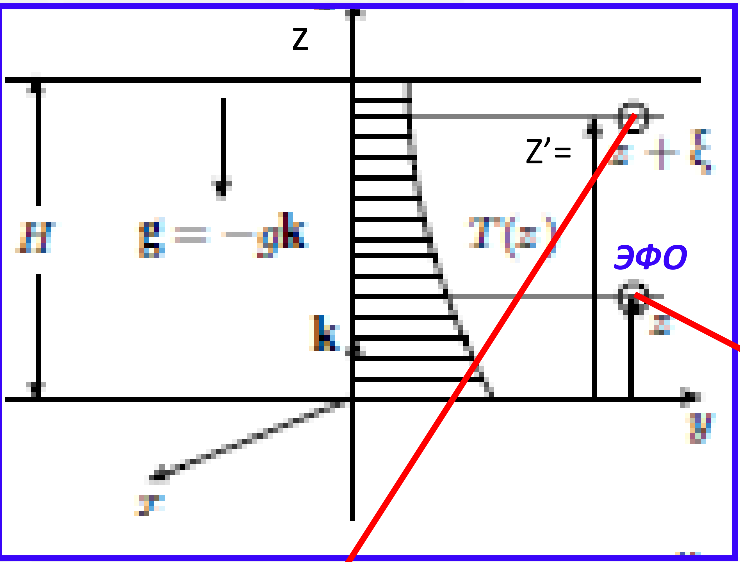
КАЧЕСТВЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ВЕРТИКАЛЬНОМ ПРОФИЛЕ ТЕМПЕРАТУРЫ В ПРИЗЕМНОМ СЛОЕ АТМОСФЕРЫ (1)



Исходное состояние $(t = 0)$ сплошной однородной по химическому составу среды-покой. Простейшая модель «приземного» слоя $0 \le H \le \sim 10$ км (высота тропопаузы) земной атмосферы. Среда - в поле силы тяжести $\vec{g} = -\vec{k}\,g;$ подогревается снизу (охлаждается сверху): $T(z = 0) > T(z = H)$.

Задача: на качественном уровне исследовать поведение среды при $t > 0$.

Модель процесса: Рассмотрим ЭФО, который в исходном состоянии находится на высоте z. Случайная флуктуация – медленное (изэнтропическое) смещение (всплытие) ЭФО вверх на величину $\xi > 0$.

В **исходном состоянии в ЭФО** $T(z), P(z), S(z)$ $(S -$ энтропия$)$.

В **новом (возмущенном)** состоянии: $(z' = z + \xi)$ $T(z') = T' < T(z), P(z') = P' < P(z), S(z') = S' = S(z)$. На ЭФО в новом состоянии действуют одновременно две силы: направленная **вверх** выталкивающая **сила Архимеда** и **вниз – сила тяжести**. **Вопрос**: условие при котором случайная флуктуация (всплытие) будет затухать, т.е. ЭФО из нового состояния будет смещаться вниз, т.е. «потонет». **Ответ**:

$\boldsymbol{\rho(p', S)g > \rho(p', S')g}$ (1), где ρ - плотность среды. Т.к. $\rho = v^{-1}$ $(v$ –удельный объем$)$.

Т.е. (1) $\longrightarrow$ $\boxed{v(p', S') - v(p', S) > 0.}$ (2)

$$\boxed{v(p', S') - v(p', S) = \left(\frac{\partial v}{\partial S}\right)_p \frac{dS}{dz}\xi = \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p \left(\frac{\partial T}{\partial S}\right)_p \frac{dS}{dz} \cdot \xi > 0.} \quad (3)$$

КАЧЕСТВЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ВЕРТИКАЛЬНОМ АДИАБАТИЧЕСКОМ ПРОФИЛЕ ТЕМПЕРАТУРЫ В ПРИЗЕМНОМ СЛОЕ АТМОСФЕРЫ (2)

$v(p',S') - v(p',S) = \left(\frac{\partial v}{\partial S}\right)_p \frac{dS}{dz}\xi = \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p \left(\frac{\partial T}{\partial S}\right)_p \frac{dS}{dz}\xi > 0$ (3) $\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p = \beta$ – коэффициент температурного расширения.

$\left(\frac{\partial T}{\partial S}\right)_p$-?. $\boldsymbol{dU} = TdS - \boldsymbol{pdv} + vdp - \boldsymbol{vdp} = TdS - d(pv) + vdp$ (4)

$\boldsymbol{dH = d(U + pv) = TdS + vdp}$ (5), $H = U + pv$ – энтальпия.

При $p = const$ из (5): $dH = TdS$. Т. к. $H = C_pT + H_0$ $(C_p = const)$ $\left(\frac{\partial T}{\partial S}\right)_p = \frac{T}{C_p}$ (6).

Неравенство (3) $\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p \left(\frac{\partial T}{\partial S}\right)_p \frac{dS}{dz}\xi = \beta\frac{T}{C_p}\frac{dS}{dz}\xi > 0$ (7). Здесь: $\beta > 0$, $\frac{T}{C_p} > 0$ и $\xi > 0$.

Условие «затухания» возмущения: $\boldsymbol{\frac{dS}{dz} > 0}$ (8). $\frac{dS(p,T)}{dz} = \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p \frac{dT}{dz} + \left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T \frac{dp}{dz} = \frac{C_p}{T}\frac{dT}{dz} + \left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T \frac{dp}{dz} > 0$ (9).

$\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T$-? $\boldsymbol{d\Phi = d(H - TS) = -SdT + vdp}$ (10) $\Phi = H - TS$ –термодинамический потенциал.

$d\Phi = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial T}\right)_p dT + \left(\frac{\partial \Phi}{dp}\right)_T dp$ (11). Сравнивая (11) и (10): $S = -\left(\frac{\partial \Phi}{\partial T}\right)_p$ (12), $v = \left(\frac{\partial \Phi}{dp}\right)_T$ (13). $\frac{\partial^2\Phi}{\partial p\partial T} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial T\partial p}$ (14)

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial p\partial T} = \left[\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial T}\right)_p\right]_T = -\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T \text{ и } \frac{\partial^2\Phi}{\partial T\partial p} = \left[\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial p}\right)_T\right]_p = \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p. \longrightarrow \left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T = -\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p \quad (15)$$

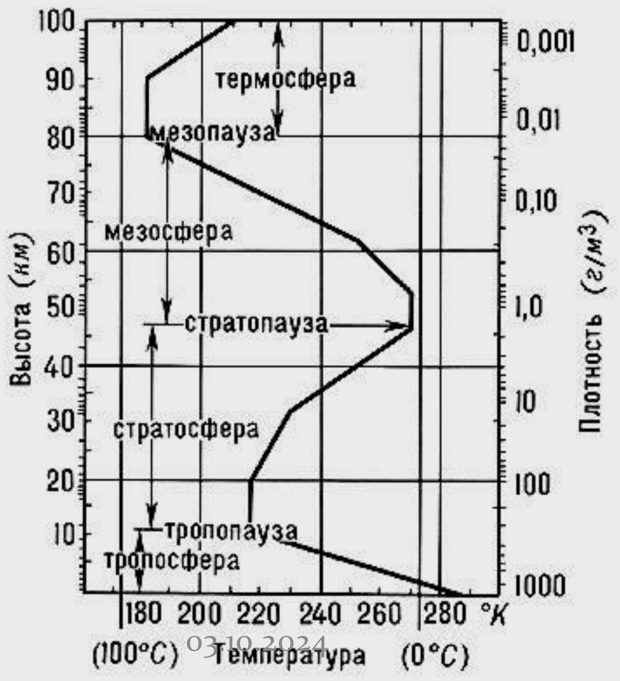
Из (9) $\frac{dS(p,T)}{dz} = \frac{C_p}{T}\frac{dT}{dz} + \left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T \frac{dp}{dz} = \frac{C_p}{T}\frac{dT}{dz} - \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p \frac{dp}{dz} > 0$ (16) $\boldsymbol{\frac{dT}{dz} > \frac{T}{C_p}\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p \frac{dp}{dz}}$ (17). Пусть $\boldsymbol{\frac{dp}{dz}} = -\rho g$,

$\frac{dT}{dz} \succ -\frac{T}{C_p}\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p \frac{g}{v}$ (18). Совершенный газ $pv = RT$ $\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p = \frac{R}{p}$. Из (18) $\boldsymbol{\frac{dT}{dz} > -\frac{g}{C_p}}$ (19).

Воздух: $g = 10\ ^{\text{м}}/_{\text{с}^2}$; $C_p = 10^7 \frac{\text{эрг}}{\text{г} \cdot \text{грд}K}$; **$g/C_p$ ≈ 10 грд/км.**

Стандартная модель атмосферы Земли (краткая справка)

Стандартизация атмосферы необходима для обеспечения единства измерений и расчетов в авиации, ракетостроении, космонавтике. **Состав** наиболее вероятного сочетания различных газов для установления возможных отклонений от нормы **утвержден государственным стандартом ГОСТ 4401-81**, **соответствующий Международной стандартной атмосфере**. Многолетние исследования атмосферы, в которые внесли значительный вклад отечественные ученые, позволили уточнить **химический состав сухого воздуха (отсутствуют пары воды) по объему: - азот 78, 084%, - кислород 20,948%, - аргон 0,934%, - углекислый газ** (CO_2) **0,031%, - 0,003% неон, криптон и ксенон**. **Водяной пар** $(\boldsymbol{H_2O})$, попадает в атмосферу в результате испарения с поверхности океанов, морей, озер и рек, а также с поверхности Земли. Количество пара в атмосфере колеблется в зависимости от температуры воздуха и условий испарения количество пара составляет по объему: - в полярных районах 0, 2% - в тропиках - до 2, 6% в тропиках, а при высоких температурах - до 4, 0%. Атмосферный воздух содержит также переменное количество примесей, находящихся во взвешенном состоянии: - пыль, - мельчайшие капли воды и кристаллы льда $(H_2O$ жидкая и твердая фракции$)$, - морская соль, - парниковые газы помимо CO_2 и H_2O, — продукты горения и и др. Общая масса атмосферы Земли ≈ 5,15 x 10^{15} т. Около половины этой массы сосредоточенно в слое высотой 5 км над поверхностью Земли, 75% - на высотах до 10 км, 90% - до 16 км, 95% - до 20 км, 99% до высот 30-35 км. Плотность атмосферы на высоте 100 км в миллион раз меньше, чем у поверхности Земли. Верхняя граница атмосферы - высота, на которой плотность ее газов приближается к плотности газа, заполняющего межпланетное пространство - около 100 молекул в 1 см^3.



Стандартная атмосфера делится на 5 основных сфер: тропосфера, стратосфера, мезосфера, термосфера, экзосфера. В основе деления атмосферы на слои – закономерность изменения температуры в зависимости от высоты над уровнем мирового океана. **В тропосфере вертикальный градиент температуры:** $\boldsymbol{\frac{(300-220)K}{10\ \text{км}} \approx 8K/\text{км}}$

Тропосфера - нижний слой атмосферы, простирающийся до 8-10 км в полярных областях, до 10-12 км в умеренных широтах и до 16-18 км в тропиках.

Стратосфера - переходный слой над тропопаузой толщиной ~ 1 км. Верхняя граница стратосферы находится примерно на высоте 50 км. На этой высоте начинается следующий переходный слой - **стратопауза**, над которой до высоты 80 км простирается **мезосфера**. Затем следует **мезопауза**, над которой до высот около 800 км располагается **термосфера**. Выше нее находится **экзосфера**, на верхней границе которой молекулы воздуха перемешиваются с межпланетным газом.

Граница космоса. Линия Ка́рмана — высота над уровнем моря, которая условно принимается в качестве границы между атмосферой Земли и космосом и является верхней границей государств. В соответствии с определением Международной авиационной федерации (ФАИ), линия Кармана находится на высоте 100 километров над уровнем моря.

СТРОГОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ТЕПЛОВОЙ КОНВЕКЦИИ В ПОЛЕ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ (1)
(Задача Релея)

Постановка задачи

Математическая модель

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho\vec{v}) = 0 \qquad (1)$$

$$\rho\frac{d\vec{v}}{dt} = \rho\vec{F} - \nabla P - div\overleftrightarrow{\tau} \qquad (2)$$

Однородная по составу жидкость

$$\cancel{\rho\frac{dC_\alpha}{dt} = \dot{w}_\alpha - div\vec{j}_\alpha \quad (\alpha = 1,2,\ldots N)} \qquad (3)$$

Пренебрегаем излучением

$$\rho\frac{dE}{dt} = -div(\vec{q} + \cancel{\vec{q}_R}) - div[\vec{v}(\overleftrightarrow{\delta}P - \overleftrightarrow{\tau})] \qquad (4)$$

$$U = f(\rho, P, T, \ldots) \qquad (5)$$

$$\Longrightarrow$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho\mathbf{v}) = 0, & (6)\\ \rho\dfrac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla P + \rho\mathbf{g} + \dfrac{\partial\tau_{ik}}{\partial x_k}, & (7)\\ \rho\dfrac{d\varepsilon}{dt} = -\,\mathrm{div}\,\mathbf{q} - \mathrm{div}\left[\mathbf{v}(\delta_{ik}P - \tau_{ik})\right], & (8)\\ f(\rho, P, T) = 0. & (9)\end{cases}$$

$$\tau_{ik} = \mu^{(1)}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ik}\,\mathrm{div}\,\mathbf{v}\right) + \mu^{(2)}\delta_{ik}\,\mathrm{div}\,\mathbf{v}, \quad (10)$$

$$\mathbf{q} = A\nabla T + B\nabla P + \sum_{\beta=1}^{N} C_\beta\nabla c_\beta \quad (11)$$

$$\boxed{\mathbf{q} = -\lambda\nabla T} \quad (12)$$

$\rho(T,S)\vec{g}$ - сила тяжести, Архимеда. Уравнение состояния: $\rho = \rho_0(1 - \beta T)$, $\beta = \frac{1}{\rho_0}\left(\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)_P$ (13)

$$\begin{cases} \mathbf{v}_0 = 0,\\ -\nabla P_0 + \rho_0\mathbf{g} = 0,\\ \Delta T_0 = 0,\\ \rho_0 = \bar{\rho}_0(1 - \beta T_0).\end{cases} \quad (14)$$

Состояние покоя

Начальные этапы движения жидкости – **малые возмущения:** $f' \ll f$

$$\rho(\vec{r},t) = \rho_0(\vec{r}) + \rho'(\vec{r},t); \qquad T(\vec{r},t) = T_0(\vec{r}) + T'(\vec{r},t)$$
$$P(\vec{r},t) = P_0(\vec{r}) + P'(\vec{r},t); \qquad \vec{v}(\vec{r},t) = \cancel{\vec{v}_0(\vec{r})} + \vec{v}'(\vec{r},t) \quad (15)$$

Теплофизические свойства

$(\lambda, \mu^{(1)}, \mu^2, C_p, C_v..)$ – *const* [1]

В (14) $\rho_0 \approx \bar{\rho}_0$

Линеаризация уравнений (6)-(13) - **приближение Буссинеска**

1) **Уравнение неразрывности** (6) $\frac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{div}(\rho\mathbf{v})=0$ $\quad \underbrace{\frac{\partial\rho}{\partial t}}_{\mathrm{I}}+\underbrace{\rho\operatorname{div}\mathbf{v}}_{\mathrm{II}}+\underbrace{\mathbf{v}\nabla\rho}_{\mathrm{III}}=0.$ Т.к. $\rho=\rho_0+\rho'$ $(\rho'\sim\delta\rho)$ х

члены I-III $\mathrm{I}\sim\frac{\delta\rho}{\tau};\quad \mathrm{II}\sim\frac{\rho_0 v^*}{L};\quad \mathrm{III}\sim\frac{v^*\delta\rho}{L}.$ Здесь τ- характерное время возмущения плотности; L – характерный размер рассматриваемой области; $\delta\rho$ – характерное значение возмущенной плотности; v^*- характерное значение возмущения скорости, причем: v^*~ L/τ . Поэтому: $\boxed{\frac{\mathrm{I}}{\mathrm{II}}\sim\frac{\delta\rho}{\tau}\frac{L}{\rho_0 v^*}\sim\frac{\delta\rho}{\rho_0};\qquad \frac{\mathrm{III}}{\mathrm{II}}\sim\frac{v^*\cdot\delta\rho\cdot L}{L\cdot\rho_0\cdot v^*}\sim\frac{\delta\rho}{\rho_0}.}$ $\delta\rho\ll\rho_0$

Вместо (6) имеем: $\boxed{\operatorname{div}\mathbf{v}'=0}$ (16). По виду (16) – уравнение неразрывности для **несжимаемой** жидкости (в (6) ρ= const)

2) **Уравнение движения**: (7) $\frac{d\mathbf{v}}{dt}=-\frac{\nabla P}{\rho}+\mathbf{g}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\tau_{ik}}{\partial x_k}$. **Общее правило линеаризации**: Если скаляр $f=f_0+f'$ такой что $|f'|\ll f_0$ и $|f'\varphi'|\ll|f'|$~$|\varphi'|\ll f_0$, то при преобразованиях остаются только члены нулевого и первого порядка малости. (Примечание: f и φ могут быть и функциями и их скалярными производными. Например, в левой части (7), т.к. $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}'$ (v_x', v_y', v_z'): $\frac{dv_x'}{dt}=\frac{\partial v_x'}{\partial t}+\cancel{v_x'\frac{\partial v_x'}{\partial x}}\approx\frac{\partial v_x'}{\partial t}$, т.е. второе слагаемое – второй порядок малости.

Линеаризуем в (7) $-\frac{\nabla P}{\rho}$ и $\frac{\partial\tau_{ik}}{\partial x_k}$ (следующий слайд)

СТРОГОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ТЕПЛОВОЙ КОНВЕКЦИИ В ПОЛЕ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ (3)

$$-\frac{\nabla \boldsymbol{P}}{\boldsymbol{\rho}} = -\frac{1}{\rho_0 + \rho'}\nabla(P_0 + P') = -\frac{1}{\rho_0\left(1 + \rho'/\rho_0\right)}\nabla(P_0 + P')$$

$$\approx -\frac{1}{\rho_0}\left(1 - \rho'/\rho_0\right)\nabla(P_0 + P') \approx -\frac{\nabla P_0}{\rho_0} - \frac{\nabla P'}{\rho_0} + \frac{\rho'}{\rho_0}\frac{\nabla P_0}{\rho_0} =$$

$$= -\vec{\boldsymbol{g}} - \frac{\nabla \boldsymbol{P}'}{\boldsymbol{\rho_0}} + \frac{\boldsymbol{\rho}'}{\boldsymbol{\rho_0}}\vec{\boldsymbol{g}})$$

$$\tau_{ik} = \mu^{(1)}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ik}\operatorname{div}\mathbf{v}\right) + \mu^{(2)}\delta_{ik}\operatorname{div}\mathbf{v},$$

$$\operatorname{div}\mathbf{v}' = 0$$

$$\boxed{\tau_{ik} = \mu\left(\frac{\partial v_i'}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k'}{\partial x_i}\right)}$$

т. е. $\dfrac{\partial \tau_{ik}}{\partial x_k} = \dfrac{\partial}{\partial x_k}\mu\left(\dfrac{\partial v_i'}{\partial x_k} + \dfrac{\partial v_k'}{\partial x_i}\right) = \mu\cdot\Delta\mathbf{v}'$

Было: $\dfrac{d\mathbf{v}}{dt} = -\dfrac{\nabla P}{\rho} + \mathbf{g} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial \tau_{ik}}{\partial x_k}$ Стало: $\boxed{\dfrac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} = -\dfrac{\nabla P'}{\bar\rho_0} + \dfrac{\rho'}{\bar\rho_0}\mathbf{g} + \nu\Delta\mathbf{v}'.}$ где $\nu = {}^{\mu}/_{\rho_0}$ – кинематический коэффициент вязкости.

Исходное **уравнение баланса полной энергии**: $\rho\dfrac{d\varepsilon}{dt} = -\operatorname{div}\mathbf{q} - \operatorname{div}\left[\mathbf{v}(\delta_{ik}P - \tau_{ik})\right]$, где $\varepsilon \approx U = C_V T$; $\mathbf{q} = -\lambda\nabla T$

Линеаризованное УБПЭ: $\boxed{\dfrac{\partial T'}{\partial t} + \mathbf{v}'\nabla T_0 = \chi\Delta T'}$. Исходное уравнение состояния: $\rho = \rho_0(1 - \beta T),$

$\chi = \dfrac{\lambda}{(\rho_0 C_v)}$; $[\chi] = [\nu]$ – коэффициент температуропроводности

Линеаризованное УС : $\boxed{\rho' = -\rho_0\beta T'}$

К вопросу о линеаризации уравнения баланса энергии (I) (факультатив)

Строгая процедура при выводе уравнений движения вязкой, теплопроводной жидкости (газа) в рассматриваемой задаче.

Имеем: $\frac{\partial\rho}{\partial t} + div(\rho\vec{v}) = 0$ (1) – уравнение неразрывности; $\rho\frac{d\vec{v}}{dt} = \rho\vec{F} + div\overleftrightarrow{A}$ (2) – уравнение движения, где $\overleftrightarrow{A}$ – тензор напряжений;

$\boxed{\rho\frac{dE}{dt} = -div\vec{q} + \rho\vec{F}\cdot\vec{v} + div(\overleftrightarrow{A}\cdot\vec{v})}$ (3) – **уравнение баланса полной энергии**, где $\vec{q} = -\lambda\nabla T$; $E = \frac{\vec{v}\cdot\vec{v}}{2} + C_v T$.

Уравнение (3) перепишем в виде: $\rho\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{v}\cdot\vec{v}}{2}\right) + \rho C_v\frac{dT}{dt} = div(\lambda\nabla T) + \rho\vec{F}\cdot\vec{v} + \left[\frac{\partial}{\partial x}(\vec{A}_x\vec{v}) + \frac{\partial}{\partial y}(\vec{A}_y\vec{v}) + \frac{\partial}{\partial z}(\vec{A}_z\vec{v})\right]$ (4).

Исключим из (4) $\rho\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{v}\cdot\vec{v}}{2}\right)$ с помощью (2): Умножим (2) почленно на $\vec{v}$: $\rho\vec{v}\frac{d\vec{v}}{dt} = \rho\vec{F}\vec{v} + \vec{v}\left(\frac{\partial\vec{A}_x}{\partial x} + \frac{\partial\vec{A}_y}{\partial y} + \frac{\partial\vec{A}_z}{\partial z}\right)$ (5), где $\rho\vec{v}\frac{d\vec{v}}{dt} = \rho\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{v}\cdot\vec{v}}{2}\right)$.

Подставим (5) в (4): $\cancel{\rho\vec{F}\vec{v}} + \cancel{\vec{v}\left(\frac{\partial\vec{A}_x}{\partial x} + \frac{\partial\vec{A}_y}{\partial y} + \frac{\partial\vec{A}_z}{\partial z}\right)} + \rho C_v\frac{dT}{dt} = div(\lambda\nabla T) + \cancel{\rho\vec{F}\cdot\vec{v}} + \cancel{\vec{v}\left(\frac{\partial\vec{A}_x}{\partial x} + \frac{\partial\vec{A}_y}{\partial y} + \frac{\partial\vec{A}_z}{\partial z}\right)} + \left(\vec{A}_x\frac{\partial\vec{v}}{\partial x} + \vec{A}_y\frac{\partial\vec{v}}{\partial y} + \vec{A}_z\frac{\partial\vec{v}}{\partial z}\right)$

Т.е. уравнение (4): $\rho C_v\frac{dT}{dt} = div(\lambda\nabla T) + \left(\vec{A}_x\frac{\partial\vec{v}}{\partial x} + \vec{A}_y\frac{\partial\vec{v}}{\partial y} + \vec{A}_z\frac{\partial\vec{v}}{\partial z}\right)$ (6), где $\vec{A}_x, \vec{A}_y$ и $\vec{A}_z$ - векторные компоненты тензора $\overleftrightarrow{A}$:

$$\begin{array}{c} \vec{A}_x \\ \vec{A}_y \\ \vec{A}_z \end{array} \begin{Bmatrix} A_{xx} & A_{xy} & A_{xz} \\ A_{yx} & A_{yy} & A_{yz} \\ A_{zx} & A_{zy} & A_{zz} \end{Bmatrix} \quad (7).$$

В (7):

$$\boxed{\begin{aligned} A_{xx} &= -p + \zeta div\vec{v} + 2\mu\frac{\partial v_x}{\partial x} & A_{xy} = A_{yx} &= \mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right) \\ A_{yy} &= -p + \zeta div\vec{v} + 2\mu\frac{\partial v_y}{\partial y} & A_{xz} = A_{zx} &= \mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x}\right) \quad (7) \\ A_{zz} &= -p + \zeta div\vec{v} + 2\mu\frac{\partial v_z}{\partial z} & A_{yz} = A_{zy} &= \mu\left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y}\right) \end{aligned}}$$

$$\boxed{\zeta = -\frac{2}{3}\mu}$$

→ в () в правой части (6)

Рассмотрим преобразования для каждого члена $\left(\vec{A}_x\frac{\partial\vec{v}}{\partial x} + \vec{A}_y\frac{\partial\vec{v}}{\partial y} + \vec{A}_z\frac{\partial\vec{v}}{\partial z}\right)$ отдельно

К вопросу о линеаризации уравнения баланса энергии (I) (факультатив)

$$1)\ \vec{A}_x\frac{\partial\vec{v}}{\partial x} = A_{xx}\frac{\partial v_x}{\partial x}+A_{xy}\frac{\partial v_y}{\partial x}+A_{xz}\frac{\partial v_z}{\partial x} = \left(-p+\zeta div\vec{v}+2\mu\frac{\partial v_x}{\partial x}\right)\frac{\partial v_x}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}+\frac{\partial v_y}{\partial x}\right)\frac{\partial v_y}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial z}+\frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\frac{\partial v_z}{\partial x}=$$

$$=-p\frac{\partial v_x}{\partial x}+\zeta div\vec{v}\frac{\partial v_x}{\partial x}+2\mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}\right)^2+\mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}+\frac{\partial v_y}{\partial x}\right)\frac{\partial v_y}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial z}+\frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\frac{\partial v_z}{\partial x} \quad (8).$$

$$2)\ \vec{A}_y\frac{\partial\vec{v}}{\partial y}=A_{yx}\frac{\partial v_x}{\partial y}+A_{yy}\frac{\partial v_y}{\partial y}+A_{yz}\frac{\partial v_z}{\partial y} = \mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}+\frac{\partial v_y}{\partial x}\right)\frac{\partial v_x}{\partial y}+\left(-p+\zeta div\vec{v}+2\mu\frac{\partial v_y}{\partial y}\right)\frac{\partial v_y}{\partial y}+\mu\left(\frac{\partial v_y}{\partial z}+\frac{\partial v_z}{\partial y}\right)\frac{\partial v_z}{\partial y}=$$

$$= -p\frac{\partial v_y}{\partial y}+\zeta div\vec{v}\frac{\partial v_y}{\partial y}+2\mu\left(\frac{\partial v_y}{\partial y}\right)^2+\mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}+\frac{\partial v_y}{\partial x}\right)\frac{\partial v_x}{\partial y}+\mu\left(\frac{\partial v_y}{\partial z}+\frac{\partial v_z}{\partial y}\right)\frac{\partial v_z}{\partial y} \quad (9).$$

$$3)\ \vec{A}_z\frac{\partial\vec{v}}{\partial z}=A_{zx}\frac{\partial v_x}{\partial z}+A_{zy}\frac{\partial v_y}{\partial z}+A_{zz}\frac{\partial v_z}{\partial z} = \mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial z}+\frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\frac{\partial v_x}{\partial z}+\mu\left(\frac{\partial v_y}{\partial z}+\frac{\partial v_z}{\partial y}\right)\frac{\partial v_y}{\partial z}+\left(-p+\zeta div\vec{v}+2\mu\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)\frac{\partial v_z}{\partial z}=$$

$$=-p\frac{\partial v_z}{\partial z}+\zeta div\vec{v}\frac{\partial v_z}{\partial z}+2\mu\left(\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)^2+\mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial z}+\frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\frac{\partial v_x}{\partial z}+\mu\left(\frac{\partial v_y}{\partial z}+\frac{\partial v_z}{\partial y}\right)\frac{\partial v_y}{\partial z} \quad (10).$$

$$\boldsymbol{\vec{A}_x\frac{\partial\vec{v}}{\partial x}+\vec{A}_y\frac{\partial\vec{v}}{\partial y}+\vec{A}_z\frac{\partial\vec{v}}{\partial z}} = -p\frac{\partial v_x}{\partial x}+\zeta div\vec{v}\frac{\partial v_x}{\partial x}+2\mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}\right)^2+\mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}+\frac{\partial v_y}{\partial x}\right)\frac{\partial v_y}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial z}+\frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\frac{\partial v_z}{\partial x}-p\frac{\partial v_y}{\partial y}+\zeta div\vec{v}\frac{\partial v_y}{\partial y}+$$

$$2\mu\left(\frac{\partial v_y}{\partial y}\right)^2+\mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}+\frac{\partial v_y}{\partial x}\right)\frac{\partial v_x}{\partial y}+\mu\left(\frac{\partial v_y}{\partial z}+\frac{\partial v_z}{\partial y}\right)\frac{\partial v_z}{\partial y}-p\frac{\partial v_z}{\partial z}+\zeta div\vec{v}\frac{\partial v_z}{\partial z}+2\mu\left(\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)^2+\mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial z}+\frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\frac{\partial v_x}{\partial z}+\mu\left(\frac{\partial v_y}{\partial z}+\frac{\partial v_z}{\partial y}\right)\frac{\partial v_y}{\partial z}=$$

$$= -p\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)+\zeta div\vec{v}\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)+2\mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}\right)^2+\mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}+\frac{\partial v_y}{\partial x}\right)\frac{\partial v_y}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial z}+\frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\frac{\partial v_z}{\partial x}+2\mu\left(\frac{\partial v_y}{\partial y}\right)^2+$$

$$\mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}+\frac{\partial v_y}{\partial x}\right)\frac{\partial v_x}{\partial y}+\mu\left(\frac{\partial v_y}{\partial z}+\frac{\partial v_z}{\partial y}\right)\frac{\partial v_z}{\partial y}+2\mu\left(\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)^2+\mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial z}+\frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\frac{\partial v_x}{\partial z}+\mu\left(\frac{\partial v_y}{\partial z}+\frac{\partial v_z}{\partial y}\right)\frac{\partial v_y}{\partial z}=\boldsymbol{-p\,div\vec{v}+\zeta(div\vec{v})^2+2\mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}\right)^2+}$$

$$\boldsymbol{\mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}+\frac{\partial v_y}{\partial x}\right)\frac{\partial v_y}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial z}+\frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\frac{\partial v_z}{\partial x}+2\mu\left(\frac{\partial v_y}{\partial y}\right)^2+\mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}+\frac{\partial v_y}{\partial x}\right)\frac{\partial v_x}{\partial y}+\mu\left(\frac{\partial v_y}{\partial z}+\frac{\partial v_z}{\partial y}\right)\frac{\partial v_z}{\partial y}+2\mu\left(\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)^2+\mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial z}+\frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\frac{\partial v_x}{\partial z}+}$$

$$\boldsymbol{\mu\left(\frac{\partial v_y}{\partial z}+\frac{\partial v_z}{\partial y}\right)\frac{\partial v_y}{\partial z}} \quad (11)$$

К вопросу о линеаризации уравнения баланса энергии (факультатив)

Таким образом, уравнение баланса энергии (6) $\rho C_v \frac{dT}{dt} = div(\lambda \nabla T) + \left(\vec{A}_x \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + \vec{A}_y \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} + \vec{A}_z \frac{\partial \vec{v}}{\partial z}\right)$

$$\rho C_v \frac{dT}{dt} = div(\lambda \nabla T) - -p div\vec{v} + \zeta (div\vec{v})^2 + 2\mu[\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_y}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)^2] + \mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right)^2 + \mu\left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y}\right)^2 + \mu\left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y}\right)^2 \quad (12)$$

При линеаризации (12): 1) $div\vec{v} = 0$; 2) Подчеркнутые члены – 2-го порядка малости.

Окончательно: $\rho C_v \frac{dT}{dt} = div(\lambda \nabla T) \longrightarrow \boxed{\rho C_v \left[\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v}\, \nabla T\right] = \lambda \Delta T}$ (13)

$$\boxed{\rho_0 C_v \left[\frac{\partial T'}{\partial t} + \vec{v}'\, \nabla T_0\right] = \lambda \Delta T'} \quad (14)$$

СТРОГОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ТЕПЛОВОЙ КОНВЕКЦИИ В ПОЛЕ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ (4)

Второй член в правой части уравнения $\frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} = -\frac{\nabla P'}{\bar{\rho}_0} + \frac{\rho'}{\bar{\rho}_0}\mathbf{g} + \nu\Delta\mathbf{v}'$. преобразуем, используя $\rho' = -\rho_0 \beta T'$

Окончательно система уравнений, описывающая возмущенное движение «жидкости» имеет вид (1) $(\vec{g} = -\vec{k}g)$

$$\begin{cases} \operatorname{div}\mathbf{v}' = 0, \\ \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} = -\frac{\nabla P'}{\bar{\rho}_0} + g\mathbf{k}\beta T' + \nu\Delta\mathbf{v}' \\ \frac{\partial T'}{\partial t} + \mathbf{v}'\nabla T_0 = \chi\Delta T' \end{cases} \qquad (1)$$

Переход в (1) к безразмерным переменным.

$$\bar{x} = \frac{x}{L_x}, \quad \bar{y} = \frac{y}{L_y}, \quad \bar{z} = \frac{z}{L_z}, \quad \bar{t} = \frac{t}{\tau^*}, \quad \bar{\mathbf{v}}' = \frac{\mathbf{v}'}{v^*}, \quad \bar{P}' = \frac{P'}{P^*}, \quad \bar{T}' = \frac{T'}{T^*}.$$

Здесь *Lx, Ly, Lz* — характерные значения размеров рассматриваемой области возмущённого движения жидкости; τ — характерное время развития возмущений, v∗, P∗ и T∗ — характерные значения возмущений скорости, давления и температуры.

В рассматриваемой задаче исходным состоянием, на фоне которого развиваются возмущения, является **состояние покоя**, характерные значения искомых функций T^*, P^*, v^* должны быть выбраны, исходя из особенностей постановки задачи, которые состоят в том, что в явном виде отсутствуют характерные значения возмущения температуры T^*, а также возмущения скорости v∗, т. к. $\vec{v}_0 = 0$.

$$\begin{cases} \mathbf{v}_0 = 0, \\ -\nabla P_0 + \rho_0\mathbf{g} = 0, \\ \Delta T_0 = 0, \\ \rho_0 = \bar{\rho}_0(1 - \beta T_0). \end{cases}$$

Оценка T^*. Особенность задачи – наличие исходного (в состоянии покоя) градиента температуры., т.е. T^* надо оценивать, исходя из оценки характерного значения градиента. В **уравнения в состоянии покоя** градиент температуры явно не входит. Однако его можно получить математически, применив к уравнению $-\nabla P_0 + \rho_0\vec{g} = 0$ операцию $\boldsymbol{rot}$: $\boldsymbol{\nabla} \times \left[-\boldsymbol{\nabla} P_0 + \bar{\boldsymbol{\rho}}_0(1 - \beta T_0)g\vec{\boldsymbol{k}}\right]=0 \longrightarrow \nabla T_0 = -A\vec{k}$ (2)

Поэтому T^*=*AL (A>0,* подогрев снизу*).* В безразмерном виде (2): $\overline{\boldsymbol{\nabla T}}_{\boldsymbol{0}} = -\vec{\boldsymbol{k}}$ (3)

СТРОГОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ТЕПЛОВОЙ КОНВЕКЦИИ В ПОЛЕ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ (5)

$$\begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{v}' = 0, \\ \dfrac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} = -\dfrac{\nabla P'}{\bar\rho_0} + g\mathbf{k}\beta T' + \nu\Delta\mathbf{v}' \\ \dfrac{\partial T'}{\partial t} + \mathbf{v}'\nabla T_0 = \chi\Delta T' \end{cases}$$

Оценка $\boldsymbol{v}^*$. В связи с тем, что $\vec{v}_0 = 0$ и отсуствует ***явное значение характерной скорости*** *возмущённого движения*, а также с учётом того, что возмущение давления проявляется, как следствие возмущения скорости (следует из формулы Бернулли $P^* = \bar\rho_0(v^*)^2$выбор характерной скорости $\boldsymbol{v}^*$ **- ключевая** проблема обезразмеривания. Способ решения задачи. Анализ соответствующего уравнения с точки зрения размерности физических коэффициентов, определяющих размерность каждого члена.

Уравнение движения (второе уравнение в системе (1), в котором каждый член имеет размерность L · T−2; поэтому: $\boxed{v^* = \nu L^{-1}}$, где размерность коэффициента кинематической вязкости $[\nu] = L^2T^{-1}$(здесь T – размерность времени). Отсюда: $\boxed{P^* = \bar\rho_0(v^*)^2 = \bar\rho_0\nu^2L^{-2}}$ и характерное время: $\boxed{\tau^* = L^2\nu^{-1}}$.

При обезразмеривании x, y и z: $L_x \sim L_y \sim L_z \sim L$.

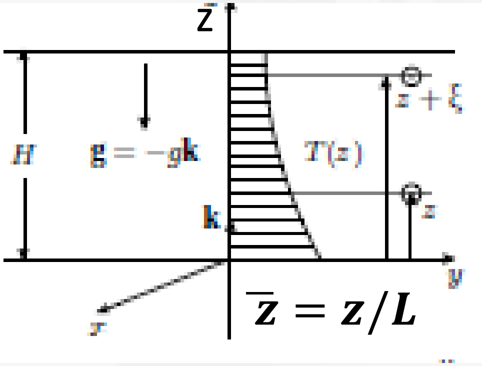
Примечание: *<u>Далее, для обозначения безразмерных функций и аргументов используются те же обозначения, что и для размерных величин.</u>*

Система уравнений, описывающих возмущенное движение, в безразмерной форме (4):

$$\boxed{\begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{v}' = 0, \\ \dfrac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} = -\nabla P' + \dfrac{g\beta A L^4}{\nu^2}\mathbf{k}T' + \Delta\mathbf{v}' \\ \dfrac{\partial T'}{\partial t} + (\mathbf{v}'\nabla)T_0 = \dfrac{\chi}{\nu}\Delta T' \end{cases}} \quad (4)$$

С учетом $\overline{\nabla T_0} = -\vec{k}$ третье уравнение в (4): $\boxed{\dfrac{\partial T'}{\partial t} - v_z' = \dfrac{\chi}{\nu}\Delta T',}$ (5), где v_z' - вертикальная составляющая вектора скорости. В (4) появились два безразмерных комплекса: $\boxed{\dfrac{g\beta A L^4}{\nu^2} = \mathrm{Gr}}$ – число **Грассгофа** и $\boxed{\dfrac{\chi}{\nu} = Pr^{-1}}$, где Pr –число Прандтля

Подход для получения аналитического решения. Граничные условия Релея. Линейный анализ устойчивости



$$div\vec v' = 0 \qquad (5)$$
$$\frac{\partial \vec v'}{\partial t} = -\nabla P' + Gr\vec k T' + \Delta \vec v' \qquad Gr = \frac{g\beta A L^4}{\nu^2}$$
$$\frac{\partial T'}{\partial t} - v_z' = Pr^{-1}\Delta T' \qquad Pr^{-1} = \frac{\chi}{\nu}$$

Граничные условия (ГУ) для задачи (5), при которых можно получить аналитическое решение:
$\frac{\partial v_x'}{\partial z} = \frac{\partial v_y'}{\partial z} = 0$; $T' = 0$ при $\bar z = z/L = 0{,}1$ (6)
(6) ГУ Релея

Математическая постановка задачи: Попытаться найти аналитическое (близкое к аналитическому) решение системы (5) уравнений (второе уравнение в (5) – векторное) относительно 5 неизвестных (v_x', v_y', v_z', T' и P'). Возмущенная плотность находится из уравнения состояния: $\rho' = \bar\rho_0 \beta T'$. ГУ (6) только на v_x', v_y' и T', **на P' нет.**
Стандартный прием в классической гидродинамике- исключение из (5) P', т. е. снижение числа неизвестных до (v_x', v_y', v_z', T'). **Вопрос: почему и как это можно сделать**? Применим ко 2-му уравнению в (5) $rotrot = \nabla\times\nabla\times$:

$$\nabla\times\nabla\times\left[\frac{\partial \vec v'}{\partial t} = -\nabla P' + Gr\vec k T' + \Delta\vec v'\right] (6). \longrightarrow \frac{\partial}{\partial t}[\nabla(\cancel{\nabla\vec v'}) - \vec v'(\nabla\nabla)] = -\nabla\times\cancel{\nabla\times\nabla} P' + \nabla(\cancel{\nabla\Delta}\vec v') - \Delta\vec v'(\nabla\nabla) + Gr\left(rotrot\vec k T'\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\Delta\vec v' = -Gr(\nabla\times\nabla\times(\vec k T')) + \Delta\Delta\vec v' \ (7). \ \nabla\times\nabla\times\left(\vec k T'\right) = rot\left[\vec\imath\frac{\partial T'}{\partial y} - \vec\jmath\frac{\partial T'}{\partial x}\right] = -\vec{\boldsymbol k}\left(\frac{\partial^2 T'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T'}{\partial y^2}\right) + \vec\imath(..) + \vec\jmath(...) \ (8).$$

В третье уравнение (5) входит v_z'. Поэтому (7) с учетом (8) рассмотрим относительно v_z':

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\Delta v_z' = Gr\left(\frac{\partial^2 T'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T'}{\partial y^2}\right) + \Delta\Delta v_z' = Gr\Delta_h T' + \Delta\Delta v_z'} \ (9); \quad \Delta_h = \frac{\partial^2 T'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T'}{\partial y^2} \text{ - плоский лапласиан.}$$

СТРОГОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ТЕПЛОВОЙ КОНВЕКЦИИ В ПОЛЕ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ (7)

Для определения ГУ для v_z' продифференцируем $div\vec{v}'=\frac{\partial v_x'}{\partial x}+\frac{\partial v_y'}{\partial y}+\frac{\partial v_z'}{\partial z}$ по z при $\bar{z}=0,1$:

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial v_x'}{\partial x}+\frac{\partial v_y'}{\partial y}+\frac{\partial v_z'}{\partial z}\right)=0 \text{ при } \bar{z}=0,1 \longrightarrow \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v_x'}{\partial z}\right)_{\bar{z}=0,1}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v_y'}{\partial z}\right)_{\bar{z}=0,1}+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial v_z'}{\partial z}\right)_{\bar{z}=0,1}=0 \quad (10)$$

В силу ГУ (6) $\left(\frac{\partial v_x'}{\partial z}\right)_{\bar{z}=0,1}=\left(\frac{\partial v_y'}{\partial z}\right)_{\bar{z}=0,1}=0$ из (10) $\longrightarrow$ $\boxed{\frac{\partial^2 v_z'}{\partial z^2}=0 \text{ при } \bar{z}=0,1}$ (11). Таким образом, задача, которую надо решать, свелась к:

$$\boxed{\begin{cases}\frac{\partial}{\partial t}\Delta v_z'= Gr\Delta_h T'+\Delta\Delta v_z' \\ \frac{\partial T'}{\partial t}-v_z'=Pr^{-1}\Delta T' \\ \frac{\partial^2 v_z'}{\partial z^2}=T'=0 \text{ при } \bar{z}=0,1\end{cases}} \quad (12).$$

Решение (12) ищем в виде:

$$v_z'(x,y,z,t)=v_z(z)\exp\left[i\omega t+i\left(k_x x+k_y y\right)\right] \quad (13)$$

$$T'(x,y,z,t)=T(z)\exp\left[i\omega t+i\left(k_x x+k_y y\right)\right] \quad (14)$$

Здесь $v_z(z)$ и $T(z)$ - амплитудные значения искомых функций;
В общем случае $\omega=\omega'+i\omega''$. Мы ограничимся случаем ω'=0.

Т. е. $\omega=i\omega''=-i\gamma$ (γ-декремент апериодических возмущений); в (13) и (14) $\exp(i\omega t)=\exp(\gamma t)$.
Подставляя (13) и (14) в (12), получим:

$$\boxed{\begin{cases}\gamma\left[v_z^{\mathrm{II}}(z)-k^2 v_z(z)\right]=-\mathrm{Gr}\,k^2 T(z)+v_z^{\mathrm{IV}}(z)-2k^2 v_z^{\mathrm{II}}(z)+k^4 v_z(z), \\ \mathrm{Pr}\,\gamma T(z)=\mathrm{Pr}\,v_z(z)+T^{\mathrm{II}}(z)-k^2 T(z), \\ v_z^{\mathrm{II}}(z)=T(z)=0 \quad \text{при } z=0,1.\end{cases}}$$

$k=k_x^2+k_y^2$

(15) –амплитудные уравнения

СТРОГОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ТЕПЛОВОЙ КОНВЕКЦИИ В ПОЛЕ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ (8)

$$\begin{cases} v_z(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \sin \pi n z, \\ T(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \sin \pi n z. \end{cases}$$

(16) $\longrightarrow$

$$\begin{cases} \gamma \left[v_z^{\mathrm{II}}(z) - k^2 v_z(z) \right] = -\,\mathrm{Gr}\, k^2 T(z) + v_z^{\mathrm{IV}}(z) - 2k^2 v_z^{\mathrm{II}}(z) + k^4 v_z(z), \\ \mathrm{Pr}\, \gamma T(z) = \mathrm{Pr}\, v_z(z) + T^{\mathrm{II}}(z) - k^2 T(z), \\ v_z^{\mathrm{II}}(z) = T(z) = 0 \quad \text{при } z = 0, 1. \end{cases} \qquad (15)$$

$$\begin{cases} -(\gamma_n \alpha + \alpha^2) a_n + \mathrm{Gr}\, k^2 b_n = 0, \\ \mathrm{Pr}\, a_n - (\alpha + \mathrm{Pr}\, \gamma_n) b_n = 0. \end{cases} \qquad (17)$$

$$\alpha = n^2 \pi^2 + k^2.$$

Система (17) имеет нетривиальные решения, если **определитель матрицы коэффициентов** = 0 :

$$\begin{vmatrix} -(\gamma_n \alpha + \alpha^2) & \mathrm{Gr}\, k^2 \\ \mathrm{Pr} & -(\alpha + \mathrm{Pr}\, \gamma_n) \end{vmatrix} = 0. \qquad (18)$$

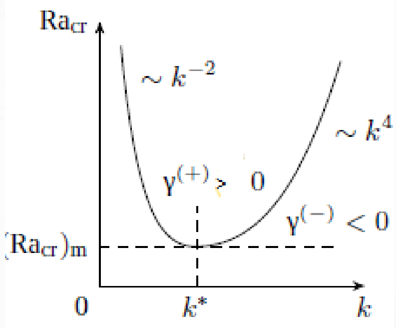
$\downarrow$

$$\gamma_n^{(\pm)} = -\frac{\mathrm{Pr}+1}{2\,\mathrm{Pr}}\alpha \pm \sqrt{\left(\frac{\mathrm{Pr}+1}{2\,\mathrm{Pr}}\alpha\right)^2 + \frac{-\alpha^3 + \mathrm{Gr} \cdot \mathrm{Pr}\, k^2}{\mathrm{Pr} \cdot \alpha}}. \qquad (19)$$

Из (19) следует, что для действительных значений γ_n реализуются 2 моды апериодических возмущений при условии $Gr \cdot Pr = Ra > 0$ (Ra – число Релея). Т.к. $Pr = \frac{\nu}{\chi} > 0$, а $Gr = \frac{g\beta L^4}{\nu^2} A$, то $\boldsymbol{A > 0}$, что соответствует отрицательному градиенту температуры («подогрев» снизу-»охлаждение» сверху). Т. к. временной фактор $\sim \exp(\gamma t)$, условие $\gamma_n^{(+)}$>0 (развитие возмущений со временем) соответствует: $\alpha^3 - Rak^2 < 0$, а $\gamma_n^{(-)}$<0 – обратному неравенству. Следовательно:

$$\boxed{\alpha^3 - Rak^2 = 0}$$ (20) – граница устойчивости.

Отсюда $Ra_{cr} = \frac{\alpha^3}{k^2} = \frac{(\pi^2 n^2 + k^2)^3}{k^2}$ - критическое число Релея.



Качественная зависимость Ra_{cr} от k для n – ой гармоники. Существует $(Ra_{cr})_{min} = (27/4)\,(\pi n)^4$ (при $n = 1$ $(Ra_{cr})_{minmin} \approx 700$.

Гидродинамическая картина возмущённого движения. Ячейки Релея – Бенара

Строгое решение задачи в изложенной постановке (определить поля возмущенной скорости $v_z'(x,y,z,t)$ и температуры $T'(x,y,z,t)$ определяется ранее полученными формулами (1), (2) и (3).

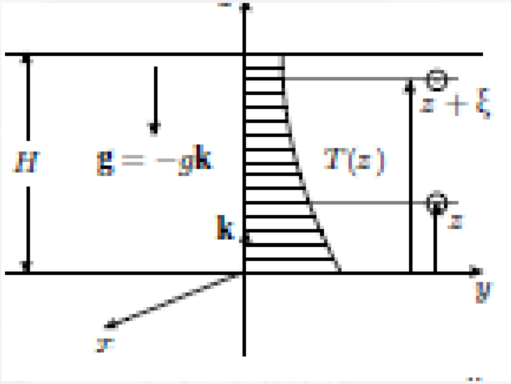
$$\begin{cases} v_z'(x,y,z,t) = v_z(z)\,\mathrm{e}^{i\omega t + i(k_x x + k_y y)} \\ T'(x,y,z,t) = T(z)\,\mathrm{e}^{i\omega t + i(k_x x + k_y y)} \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} v_z(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \pi n z, \\ T(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \pi n z. \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} -(\gamma_n \alpha + \alpha^2) a_n + \mathrm{Gr}\, k^2 b_n = 0, \\ \mathrm{Pr}\, a_n - (\alpha + \mathrm{Pr}\,\gamma_n) b_n = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Далее: плоская задача: $\vec{v}\,'\left(v_y', v_z', t\right)$. Для n-ой гармоники:

$$\boxed{v_z'(y,z,t) = v_z(z)\,\mathrm{e}^{\gamma t}\,\mathrm{e}^{ik_y y} = a_n \sin \pi n z\,\mathrm{e}^{\gamma t}\,\mathrm{e}^{ik_y y}} \quad (4)$$



Вместо (4) удобно рассматривать

$$\boxed{v_z'(y,z,t) = a_n \sin(\pi n z)\cdot\cos(k_y \cdot y)\,\mathrm{e}^{\gamma t}} \quad (5)$$

Вопрос. Как, зная $v_z'(x,y,z,t)$ из (5), определить $v_y'(x,y,z,t)$?

СТРОГОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ТЕПЛОВОЙ КОНВЕКЦИИ В ПОЛЕ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ (6)

Вопрос. Как, зная $v_z'(x,y,z,t)$ из (5), определить $v_y'(x,y,z,t)$? Ответ: Из уравнения неразрывности: $div\vec{v}'=\frac{\partial v_y'}{\partial y}+\frac{\partial v_z'}{\partial z}=0$

Подставляя сюда $v_z'(y,z,t)=a_n\sin(\pi nz)\cos(k_y y)e^{\gamma t}$, получим:

$$v_y'(y,z,t)=-a_n\frac{\pi n}{k_y}cos(\pi nz)\,sin(k_y y)e^{\gamma t} \quad (6)$$

В гидродинамике ключевое понятие – **траектория частицы.** Если определены компоненты скорости (в данном случае $v_y'(y,z,t)$ и $v_z'(y,z,t)$), то уравнения траекторий: $\begin{cases}\frac{dy}{dt}=v_y'(y,z,t)\\ \frac{dz}{dt}=v_z'(y,z,t)\end{cases}$ (7) с $y(t_0)=y_0\,;z(t_0)=z_0$ (8)

Для большей наглядности полезно использовать понятие – **линия тока –** кривая в каждой точке которой в заданный момент времени вектор скорости $\vec{v}'$ направлен по касательной к ней. Уравнение линии тока: $\frac{dy}{v_y'(y,z,t)}=\frac{dz}{v_z'(y,z,t)}$ (9).

Подставляя в (9) (5) и (6), получим: $\frac{dy}{dz}=-\frac{\pi n}{k_y}\frac{sin(k_y y)}{\cos(k_y y)}\frac{cos(\pi nz)}{\sin(\pi nz)}$ (10). $\longrightarrow$ $sin(k_y y)\,\sin(\pi nz)=\mathrm{C(t)}$ (11), где $-1\le \mathrm{c(t)}\le 1$

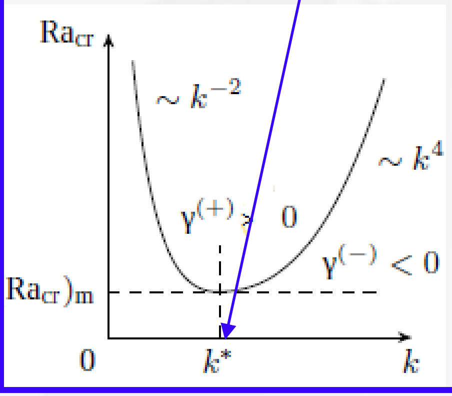
Линии тока, определяемые (11) – «мгновенная фотография» в момент времени t картины течения, соответствующей n-ой гармонике. Важнейшую роль играет зависящая от времени «constanta» $-1\le \mathrm{c(t)}\le 1$. При этом особую роль играет случай $C(t)=0$. Из (11): $\begin{matrix}\sin(\pi nz)=0,\text{т. е.}\,\pi nz=\pi m_1\ (m_1=0,\pm1,\pm2,\dots)\\ \sin(k_y y)=0,\text{т. е.}\,k_y y=\pi m_2\ (m_2=0,\pm1,\pm2,\dots)\end{matrix}$ (12)

СТРОГОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ТЕПЛОВОЙ КОНВЕКЦИИ В ПОЛЕ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ (6)

Для примера рассмотрим случай $k^* = k_y^* = \frac{\pi n}{\sqrt{2}}$ при $n = 1$

(вспомним картинку). Рис.А – вертикальные и горизонтальные линии – решения (12)

$$\sin(\pi n z) = 0, \text{т. е.}\, \pi n z = \pi m_1 \ (m_1 = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$
$$\sin(k_y y) = 0, \text{т. е.}\, k_y y = \pi m_2 \ (m_2 = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$



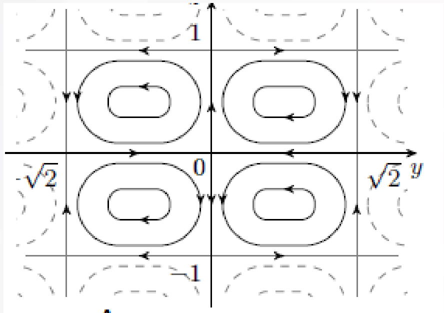
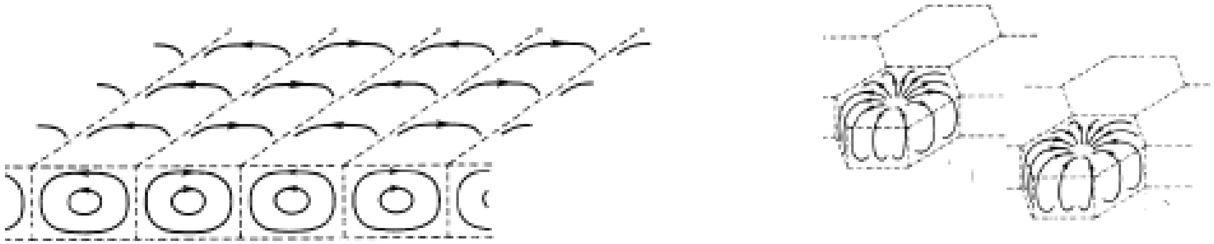


Рис. А Структура конвективных ячеек в задаче Релея – Бенара при $n = 1$

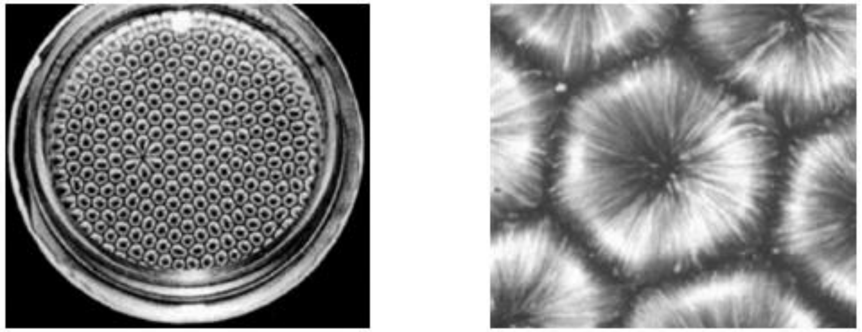
Внутри каждой прямоугольной ячейки кольцеобразными фигурами показаны качественные картинки - решения уравнения (11) для разных моментов времени, т.е. для разных $C(t) \neq 0$. Рис. А – конвективные ячейки Релея-Бенара (для плоской задачи).



а) Плоская задача

б) Трёхмерная задача

Рис. В Компьютерное моделирование конвективных ячеек

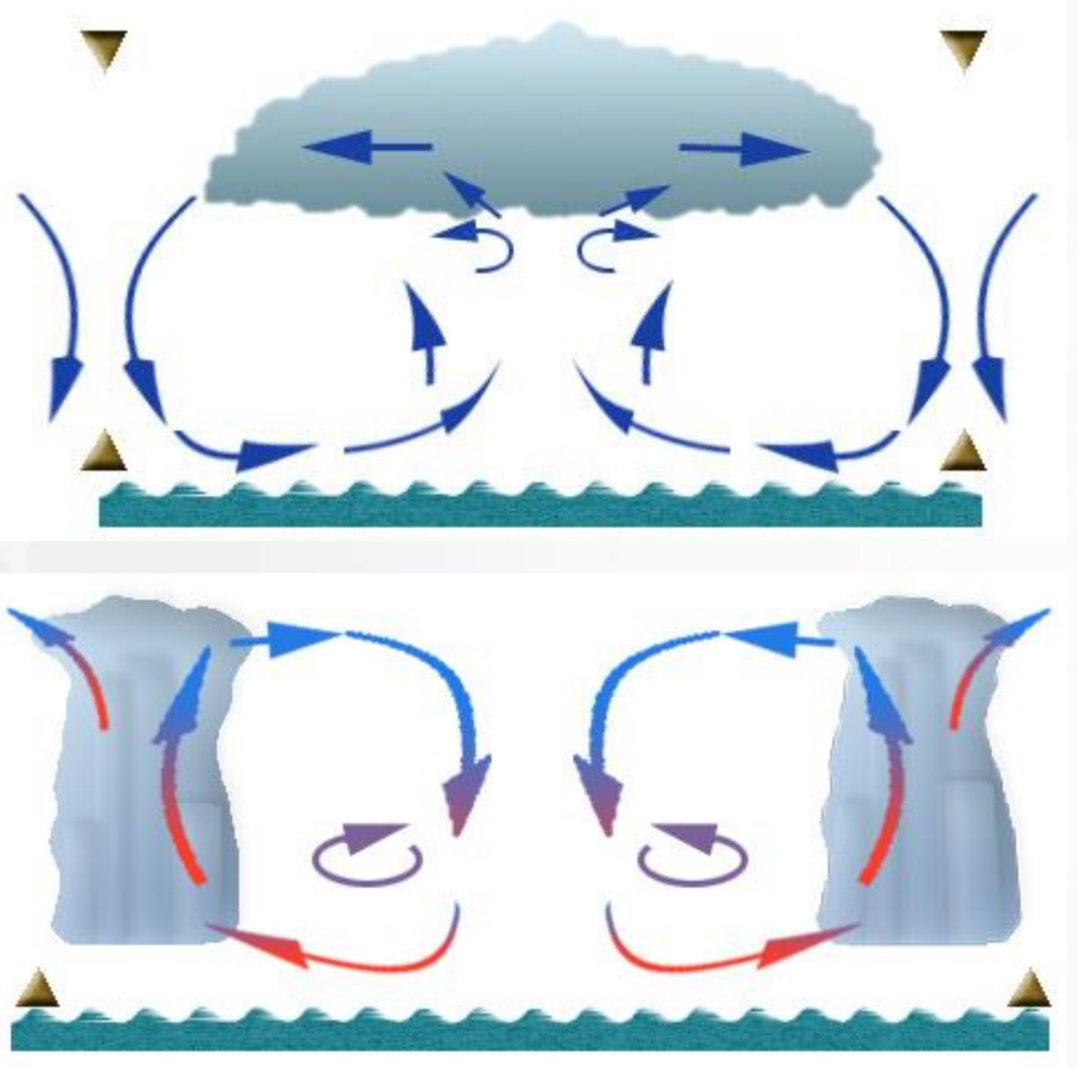


а) Общий вид эксперимента

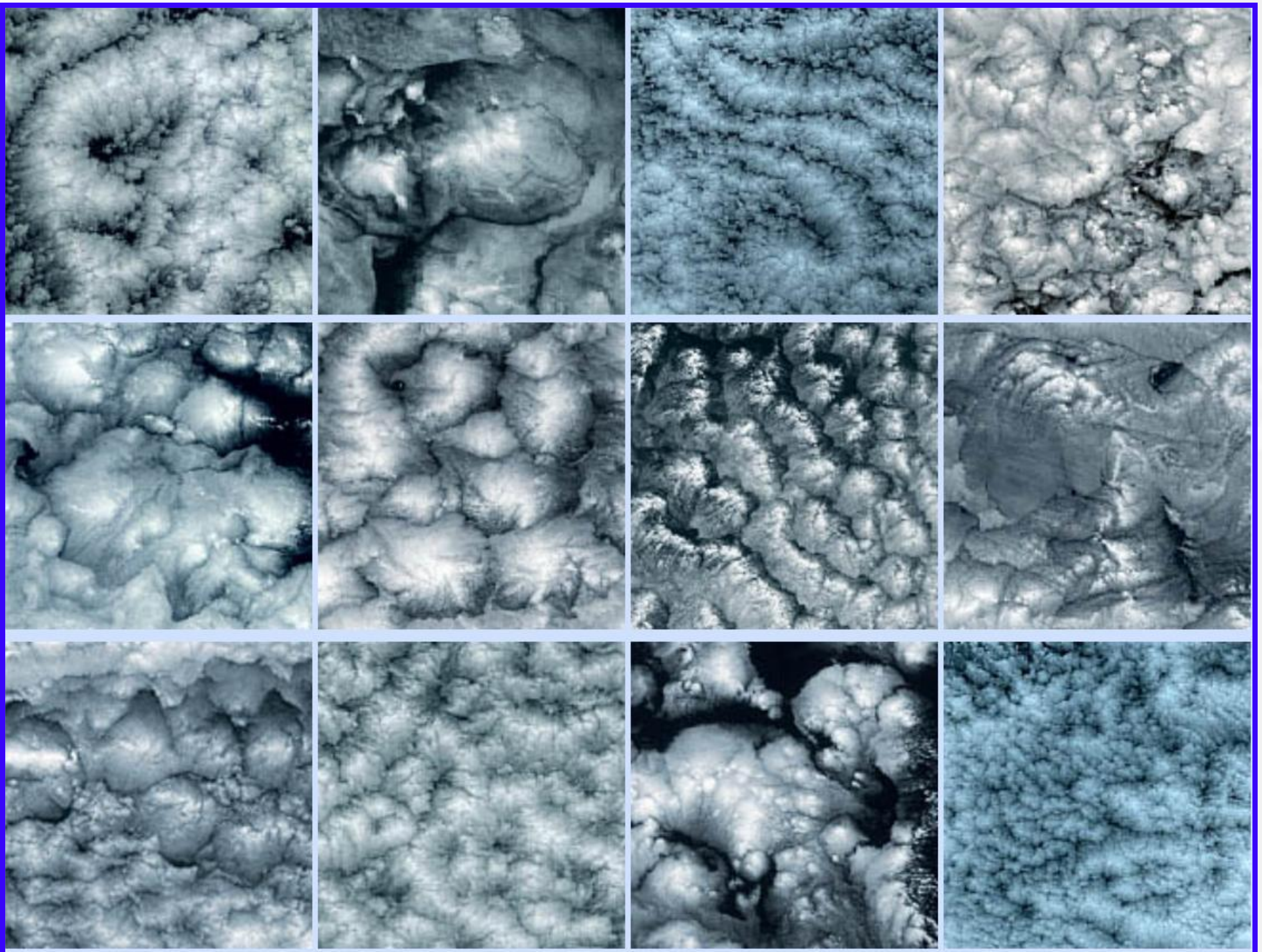
б) Увеличенный фрагмент

Рис. С Опыт, иллюстрирующий структуру конвективных ячеек

ТЕПЛОВАЯ КОНВЕКЦИЯ В ПОЛЕ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ в ПРИРОДЕ



Циркуляция воздуха в закрытых (вверху) и открытых (внизу) конвективных ячейках



Облачные ячейки закрытого типа на снимках из космоса

СТРОГОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ТЕПЛОВОЙ КОНВЕКЦИИ В ПОЛЕ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ (6)