Ein Kozykel-Modell für den äquivarianten Chern-Charakter und differenzielle äquivariante K-Theorie.

Eric Schlarmann

Dissertationsprüfung am

9. Juli 2020

Was ist Differenzielle K-Theorie?

Was ist Differenzielle K-Theorie?

Kohomologietheorien

Sind Familien von Funktoren Mfd $\to$ AbGrp mit Eigenschaften

- Mayer-Vietoris Sequenz
- $\coprod$ wird zu $\prod$
- Homotopieinvarianz

Was ist Differenzielle K-Theorie?

Kohomologietheorien

Sind Familien von Funktoren Mfd $\to$ AbGrp mit Eigenschaften

- Mayer-Vietoris Sequenz
- $\coprod$ wird zu $\prod$
- Homotopieinvarianz

Beispiele

- H^*: De Rham Kohomologie
- K^*: K-Theorie
- MU^*: Komplexer Bordismus
- …

Was ist Differenzielle K-Theorie?

Differenzielle Kohomologietheorien

Sind Familien von Funktoren Mfd $\to$ AbGrp mit Eigenschaften

- Mayer-Vietoris Sequenz
- $\coprod$ wird zu $\prod$
- ~~Homotopieinvarianz~~

Beispiele

- $\hat{H}^*$: Differenzielle De Rham Kohomologie
- $\hat{K}^*$: Differenzielle K-Theorie
- $\widehat{MU}^*$: Differenzieller Komplexer Bordismus
- …

Für jede glatte Mannigfaltigkeit M fordern wir ein kommutatives Diagram

$$\begin{tikzcd} \hat{K}^*(M) \arrow[r, "I"] \arrow[d, "R"] & K^*(M) \arrow[d, "\mathrm{ch}"] \\ \Omega^*_{\mathrm{d}=0}(M) \arrow[r, "\mathrm{Rham}"] & H^*(M), \end{tikzcd}$$

sowie eine exakte Sequenz

$$\begin{tikzcd} K^{*-1}(M) \arrow[r, "\mathrm{ch}"] & \Omega^{*-1}(M)/\mathrm{im}(\mathrm{d}) \arrow[r, "a"] \arrow[dr, "\mathrm{d}"] & \hat{K}^*(M) \arrow[r, "I"] \arrow[d, "R"] & K^*(M) \arrow[r] & 0 \\ & & \Omega^*_{\mathrm{d}=0}(M) & & \end{tikzcd}$$

Äquivariantes Setting

Sei G eine endliche Gruppe und M eine G-Mannigfaltigkeit. Dann gibt es nach Atiyah und Segal eine äquivariante Version von K-Theorie.

Motto: Ersetze Vektorbündel durch äquivariante G-Vektorbündel!

Frage

Kann man die Axiome anpassen, um eine äquivariante Version der *differenziellen* K-Theorie definieren?

Äquivariante Version, 1. Versuch

$$\begin{tikzcd} \hat{K}_G^*(M) \arrow[r, "I"] \arrow[d, "R"] & K_G^*(M) \arrow[d, "\mathrm{ch}_G"] \\ (\Omega^*_{\mathrm{d}=0}(M))^G \arrow[r, "\mathrm{Rham}"] & H_G^*(M), \end{tikzcd}$$

wobei $\mathrm{ch}_G(E) = \mathrm{ch}(EG \times_G E \to EG \times_G M)$.

Äquivariante Version, 1. Versuch

$$\begin{tikzcd}
\hat{K}_G^*(M) \arrow[r, "I"] \arrow[d, "R"] & K_G^*(M) \arrow[d, "\mathrm{ch}_G"] \\
(\Omega^*_{\mathrm{d}=0}(M))^G \arrow[r, "\mathrm{Rham}"] & H_G^*(M),
\end{tikzcd}$$

wobei $\mathrm{ch}_G(E) = \mathrm{ch}(EG \times_G E \to EG \times_G M)$.

Aber: Borel äquivariante Kohomologie ist kein gutes Ziel für den Chern Charakter!

Erinnerung:

Verkleben von K-Theorie Klassen mit Differenzialformen über den Chern Charakter.

Der Delokalisierte Chern Charakter

Nach Baum und Connes gibt es eine Möglichkeit, die (rationale) Isomorphieeigenschaft wieder herzustellen.

Delokalisierte Kohomologie

$$H^0_{\text{delok}}(M) = \left(\bigoplus_{g \in G} \prod_{k \in \mathbb{N}} H^{2k}(M^g; \mathbb{C}) \right)^G \quad \text{und}$$

$$H^1_{\text{delok}}(M) = \left(\bigoplus_{g \in G} \prod_{k \in \mathbb{N}} H^{2k+1}(M^g; \mathbb{C}) \right)^G .$$

und es gibt einen Chern Charakter Isomorphismus

$$K^*_G(M) \otimes \mathbb{C} \xrightarrow{\text{ch}_{\text{delok}}} H^*_{\text{delok}}(M)$$

Äquivariante Version, 2. Versuch

$$\begin{tikzcd}
\hat{K}^*_G(M) \arrow[r, "I"] \arrow[d, "R"] & K^*_G(M) \arrow[d, "\mathrm{ch}_{\mathrm{delok}}"] \\
\Omega^*_{\mathrm{delok},\mathrm{d}=0}(M) \arrow[r, "\mathrm{Rham}"] & H^*_{\mathrm{delok}}(M)
\end{tikzcd}$$

Äquivariante Version, 2. Versuch

$$
\begin{tikzcd}
\hat{K}_G^*(M) \arrow[r, "I"] \arrow[d, "R"] & K_G^*(M) \arrow[d, "\mathrm{ch}_{\mathrm{delok}}"] \\
\Omega^*_{\mathrm{delok,d=0}}(M) \arrow[r, "\mathrm{Rham}"] & H^*_{\mathrm{delok}}(M)
\end{tikzcd}
$$

Eine solche Theorie $\hat{K}_G^*$ würde wie im nicht äquivarianten Fall den K_G-Theorie Funktor differenzialgeometrisch verfeinern!

Wie konstruiert man einen geeigneten Funktor $\hat{K}_G^*$?

K-Theorie über ein Spektrum

Theorem (Atiyah)

$$K_G^0(M) \cong [M, \mathscr{F}_0]_G$$
$$K_G^1(M) \cong [M, \mathscr{F}_1]_G,$$

wobei $\mathscr{F}_i \subset \mathrm{Fred}(\mathcal{H} \otimes L^2(G))$ geeignete Unterräume in der Norm Topologie mit Konjugationswirkung.

Idee: Die universellen Räume $\mathscr{F}_i$ besitzen jeweils eine *universelle* K-Theorie Klasse, welche wir entlang von Abbildungen zurückziehen. ("Indexbündel")

Eine differenzielle K-Theorie Klasse besteht aus

- einer K-Theorie Klasse x
- einem Differenzialform-Repräsentanten ihres Chern Charakters $\mathrm{Ch}(x)$.

Eine differenzielle K-Theorie Klasse besteht aus

- einer K-Theorie Klasse x
- einem Differenzialform-Repräsentanten ihres Chern Charakters $\mathrm{Ch}(x)$.

Wenn wir einen universellen Repräsentanten für den Chern Charakter finden, können wir also möglicherweise differenzielle K-Theorie klassifizieren!

Auf Atiyahs Räumen von Fredholm Operatoren sind bis heute allerdings keine konkreten geometrischen Repräsentanten bekannt.

$\Rightarrow$ Wir brauchen bessere Modelle von den klassifizierenden Räumen!

Arbeiten von Segal, Quillen und Freed beschäftigen sich mit unendlich dimensionalen Mannigfaltigkeiten, um den universellen Chern Charakter zu beschreiben.

Arbeiten von Segal, Quillen und Freed beschäftigen sich mit unendlich dimensionalen Mannigfaltigkeiten, um den universellen Chern Charakter zu beschreiben.

Definition

Die eingeschränkte Grassmann Mannigfaltigkeit $\mathrm{Gr}_{\mathrm{res}}$ ist der Raum aller Unterräume $W \subset \mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{H}_-$, sodass

- $\pi_+ : W \to \mathcal{H}_+$ ein Fredholm Operator ist.
- $\pi_- : W \to \mathcal{H}_-$ ein Hilbert–Schmidt Operator ist.

Arbeiten von Segal, Quillen und Freed beschäftigen sich mit unendlich dimensionalen Mannigfaltigkeiten, um den universellen Chern Charakter zu beschreiben.

Definition

Die eingeschränkte Grassmann Mannigfaltigkeit $\mathrm{Gr}_{\mathrm{res}}$ ist der Raum aller Unterräume $W \subset \mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{H}_-$, sodass

- $\pi_+ : W \to \mathcal{H}_+$ ein Fredholm Operator ist.
- $\pi_- : W \to \mathcal{H}_-$ ein Hilbert–Schmidt Operator ist.

Definition

Die eingeschränkte unitäre Gruppe U^1 ist der Raum aller beschränkten unitären Operatoren P auf $\mathcal{H}_+$, sodass $P - \mathrm{id} \in L^1$ ein Spurklasseoperator ist.

Klassifizierende Räume für K-Theorie

Theorem

Für jede glatte G-Mannigfaltigkeit ist

$$([M, \mathrm{Gr}_{\mathrm{res}}]_G, \boxplus) \cong K^0_G(M)$$
$$([M, \mathrm{U}^1]_G, \boxplus) \cong K^1_G(M)$$

wobei die Blocksummenoperation

$$\boxplus \colon \mathrm{Gr}_{\mathrm{res}} \times \mathrm{Gr}_{\mathrm{res}} \to \mathrm{Gr}_{\mathrm{res}}$$
$$\boxplus \colon \mathrm{U}^1 \times \mathrm{U}^1 \to \mathrm{U}^1,$$

der Summe von Untervektorräumen bzw. Blocksumme von Matrizen entspricht.

Auf $\mathrm{Gr}_{\mathrm{res}}$ und U^1 existieren (per Konstruktion!) spezielle Lie-Algebra-wertige Differenzialformen:

- Die Krümmungsform auf dem universellen Bündel $R \in \Omega^2(\mathrm{Gr}_{\mathrm{res}}; L^1)$.
- Die Maurer–Cartan Form $\omega \in \Omega^1(\mathrm{U}^1; L^1)$.

Auf $\mathrm{Gr}_{\mathrm{res}}$ und U^1 existieren (per Konstruktion!) spezielle Lie-Algebra-wertige Differenzialformen:

- Die Krümmungsform auf dem universellen Bündel $R \in \Omega^2(\mathrm{Gr}_{\mathrm{res}}; L^1)$.
- Die Maurer–Cartan Form $\omega \in \Omega^1(\mathrm{U}^1; L^1)$.

Theorem

Die folgenden Differenzialformen sind de Rham Repräsentanten des universellen delokalisierten Chern Charakters:

$$\mathrm{ch}_{\mathrm{even}} = \bigoplus_{g \in G} \mathrm{tr}\left(g \exp\left(\frac{i}{2\pi} R_g \right) \right).$$

$$\mathrm{ch}_{\mathrm{odd}} = \bigoplus_{g \in G} \sum_{k \geq 1} \left(\frac{i}{2\pi} \right)^k \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(2k-1)!} \mathrm{tr}\left(g \, (\omega_g)^{2k-1} \right)$$

Äquivariante Differenzielle K-Theorie

Definition/Theorem

Die Gruppen

$$\hat{K}_G^0(M) = \mathrm{Map}_{\mathrm{Smooth}}^G(M, \mathrm{Gr}_{\mathrm{res}}) \times \Omega^1_{\mathrm{delok}}(M) / \sim$$
$$\hat{K}_G^1(M) = \mathrm{Map}_{\mathrm{Smooth}}^G(M, \mathrm{U}^1) \times \Omega^0_{\mathrm{delok}}(M) / \sim,$$

definieren eine differenzielle Erweiterung.

Äquivariante Differenzielle K-Theorie

Definition/Theorem

Die Gruppen

$$\hat{K}^0_G(M) = \mathrm{Map}^G_{\mathrm{Smooth}}(M, \mathrm{Gr}_{\mathrm{res}}) \times \Omega^1_{\mathrm{delok}}(M)/\sim$$
$$\hat{K}^1_G(M) = \mathrm{Map}^G_{\mathrm{Smooth}}(M, \mathrm{U}^1) \times \Omega^0_{\mathrm{delok}}(M)/\sim,$$

definieren eine differenzielle Erweiterung. Hierbei ist $(f_1, \omega_1) \sim (f_0, \omega_0)$, falls es eine glatte G-Homotopie f_t von f_0 zu f_1 gibt, sodass

$$\mathrm{CS}_G(f_t) = \bigoplus_g \int_I \mathrm{Ch}(f_t) = \omega_1 - \omega_0 + \text{exakt}$$

Äquivariante Differenzielle K-Theorie

Definition/Theorem

Die Gruppen

$$\hat{K}^0_G(M) = \mathrm{Map}^G_{\mathrm{Smooth}}(M, \mathrm{Gr}_{\mathrm{res}}) \times \Omega^1_{\mathrm{delok}}(M) / \sim$$
$$\hat{K}^1_G(M) = \mathrm{Map}^G_{\mathrm{Smooth}}(M, \mathrm{U}^1) \times \Omega^0_{\mathrm{delok}}(M) / \sim,$$

definieren eine differenzielle Erweiterung. Hierbei ist $(f_1, \omega_1) \sim (f_0, \omega_0)$, falls es eine glatte G-Homotopie f_t von f_0 zu f_1 gibt, sodass

$$\mathrm{CS}_G(f_t) = \bigoplus_{g} \int_I \mathrm{Ch}(f_t) = \omega_1 - \omega_0 + \text{exakt}$$

Vermutung (Äquivariantes Venice-Lemma)

Sei

$$\mathrm{d}\omega \in \Omega^0_{\mathrm{delok}}(M) \qquad \text{oder} \qquad \mathrm{d}\omega \in \Omega^1_{\mathrm{delok}}(M)$$

eine exakte delokalisierte Differenzialform. Dann ist $\mathrm{d}\omega$ die Chern Form $f^*\mathrm{ch}$ einer nullhomotopen G-Abbildung

$$f\colon M \to \mathrm{Gr}_{\mathrm{res}} \quad \text{oder} \quad f\colon M \to \mathrm{U}^1.$$

Wenn das äquivariante Venice-Lemma gilt, so kann man stets auf Zykel (f, ω) mit $\omega = 0$ reduzieren. Somit ist in diesem Fall jede Klasse in $\hat{K}_G$ allein durch eine Abbildung f charakterisiert.

Zykelabbildungen (gerader Fall)

Ein Zykel für $K^0_G(M)$ ist ein G-Vektorbündel $E \to M$. Es gibt eine natürliche Transformation

$$\mathrm{cycl}\colon \mathrm{Vect}_G \to K^0_G,$$

die wir die *topologische Zykelabbildung* nennen.

Ein **geometrischer Lift** der topologischen Zykelabbildung ist eine natürliche Transformation

$$\widehat{\mathrm{cycl}}\colon \mathrm{Vect}^{\nabla}_G \to \hat{K}^0_G,$$

mit $R \circ \widehat{\mathrm{cycl}} = \mathrm{Ch}_G$ und $I \circ \widehat{\mathrm{cycl}} = \mathrm{cycl}$.

Zykelabbildungen sind nützlich, um Klassen in $\hat{K}_G$ explizit zu beschreiben!

Theorem (Existenz von Zykelabbildungen)

Die oben definierte differenzielle Erweiterung $\hat{K}_G^*$ besitzt sowohl eine gerade als auch eine ungerade geometrische Zykelabbildung.

Theorem (Äquivariante Eindeutigkeit)

Bis auf Isomorphie ist $\hat{K}_G^*$ die eindeutige differenzielle Erweiterung, die sowohl eine gerade, als auch eine ungerade Zykelabbildung zulässt.

Offene Fragen

- Kompakte Lie Gruppen / diskrete Gruppen?
- Explizite Cup Produkt Struktur auf $\hat{K}_G$?
- Explizite Pushforward / Indexabbildungen?
- Erweiterung auf unendlich-dimensionale Mannigfaltigkeiten?
- Mehr explizite Berechnungen!

Vielen Dank für eure Aufmerksamkeit!