

Trajectoires balistiques et propulsées

Serine Remita

e-mail: serine.remita@etu.u-paris.fr

11 juillet 2025

RÉSUMÉ

Table des matières

1	Introduction	2
1.1	Le système	2
1.2	Bilan des forces	2
2	Portée d’un tir de gardien de but	3
2.1	Sans traînée atmosphérique	3
2.2	Avec traînée atmosphérique	5
2.3	Comparaison	5
3	Trajectoire d’un vol sub-orbital et application au vol d’Alan Shepard	6
3.1	Modélisation de l’atmosphère	6
3.2	Déroulé du vol	7
3.2.1	Phase de poussée	7
3.2.2	Phase balistique	8
3.2.3	Phase de descente sous parachute	8
3.3	Résultats de la simulation	8
4	Conclusion	9

Trajectoires balistiques et propulsées

Serine Remita

e-mail: serine.remita@etu.u-paris.fr

11 juillet 2025

RÉSUMÉ

Le projet "Trajectoires balistiques et propulsées" vise à modéliser et analyser les trajectoires de projectiles et de fusées dans l'atmosphère en tenant compte des forces fondamentales qui les influencent : la gravité, la traînée aérodynamique et la poussée dans le cas d'un système propulsé. On se limitera uniquement aux trajectoires planes. Dans un premier temps, nous étudierons la trajectoire d'un projectile soumis uniquement à la gravité, en développant une approche analytique et numérique pour décrire son mouvement. Ensuite, l'effet de la traînée atmosphérique sera intégré au modèle afin d'évaluer son impact sur la portée et le temps de vol. Enfin, nous explorerons les effets d'un système de propulsion, en particulier dans le contexte des vols suborbitaux, en prenant comme étude de cas le vol historique d'Alan Shepard à bord de la capsule Mercury. L'objectif principal de ce projet est donc de résoudre numériquement les équations du mouvement en utilisant des méthodes d'intégration numérique et de comparer les résultats obtenus aux solutions analytiques dans des cas simplifiés.

Mots clés. Trajectoire, Forces, Propulsion

1 Introduction

1.1 Le système

Le système étudié dans ce projet est un objet en mouvement dans l'atmosphère terrestre. Selon le cas étudié, cet objet peut être un projectile balistique (comme un ballon de football) ou un véhicule propulsé (comme une fusée). On note :

— Sa position à l'instant t :

$$\vec{X}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

— Sa vitesse à l'instant t :

$$\vec{V}(t) = \begin{pmatrix} V_x(t) \\ V_y(t) \\ V_z(t) \end{pmatrix} = \dot{\vec{X}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix}$$

Grâce au principe fondamental de la dynamique (PFD) et au bilan des forces, on obtient des équations différentielles vérifiées par le système à chaque instant t .

1.2 Bilan des forces

Pour étudier la trajectoire d'un objet dans l'atmosphère, on suppose qu'il est soumis à 3 forces :

— Le poids :

$$\vec{P} = m \cdot \vec{g}$$

avec $\vec{g} = -g \cdot \vec{z}$.

— La traînée aérodynamique :

$$\vec{f} = -\frac{1}{2} \cdot \rho(z) \cdot S \cdot C_x \cdot \|\vec{V}\| \cdot \vec{V}$$

Pour simplifier, on posera $f = \frac{1}{2} \cdot \rho(z) \cdot S \cdot C_x \cdot \|\vec{V}\|$ avec :

— $\rho(z)$ la densité de l'air à l'altitude z ,

- S la section projetée de l'objet,
- C_x le coefficient de traînée considéré constant.
- La poussée :

$$\vec{F} = \dot{m}_e \cdot V_e \cdot \vec{u}_e$$

avec :

- \dot{m}_e le débit massique de la matière s'échappant des tuyères,
- V_e la vitesse d'éjection des gaz,
- \vec{u}_e le vecteur unitaire dans la direction d'éjection des gaz.

Cette force est modélisée dans le référentiel de la fusée. Or dans le référentiel terrestre elle s'écrit :

$$\vec{F} = \dot{m} \cdot (\vec{V}_e + \vec{V})$$

avec $\vec{V}_e = V_e \cdot \vec{u}_e$

Les forces aérodynamiques latérales comme la portance seront négligées, ce qui nous permettra de considérer uniquement des trajectoires planes, soit $y(t) = 0$. D'où :

$$\vec{X}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

et :

$$\vec{V}(t) = \begin{pmatrix} V_x(t) \\ V_z(t) \end{pmatrix} = \dot{\vec{X}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix}$$

2 Portée d'un tir de gardien de but

On commence par l'étude du tir de dégagement d'un gardien de but.

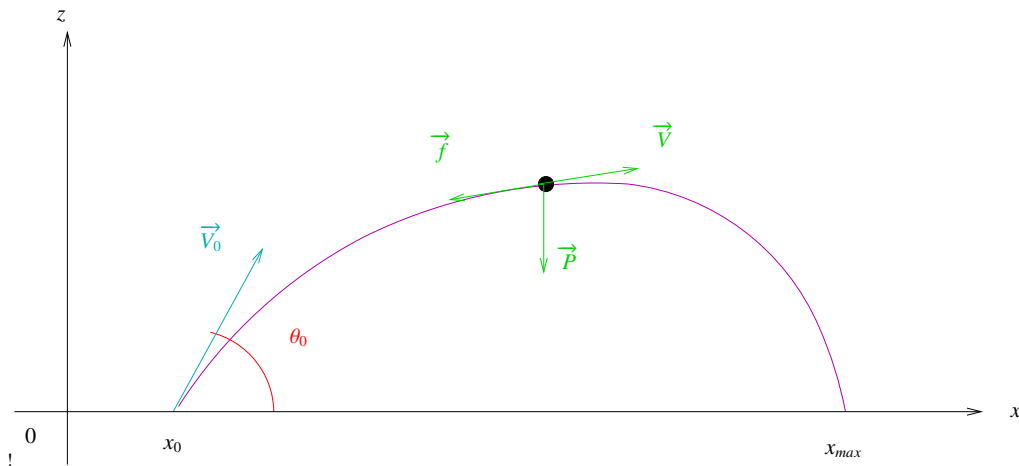


FIGURE 1 – Modélisation d'un tir de gardien de but

Le gardien tire le ballon à distance x_0 et une hauteur z_0 , et une vitesse \vec{V}_0 telle que :

$$\vec{V}_0 = \begin{pmatrix} V_{0x} \\ V_{0z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_0 \cos \theta_0 \\ V_0 \sin \theta_0 \end{pmatrix}$$

La poussée est évidemment nulle dans cette situation, et on peut traiter deux cas de figure.

2.1 Sans traînée atmosphérique

On considère le ballon en chute libre, donc soumis uniquement à \vec{P} . Le PFD donne :

$$\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a} \Leftrightarrow -mg \cdot \vec{z} = m \frac{d^2 \vec{X}}{dt^2} \Leftrightarrow -g \cdot \vec{z} = \frac{d^2 \vec{X}}{dt^2}$$

Donc : $\frac{d^2 \vec{X}}{dt^2} = \begin{pmatrix} \ddot{x}(t) \\ \ddot{z}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix}$

D'où :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_0 \cos \theta_0 \\ -gt + V_0 \sin \theta_0 \end{pmatrix}$$

Enfin :

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_0 \cos \theta_0 \cdot t + x_0 \\ -\frac{1}{2}g \cdot t^2 + V_0 \sin \theta_0 \cdot t + z_0 \end{pmatrix}$$

La résolution du système d'équation donne la trajectoire suivante :

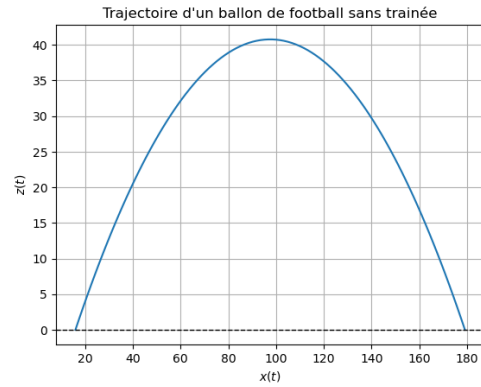


FIGURE 2 – Trajectoire d'un tir de ballon sans traînée.

Angle de portée maximale :

On cherche l'angle θ_{max} pour lequel x est maximal lorsque $z = 0$ et $t = t_f$, soit : $\vec{X}(t_f) = \begin{pmatrix} x_{max} \\ 0 \end{pmatrix}$

En sachant que $z_0 = 0$, alors : $-\frac{1}{2}g \cdot t_{vol}^2 + V_0 \sin \theta_0 \cdot t = 0$, soit : $t_{vol} = \frac{2V_0 \sin \theta_0}{g}$

On injecte dans $x(t)$:

$$x(\theta_0) = V_0 \cos \theta_0 \cdot \frac{2V_0 \sin \theta_0}{g} + x_0$$

Or $\sin(2a) = 2 \cos a \sin a$, alors :

$$x(\theta_{max}) = \frac{V_0^2 \sin(2\theta_{max})}{g} + x_0$$

La fonction $\sin(2\theta_{max})$ est maximale pour $\sin(2\theta_{max}) = 1 \Leftrightarrow 2\theta_{max} = \frac{\pi}{2}$, soit : $\theta_{max} = \frac{\pi}{4}$

Vitesse initiale minimale :

La vitesse initiale minimale permet d'atteindre le but adverse à $x(\theta_{max}) = x_{\min \text{ but}} = 120\text{m}$. Soit :

$$V_0 = \sqrt{g(x_{\min \text{ but}} - x_0)} \approx 30.27\text{m/s}$$

On trace la portée x_{max} et le temps de vol t_{vol} en fonction de θ et de V_0 pour $V_0 = 40\text{ m/s}$ et $\theta = 45^\circ$ respectivement.

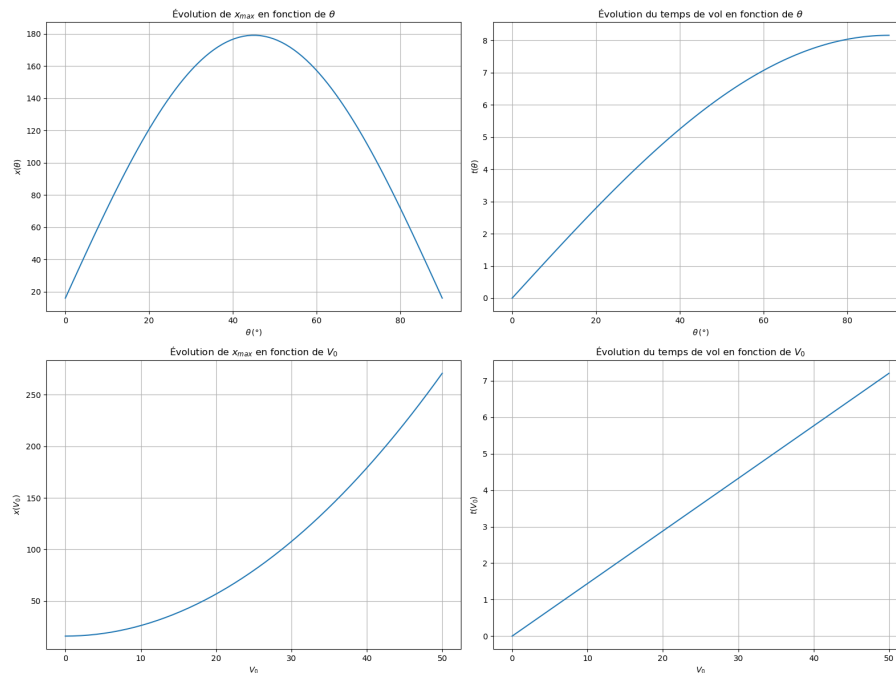


FIGURE 3 – Evolution de x_{max} et t_{vol} en fonction de θ et de V_0 .

2.2 Avec traînée atmosphérique

On prend cette fois en compte la traînée aérodynamique, sachant que $\rho(x)$ est considéré constant en raison de la faible variation de hauteur. On retrouve :

$$m \frac{d^2 \vec{X}}{dt^2} = -mg \cdot \vec{z} - \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot S \cdot C_x \cdot \|\vec{V}\| \cdot \vec{V}$$

Donc :

$$\begin{pmatrix} \ddot{x}(t) \\ \ddot{z}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} - \frac{1}{2m} \cdot \rho \cdot S \cdot C_x \cdot \|\vec{V}\| \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix}$$

Enfin :

$$\begin{pmatrix} \ddot{x}(t) \\ \ddot{z}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2m} \cdot \rho \cdot S \cdot C_x \cdot \|\vec{V}\| \dot{x}(t) \\ -g - \frac{1}{2m} \cdot \rho \cdot S \cdot C_x \cdot \|\vec{V}\| \dot{z}(t) \end{pmatrix}$$

On résout ce système d'équations avec `scipy.integrate.odeint` et on obtient un temps de vol de 3.89 s.

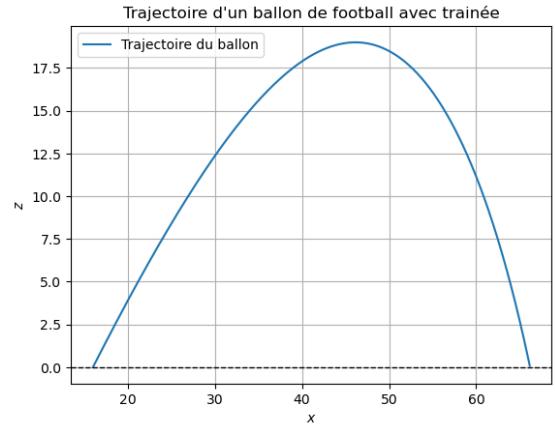


FIGURE 4 – Trajectoire d'un tir de ballon avec traînée.

Pour obtenir une estimation fine de la portée et du temps de vol, indépendante du temps, on résout numériquement les équations du mouvement à l'aide de la fonction `odeint` pour chaque θ (ou chaque V_0). Afin d'estimer précisément le moment où le ballon touche le sol, une interpolation linéaire est effectuée entre les deux points encadrant le passage par $z = 0$.

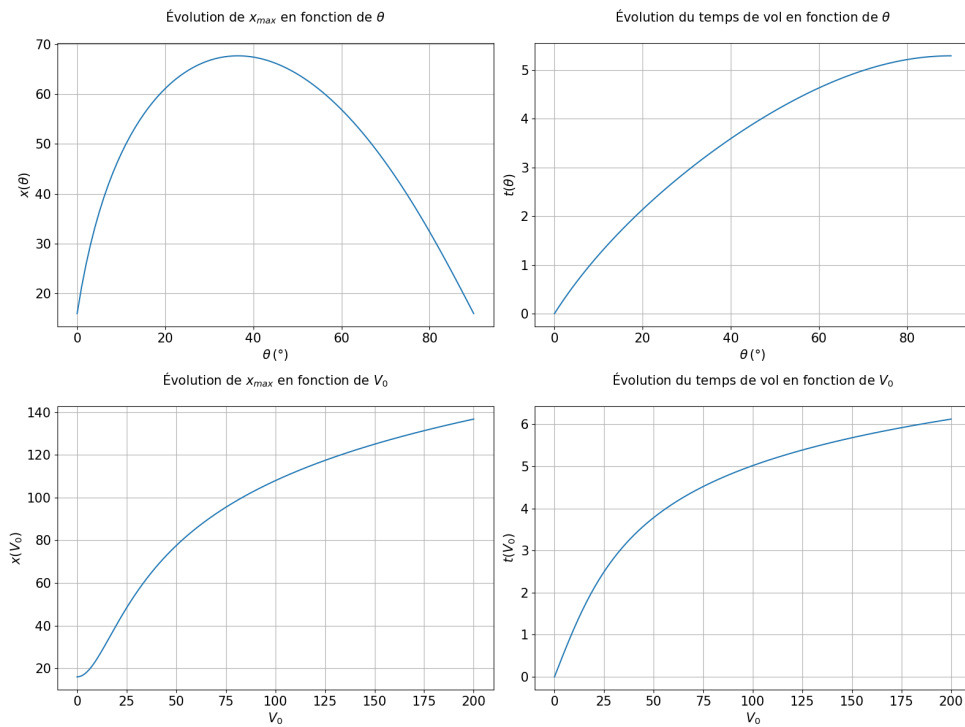


FIGURE 5 – Evolution de x_{max} et t_{vol} en fonction de θ et de V_0 .

2.3 Comparaison

On effectue une comparaison entre la trajectoire obtenue pour un PFD avec et sans traînée, pour les mêmes valeurs de θ et de V_0 . Les résultats montrent qu'en prenant en compte la traînée, la portée et l'altitude du ballon diminuent fortement. Cela illustre l'impact majeur de la résistance de l'air sur les trajectoires à grande vitesse.

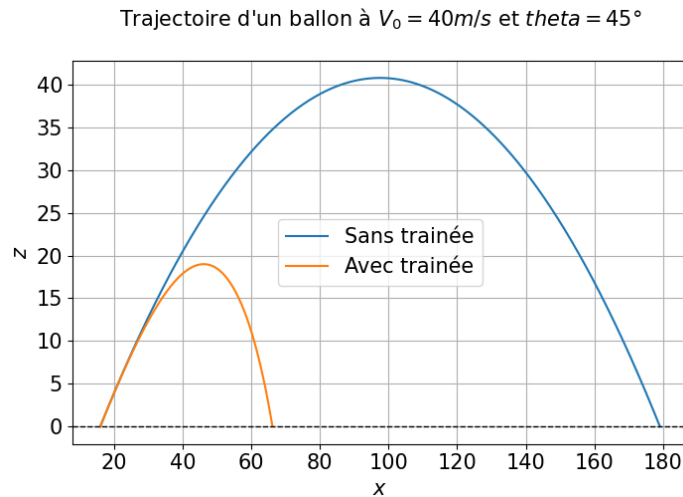


FIGURE 6 – Comparaison entre les trajectoires du ballon avec et sans traînée.

3 Trajectoire d'un vol sub-orbital et application au vol d'Alan Shepard

Dans le cas d'une fusée, il y a une force de poussée fournie par le moteur ainsi que de nouvelles données de variation, telles que :

- Les variations de densité de l'atmosphère avec l'altitude.
- Les variations de configuration aérodynamique et de masses lors de la séparation du lanceur, du déploiement des parachutes, etc.
- La consommation de carburant allégeant progressivement la fusée.

Compte-tenu de la faible distance horizontale parcourue par l'engin, on négligera cependant la courbure de la Terre et on restera en référentiel cartésien. On néglige également les variations de \vec{g} avec l'altitude. Le PFD donne :

$$\frac{d(\vec{p})}{dt} = \vec{p} + \vec{f} + \vec{F}$$

avec $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$

3.1 Modélisation de l'atmosphère

On dispose d'un modèle d'atmosphère pour calculer la température et la densité atmosphérique en fonction de l'altitude.

- Pour une couche où T varie linéairement :

$$\frac{dT}{dz} = C^{\text{ste}} = \lambda_g \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} T(z) = T_b + \lambda_g \cdot (z - z_b) \\ \rho(z) = \rho_b \cdot \left(\frac{T_b}{T(z)} \right)^{1 + \frac{\beta}{\lambda_g}} \end{cases}$$

- Pour une couche où T est constante :

$$\frac{dT}{dz} = 0 = \lambda_g \Rightarrow \begin{cases} T(z) = T_b \\ \rho(z) = \rho_b \cdot e^{-\left(\frac{\beta(z-z_b)}{T(z)} \right)} \end{cases}$$

avec β le gradient adiabatique sec et λ_g le gradient de température.

Ces relations sont implémentées dans les fonctions Python $T(z)$ pour la température et $\rho(z)$ pour la densité, selon les caractéristiques du modèle standard d'atmosphère.

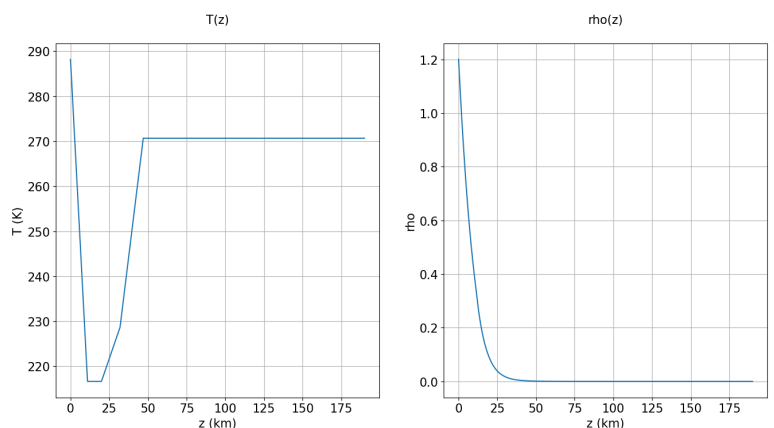


FIGURE 7 – Evolution de la température en fonction de l'altitude.

On souhaite montrer l'influence de l'altitude de départ, autrement dit de la densité atmosphérique, sur la trajectoire d'un tir de ballon. Le plus haut sommet du monde, l'Everest, atteint 8.849 km d'altitude. Pour simplifier on supposera que son altitude est ≈ 9 km.

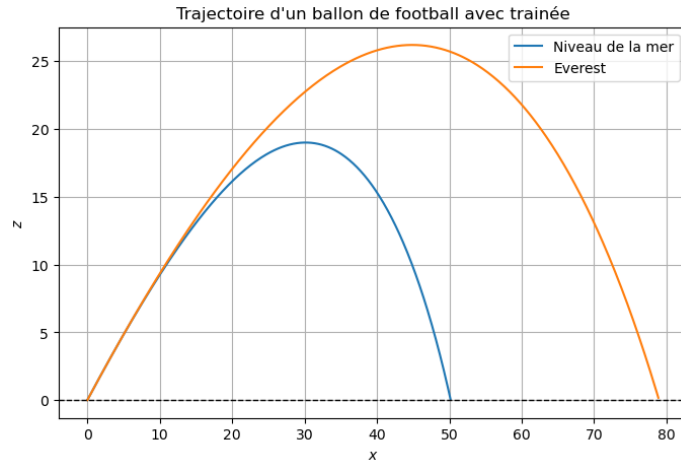


FIGURE 8 – Evolution de la trajectoire en fonction de l'altitude de départ.

3.2 Déroulé du vol

Le 5 mai 1961, Alan Shepard réalise le premier vol suborbital américain à bord de la capsule Mercury-Redstone. Le vol dure 15 minutes 22 secondes, atteint 187.5 km d'altitude et parcourt 487 km.

3.2.1 Phase de poussée

La fusée décolle verticalement et à $t = 28\text{ s}$ les gaz sont dirigés (et donc la poussée) de telle façon que le vecteur accélération fait un angle de 45° par rapport à l'horizontale. Le PFD donne :

$$m \frac{d\vec{V}}{dt} + \vec{V} \frac{dm}{dt} = m \cdot \vec{g} - f\vec{V} + \dot{m}_e \cdot (\vec{V}_e + \vec{V})$$

Or $\frac{dm}{dt} = \dot{m}_e$. Soit :

$$m \frac{d\vec{V}}{dt} = m \cdot \vec{g} - f\vec{V} + \dot{m}_e \cdot \vec{V}_e + \dot{m}_e \vec{V} - \dot{m}_e \vec{V}$$

Donc :

$$m \frac{d\vec{V}}{dt} = m \cdot \vec{g} - f\vec{V} + \dot{m}_e \cdot V_e \cdot \vec{u}_e$$

D'où :

$$\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{f}{m} \dot{x} - \frac{\dot{m}_e \cdot V_e}{m} \cos \phi \\ -g - \frac{f}{m} \dot{z} - \frac{\dot{m}_e \cdot V_e}{m} \sin \phi \end{pmatrix}$$

On cherche à déterminer l'angle ϕ formé par le vecteur \vec{u}_e avec l'axe x .

Afin de satisfaire la condition sur \vec{a} , on a $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\ddot{z}}{\ddot{x}} = 1$.

On égalise donc les deux composantes de l'accélération :

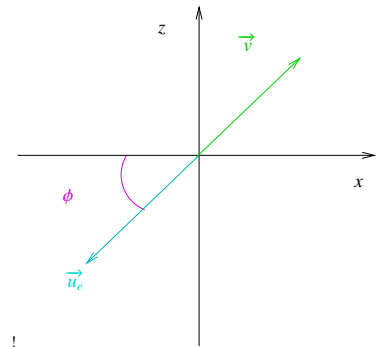
$$-\frac{f}{m} \dot{x} - \frac{\dot{m}_e \cdot V_e}{m} \cos \phi = -g - \frac{f}{m} \dot{z} - \frac{\dot{m}_e \cdot V_e}{m} \sin \phi$$

$$\cos \phi = \frac{m}{\dot{m}_e \cdot V_e} \cdot g + \frac{f}{\dot{m}_e \cdot V_e} (\dot{z} - \dot{x}) + \sin \phi$$

On pose $\alpha = \frac{m}{\dot{m}_e \cdot V_e} \cdot g + \frac{f}{\dot{m}_e \cdot V_e} (\dot{z} - \dot{x})$

On obtient donc :

$$\sin \phi - \cos \phi + \alpha = 0$$

FIGURE 9 – Vecteur \vec{u}_e

On résout cette équation avec la fonction `fsolve` de `scipy.optimize` et on l'intègre dans la fonction `fusee1` définissant notre système d'équations différentielles qu'on intègre numériquement avec `scipy.integrate.odeint`.

3.2.2 Phase balistique

A la fin de la poussée, soit à $t = 143.5 \text{ s}$, la tour d'éjection d'urgence est larguée et la capsule Mercury est séparée .

$$\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{f}{m} \dot{x} \\ -g - \frac{f}{m} \dot{z} \end{pmatrix}$$

La trajectoire est intégrée dans une fonction `fusee2`, en tenant compte uniquement de la gravité et de la traînée, dont le coefficient C_x dépend du nombre de Mach M .

$$C_x \approx \begin{cases} 1.5 & \text{si } M \geq 1 \\ 0.9 & \text{si } M < 1 \end{cases}$$

avec $M = \frac{V}{V_s}$, V_s étant la vitesse du son.

En considérant l'air comme un gaz parfait, V_s ne dépend que de la température : $V_s = \sqrt{\gamma R_s T}$, avec $\gamma = 1.4$ et $R_s = 287 \text{ J/(kg} \cdot \text{K)}$.

Le déploiement du parachute est détecté lorsque l'altitude atteint $h_1 = 6.7 \text{ km}$.

3.2.3 Phase de descente sous parachute

Le parachute pilote (2 m de diamètre) se déploie à une altitude de $h_1 = 6.7 \text{ km}$ lors de la rentrée atmosphérique, suivi par le déploiement du parachute principal (19 m de diamètre) à $h_2 = 3 \text{ km}$ d'altitude, les deux parachutes ayant un coefficient de traînée de 1.75.

La phase de descente sous parachute est simulée par la fonction `fusee3`, où la surface de freinage dans f change lorsque l'altitude passe sous h_2 . La trajectoire est intégrée jusqu'à l'atterrissage.

3.3 Résultats de la simulation

La trajectoire simulée montre les trois phases attendues du vol Mercury-Redstone 3 : la montée propulsée jusqu'à 60 km, une phase balistique atteignant environ 160 km d'altitude, puis la descente freinée par les parachutes.

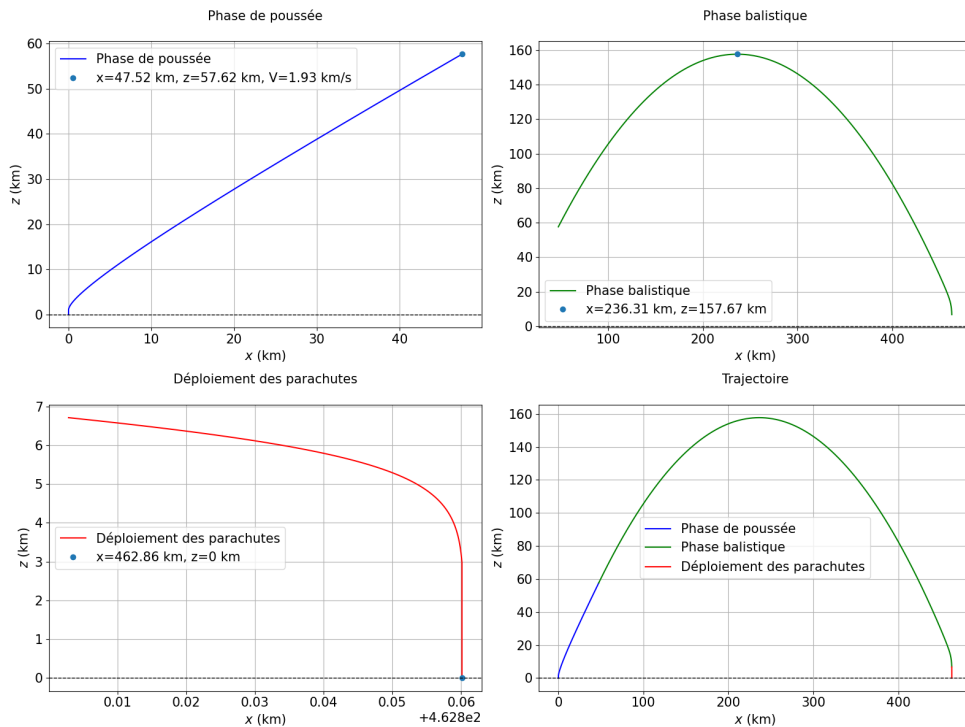


FIGURE 10 – Trajectoire de Mercury-Redstone.

La portée simulée est très proche des 487 km réels (4.96 % d'erreur relative), mais l'altitude maximale est légèrement sous-estimée par rapport aux 187.5 km (15.91 %) annoncés. La simulation reproduit néanmoins fidèlement le déroulement global du vol.

Quant à l'évolution de l'accélération subie par Alan Shepard au cours du vol ; on distingue un premier pic à 5 g en fin de poussée, puis un second pic plus important à 9.4 g lors de la rentrée atmosphérique. Ces valeurs restent réalistes, les sources mentionnant une accélération maximale de 6 g pour la poussée et 11 g à la rentrée atmosphérique. Le dernier gros pic est très probablement non physique et dû à un problème numérique dans la simulation (division par une petite valeur proche de zéro dans le calcul de l'accélération).

La durée totale du vol simulé est d'environ 16 minutes et 6 secondes, assez proche des 15 minutes et 22 secondes du vol réel (4.77% d'erreur relative). Ces résultats valident le scénario global et les contraintes physiques du vol Mercury-Redstone 3.

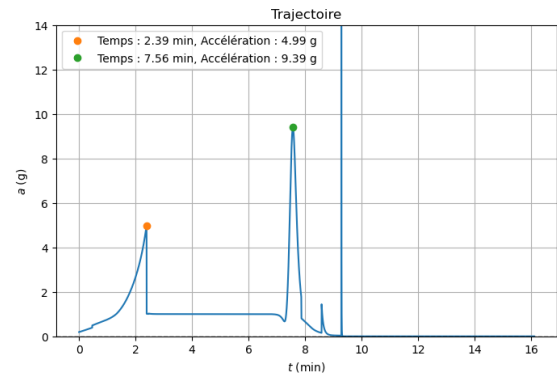


FIGURE 11 – Accélération subie par Mercury-Redstone.

4 Conclusion

Les résultats obtenus sont globalement cohérents avec les données du vol réel, en particulier la portée horizontale qui est bien reproduite. Toutefois, l'altitude maximale est sous-estimée d'environ 15% et la durée du vol est légèrement surestimée de 5%. Ces écarts peuvent s'expliquer par plusieurs limites du modèle utilisé.

- Le modèle suppose une poussée constante et une orientation fixe du vecteur poussée à 45° après 28 s, alors qu'en réalité la direction est ajustée en continu pour optimiser la trajectoire.
- Il faut également souligner que les variations réelles de la poussée avec l'altitude, les effets de rétro-fusées ou les manœuvres de stabilisation ne sont pas pris en compte.
- Ensuite, on a considéré des coefficients de traînée fixes par régime de vol, ce qui reste une approximation. En réalité, ces coefficients évoluent de manière continue selon la vitesse, la forme de la capsule et les conditions de rentrée atmosphérique.
- Enfin, le modèle atmosphérique est idéalisé et ne tient pas compte des variations locales de température, vent ou densité, qui influencent pourtant la trajectoire réelle.

Malgré ces simplifications, le déroulement global du vol est bien reproduit, ce qui montre que le modèle capture les bases physiques d'un vol suborbital.

Références

- Bishop, R. H. 2010, *Orbital Mechanics for Engineering Students*, 2nd edn. (Butterworth-Heinemann)
- Jean, P. 1981, *Dynamique des systèmes ouverts. Mouvement d'une fusée*, <https://materiel-physique.ens-lyon.fr/Logiciels/CD%20N%C2%B0%203%20BUP%20DOC%20V%204.0/Disk%202/TEXTES/1981/06310647.PDF>
- NASA. 2019, *NASA's Mercury Redstone 3 - Freedom 7 Launch (Alan Shepard)*, NASA Official YouTube Channel, YouTube video, <https://www.youtube.com/watch?v=JjAKmhSCjyg>
- Wikipedia contributors. 2024, *Mercury-Redstone 3*, https://fr.wikipedia.org/wiki/Mercury-Redstone_3
- Wikipédia contributors. 2024, *Gradient adiabatique*, https://fr.wikipedia.org/wiki/Gradient_adiabatique