Ein Kozykel-Modell für den äquivarianten Chern-Charakter und differenzielle äquivariante K-Theorie.

Eric Schlarmann

Dissertationsprüfung am

9. Juli 2020

Outline

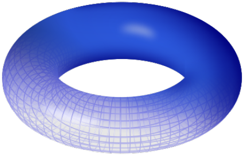
1 Differenzielle Kohomologietheorien

2 Geometrische klassifizierende Räume

Was ist Differenzielle K-Theorie?

Als Geometer studieren wir glatte Mannigfaltigkeiten. Häufig nutzen wir dabei Werkzeuge der Topologie.

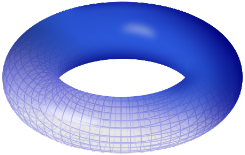
- (Ko-)Homologietheorien
- Homotopiegruppen
- …



Was ist Differenzielle K-Theorie?

Als Geometer studieren wir glatte Mannigfaltigkeiten. Häufig nutzen wir dabei Werkzeuge der Topologie.

- (Ko-)Homologietheorien
- Homotopiegruppen
- …



Aber:

Glatte Struktur wird von diesen Werkzeugen ignoriert!

Kohomologietheorien

Sind Familien von Funktoren Mfd $\to$ Grp mit Eigenschaften

- Mayer-Vietoris Sequenz
- $\coprod$ wird zu $\prod$
- Homotopieinvarianz

Beispiele

- H^*: De Rham Kohomologie
- K^*: K-Theorie
- MU^*: Komplexer Bordismus
- …

Differenzielle Kohomologietheorien

Sind Familien von Funktoren Mfd $\to$ Grp mit Eigenschaften

- Mayer-Vietoris Sequenz
- $\coprod$ wird zu $\prod$
- ~~Homotopieinvarianz~~

Beispiele

- $\hat{H}^*$: Differenzielle De Rham Kohomologie
- $\hat{K}^*$: Differenzielle K-Theorie
- $\widehat{MU}^*$: Differenzieller Komplexer Bordismus
- …

Klassische Definition

Für jede glatte Mannigfaltigkeit M fordern wir ein kommutatives Diagram

$$\begin{tikzcd} \hat{K}^*(M) \arrow[r, "I"] \arrow[d, "R"] & K^*(M) \arrow[d, "\mathrm{ch}"] \\ \Omega^*_{\mathrm{d}=0}(M) \arrow[r, "\mathrm{Rham}"] & H^*(M), \end{tikzcd}$$

sowie eine exakte Sequenz

$$\begin{tikzcd} K^{*-1}(M) \arrow[r, "\mathrm{ch}"] & \Omega^{*-1}(M)/\mathrm{im}(\mathrm{d}) \arrow[r, "a"] \arrow[dr, "\mathrm{d}"] & \hat{K}^*(M) \arrow[r, "I"] \arrow[d, "R"] & K^*(M) \arrow[r] & 0 \\ & & \Omega^*_{\mathrm{d}=0}(M) & & \end{tikzcd}$$

Sei G eine endliche Gruppe und M eine G-Mannigfaltigkeit. Dann gibt es nach Atiyah eine äquivariante Version von K-Theorie.

Motto: Ersetze Vektorbündel durch äquivariante G-Vektorbündel!

Sei G eine endliche Gruppe und M eine G-Mannigfaltigkeit. Dann gibt es nach Atiyah eine äquivariante Version von K-Theorie.

Motto: Ersetze Vektorbündel durch äquivariante G-Vektorbündel!

Frage

Kann man auch eine äquivariante Version von *differenzieller* K-Theorie definieren?

Äquivariante Version, 1. Versuch

$$\begin{tikzcd}
\color{red}{\hat{K}_G^*(M)} \arrow[r, red, "I"] \arrow[d, red, "R"] & K_G^*(M) \arrow[d, "\mathrm{ch}"] \\
\Omega^*_{G,\mathrm{d}=0}(M) \arrow[r, "\mathrm{Rham}"] & H_G^*(M),
\end{tikzcd}$$

Äquivariante Version, 1. Versuch

$$\begin{tikzcd}
\hat{K}_G^*(M) \arrow[r, "I"] \arrow[d, "R"] & K_G^*(M) \arrow[d, "\mathrm{ch}"] \\
\Omega^*_{G,\mathrm{d}=0}(M) \arrow[r, "\mathrm{Rham}"] & H_G^*(M),
\end{tikzcd}$$

Aber:

Borel äquivariante Kohomologie ist kein gutes Ziel für den Chern Charakter!

Erinnerung:

Verkleben von K-Theorie Klassen mit Differenzialformen über den Chern Charakter.

Der Delokalisierte Chern Charakter

Nach Baum und Connes gibt es eine Möglichkeit, die (rationale) Isomorphieeigenschaft wieder herzustellen.

Delokalisierte Kohomologie

$$H^0_{\text{delok}}(M) = \left(\bigoplus_{g \in G} \prod_{k \in \mathbb{N}} H^{2k}(M^g; \mathbb{C}) \right)^G \quad \text{und}$$

$$H^1_{\text{delok}}(M) = \left(\bigoplus_{g \in G} \prod_{k \in \mathbb{N}} H^{2k+1}(M^g; \mathbb{C}) \right)^G .$$

und es gibt einen Chern Charakter Isomorphismus

$$K^*_G(M) \otimes \mathbb{C} \xrightarrow{\mathrm{ch}_{\text{delok}}} H^*_{\text{delok}}(M)$$

Äquivariante Version, 2. Versuch

$$\begin{tikzcd}
\hat{K}_G^*(M) \arrow[r, "I"] \arrow[d, "R"] & K_G^*(M) \arrow[d, "\mathrm{ch}_{\mathrm{delok}}"] \\
\Omega^*_{\mathrm{delok},\mathrm{d}=0}(M) \arrow[r, "\mathrm{Rham}"] & H^*_{\mathrm{delok}}(M),
\end{tikzcd}$$

Äquivariante Version, 2. Versuch

$$\begin{tikzcd}
{\color{red}\hat{K}^*_G(M)} \arrow[r, red, "I"] \arrow[d, red, "R"] & K^*_G(M) \arrow[d, "\mathrm{ch}_{\mathrm{delok}}"] \\
\Omega^*_{\mathrm{delok,d=0}}(M) \arrow[r, "\mathrm{Rham}"] & H^*_{\mathrm{delok}}(M),
\end{tikzcd}$$

Eine solche Theorie $\hat{K}^*_G$ würde wie im nicht äquivarianten Fall den K-Theorie Funktor differenzialgeometrisch verfeinern!

Wie konstruiert man einen geeigneten Funktor $\hat{K}^*_G$?

Eine wichtige Eigenschaft von äquivarianten Kohomologietheorien ist ihre *Darstellbarkeit* durch ein Spektrum. Im Fall von K-Theorie gibt es eine sehr konkrete Beschreibung von Atiyah, die Räume von Fredholmoperatoren nutzt.

Eine wichtige Eigenschaft von äquivarianten Kohomologietheorien ist ihre *Darstellbarkeit* durch ein Spektrum. Im Fall von K-Theorie gibt es eine sehr konkrete Beschreibung von Atiyah, die Räume von Fredholmoperatoren nutzt.

$$K_G^0(M) \cong [M, \mathscr{F}_0]_G$$
$$K_G^1(M) \cong [M, \mathscr{F}_1]_G,$$

wobei $\mathscr{F}_i \subset \mathrm{Fred}(\mathcal{H} \otimes L^2(G))$ geeignete Unterräume in der Norm Topologie mit Konjugationswirkung.

Eine wichtige Eigenschaft von äquivarianten Kohomologietheorien ist ihre *Darstellbarkeit* durch ein Spektrum. Im Fall von K-Theorie gibt es eine sehr konkrete Beschreibung von Atiyah, die Räume von Fredholmoperatoren nutzt.

$$K_G^0(M) \cong [M, \mathscr{F}_0]_G$$
$$K_G^1(M) \cong [M, \mathscr{F}_1]_G,$$

wobei $\mathscr{F}_i \subset \mathrm{Fred}(\mathcal{H} \otimes L^2(G))$ geeignete Unterräume in der Norm Topologie mit Konjugationswirkung.

Idee: Die universellen Räume $\mathscr{F}_i$ enthalten jeweils eine *universelle* K-Theorie Klasse, welche wir entlang Abbildungen zurückziehen.

Eine differenzielle K-Theorie Klasse ist grob gesagt eine K-Theorie Klasse, zusammen mit einem Differenzialform-Repräsentanten ihres Chern Charakters.

Wenn wir einen universellen Repräsentanten für den Chern Charakter finden, können wir also möglicherweise differenzielle K-Theorie klassifizieren!

Die erste Definition von differenzieller Kohomologie nach Hopkins und Singer nutzt solche universellen Kozykel, um Existenz differenzieller Kohomologietheorien allgemein zu zeigen!

Aber: Diese Kozykel sind abstrakt gewählt und haben keine geometrische Bedeutung!

Arbeiten von Segal, Quillen und Freed beschäftigen sich mit unendlich dimensionalen Mannigfaltigkeiten, um den universellen Chern Charakter zu beschreiben.

Arbeiten von Segal, Quillen und Freed beschäftigen sich mit unendlich dimensionalen Mannigfaltigkeiten, um den universellen Chern Charakter zu beschreiben.

Definition

Die eingeschränkte Grassmann Mannigfaltigkeit $\mathrm{Gr}_{\mathrm{res}}$ ist der Raum aller Unterräume $W \subset \mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{H}_-$, sodass

- $\pi_+ : W \to \mathcal{H}_+$ ein Fredholm Operator ist.
- $\pi_- : W \to \mathcal{H}_-$ ein Hilbert–Schmidt Operator ist.

Arbeiten von Segal, Quillen und Freed beschäftigen sich mit unendlich dimensionalen Mannigfaltigkeiten, um den universellen Chern Charakter zu beschreiben.

Definition

Die eingeschränkte Grassmann Mannigfaltigkeit $\mathrm{Gr}_{\mathrm{res}}$ ist der Raum aller Unterräume $W \subset \mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{H}_-$, sodass

- $\pi_+ : W \to \mathcal{H}_+$ ein Fredholm Operator ist.
- $\pi_- : W \to \mathcal{H}_-$ ein Hilbert–Schmidt Operator ist.

Definition

Die eingeschränkte unitäre Gruppe U^1 ist der Raum aller beschränkten unitären Operatoren P auf $\mathcal{H}_+$, sodass $P - \mathrm{id}$ ein Spurklasseoperator ist.

Auf diesen Räumen gibt es spezielle Lie-Algebra-wertige Differenzialformen.

- Die Krümmungsform auf dem universellen Bündel $R \in \Omega^2(\mathrm{Gr}_{\mathrm{res}}; L^2)$.
- Die Maurer–Cartan Form $\omega \in \Omega^1(\mathrm{U}^1; L^1)$.

Diese Formen sind kompatibel mit ihren endlich dimensionalen Versionen!

$$\mathrm{Gr}_k(\mathbb{C}^{2N}) \hookrightarrow \mathrm{Gr}_{\mathrm{res}}$$
$$\mathrm{U}(N) \hookrightarrow \mathrm{U}^1$$

Der Äquivariante Chern Charakter

Theorem (Sch.)

Die folgenden Differenzialformen sind de Rham Repräsentanten des universellen delokalisierten Chern Charakters:

$$\mathrm{ch}_0 = \bigoplus_{g\in G} \mathrm{tr}\left(g\exp\left(\frac{i}{2\pi}R_g\right)\right).$$

$$\mathrm{ch}_1 = \bigoplus_{g\in G} \sum_{k\geq 1} \left(\frac{i}{2\pi}\right)^k \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(2k-1)!}\mathrm{tr}\left(g\left(\omega_g\right)^{2k-1}\right),$$

wobei R_g und ω_g die Einschränkungen der Differenzialformen auf die Fixpunkt Untermannigfaltigkeiten $(\mathrm{Gr}_{\mathrm{res}})^g$ und $(\mathrm{U}^1)^g$ sind.

Zusätzliche Struktur

Die Mannigfaltigkeiten $\mathrm{Gr}_{\mathrm{res}}$ und U^1 besitzen beide eine geometrische Blocksummenoperation!

Zusätzliche Struktur

Die Mannigfaltigkeiten $\mathrm{Gr}_{\mathrm{res}}$ und U^1 besitzen beide eine geometrische Blocksummenoperation!

Blocksumme

$$\boxplus \colon \mathrm{Gr}_{\mathrm{res}} \times \mathrm{Gr}_{\mathrm{res}} \to \mathrm{Gr}_{\mathrm{res}}$$
$$\boxplus \colon \mathrm{U}^1 \times \mathrm{U}^1 \to \mathrm{U}^1,$$

korrespondieren zur direkten Summe von Untervektorräumen bzw. Blocksumme von Matrizen.

Zusätzliche Struktur

Die Mannigfaltigkeiten $\mathrm{Gr}_{\mathrm{res}}$ und U^1 besitzen beide eine geometrische Blocksummenoperation!

Blocksumme

$$\boxplus\colon \mathrm{Gr}_{\mathrm{res}} \times \mathrm{Gr}_{\mathrm{res}} \to \mathrm{Gr}_{\mathrm{res}}$$
$$\boxplus\colon \mathrm{U}^1 \times \mathrm{U}^1 \to \mathrm{U}^1,$$

korrespondieren zur direkten Summe von Untervektorräumen bzw. Blocksumme von Matrizen.

Diese Operationen

- sind kompatibel mit dem Chern charakter.
- induzieren die Addition in K-Theorie.

Äquivariante Differenzielle K-Theorie

Definition/Theorem (Sch.)

$$\hat{K}^0_G(M) = \mathrm{Map}^G_{\mathrm{Smooth}}(M, \mathrm{Gr}_{\mathrm{res}}) \times \Omega^1_G(M)/\sim$$
$$\hat{K}^1_G(M) = \mathrm{Map}^G_{\mathrm{Smooth}}(M, \mathrm{U}^1) \times \Omega^0_G(M)/\sim,$$

mit der Äquivalenzrelation $(f_1, \omega_1) \sim (f_0, \omega_0)$, falls es eine glatte G-Homotopie f_t von f_0 zu f_1 gibt, sodass

$$\mathrm{CS}_G(f_t) = \omega_1 - \omega_0 + \text{exakt}.$$

Außerdem identifizieren wir Stabilisierungen mit der konstanten Abbildung auf den Basispunkt:

$$(f, \omega) \sim (f \boxplus 1, \omega).$$

Cycle maps