

Ein Kozykel-Modell für den äquivarianten Chern-Charakter und differenzielle äquivariante K -Theorie.

Eric Schlarman

Dissertationsprüfung am
9. Juli 2020

Was ist Differenzielle K -Theorie?

Was ist Differenzielle K -Theorie?

Kohomologietheorien

Sind Familien von Funktoren $\text{Diff} \rightarrow \text{Ab}$ mit Eigenschaften:

- Mayer-Vietoris Sequenz
- \coprod wird zu \prod
- Homotopieinvarianz

Was ist Differenzielle K -Theorie?

Kohomologietheorien

Sind Familien von Funktoren $\text{Diff} \rightarrow \text{Ab}$ mit Eigenschaften:

- Mayer-Vietoris Sequenz
- \coprod wird zu \prod
- Homotopieinvarianz

Beispiele

- H^* : De Rham-Kohomologie
- K^* : K -Theorie
- MU^* : Komplexer Bordismus
- ...

Was ist Differenzielle K -Theorie?

Differenzielle Kohomologietheorien

Sind Familien von Funktoren $\text{Diff} \rightarrow \text{Ab}$ mit Eigenschaften:

- Mayer-Vietoris Sequenz
- \coprod wird zu \prod
- ~~Homotopieinvarianz~~

Beispiele

- \hat{H}^* : Differenzielle De Rham-Kohomologie
- \hat{K}^* : Differenzielle K -Theorie
- \widehat{MU}^* : Differenzieller Komplexer Bordismus
- ...

Klassische Definition

Eine differenzielle Erweiterung ist eine Familie von Funktoren $\hat{K}^*: \text{Diff} \rightarrow \text{Ab}$ zusammen mit Transformationen R, I und a sodass

$$\begin{array}{ccc} \hat{K}^*(M) & \xrightarrow{I} & K^*(M) \\ \downarrow R & & \downarrow \text{ch} \\ \Omega_{d=0}^*(M) & \xrightarrow{\text{Rham}} & H^*(M), \end{array}$$

kommutiert und die folgende Sequenz exakt ist:

$$\begin{array}{ccccccc} K^{*-1}(M) & \xrightarrow{\text{ch}} & \Omega^{*-1}(M)/\text{im}(d) & \xrightarrow{a} & \hat{K}^*(M) & \xrightarrow{I} & K^*(M) \longrightarrow 0 \\ & & \searrow d & & \downarrow R & & \\ & & & & \Omega_{d=0}^*(M) & & \end{array}$$

Äquivariante Version, 1. Versuch

Äquivariante Version, 1. Versuch

$$\begin{array}{ccc} \hat{K}_G^*(M) & \xrightarrow{I} & K_G^*(M) \\ \downarrow R & & \downarrow \text{ch}_G \\ (\Omega_{d=0}^*(M))^G & \xrightarrow{\text{Rham}} & H_G^*(M), \end{array}$$

wobei $\text{ch}_G(E) = \text{ch}(EG \times_G E \rightarrow EG \times_G M)$.

Äquivariante Version, 1. Versuch

$$\begin{array}{ccc} \hat{K}_G^*(M) & \xrightarrow{I} & K_G^*(M) \\ \downarrow R & & \downarrow \text{ch}_G \\ (\Omega_{d=0}^*(M))^G & \xrightarrow{\text{Rham}} & H_G^*(M), \end{array}$$

wobei $\text{ch}_G(E) = \text{ch}(EG \times_G E \rightarrow EG \times_G M)$.

Aber: Borel äquivariante Kohomologie ist kein gutes Ziel für den Chern-Charakter!

Der Delokalisierte Chern-Charakter

Delokalisierte Kohomologie [Baum, Connes]

Definiere die Gruppen

$$H_{\text{delok}}^0(M) = \left(\bigoplus_{g \in G} \prod_{k \in \mathbb{N}} H^{2k}(M^g; \mathbb{C}) \right)^G \quad \text{und}$$
$$H_{\text{delok}}^1(M) = \left(\bigoplus_{g \in G} \prod_{k \in \mathbb{N}} H^{2k+1}(M^g; \mathbb{C}) \right)^G .$$

Dann gibt es einen Chern-Charakter Isomorphismus

$$K_G^*(M) \otimes \mathbb{C} \xrightarrow{\text{ch}_{\text{delok}}} H_{\text{delok}}^*(M)$$

Äquivariante Version, 2. Versuch

$$\begin{array}{ccc} \hat{K}_G^*(M) & \xrightarrow{I} & K_G^*(M) \\ \downarrow R & & \downarrow \text{ch}_{\text{delok}} \\ \Omega_{\text{delok}, d=0}^*(M) & \xrightarrow{\text{Rham}} & H_{\text{delok}}^*(M) \end{array}$$

Äquivariante Version, 2. Versuch

$$\begin{array}{ccc} \hat{K}_G^*(M) & \xrightarrow{I} & K_G^*(M) \\ \downarrow R & & \downarrow \text{ch}_{\text{delok}} \\ \Omega_{\text{delok}, d=0}^*(M) & \xrightarrow{\text{Rham}} & H_{\text{delok}}^*(M) \end{array}$$

Frage: Wie kann man eine solche Erweiterung konkret konstruieren?

K-Theorie über ein Spektrum

Theorem [Atiyah]

$$K_G^0(M) \cong [M, \mathcal{F}_0]_G$$

$$K_G^1(M) \cong [M, \mathcal{F}_1]_G,$$

wobei $\mathcal{F}_i \subset \text{Fred}(\mathcal{H} \otimes L^2(G))$ geeignete Unterräume in der Normtopologie mit Konjugationswirkung.

Idee: Die universellen Räume \mathcal{F}_i besitzen jeweils eine *universelle* K-Theorie Klasse, welche wir entlang von Abbildungen zurückziehen. („Indexbündel“)

Eine differenzielle K -Theorie Klasse besteht aus

- einer K -Theorie Klasse x
- einem Differenzialform-Repräsentanten ihres Chern-Charakters $\text{Ch}(x)$.

Eine differenzielle K -Theorie Klasse besteht aus

- einer K -Theorie Klasse x
- einem Differenzialform-Repräsentanten ihres Chern-Charakters $\text{Ch}(x)$.

Wenn wir einen universellen Repräsentanten für den Chern-Charakter finden, können wir also möglicherweise differenzielle K -Theorie klassifizieren.

Auf Atiyahs Räumen von Fredholm Operatoren sind bis heute allerdings keine konkreten geometrischen Repräsentanten bekannt.

⇒ Wir brauchen also besser geeignete Modelle der klassifizierenden Räume.

Arbeiten von Segal, Quillen und Freed beschäftigen sich mit unendlich dimensional Mannigfaltigkeiten, um den universellen Chern-Charakter zu beschreiben.

Arbeiten von Segal, Quillen und Freed beschäftigen sich mit unendlich dimensionalen Mannigfaltigkeiten, um den universellen Chern-Charakter zu beschreiben.

Definition

Die eingeschränkte Graßmann-Mannigfaltigkeit Gr_{res} ist der Raum aller Unterräume $W \subset \mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{H}_-$, sodass

- $\pi_+ : W \rightarrow \mathcal{H}_+$ ein Fredholm-Operator ist.
- $\pi_- : W \rightarrow \mathcal{H}_-$ ein Hilbert-Schmidt-Operator ist.

Arbeiten von Segal, Quillen und Freed beschäftigen sich mit unendlich dimensional Mannigfaltigkeiten, um den universellen Chern-Charakter zu beschreiben.

Definition

Die eingeschränkte Graßmann-Mannigfaltigkeit Gr_{res} ist der Raum aller Unterräume $W \subset \mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{H}_-$, sodass

- $\pi_+ : W \rightarrow \mathcal{H}_+$ ein Fredholm-Operator ist.
- $\pi_- : W \rightarrow \mathcal{H}_-$ ein Hilbert-Schmidt-Operator ist.

Definition

Die eingeschränkte unitäre Gruppe U^1 ist der Raum aller beschränkten unitären Operatoren P auf \mathcal{H}_+ , sodass $P - \text{id} \in L^1$ ein Spurklasseoperator ist.

Klassifizierende Räume für K -Theorie

Theorem

Für jede glatte G -Mannigfaltigkeit ist

$$([M, \mathrm{Gr}_{\mathrm{res}}]_G, \boxplus) \cong K_G^0(M)$$

$$([M, U^1]_G, \boxplus) \cong K_G^1(M)$$

wobei die Blocksummenoperation

$$\boxplus: \mathrm{Gr}_{\mathrm{res}} \times \mathrm{Gr}_{\mathrm{res}} \rightarrow \mathrm{Gr}_{\mathrm{res}}$$

$$\boxplus: U^1 \times U^1 \rightarrow U^1$$

der Summe von Untervektorräumen bzw. Blocksumme von Matrizen entspricht.

Auf $\mathrm{Gr}_{\mathrm{res}}$ und U^1 existieren (per Konstruktion!) spezielle Lie-Algebra-wertige Differenzialformen:

- Die Krümmungsform auf dem universellen Bündel $R \in \Omega^2(\mathrm{Gr}_{\mathrm{res}}; L^1)$.
- Die Maurer–Cartan-Form $\omega \in \Omega^1(U^1; L^1)$.

Auf Gr_{res} und U^1 existieren (per Konstruktion!) spezielle Lie-Algebra-wertige Differenzialformen:

- Die Krümmungsform auf dem universellen Bündel $R \in \Omega^2(\text{Gr}_{\text{res}}; L^1)$.
- Die Maurer–Cartan-Form $\omega \in \Omega^1(U^1; L^1)$.

Theorem

Die folgenden Differenzialformen sind de Rham-Repräsentanten des universellen delokalisierten Chern-Charakters:

$$\text{ch}_{\text{even}} = \bigoplus_{g \in G} \text{tr} \left(g \exp \left(\frac{i}{2\pi} R_g \right) \right).$$

$$\text{ch}_{\text{odd}} = \bigoplus_{g \in G} \sum_{k \geq 1} \left(\frac{i}{2\pi} \right)^k \frac{(-1)^{k-1} (k-1)!}{(2k-1)!} \text{tr} \left(g (\omega_g)^{2k-1} \right)$$

Äquivariante Differenzielle K -Theorie

Definition/Theorem

Die Gruppen

$$\hat{K}_G^0(M) = \text{Map}_{\text{Smooth}}^G(M, \text{Gr}_{\text{res}}) \times \Omega_{\text{delok}}^1(M) / \sim \text{ und}$$

$$\hat{K}_G^1(M) = \text{Map}_{\text{Smooth}}^G(M, U^1) \times \Omega_{\text{delok}}^0(M) / \sim$$

definieren eine differenzielle Erweiterung.

Äquivariante Differenzielle K -Theorie

Definition/Theorem

Die Gruppen

$$\hat{K}_G^0(M) = \text{Map}_{\text{Smooth}}^G(M, \text{Gr}_{\text{res}}) \times \Omega_{\text{delok}}^1(M) / \sim \text{ und}$$
$$\hat{K}_G^1(M) = \text{Map}_{\text{Smooth}}^G(M, U^1) \times \Omega_{\text{delok}}^0(M) / \sim$$

definieren eine differenzielle Erweiterung. Hierbei ist $(f_1, \omega_1) \sim (f_0, \omega_0)$, falls es eine glatte G -Homotopie f_t von f_0 zu f_1 gibt, sodass

$$\text{CS}_G(f_t) = \bigoplus_g \int_I \text{Ch}(f_t) = \omega_1 - \omega_0 + \text{exakt.}$$

Äquivariante Differenzielle K -Theorie

Definition/Theorem

Die Gruppen

$$\hat{K}_G^0(M) = \text{Map}_{\text{Smooth}}^G(M, \text{Gr}_{\text{res}}) \times \Omega_{\text{delok}}^1(M) / \sim \text{ und}$$

$$\hat{K}_G^1(M) = \text{Map}_{\text{Smooth}}^G(M, U^1) \times \Omega_{\text{delok}}^0(M) / \sim$$

definieren eine differenzielle Erweiterung. Hierbei ist $(f_1, \omega_1) \sim (f_0, \omega_0)$, falls es eine glatte G -Homotopie f_t von f_0 zu f_1 gibt, sodass

$$\text{CS}_G(f_t) = \bigoplus_g \int_I \text{Ch}(f_t) = \omega_1 - \omega_0 + \text{exakt.}$$

Vermutung (Äquivariantes Venice-Lemma)

Sei

$$d\omega \in \Omega_{\text{delok}}^0(M) \quad \text{oder} \quad d\omega \in \Omega_{\text{delok}}^1(M)$$

eine exakte delokalisierte Differenzialform. Dann ist $d\omega$ die Chern-Form f^*ch einer nullhomotopen G -Abbildung

$$f: M \rightarrow \text{Gr}_{\text{res}} \quad \text{oder} \quad f: M \rightarrow U^1.$$

Wenn das äquivariante Venice-Lemma gilt, so kann man stets auf Zykel (f, ω) mit $\omega = 0$ reduzieren. Somit ist in diesem Fall jede Klasse in \hat{K}_G allein durch eine Abbildung f charakterisiert.

Zykel-Abbildungen (gerader Fall)

Ein Zykel für $K_G^0(M)$ ist ein G -Vektorbündel $E \rightarrow M$. Es gibt eine natürliche Transformation

$$\text{cycl}: \text{Vect}_G \rightarrow K_G^0,$$

die wir die **topologische Zykel-Abbildung** nennen.

Ein **geometrischer Lift** der topologischen Zykel-Abbildung ist eine natürliche Transformation

$$\widehat{\text{cycl}}: \text{Vect}_G^\nabla \rightarrow \hat{K}_G^0$$

mit $R \circ \widehat{\text{cycl}} = \text{Ch}_G$ und $I \circ \widehat{\text{cycl}} = \text{cycl}$.

Zykel-Abbildungen sind nützlich, um Klassen in \hat{K}_G explizit zu beschreiben.

Zykel-Abbildungen sind nützlich, um Klassen in \hat{K}_G explizit zu beschreiben.

Theorem (Existenz von Zykel-Abbildungen)

Die oben definierte differenzielle Erweiterung \hat{K}_G^* besitzt sowohl eine gerade als auch eine ungerade geometrische Zykel-Abbildung.

Zykel-Abbildungen sind nützlich, um Klassen in \hat{K}_G explizit zu beschreiben.

Theorem (Existenz von Zykel-Abbildungen)

Die oben definierte differenzielle Erweiterung \hat{K}_G^* besitzt sowohl eine gerade als auch eine ungerade geometrische Zykel-Abbildung.

Theorem (Äquivariante Eindeutigkeit)

Bis auf Isomorphie ist \hat{K}_G^* die eindeutige differenzielle Erweiterung, die sowohl eine gerade, als auch eine ungerade Zykel-Abbildung zulässt.

Offene Fragen

- Kompakte Lie Gruppen / diskrete Gruppen?
- Explizite Cup Produkt Struktur auf \hat{K}_G ?
- Explizite Pushforward / Indexabbildungen?
- Erweiterung auf unendlich-dimensionale Mannigfaltigkeiten?
- Mehr explizite Berechnungen!

Vielen Dank für eure Aufmerksamkeit!