Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования«Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)»

Решение задачи минимизация функционала.

Выполнили студенты:
Сериков Василий Романович
Сериков Алексей Романович
Данилов Иван Владимирович
группа: Б03-102

Москва, 2023 г.

Цель работы:

Решить краевую задачу, описывающую стационарный процесс.

Теория:

Имеем краевую задачу:

$$Lu = -\operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) + qu = \nabla\kappa\nabla u + qu = f$$

С граничными условиями Неймана и Дирихле:

$$u|_{\Gamma_D} = \Phi$$
$$-\vec{n} \cdot \kappa\nabla u + \alpha u|_{\Gamma_\kappa} = \Psi$$

Где, заданная область $\Omega = (0;1)$ x $(0;1)$, f− непрерывна в Ω, $\kappa = \kappa^T > 0$, решение ищем, как непрерывную функцию в $C^2(\Omega)$.

А для граничных условий выполняется следующие:

$$\Gamma_D = \overline{\Gamma_D} \subset \partial\Omega,$$
$$\Gamma_N = \partial\Omega - \Gamma_D;$$

L - положительно определенный оператор, $L = L^* > 0, (Lu, v) = (u, Lv)$, тогда определено скалярное произведение:

$$[u, v] = (Lu, v) = (u, Lv),$$

тогда для задачи (1) в области Ω верно следующие:

$$(Lu, v) = (f, v)$$

Определим функционал J(u), как:

$$J(u) = \frac{1}{2}(Lu, u) - (f, u)$$

Тогда верно следующие:

$$\nabla J(u) = Lu - f = 0$$

Таким образом, задача свелась к минимизации функционала J(u)

Домножаем обе части на u и переходим к интегрированию по заданной области:

$$-\int_\Omega u\nabla \cdot \kappa\nabla u dx + \int_\Omega qu^2 dx$$

При этом делаем следующую нормировку:

$$|u| = \sqrt{(Lu, u)} = [u, u]^{1/2}$$

Тогда выполняется следующие:

$$-\int_\Omega u\nabla \cdot \kappa\nabla u dx + \int_\Omega qu^2 dx = \int_\Omega |\nabla u|^2 dx$$

После упрощения получим:

$$\int_{\Omega}\left(\left|\kappa^{1/2}\nabla u\right|^{2}+qu^{2}\right)dx=\int_{\Omega}|\nabla u|^{2}dx$$

Если есть ограниченная область Ω с липшицевой границей и коэффициентом a_α в дифференциальном операторе второго порядка А из класса $C^{|\alpha|}(\bar{\Omega})$, то для произвольных функций u, v из $C_2^1(\Omega)$ справедлива формула Грина:

$$\int_{\Omega}\left(vAu-uA^{T}v\right)dx=\int_{\partial\Omega}\left(a_{0}\left(v\frac{\partial u}{\partial N}-u\frac{\partial v}{\partial N}\right)+a_{*}uv\right)d\Gamma,$$

$$a_{0}=\left(\sum\left(\sum a^{ij}n_{j}\right)^{2}\right)^{1/2},$$

$$a_{*}=-\sum a^{ij}n_{j},$$

Тогда, переходя к границе Неймана $\partial\Omega\to\Gamma_N$:

$$\int_{\Omega}|\nabla u|^{2}dx=\int_{\Omega}\left(\left|\kappa^{1/2}\nabla u\right|^{2}+qu^{2}\right)dx+\int_{\Gamma_s}\alpha u^{2}ds-\int_{\Gamma_\kappa}\Psi u ds$$

1)Область $\bar{\Omega}=\Omega+\Gamma$ разбивают на N подобластей, называемых конечными элементами, так, что: $\Omega=\cup\Omega_k, \Gamma=\cup\Gamma_k, k\in[1,N]$.
2)В каждом конечном элементе $\overline{\Omega_k}$, выбирается система узлов с нумерацией, в которых значения искомой функции ищутся.
3)Каждому узлу приписывается базисная функция, такая что в этом узле она равна единице, а в остальных нумерованных узлах - нулю : $\varphi_k\left(x_{\mathrm{m}}\right)=\delta_{\mathrm{km}}$. Число базисных функций равно числу узлов.
4)Решение задачи строится в виде линейных комбинаций базисных функций:

$$u=\sum\alpha_k\varphi_k.$$

5)Это решение подставляется в задачу, решением задачи является некоторая функциональная невязка.
6)Функциональная невязка минимизируется

Решение:
Имеем краевую задачу:

$$Lu=-\Delta u+qu,\quad q(x,y)>0$$

И краевые условия:

$$u(0,0)=\phi_0$$

$$\frac{\partial u(1,1)}{\partial n}+\alpha u=\phi_1$$

Тогда функционал $J(u)$:

$$J(u) = \int_\Omega (-\Delta u \cdot u + qu^2) dxdy = \int_\Omega ((\nabla u)^2 + qu^2) dxdy - \nabla u \cdot u \Big|_{(0,0)}^{(1,1)}$$

Введем дискретизацию:

$$u^h = \Sigma_{i=1}^n \Sigma_{j=1}^n u_{ij}^h \varphi_{ij}(x,y)$$

Тогда:

$$\nabla J(u^h) = \Sigma_{i=1}^n \Sigma_{i=1}^n u_{ij}^h \Delta\varphi_{ij} + q\Sigma_{i=1}^n \varphi_{ij}^2 u_{ij}^{h2} - \int_\Omega \Sigma_{i=1}^n f(x,y)\varphi_{ij}$$

Вывод:

В ходе работы мы познакомились с методом конечных элементов для решения краевой задачи и попробовали решить двумерную задачу.