Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»

Отчёт по лабораторной работы 1.2.5

Изучение вынужденной регулярной прецессии гироскопа.

Выполнил студент:
Сериков Василий Романович
группа: Б03-102

Москва, 2021 г.

Цель работы: исследовать вынужденную прецессию гироскопа; установить зависимость скорости вынужденной прецессии от величины момента сил, действующих на ось гироскопа; определить скорость вращения ротора гироскопа и сравнить ее со скоростью, рассчитанной по скорости прецессии.

В работе используется: Гироскоп в кардановом подвесе, секундомер, набор грузов, отдельный ротор гироскопа, цилиндр известной массы, крутильный маятник, штангенциркуль, линейка, осциллограф, генератор частоты.

Теория: Уравнение движения твёрдого тела можно записать в следующем виде:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F} \tag{1}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} \tag{2}$$

Момент импульса тела в главных его осях x, y, z равен

$$\vec{L} = \vec{i}I_x\omega_x + \vec{j}I_y\omega_y + \vec{k}I_z\omega_z, \tag{3}$$

где I_x, I_y, I_z – главные моменты инерции, ω_x, ω_y, ω_z – компоненты вектора угловой скорости $\vec{\omega}$. Быстро вращающееся тело, для которого, например,

$$I_z\omega_z \gg I_x\omega_x, \quad I_y\omega_y, \tag{4}$$

принято называть гироскопом. Гироскоп называется уравновешенным, если его центр масс неподвижен.

В силу (2) приращение момента импульса определяется интегралом

$$\Delta\vec{L} = \int \vec{M}dt. \tag{5}$$

Если момент внешних сил действует в течение короткого промежутка времени, из интеграла (5) следует, что приращение $\Delta\vec{L}$ момента импульса значительно меньше самого момента импульса:

$$\left|\Delta\vec{L}\right| \ll \left|\vec{L}\right| \tag{6}$$

С этим связана замечательная устойчивость, которую приобретает движение гироскопа после приведения его в быстрое вращение. Выясним, какие силы надо приложить к гироскопу, чтобы изменить направление его оси. Рассмотрим для примера маховик, вращающийся вокруг оси z, перпендикулярной к плоскости маховика (Рис. 1). Будем считать, что

$$\omega_z = \omega_0, \quad \omega_x = 0, \quad \omega_y = 0. \tag{7}$$

Пусть ось вращения повернулась в плоскости zx по направлению к оси x на бесконечно малый угол $d\varphi$. Такой поворот означает добавочное вращение маховика вокруг оси y, так что

$$d\varphi = \Omega dt, \tag{8}$$

где Ω – угловая скорость такого вращения. Будем предполагать, что

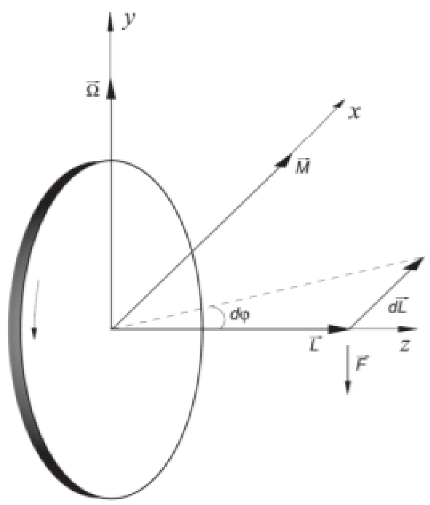

Рис. 1: Маховик

$$L_\Omega \ll L_{\omega_0} \tag{9}$$

Это означает, что момент импульса маховика, равный $I_z\omega_0$ до приложения внешних сил, только повернётся в плоскости zx по направлению к оси x, не изменяя своей величины. Таким образом,

$$\left|d\vec{L}\right| = Ld\varphi = L\Omega dt. \tag{10}$$

Но это изменение направлено вдоль оси x, поэтому вектор $d\vec{L}$ можно представить в виде векторного произведения вектора угловой скорости ω, направленного вдоль оси y, на вектор собственного момента импульса маховика, направленного вдоль оси z,

$$d\vec{L} = \vec{\Omega} \times \vec{L}dt, \tag{11}$$

т. е.

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\Omega} \times \vec{L}. \tag{12}$$

В силу (2) имеем

$$\vec{M} = \vec{\Omega} \times \vec{L}. \tag{13}$$

Формула (13) справедлива, если выполнено условие (9). Она позволяет определить момент сил $\vec{M}$, который необходимо приложить к маховику для того, чтобы вызвать вращение оси маховика с угловой скоростью $\vec{\Omega}$. Мы видим, таким образом, что для поворота оси вращающегося маховика к оси x необходимо приложить силы, направленные не вдоль оси x, а вдоль оси y, так чтобы их момент $\vec{M}$ был направлен вдоль оси x.

Для гироскопа массой $m_\text{г}$, у которого ось собственного вращения наклонена на угол α от вертикали, скорость прецессии, происходящей вокруг вертикальной оси под действием силы тяжести, равна

$$\Omega = \frac{M}{I_z \omega_0 \sin\alpha} = \frac{m_{\text{г}} g l_{\text{ц}} \sin\alpha}{I_z \omega_0 \sin\alpha} = \frac{m_{\text{г}} g l_{\text{ц}}}{I_z \omega_0}, \tag{14}$$

где $l_{\text{ц}}$ – расстояние от точки подвеса до центра масс гироскопа, т. е. скорость прецессии не зависит от угла α.

Для изучения регулярной прецессии уравновешенного гироскопа к его оси подвешивают дополнительные грузы. Это смещает общий центр масс и создает момент сил тяжести, вызывающий прецессию. Скорость прецессии в этом случае равна

$$\Omega = \frac{mgl}{I_z \omega_0}, \tag{15}$$

где m – масса груза, l – расстояние от центра карданова подвеса до точки крепления груза на оси гироскопа.

Измерение скорости прецессии гироскопа позволяет вычислить угловую скорость вращения его ротора. Расчет производится по формуле (15). Момент инерции ротора относительно оси симметрии I_0 измеряется по крутильным колебаниям точной копии ротора, подвешиваемой вдоль оси симметрии на жесткой проволоке. Период крутильных колебаний T_0 зависит от момента инерции I_0 и модуля кручения проволоки f:

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{I_0}{f}}. \tag{16}$$

Чтобы исключить модуль кручения проволоки, вместо ротора гироскопа к той же проволоке подвешивают цилиндр правильной формы с известными размерами и массой, для которого легко можно вычислить момент инерции $I_{\text{ц}}$. Для определения момента инерции ротора гироскопа имеем

$$I_0 = I_{\text{ц}} \frac{T_0^2}{T_{\text{ц}}^2}, \tag{17}$$

где $T_{\text{ц}}$ –период крутильных колебаний цилиндра.

Ход работы:

Для определения частоты вращения ротора гироскопа будем исследовать зависимость скорости прецессии гироскопа от момента силы, действующей на его ось.

1. Отклоним ось гироскопа на 6° вверх от горизонтальной оси. Будем вешать грузы различной массы на ось гироскопа и измерять время, за которое ось гироскопа опуститься на 6° ниже горизонтальной оси. Результаты измерений занесем в таблицы 1 - 7. ($\sigma_t = 0,4$ с $\sigma_m = 0.1$ г)

№	N, обор.	t, с
1	14	410,0
2	14	411,0

Таблица 1: Масса: $m = 341{,}8$ г.

№	N, обор.	t, с
1	13	488,1
2	13	487,3

Таблица 2: Масса: $m = 272{,}0$ г.

№	N, обор.	t, с
1	11	511,4
2	11	507,8

Таблица 3: Масса: $m = 219{,}5$ г.

№	N, обор.	t, с
1	9	534,7
2	9	534,1

Таблица 4: Масса: $m = 175.7$ г.

№	N, обор.	t, с
1	7	508,1
2	7	506,3

Таблица 5: Масса: $m = 141{,}0$ г.

№	N, обор.	t, с
1	5	444,3
2	5	443,3

Таблица 6: Масса: $m = 115{,}8$ г.

№	N, обор.	t, с
1	4	444,6
2	4	444,8

Таблица 7: Масса: $m = 92{,}7$ г.

2. Посчитаем значения момента силы по следующей формуле: $M = mgl$.
   Тогда: $\sigma_M = M\frac{\sigma_m}{m}$, так как l известно и имеет значение l=122мм.

3. Скорость прецессии гироскопа найдем по формуле: $\Omega = \frac{2\pi}{T}$.
   Тогда: $\sigma_\Omega = \Omega\frac{\sigma_T}{T}$

   Полученные результаты записываем в таблицу 8.

m,г	M, мН м	$\overline{T}$, с	Ω, рад $с^{-1} \cdot 10^{-3}$	σ_{T},с	σ_{M}, мН м	σ_{Ω}, рад $с^{-1} \cdot 10^{-3}$
92,7	113,1	110,50	56,88	0,02	0,1	0,01
115,8	141,2	88,40	71,01	0,02	0,1	0,01
141,0	172,0	72,57	86,57	0,03	0,1	0,03
175,7	214,3	58,11	108,14	0,03	0,1	0,05
219,5	267,8	46,45	135,2	0,04	0,1	0,1
272,0	331,8	37,53	167,4	0,06	0,1	0,1
341,8	416,9	29,28	209,4	0,07	0,1	0,2

Таблица 8: Полученные данные

4. По полученным данным построим график зависимости Ω от M по МНК.(Рис.2)

5. Коэффициент k наклона прямой и его погрешность вычислим по МНК. Таким образом, получаем:

   $k = (0,505 \pm 0,004)\,\frac{\text{рад}}{\text{Дж}\cdot\text{с}}$

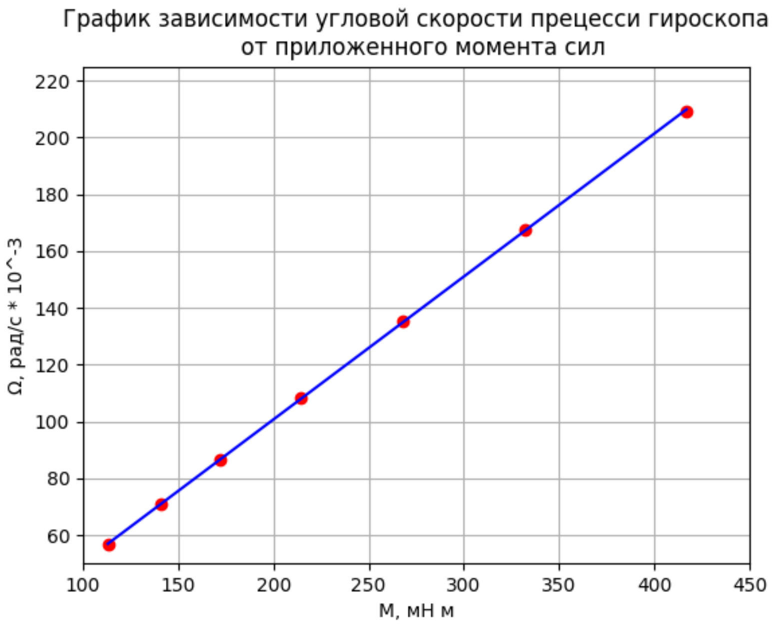

Рис. 2:

6. Вычислим момент инерции цилиндра по формуле:

   $I_{\text{ц}} = \frac{1}{2} m_{\text{ц}} \left(\frac{d}{2}\right)^2,$

   $\sigma_{I_{\text{ц}}} = I_{\text{ц}} \sqrt{\left(\frac{\sigma_{m_{\text{ц}}}}{m_{\text{ц}}}\right)^2 + \left(2\frac{\sigma_d}{d}\right)^2}$

   где $m_{\text{ц}}$ – масса цилиндра, d – его диаметр.

7. Измерим массу и диаметр цилиндра. $m_{\text{ц}} = (1617,8 \pm 0,1)$ г, $d = (78,4 \pm 0,1)$ мм

   В итоге получаем: $I_{\text{ц}} = (1230 \pm 3) \cdot 10^{-6}$ кг $\cdot$ м^2

8. Измерим период крутильных колебаний цилиндра и ротора гироскопа, чтобы вычислить момент инерции ротора гироскопа по формуле $I_0 = I_ц \frac{T_0^2}{T_ц^2}$

$$\sigma_{I_0} = I_0\sqrt{\left(\frac{\sigma_{I_ц}}{I_ц}\right)^2 + \left(2\frac{\sigma_{T_0}}{T_0}\right)^2 + \left(2\frac{\sigma_{T_ц}}{T_ц}\right)^2}$$

№	N, колебаний	t, с	T, с
1	10	40,4	4,04
2	10	40,2	4,02
3	10	40,2	4,02

Таблица 9: Данные цилиндра

№	N, колебаний	t, с	T, с
1	10	31,7	3,17
2	10	31,7	3,17
3	10	31,8	3,18

Таблица 10: Данные ротора

где: $\sigma_t = 0,4$с, $\sigma_T = 0,04$с
В итоге получаем:

$I_0 = (78 \pm 2) \cdot 10^{-5}$ кг $\cdot$ м^2.

9. Рассчитаем частоту вращения ротора гироскопа по формуле: $\nu = \frac{\omega_0}{2\pi}$, где

$\omega_0 = \frac{mgl}{I_0\Omega} = \frac{1}{I_0 k}$,

$$\sigma_{\omega_0} = \omega_0\sqrt{\left(\frac{\sigma_{I_0}}{I_0}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_\Omega}{\Omega}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_m}{m}\right)^2}$$

$\sigma_\nu = \nu\frac{\sigma_{\omega_0}}{\omega_0}$

$\omega_0 = (2521 \pm 65)$ рад с$^{-1}$

Получим частоту: $\nu = (399 \pm 10)$ Гц

10. Определим момент силы трения, из-за которого опускается рычаг гироскопа с грузом.

$\Omega_{тр} = 2\alpha/t$ – угловая скорость прецессии гироскопа под действием момента силы трения, где α – начальный угол отклонения оси гироскопа (равен конечному), t – время, за которое рычаг гироскопа опустился на угол 2α.

$M_{F_{тр}} = \Omega_{тр} I_0 \omega_0$

$M_{F_{тр}} = \frac{I_0\omega_0\pi \arcsin\left(\frac{\Delta h}{l}\right)}{90^\circ t}$, где Δh=12,8 мм – расстояние, на которое поднят рычаг гироскопа относительно горизонтального положения.

$$\sigma_{M_{F_{тр}}} = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial I_0}\sigma_{I_0}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial \omega_0}\sigma_{\omega_0}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial \Delta h}\sigma_{\Delta h}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial t}\sigma_t\right)^2}$$

Получим $M_{F_{тр}} = (8,8 \pm 0,2) \cdot 10^{-4}$ Н м

11. Определим частоту вращения ротора гироскопа по фигурам Лиссажу с помощью осциллографа. Изменяя частоту генератора и отключая питание от гироскопа, на экране осциллографа получим неподвижный эллипс, так же посчитаем время за которое эллипс стал устойчивым. Данные занесем в таблицу 11, построим график по полученным значениям (Рис3.). По МНК получим коэффициент b и эго погрешность, так мы определим значение ν при t=0.

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9
ν, Гц	390	380	370	360	350	340	330	320	310
t, с	9,5	43,7	83,0	107,3	150,3	181,5	210,7	251,7	293,4

Таблица 11: Значения ν и t $\sigma_t = 0,4$с

Получаем: $\nu = 392 \pm 2$ Гц

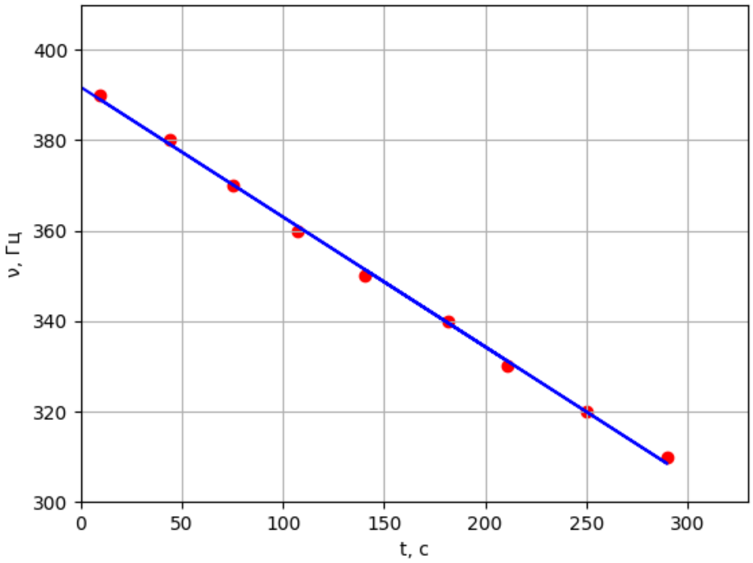

Рис. 3: График частоты от времени

Вывод: В данной работе мы исследовали вынужденную прецессию гироскопа, установили зависимость скорости вынужденной прецессии от величины момента сил, действующих на ось гироскопа, определили частоту вращения ротора гироскопа 2 способами и получили одинаковые значения в пределах погрешности.