

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

Решение задачи минимизация функционала.

Выполнили студенты:

Сериков Василий Романович

Сериков Алексей Романович

Данилов Иван Владимирович

группа: Б03-102

Москва, 2023 г.

Цель работы:

Решить краевую задачу, описывающую стационарный процесс.

Теория:

Имеем краевую задачу:

$$Lu = -\operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) + qu = \nabla \kappa \nabla u + qu = f$$

С граничными условиями Неймана и Дирихле:

$$\begin{aligned} u|_{\Gamma_D} &= \Phi \\ -\vec{n} \cdot \kappa \nabla u + \alpha u|_{\Gamma_\kappa} &= \Psi \end{aligned}$$

Где, заданная область $\Omega = (0; 1) \times (0; 1)$, f — непрерывна в Ω , $\kappa = \kappa^T > 0$, решение ищем, как непрерывную функцию в $C^2(\Omega)$.

А для граничных условий выполняется следующие:

$$\begin{aligned} \Gamma_D &= \overline{\Gamma_D} \subset \partial\Omega, \\ \Gamma_N &= \partial\Omega - \Gamma_D; \end{aligned}$$

L — положительно определенный оператор, $L = L^* > 0$, $(Lu, v) = (u, Lv)$, тогда определено скалярное произведение:

$$[u, v] = (Lu, v) = (u, Lv),$$

тогда для задачи (1) в области Ω верно следующие:

$$(Lu, v) = (f, v)$$

Определим функционал $J(u)$, как:

$$J(u) = \frac{1}{2}(Lu, u) - (f, u)$$

Тогда верно следующие:

$$\nabla J(u) = Lu - f = 0$$

Таким образом, задача свелась к минимизации функционала $J(u)$

Домножаем обе части на u и переходим к интегрированию по заданной области:

$$-\int_{\Omega} u \nabla \cdot \kappa \nabla u dx + \int_{\Omega} qu^2 dx$$

При этом делаем следующую нормировку:

$$|u| = \sqrt{(Lu, u)} = [u, u]^{1/2}$$

Тогда выполняется следующие:

$$-\int_{\Omega} u \nabla \cdot \kappa \nabla u dx + \int_{\Omega} qu^2 dx = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx$$

После упрощения получим:

$$\int_{\Omega} \left(|\kappa^{1/2} \nabla u|^2 + qu^2 \right) dx = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx$$

Если есть ограниченная область Ω с липшицевой границей и коэффициентом a_{α} в дифференциальном операторе второго порядка A из класса $C^{|\alpha|}(\bar{\Omega})$, то для произвольных функций u, v из $C_2^1(\Omega)$ справедлива формула Грина:

$$\int_{\Omega} (vAu - uA^T v) dx = \int_{\partial\Omega} \left(a_0 \left(v \frac{\partial u}{\partial N} - u \frac{\partial v}{\partial N} \right) + a_* uv \right) d\Gamma,$$

$$a_0 = \left(\sum \left(\sum a^{ij} n_j \right)^2 \right)^{1/2},$$

$$a_* = - \sum a^{ij} n_j,$$

Тогда, переходя к границе Неймана $\partial\Omega \rightarrow \Gamma_N$:

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx = \int_{\Omega} \left(|\kappa^{1/2} \nabla u|^2 + qu^2 \right) dx + \int_{\Gamma_s} \alpha u^2 ds - \int_{\Gamma_{\kappa}} \Psi u ds$$

1) Область $\bar{\Omega} = \Omega + \Gamma$ разбивают на N подобластей, называемых конечными элементами, так, что: $\Omega = \cup \Omega_k, \Gamma = \cup \Gamma_k, k \in [1, N]$.

2) В каждом конечном элементе $\bar{\Omega}_k$, выбирается система узлов с нумерацией, в которых значения искомой функции ищутся.

3) Каждому узлу приписывается базисная функция, такая что в этом узле она равна единице, а в остальных нумерованных узлах - нулю : $\phi_k(x_m) = \delta_{km}$. Число базисных функций равно числу узлов.

4) Решение задачи строится в виде линейных комбинаций базисных функций:

$$u = \sum \alpha_k \phi_k.$$

5) Это решение подставляется в задачу, решением задачи является некоторая функциональная невязка.

6) Функциональная невязка минимизируется