SGP4
Simplified General Perturbations

SGP4

- SGP4
  Simplified General Perturbations

  Упрощенная теория обобщенных возмущений

  Пропагация орбиты на основе приближенного аналитического решения

  Время получения решения мало и **почти не зависит** от времени пропагации.

- SDP4 (Deep space)

  Дополнительно учитывает силы, действующие на «дальние» орбиты

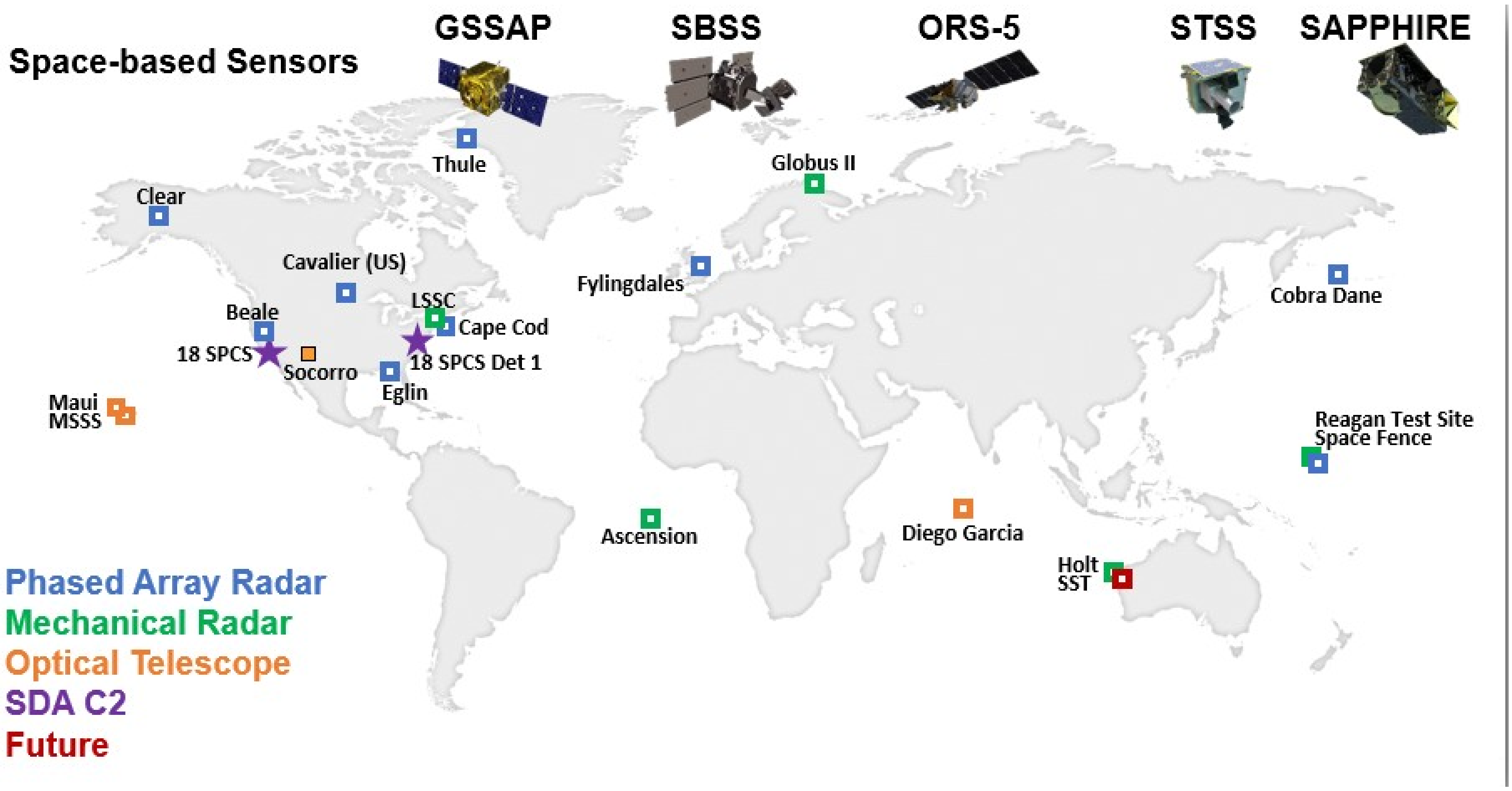
SGP4/SDP4 Лежит в основе единственного **публичного** каталога спутниковых орбит, распростаняемого NORAD.

Данный каталог является самым полным из доступных.

Данный каталог используется во многих программах по всему миру.

Данный каталог регулярно обновляется (несколько раз в день для низкоорбитальных спутников).

Данный каталог позволяет получать положения КА с точностью, достаточной для большинства задач.


Space-based Sensors
GSSAP
SBSS
ORS-5
STSS
SAPPHIRE
Thule
Globus II
Clear
Cavalier (US)
Fylingdales
Cobra Dane
LSSC
Beale
Cape Cod
18 SPCS
Socorro
18 SPCS Det 1
Eglin
Maui
MSSS
Reagan Test Site
Space Fence
Ascension
Diego Garcia
Holt
SST
Phased Array Radar
Mechanical Radar
Optical Telescope
SDA C2
Future

SGP4/SDP4

В каталоге NORAD используется совмещенная модель SGP4/SDP4

SGP4
Для орбит периодом меньше **225 мин**

Учитывает **зональные** гармоники Земли до **J4**

Использует модель атмосферы приближенной **степенной функцией** $\rho = \rho_0 (q_0 - s)^4 / (r - s)^4$

Точность на момент эпохи ~1000 км

SDP4 (Deep Space Perturbations)
Для орбит периодом больше **225 мин** (~5 000 км)

Дополнительно учитывает притяжения **Луны** и **Солнца**.

Дополнительно учитывает **гравитацинный резонанс**

Точность на момент эпохи ~10 000 км

SGP4 дает результат ***r,v*** в системе координат **TEME** (True Equator Mean Equinox)

Используется время **UTC**
(не подтверждено официально, но на практике использование этой шкалы дает ожидаемые результаты)

История

В 1959 Kozai и Brouwer
Предложили свои **разные** методы аналитических
рассчетов, без учета атмосферы

В начале 1970
Начинает применяться разработанная на основе публикаций Kozai
и Brouwer модель SGP

В 1970
Разработка SGP4 на основе
модели Brouwer

В 1980 публикуется Spacetrack report #**3**
Опубликован формулы и код моделей SGP, **SGP4/SDP4**, SGP8/SDP8

В 1996 NASA Goddart Space Flight Center
Опубликовали обновленный код, полученный у SpaceTrack.
В нем были подтверждены ожидаемые исправления.

Эволюция внутреннего
кода
(не публикуется)

Эволюция открытой версии модели
(меняется исполнение, но теория остается)

В 2006 Vallado публикует
Revisiting Spacetrack report #**3**
Где собраны исправления кода модели

Код

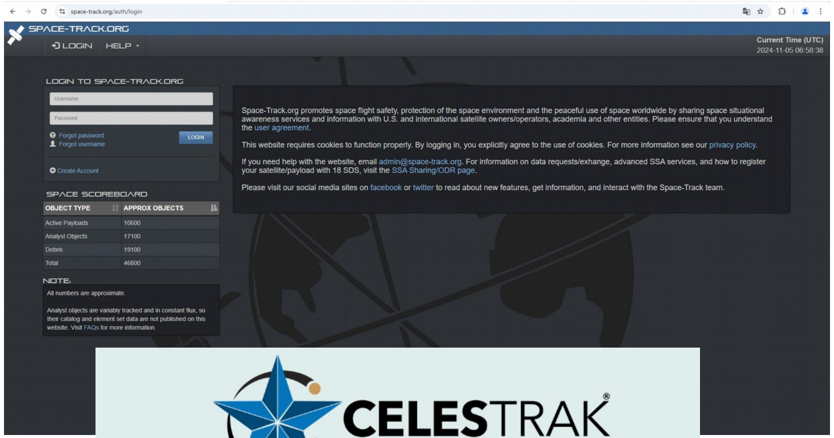
Код доступен в виде открытых библиотек на большинстве языков программирования: C, Python, MATLAB, и т.д.

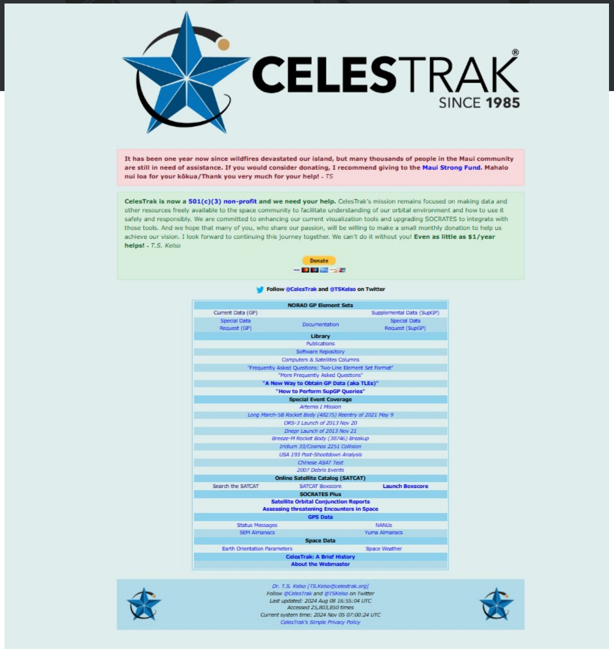
Библиотеки основаны на исправлениях, которые были собраны Vallado в публикации Revisiting Spacetrack report **#3**

Каталог

Каталог доступен на сайте Space-track.org
Официальный сайт
Требуется регистрация

Каталог доступен на сайте **Celes**track.org
Неофициальный сайт
Регистрация не требуется





TLE

Объект в каталоге описывается с помощью формата
TLE (Two Line Elements)
Двухстрочный набор элементов

TLE должен использоваться для SGP4/SDP4
Иначе, точность результатов не гарантирована.

TLE содержит **усредненные** параметры орбиты спутника

Принцип усреднения SGP4

В теории, на которой основана модель SGP4 движение спутника усредняется.

Принцип усреднения определяет принцип восстановления положения.
Поэтому TLE(содержащая усредненные значения орбитальных параметров) используется только в сочетании с SGP4/SDP4.

SGP4

SGP4
Для орбит периодом меньше **225 мин**
(~5000 км)

Модель гравитации:
зональные гармоники Земли до **J4**

Модель атмосферы:
Стационарная,

Неподвижная

Плотность атмосферы описывается
степенной функцией

$$\rho = \rho_0 (q_0 - s)^4 / (r - s)^4$$

Принцип усреднения использованный D.Brouwer

Основывается на преобразовании гамильтониана системы.

$$\mathcal{H} = KE - U = \tfrac{1}{2}mv^2 - R - U_{2\text{-}body}$$

Требуется убрать из гамильтониана меняющиеся величины
M (среднюю аномалию)
Ω (долготу восходящего узла)
ω (аргумент перигея)

Delaunay elements

M

ω

Ω

$L_d = \sqrt{\mu a}$

h

$H_d = \sqrt{\mu a(1-e^2)}\cos(i)$

Проекция момента на полярную ось

Ω изначально отсутствует в гамильтониане

Первое каноническое преобразование гамильтониана убирает зависимость от ***M***

$$\mathcal{H}(L_d, h, H_d, \_, \omega, M) = \mathcal{H}^*(L'_d, h', H'_d, \_, \omega', \_)$$

Второе каноническое преобразование гамильтониана убирает зависимость от ***ω***

$$\mathcal{H}^*(L'_d, h', H'_d, \_, \omega', \_) = \mathcal{H}^{**}(L''_d, h'', H''_d, \_, \_, \_)$$

После вычисления влияния возмущений на оставшиеся элементы, производится обратное преобразование

$$\mathcal{H} = T + V$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \boldsymbol{p}}, \quad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \boldsymbol{q}}.}$$

$$\mathcal{H} = -\frac{\mu^2}{2L_d^2} - R(L_d, h, H_d, M, \omega, \Omega)$$

$$\dot{L}_d = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial M} \qquad \dot{M} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial L_d}$$

$$\dot{h} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \omega} \qquad \dot{\omega} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial h}$$

$$\dot{H}_d = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \Omega} \qquad \dot{\Omega} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial H_d}$$

После преобразований гамильтониана

$$\dot{L}''_d = \frac{\partial \mathcal{H}^{**}}{\partial M''} = 0 \qquad \dot{M}'' = -\frac{\partial \mathcal{H}^{**}}{\partial L''_d} = k_1$$

$$\dot{h}'' = \frac{\partial \mathcal{H}^{**}}{\partial \omega''} = 0 \qquad \dot{\omega}'' = -\frac{\partial \mathcal{H}^{**}}{\partial h''} = k_2$$

$$\dot{H}''_d = \frac{\partial \mathcal{H}^{**}}{\partial \Omega''} = 0 \qquad \dot{\Omega}'' = -\frac{\partial \mathcal{H}^{**}}{\partial H''_d} = k_3$$

$$L''_d = \mathrm{const}_1 \qquad M'' = k_1 \Delta t + M''_o$$

$$h'' = \mathrm{const}_2 \qquad \omega'' = k_2 \Delta t + \omega''_o$$

$$H''_d = \mathrm{const}_3 \qquad \Omega'' = k_3 \Delta t + \Omega''_o$$

Эволюция орбитальных элементов состоит из
Вековых,
кратко-периодических (зависит от M) и
длинно-периодических (зависит от ω) влияний

$$a = \bar{a} + \Delta a_{SP} + \Delta a_{LP}$$

$$e = e_o + \Delta e_{SP} + \Delta e_{LP}$$

$$i = i_o + \Delta i_{SP} + \Delta i_{LP}$$

$$\omega = \omega_o + \dot{\omega}\Delta t + \Delta\omega_{SP} + \Delta\omega_{LP}$$

$$\Omega = \Omega_o + \dot{\Omega}\Delta t + \Delta\Omega_{SP} + \Delta\Omega_{LP}$$

$$M = M_o + n\Delta t + \Delta M_{SP} + \Delta M_{LP} \qquad n_o^2 a_o^3 = \mu$$

Short periodic
(зависит от M)

Long periodic
(зависит от ω)

Набор орбитальных элементов для решения SGP4

t_0 = epoch time

n_0 = mean motion (revolutions/day)

e_0 = eccentricity

i_0 = inclination (degrees)

ω_0 = argument of perigee (degrees)

Ω_0 = right ascension of ascending node (degrees)

M_0 = mean anomaly (degrees)

B^* = Atmospheric drag coefficient (units of 1/Earth radii)

Орбитальные элементы(кроме средней аномалии) здесь понимаются в смысле **среднего значения**

Вековые изменения орбитальных параметров

Вековые изменения орбитальных параметров за счет зональных гармоник

Вековые эффекты сопротивления атмосферы

(в случае орбит **глубокого космоса)**

Вековые изменения за счет **третьих тел**

Вековые изменения за счет **гравитационного резонанса**

Вековые изменения орбитальных параметров

Вековые изменения орбитальных параметров за счет зональных гармоник

$$k_4 = -\frac{3}{8} J_4 a_E^4$$

$$J_4 = -1.65597 \times 10^{-6}$$

$$\dot{M} = \left[\frac{3k_2(-1+3\theta^2)}{2a_0^2\beta_o^3} + \frac{3k_2^2(13-78\theta^2+137\theta^4)}{16a_0^4\beta_o^7} \right] n_0$$

$$\dot{\omega} = \left[-\frac{3k_2(1-5\theta^2)}{2a_0^2\beta_o^4} + \frac{3k_2^2(7-114\theta^2+395\theta^4)}{16a_0^4\beta_o^8} + \frac{5k_4(3-36\theta^2+49\theta^4)}{4a_0^4\beta_o^8} \right] n_0$$

$$\dot{\Omega} = \left[-\frac{3k_2\theta}{a_0^2\beta_o^4} + \frac{3k_2^2(4\theta-19\theta^3)}{2a_0^4\beta_o^8} + \frac{5k_4\theta(3-7\theta^2)}{2a_0^4\beta_o^8} \right] n_0$$

Формулы отличаются от рассмотренных ранее, так как здесь элементы усредняются другим способом.

Зональные гармоники не дают вековых влияний на элементы

$$\dot{a} = \dot{e} = \dot{i} = 0$$

Обновление значений элементов с учетом **зональных гармоник**(J2, J3, J4) и некоторых эффектов **сопротивления атмосферы**

Сначала применяются эффекты гармоник

$$M_{DF} = M_o + n_0(t - t_0) + \dot{M}(t - t_0)$$

$$\omega_{DF} = \omega_o + \dot{\omega}(t - t_o)$$

$$\Omega_{DF} = \Omega_o + \dot{\Omega}(t - t_0)$$

Расчитываются эффекты **сопротевления атмосферы**

$$\delta\omega = B^* C_3 (\cos\omega_o)(t - t_o)$$

$$\delta M = -\frac{2}{3}(q_o - s)^4 B^* \xi^4 \frac{a_E}{e_o \eta}\left[(1 + \eta\cos M_{DF})^3 - (1 + \eta\cos M_o)^3\right]$$

Эффекты складываются

$$M = M_{DF} + \delta\omega + \delta M$$

$$\omega = \omega_{DF} - \delta\omega - \delta M$$

$$\Omega = \Omega_{DF} - \frac{21}{2}\frac{n_0 k_2 \theta}{a_0^{\,2} \beta_o^{\,2}} C_1 (t - t_o)^2$$

Дополнительный шаг для **вековых** эффектов в случае орбит глубокого космоса (SDP4)

Для орбит периодом больше 225 минут
здесь **дополнительно**:

-Добавляются **вековые** изменения за счет **третьих тел**

$$M = M + \dot{M}_{LS}(t - t_0)$$
$$\omega = \omega + \dot{\omega}_{LS}(t - t_0)$$
$$\Omega = \Omega + \dot{\Omega}_{LS}(t - t_0)$$
$$e = e_0 + \dot{e}_{LS}(t - t_0)$$
$$I = I_0 + \dot{I}_{LS}(t - t_0)$$

-Добавляются **вековые** изменения за счет **гравитационного резонанса**

$$n = n_i$$
$$M = \left\{ \begin{array}{ll} \lambda_i - \Omega_s - \omega_s + \theta_t & \text{for 1 - day period} \\ \lambda_i - 2\Omega_s + 2\theta_t & \text{for 1/2 - day period} \end{array} \right\}$$

(Подробнее эти эффекты рассматриваются в конце)

Учет остальных **вековых** эффектов **сопротивления атмосферы**

$$e = e_o - B^* C_4 (t - t_o) - B^* C_5 (\sin M - \sin M_o)$$

$$a = \left(\frac{k_e}{n}\right)^{2/3} \left[1 - C_1 (t - t_o) - D_2 (t - t_o)^2 - D_3 (t - t_o)^3 - D_4 (t - t_o)^4\right]^2$$

$$IL = M + \omega + \Omega + n_0 [\frac{3}{2} C_1 (t - t_o)^2 + (D_2 + 2C_1^{\;2})(t - t_o)^3 + \frac{1}{4}(3D_3 + 12C_1 D_2 + 10C_1^{\;3})(t - t_o)^4$$

$$+ \frac{1}{5}(3D_4 + 12C_1 D_3 + 6D_2^{\;2} + 30C_1^{\;2} D_2 + 15C_1^{\;4})(t - t_o)^5]$$

$$\beta = \sqrt{1 - e^2}$$

$$n = k_e / a^{3/2}$$

Учет **длинно периодических** эффектов

Длинно периодическое влияние **зональных гармоник**

В случае орбит глубокого космоса
Длинно периодическое влияние **третьих тел**

Длинно периодические эффекты
зональных гармоник

$$\delta_1 e = e''\eta^2\left(\frac{1}{8}\gamma_2'\left[1-11\theta^2-\frac{40\theta^4}{1-5\theta^2}\right]-\frac{5\gamma_4'}{12\gamma_2'}\left[1-3\theta^2-\frac{8\theta^4}{1-5\theta^2}\right]\right)\cos 2\omega''$$
$$+\frac{\eta^2\sin I''}{4\gamma_2'}\left(\gamma_3'+\frac{5\gamma_5'}{16}\left(4+3e''^2\right)\left[1-9\theta^2-\frac{24\theta^4}{1-5\theta^2}\right]\right)\sin\omega''$$
$$-\frac{35\gamma_5'}{384\gamma_2'}e''^2\eta^2\sin I''\left[1-5\theta^2-\frac{16\theta^4}{1-5\theta^2}\right]\sin 3\omega''$$

$$\delta_1 I = -\frac{e''\delta_1 e}{\eta^2\tan I''}$$

$$\delta_1 M = \eta^3\left(\frac{1}{8}\gamma_2'\left[1-11\theta^2-\frac{40\theta^4}{1-5\theta^2}\right]-\frac{5\gamma_4'}{12\gamma_2'}\left[1-3\theta^2-\frac{8\theta^4}{1-5\theta^2}\right]\right)\sin 2\omega''$$
$$-\frac{\eta^3\sin I''}{4\gamma_2' e''}\left(\gamma_3'+\frac{5\gamma_5'}{16}\left(4+9e''^2\right)\left[1-9\theta^2-\frac{24\theta^4}{1-5\theta^2}\right]\right)\cos\omega''$$
$$+\frac{35\gamma_5'}{384\gamma_2'}e''\eta^3\sin I''\left[1-5\theta^2-\frac{16\theta^4}{1-5\theta^2}\right]\cos 3\omega''$$

$$\delta_1\omega = \Bigg\{ -\frac{1}{16}\gamma_2'\left[(2+e''^2) - 11(2+3e''^2)\theta^2 - \frac{40(2+5e''^2)\theta^4}{-5\theta^2} - \frac{400e''^2\theta^6}{(1-5\theta^2)^2}\right]$$

$$+ \frac{5\gamma_4'}{24\gamma_2'}\left[(2+e''^2) - 3(2+3e''^2)\theta^2 - \frac{8(2+5e''^2)\theta^4}{1-5\theta^2} - \frac{80e''^2\theta^6}{(1-5\theta^2)^2}\right]\Bigg\}\sin 2\omega''$$

$$+ \frac{1}{4\gamma_2'}\Bigg\{\gamma_3'\left(\frac{\sin I''}{e''} - \frac{e''\theta^2}{\sin I''}\right)$$

$$+ \frac{5\gamma_5'}{16}\left[\left(\frac{\eta^2\sin I''}{e''} - \frac{e''\theta^2}{\sin I''}\right)(4+3e''^2) + e''\sin I''(26+9e''^2)\right]\left[1-9\theta^2 - \frac{24\theta^4}{1-5\theta^2}\right]$$

$$- \frac{15\gamma_5'}{8}e''\theta^2\sin I''(4+3e''^2)\left[3 + \frac{16\theta^2}{1-5\theta^2} + \frac{40\theta^4}{(1-5\theta^2)^2}\right]\Bigg\}\cos\omega''$$

$$+ \frac{35\gamma_5'}{576\gamma_2'}\Bigg\{-\frac{1}{2}\left(e''\sin I''(3+2e''^2) - \frac{e''^3\theta^2}{\sin I''}\right)\left[1 - 5\theta^2 - \frac{16\theta^4}{1-5\theta^2}\right]$$

$$+ e''^3\theta^2\sin I''\left[5 + \frac{32\theta^2}{1-5\theta^2} + \frac{80\theta^4}{(1-5\theta^2)^2}\right]\Bigg\}\cos 3\omega''$$

$$\delta_1\Omega = e''^2\theta\left(-\frac{\gamma_2'}{8}\left[11 + \frac{80\theta^2}{1-5\theta^2} + \frac{200\theta^4}{(1-5\theta^2)^2}\right] + \frac{5\gamma_4'}{12\gamma_2'}\left[3 + \frac{16\theta^2}{1-5\theta^2} + \frac{40\theta^4}{(1-5\theta^2)^2}\right]\right)\sin 2\omega''$$

$$+ \frac{e''\theta}{4\gamma_2'}\Bigg\{\frac{\gamma_3'}{\sin I''} + \frac{5\gamma_5'}{16\sin I''}\left(4+3e''^2\right)\left[1 - 9\theta^2 - \frac{24\theta^4}{1-5\theta^2}\right]$$

$$+ \frac{15\gamma_5'}{8}\sin I''\left(4+3e''^2\right)\left[3 + \frac{16\theta^2}{1-5\theta^2} + \frac{40\theta^4}{(1-5\theta^2)^2}\right]\Bigg\}\cos\omega''$$

$$- \frac{35\gamma_5'}{576\gamma_2'}e''^3\theta\Bigg\{\frac{1}{2\sin I''}\left[1 - 5\theta^2 - \frac{16\theta^4}{1-5\theta^2}\right]$$

$$+ \sin I''\left[5 + \frac{32\theta^2}{1-5\theta^2} + \frac{80\theta^4}{(1-5\theta^2)^2}\right]\Bigg\}\cos 3\omega''$$

Длинно периодические эффекты третьего тела *x*

$$\delta e_x = -\frac{30\eta_0 C_x e_0}{n_0}[F_2(X_2X_3 + X_1X_4) + F_3(X_2X_4 - X_1X_3)]$$

$$\delta I_x = -\frac{C_x}{n_0\eta_0}[F_2Z_{12} + F_3(Z_{13} - Z_{11})]$$

$$\delta M_x = -\frac{2C_x}{n_0}[F_2Z_2 + F_3(Z_3 - Z_1) - 3e_x \sin f_x(7 + 3e_0^{\ 2})]$$

$$(\delta\omega_x + \cos I_x \delta\Omega_x) = \frac{2\eta_0 C_x}{n_0}[F_2Z_{32} + F_3(Z_{33} - Z_{31}) - 9e_x \sin f_x]$$

$$\sin I_x \delta\Omega_x = \frac{C_x}{n_0\eta_0}[F_2Z_{22} + F_3(Z_{23} - Z_{21})]$$

Параметры *F,Z,C* расчитываются исходя из орбитальных элементов **третьего тела**

Добавление **длинно периодических** эффектов

$$e = e + \delta e_{LS}$$

$$i = i + \delta i_{LS}$$

For $i > 0.2$ radians

$$\Omega = \Omega + \delta\Omega_{LS} / \sin i$$

$$\omega = \omega + (\delta\omega_{LS} + \cos i\delta\Omega_{LS}) - \delta\Omega_{LS}\cos i / \sin i$$

$$M = M + \delta M_{LS}$$

For $i \le 0.2$ radians

$$\alpha = \sin i \sin\Omega + \sin i \cos\Omega\delta\Omega_{LS} + \cos i \sin\Omega\delta i_{LS}$$

$$\beta = \sin i \cos\Omega - \sin i \sin\Omega\delta\Omega_{LS} + \cos i \cos\Omega\delta i_{LS}$$

$$\Omega = \tan^{-1}(a / \beta)$$

$$M = M + \delta M_{LS}$$

$$\omega = \omega + (\delta\omega_{LS} + \cos i\delta\Omega_{LS}) - \Omega\sin i\delta i_{LS}$$

Учет **долго периодических** эффектов **гравитации**

Вычисляются промежуточные элементы:

$$a_{xN} = e\ \cos\omega$$

$$IL_L = \frac{A_{3,0}\ \sin\ i}{8k_2 a\beta^{\ 2}}(e\ \cos\ \omega)\left(\frac{3+5\cos i}{1+\cos i}\right)$$

$$a_{yNL} = \frac{A_{3,0}\ \sin\ i}{4k_2 a\beta^{\ 2}}$$

$$IL_T = IL + IL_L$$

$$a_{yN} = e\ \sin\ \omega + a_{yNL}.$$

Учет быстрых эффектов

Решаем уравнение Кеплера, чтобы получить E+ω из M

$$(\mathrm{E}+\omega)_{i+1} = (\mathrm{E}+\omega)_i + \Delta(\mathrm{E}+\omega)_i$$

Начинаем с итерации:

$$\Delta(\mathrm{E}+\omega)_1 = \frac{U - a_{yN}\cos(\mathrm{E}+\omega)_i + a_{xN}\sin(\mathrm{E}+\omega)_i - (\mathrm{E}+\omega)_i}{1 - a_{yN}\sin(\mathrm{E}+\omega)_i - a_{xN}\cos(\mathrm{E}+\omega)_i}$$

$$(\mathrm{E}+\omega)_1 = U.$$

Используются вычисленные ранее долго периодические значения

Добавление быстрых возмущений за счет гавитации Земли (используются E и ω вычисленные из уравнения Кеплера)

$$e\cos E = a_{xN}\cos(E+\omega) + a_{yN}\sin(E+\omega)$$

$$e\sin E = a_{xN}\sin(E+\omega) - a_{yN}\cos(E+\omega)$$

$$e = (a_{xN}{}^2 + a_{yN}{}^2)^{1/2}$$

$$p_L = a(1-e^2)$$

$$r = a(1-e\cos E)$$

$$\dot r = k_e\frac{\sqrt{a}}{r}e\sin E$$

$$r\dot f = k_e\frac{\sqrt{p_L}}{r}$$

$$\cos u = \frac{a}{r}\left[\cos(E+\omega) - a_{xN} + \frac{a_{yN}(e\sin E)}{1+\sqrt{1-e^2}}\right]$$

$$\sin u = \frac{a}{r}\left[\sin(E+\omega) - a_{yN} - \frac{a_{xN}(e\sin E)}{1+\sqrt{1-e^2}}\right]$$

$$u = \tan^{-1}\left(\frac{\sin u}{\cos u}\right)$$

Быстрые возмущения

$$\Delta r = \frac{k_2}{2p_L}(1-\cos^2 i)\cos 2u$$

$$\Delta u = -\frac{k_2}{4p_L{}^2}(7\cos^2 i - 1)\sin 2u$$

$$\Delta\Omega = \frac{3k_2\cos i}{2p_L{}^2}\sin 2u$$

$$\Delta i = \frac{3k_2\cos i}{2p_L{}^2}\sin i\cos 2u$$

$$\Delta\dot r = -\frac{k_2 n}{p_L}(1-\cos^2 i)\sin 2u$$

$$\Delta r\dot f = \frac{k_2 n}{p_L}\left[(1-\cos^2 i)\cos 2u - \frac{3}{2}(1-3\cos^2 i)\right]$$

Получаем **оскулирующие** элементы для данного момента времени

$$r_k = r\left[1 - \frac{3}{2}k_2\frac{\sqrt{1-e^2}}{p_L{}^2}(3\cos^2 i - 1)\right] + \Delta r$$

$$u_k = u + \Delta u$$

$$\Omega_k = \Omega + \Delta\Omega$$

$$i_k = i + \Delta i$$

$$\dot r_k = \dot r + \Delta\dot r$$

$$r\dot f_k = r\dot f + \Delta r\dot f.$$

Оскулирующие элементы преобразуются в **декартовые** координаты и скорость

Путем **поворота** из перифокальной системы в инерциальную

Матрицы поворота расчитываются исходя из текущих оскулирующих элементов:

$$\mathbf{U} = \mathbf{M}\sin u_k + \mathbf{N}\cos u_k$$

$$\mathbf{M} = \left\{ \begin{array}{l} M_x = -\sin\Omega_k \cos i_k \\ M_y = \cos\Omega_k \cos i_k \\ M_z = \sin i_k \end{array} \right\}$$

$$\mathbf{V} = \mathbf{M}\cos u_k - \mathbf{N}\sin u_k$$

$$\mathbf{N} = \left\{ \begin{array}{l} N_x = \cos\Omega_k \\ N_y = \sin\Omega_k \\ N_z = 0 \end{array} \right\}.$$

положение

$$\mathbf{r} = r_k \mathbf{U}$$

скорость

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{r}_k \mathbf{U} + (r\dot{f})_k \mathbf{V}$$

Эффекты для орбит «глубокого» космоса
(Период >225 минут)

Добавление эффектов Луны и Солнца

Вековые эффекты третьего тела *x*

$$\dot{a}_x = 0$$

$$\dot{e}_x = -15 C_x n_x \frac{e_0 \eta_0}{n_0}(X_1 X_3 + X_2 X_4)$$

$$\dot{I}_x = \frac{-C_x n_x}{2 n_0 \eta_0}(Z_{11} + Z_{13})$$

$$\dot{M}_x = \frac{-C_x n_x}{n_0}(Z_1 + Z_3 - 14 - 6 e_0^{\,2})$$

$$\dot{\Omega}_x = \begin{cases} \dfrac{C_x n_x}{2 n_0 \eta_0 \sin I_0}(Z_{21} + Z_{23}) & \text{if } I_0 \geq 3^\circ \\ 0 & \text{if } I_0 < 3^\circ \end{cases}$$

$$\dot{\omega}_x = \begin{cases} \dfrac{C_x n_x \eta_0}{n_0''}(Z_{31} + Z_{33} - 6) - \dot{\Omega}_x \cos I_0'' & \text{if } I_0'' \geq 3^\circ \\ \dfrac{C_x n_x \eta_0}{n_0''}(Z_{31} + Z_{33} - 6) & \text{if } I_0'' < 3^\circ \end{cases}$$

Добавление вековых эффектов к орбитальным элементам

$$M = M + \dot{M}_{LS}(t - t_0)$$

$$\omega = \omega + \dot{\omega}_{LS}(t - t_0)$$

$$\Omega = \Omega + \dot{\Omega}_{LS}(t - t_0)$$

$$e = e_0 + \dot{e}_{LS}(t - t_0)$$

$$I = I_0 + \dot{I}_{LS}(t - t_0)$$

Вековые эффекты Луны и Солнца **суммируются**

Расчет коэффициентов

Орбитальные элементы **третьего тела:**

$$\Omega_{m_\varepsilon} = [\Omega_{m_{\varepsilon 0}} + \dot{\Omega}_{m_\varepsilon}\Delta t + \ddot{\Omega}_{m_\varepsilon}\Delta t^2 + \dddot{\Omega}_{m_\varepsilon}\Delta t^3]_{\mathrm{mod}\,2\pi}$$

$$\cos I_m = \cos\varepsilon\cos I_{m_\varepsilon} - \sin\varepsilon\sin I_{m_\varepsilon}\cos\Omega_{m_\varepsilon}$$

$$\gamma = u_{0_\varepsilon} + \dot{u}_\varepsilon\Delta t + \ddot{u}_\varepsilon\Delta t^2 + \dddot{u}_\varepsilon\Delta t^3$$

$$\sin\Omega_m = \sin I_{m_\varepsilon}\sin\Omega_{m_\varepsilon} / \sin I_m$$

$$\cos\Omega_m = \sqrt{1-\sin^2\Omega_m}$$

$$\sin\Delta = \sin\varepsilon\sin\Omega_{m_\varepsilon} / \sin I_m$$

$$\cos\Delta = \cos\Omega_m\cos\Omega_{m_\varepsilon} + \sin\Omega_m\sin\Omega_{m_\varepsilon}\cos\varepsilon$$

$$\Delta = \tan^{-1}\left(\frac{\sin\Delta}{\cos\Delta}\right)$$

$$\omega_m = \gamma - \Omega_{m_\varepsilon} + \Delta = G_{o_m}$$

$$M_s = M_o + \dot{M}\Delta t + \ddot{M}\Delta t^2 + \dddot{M}\Delta t^3$$

Данные берутся из
Explanatory Supplement to the Astronomical Ephemeris and the American Ephemeris and Nautical Almanac

Δt время с эпохи элементов полученных из альманаха

$I_{m_\varepsilon} = 5.^\circ 145396374$	(the moon's inclination with respect to the ecliptic)
$\varepsilon = 23.^\circ 4441$	(the obliquity of the ecliptic)
$e_m = .05490$	(lunar eccentricity)
$e_s = .01675$	(solar eccentricity)
$n_m = 1.583521770 \times 10^{-4}$ radians/minute	(lunar mean motion)
$n_s = 1.19459 \times 10^{-5}$ radians/minute	(solar mean motion)
$I_s = \varepsilon = 23.^\circ 4441$	(solar inclination)
$\Omega_s = 0$	
$\omega_s = 281.^\circ 2208 = G_{o_s}$	
$C_m = 4.796806521 \times 10^{-7}$ radians/minute	(lunar perturbation coefficient)
$C_s = 2.98647972 \times 10^{-6}$ radians/minute	(solar perturbation coefficient)

$$a_1 = \cos\omega_x \cos(\Omega_o - \Omega_x) + \sin\omega_x \cos I_x \sin(\Omega_o - \Omega_x)$$
$$a_3 = -\sin\omega_x \cos(\Omega_o - \Omega_x) + \cos\omega_x \cos I_x \sin(\Omega_o - \Omega_x)$$
$$a_7 = -\cos\omega_x \sin(\Omega_o - \Omega_x) + \sin\omega_x \cos I_x \cos(\Omega_o - \Omega_x)$$
$$a_8 = \sin\omega_x \sin I_x$$
$$a_9 = \sin\omega_x \sin(\Omega_o - \Omega_x) + \cos\omega_x \cos I_x \cos(\Omega_o - \Omega_x)$$
$$a_{10} = \cos\omega_x \sin I_x$$
$$a_2 = a_7 \cos i_o + a_8 \sin i_o$$
$$a_4 = a_9 \cos i_o + a_{10} \sin i_o$$
$$a_5 = -a_7 \sin i_o + a_8 \cos i_o$$
$$a_6 = -a_9 \sin i_o + a_{10} \cos i_o$$

$$X_1 = a_1 \cos\omega_o + a_2 \sin\omega_o$$
$$X_2 = a_3 \cos\omega_o + a_4 \sin\omega_o$$
$$X_3 = -a_1 \sin\omega_o + a_2 \cos\omega_o$$
$$X_4 = -a_3 \sin\omega_o + a_4 \cos\omega_o$$
$$X_5 = a_5 \sin\omega_o$$
$$X_6 = a_6 \sin\omega_o$$
$$X_7 = a_5 \cos\omega_o$$
$$X_8 = a_6 \cos\omega_o$$

$$Z_{31} = 12X_1^2 - 3X_3^2$$
$$Z_{32} = 24X_1X_2 - 6X_3X_4$$
$$Z_{33} = 12X_2^2 - 3X_4^2$$
$$Z_1 = 6(a_1^2 + a_2^2) + (1+e_0^2)Z_{31}$$
$$Z_2 = 12(a_1a_3 + a_2a_4) + (1+e_0^2)Z_{32}$$
$$Z_3 = 6(a_3^2 + a_4^2) + (1+e_0^2)Z_{33}$$
$$Z_{11} = -6a_1a_5 + e_0^2(-24X_1X_7 - 6X_3X_5)$$
$$Z_{13} = -6a_3a_6 + e_0^2(-24X_2X_8 - 6X_4X_6)$$
$$Z_{21} = 6a_2a_5 + e_0^2(24X_1X_5 - 6X_3X_7)$$
$$Z_{23} = 6a_4a_6 + e_0^2(24X_2X_6 - 6X_4X_8)$$
$$Z_{22} = 6a_4a_5 + 6a_2a_6 + e_0^2(24X_2X_5 + 24X_1X_6 - 6X_4X_7 - 6X_3X_8)$$
$$Z_{12} = -6a_1a_6 - 6a_3a_5 - e_0^2(24X_2X_7 + 24X_1X_8 + 6X_3X_6 + 6X_4X_5)$$

Учет резонанса

$$n = n_i$$

$$M = \begin{cases} \lambda_i - \Omega_s - \omega_s + \theta_t & \text{for 1 - day period} \\ \lambda_i - 2\Omega_s + 2\theta_t & \text{for 1/2 - day period} \end{cases}$$

Для орбит с периодом **1200 — 1800** минут

Считается, что аппарат находится в 1—дневном резонансе

Для этих орбит определим:

$$\lambda = M + \Omega + \omega - \theta_G$$

Для орбит с периодом **680 — 760** минут и эсцентриситетом больше **0.5**

Считается, что аппарат находится в ½—дневном резонансе

Для этих орбит определим:

$$\lambda = M + 2\Omega - 2\theta_G$$

θ_G — долгота по Гринвичу

Учет резонанса

$$n = n_i$$

$$M = \begin{cases} \lambda_i - \Omega_s - \omega_s + \theta_t & \text{for 1 - day period} \\ \lambda_i - 2\Omega_s + 2\theta_t & \text{for 1/2 - day period} \end{cases}$$

Интегрируется одновременно λ и среднее движение n
с шагом 12 часов (720 минут)

$$\lambda_i = \lambda_{i-1} + \dot{\lambda}_i (\Delta t) + \frac{\ddot{\lambda}_i}{2} (\Delta t)^2$$

$$n_i = n_{i-1} + \dot{n}_i (\Delta t) + \frac{\ddot{n}_i}{2} (\Delta t)^2$$

До получения λ и n на требуемый момент

Для 1-дневного резонанса

$$\dot{\lambda}_1 = n_i + \dot{\lambda}_0$$

$$\dot{n}_i = \delta_1 \sin(\lambda_i - \lambda_{31}) + \delta_2 \sin(2\lambda_i - 2\lambda_{22}) + \delta_3 \sin(3\lambda_i - 3\lambda_{33})$$

$$\frac{\ddot{\lambda}_i}{2} = \frac{\dot{n}_i}{2}$$

$$\frac{\ddot{n}_i}{2} = \frac{\dot{\lambda}_i}{2}[\delta_1 \cos(\lambda_i - \lambda_{31}) + 2\delta_2 \cos(2\lambda_i - \lambda_{22}) + 3\delta_3 \cos(3\lambda_i - \lambda_{33})]$$

Для 1/2-дневного резонанса

$$\dot{\lambda}_i = n_i + \dot{\lambda}_0$$

$$\dot{n}_i = \sum_{(l,m,p,q)} D_{lmpq} \sin[(l-2p)\omega_i + \frac{m}{2}\lambda_i - G_{lm}]$$

$$\frac{\ddot{\lambda}_i}{2} = \frac{\dot{n}_i}{2}$$

$$\frac{\ddot{n}_i}{2} = \frac{\dot{\lambda}_i}{2}\left[\sum_{(l,m,p,q)} \frac{m}{2} D_{lmpq} \cos[(l-2p)\omega_i + \frac{m}{2}\lambda_i - G_{lm}]\right]$$

Начальные условия

Для 1-дневного резонанса

$$\lambda_0 = M_0 + \omega_0 + \Omega_0 - \theta_0$$

$$\dot{\lambda}_0 = \dot{M}_0 + \dot{M}_{LS} + \dot{\Omega}_0 + \dot{\Omega}_{LS} + \dot{\omega}_0 + \dot{\omega}_{LS} - \dot{\theta}$$

Для 1/2-дневного резонанса

$$\lambda_o = M_0 + 2\Omega_o - 2\theta_0$$

$$\dot{\lambda}_0 = \dot{M}_o + \dot{M}_{LS} + 2\dot{\Omega}_o + 2\dot{\Omega}_{LS} - 2\dot{\theta}$$

TLE

```
ISS (ZARYA)
1 25544U 98067A   08264.51782528 -.00002182  00000-0 -11606-4 0  2927
2 25544  51.6416 247.4627 0006703 130.5360 325.0288 15.72125391563537
```

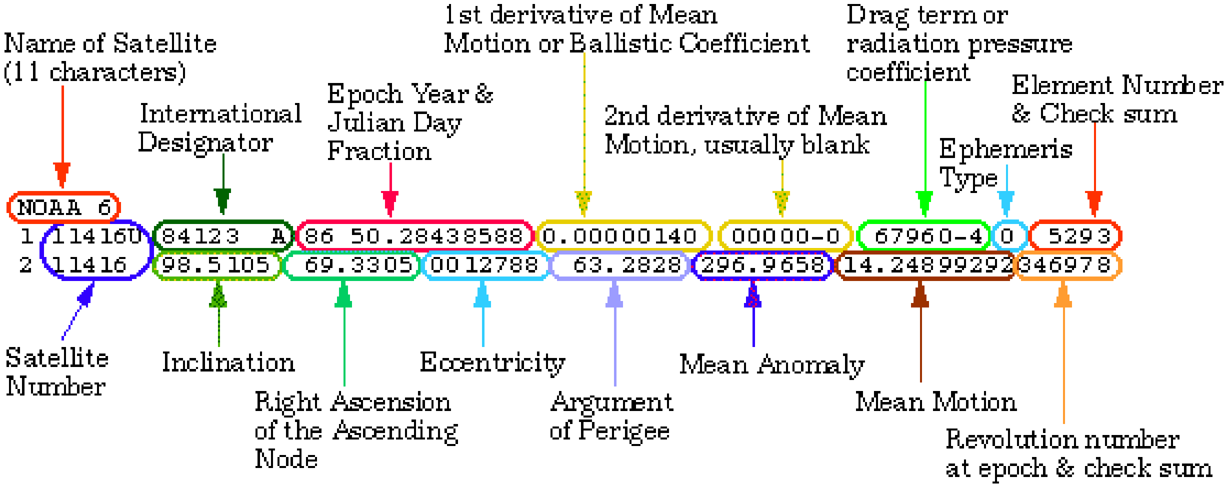
$$\bar{n} = \sqrt{\frac{\mu}{\bar{a}^3}} \qquad e \qquad i \qquad \Omega \qquad \omega \qquad M$$

$$\frac{\dot{n}}{2} \qquad \frac{\ddot{n}}{6} \qquad B^* = \frac{1}{2}\frac{c_D A}{m}\rho_o R_\oplus \qquad UTC$$

1 16609U 86017A 93352.53502934 .00007889 00000 0 10529-3 34
2 16609 51.6190 13.3340 0005770 102.5680 257.5950 15.59114070 44786

Card #	Satellite Number	Class	International Designator: Year	Lch#	Piece	Yr	Epoch Day of Year (plus fraction)	Mean motion derivative (rev/day /2)	Mean motion second derivative (rev/day2 /6)	Bstar (/ER)	Eph	Elem num	Chk Sum
								S	S .	S . S E			
1	16609	U	86	017	A	93	352.53502934	.00007889	00000 0	10529-3	0	34	2

Card #	Satellite Number	Inclination (deg)	Right Ascension of the Node (deg)	Eccentricity	Arg of Perigee (deg)	Mean Anomaly (deg)	Mean Motion (rev/day)	Epoch Rev	Chk
2	16609	51.6190	13.3340	0005770	102.5680	257.5950	15.59114070	44786	9



Epoch December 18, 1993, $12^h\ 50^m\ 26.5350^s$ UTC

$$\bar{n} = 15.591\ 140\ 70 \text{ rev / day} \Rightarrow$$

$$\bar{a} = 6768.3568 \text{ km}$$

$$\frac{\dot{n}}{2} = 7.889\times10^{-5}\ \frac{\text{rev}}{\text{day}^2} \qquad \frac{\ddot{n}}{6} = 0.0\ \frac{\text{rev}}{\text{day}^3}$$

$$B^* = 0.000\ 105\ 29/\ \text{ER}$$

$$e = 0.000\ 577\ 0 \qquad M = 257.5950°$$

$$i = 51.6190° \qquad \Omega = 13.3340° \qquad \omega = 102.5680°$$

Набор орбитальных элементов для решения SGP4

t_0 = epoch time

n_0 = mean motion (revolutions/day)

e_0 = eccentricity

i_0 = inclination (degrees)

ω_0 = argument of perigee (degrees)

Ω_0 = right ascension of ascending node (degrees)

M_0 = mean anomaly (degrees)

B^* = Atmospheric drag coefficient (units of 1/Earth radii)

Орбитальные элементы(кроме средней аномалии) здесь понимаются в смысле **среднего значения**