. На языке формул это в сильно упрощенной форме выглядит следующим образом<sup>57</sup>.

Имеем модель движения  $\dot{x} = F(x, t) + q$  и модель измерений  $\psi = U(x, t) + r$ , где  $x$  – фазовый вектор,  $\psi$  – измерение,  $q, r$  – шумы модели и измерений с *ковариационными матрицами*<sup>58</sup>  $Q, R$  соответственно, подчиняющиеся определенным и, как правило,

---

<sup>56</sup> Рудольф Эмиль Калман (венг. Kálmán Rudolf Emil), родился в 1930 году в Будапеште – инженер и исследователь в области теории управления. Внёс существенный вклад в современную теорию управления, наиболее известен как создатель фильтра Калмана.

<sup>57</sup> Методы обработки измерений: учеб. пособие / А.К. Платонов, Д.С. Иванов. М.: МФТИ, 2013. 108 с.

<sup>58</sup> Ковариационная матрица случайного вектора – квадратная симметрическая неотрицательно определенная матрица, на диагонали которой располагаются дисперсии компонент вектора, а внедиагональные элементы – ковариации (мера линейной зависимости двух случайных величин) между компонентами.



невыполняемым на практике условиям. После линеаризации и дискретизации этих моделей получаем:

$$x_k = Fx_{k-1} + q_k, \quad \psi_k = Ux_k + r_k.$$

Здесь нижний индекс  $k$  обозначает текущий момент времени,  $k-1$  – предыдущий момент, знак минус в верхнем индексе будет обозначать предсказанное промежуточное значение.

На входе фильтра имеем определенные в прошлый момент времени состояние системы  $x_{k-1}$  и ошибку  $P_{k-1}$ . Предсказываем состояние системы и ошибку ковариации в следующий момент времени по формулам:

$$x_k^- = Fx_{k-1}, \quad P_k^- = FP_{k-1}F^T + Q.$$

Для корректировки состояния по поступившему измерению  $\psi_k$  вычисляем матрицу усиления Калмана (или матрицу релаксации)  $K_k = P_k^- U^T (UP_k^- U^T + R)^{-1}$ , обновляем оценку состояния с учетом поступившего измерения  $x_k = x_k^- + K_k(\psi_k - Ux_k^-)$  и обновляем ошибку ковариации  $P_k = (E - K_k U)P_k^-$ . Далее процесс повторяется для уточнения состояния системы по вновь поступившему измерению.

Обратимся к одной элементарной задаче, которая хорошо иллюстрирует суть рекуррентных методов. Пусть необходимо найти наиболее вероятное значение некоторой координаты  $a$ , причем алгоритм нахождения этого наиболее вероятного значения сводится к вычислению среднеарифметического значения многократного измерения  $b_i$  этой координаты

$$a_m = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m b_i.$$

Здесь индекс  $m$  при величине  $a$ , как и выше, указывает на то, что она найдена путем обработки  $m$  измерений. Пусть теперь произведено еще одно  $(m+1)$ -измерение. Тогда уточненное значение величины  $a$  будет

$$a_{m+1} = \frac{1}{m+1} \sum_{i=1}^{m+1} b_i. \quad (14.8)$$

Если рассмотреть разность  $a_{m+1} - a_m$ , то несложные преобразования позволяют найти следующее равенство:

$$a_{m+1} = \frac{ma_m + b_{m+1}}{m+1}. \quad (14.9)$$

Полученное выражение имеет вид соотношения (14.7). Проиллюстрируем эффективность рекуррентного алгоритма (14.9) определения  $a$  следующим образом. Пусть, например,  $m=1000$ . Тогда нахождение  $a_{m+1}$  по формуле (14.8) потребует выполнения около 1000 элементарных операций, в то время как использование соотношения (14.9) – всего лишь четырех таких операций. Неудивительно, что в космонавтике, где нередко приходится иметь дело с очень большими массивами постепенно накапливаемой измерительной информации, рекуррентные алгоритмы фильтрации находят самое широкое применение. Это дает возможность располагать в любой момент времени  $t$  наиболее вероятным значением вектора состояния, например орбиты **a**, непрерывно уточняемым практически в темпе приема измерительной информации.

## Заключение

Ограниченный объем семестрового курса не дает возможность изложить материал с необходимой степенью строгости и детализацией. За пределами курса остались важные с точки зрения современного использования аппарата динамики космического полета темы. В первую очередь следует упомянуть использование двигателей малой тяги для изменения параметров орбиты вплоть до выхода космического аппарата за пределы грависферы планеты и осуществления межпланетной миссии. Особенно это важно для бурно развивающегося направления освоения космического пространства с использованием малогабаритных аппаратов с присутствующими им ограничениями. Новые типы движителей малой тяги, например, электроспрейные (коллоидные) двигатели, солнечный парус из современных материалов, тросовые системы обеспечивают необходимые тяговые характеристики и позволяют реализовывать межпланетные миссии, а также искать решения катастрофически надвигающейся проблемы космического мусора. Решение этих задач неотделимо от использования современных методов теории динамических систем, о чем кратко говорится в лекции о точках либрации. Не рассмотрены способы построения орбитальных группировок КА. Этот список можно продолжить. Совсем не затронута тема вращательного движения КА относительно своего центра масс и вопросы управления ориентацией. Это сделано специально, так как она является содержанием специального курса, читаемого автором студентам-старшекурсникам, специализирующимся на вопросах динамики полета и управления КА. Аналогично, именно детальные курсы, которые ждут студентов в дальнейшем на базовых кафедрах, дают возможность опустить отдельные вопросы при изложении основ динамики космического полета. Не рассмотренные в лекциях темы можно найти в рекомендованной литературе, список которой приведен в конце издания. Конечно, он не может претендовать на полноту, но, с другой стороны, автор и не ставил перед собой цель объять необъятное. Заинтересовать студента, дать общий взгляд на задачи динамики космического полета, обратить его внимание на текущие тренды – это цель изложенных лекций.

В пособии нет заданий и задач. Автор придерживается мнения, что решению задач надо учить специально, прослушать лишь курс лекций недостаточно. Для этого надо значительно увеличить объем часов, выделяемых на курс, и ввести практические занятия. В рамках лекционного курса контроль знаний студентов осуществляется путем проведения нескольких экспресс-контрольных по пройденным темам, что позволяет осуществить обратную связь с аудиторией и определить уровень освоения материала.

По-видимому, в силу известных обстоятельств роль современных математических методов и проработанных на их базе методических и прикладных вопросов по теории движения и управлению КА будет возрастать, ибо новые все усложняющиеся задачи необходимо будет решать в условиях ограниченности ресурсов. Причем это касается не только вопросов динамики и управления движением, но и других сторон функционирования КА – электроники, материаловедения, связи, вычислительных средств, средств вывода на орбиту.

## Литература

1. *Раушенбах Б.В., Овчинников М.Ю.* Лекции по динамике космического полета. М.: МФТИ, 1997. 188 с.
2. *Дубошин Г.Н.* Небесная механика. Основные задачи и методы. Изд. 3-е. М.: Наука, 1975. 800 с.
3. *Охоцимский Д.Е., Сихарулидзе Ю.Г.* Основы механики космического полета. М.: Наука, 1990. 448 с.
4. *Эльясберг П.Е.* Определение движения по результатам измерений. М.: Наука, 1976.
5. *Мирер С.А.* Механика космического полета. Орбитальное движение. М.: Резолит, 2007. 270 с.
6. *Маркеев А.П.* Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М.: Наука, 1978. 312 с.
7. *Балк М.Б.* Элементы динамики космического полета. М.: Наука, 1965. 340 с.
8. *Белецкий В.В.* Очерки о движении космических тел. Изд. 3-е испр. и доп. М.: Изд-во ЛКИ, 2009. 432 с.
9. Прикладная небесная механика и управление движением: сб. статей, посвящ. 90-летию со дня рожд. Д.Е. Охоцимского / сост. Т.М. Эннеев, М.Ю. Овчинников, А.Р. Голиков. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 2010. 368 с. (<http://keldysh.ru/memory/okhotsimsky/>)
10. Механика космического полета / М.С. Константинов, Е.Ф. Каменков, Б.П. Перельгин, В.К. Безвербый; под ред. В.П. Мишина. М.: Машиностроение, 1989.
11. *Иванов Н.М., Лысенко Л.Н.* Баллистика и навигация космических аппаратов: учебник для вузов. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Дрофа, 2004. 544 с.
12. *Бахшиян Б.Ц., Федяев К.С.* Основы космической баллистики и навигации: курс лекций. М.: ИКИ РАН, 2013. 119 с.
13. Полет космических аппаратов: Примеры и задачи: справочник / Ю.Ф. Авдеев, А.И. Беляков, А.В. Брыков и др.; под общ. ред. Г.С. Титова. М.: Машиностроение, 1990.
14. *Battin R.H.* An Introduction to the Mathematics and Methods of Astrodynamics. AIAA Inc. Publ, 1999.
15. *Vallado D.A.* Fundamentals of Astrodynamics and Applications. Second ed. Kluwer & Microcosm Publ, 2001. 958 p.
16. *Rauschenbach B.V., Ovchinnikov M.Yu. and McKenna-Lawlor S.* Essential Spaceflight Dynamics and Magnetospherics. Kluwer & Microcosm Publ, 2003. 416p.
17. *Чертюк Б.Е.* Ракеты и люди. В 4-х томах. 2-е изд. М.: Машиностроение, 1999.

## Предметный указатель

- Cluster, 165
- Constellation, 165
- Formation Flying, 165
- Swarm, 165
- активный гравитационный маневр, 180
- апоцентр, 21
- аргумент перицентра, 77, 85
- аргумент широты, 77
- асимптота гиперболы, 179
- асимптотическая орбита, 58
- атмосфера стандартная, 93
- баллистический коэффициент, 93
- барицентр системы, 13
- Бельбруно, Эдвард, 104
- бизеллиптическая траектория, 140
- большая полуось орбиты, 22, 147, 181
- Браге, Тихо, 24
- Брунс, Карл Христиан, 38
- вековое изменение, 120
- вековой уход, 171
- возмущающее ускорение, 85
- возмущенное движение, 36
- восходящий узел орбиты, 77
- время жизни КА, 98
- вторая космическая скорость, 30
- второй интеграл, 22
- вырождение матрицы маневра, 160
- гало-орбита, 57
- Гаусс, Иоганн Карл Фридрих, 189
- гелиосинхронная орбита, 122
- гелиоцентрическая скорость, 184
- географическая долгота, 105
- геосинхронная орбита, 123
- геостационарная орбита, 123
- геоцентрическая широта, 105
- геоцентрическое расстояние, 105
- главная тессеральная гармоника, 107
- главный спутник, 166
- Гоман, Вальтер, 27
- грависфера, 61, 177
- грависфера Кислика, 69
- грависфера Лапласа, 63, 64
- гравитационная долина, 124
- гравитационная сфера, 61
- гравитационное поле Земли, 105
- гравитационный маневр, 177
- гравитационный параметр Земли, 99
- гравитационный параметр системы, 14
- граница слабой устойчивости, 104
- движение Лагранжа, 51
- движение Эйлера, 51
- двухимпульсный переход, 26
- двухпараметрическая коррекция, 157

долгота восходящего узла, 77,  
136  
дочерний спутник, 166  
Егоров, Всеволод  
Александрович, 54  
задача двух тел, 12, 24  
закон всемирного тяготения,  
12  
законы Кеплера, 24  
звездный период, 123  
зональная гармоника, 106  
зональный гармонический  
коэффициент, 106  
Зундман, Карл Фритъёф, 41  
импульс разгона, 26  
импульс торможения, 26  
инвариантное многообразие,  
55, 57  
интеграл Лапласа, 19  
интеграл площадей, 16, 82, 87  
интеграл энергии, 15, 72  
интеграл Якоби, 47, 50, 69, 72  
истинная аномалия, 21, 77  
КА «Explorer-6», 129  
КА «Hiten», 104  
КА «Voyager-1», 186  
КА «Луна-3», 185  
Калман, Рудольф Эмиль, 192  
картинная плоскость, 151,  
153, 160, 184  
квасисфера, 49  
квазицилиндр, 49  
Кеплер, Иоганн, 24  
кеплерова орбита, 65  
Кислик, Михаил Дмитриевич,  
69  
кластер, 164  
ковариационная матрица, 192

коллинеарная точка  
либрации, 52, 56, 57  
коническое сечение, 21  
коррекция периода  
обращения, 147  
коррекция траектории, 149  
космический HighWay, 60  
критическая высота, 97  
круговая ограниченная задача  
трех тел, 45, 69  
лагранжева точка равновесия,  
44  
Ламберт, Иоганн Генрих, 188  
Лаплас, Пьер-Симон, 19  
Лидов, Михаил Львович, 125  
линия апсид, 21  
МакКулаг, Джеймс, 109  
малая тяга, 102  
малогабаритный спутник, 164  
маневр в плоскости орбиты,  
140  
маневр снижения, 144  
матрица коррекции, 154  
матрица маневра, 131, 135,  
141  
мгновенный импульс, 26, 145  
межпланетный перелет, 181  
метод Бельбруно, 104  
метод наименьших квадратов,  
189  
метод параллельного  
наведения, 174  
метод свободных траекторий,  
174  
многоцветная коррекция, 163  
Мозер, Юрген Курт, 57  
момент возмущающих  
ускорений, 84

наклонение орбиты, 77, 136  
невозмущенная задача, 12  
нетранзитная орбита, 56, 58  
номинальная траектория, 153  
нормальный импульс, 142  
нуль-направление, 155, 156  
определение элементов  
орбиты, 188  
оптимальное положение  
точки коррекции, 158  
орбита Лиссажу, 59  
орбита Ляпунова, 55, 58, 59  
орбита Молнии, 121  
орбитальная система  
координат, 167  
оскулирующий элемент, 81,  
92, 133, 154, 188  
основная операция, 82  
относительное движение двух  
КА, 164  
относительное ускорение, 68  
параболическая скорость, 177  
парадокс падающего  
спутника, 98  
параметр, 22  
параметр орбиты, 22  
Пенлеве, Поль, 38  
первая космическая скорость,  
28, 181  
первый интеграл, 13  
перицентр, 21  
пертурбационная функция, 40  
планета назначения, 149  
планетная форма уравнений,  
39, 41  
планетоидная задача, 125  
планетоидная задача трех тел,  
45

планетоцентрическая система  
координат, 65, 177, 183  
плоскость Лапласа, 38  
плоскость оптимальной  
коррекции, 156  
плотность атмосферы, 92  
поверхность нулевой  
относительной скорости, 48  
поле центральное ньютоново,  
12  
полярное сжатие Земли, 106,  
111  
постоянная энергии, 16  
потенциал гравитационного  
поля Земли, 108  
потенциал двух неподвижных  
материальных точек, 108  
предиктор-корректор, 192  
прецессия наклонной орбиты,  
116  
приближение МакКулага для  
потенциала Земли, 110  
присоединенная функция  
Лежандра, 105  
прицельная дальность, 179  
промежуточная орбита, 27  
Пуанкаре, Жюль Анри, 38  
радиальный импульс, 142  
радиус сферы влияния, 74  
радиус сферы действия, 67  
радиус сферы притяжения, 62  
резонансные сближения, 103  
рой, 164  
свойство коррекции, 155  
секторальная гармоника, 107  
секторальный гармонический  
коэффициент, 106  
секториальная скорость, 18



сидерический период, 123  
силовая функция, 37, 47  
созвездие, 164  
солнечно-синхронная орбита,  
122  
сопротивление атмосферы, 92  
специальные орбиты, 120  
среднее движение, 33  
средняя аномалия, 34  
средняя угловая скорость, 34  
сфера Апполония, 62  
сфера влияния, 69  
сфера действия, 63, 64, 75,  
125, 150  
сфера единичных импульсов,  
152, 154  
сфера притяжения, 61  
сферическая система  
координат, 76  
тангенциальный импульс, 141  
тессеральная гармоника, 106,  
123  
тессеральный гармонический  
коэффициент, 106  
торможение в атмосфере, 27  
точка коррекции, 162  
точка либрации, 52  
траекторное измерение, 188  
транзитная орбита, 58  
треугольная точка либрации,  
52, 54  
трехпараметрическая  
коррекция, 157, 184  
уравнение Баркера, 35  
уравнение Кеплера, 31, 34

уравнения движения в  
оскулирующих элементах,  
88  
уравнения  
Клохесси-Уилтшира, 169,  
172  
условная классификация  
спутников, 165  
условный перигей, 145  
устойчивость по Хиллу, 50  
фильтр Калмана, 192  
формация, 164  
формула Циолковского, 130  
характеристическая скорость,  
130, 139, 146, 156, 157  
Хилл, Джордж Уильям, 50  
Цандер, Фридрих, 27  
чистое прижатие, 145  
чистое торможение, 145  
Штернфельд, Ари  
Абрамович, 140  
Штумпф, Карл, 44  
эволюция экваториальной  
орбиты, 114  
эйлерова точка равновесия, 43  
эксцентриситет, 21  
эксцентрическая аномалия, 32  
элементарный поворот, 82  
эллипс влияния, 159  
эллипс Гомана, 27  
эллипсоид влияния, 154, 155  
эпоха, 22  
эпоха оскуляции, 81  
Якоби, Карл Густав Якоб, 47

## Список иллюстраций

Рис. 1.1. Система из двух материальных точек .....	13
Рис. 1.2. Заметаемая радиус-вектором площадь за элементарный промежуток времени .....	18
Рис. 2.1. Изменение первоначально круговых орбит импульсами, направленными «по скорости» и «против скорости» .....	26
Рис. 2.2. Двухимпульсный переход с использованием промежуточной орбиты .....	27
Рис. 2.3. Торможение в атмосфере.....	28
Рис. 2.4. Межпланетный перелет .....	29
Рис. 2.5. Две схемы выведения на орбиту искусственного спутника безатмосферной сферической планеты.....	29
Рис. 2.6. Построение эллипса с помощью двух концентрических окружностей.....	32
Рис. 4.1. К задаче трех тел в случае Эйлера и Лагранжа .....	42
Рис. 4.2. К планетоидной задаче трех тел .....	46
Рис. 4.3. Эволюция сечений поверхности (4.5) плоскостями $Oxy$ и $Oxz$ .....	50
Рис. 4.4. Вид поверхности потенциальной энергии для двойной звезды с отношением масс 2:1.....	53
Рис. 4.5. Расположения ретранслятора радиосигналов, излучаемых по каналу $ABC$ с невидимой с Земли стороны Луны .....	54
Рис. 4.6. Плоские и вертикальные орбиты Ляпунова в окрестностях коллинеарных точек либрации системы Солнце–Земля .....	56
Рис. 4.7. Схема расположения КА на гало-орбите около точки либрации $L_2$ .....	57
Рис. 4.8. Асимптотические траектории, связанные с орбитами Ляпунова.....	58
Рис. 5.1. Взаимное расположение Солнца ( $m_1$ ), планеты ( $m_2$ ) и КА ( $m$ ) .....	62
Рис. 5.2. Взаимное расположение Солнца ( $m_1$ ), планеты ( $m_2$ ) и КА ( $m$ ) относительно точки $O$ .....	65

Рис. 5.3. Связь между абсолютной скоростью $V_*$ и относительной скоростью $V$ .....	71
Рис. 5.4. Введение угла $\alpha$ .....	73
Рис. 5.5. Ошибки в определении величин большой полуоси эллипса $\Delta a$ и эксцентриситета $\Delta e$ .....	74
Рис. 6.1. Сферическая система координат.....	76
Рис. 6.2. Переход от декартовой к сферической системе координат .....	78
Рис. 6.3. Переход от координат $Oxyz$ к координатам $O\xi\eta\zeta$ .....	83
Рис. 6.4. Связь между элементарным приращением $dc_\xi$ и элементарным поворотом $d\Omega$ .....	83
Рис. 6.5. Связь между элементарным приращением $dc_\eta$ и элементарным поворотом $di$ .....	84
Рис. 6.6. Определение компонент вектора момента возмущающих ускорений .....	85
Рис. 6.7. Изменение $\omega$ .....	86
Рис. 6.8. Изменение аргумента широты $u$ .....	90
Рис. 7.1. К определению составляющих силы сопротивления.....	93
Рис. 7.2. Графики функций $\cos \nu$ и $\rho = \rho(\nu)$ .....	96
Рис. 7.3. Диаграмма изменения параметра орбиты $p$ от числа витков $N$ для различных значений $C$ .....	98
Рис. 7.4. Космический аппарат, снижающийся по спирали .....	99
Рис. 7.5. Эффект резонансного сближения КА с Луной.....	103
Рис. 8.1. Положительные и отрицательные значения зональной гармоники для $n=4$ (а); положительные и отрицательные значения тессеральной гармоники для $n=10$ и $k=6$ (б); положительные и отрицательные значения секторальной гармоники для $n=6$ (в) .....	107
Рис. 8.2. Связанная с Землей прямоугольная система координат и притягиваемая Землей точка $P$ .....	108
Рис. 8.3. Пересечение плоскости экватора плоскостью орбиты под углом $i$ .....	112
Рис. 8.4. Разложение ускорения $g_m$ .....	114
Рис. 8.5. Характер траектории движения КА в плоскости экватора .....	116

Рис. 8.6. К качественной интерпретации влияния эллипсоида инерции Земли на движение КА .....	117
Рис. 8.7. К качественной интерпретации эффекта вырождения узла при $i \rightarrow 0$ .....	119
Рис. 8.8. Положение КА с шагом в один час на орбите Молнии ..	122
Рис. 9.1. Движение КА в поле двух притягивающих центров .....	126
Рис. 9.2. К возможности падения КА на Землю .....	128
Рис. 10.1. Маневр КА над экватором при $u = 0$ .....	137
Рис. 10.2. Маневр КА над полюсом при $u = \pi / 2$ .....	138
Рис. 10.3. Исходная круговая орбита I и бесконечно близкая ее эллиптическая орбита II, полученная бесконечно малым импульсом $\Delta V_T > 0$ .....	142
Рис. 10.4. Получение направления на перигей (точка D) бесконечно малым импульсом $\Delta V_S < 0$ .....	143
Рис. 11.1. Движение КА внутри сферы действия планеты назначения.....	150
Рис. 11.2. Гелиоцентрический участок некоторой номинальной траектории движения КА, идущей через центр планеты O .....	153
Рис. 11.3. Окружность единичных импульсов в плоскости оптимальной коррекции и эллипс влияния в картинной плоскости.....	158
Рис. 11.4. Эллипсы влияния для разных положений КА на номинальной траектории, соответствующих постоянно нарастающей длительности полета .....	159
Рис. 11.5. Пример ситуации, когда при понижении ранга матрицы маневра осуществление произвольной коррекции становится невозможным .....	161
Рис. 11.6. Положения исходной I и новой II плоскостей орбиты КА .....	162
Рис. 11.7. Оптимальная стратегия двухточечной коррекции при вырождении матрицы коррекции: I – исходная орбита, II – орбита, полученная после первой коррекции, III – орбита, полученная после второй коррекции. ....	163
Рис. 12.1. Конфигурация формации в инерциальном пространстве .....	167
Рис. 12.2. Проекция траектории на плоскость орбиты главного спутника при $C_1 = 0$ .....	170

Рис. 12.3. Траектория относительного ухода дочернего спутника .....	170
Рис. 12.4. Система координат, связанная с пассивным КА .....	175
Рис. 13.1. Траектория движения КА в поле планеты при гравитационном маневре .....	179
Рис. 13.2. Схема межпланетного перелета с гравитационным маневром .....	182
Рис. 13.3. Диаграмма скоростей перед (верхняя) и после (внизу) гравитационного маневра .....	183
Рис. 13.4. Картинная плоскость планеты, используемая для расчета гравитационного маневра .....	184
Рис. 13.5. «Естественная» траектория полета к Луне .....	185
Рис. 13.6. Траектория полета к Луне с гравитационным маневром .....	185
Рис. 13.7. Схема полета КА «Voyager-1» и «Voyager-2» с указанием дат и планет, где выполнялись гравитационные маневры .....	187

## Список таблиц

Табл. 1. Космические скорости для планет Солнечной системы ...	31
Табл. 2. Радиус сферы действия (млн км) .....	67
Табл. 3. Относительные ускорения на границе грависферы .....	68
Табл. 4. Радиус сферы влияния (млн км) .....	75
Табл. 5. Гравитационные параметры основных тел Солнечной системы .....	99
Табл. 6. Условная классификация спутников по массе .....	166
Табл. 7. Максимально возможные приращения скорости, км/с....	181
Табл. 8. Характеристики планет Солнечной системы .....	206

Таблица 8

### Характеристики планет Солнечной системы (<http://galspace.spb.ru/xaracteris.html>)

Основные параметры:	Меркурий	Венера	Земля	Луна	Марс	Юпитер	Сатурн	Уран	Нептун	Плутон
Масса ( $10^{24}$ кг)	0,330	4,87	5,97	0,073	0,642	1899	568	86,8	102	0,0125
Диаметр (км)	4879	12104	12756	3475	6794	142984	120536	51118	49528	2390
Плотность (кг/м <sup>3</sup> )	5427	5243	5515	3340	3933	1326	687	1270	1638	1750
Притяжение (м/с <sup>2</sup> кг)	3.7	8.9	9.8	1.6	3.7	23.1	9.0	8.7	11.0	0.6
Период вращения (часы)	1407.6	−5832.5	23.9	655.7	24.6	9.9	10.7	−17.2	16.1	−153.3
Продолжительность дня (часы)	4222.6	2802.0	24.0	708.7	24.7	9.9	10.7	17.2	16.1	153.3
Расстояние от Солнца (млн км)	57.9	108.2	149.6	0.384*	227.9	778.6	1433.5	2872.5	4495.1	5870.0
Перигелий (млн км)	46.0	107.5	147.1	0.363*	206.6	740.5	1352.6	2741.3	4444.5	4435.0
Афелий (млн км)	69.8	108.9	152.1	0.406*	249.2	816.6	1514.5	3003.6	4545.7	7304.3
Орбитальный период (дней)	88.0	224.7	365.2	27.3	687.0	4331	10747	30589	59800	90588
Орбитальная скорость (км/с)	47.9	35.0	29.8	1.0	24.1	13.1	9.7	6.8	5.4	4.7
Наклон орбиты (градусы)	7.0	3.4	0.0	5.1	1.9	1.3	2.5	0.8	1.8	17.2

Эксцентриситет орбиты (км/с)	0.205	0.007	0.017	0.055	0.094	0.049	0.057	0.046	0.011	0.244
Наклон оси (градусы)	0.01	177.4	23.5	6.7	25.2	3.1	26.7	97.8	28.3	122.5
Температура (к)	167	464	15	−20	−65	−110	−140	−195	−200	−225
Поверхностное давление (bar)	0	92	1	0	0.01	Неизвестно	Неизвестно	Неизвестно	Неизвестно	0
Количество лун	0	0	1	0	2	63	47	27	13	1
Кольцевая система	Нет	Нет	Нет	Нет	Нет	Да	Да	Да	Да	Нет
Глобальное магнитное поле	Да	Нет	Да	Нет	Нет	Да	Да	Да	Да	Неизвестно

**► Период вращения** – промежуток времени, в течение которого точка совершает полный оборот, двигаясь по окружности. **► Альbedo** (позднелат. albedo, от лат. albus – белый) – характеристика отражательных свойств поверхности какого-либо тела: отношение потока излучения, рассеиваемого поверхностью, к потоку, падающему на неё. **► Визуальная величина** – мера освещённости, создаваемой небесным светилом (звездой, планетой, Солнцем и т.п.) на Земле на плоскости, перпендикулярной падающим лучам; мера блеска небесного светила. **► Сидерический период** – промежуток времени, в течение которого какое-либо небесное тело-спутник совершает вокруг главного тела полный оборот относительно звёзд. **► Перигелий** (от пери... и греч. helios – Солнце) – ближайшая к Солнцу точка орбиты небесного тела, движущегося вокруг Солнца по одному из конических сечений – эллипсу, параболе или гиперболе. **► Афелий** (от греч. аро – вдали от и helios – Солнце) – точка орбиты планеты, кометы или какого-либо другого тела, обращающегося вокруг Солнца, наиболее удалённая от Солнца. **► Синодический период** обращения – промежуток времени, по истечении которого какая-либо планета, двигаясь вокруг Солнца по своей орбите, возвращается при наблюдении с Земли в прежнее положение. **► Наклон орбиты** – угол между плоскостью орбиты и плоскостью эклиптики.

Учебное издание

**Овчинников Михаил Юрьевич**

**ВВЕДЕНИЕ В ДИНАМИКУ  
КОСМИЧЕСКОГО ПОЛЁТА**

Учебное пособие

Редактор *Л. В. Себова*. Корректор *Н. Е. Кобзева*  
Компьютерная верстка *Н. Е. Кобзева*

Подписано в печать 10.05.2016. Формат  $60 \times 84 \frac{1}{16}$ . Усл. печ. л. 13,0.  
Уч.-изд. л. 12,4. Тираж 250 экз. Заказ № 182.

Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Московский физико-технический институт (государственный университет)»  
141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9  
Тел. (495) 408-58-22, e-mail: [rio@mipt.ru](mailto:rio@mipt.ru)

---

Отдел оперативной полиграфии «Физтех-полиграф»  
141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9  
Тел. (495) 408 84 30, e-mail: [polygraph@mipt.ru](mailto:polygraph@mipt.ru)