Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»

Отчёт по лабораторной работы 3.6.1

Спектральный анализ электрических сигналов

Выполнил студент:
Сериков Василий Романович
группа: Б03-102

Москва, 2022 г.

Аннотация

Цель работы:
Изучить спектральный состав периодических электрических сигналов.

В работе используются:
Генератор сигналов произвольной формы, цифровой осциллограф с функцией быстрого преобразования Фурье.

Теоретические сведения:

Разложение сложных сигналов на периодические колебания

Используется разложение в сумму синусов и косинусов с различными аргументами или, как чаще его называют, *разложение в ряд Фурье.*

Пусть задана функция $f(t)$, которая периодически повторяется с частотой $\Omega_1 = \dfrac{2\pi}{T}$, где T — период повторения импульсов. Её разложение в ряд Фурье имеет вид

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(n\Omega_1 t\right) + b_n \sin\left(n\Omega_1 t\right)\right] \tag{1}$$

или

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(n\Omega_1 t - \psi_n\right). \tag{2}$$

Если сигнал чётен относительно $t = 0$, в тригонометрической записи остаются только члены с косинусами. Для нечетной наоборот.

Коэффициенты определяются по формуле

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \int\limits_{t_1}^{t_1+T} f(t) \cos\left(n\Omega_1 t\right) dt, \\ b_n &= \frac{2}{T} \int\limits_{t_1}^{t_1+T} f(t) \sin\left(n\Omega_1 t\right) dt. \end{aligned} \tag{3}$$

Здесь t_1 — время, с которого мы начинаем отсчет.

Сравнив формулы (1) и (2) можно получить выражения для A_n и ψ_n:

$$\begin{aligned} &A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \\ &\psi_n = \arctan\frac{b_n}{a_n}. \end{aligned} \tag{4}$$

Периодическая последовательность прямоугольных импульсов

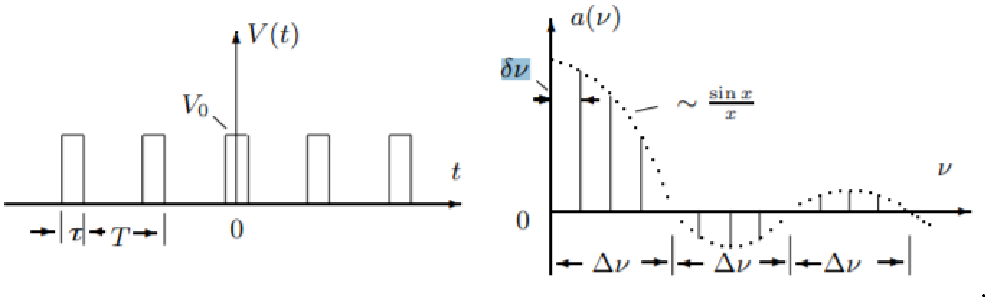

Рис. 1: Изображение прямоугольных импульсов и их спектров.

Введем величину: $\Omega_1 = \dfrac{2\pi}{T}$, где T — период повторения импульсов.
Коэффициенты при косинусных составляющих будут равны

$$a_n = \frac{2}{T}\int\limits_{-\tau/2}^{\tau/2} V_0 \cos\left(n\Omega_1 t\right) dt = 2V_0\frac{\tau}{T}\frac{\sin\left(n\Omega_1\tau/2\right)}{n\Omega_1\tau/2} \sim \frac{\sin x}{x}. \tag{5}$$

Здесь V_0 - амплитуда сигнала.
Поскольку наша функция четная, то $b_n = 0$.

Пусть T кратно τ. Тогда введем ширину спектра, равную $\Delta\omega$ — расстояние от главного максимума до первого нуля огибающей, возникающего, как нетрудно убедиться при $n = \dfrac{2\pi}{\tau\Omega_1}$. При этом

$$\Delta\omega\tau \simeq 2\pi \Rightarrow \Delta\nu\Delta t \simeq 1. \tag{6}$$

Периодическая последовательность цугов

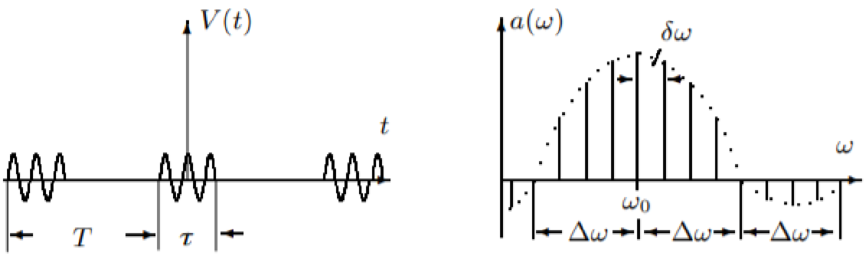

Рис. 2: Изображение цугов и их спектра

Возьмём цуги колебания $V_0\cos(\omega_0 t)$ с длительностью цуга τ и периодом повторений T.
Функция $f(t)$ снова является четной относительно $t = 0$. Коэффициент при n-ой гармонике

согласно формуле (3) равен

$$a_n = \frac{2}{T}\int\limits_{-\tau/2}^{\tau/2} V_0 \cos(\omega_0 t)\cdot\cos(n\Omega_1 t)\,dt = V_0\frac{\tau}{T}\left(\frac{\sin\left[(\omega_0 - n\Omega_1)\frac{\tau}{2}\right]}{(\omega_0 - n\Omega_1)\frac{\tau}{2}} + \frac{\sin\left[(\omega_0 + n\Omega_1)\frac{\tau}{2}\right]}{(\omega_0 + n\Omega_1)\frac{\tau}{2}}\right). \tag{7}$$

Пусть T кратно τ. Тогда спектры последовательности прямоугильных сигналов и цугов аналогичны, но максимумы сдвинуты на ω_0.

Амплитудно-модулированные колебания

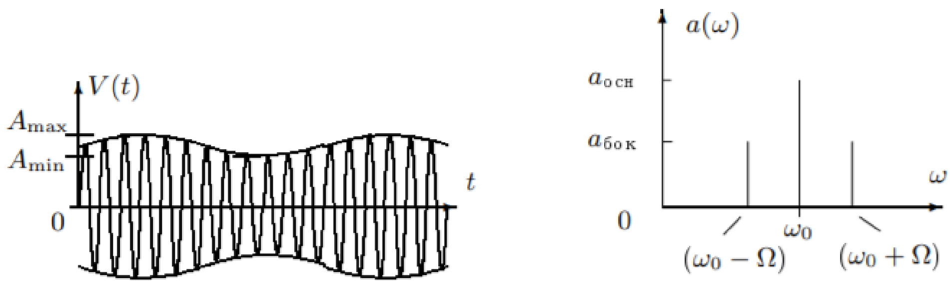

Рис. 3: Изображение АМ колебаний и их спектра.

Рассмотрим гармонические колебания высокой частоты ω_0, амплитуда которых медленно меняется по гармоническому закону с частотой $\Omega \ll \omega_0$.

$$f(t) = A_0\left[1 + m\cos\Omega t\right]\cos\omega_0 t. \tag{8}$$

Коэффициент m называется *глубиной модуляции*. При $m < 1$ амплитуда меняется от минимальной $A_{min} = A_0(1-m)$ до максимальной $A_{max} = A_0(1+m)$. Глубина модуляции может быть представлена в виде

$$m = \frac{A_{max} - A_{min}}{A_{max} + A_{min}}. \tag{9}$$

Простым тригонометрическим преобразованием уравнения (8) можно найти спектр колебаний

$$f(t) = A_0\cos\omega_0 t + \frac{A_0 m}{2}\cos(\omega_0+\Omega)\,t + \frac{A_0 m}{2}\cos(\omega_0-\Omega)\,t. \tag{10}$$

Ход работы и обработка результатов.

Исследование спектра периодической последовательности прямоугольных импульсов

1. Проведем серию измерений ширины спектра $\Delta\nu$ от времени импульса τ при фиксированной частоте $\nu_{\text{повт}} = 1$ кГц. Полученные данные занесем в таблицу и построим график зависимости $\Delta\nu(1/\tau)$

$\Delta\nu$, кГц	49,9	25,0	16,6	12,5	9,9	8,5	7
τ, мкс	20	40	60	80	100	120	140

Таблица 1: Зависимость ширины спектра от времени импульса.

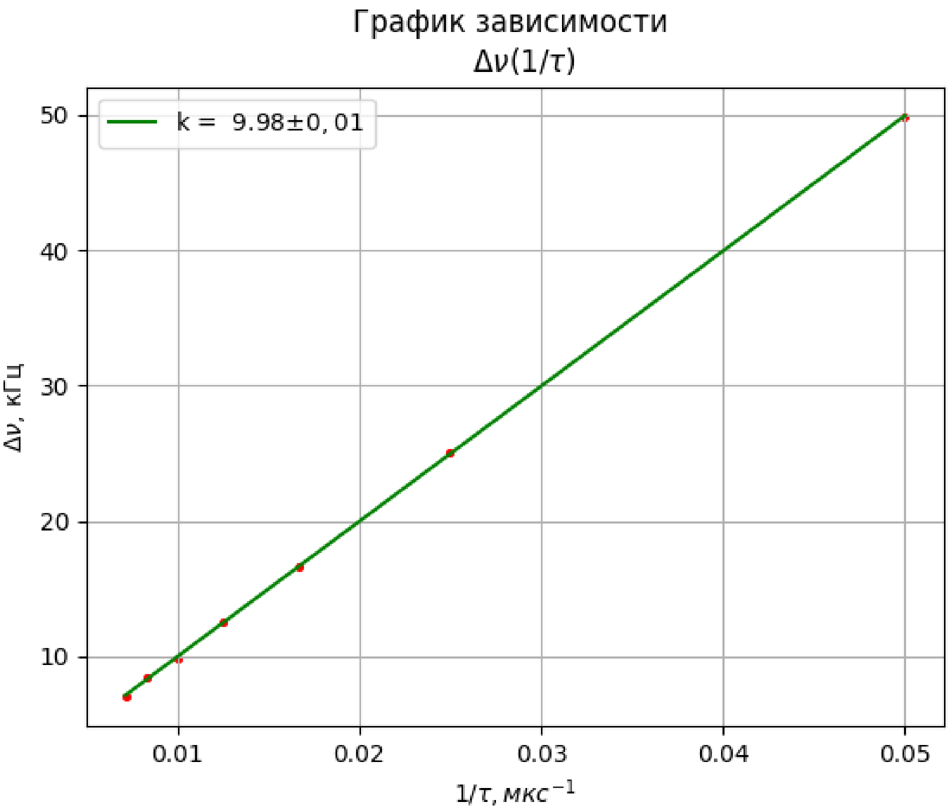

Рис. 4: График зависимости $\Delta\nu(1/\tau)$.

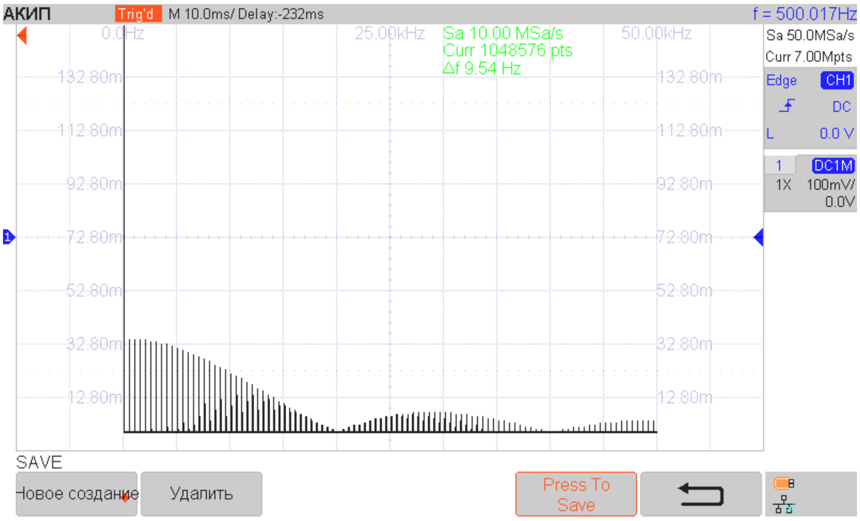

Рис. 5: $\nu_{\text{повт}} = 0,5$ кГц, $\tau = 50$с

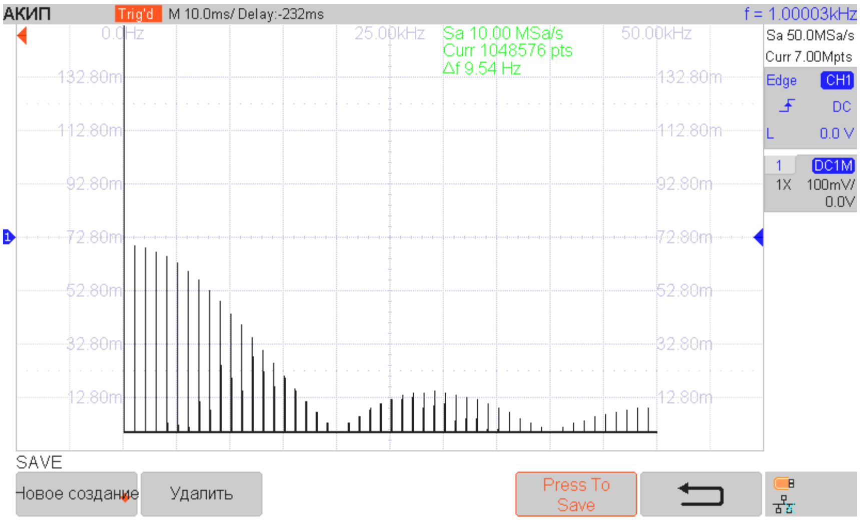

Рис. 6: $\nu_{\text{повт}} = 1$ кГц, $\tau = 50$с

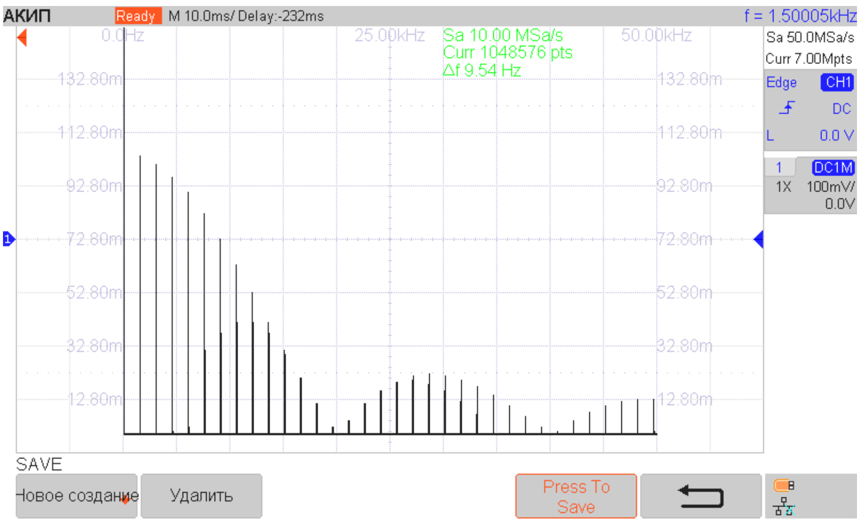

Рис. 7: $\nu_{\text{повт}} = 1,5$ кГц, $\tau = 50$с

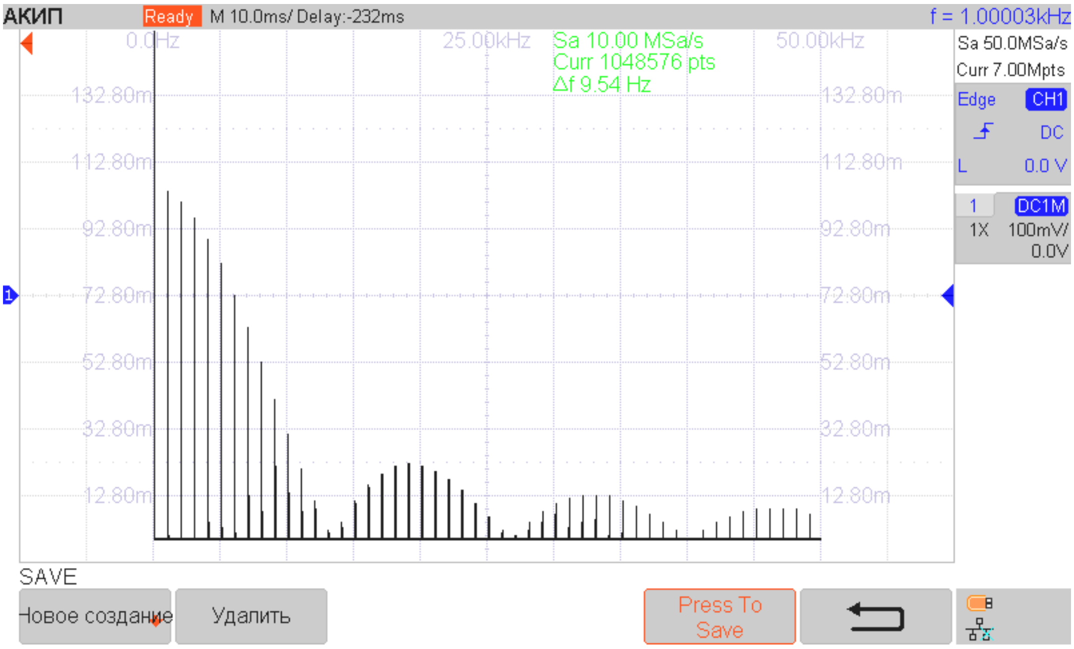

Рис. 8: $\nu_{\text{повт}} = 1$ кГц, $\tau = 75$с

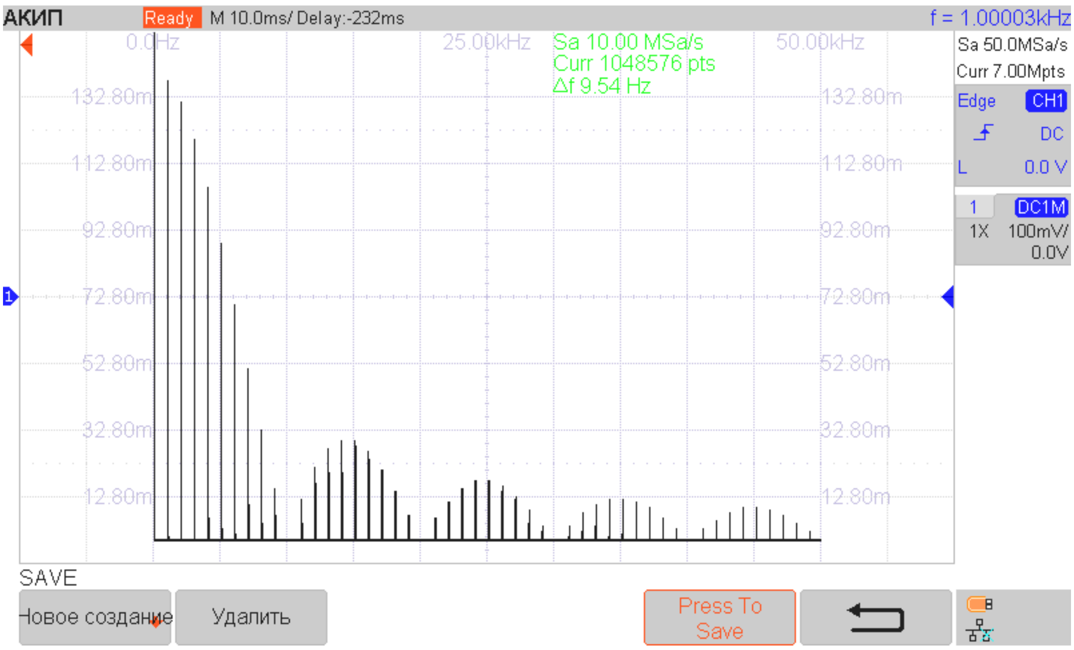

Рис. 9: $\nu_{\text{повт}} = 1$ кГц, $\tau = 100$с

Исследование спектра периодической последовательности цугов

2. При фиксированных параметрах $\nu = 50$ кГц и N = 5 измерим зависимость расстояния $\delta\nu$ между соседними спектральными компонентами сигнала от периода T повторения импульсов. Полученные данные занесем в таблицу и построим график зависимости $\delta\nu(1/T)$

$\delta\nu$, кГц	1,20	0,90	0,76	0,60	0,56	0,52	0,40	0,32	0,30	0,24	0,22	0,2
T, мс	1	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0

Таблица 2: Зависимость расстояния между соседними спектральными компонентами сигнала от периода повторения импульсов.

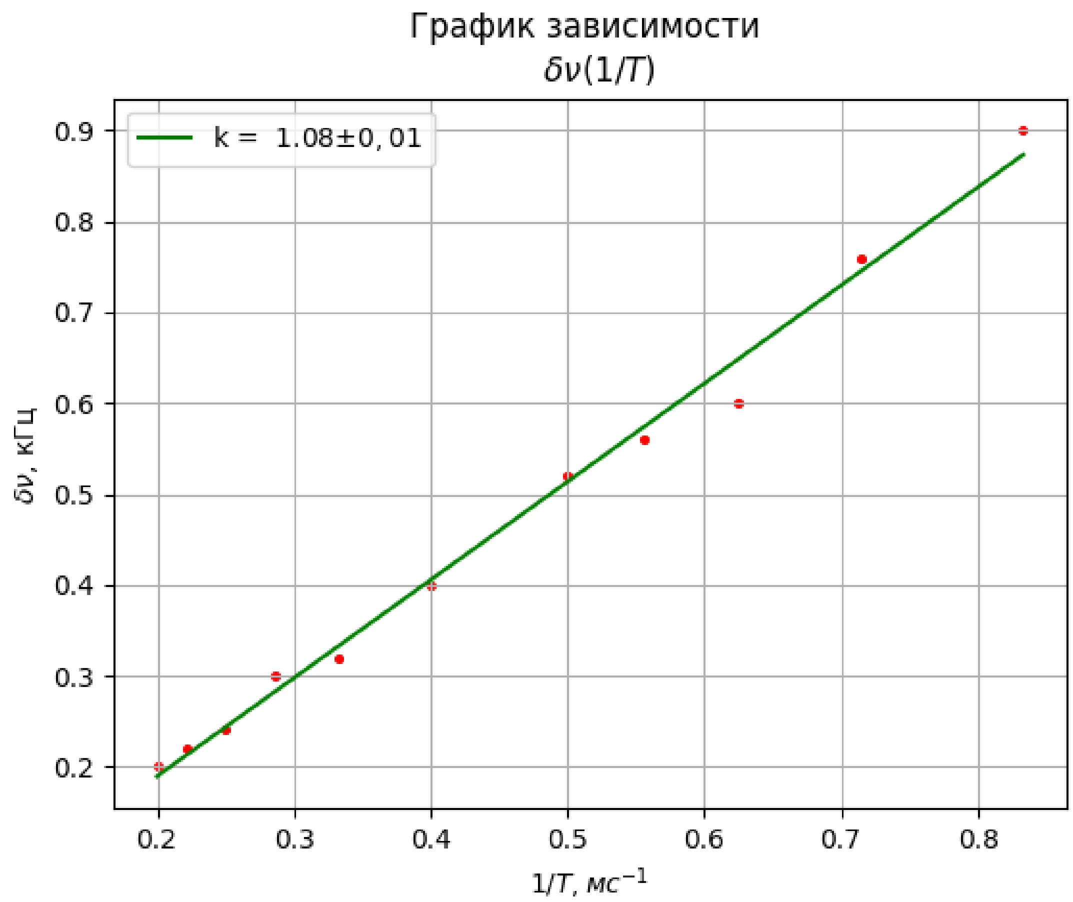

Рис. 10: График зависимости $\delta\nu(1/T)$

Обсуждение результатов и выводы:

В данной работе мы изучили спектры периодической последовательности прямоугольных импульсов и периодической последовательности цугов. Для каждого спектра определили зависимость ширины $\delta\nu$ спектра от времени τ, построили графики зависимость $\delta\nu(1/\tau)$ и подтвердили таким образом соотношение неопределенности $\delta\nu \cdot \tau = 1$