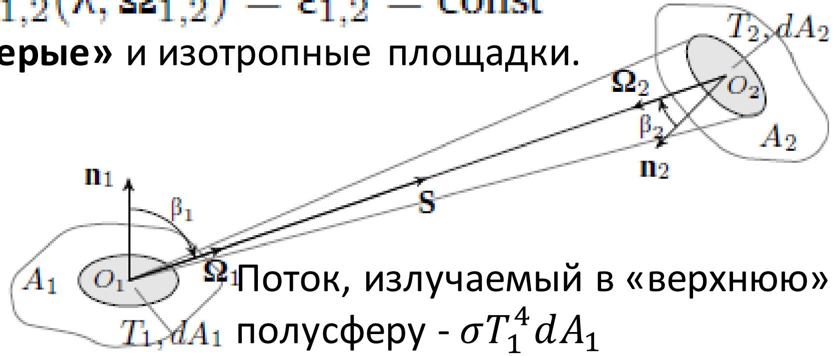
МЕТОДЫ РАСЧЁТА ТЕПЛООБМЕНА ИЗЛУЧЕНИЕМ МЕЖДУ ПОВЕРХНОСТЯМИ, ИМЕЮЩИМИ ПРОИЗВОЛЬНУЮ ОРИЕНТАЦИЮ (МЕТОД УГЛОВЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ) (1)

Инженерная технология расчёта теплообмена излучением в геометрически сложных системах: прикладная оптика, светотехника, теплопередача, дистанционное зондирование. Задача: **рассчитать теплообмен излучением между двумя элементарными площадками dA_1 и dA_2,** которые являются **простейшими** элементами поверхностей A_1 и A_2 реальных объектов. **Метод угловых коэффициентов между элементарными площадками.**

$$\varepsilon_{1,2}(\lambda, \mathbf{\Omega}_{1,2}) = \varepsilon_{1,2} = \text{const}$$

«серые» и изотропные площадки.



Поток, излучаемый в «верхнюю» полусферу - $\sigma T_1^4 dA_1$

Интегральный по спектру поток энергии, излучаемый в единицу времени dA_1, который попадает на dA_2:

$$dQ_{d_1\to d_2} = \int_0^\infty dQ_{d_1\to d_2}(\lambda)\, d\lambda = \int_0^\infty B(\lambda,T) d\lambda dA_1 cos\beta_1 d\vec{\Omega}_1 = \left[\int_0^\infty B(\lambda,T)\, d\lambda\right] dA_1 cos\beta_1 d\vec{\Omega}_1 =$$

$$= \frac{\sigma T_1^4}{\pi} dA_1 \cos\beta_1 d\mathbf{\Omega}_1 = \frac{\sigma T_1^4}{\pi} \frac{dA_1 dA_2 \cos\beta_1 \cos\beta_2}{S^2}. \quad (1)$$

Элементарный угловой коэффициент (ЭУК) (angle factor) (dF_{d1-d2}) – доля энергии, излучаемой dA_1 в $(+2\pi)$, попадающей на dA_2:

$$dF_{d_1\to d_2} = \frac{dQ_{d_1\to d_2}}{\sigma T_1^4 dA_1} = \frac{\sigma T_1^4}{\pi} \frac{dA_1 dA_2 \cos\beta_1 \cos\beta_2}{\sigma T_1^4 dA_1 S^2} = \frac{\cos\beta_1 \cos\beta_2}{\pi S^2} dA_2 \quad (2).$$

$$dF_{di\to dj}\, dA_i = dF_{dj\to di}\, dA_j \quad (3)$$

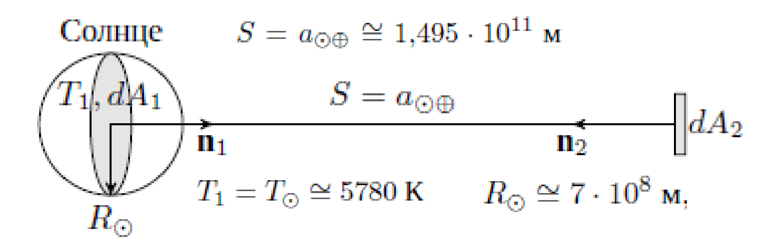
– соотношение взаимности для УК между элементарными площадками

Знание dF_{d1-d2} (dF_{d2-d1}), позволяет рассчитать лучистый теплообмен между элементарными площадками:

$$dQ_{d1\rightleftarrows d2} = \sigma(T_1^4 - T_2^4) dF_{d1-d2} dA_1 = \sigma(T_1^4 - T_2^4) dF_{d2-d1} dA_2 \quad (4)$$

МЕТОДЫ РАСЧЁТА ТЕПЛООБМЕНА ИЗЛУЧЕНИЕМ МЕЖДУ ПОВЕРХНОСТЯМИ, ИМЕЮЩИМИ ПРОИЗВОЛЬНУЮ ОРИЕНТАЦИЮ (МЕТОД УГЛОВЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ) (2)

Пример 1. Рассчитать интегральную по спектру солнечную постоянную, используя метод УК (формулы (1) и (2)).

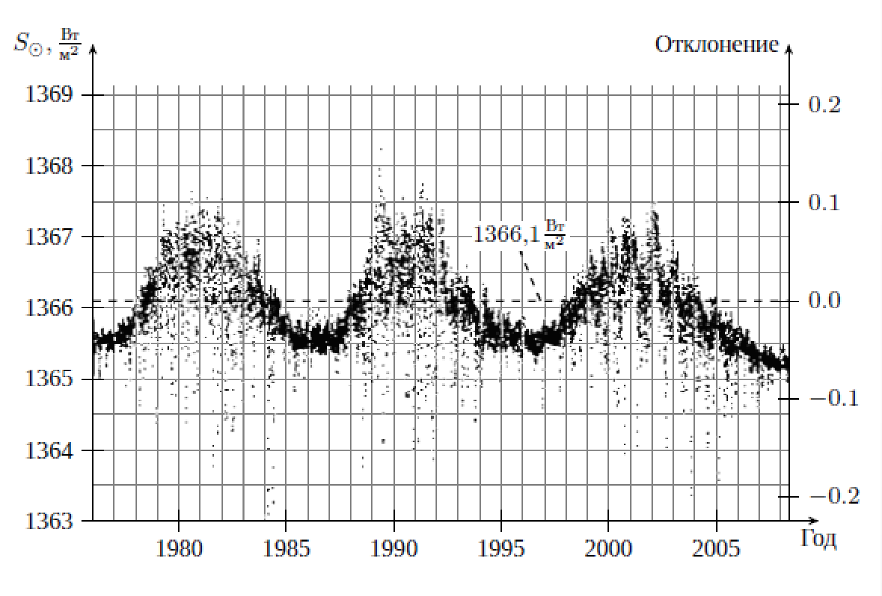


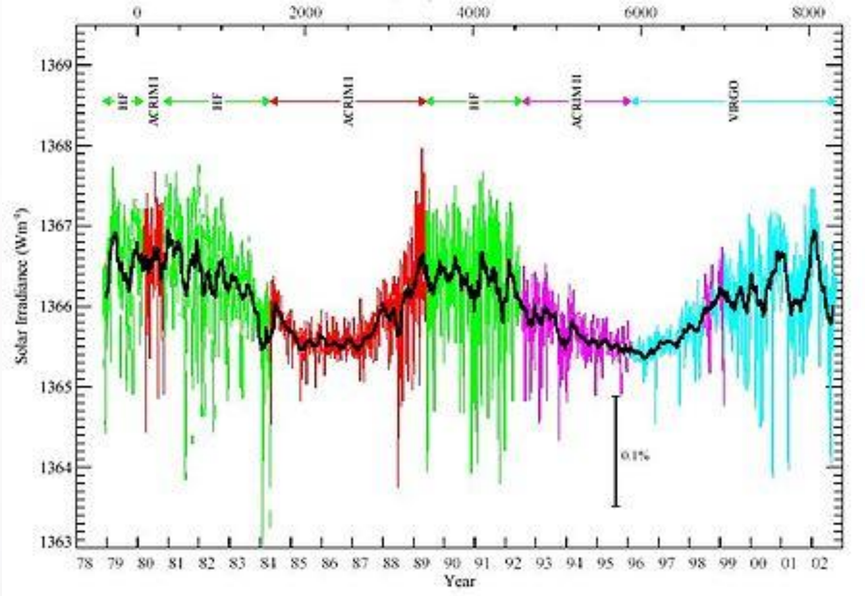
Модель. Солнце –элементарная площадка dA_1; dA_2 — элементарная площадка на поверхности Земли (без учета атмосферы или на ВГА). dA_1 - АЧТ

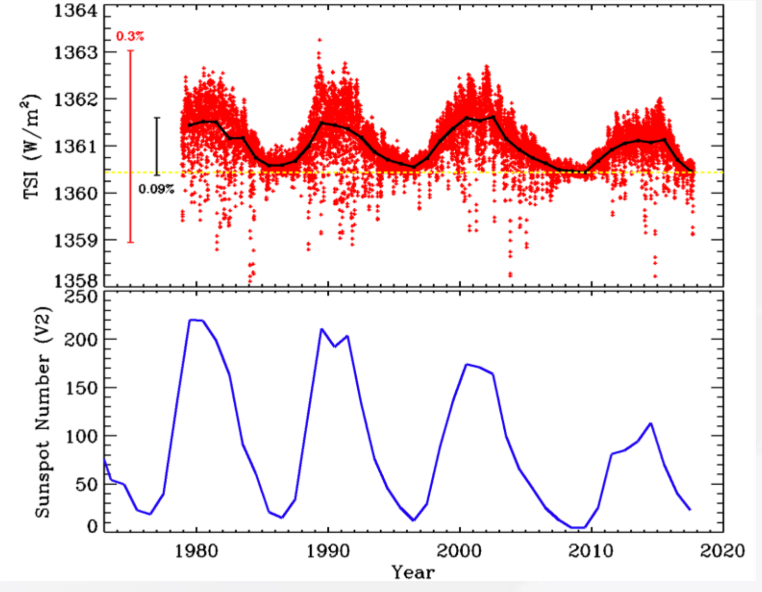
Солнечная постоянная: $$S_\odot = \frac{dQ_{\odot\to dA_2}}{dA_2} = \frac{dQ_{dA_1\to dA_2}}{dA_2} \quad (5)$$

$$S_\odot = \frac{dQ_{\odot\to dA_2}}{dA_2} = \frac{\sigma T_1^4}{dA_2\pi}\frac{dA_1 dA_2}{S^2}\underbrace{(\cos\beta_1)}_{1}\underbrace{(\cos\beta_2)}_{1} = \frac{\sigma T_\odot^4}{\pi}\frac{dA_1}{S^2} \cong 1{,}366\ \frac{\text{кВт}}{\text{м}^2} \quad (6)$$

Актуальные данные по спутниковым измерениям TSI (total solar irradiance), например: https://spot.colorado.edu/~koppg/TSI/ Данные нормализованы на расстояние равное 1 а. е.







Калькуляторы для вычисления солнечной постоянной и солнечной инсоляции

1) Вычисление интегральной по спектру солнечной постоянной по дням года (Solar Radiation Outside the Earth's Atmosphere)

https://www.pveducation.org/pvcdrom/properties-of-sunlight/solar-radiation-outside-the-earths-atmosphere

2) Вычисление солнечной инсоляции

Основываясь на уравнении положения солнца на небосводе в течение года, рассчитывается максимальное количество солнечного излучения (**инсоляция**) в отсутствие облаков на поверхности Земли при определенном положении солнца как функцию широты (координаты наблюдателя) и дня в году.

https://www.pveducation.org/pvcdrom/properties-of-sunlight/calculation-of-solar-insolation

Анимации показывают дневную солнечную освещенность, солнечную инсоляцию и количество часов в течение дня, когда светит солнце. Данные не включают в себя местные погодные эффекты, поэтому это скорее теоретические графики, которые могут использоваться для предварительных оценок. Первый график показывает интенсивность прямого излучения в Вт / м^2 в течение дня в отсутствии облачности. Время - местное солнечное время.

УГЛОВЫЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ ДЛЯ ПЛОЩАДОК КОНЕЧНЫХ РАЗМЕРОВ

Одна из площадок конечного размера, угловые коэффициенты (УК):

$$A_2 dF_{2-d1} = dA_1 dF_{d1-2} \quad (1')$$

$$dF_{d1-2} = \int_{A_2} \frac{cos\beta_1 cos\beta_2}{\pi S_{d1-d2}^2} dA_2 \quad dF_{2-d1} = \frac{dA_1}{A_2} \int_{A_2} \frac{cos\beta_1 cos\beta_2}{\pi S_{d2-d1}^2} dA_2 \quad (1)$$

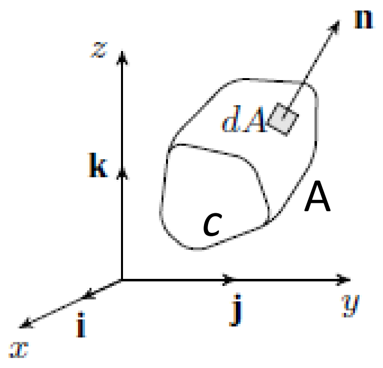
Обе площадки конечных размеров:

$$F_{1-2} = \frac{1}{A_1} \int_{A_1} \int_{A_2} \frac{\cos\beta_1 \cos\beta_2}{\pi S_{1-2}^2} dA_1 dA_2,$$

$$F_{2-1} = \frac{1}{A_2} \int_{A_2} \int_{A_1} \frac{\cos\beta_1 \cos\beta_2}{\pi S_{2-1}^2} dA_2 dA_1. \quad (2)$$

$$F_{1-2} A_1 = F_{2-1} A_2. \quad (3)$$

Расчёт УК между *элементарной площадкой и площадкой конечных размеров* (1), основанный на **теореме Стокса**.



$$\oint \left[P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz\right] =$$
$$= \int_A \left(\frac{\partial Q(x,y,z)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y,z)}{\partial y}\right) dx\,dy + \quad (4)$$
$$+ \left(\frac{\partial R(x,y,z)}{\partial y} - \frac{\partial Q(x,y,z)}{\partial z}\right) dy\,dz +$$
$$+ \left(\frac{\partial P(x,y,z)}{\partial z} - \frac{\partial R(x,y,z)}{\partial x}\right) dx\,dz.$$

$$\begin{cases} dxdy = dA \cdot \cos(\widehat{\mathbf{n},\mathbf{k}}) = dA \cdot \cos\delta = n\,dA, \\ dydz = dA \cdot \cos(\widehat{\mathbf{n},\mathbf{i}}) = dA \cdot \cos\alpha = l\,dA, \\ dzdx = dA \cdot \cos(\widehat{\mathbf{n},\mathbf{j}}) = dA \cdot \cos\gamma = m\,dA, \end{cases} \quad (5)$$

$$\oint_C (P\,dx + Q\,dy + R\,dz) = \quad (6)$$
$$= \int_A \left[\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial R}{\partial y}\right) n + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) l + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) m\right] dA.$$

$$dF_{d1-d2} = \int_{A_2} \frac{cos\beta_1 cos\beta_2}{\pi S_{d1-d2}^2} dA_2 \quad (1)$$

Вывод формул (1) - (2) слайда 5.

Лучистый тепловой поток между 2-мя элементарными «серыми» изотермическими площадками (от dA_1 к dA_2): $(S = S_{d1-d2} = S_{d2-d1})$

$dQ_{d1-d2} = \frac{\sigma T_1^4}{\pi} \frac{cos\beta_1 cos\beta_2}{S^2} dA_1 dA_2$ $(1')$. Пусть 2-я площадка конечных размеров $dF_{d1-2} = \frac{\int_{A_2} dQ_{d1-d2}}{dQ_1}$ (2'),

где $dQ_1 = \sigma T_1^4 dA_1$ – поток от dA_1 в полусферу с A_2. $dF_{d1-2} = \frac{\sigma T_1^4 \int_{A_2}(cos\beta_1 cos\beta_2 dA_1)/\pi S^2 dA_2}{\sigma T_1^4 dA_1} = \int_{A_2} \frac{cos\beta_1 cos\beta_2}{\pi S^2} dA_2 = \int_{A_2} dF_{d1-d2}$ $(3')$.

Угловой коэффициент $\boldsymbol{dF_{2-d1}}$–? Поток излучения, падающий на элементарную dA_1 от площадки A_2:

$dQ_{2-d1} = \int_{A_2} dQ_{d2-d1} = \int_{A_2} \frac{\sigma T_2^4}{\pi} \frac{cos\beta_1 cos\beta_2}{S^2} dA_1 dA_2 = \sigma T_2^4 dA_1 \int_{A_2} \frac{cos\beta_1 cos\beta_2}{\pi S^2} dA_2$ $(4')$. Поток от A_2 в полусферу dA_1: $Q_2 = \int_{A_2} \sigma T_2^4 dA_2 =$

$= \sigma T_2^4 A_2$ $(5')$ $\quad \boldsymbol{dF_{2-d1}} = \frac{dQ_{2-d1}}{Q_2} = \frac{dA_1}{A_2} \int_{A_2} \frac{cos\beta_1 cos\beta_2}{\pi S^2} dA_2$ $(6')$, откуда $A_2 dF_{2-d1} = dA_1 dF_{d1-2}$ (7').

Теплообмен излучением

Поток, излучаемый dA_1 и попадающий на A_2 – $\boldsymbol{dQ_{d1-2} = \sigma T_1^4 dA_1 dF_{d1-2}}$ (8');

поток, излучаемый A_2 и попадающий на dA_1 – $\boldsymbol{dQ_{2-d1} = \sigma T_2^4 A_2 dF_{2-dA_1}}$ $(9')$.

Поток результирующего излучения между площадками $A_2 \rightleftarrows dA_1$: $\boldsymbol{dQ_{dA_1 \rightleftarrows A_2} = dQ_{d1-2} - dQ_{2-d1} = \sigma T_1^4 dA_1 dF_{d1-2} - \sigma T_2^4 A_2 dF_{2-dA_1}}$.

Угловые коэффициенты для 2-х площадок A_1 и A_2 конечных размеров:

$$F_{1-2} = \frac{Q_{1-2}}{Q_1} = \frac{\int_{A_1}\int_{A_2} dQ_{d1-d2}}{\sigma T_1^4 A_1} = \frac{1}{A_1} \int\limits_{A_1}\int\limits_{A_2} \frac{cos\beta_1 cos\beta_2}{\pi S^2} dA_1 dA_2 \qquad (10')$$

$$F_{2-1} = \frac{Q_{2-1}}{Q_2} = \frac{\int_{A_1}\int_{A_2} dQ_{d2-d1}}{\sigma T_2^4 A_2} = \frac{1}{A_2} \int\limits_{A_1}\int\limits_{A_2} \frac{cos\beta_1 cos\beta_2}{\pi S^2} dA_1 dA_2 \qquad (11')$$

$$A_1 F_{1-2} = A_2 F_{2-1} \quad (12')$$

Пример 2. Рассчитать теплообмен излучением между элементарной площадкой dA_1 и площадкой A_2: dF_{d1-2} ?

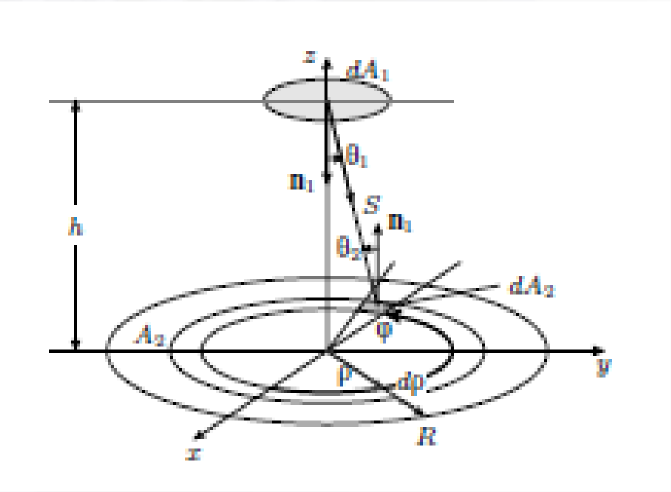


Рис. 1.

Задача моделирует взаимное положение входной апертуры приемника излучения и объекта в виде круга при соосном наблюдении в надир. Для того, чтобы воспользоваться полученными формулами для угловых коэффициентов между элементарными площадками, выделим на А2 элементарную площадку dA_2.

Полярная система координат. $dA_2 = \rho d\rho d\varphi$.

Координаты $dA_1(x_1 = 0, y_1 = 0, z_1 = h)$; $dA_2(x_2 = \rho cos\varphi, y_2 = \rho cos\varphi, z_2 = 0)$

$$S = \sqrt{\rho^2(cos\varphi)^2 + \rho^2(sin\varphi)^2 + h^2} = \sqrt{\rho^2 + h^2};\ cos\theta_1 = cos\theta_2 = \frac{h}{S}.$$

$$\boxed{dF_{d1-d2} = \frac{cos\theta_1 cos\theta_2}{\pi S^2} dA_2 = \frac{h^2}{\pi(\rho^2+h^2)^2}\rho d\rho d\varphi.} \quad (7)$$

Пример 3. Рассчитать энергию, поступающую на вход апертуры приёмника излучения радиуса *R*, расположенного на расстоянии d от центра элементарной площадки dA_1 (АЧТ при температуре T_1).

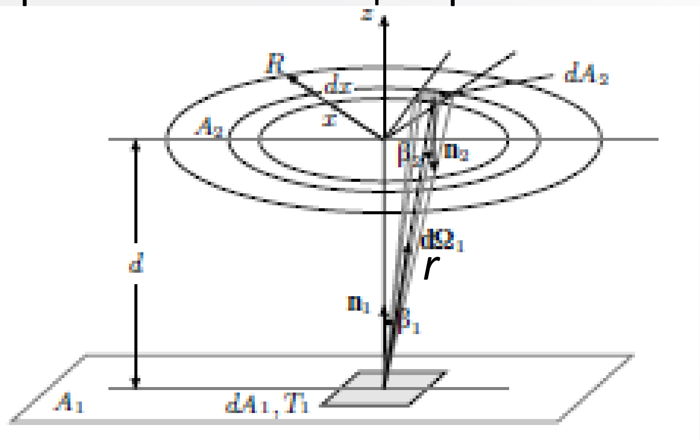


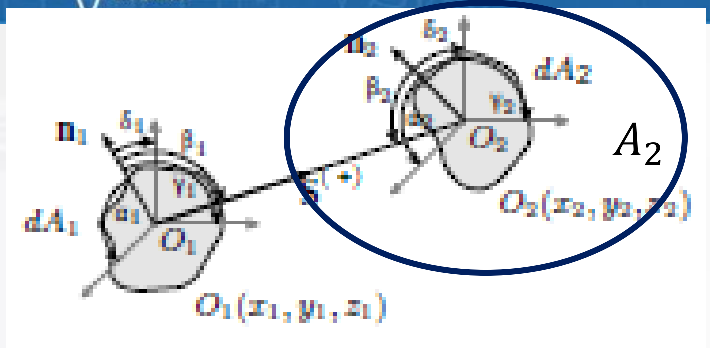
Рис. 2

$$dQ_{d1-d2} = \frac{\sigma T_1^4}{\pi} dA_1 cos\beta_1 d\vec{\Omega}_1 = \overbrace{\frac{\sigma T_1^4}{\pi}}^{L_1} dA_1 \frac{cos\beta_1 cos\beta_2}{r^2} dA_2 = L_1 \frac{cos\beta_1 cos\beta_2}{r^2} dA_2.$$

$\beta_1 = \beta_2 = \theta = \frac{d}{r} = \frac{d}{\sqrt{d^2+x^2}}$. Полный поток:

$Q_{d1-d2} = L_1 \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{(cos\theta)^2 dA_2}{r^2} \approx \pi L_1 \left(\frac{R}{d}\right)^2 \left[1 - \left(\frac{R}{d}\right)^2 + \cdots\right]$ (8). При $d \gg R$ (8) -поток излучения от «точечного» источника: $(Q_{d1-d2})_{ти} = \sigma T_1^4 dA_1 \left(\frac{R}{d}\right)^2$ (9)

МЕТОДЫ РАСЧЁТА ТЕПЛООБМЕНА ИЗЛУЧЕНИЕМ МЕЖДУ ПОВЕРХНОСТЯМИ, ИМЕЮЩИМИ ПРОИЗВОЛЬНУЮ ОРИЕНТАЦИЮ (МЕТОД УГЛОВЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ) (5)



Задача: Для определения УК между элементарной площадкой dA_1 и площадкой конечных размеров A_2 $(dA_2 \in A_2)$ по формуле (1) для вычисления интеграла по площади A_2 применить теорему Стокса (6):

$$dF_{d1-d2} = \int_{A_2} \frac{\cos\beta_1 \cos\beta_2}{\pi S^2_{d1-d2}} dA_2 \quad (1)$$

$$\oint_{C_2} [P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz] =$$

$$= \int_{A_2} \left[\left(\frac{\partial Q(x,y,z)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y,z)}{\partial y} \right) n + \left(\frac{\partial R(x,y,z)}{\partial y} - \frac{\partial Q(x,y,z)}{\partial z} \right) l + \left(\frac{\partial P(x,y,z)}{\partial z} - \frac{\partial R(x,y,z)}{\partial x} \right) m \right] dA \; (6).$$

$\vec{S}^{(+)}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$; $\vec{S}^{(-)}(x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2)$; $\vec{n}_1(\cos\alpha_1, \cos\gamma_1, \cos\delta_1)$; $\vec{n}_2(\cos\alpha_2, \cos\gamma_2, \cos\delta_2)$

$$S = S_{d1-d2} = \left|\vec{S}^{(+)}\right| = \left|\vec{S}^{(-)}\right| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}\,; \cos\beta_1 = \frac{\vec{S}^{(+)} \cdot \vec{n}_1}{|\vec{S}^{(+)}||\vec{n}_1|} = \frac{\vec{S}^{(+)} \cdot \vec{n}_1}{|\vec{S}^{(+)}|}; \cos\beta_2 = \frac{\vec{S}^{(-)} \cdot \vec{n}_2}{|\vec{S}^{(-)}|}.$$

$$\left|\vec{S}^{(+)}\right| \cos\beta_1 = \vec{S}^{(+)} \cdot \vec{n}_1 = (x_2 - x_1)\cos\alpha_1 + (y_2 - y_1)\cos\gamma_1 + (z_2 - z_1)\cos\delta_1 = (x_2 - x_1) l_1 + (y_2 - y_1) m_1 + (z_2 - z_1) n_1$$

$$\left|\vec{S}^{(-)}\right| \cos\beta_2 = (x_1 - x_2) l_2 + (y_1 - y_2) m_2 + (z_1 - z_2) n_2.$$

$$dF_{d1-2} = \frac{1}{\pi} \int_{A_2} \frac{1}{S^2} \left[\frac{(x_2 - x_1) l_1 + (y_2 - y_1) m_1 + (z_2 - z_1) n_1}{\left|\vec{S}^{(+)}\right|} \right] \left[\frac{(x_1 - x_2) l_2 + (y_1 - y_2) m_2 + (z_1 - z_2) n_2}{\left|\vec{S}^{(-)}\right|} \right] dA_2 =$$

$$= \int_{A_2} [f(x_1 - x_2) l_2 + f(y_1 - y_2) m_2 + f(z_1 - z_2) n_2] dA_2 \; (7), \text{ где: } f = \frac{(x_2 - x_1) l_1 + (y_2 - y_1) m_1 + (z_2 - z_1) n_1}{\pi S^4} \; (8)$$

Сравнивая правые части (7) и (6), получим:

МЕТОДЫ РАСЧЁТА ТЕПЛООБМЕНА ИЗЛУЧЕНИЕМ МЕЖДУ ПОВЕРХНОСТЯМИ, ИМЕЮЩИМИ ПРОИЗВОЛЬНУЮ ОРИЕНТАЦИЮ (МЕТОД УГЛОВЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ) (6)

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial x_2}-\frac{\partial P}{\partial y_2}&=\mathrm{f}(z_1-z_2)\\ \frac{\partial R}{\partial y_2}-\frac{\partial Q}{\partial z_2}&=\mathrm{f}(x_1-x_2)\\ \frac{\partial P}{\partial z_2}-\frac{\partial R}{\partial x_2}&=\mathrm{f}(y_1-y_2)\end{aligned}\right\} \quad (9)$$

В (9) $f=\dfrac{(x_2-x_1)l_1+(y_2-y_1)\,m_1+(z_2-z_1)n_1}{\pi S^4}$; (10)

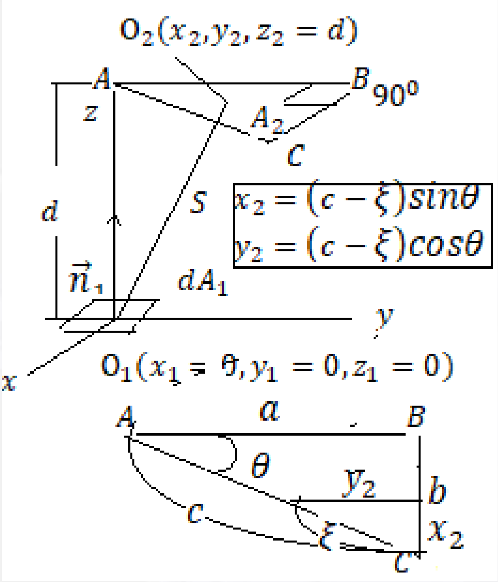
$$S=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$$

$$\boxed{\begin{aligned} P&=\frac{-m_1(z_2-z_1)+n_1(y_2-y_1)}{2\pi S^2}\\ Q&=\frac{l_1(z_2-z_1)+n_1(x_2-x_1)}{2\pi S^2}\\ R&=\frac{-l_1(y_2-y_1)+m_1(x_2-x_1)}{2\pi S^2}\end{aligned}} \quad (11)$$

$$dF_{d1-2}=\oint_{C_2}[P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz] \quad (12).$$

$$\boxed{dF_{d1-2}=\frac{l_1}{2\pi}\oint_{C_2}\frac{(z_2-z_1)dy_2-(y_2-y_1)dz_2}{S^2}+\frac{m_1}{2\pi}\oint_{C_2}\frac{(x_2-x_1)dz_2-(z_2-z_1)dx_2}{S^2}+\frac{n_1}{2\pi}\oint_{C_2}\frac{(y_2-y_1)dx_2-(x_2-x_1)dy_2}{S^2} \quad (13)}$$

Пример. Заданы элементарная площадка dA_1 и площадка конечных размеров A_2 в виде прямоугольного треугольника ABC.



Вычислить УК dF_{d1-2}. **Последовательность действий:**

1) Определение направляющих косинусов:

$l_1=cos\alpha_1=\cos(\vec{n}_1,\vec{\imath})=0\,;m_1=cos\gamma_1=\cos(\vec{n}_1,\vec{\jmath})=0;n_1=cos\delta_1=\cos(\vec{n}_1,\vec{k})=1.$

2) Определение функций P, Q и R по формулам (11): $P=\dfrac{(y_2-y_1)}{2\pi S^2}$; $Q=\dfrac{-(x_2-x_1)}{2\pi S^2}$; R=0 ($S=x_2^2+y_2^2+d^2$).

3) $\boldsymbol{dF_{d1-2}}=\oint_{C_2}[Pdx_2+Qdy_2]=\dfrac{1}{2\pi}\oint_{C_2}\dfrac{(y_2-y_1)dx_2-(x_2-x_1)dy_2}{S^2}=\dfrac{1}{2\pi}\oint_{C_2}\dfrac{(y_2)dx_2-(x_2)dy_2}{S^2}=$

$=\dfrac{1}{2\pi}\left[\int_A^B\left(\dfrac{(y_2)dx_2-(x_2)dy_2}{S^2}\right)+\int_B^C(\quad)+\int_C^A(\quad)\right]=\dfrac{1}{2\pi}\left[0+\int_0^b\left(\dfrac{(y_2=a)dx_2}{x_2^2+a^2+d^2}\right)+\right.$

МЕТОДЫ РАСЧЁТА ТЕПЛООБМЕНА ИЗЛУЧЕНИЕМ МЕЖДУ ПОВЕРХНОСТЯМИ, ИМЕЮЩИМИ ПРОИЗВОЛЬНУЮ ОРИЕНТАЦИЮ (МЕТОД УГЛОВЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ) (7)

$$F_{1-2} = \frac{1}{A_1}\int\limits_{A_1}\int\limits_{A_2}\frac{\cos\beta_1\cos\beta_2}{\pi S_{1-2}^2}dA_1 dA_2,\qquad F_{1-2}A_1 = F_{2-1}A_2. \tag{2}$$

$$F_{2-1} = \frac{1}{A_2}\int\limits_{A_2}\int\limits_{A_1}\frac{\cos\beta_1\cos\beta_2}{\pi S_{2-1}^2}dA_2 dA_1.$$

$$dF_{d1-2} = \frac{l_1}{2\pi}\oint_{C_2}\frac{(z_2-z_1)dy_2 - (y_2-y_1)dz_2}{S^2} + \tag{13}$$

$$+\frac{m_1}{2\pi}\oint_{C_2}\frac{(x_2-x_1)dz_2-(z_2-z_1)dx_2}{S^2} + +\frac{n_1}{2\pi}\oint_{C_2}\frac{(y_2-y_1)dx_2-(x_2-x_1)dy_2}{S^2} = \boldsymbol{F_{d1-2}}$$

$$A_1F_{1-2} = A_2F_{2-1} = \int\limits_{A_1} F_{d_{1-2}}\,dA_1 = \frac{1}{2\pi}\oint\limits_{C_2}\left[\int\limits_{A_1}\frac{(z_2-z_1)l_1\,dy_2-(y_2-y_1)l_1\,dz_2}{S^2} + \frac{(x_2-x_1)m_1\,dz_2-(z_2-z_1)m_1\,dx_2}{S^2} + \frac{(y_2-y_1)n_1\,dx_2-(x_2-x_1)n_1\,dy_2}{S^2}\right]dA_1. \tag{14}$$

$$A_1F_{1-2} = A_2F_{2-1} = \frac{1}{2\pi}\oint\limits_{C_2}\left[\int\limits_{A_1}\frac{(y_2-y_1)n_1-(z_2-z_1)m_1}{S^2}dA_1\right]dx_2 + \frac{1}{2\pi}\oint\limits_{C_2}\left[\int\limits_{A_1}\frac{(z_2-z_1)l_1-(x_2-x_1)n_1}{S^2}dA_1\right]dy_2 + \frac{1}{2\pi}\oint\limits_{C_2}\left[\int\limits_{A_1}\frac{(x_2-x_1)m_1-(y_2-y_1)l_1}{S^2}dA_1\right]dz_2. \tag{15}$$

К каждому из трёх внутренних интегралов по поверхности *A1* применим теорему Стокса.

Рассмотрим процедуру на примере первого интеграла в (15):

$$\int\limits_{A_1}\frac{(y_2-y_1)n_1-(z_2-z_1)m_1}{S^2}dA_1. \tag{16}$$

Формула Стокса:

$$\int\limits_{A_1}\left[\left(\frac{\partial Q}{\partial x_1}-\frac{\partial R}{\partial y_1}\right)n_1 + \left(\frac{\partial R}{\partial y_1}-\frac{\partial Q}{\partial z_1}\right)l_1 + \left(\frac{\partial P}{\partial z_1}-\frac{\partial R}{\partial x_1}\right)m_1\right]dA_1. = \oint\limits_{C_1}(P\,dx+Q\,dy+R\,dz) \tag{17}$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial R}{\partial y_1}-\dfrac{\partial Q}{\partial z_1} = 0,\\[2mm] \dfrac{\partial P}{\partial z_1}-\dfrac{\partial R}{\partial x_1} = -\dfrac{z_2-z_1}{S^2},\\[2mm] \dfrac{\partial Q}{\partial x_1}-\dfrac{\partial R}{\partial y_1} = \dfrac{y_2-y_1}{S^2}.\end{cases} \tag{18}$$

Решение (18) (без вывода) $P = \ln S,\quad Q = 0,\quad R = 0.$ т.е.

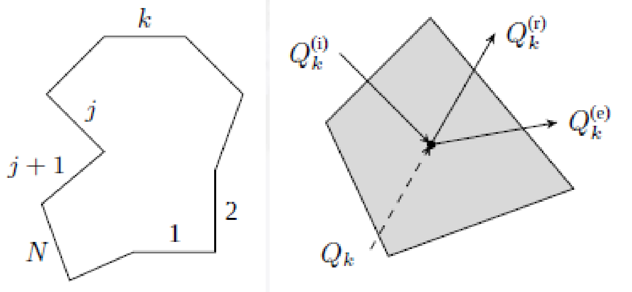
$$\int\limits_{A_1}\frac{(y_2-y_1)n_1-(z_2-z_1)m_1}{S^2}dA_1 = \oint\limits_{C_1}\ln S\,dx_1. \tag{19}$$

Применяя (17) к 2-му и 3-му интегралам в правой части (15), получим искомый результат (20).

$$A_1F_{1-2} = \frac{1}{2\pi}\oint\limits_{C_2}\left[\oint\limits_{C_1}\ln S\,dx_1\right]dx_2 + \frac{1}{2\pi}\oint\limits_{C_2}\left[\oint\limits_{C_1}\ln S\,dy_1\right]dy_2 + \frac{1}{2\pi}\oint\limits_{C_2}\left[\oint\limits_{C_1}\ln S\,dz_1\right]dz_2. \tag{20}$$

$$F_{1-2} = \frac{1}{2\pi A_1}\oint\limits_{C_1}\oint\limits_{C_2}(\ln S\,dx_2dx_1 + \ln S\,dy_2dy_1 + \ln S\,dz_2dz_1) \tag{21}$$

Замкнутая «внутренняя» система



а) Разрез замкнутой системы из N поверхностей

б) К балансу потоков излучения на k-ой поверхности

Площадь k-ой поверхности A_k, температура T_k, степень черноты ε_k. На рис. б) стрелками показаны «внутренние» **интегральные по спектру** потоки излучения $Q_k^{(i)}, Q_k^{(r)}, Q_k^{(e)}$, связанные с A_k, которые либо попадают, либо «уходят» от k-ой поверхности внутрь системы, а также «внешний» поток Q_k, подводимый к внешней части A_k для поддержания стационарного теплового режима системы.

$Q_k^{(i)}$-поток излучения, падающий на A_k от всех остальных поверхностей системы (*i — incident*);

$Q_k^{(e)}$-поток, излучаемый A_k внутрь системы (*e — emission*);

$Q_k^{(r)}$- поток, отражённый A_k внутрь системы (*r — reflection*).

Поверхности диффузные: $\varepsilon_k+\rho_k = 1$, где ρ_k - коэффициент диффузного отражения. В этом случае:

$Q_k^{(e)}=q_k^{(e)} A_k = \varepsilon_k\sigma T_k^4 A_k$; $Q_k^{(r)} = (1- \varepsilon_k)\, q_k^{(i)} A_k$; $Q_k^{(i)} = q_k^{(i)} A_k$ (1), где $q_k^{(i)(e)}$ - плотность соответствующего потока.

Пусть $q_k^{(o)} = q_k^{(e)} + q_k^{(r)} = \varepsilon_k\sigma T_k^4+(1- \varepsilon_k)\, q_k^{(i)}$ (2) - плотность полного «уходящего» (o-out) от A_k потока.

Интегральный тепловой баланс k-ой площадки: $\boxed{Q_k = q_k A_k = (q_k^{(o)} - q_k^{(i)}) A_k}$ (3). Преобразуем (3) с использованием 2-х независимых подходов исключения из (3) $q_k^{(i)}$:

1) Из (2) $q_k^{(i)} = \dfrac{q_k^{(o)}-\varepsilon_k\sigma T_k^4}{1-\varepsilon_k}$ (4) подставим в (3): $\boxed{q_k A_k = \dfrac{A_k\varepsilon_k}{1-\varepsilon_k}\left(\sigma T_k^4 - q_k^{(o)}\right)}$ (5)

2). Выразим $q_k^{(i)}$ через угловые коэффициенты и «уходящие» от остальных площадок потоки:

$q_k^{(i)} A_k = q_1^{(o)} \cdot A_1 F_{1-k} + q_2^{(o)} \cdot A_2 F_{2-k} + \cdots + q_N^{(o)} \cdot A_N F_{N-k}$ (6), которая с учетом $F_{j-k} A_j = F_{k-j} A_k$ примет вид:

$q_k^{(i)} A_k = q_1^{(o)} \cdot A_k F_{k-1} + q_2^{(o)} \cdot A_k F_{k-2} + \cdots + q_N^{(o)} \cdot A_k F_{k-N} = A_k \sum_{j=1}^{N} q_j^{(0)} F_{k-j}$ (7)

Подставляя (7) в (3), получим независимое от (5) уравнение теплового баланса (8): $\boxed{q_k A_k = \left(q_k^{(o)} - \sum_{j=1}^{N} q_j^{(o)} \cdot F_{k-j} \right) A_k}$ (8)

ТЕПЛООБМЕН ИЗЛУЧЕНИЕМ МЕЖДУ ПОВЕРХНОСТЯМИ, ОБРАЗУЮЩИМИ ЗАМКНУТУЮ СИСТЕМУ (1)

$$q_k A_k = \frac{A_k \varepsilon_k}{1-\varepsilon_k}\left(\sigma T_k^4 - q_k^{(o)}\right)$$

$$q_k A_k = \left(q_k^{(o)} - \sum_{j=1}^{N} q_j^{(o)} \cdot F_{k-j}\right) A_k \qquad (9)$$

$$k = 1,2,\ldots N$$

Свойство УК для замкнутой системы:

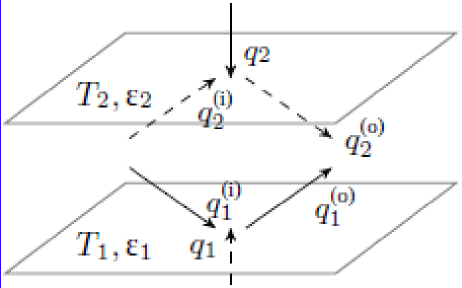
$F_{k-1} + F_{k-2} + \cdots + F_{k-k} + F_{k-j} + \cdots + F_{k-N} = \sum_{j=1}^{N} F_{k-j} = 1$ (10) $\quad (F_{k-k}=0)$

1) При условии, что исходные данные: характеристики каждой площадки $(A_k, \varepsilon_k, T_k)$ геометрическая конфигурация замкнутой системы (F_{k-j}), неизвестные - «уходящие» от k-ой площадки потоки $q_k^{(o)}$ и «компенсационных» потоки q_k, обеспечивающие тепловой баланс на A_k. ((9) – система линейных алгебраических уравнений).

В этом случае потоки $q_k^{(i)}$ определяются по формуле: $q_k^{(i)} = \frac{q_k^{(o)} - \varepsilon\sigma T_k^4}{1-\varepsilon_k}$.

2) При условии, что исходные данные: $(A_k, \varepsilon_k$ и $q_k)$ и геометрия системы (F_{k-j}), неизвестные - потоки $q_k^{(o)}$ и температура площадки T_k. ((9) – система нелинейных алгебраических уравнений).

Пример 1. Рассчитать теплообмен излучением между параллельными бесконечными «серыми» поверхностями.



$$\begin{cases} q_1 = \dfrac{\varepsilon_1}{1-\varepsilon_1}(\sigma T_1^4 - q_1^{(o)}), \\ q_1 = q_1^{(o)} - q_1^{(o)} F_{1\text{-}1} - q_2^{(o)} F_{1\text{-}2}, \\ q_2 = \dfrac{\varepsilon_2}{1-\varepsilon_2}(\sigma T_2^4 - q_2^{(o)}), \\ q_2 = q_2^{(o)} - q_1^{(o)} F_{2\text{-}1} - q_2^{(o)} F_{2\text{-}2}. \end{cases} \qquad (11)$$

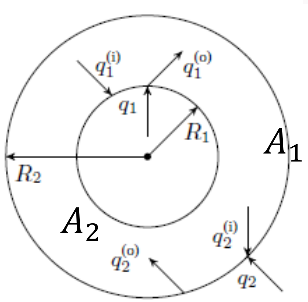
Определение F_{k-j} $(k,j = 1,2,3,4)$. $F_{1-1} = F_{2-2} = 0$; $F_{1-2} = F_{2-1} = 1$.

Решение (11)

$$q_1 = -q_2 = \frac{\sigma(T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1} = \varepsilon_{\text{эфф}}\sigma(T_1^4 - T_2^4) \qquad (12)$$

$$q_1^{(o)} = \sigma T_1^4 - \frac{1-\varepsilon_1}{\varepsilon_1} q_1; \quad q_2^{(o)} = \sigma T_2^4 - \frac{1-\varepsilon_2}{\varepsilon_2} q_1 \qquad (13)$$

Пример 2. Рассчитать теплообмен излучением между концентрическими «серыми» сферами $(R_1, R_2, T_1, T_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$.



$$\begin{cases} q_1 = \dfrac{\varepsilon_1}{1-\varepsilon_1}(\sigma T_1^4 - q_1^{(o)}), \\ q_1 = q_1^{(o)} - q_1^{(o)} F_{1\text{-}1} - q_2^{(o)} F_{1\text{-}2}, \\ q_2 = \dfrac{\varepsilon_2}{1-\varepsilon_2}(\sigma T_2^4 - q_2^{(o)}), \\ q_2 = q_2^{(o)} - q_1^{(o)} F_{2\text{-}1} - q_2^{(o)} F_{2\text{-}2}. \end{cases} \qquad (14)$$

Из-за симметрии вся энергия, излучаемая A_1 попадает на A_2, т.е. $F_{1-2} = 1$. При этом $F_{1-1} = 0$, но $F_{2-2} \neq 0$. Из $F_{1-2}A_1 = F_{2-1}A_2$ имеем: $F_{2-1} = \frac{A_1}{A_2}$. $F_{2-2} = ?$

$F_{2-2} = 1 - F_{2-1} = 1 - \frac{A_1}{A_2}$. Решение (14), например, для q_1

$$q_1 = \frac{\sigma(T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{A_1}{A_2}\left(\frac{1}{\varepsilon_2} - 1\right)} = \varepsilon_{\text{эфф}}\sigma(T_1^4 - T_2^4). \qquad (15)$$

ε_{eff}- эффективная степень черноты замкнутой системы.