Ein Kozykel-Modell für den äquivarianten Chern-Charakter und differenzielle äquivariante K-Theorie.

Eric Schlarmann

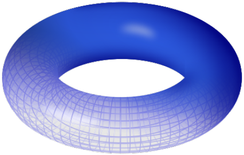
Dissertationsprüfung am

9. Juli 2020

Was ist Differenzielle K-Theorie?

Als Geometer studieren wir glatte Mannigfaltigkeiten. Häufig nutzen wir dabei Werkzeuge der Topologie.

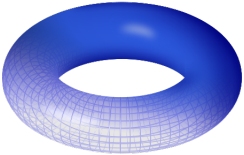
- (Ko-)Homologietheorien
- Homotopiegruppen
- …



Was ist Differenzielle K-Theorie?

Als Geometer studieren wir glatte Mannigfaltigkeiten. Häufig nutzen wir dabei Werkzeuge der Topologie.

- (Ko-)Homologietheorien
- Homotopiegruppen
- …



Aber:

Glatte Struktur wird von diesen Werkzeugen ignoriert!

Kohomologietheorien

Sind Familien von Funktoren Mfd $\to$ Grp mit Eigenschaften

- Mayer-Vietoris Sequenz
- $\coprod$ wird zu $\prod$
- Homotopieinvarianz

Beispiele

- H^*: De Rham Kohomologie
- K^*: K-Theorie
- MU^*: Komplexer Bordismus
- …

Differenzielle Kohomologietheorien

Sind Familien von Funktoren Mfd $\to$ Grp mit Eigenschaften

- Mayer-Vietoris Sequenz
- $\coprod$ wird zu $\prod$
- ~~Homotopieinvarianz~~

Beispiele

- $\hat{H}^*$: Differenzielle De Rham Kohomologie
- $\hat{K}^*$: Differenzielle K-Theorie
- $\widehat{MU}^*$: Differenzieller Komplexer Bordismus
- …

Klassische Definition

Für jede glatte Mannigfaltigkeit M fordern wir ein kommutatives Diagram

$$\begin{tikzcd} \hat{K}^*(M) \arrow[r, "I"] \arrow[d, "R"] & K^*(M) \arrow[d, "\mathrm{ch}"] \\ \Omega^*_{\mathrm{d}=0}(M) \arrow[r, "\mathrm{Rham}"] & H^*(M), \end{tikzcd}$$

sowie eine exakte Sequenz

$$\begin{tikzcd} K^{*-1}(M) \arrow[r, "\mathrm{ch}"] & \Omega^{*-1}(M)/\mathrm{im}(\mathrm{d}) \arrow[r, "a"] \arrow[dr, "\mathrm{d}"] & \hat{K}^*(M) \arrow[r, "I"] \arrow[d, "R"] & K^*(M) \arrow[r] & 0 \\ & & \Omega^*_{\mathrm{d}=0}(M) & & \end{tikzcd}$$

Sei G eine endliche Gruppe und M eine G-Mannigfaltigkeit. Dann gibt es nach Atiyah eine äquivariante Version von K-Theorie.

Motto: Ersetze Vektorbündel durch äquivariante G-Vektorbündel!

Sei G eine endliche Gruppe und M eine G-Mannigfaltigkeit. Dann gibt es nach Atiyah eine äquivariante Version von K-Theorie.

Motto: Ersetze Vektorbündel durch äquivariante G-Vektorbündel!

Frage

Kann man auch eine äquivariante Version von *differenzieller* K-Theorie definieren?

Äquivariante Version, 1. Versuch

$$
\begin{tikzcd}
\hat{K}^*_G(M) \arrow[r, "I"] \arrow[d, "R"] & K^*_G(M) \arrow[d, "\mathrm{ch}"] \\
\left(\Omega^*_{\mathrm{d}=0}(M)\right)^G \arrow[r, "\mathrm{Rham}"] & H^*_G(M),
\end{tikzcd}
$$

Äquivariante Version, 1. Versuch

$$\begin{tikzcd} \color{red}{\hat{K}^*_G(M)} \arrow[r, red, "I"] \arrow[d, red, "R"] & K^*_G(M) \arrow[d, "\mathrm{ch}"] \\ (\Omega^*_{\mathrm{d}=0}(M))^G \arrow[r, "\mathrm{Rham}"] & H^*_G(M), \end{tikzcd}$$

Aber:

Borel äquivariante Kohomologie ist kein gutes Ziel für den Chern Charakter!

Erinnerung:

Verkleben von K-Theorie Klassen mit Differenzialformen über den Chern Charakter.

Der Delokalisierte Chern Charakter

Nach Baum und Connes gibt es eine Möglichkeit, die (rationale) Isomorphieeigenschaft wieder herzustellen.

Delokalisierte Kohomologie

$$H^0_{\text{delok}}(M) = \left(\bigoplus_{g \in G} \prod_{k \in \mathbb{N}} H^{2k}(M^g; \mathbb{C}) \right)^G \quad \text{und}$$

$$H^1_{\text{delok}}(M) = \left(\bigoplus_{g \in G} \prod_{k \in \mathbb{N}} H^{2k+1}(M^g; \mathbb{C}) \right)^G .$$

und es gibt einen Chern Charakter Isomorphismus

$$K^*_G(M) \otimes \mathbb{C} \xrightarrow{\text{ch}_{\text{delok}}} H^*_{\text{delok}}(M)$$

Äquivariante Version, 2. Versuch

$$
\begin{tikzcd}
\hat{K}_G^*(M) \arrow[r, "I"] \arrow[d, "R"] & K_G^*(M) \arrow[d, "\mathrm{ch}_{\mathrm{delok}}"] \\
\Omega^*_{\mathrm{delok,d=0}}(M) \arrow[r, "\mathrm{Rham}"] & H^*_{\mathrm{delok}}(M),
\end{tikzcd}
$$

Äquivariante Version, 2. Versuch

$$\begin{tikzcd}
\color{red}{\hat{K}_G^*(M)} \arrow[r, red, "I"] \arrow[d, red, "R"] & K_G^*(M) \arrow[d, "\mathrm{ch}_{\mathrm{delok}}"] \\
\Omega^*_{\mathrm{delok,d=0}}(M) \arrow[r, "\mathrm{Rham}"] & H^*_{\mathrm{delok}}(M),
\end{tikzcd}$$

Eine solche Theorie $\hat{K}_G^*$ würde wie im nicht äquivarianten Fall den K_G-Theorie Funktor differenzialgeometrisch verfeinern!

Wie konstruiert man einen geeigneten Funktor $\hat{K}_G^*$?

K-Theorie über ein Spektrum

K-Theorie über ein Spektrum

Atiyah

$$K_G^0(M) \cong [M, \mathscr{F}_0]_G$$
$$K_G^1(M) \cong [M, \mathscr{F}_1]_G,$$

wobei $\mathscr{F}_i \subset \mathrm{Fred}(\mathcal{H} \otimes L^2(G))$ geeignete Unterräume in der Norm Topologie mit Konjugationswirkung.

K-Theorie über ein Spektrum

Atiyah

$$K^0_G(M) \cong [M, \mathscr{F}_0]_G$$
$$K^1_G(M) \cong [M, \mathscr{F}_1]_G,$$

wobei $\mathscr{F}_i \subset \mathrm{Fred}(\mathcal{H} \otimes L^2(G))$ geeignete Unterräume in der Norm Topologie mit Konjugationswirkung.

Idee: Die universellen Räume $\mathscr{F}_i$ enthalten jeweils eine *universelle* K-Theorie Klasse, welche wir entlang Abbildungen zurückziehen.

Eine differenzielle K-Theorie Klasse ist

Wir brauchen bessere Modelle von den klassifizierenden Räumen!

Eine differenzielle K-Theorie Klasse ist

- Eine K-Theorie Klasse x

Wir brauchen bessere Modelle von den klassifizierenden Räumen!

Eine differenzielle K-Theorie Klasse ist

- Eine K-Theorie Klasse x
- Ein Differenzialform-Repräsentant ihres Chern Charakters $\mathrm{Ch}(x)$.

Wir brauchen bessere Modelle von den klassifizierenden Räumen!

Eine differenzielle K-Theorie Klasse ist

- Eine K-Theorie Klasse x
- Ein Differenzialform-Repräsentant ihres Chern Charakters $\mathrm{Ch}(x)$.

Wenn wir einen universellen Repräsentanten für den Chern Charakter finden, können wir also möglicherweise differenzielle K-Theorie klassifizieren!

Auf Atiyahs Räumen von Fredholm Operatoren sind bis heute allerdings keine konkreten geometrischen Repräsentanten bekannt.

$\Rightarrow$ Wir brauchen bessere Modelle von den klassifizierenden Räumen!

Arbeiten von Segal, Quillen und Freed beschäftigen sich mit unendlich dimensionalen Mannigfaltigkeiten, um den universellen Chern Charakter zu beschreiben.

Arbeiten von Segal, Quillen und Freed beschäftigen sich mit unendlich dimensionalen Mannigfaltigkeiten, um den universellen Chern Charakter zu beschreiben.

Definition

Die eingeschränkte Grassmann Mannigfaltigkeit $\mathrm{Gr}_{\mathrm{res}}$ ist der Raum aller Unterräume $W \subset \mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{H}_-$, sodass

- $\pi_+ : W \to \mathcal{H}_+$ ein Fredholm Operator ist.
- $\pi_- : W \to \mathcal{H}_-$ ein Hilbert–Schmidt Operator ist.

Arbeiten von Segal, Quillen und Freed beschäftigen sich mit unendlich dimensionalen Mannigfaltigkeiten, um den universellen Chern Charakter zu beschreiben.

Definition

Die eingeschränkte Grassmann Mannigfaltigkeit $\mathrm{Gr}_{\mathrm{res}}$ ist der Raum aller Unterräume $W \subset \mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{H}_-$, sodass

- $\pi_+ : W \to \mathcal{H}_+$ ein Fredholm Operator ist.
- $\pi_- : W \to \mathcal{H}_-$ ein Hilbert–Schmidt Operator ist.

Definition

Die eingeschränkte unitäre Gruppe U^1 ist der Raum aller beschränkten unitären Operatoren P auf $\mathcal{H}_+$, sodass $P - \mathrm{id}$ ein Spurklasseoperator ist.

Die Homotopietypen sind

$$\begin{aligned} \mathrm{Gr}_{\mathrm{res}} &\sim \mathscr{F}_0 \\ \mathrm{U}^1 &\sim \mathscr{F}_1. \end{aligned}$$

und es gibt es spezielle Lie-Algebra-wertige Differenzialformen:

- Die Krümmungsform auf dem universellen Bündel $R \in \Omega^2(\mathrm{Gr}_{\mathrm{res}}; L^2)$.
- Die Maurer–Cartan Form $\omega \in \Omega^1(\mathrm{U}^1; L^1)$.

Diese Formen sind kompatibel mit ihren endlich dimensionalen Versionen!

$$\begin{aligned} \mathrm{Gr}_k(\mathbb{C}^{2N}) &\hookrightarrow \mathrm{Gr}_{\mathrm{res}} \\ \mathrm{U}(N) &\hookrightarrow \mathrm{U}^1 \end{aligned}$$

Der Äquivariante Chern Charakter

Satz (Sch.)

Die folgenden Differenzialformen sind de Rham Repräsentanten des universellen delokalisierten Chern Charakters:

$$\mathrm{ch}_0 = \bigoplus_{g \in G} \mathrm{tr}\left(g \exp\left(\frac{i}{2\pi} R_g \right) \right).$$

$$\mathrm{ch}_1 = \bigoplus_{g \in G} \sum_{k \geq 1} \left(\frac{i}{2\pi} \right)^k \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(2k-1)!} \mathrm{tr}\left(g \left(\omega_g \right)^{2k-1} \right),$$

wobei R_g und ω_g die Einschränkungen der Differenzialformen auf die Fixpunkt Untermannigfaltigkeiten $(\mathrm{Gr}_{\mathrm{res}})^g$ und $(\mathrm{U}^1)^g$ sind.

Zusätzliche Struktur

Die Mannigfaltigkeiten $\mathrm{Gr}_{\mathrm{res}}$ und U^1 besitzen beide eine geometrische Blocksummenoperation!

Zusätzliche Struktur

Die Mannigfaltigkeiten $\mathrm{Gr}_{\mathrm{res}}$ und U^1 besitzen beide eine geometrische Blocksummenoperation!

Blocksumme

$$\boxplus \colon \mathrm{Gr}_{\mathrm{res}} \times \mathrm{Gr}_{\mathrm{res}} \to \mathrm{Gr}_{\mathrm{res}}$$
$$\boxplus \colon \mathrm{U}^1 \times \mathrm{U}^1 \to \mathrm{U}^1,$$

korrespondieren zur direkten Summe von Untervektorräumen bzw. Blocksumme von Matrizen.

Zusätzliche Struktur

Die Mannigfaltigkeiten $\mathrm{Gr}_{\mathrm{res}}$ und U^1 besitzen beide eine geometrische Blocksummenoperation!

Blocksumme

$$\boxplus\colon \mathrm{Gr}_{\mathrm{res}} \times \mathrm{Gr}_{\mathrm{res}} \to \mathrm{Gr}_{\mathrm{res}}$$
$$\boxplus\colon \mathrm{U}^1 \times \mathrm{U}^1 \to \mathrm{U}^1,$$

korrespondieren zur direkten Summe von Untervektorräumen bzw. Blocksumme von Matrizen.

Diese Operationen

- sind kompatibel mit dem Chern charakter.
- induzieren die Addition in K-Theorie.

Definition/Satz: Kompakter Fall (Sch.)

Die Gruppen

$$\hat{K}^0_G(M) = \mathrm{Map}^G_{\mathrm{Smooth}}(M, \mathrm{Gr}_{\mathrm{res}})/\sim$$
$$\hat{K}^1_G(M) = \mathrm{Map}^G_{\mathrm{Smooth}}(M, \mathrm{U}^1)/\sim,$$

definieren eine differenzielle Erweiterung. Hierbei ist $f_1 \sim f_0$, falls es eine glatte G-Homotopie f_t von f_0 zu f_1 gibt, sodass

$$\mathrm{CS}_G(f_t) = \bigoplus_g \int \mathrm{Ch}(f_t)$$

eine *exakte* delokalisierte Differenzialform ist.

Zykelabbildungen (gerader Fall)

Ein Zykel für K_G-Theorie auf M ist ein G-Vektorbündel $E \to M$. Es gibt eine natürliche Transformation

$$\mathrm{cycl}\colon \mathrm{Vect}_G \to K_G^0,$$

die wir die *topologische Zykelabbildung* nennen.

Zykelabbildungen (gerader Fall)

Ein Zykel für K_G-Theorie auf M ist ein G-Vektorbündel $E \to M$. Es gibt eine natürliche Transformation

$$\mathrm{cycl}\colon \mathrm{Vect}_G \to K^0_G,$$

die wir die *topologische Zykelabbildung* nennen.

Ein *geometrischer Zykel* ist ein Paar (E, ∇) bestehend aus

- Einem G-Vektorbündel $E \to M$.
- Einem invarianten Zusammenhang ∇ auf E.

Zykelabbildungen (gerader Fall)

Ein geometrischer Lift der topologischen Zykelabbildung ist eine natürliche Transformation

$$\widehat{\mathrm{cycl}} \colon \mathrm{Vect}_G^{\nabla} \to \hat{K}_G^0,$$

sodass folgende Eigenschaften erfüllt sind:

Zykelabbildungen (gerader Fall)

Ein geometrischer Lift der topologischen Zykelabbildung ist eine natürliche Transformation

$$\widehat{\mathrm{cycl}} \colon \mathrm{Vect}_G^{\nabla} \to \hat{K}_G^0,$$

sodass folgende Eigenschaften erfüllt sind:

- Die Verknüpfung $R \circ \widehat{\mathrm{cycl}} = \mathrm{Ch}_G$.
- Die Verknüpfung $I \circ \widehat{\mathrm{cycl}} = \mathrm{cycl}$.

Im ungeraden Fall gibt es (über den Suspensionsisomorphismus) eine ungerade topologische Zykelabbildung.

Satz (Sch.)

Die oben definierte differenzielle Erweiterung ist die eindeutige Erweiterung, die sowohl eine gerade als auch eine ungerade Zykelabbildung zulässt.