

Suivi de la trajectoire d'un astéroïde

Serine Remita¹ et Nicolò Gobron²

¹ e-mail: serine.remita@etu.u-paris.fr

² e-mail: nicolo.gobron@etu.u-paris.fr

18/12/2024

RÉSUMÉ

La trajectoire des corps célestes est un élément précieux dans la compréhension des forces de gravitation qui régissent notre univers. Non seulement elle peut permettre de détecter d'autres corps, comme pour la découverte de Neptune mais aussi de mieux comprendre comment est répartie la distribution des corps célestes dans l'univers. Nous étudierons dans ce document la trajectoire de l'astéroïde (7) Iris, qui de par sa magnitude absolue de 5,51 et sa taille de 200 km de diamètre est observable avec le télescope de l'Université. Nous utiliserons une approche statistique consistant en des mesures répétées et rapprochées pour estimer au mieux le parcours de l'astéroïde dans le système solaire. Une fois ces mesures effectuées, il sera alors possible d'estimer localement la distance de (7) Iris pour enfin reconstruire une trajectoire théorique de l'astéroïde grâce à des lois physiques et des outils mathématiques.

Mots clés. Géométrie, Astronomie, Astéroïde, Mécanique céleste.

1. Introduction

L'étude des trajectoires des corps célestes nous aide à mieux comprendre notre Univers : elle nous informe sur la distribution des masses dans l'univers. Elle représente une méthode fiable pour détecter des corps célestes imposants comme des gros astéroïdes ou des planètes ou encore la compréhension de phénomènes plus complexes comme la trajectoires des astéroïdes troyens (Seth B Nicholson et al. 1961).

Dans ce document, nous nous focaliserons sur l'étude de l'astéroïde (7) Iris. Pour reconstruire sa trajectoire, nous procéderons en deux temps : grâce à des observations locales nous estimerons la distance à un instant donné puis en superposant ces différentes informations avec l'aide des lois de Kepler et d'un outil de régression nous reconstruirons une trajectoire complète possible de l'astéroïde.

2. Astéroïde et télescope

Le télescope utilisé pour les observations est un Schmidt-Cassegrain Celestron C14 et l'acquisition d'image quant à elle est effectuée avec une caméra ZWO ASI 1600 MM Mono dont le champ de vision est $0.26 \times 0.2 = 936'' \times 720''$ et la résolution de 4656×3520 .

Dès lors l'angle solide par pixel est : $0.04''^2/px$.

En notant D le diamètre de l'astéroïde et L la distance Terre-Astéroïde, la taille angulaire de l'astéroïde est obtenue par la formule suivante :

$$\alpha = 2 \arctan\left(\frac{D}{2L}\right)$$

Dans le cas de l'astéroïde (7) Iris :

$D \approx 199.8km$,

$L \approx 200 \times 10^6 km$;

D'où $\alpha = 0.21'' = 10^{-6} rad$;

Et l'angle solide est de l'ordre d'un pixel.

3. Modèle Mathématique

3.1. Se repérer sur la sphère céleste

Le système de coordonnées utilisé par l'observatoire est le système de coordonnées équatoriales, il utilise deux coordonnées angulaires pour placer des objets sur la sphère céleste (figure 1) :

- L'ascension droite RA (notée α et mesurée en heures : minutes : secondes), cette donnée mesure la position d'un objet céleste le long de l'équateur céleste, en partant du point vernal (le point de la sphère céleste à l'intersection du plan de l'écliptique et du plan équatorial).

- La déclinaison DEC (notée δ et mesurée en degrés : minutes d'arc : secondes d'arc), cette donnée mesure la distance angulaire d'un objet céleste par rapport à l'équateur céleste.

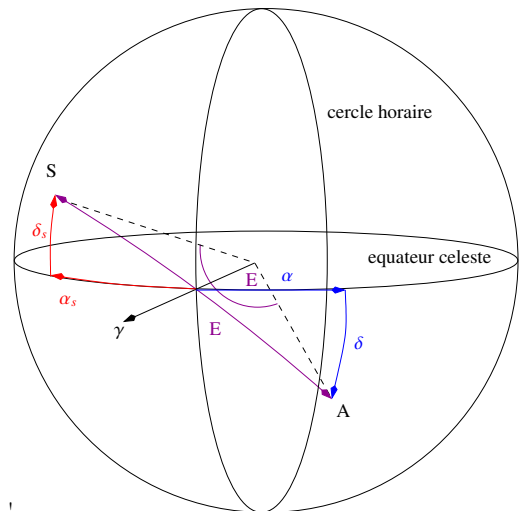


FIGURE 1 – Définition de l'élongation solaire.

3.2. Calcul de l'élongation solaire

L'élongation solaire est l'angle Soleil-Terre-Objet pour tout objet observable.

Pour calculer l'élongation solaire à un instant donné, on considère l'ascension droite et la déclinaison du Soleil α_S et δ_S et celles de l'astéroïde α et δ , représentées sur la figure 1.

Dès lors l'élongation E vérifie :

$$\cos(E) = \cos(\alpha_S - \alpha) \times \cos(\delta) \times \cos(\delta_S) + \sin(\delta_S) \times \sin(\delta)$$

voir annexe (9.1) pour la démonstration.

3.3. Estimation des distances Soleil-Astéroïde et Terre-Astéroïde

Nous présentons trois méthodes qui supposent que la Terre et l'astéroïde ont un mouvement autour du Soleil tel qu'ils vérifient les lois de Kepler.

La première suppose la connaissance de la période de révolution de l'astéroïde et requiert une détermination de l'élongation solaire de l'astéroïde.

La seconde est une approximation qui suppose que la vitesse de rotation de l'astéroïde est négligeable devant celle de la Terre (valable si l'astéroïde est assez loin) et requiert la détermination de l'élongation à deux instants différents.

La troisième utilise la conservation des lois des aires pour déterminer la distance Astéroïde-Soleil

3.3.1. Méthode selon les lois de Kepler

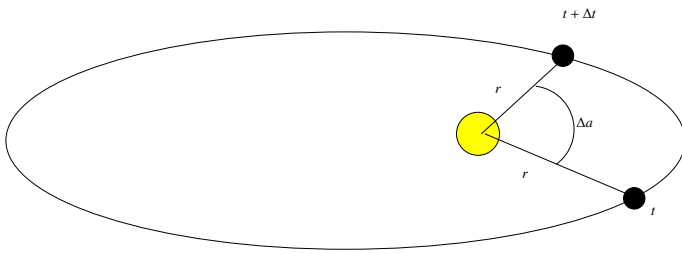


FIGURE 2 – Définition de Δa .

Le but de cette méthode est de déterminer la distance Terre-Astéroïde en supposant connue la période de révolution de l'Astéroïde (figure 2).

En notant G la constante de gravitation, M la masse du Soleil, d la distance Astéroïde-Soleil et ω la vitesse angulaire de l'astéroïde on a d'après la troisième loi de Kepler :

$$\omega = \sqrt{\frac{GM}{d^3}}$$

voir annexe (9.2) pour la démonstration.

On utilise alors $\omega = \frac{2\pi}{T}$ pour déduire la distance d ,

$$d = \sqrt[3]{\frac{GMT^2}{4\pi^2}}$$

Une fois d trouvée on applique le théorème d'Al-Kashi (figure 3) avec l'élongation pour retrouver la distance Terre-Astéroïde d_a :

$$\begin{aligned} d^2 &= d_t^2 + d_a^2 - 2d_a d_t \cos(E) \\ \Rightarrow d_a &= d_t \cos(E) + \sqrt{d^2 - d_t^2 \sin^2(E)} \end{aligned}$$

voir annexe (9.3) pour la démonstration.

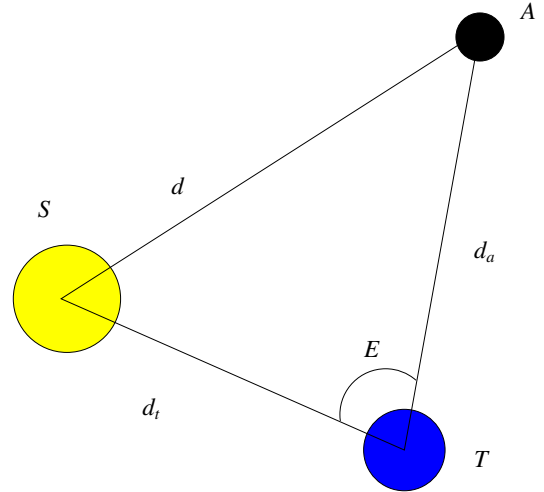


FIGURE 3 – Triangle Soleil-Terre-Astéroïde

3.3.2. Méthode trigonométrique

Cette méthode consiste à considérer l'astéroïde comme fixe par rapport à la Terre et on effectue nos calculs sur les triangles à la figure 4. On note Δt la durée de l'expérience et T_T la période de révolution terrestre.

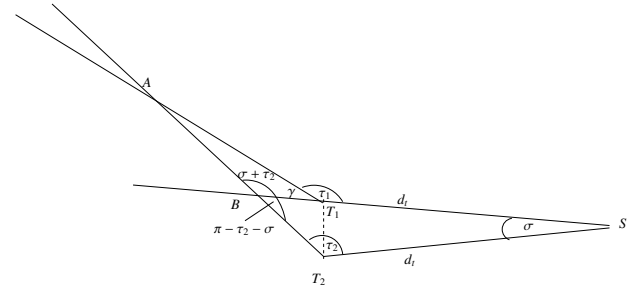


FIGURE 4 – Triangle Soleil-Terre-Astéroïde

D'après la loi des sinus dans le triangle ST_2B :

$$\frac{\sin(\tau_2)}{\gamma + d_t} = \frac{\sin(\pi - \sigma - \tau_2)}{d_t}$$

σ étant l'angle parcouru par la terre pour aller de T_1 à T_2 on a :

$$\sigma = \frac{2\pi}{T_T} \Delta t$$

donc :

$$\gamma = d_t \frac{\sin(\tau_2) - \sin(\sigma + \tau_2)}{\sin(\sigma + \tau_2)}$$

Finalement en réappliquant les relations dans le triangle T_1BA on en déduit que d est reliée à γ par :

$$\frac{\sin(\sigma + \tau_2)}{d} = \frac{\sin(\pi - (\sigma + \tau_2 + \pi - \tau_1))}{\gamma}$$

donc :

$$d = \gamma \frac{\sin(\sigma + \tau_2)}{\sin(\sigma + \tau_2 - \tau_1)}$$

On peut alors donner une approximation de la distance Terre-astéroïde par cette méthode.

3.3.3. Méthode vectorielle

On considère ici que la loi des aires est conservée. Lors d'une observation, on peut relever deux vecteurs : φ qui indique le sens et la direction du vecteur qui va de la Terre à l'astéroïde et le vecteur ST (figure 5).

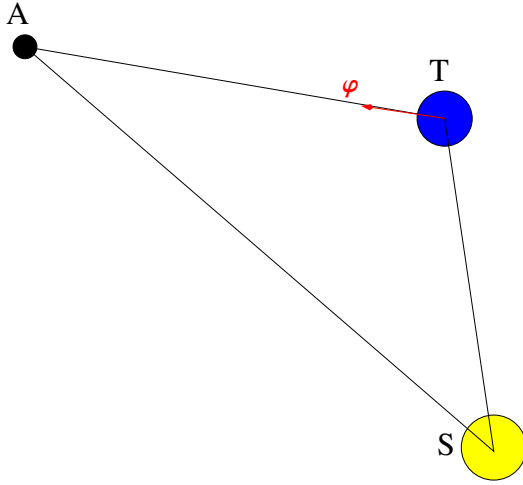


FIGURE 5 – Schéma des éléments relevés lors d'une observation.

On considère trois observations successives rapprochées (par exemple chacune espacée d'un jour) :

$$\begin{cases} SA_1 = ST_1 + \lambda_1 \varphi_1 \\ SA_2 = ST_2 + \lambda_2 \varphi_2 \\ SA_3 = ST_3 + \lambda_3 \varphi_3 \end{cases}$$

On suppose de plus la loi des aires conservée pour la Terre et l'astéroïde, on a donc les relations vectorielles suivantes :

$$\begin{cases} SA_1 \wedge SA_2 = SA_2 \wedge SA_3 \\ ST_1 \wedge ST_2 = ST_2 \wedge ST_3 \end{cases}$$

On utilise la première équation de ce système :

$$SA_1 \wedge SA_2 = ST_1 \wedge ST_2 + \lambda_1 \varphi_1 \wedge ST_2 + \lambda_2 ST_1 \wedge \varphi_2 + \lambda_1 \lambda_2 \varphi_1 \wedge \varphi_2$$

On a la même relation pour le second membre de l'équation, ce qui fait que l'on a après application de la seconde équation :

$$(\lambda_1 \varphi_1 + \lambda_3 \varphi_3) \wedge ST_2 + \lambda_2 (ST_1 + ST_3) \wedge \varphi_2 + \lambda_2 (\lambda_1 \varphi_1 + \lambda_3 \varphi_3) \wedge \varphi_2 = 0$$

On considère la partie non-linéaire comme étant du bruit car les (φ_i) sont quasiment colinéaires. On peut donc la négliger.

$$(\lambda_1 \varphi_1 + \lambda_3 \varphi_3) \wedge ST_2 + \lambda_2 (ST_1 + ST_3) \wedge \varphi_2 = 0$$

Ce système d'équations est alors résoluble numériquement pour obtenir λ_1 et λ_3 en fonction de λ_2 .

Afin de déterminer λ_2 , on suppose ensuite que les variations de la distance Soleil-Astéroïde sont négligeables entre deux observations successives.

On a donc :

$$\begin{cases} \|SA_1\| = \|SA_2\| \\ \|SA_2\| = \|SA_3\| \end{cases}$$

Pour réduire l'erreur commise par l'hypothèse, on approxime λ_2 comme étant la moyenne des deux valeurs positives obtenues par ces équations.

Exemple :

À la date du 2/11/2024 : on obtient $\|SA_2\| = 343.253 Mkm$ alors que la valeur reportée par le site TheSkyLive est 305.27 Mkm.

4. Les éléments orbitaux : définitions

Les éléments orbitaux permettent de décrire l'orbite d'un astre. On considère que les orbites sont elliptiques. On définira les éléments orbitaux suivants (Figure 6) :

- Le demi-grand axe a ,
- L'excentricité e ,
- La longitude du nœud ascendant Ω ,
- L'argument du périhélie ω ,
- L'inclinaison i ,
- Le périhélie,
- L'anomalie vraie v .

On peut retrouver les valeurs des différents éléments orbitaux sur le site Horizons System, NASA.

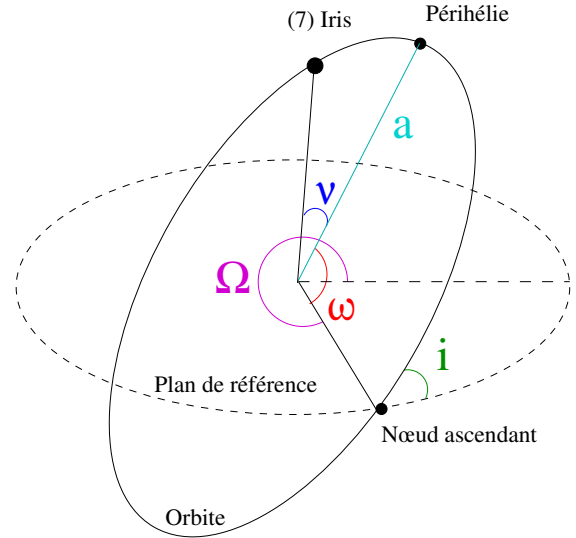


FIGURE 6 – Schéma des éléments orbitaux.

4.1. Le demi-grand axe a

Le grand axe est la ligne droite la plus longue traversant le centre de l'ellipse et reliant ses deux points les plus éloignés. Le demi-grand axe est donc la moitié de la longueur du grand axe. Pour l'astéroïde (7) Iris on a : $a = 2.38 \text{ UA}$.

4.2. L'excentricité e

L'excentricité est un paramètre qui mesure la déviation d'une courbe, comme une ellipse, par rapport à une forme parfaitement circulaire. En termes simples, elle indique à quel point une ellipse est aplatie ou étirée.

Pour une ellipse, on aura $0 < e < 1$, l'orbite étant circulaire pour $e = 0$.

Pour l'astéroïde (7) Iris on a : $e = 0.22986$.

4.3. L'inclinaison i

L'inclinaison est un paramètre utilisé pour décrire l'orientation d'une orbite dans l'espace par rapport à un plan de référence. Elle est mesurée au niveau de la ligne des nœuds, qui est la ligne d'intersection entre le plan orbital et le plan de référence, de sorte que $i \in [0^\circ, 180^\circ]$.

Pour l'astéroïde (7) Iris on a : $i = 5.52^\circ$.

4.4. La longitude du nœud ascendant Ω

Tout d'abord, il faut définir le nœud ascendant, qui est le point où l'objet céleste traverse le plan de référence en se déplaçant de bas vers haut. La longitude du nœud ascendant est l'angle, mesuré dans le plan de référence, entre l'axe des points vernal et la ligne des nœuds (ligne d'intersection entre le plan orbital et le plan de référence).

Pour l'astéroïde (7) Iris on a : $\Omega = 259.49^\circ$.

4.5. Le temps de passage au périhélie t_0

Le temps de passage au périhélie est un paramètre orbital qui désigne le moment exact où un objet céleste passe par le périhélie, c'est-à-dire le point de son orbite le plus proche du Soleil. On le calculera en jours Julien par convention.

Pour l'astéroïde (7) Iris on a : $t_0 = 2460769.69\text{JD}$.

4.6. L'argument du périhélie ω

L'argument du périhélie décrit l'orientation de l'ellipse de l'orbite par rapport à son plan orbital. C'est l'angle minimal entre la ligne des nœuds et le grand axe de l'ellipse.

Pour l'astéroïde (7) Iris on a : $\omega = 145.52^\circ$.

4.7. Les anomalies

Il est aussi nécessaire de déterminer les différentes anomalies, dont les définitions sont données dans le cours de Science et Systèmes Spatiaux (Halloin 2024) :

4.7.1. L'anomalie moyenne M

L'anomalie moyenne M correspond à la position angulaire d'un objet ayant la même période orbitale que l'astéroïde et se déplaçant à vitesse uniforme sur le cercle circonscrit.

$$M = \frac{2\pi}{T}(t - t_0)$$

4.7.2. L'anomalie excentrique E

L'anomalie excentrique E c'est l'angle entre l'axe (centre-périhélie) et l'axe (centre-S') avec S' un point fictif, projection normale du point position sur le cercle circonscrit à l'ellipse. Elle est calculée par itération. L'anomalie excentrique initiale E est égale à l'anomalie moyenne M . Ce choix est fondé sur la première approximation de l'équation de Kepler :

$$E = M + e \sin E$$

4.7.3. L'anomalie vraie v

L'anomalie vraie v c'est l'angle entre l'axe (soleil-périhélie) et l'axe (soleil-astéroïde) et permet le positionnement sur l'orbite.

$$\tan\left(\frac{v}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan\left(\frac{E}{2}\right)$$

NB : Le plan de référence de l'inclinaison i est le plan de l'écliptique. Les autres paramètres sont mesurés depuis le plan équatorial solaire.

5. Détermination des éléments orbitaux au travers d'outils mathématiques et géométriques

5.1. Positionnement des points dans l'espace

On rappelle que la convention suivante dans cette partie : d_t est la distance Terre-Soleil, d_a la distance Terre-Astéroïde associée à une observation donnée. On note $\alpha_S, \delta_S, \alpha, \delta$ les ascensions droites et déclinaisons respectives du Soleil et de l'astéroïde.

On se place dans le système de coordonnées naturel engendré par l'observation : on utilise le trièdre droit engendré par le vecteur normal au plan équatorial céleste pris dans le sens ascendant et le point vernal avec le Soleil à l'origine du repère.

On place dans un premier temps la Terre par rapport au Soleil (qu'on considère à l'origine du repère).

Les coordonnées cartésiennes de la Terre sont alors :

$$d_t \begin{pmatrix} -\cos \delta_S \cos \alpha_S \\ -\cos \delta_S \sin \alpha_S \\ -\sin \delta_S \end{pmatrix}$$

On les notera x_t, y_t, z_t et on fait une distinction selon la façon dont on veut placer l'astéroïde.

Pour placer l'astéroïde en fonction de sa distance à la Terre :

On peut placer l'astéroïde de manière analogue au placement de la Terre, ses coordonnées sont :

$$\begin{pmatrix} x_t - d_a \cos \delta \cos \alpha \\ y_t - d_a \cos \delta \sin \alpha \\ z_t - d_a \sin \delta \end{pmatrix}$$

Pour placer l'astéroïde depuis le Soleil :

On ne connaît que les distances Terre-Soleil et Astéroïde-Soleil ainsi que l'ascension droite (α) et la déclinaison (δ) de l'astéroïde. On pose :

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \beta = \cos \delta \cos \alpha \\ \mu = \cos \delta \sin \alpha \\ \epsilon = \sin \delta \end{pmatrix}$$

L'astéroïde se place sur la droite définie par :

$$\begin{cases} x = \beta t + x_t \\ y = \mu t + y_t, t \in \mathbb{R} \\ z = \epsilon t + z_t \end{cases}$$

On prend donc l'intersection avec la sphère de rayon d et ayant pour centre le Soleil, il y a donc deux intersections possibles, qui correspondent à :

$$t_{1,2} = \frac{-(\beta x_t + \mu y_t + \epsilon z_t) \pm \sqrt{(\beta x_t + \mu y_t + \epsilon z_t)^2 - (\beta^2 + \mu^2 + \epsilon^2)(x_t^2 + y_t^2 + z_t^2 - d^2)}}{\beta^2 + \mu^2 + \epsilon^2}$$

Par la convention de signe prise avec la Terre et les modèles 1 et 2 on choisira la solution anti-colinéaire à \mathbf{u} .

On peut donc maintenant considérer \mathcal{P} , une matrice de $\mathcal{M}(n, 3)$ la liste des coordonnées des points dans le repère.

5.2. Régression linéaire pour déterminer le plan moyen

On rappelle l'équation cartésienne d'un plan dans l'espace :

$$A_1x + A_2y + A_3z + 1 = 0$$

On veut déterminer le vecteur :

$$\mathbf{u} = (A_1 \quad A_2 \quad A_3)^T$$

qui minimise la fonctionnelle associée à la distance au plan.
On pose donc la matrice :

$$\mathcal{D} = \mathcal{P}^T$$

Et on considère $M = (m_{ij})$ telle que :

$$m_{ij} = D_i \cdot D_j$$

On résout donc le système $M\mathbf{u} = 0$ qui permet de déduire les 3 coefficients recherchés du plan. On vérifie a posteriori que le Soleil fait bien partie du plan trouvé.

5.3. Régression quadratique pour déterminer l'ellipse de la trajectoire

On rappelle l'équation d'une ellipse incluse dans le plan trouvé précédemment :

$$A_1x^2 + A_2xy + A_3y^2 + A_4x + A_5y + 1 = 0$$

On pose M la matrice de régression en annexe (9.7), ainsi que :

$$\mathbf{u} = (A_1 \ A_2 \ A_3 \ A_4 \ A_5 \ 1)^T$$

La résolution du système de Cramer :

$$M\mathbf{u} = 0$$

permet de trouver les coefficients qui régissent l'ellipse.

5.4. Détermination des longueurs des axes

Dans les faits, A_2 est négligeable devant les autres coefficients. En posant :

$$K = \frac{A_4^2}{4A_1} + \frac{A_5^2}{4A_3} - 1$$

on obtient que le demi-grand axe et le demi-petit axe vérifient :

$$a = \sqrt{\frac{K}{A_1}} \text{ et } b = \sqrt{\frac{K}{A_3}}$$

On peut alors générer l'ellipse de la trajectoire en prenant en compte que le Soleil est un des foyers.

La valeur de l'excentricité e , elle se déduit de la formule :

$$e = \sqrt{1 - \frac{A_3}{A_1}}$$

5.5. Détermination des paramètres orbitaux

On note ici γ le vecteur associé au point vernal, \mathbf{n}_T le vecteur unitaire normal au plan moyen de la Terre et \mathbf{n}_I celui associé à Iris.

\mathbf{e} le vecteur pointant vers le périhélie (déterminable une fois l'ellipse tracée) ξ le vecteur pointant vers le nœud ascendant, lui aussi déterminable car $\xi = -z \wedge \mathbf{n}$ avec $z = (0 \ 0 \ 1)^T$ le vecteur normal au plan équatorial solaire et \mathbf{n} le vecteur normal au plan de la trajectoire de l'astre considéré.

5.5.1. Inclinaison i par rapport au plan de la trajectoire terrestre

$$i = \mathbf{n}_T \cdot \mathbf{n}_I$$

5.5.2. Argument du périhélie ω

$$\omega = \begin{cases} \text{Si } \mathbf{e} \cdot \hat{z} > 0, 2\pi - \arccos\left(\frac{\xi \cdot \mathbf{e}}{\|\mathbf{e}\| \cdot \|\xi\|}\right) \\ \text{Sinon, } \arccos\left(\frac{\xi \cdot \mathbf{e}}{\|\mathbf{e}\| \cdot \|\xi\|}\right) \end{cases}$$

5.5.3. Longitude du nœud ascendant Ω

$$\Omega = \begin{cases} \text{Si } \xi \cdot \hat{y} < 0, 2\pi - \arccos\left(\frac{\gamma \cdot \xi}{\|\gamma\| \cdot \|\xi\|}\right) \\ \text{Sinon, } \arccos\left(\frac{\gamma \cdot \xi}{\|\gamma\| \cdot \|\xi\|}\right) \end{cases}$$

5.5.4. Temps du prochain périhélie

Il sera noté ici, α l'angle orienté du périhélie au point de référence temporelle t_{ref} du modèle en jours Juliens. On souhaite ici estimer la constante des aires $C = r^2 \dot{\theta}$ pour calculer la durée de transit de l'angle α au périhélie.

On note :

$$I = \int r^2 d\theta = \int_{\alpha}^{2\pi} a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta d\theta$$

qui est intégrable à vue par les formules de l'angle double :

$$\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos(2\theta)}{2} \text{ et } \sin^2 \theta = \frac{1 - \cos(2\theta)}{2}$$

D'après (Gentili 2008) :

$$C = \frac{2\pi}{T} ab$$

Et d'après les lois de Kepler :

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{GM}$$

avec G la constante gravitationnelle et M la masse du Soleil.

On peut donc exprimer C en fonction de a et b :

$$C = b \sqrt{\frac{GM}{a}}$$

Dès lors, vu que $dt = \frac{r^2}{C} d\theta$ d'après la définition on obtient que :

$$\Delta t = \frac{I}{C}$$

Il suffit alors d'ajouter à la date de référence la fraction de temps convertie en jours Juliens $\frac{I}{C}$:

$$t_0 = t_{ref} + \frac{I}{C}$$

Nota : La conversion de calendrier grégorien à jours juliens se fait grâce à l'algorithme en annexe (9.4).

5.6. Résultats

On prend neuf points calculés depuis la base de données du site TheSkyLive.

On notera que les paramètres convergent vers les valeurs réelles si plus de points sont ajoutés.

5.6.1. Méthode des lois de Kepler

$i = 3.16^\circ$
 $a = 3.49 \text{ UA}$
 $e = 0.332$
 $\omega = 172.73^\circ$
 $\Omega = 245.87^\circ$
 $t_0 = 2462676.34 \text{ JD}$

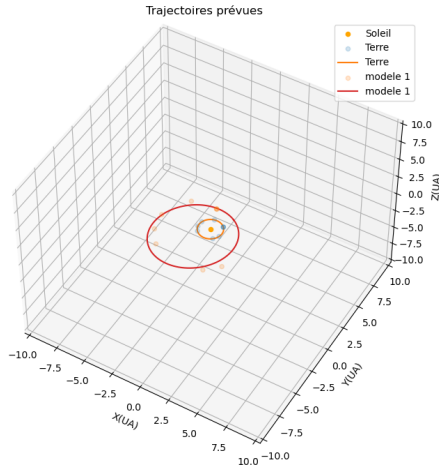


FIGURE 7 – Trajectoire estimée par la méthode des lois de Kepler

5.6.3. Méthode vectorielle

$i = 3.32^\circ$
 $a = 2.85 \text{ UA}$
 $e = 0.275$
 $\omega = 173.99^\circ$
 $\Omega = 346.02^\circ$
 $t_0 = 2460880.89 \text{ JD}$

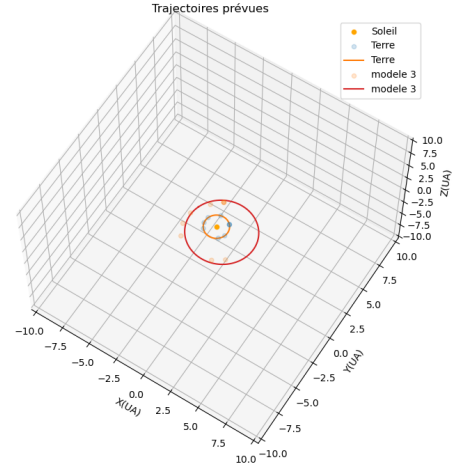


FIGURE 9 – Trajectoire estimée par la méthode vectorielle

5.6.2. Méthode trigonométrique

$i = 4.01^\circ$
 $a = 4.14 \text{ UA}$
 $e = 0.299$
 $\omega = 170.65^\circ$
 $\Omega = 187.06^\circ$
 $t_0 = 2463048.15 \text{ JD}$

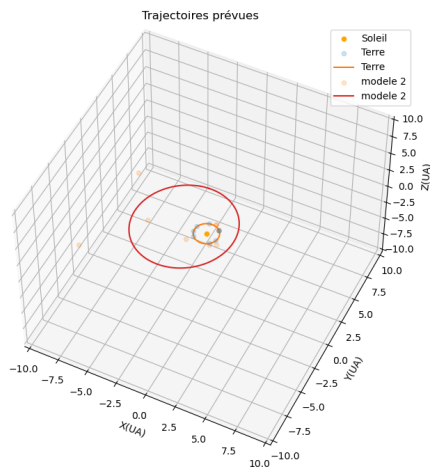


FIGURE 8 – Trajectoire estimée par la méthode trigonométrique

5.7. Conclusion

Par analyse des différents points et trajectoires, on se rend compte que la méthode la plus proche de la réalité est celle utilisant les lois de Kepler ; l'unique problème est qu'elle présuppose la connaissance de la période de révolution et donc n'est pas utilisable sur un objet inconnu.

Si l'on suppose l'astéroïde inconnu, les deux seules méthodes utilisables sont la méthode trigonométrique et la méthode vectorielle. La première est limitée par le positionnement instable de l'astéroïde à chaque observation entraînant alors une altération forte des éléments orbitaux estimés. La seconde méthode est quant à elle limitée au nombre d'observations nécessaires afin de minimiser le bruit sur le positionnement : il faut trois observations faites à intervalles réguliers pour pouvoir minimiser le bruit sur le positionnement de la seconde mesure.

La méthode trigonométrique n'est donc pas viable, on préférera la méthode vectorielle pour avoir une estimation cohérente des éléments orbitaux malgré des perturbations occasionnelles dues à des erreurs de parallaxe.

6. Méthode de la détermination orbitale

En mécanique céleste et dans le système solaire, on peut considérer qu'un astre est soumis uniquement à la force de gravitation du Soleil. En utilisant les lois de Kepler, on peut déterminer l'orbite elliptique d'un objet autour du Soleil.

La détermination orbitale consiste à déterminer à partir d'observations les six éléments orbitaux qui décrivent l'orbite recherchée.

6.1. Méthode

D'après (Gentili 2008) dans Guide de localisation des astres, les coordonnées cartésiennes héliocentriques de l'astéroïde sont :

$$\begin{cases} x = r[\cos(\nu + \omega) \cos \Omega - \sin(\nu + \omega) \cos i \sin \Omega] \\ y = r[\cos(\nu + \omega) \sin \Omega - \sin(\nu + \omega) \cos i \cos \Omega] \\ z = r \sin(\nu + \omega) \sin i \end{cases}$$

voir annexe (9.5) pour la démonstration, avec :

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \nu}$$

Ainsi que les coordonnées géocentriques écliptiques :

$$\begin{cases} x' = \rho \cos \lambda \cos \beta \\ y' = \rho \sin \lambda \cos \beta \\ z' = \rho \sin \beta \end{cases}$$

où ρ est la distance Terre-astéroïde, λ et β sont la longitude et la latitude qu'on peut retrouver à partir de l'ascension droite α , la déclinaison δ et l'inclinaison du plan équatorial par rapport à l'écliptique ϵ , voir annexe (9.6) pour la démonstration :

$$\begin{cases} \cos \lambda \cos \beta = \cos \delta \cos \alpha, \\ \sin \lambda \cos \beta = \sin \epsilon \sin \delta + \cos \epsilon \cos \delta \sin \alpha, \\ \sin \beta = \cos \epsilon \sin \delta - \sin \epsilon \cos \delta \sin \alpha. \end{cases}$$

Le passage des coordonnées héliocentriques écliptiques aux coordonnées géocentriques écliptiques s'effectue par les relations :

$$\begin{cases} x' = x - X \\ y' = y - Y \\ z' = z - Z \end{cases}$$

avec X, Y, Z les coordonnées écliptiques géocentriques du Soleil qu'on peut définir selon une méthode standard en astronomie basée sur des approximations analytiques de l'orbite terrestre autour du Soleil voir annexe (9.8) pour la démonstration.

On obtient donc :

$$\begin{aligned} \rho \cos \lambda \cos \beta &= r[\cos(\nu + \omega) \cos \Omega - \sin(\nu + \omega) \cos i \sin \Omega] - X \\ \rho \sin \lambda \cos \beta &= r[\cos(\nu + \omega) \sin \Omega - \sin(\nu + \omega) \cos i \cos \Omega] - Y \\ \rho \sin \beta &= r \sin(\nu + \omega) \sin i - Z \end{aligned}$$

On obtient un système de trois équations à sept inconnues ($\Omega, i, \omega, a, e, t_0, \rho$) pour une seule observation. En effectuant 3 observations, on aura un système de neuf équations à neuf inconnues ($\Omega, i, \omega, a, e, t_0, \rho_1, \rho_2, \rho_3$) dont la solution unique existe.

On aura comme données connues : $\lambda_1, \beta_1, X_1, Y_1, Z_1, \lambda_2, \beta_2, X_2, Y_2, Z_2, \lambda_3, \beta_3, X_3, Y_3$ et Z_3

On peut résoudre ce système d'équations avec la méthode des moindres carrés avec la fonction `least_squares` du module `scipy.optimize` de Python. La méthode des moindres carrés ajuste les paramètres d'un modèle pour minimiser la somme des carrés des écarts (résidus) entre les observations et les valeurs prédites par le modèle en cherchant à résoudre :

$$\min_x \sum_i (f_i(x))^2$$

où $f_i(x)$ représente les résidus pour chaque observation.

Pour estimer les erreurs sur les paramètres ajustés, on peut utiliser une approche bootstrap. Le bootstrap consiste à générer plusieurs ensembles de données simulées basées sur les résidus observés, puis à ajuster le modèle sur ces ensembles pour obtenir une distribution des paramètres. Les erreurs sont estimées comme l'écart-type de ces distributions.

6.2. Observations et résultats

Il est possible d'obtenir l'ascension droite et la déclinaison à partir des images FITS qui sont des images permettant de stocker les informations associées aux observations.

Le module `astropy` de Python comporte de nombreuses fonctions qui permettent de lire et de manipuler les images FITS, notamment la fonction `wcs_pix2world` qui prend en argument les coordonnées d'un point de l'image en pixel et renvoie l'ascension droite et la déclinaison en degrés de ce point.

N'ayant pas pu réaliser le nombre d'observations nécessaire, nous avons tout de même pu extraire les données d'ascension droite et de déclinaison depuis le site TheSkyLive. On y retrouve d'ailleurs aux dates choisies :

$$\begin{aligned} \rho_1 &= 1.792 \text{ UA} \\ \rho_2 &= 1.882 \text{ UA} \\ \rho_3 &= 1.961 \text{ UA} \end{aligned}$$

Solutions avec erreurs (bootstrap) :

$$\begin{aligned} \Omega &= 263.90^\circ \pm 4.14^\circ \\ i &= 5.55^\circ \pm 0.28^\circ \\ \omega &= 143.48^\circ \pm 3.59^\circ \\ a &= 2.208 \pm 0.039 \text{ UA} \\ e &= 0.20681 \pm 0.01221 \\ t_0 &= 2460779.996904 \pm 0.567119 \text{ JD} \\ \rho_1 &= 1.508 \pm 0.026 \text{ UA} \\ \rho_2 &= 1.611 \pm 0.035 \text{ UA} \\ \rho_3 &= 1.746 \pm 0.037 \text{ UA} \end{aligned}$$

Le modèle de calcul fournit des résultats globalement cohérents avec les valeurs réelles pour les paramètres orbitaux. Ces écarts peuvent être réduits en améliorant la précision des observations initiales et en utilisant des modèles plus sophistiqués, prenant en compte des effets secondaires (perturbations gravitationnelles, effets non-képlériens, etc.). Cependant, pour la plupart des applications pratiques, ces écarts sont acceptables. Le modèle est donc considéré comme fiable dans l'ensemble.

7. Simulations orbitales

7.1. En 2D selon la loi gravitationnelle

On veut simuler les orbites de la Terre, Mars, Jupiter et l'astéroïde (7) Iris autour du Soleil (figure 10).

Cette simulation repose sur la loi de la gravitation universelle et le principe fondamental de la dynamique :

$$\mathbf{F} = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \mathbf{n} = m \mathbf{a}$$

Les orbites elliptiques sont calculées en tenant compte de la vitesse tangentielle initiale et de l'excentricité des planètes. À chaque étape temporelle, les forces gravitationnelles sont calculées pour chaque planète, en tenant compte des interactions avec le Soleil et les autres planètes et les positions et vitesses sont

intégrées à l'aide d'un schéma d'Euler explicite pour simuler le mouvement.

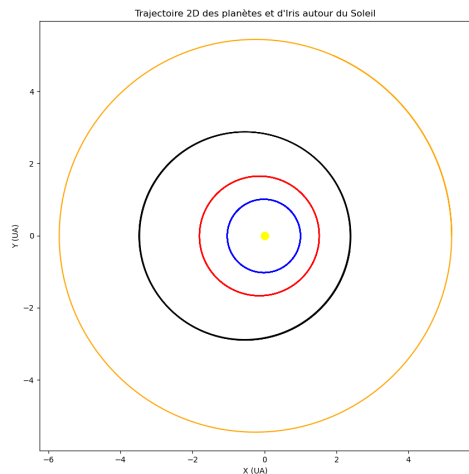


FIGURE 10 – Simulation 2D des orbites de la Terre, Mars, Jupiter et l'astéroïde 7 Iris autour du Soleil.

Les orbites des planètes reproduisent fidèlement des trajectoires elliptiques réalistes avec une précision limitée par la méthode d'intégration utilisée. En revanche, la simulation est restreinte à deux dimensions avec des positions fixes en z (orbites coplanaires).

7.2. En 3D selon les éléments orbitaux

On veut toujours simuler les orbites de la Terre, Mars, Jupiter et l'astéroïde (7) Iris autour du Soleil mais cette fois à trois dimensions (figure 11).

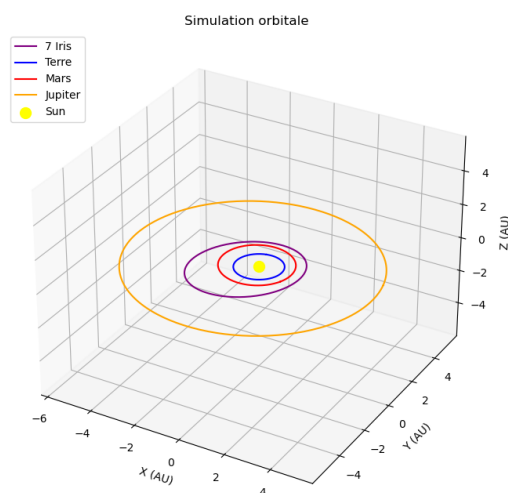


FIGURE 11 – Simulation 3D des orbites de la Terre, Mars, Jupiter et l'astéroïde 7 Iris autour du Soleil.

Cette simulation repose sur les éléments orbitaux et sur la résolution de l'équation de Kepler :

$$E = M + e \sin E$$

Cette méthode (approximée avec 5 itérations) permet de déduire l'anomalie vraie v , nécessaire pour déterminer la position orbitale.

Une fois v et r (distance au Soleil) calculés, les coordonnées cartésiennes sont obtenues en tenant compte de l'inclinaison i , de la longitude du nœud ascendant Ω , et de l'argument du périastre ω .

Cette simulation met en évidence les différences significatives entre les orbites. 7 Iris a une orbite plus excentrique et inclinée que les planètes du système solaire, tandis que les orbites des planètes sont globalement coplanaires, avec des inclinaisons faibles.

7.3. Comparaison

À partir des valeurs réelles des éléments orbitaux données plus haut ainsi que des résultats obtenus grâce à la méthode de la détermination orbitale, on peut simuler l'orbite réelle et l'orbite calculée afin de comparer nos résultats avec ceux attendus (figure 12) :

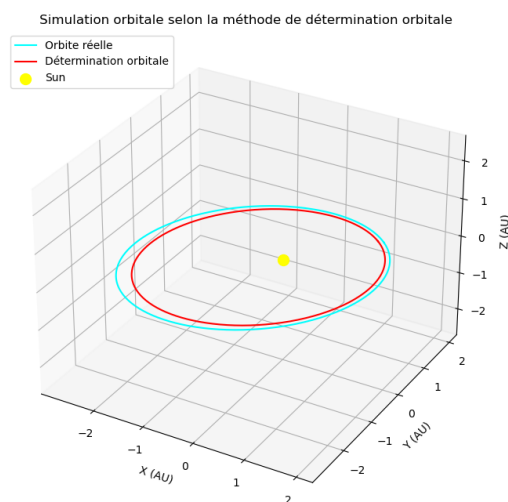


FIGURE 12 – Simulation de l'orbite réelle et de l'orbite calculée.

Le modèle utilisé pour calculer l'orbite est globalement fiable, mais les légères différences par rapport à l'orbite réelle pourraient provenir d'une nécessité d'affiner les paramètres d'entrée (ex. : conditions initiales, forces perturbatrices) et d'une possible amélioration du modèle mathématique pour inclure des effets secondaires (comme les perturbations gravitationnelles ou les influences d'autres corps).

8. Conclusion

L'étude et l'observation de l'astéroïde (7) Iris nous ont permis d'utiliser différentes approches mathématiques et numériques pour déterminer ses éléments orbitaux et simuler sa trajectoire (figure 13).

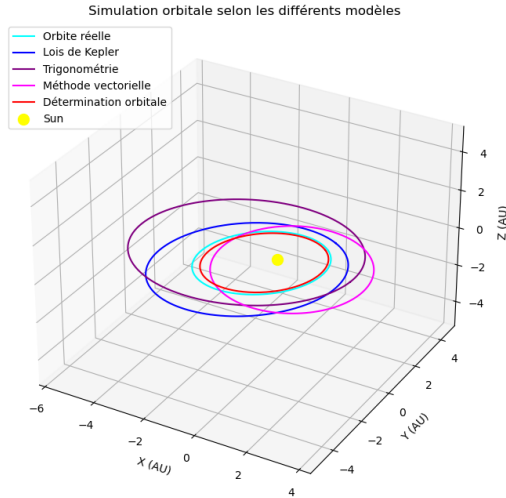


FIGURE 13 – Simulation de l'orbite de l'astéroïde 7 Iris selon les différentes méthodes.

La détermination des éléments orbitaux au travers d'outils mathématiques et géométriques a démontré l'efficacité des approches analytiques et régressives pour décrire l'orbite sous forme d'ellipse en utilisant des données d'observations assez précises. Bien que ces méthodes soient limitées par la précision des données initiales, elles permettent une estimation relativement bonne des paramètres orbitaux.

Dans la méthode de la détermination orbitale, l'ajustement a montré des résultats cohérents avec les valeurs réelles, confirmant ainsi l'utilité de l'utilisation des moindres carrés et de l'optimisation numérique pour l'ajustement. Cette approche permet une meilleure précision et un ajustement global satisfaisant.

Enfin, par les différentes simulations orbitales, nous avons pu comparer des modèles simplifiés et une description plus réaliste fondée sur les éléments orbitaux calculés. Les résultats montrent que l'orbite de (7) Iris est significativement plus excentrique et inclinée que celles des planètes du système solaire, ce qui est cohérent avec la réalité.

Ainsi, l'ensemble des approches utilisées dans cette étude permet de fournir une description fidèle de la trajectoire de (7) Iris, même si chaque modèle utilisé comporte ses propres limites, notamment dans le traitement des perturbations gravitationnelles et l'exactitude des conditions initiales. Ces méthodes peuvent être généralisées à d'autres objets célestes, avec des ajustements spécifiques selon les données disponibles et les objectifs scientifiques.

Références

- Gentili, C. 2008, Guide de localisation des astres
 Halloin, H. 2024, Cours de Science et Systèmes Spatiaux
 NASA, H. 2024, Horizons System, <https://ssd.jpl.nasa.gov/horizons/app.html#/>
 Seth B Nicholson, Mount Wilson, & Palomar Observatories. 1961, The Trojan Asteroids
 TheSkyLive. 2024, Asteroid 7 Iris, <https://theskylive.com/iris-info>

9. Annexe

9.1. Démonstration de la formule de l'élongation (3.2)

On considère l'ascension droite et la déclinaison de l'astéroïde (α, δ) et celles du Soleil (α_S, δ_S).

L'élongation E est l'angle entre les deux vecteurs sphériques unitaires définis par ces quatre angles.

Pour l'astéroïde (il en sera de même pour le Soleil), le vecteur cartésien associé au vecteur sphérique est :

$$\begin{pmatrix} \sin(\frac{\pi}{2} - \delta) \cos \alpha \\ \sin(\frac{\pi}{2} - \delta) \sin \alpha \\ \cos(\frac{\pi}{2} - \delta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \delta \cos \alpha \\ \cos \delta \sin \alpha \\ \sin \delta \end{pmatrix}$$

En faisant le produit scalaire de ces deux vecteurs que l'on rappelle unitaires, on obtient que :

$$\cos E = \cos \delta \cos \alpha \cos \delta_S \cos \alpha_S + \cos \delta \sin \alpha \cos \delta_S \sin \alpha_S$$

$$+ \sin \delta \sin \delta_S$$

$$= \cos \delta \cos \delta_S \cos(\alpha_S - \alpha) + \sin \delta \sin \delta_S$$

d'où la formule finale :

$$\cos E = \cos \delta \cos \delta_S \cos(\alpha_S - \alpha) + \sin \delta \sin \delta_S$$

9.2. Démonstration de l'équation (3.3.1)

D'après la loi de la gravitation universelle, la force gravitationnelle est donnée par :

$$\mathbf{F}_g = -\frac{GMm}{r^2} \hat{\mathbf{r}}.$$

La force centripète, nécessaire pour maintenir un objet de masse m sur une orbite circulaire, est :

$$\mathbf{F}_c = -m\omega^2 r \hat{\mathbf{r}}.$$

Pour un objet en orbite stable, la force centripète est égale à la force gravitationnelle, soit :

$$F_g = F_c.$$

On obtient alors :

$$\frac{GMm}{r^2} = m\omega^2 r,$$

d'où ;

$$\omega = \sqrt{\frac{GM}{r^3}}.$$

9.3. Démonstration de l'implication (3.3.1)

$$\begin{aligned} d^2 &= d_t^2 + d_a^2 - 2d_a d_t \cos(E) \\ \Leftrightarrow d_a^2 &= d_t \cos(E) + \sqrt{d_t^2 \cos^2(E) - d_t^2 + d^2} \\ \Leftrightarrow d_a^2 &= d_t \cos(E) + \sqrt{d^2 - d_t^2 \sin^2(E)} \end{aligned}$$

9.4. Algorithme de conversion en jours juliens (5.5.4)

Le jour julien est un système de datation astronomique qui mesure le temps en jours (et fractions de jours) écoulés depuis le 1er janvier 4713 avant notre ère (12h00 temps universel). Il est utilisé en astronomie pour simplifier les calculs de dates et de durées, en évitant les complications liées aux différents calendriers civils.

On notera $\lfloor x \rfloor$ la partie entière inférieure de x :

$$\forall x, \lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$$

```

1: Input : l'année  $A \geq 1582$ , le Mois  $M$ , h l'heure, m les minutes et s les secondes
2:  $f = \frac{h-12}{24} + \frac{m}{1440} + \frac{s}{86400}$ 
3: if  $M > 2$  then
4:    $A = A$ 
5:    $M = M$ 
6: else
7:    $A = A - 1$ 
8:    $M = M + 12$ 
9: end if
10:  $S = \lfloor \frac{A}{100} \rfloor$ 
11:  $B = 2 - S + \lfloor \frac{S}{4} \rfloor$ 
12: return  $\lfloor 365.5 \times A \rfloor + \lfloor 30.6001 \times (B + 1) \rfloor + f + B + 1720994.5$ 

```

9.5. Coordonnées dans un repère de référence donné (6.1)

Le plan de référence est le plan de l'écliptique, qui correspond au plan moyen du mouvement orbital de la Terre autour du Soleil. Quant à la direction de référence c'est la direction du point vernal qu'on appellera γ . On considère l'argument du périhélie ω et l'anomalie vraie ν . On considère alors l'angle polaire :

$$\omega + \nu = (L_{asc}, L_{ast})$$

avec L_{asc} le vecteur unitaire dirigé du soleil vers le nœud ascendant et L_{ast} celui dirigé vers l'astéroïde.

On choisit le trièdre orthogonal direct (O, x_0, y_0, z_0) du référentiel orbital tel que :

- $Ox_0 = SN_A$ (soleil - nœud ascendant)
 - Oy_0 dans le demi-plan orbital supérieur au plan de référence.
- On en déduit les coordonnées orbitales cartésiennes :

$$\begin{cases} x_0 = r \cos(\omega + \nu) \\ y_0 = r \sin(\omega + \nu) \\ z_0 = 0 \end{cases}$$

Une première rotation autour de Ox_0 va faire passer au trièdre intermédiaire (O, x_i, y_i, z_i) tel que :

- $x_i = FN_A$
- $\theta_x = (Oy_0, Oy_i) = -i$.

La matrice de rotation correspondante est :

$$R(-i) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i & -\sin i \\ 0 & \sin i & \cos i \end{pmatrix}$$

d'où les coordonnées cartésiennes intermédiaires :

$$\begin{cases} x_i = r \cos(\omega + \nu) \\ y_i = r \sin(\omega + \nu) \cos i \\ z_i = r \sin(\omega + \nu) \sin i \end{cases}$$

Une deuxième rotation d'axe Oz , perpendiculaire au plan de référence, fait passer au trièdre final (O, x, y, z) tel que :

- $Oz = Oz_i$
- $\theta_z = (Ox_i, Ox) = (FN_A, F\gamma) = -\Omega$.

La matrice de rotation correspondante est :

$$R(-\Omega) = \begin{pmatrix} \cos \Omega & -\sin \Omega & 0 \\ \sin \Omega & \cos \Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ce qui nous permet d'obtenir les coordonnées cartésiennes héliocentriques :

$$\begin{cases} x = r[\cos(\nu + \omega) \cos \Omega - \sin(\nu + \omega) \cos i \sin \Omega] \\ y = r[\cos(\nu + \omega) \sin \Omega - \sin(\nu + \omega) \cos i \cos \Omega] \\ z = r \sin(\nu + \omega) \sin i \end{cases}$$

9.6. Passage des coordonnées équatoriales aux coordonnées écliptiques (6.1)

A partir des relations entre les coordonnées équatoriales et les coordonnées géocentriques :

$$\begin{cases} \cos \lambda \cos \beta = \cos \delta \cos \alpha \\ \sin \lambda \cos \beta = \sin \epsilon \sin \delta + \cos \epsilon \cos \delta \sin \alpha \\ \sin \beta = \cos \epsilon \sin \delta - \sin \epsilon \cos \delta \sin \alpha \end{cases}$$

On divise la deuxième équation par la première :

$$\frac{\sin \lambda \cos \beta}{\cos \lambda \cos \beta} = \frac{\sin \epsilon \sin \delta + \cos \epsilon \cos \delta \sin \alpha}{\cos \delta \cos \alpha}$$

En simplifiant, on obtient :

$$\tan \lambda = \frac{\sin \epsilon \sin \delta + \cos \epsilon \cos \delta \sin \alpha}{\cos \delta \cos \alpha}$$

Soit :

$$\lambda = \arctan \left(\frac{\sin \epsilon \sin \delta + \cos \epsilon \cos \delta \sin \alpha}{\cos \delta \cos \alpha} \right)$$

De même pour β :

$$\beta = \arcsin(\cos \epsilon \sin \delta - \sin \epsilon \cos \delta \sin \alpha)$$

9.7. M la matrice de régression quadratique (5.3)

$$M = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n \mathcal{P}_{i1}^2 \times \mathcal{P}_{i1}^2 & \sum_{i=1}^n \mathcal{P}_{i1}^2 \times \mathcal{P}_{i1} \times \mathcal{P}_{i2} & \sum_{i=1}^n \mathcal{P}_{i1}^2 \times \mathcal{P}_{i2}^2 & \sum_{i=1}^n \mathcal{P}_{i1}^2 \times \mathcal{P}_{i1} & \sum_{i=1}^n \mathcal{P}_{i1}^2 \times \mathcal{P}_{i2} & \sum_{i=1}^n \mathcal{P}_{i1}^2 \times \mathcal{P}_{i2} \\ \sum_{i=1}^n \mathcal{P}_{i1} \times \mathcal{P}_{i2} \times \mathcal{P}_{i1}^2 & \sum_{i=1}^n \mathcal{P}_{i1} \times \mathcal{P}_{i2} \times \mathcal{P}_{i1} \times \mathcal{P}_{i2} & \sum_{i=1}^n \mathcal{P}_{i1} \times \mathcal{P}_{i2} \times \mathcal{P}_{i2}^2 & \sum_{i=1}^n \mathcal{P}_{i1} \times \mathcal{P}_{i2} \times \mathcal{P}_{i1} & \sum_{i=1}^n \mathcal{P}_{i1} \times \mathcal{P}_{i2} \times \mathcal{P}_{i2} & \sum_{i=1}^n \mathcal{P}_{i1} \times \mathcal{P}_{i2} \times \mathcal{P}_{i2} \\ \sum_{i=1}^n \mathcal{P}_{i2}^2 \times \mathcal{P}_{i1}^2 & \sum_{i=1}^n \mathcal{P}_{i2}^2 \times \mathcal{P}_{i1} \times \mathcal{P}_{i2} & \sum_{i=1}^n \mathcal{P}_{i2}^2 \times \mathcal{P}_{i2}^2 & \sum_{i=1}^n \mathcal{P}_{i2}^2 \times \mathcal{P}_{i1} & \sum_{i=1}^n \mathcal{P}_{i2}^2 \times \mathcal{P}_{i2} & \sum_{i=1}^n \mathcal{P}_{i2}^2 \times \mathcal{P}_{i2} \\ \sum_{i=1}^n \mathcal{P}_{i1} \times \mathcal{P}_{i1}^2 & \sum_{i=1}^n \mathcal{P}_{i1} \times \mathcal{P}_{i1} \times \mathcal{P}_{i2} & \sum_{i=1}^n \mathcal{P}_{i1} \times \mathcal{P}_{i2}^2 & \sum_{i=1}^n \mathcal{P}_{i1} \times \mathcal{P}_{i1} & \sum_{i=1}^n \mathcal{P}_{i1} \times \mathcal{P}_{i2} & \sum_{i=1}^n \mathcal{P}_{i1} \times \mathcal{P}_{i2} \\ \sum_{i=1}^n \mathcal{P}_{i2} \times \mathcal{P}_{i1}^2 & \sum_{i=1}^n \mathcal{P}_{i2} \times \mathcal{P}_{i1} \times \mathcal{P}_{i2} & \sum_{i=1}^n \mathcal{P}_{i2} \times \mathcal{P}_{i2}^2 & \sum_{i=1}^n \mathcal{P}_{i2} \times \mathcal{P}_{i1} & \sum_{i=1}^n \mathcal{P}_{i2} \times \mathcal{P}_{i2} & \sum_{i=1}^n \mathcal{P}_{i2} \times \mathcal{P}_{i2} \\ \sum_{i=1}^n \mathcal{P}_{i1}^2 & \sum_{i=1}^n \mathcal{P}_{i1} \times \mathcal{P}_{i2} & \sum_{i=1}^n \mathcal{P}_{i2}^2 & \sum_{i=1}^n \mathcal{P}_{i1} & \sum_{i=1}^n \mathcal{P}_{i2} & \sum_{i=1}^n 1 \end{pmatrix}$$

9.8. Calcul des coordonnées écliptiques géocentriques du Soleil (6.1)

En prenant en compte l'époque J2000.0, correspondant au 1er janvier 2000 à 12h00 Temps Universel (TU) et utilisée comme référence pour les mesures astronomiques, notamment pour la position des objets célestes, les orbites planétaires et d'autres phénomènes astronomiques, on peut calculer les coordonnées du soleil au moment des observations :

```

1 def soleil_coord_cartesiennes_jd(JD):
2     # Jour julien de reference J2000.0
3     JD2000 = 2451545.0
4     # Nombre de jours depuis J2000.0
5     n = JD - JD2000
6     # Calcul de l'anomalie moyenne en radians
7     M = np.radians(357.5291 + 0.98560028 * n)
8     # Equation du centre en degres
9     C = 1.9148 * np.sin(M) + 0.0200 * np.sin(2
10         * M) + 0.0003 * np.sin(3 * M)
11     # Longitude ecliptique apparente en radians
12     lambda_sol = (M + np.radians(C) +
13         np.radians(102.9372) + np.pi) % (2 *
14         np.pi)
15     # Distance heliocentrique R en unites
16     # astronomiques
17     R = 1.000001018 * (1 - 0.016708634 *
18         np.cos(M + np.radians(C)))
19     # Coordonnees cartesiennes
20     X = R * np.cos(lambda_sol)
21     Y = R * np.sin(lambda_sol)
22     Z = 0 # Toujours 0 pour le Soleil dans le
23     # plan de l'ecliptique
24     return X, Y, Z

```