**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ**

**Санкт-Петербургский государственный**

**электротехнический университет**

**«ЛЭТИ» им. В.И. Ульянова (Ленина)**

**Кафедра Информационных систем**

отчет

**по лабораторной работе №4**

**по дисциплине «Конструирование программ»**

Тема: Аппроксимация функции по методу наименьших квадратов

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Студент гр. 1376 |  | Серикова В.С. |
| Преподаватель |  | Копыльцов А.В. |

Санкт-Петербург

2023

**Цель работы.**

Научиться аппроксимировать таблично заданную функцию многочленом наилучшего среднеквадратичного приближения по методу наименьших квадратов.

**Основные теоретические положения.**

**Постановка задачи**

Задача наименьших квадратов возникает в самых различных областях науки и техники, например, к ней приходят при статистической обработке экспериментальных данных. Пусть функция  задана таблицей приближенных значений , полученных с ошибками  Предположим, что для аппроксимации функции  используется линейная модель:   где  - заданные базисные функции,  - параметры модели, являющиеся одновременно коэффициентами обобщенного многочлена. Часто используется одна из наиболее простых моделей  - полиномиальная модель.

В случае, когда уровень неопределенности исходных данных высок, нет смысла требовать точного совпадения значений обобщенного многочлена  в точках  с заданными значениями , то есть использовать интерполяцию. Кроме того, при интерполяции происходит повторение ошибок наблюдений, в то время как при обработке экспериментальных данных желательно сглаживание ошибок. Тем не менее нужно потребовать, чтобы

 (3.1.1)

Эта же система в матричной форме имеет вид  (3.1.2)

Существуют разные дополнительные критерии, позволяющие решить эту систему, так как в общем случае при  она, вообще говоря, несовместна. Выбор , позволяющий наилучшим образом удовлетворить (3.1.2) в методе наименьших квадратов, состоит в том минимизируется среднее квадратическое уклонение

 (3.1.3)

Итак, линейная задача метода наименьших квадратов состоит в следующем. Надо найти обобщенный многочлен , для которого среднеквадратическое уклонение  Этот многочлен называется *многочленом наилучшего среднего квадратического приближения.* Так как набор функций  всегда заранее определен, задача заключается в нахождении вектора  при условии  Для решения нашей задачи воспользуемся общим приемом дифференциального исчисления, а именно выпишем необходимые условия экстремума функции нескольких переменных (приравняем частные производные нулю):

 (3.1.4)

Тогда получим  Изменим в первом слагаемом порядок суммирования:

 (3.1.5)

Уравнение (3.1.5) называется нормальной системой метода наименьших квадратов.

Если вернуться к обозначениям формулы (3.1.2), то, как нетрудно видеть, систему (3.1.5) можно записать в виде

 (3.1.6)

Матрица  называется матрицей Грама. Если еще ввести вектор , то система (3.1.6) перепишется в виде  - система линейных уравнений относительно вектора . Можно показать, что если среди точек  нет совпадающих и , то определитель системы (3.1.6) отличен от нуля, и, следовательно, эта система имеет единственное решение:  Обобщенный полином с такими коэффициентами будет обладать минимальным средним квадратическим отклонением .

Если , то обобщенный многочлен, если система функций  степенная, совпадает с полиномом Лагранжа для системы точек , причем  При  построение такого точного интерполяционного многочлена невозможно. Таким образом, аппроксимация функций представляет собой более общий процесс, чем интерполирование.

Если , то нормальная система (3.1.5) принимает следующий вид:

 (3.1.7)

Запишем систему (3.1.7) в развернутом виде в двух наиболее простых случаях при

 и  В случае, когда приближение осуществляется многочленом первой степени , уравнения метода наименьших квадратов имеют следующий вид:







 (3.1.8)

- нормальная система для  в развернутом виде. Пусть теперь  Аналогично получим 





 (3.1.9)

- нормальная система для  в развернутом виде для квадратичного сглаживания.

**Экспериментальные результаты.**

**Задание.** По методу наименьших квадратов аппроксимировать таблично заданную функцию  многочленом наилучшего среднеквадратического приближения .

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
| Номера вариантов |
| 12 |
| 0.1 | -9.0 |
| 0.3 | -7.01 |
| 0.5 | -7.19 |
| 0.7 | -7.11 |
| 0.9 | -7.31 |
| 1.1 | -7.78 |
| 1.3 | -7.64 |
| 1.5 | -7.85 |
| 1.7 | -8.18 |
| 1.9 | -8.39 |
| 2.1 | -8.79 |
| 2.3 | -9.02 |
| 2.5 | -9.48 |
| 2.7 | -9.93 |
| 2.9 | -10.26 |
| 3.1 | -10.91 |
| 3.3 | -11.41 |
| 3.5 | -11.91 |
| 3.7 | -12.30 |
| 3.9 | -13.00 |

Таб. 1. Входные данные варианта задания

Для выполнения задания была написана программа на языке Matlab (см. приложение). Результат выполнения программы:

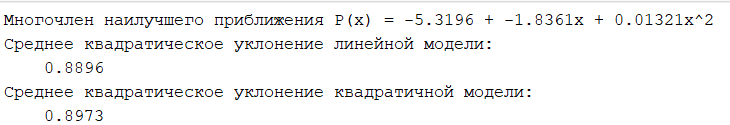


Рис. 1. Результат выполнения программы

**Выводы.**

В ходе выполнения лабораторной работы был приобретен навык аппроксимация таблично заданной функции многочленом наилучшего среднеквадратичного приближения по методу наименьших квадратов.

ПРИЛОЖЕНИЕ  
**листинг програмМы на языке MATLAB**

clear, clc, close;

format short;

matrix\_Xi = 0.1:0.2:3.8;

matrix\_Fx = [

-9.0 -7.01 -7.19 -7.11 -7.31 -7.78 -7.64 ...

-7.85 -8.18 -8.39 -8.79 -9.02 -9.48 -9.93 ...

-10.26 -10.91 -11.41 -11.91 -12.30

];

Sum\_Y = sum(matrix\_Fx);

Sum\_X = sum(matrix\_Xi);

Sum\_x2 = sum(matrix\_Xi .^ 2);

Sum\_x3 = sum(matrix\_Xi .^ 3);

Sum\_x4 = sum(matrix\_Xi .^ 4);

Sum\_xy = sum(matrix\_Xi .\* matrix\_Fx);

Sum\_x2y = sum((matrix\_Xi.^2) .\* matrix\_Fx);

matrix\_line = [20 Sum\_X; Sum\_X Sum\_x2];

matrix\_line\_rez = [Sum\_Y; Sum\_xy];

matrix\_line\_koeff = (matrix\_line^(-1)) \* matrix\_line\_rez;

matrix\_2 = [20 Sum\_X Sum\_x2; Sum\_X Sum\_x2 Sum\_x3; Sum\_x2 Sum\_x3 Sum\_x4];

matrix\_2\_rez = [Sum\_Y; Sum\_xy; Sum\_x2y];

matrix\_2\_koeff = matrix\_2^(-1) \* matrix\_2\_rez;

sum\_line = 0;

sum2 = 0;

for n = 1:19

sum\_line = sum\_line + (matrix\_line\_koeff(1,1) + matrix\_line\_koeff(end,1) \* matrix\_Xi(1,n) - matrix\_Fx(1,n)) .^ 2;

sum2 = sum2 + (matrix\_2\_koeff(1,1) + matrix\_2\_koeff(2,1) \* matrix\_Xi(1,n) + matrix\_2\_koeff(3,1) \* (matrix\_Xi(1,n)^2) - matrix\_Fx(1,n)) .^ 2;

end

delta1 = (sum\_line / 20) ^ (1 / 2);

delta2 = (sum2 / 20) ^ (1 / 2);

disp(['Многочлен наилучшего приближения Р(х) = ', num2str(matrix\_2\_koeff(1,1)), ' + ',num2str(matrix\_2\_koeff(2,1)), 'x + ', num2str(matrix\_2\_koeff(3,1)), 'x^2']);

disp('Среднее квадратическое уклонение линейной модели:');

disp(delta1);

disp('Среднее квадратическое уклонение квадратичной модели:');

disp(delta2);