Ein Kozykel-Modell für den äquivarianten Chern-Charakter und differenzielle äquivariante K-Theorie.

Eric Schlarmann

Dissertationsprüfung am

9. Juli 2020

Was ist Differenzielle K-Theorie?

Was ist Differenzielle K-Theorie?

Kohomologietheorien

Sind Familien von Funktoren Diff $\to$ Ab mit Eigenschaften

- Mayer-Vietoris Sequenz
- $\coprod$ wird zu $\prod$
- Homotopieinvarianz

Was ist Differenzielle K-Theorie?

Kohomologietheorien

Sind Familien von Funktoren Diff $\to$ Ab mit Eigenschaften

- Mayer-Vietoris Sequenz
- $\coprod$ wird zu $\prod$
- Homotopieinvarianz

Beispiele

- H^*: De Rham-Kohomologie
- K^*: K-Theorie
- MU^*: Komplexer Bordismus
- …

Was ist Differenzielle K-Theorie?

Differenzielle Kohomologietheorien

Sind Familien von Funktoren Diff $\to$ Ab mit Eigenschaften

- Mayer-Vietoris Sequenz
- $\coprod$ wird zu $\prod$
- ~~Homotopieinvarianz~~

Beispiele

- $\hat{H}^*$: Differenzielle De Rham-Kohomologie
- $\hat{K}^*$: Differenzielle K-Theorie
- $\widehat{MU}^*$: Differenzieller Komplexer Bordismus
- …

Klassische Definition

Eine differenzielle Erweiterung ist eine Familie von Funktoren $\hat{K}^*\colon\ \mathrm{Diff} \to \mathrm{Ab}$ zusammen mit Transformationen R, I und a sodass

$$\begin{tikzcd}
\hat{K}^*(M) \arrow[r, "I"] \arrow[d, "R"] & K^*(M) \arrow[d, "\mathrm{ch}"] \\
\Omega^*_{\mathrm{d}=0}(M) \arrow[r, "\mathrm{Rham}"] & H^*(M),
\end{tikzcd}$$

kommutiert und die folgende Sequenz exakt ist:

$$\begin{tikzcd}
K^{*-1}(M) \arrow[r, "\mathrm{ch}"] & \Omega^{*-1}(M)/\mathrm{im}(\mathrm{d}) \arrow[r, "a"] \arrow[dr, "\mathrm{d}"'] & \hat{K}^*(M) \arrow[r, "I"] \arrow[d, "R"] & K^*(M) \arrow[r] & 0 \\
 & & \Omega^*_{\mathrm{d}=0}(M) & &
\end{tikzcd}$$

Äquivariante Version, 1. Versuch

Äquivariante Version, 1. Versuch

$$
\begin{tikzcd}
\hat{K}_G^*(M) \arrow[r, "I"] \arrow[d, "R"] & K_G^*(M) \arrow[d, "\mathrm{ch}_G"] \\
(\Omega^*_{\mathrm{d}=0}(M))^G \arrow[r, "\mathrm{Rham}"] & H_G^*(M),
\end{tikzcd}
$$

wobei $\mathrm{ch}_G(E) = \mathrm{ch}(EG \times_G E \to EG \times_G M)$.

Äquivariante Version, 1. Versuch

$$\begin{tikzcd}
\hat{K}_G^*(M) \arrow[r, "I"] \arrow[d, "R"] & K_G^*(M) \arrow[d, "\mathrm{ch}_G"] \\
(\Omega^*_{\mathrm{d}=0}(M))^G \arrow[r, "\mathrm{Rham}"] & H_G^*(M),
\end{tikzcd}$$

wobei $\mathrm{ch}_G(E) = \mathrm{ch}(EG \times_G E \to EG \times_G M)$.

Aber: Borel äquivariante Kohomologie ist kein gutes Ziel für den Chern-Charakter!

Der Delokalisierte Chern-Charakter

Delokalisierte Kohomologie [Baum, Connes]

Definiere die Gruppen

$$H^0_{\mathrm{delok}}(M) = \left(\bigoplus_{g \in G} \prod_{k \in \mathbb{N}} H^{2k}(M^g; \mathbb{C}) \right)^G \quad \text{und}$$

$$H^1_{\mathrm{delok}}(M) = \left(\bigoplus_{g \in G} \prod_{k \in \mathbb{N}} H^{2k+1}(M^g; \mathbb{C}) \right)^G .$$

Dann gibt es gibt einen Chern-Charakter Isomorphismus

$$K^*_G(M) \otimes \mathbb{C} \xrightarrow{\mathrm{ch}_{\mathrm{delok}}} H^*_{\mathrm{delok}}(M)$$

Äquivariante Version, 2. Versuch

$$\begin{tikzcd}
\color{red}{\hat{K}^*_G(M)} \arrow[r, red, "I"] \arrow[d, red, "R"] & K^*_G(M) \arrow[d, "\mathrm{ch}_{\mathrm{delok}}"] \\
\Omega^*_{\mathrm{delok},\mathrm{d}=0}(M) \arrow[r, "\mathrm{Rham}"] & H^*_{\mathrm{delok}}(M)
\end{tikzcd}$$

Äquivariante Version, 2. Versuch

$$\begin{tikzcd}
\color{red}{\hat{K}^*_G(M)} \arrow[r, red, "I"] \arrow[d, red, "R"] & K^*_G(M) \arrow[d, "\mathrm{ch}_{\mathrm{delok}}"] \\
\Omega^*_{\mathrm{delok},\mathrm{d}=0}(M) \arrow[r, "\mathrm{Rham}"] & H^*_{\mathrm{delok}}(M)
\end{tikzcd}$$

Frage: Wie kann man eine solche Erweiterung konkret konstruieren?

K-Theorie über ein Spektrum

Theorem [Atiyah]

$$K_G^0(M) \cong [M, \mathscr{F}_0]_G$$
$$K_G^1(M) \cong [M, \mathscr{F}_1]_G,$$

wobei $\mathscr{F}_i \subset \mathrm{Fred}(\mathcal{H} \otimes L^2(G))$ geeignete Unterräume in der Norm Topologie mit Konjugationswirkung.

Idee: Die universellen Räume $\mathscr{F}_i$ besitzen jeweils eine *universelle* K-Theorie Klasse, welche wir entlang von Abbildungen zurückziehen. ("Indexbündel")

Eine differenzielle K-Theorie Klasse besteht aus

- einer K-Theorie Klasse x
- einem Differenzialform-Repräsentanten ihres Chern-Charakters $\mathrm{Ch}(x)$.

Eine differenzielle K-Theorie Klasse besteht aus

- einer K-Theorie Klasse x
- einem Differenzialform-Repräsentanten ihres Chern-Charakters $\mathrm{Ch}(x)$.

Wenn wir einen universellen Repräsentanten für den Chern-Charakter finden, können wir also möglicherweise differenzielle K-Theorie klassifizieren.

Auf Atiyahs Räumen von Fredholm Operatoren sind bis heute allerdings keine konkreten geometrischen Repräsentanten bekannt.

$\Rightarrow$ Wir brauchen also besser geeignete Modelle von den klassifizierenden Räumen.

Arbeiten von Segal, Quillen und Freed beschäftigen sich mit unendlich dimensionalen Mannigfaltigkeiten, um den universellen Chern-Charakter zu beschreiben.

Arbeiten von Segal, Quillen und Freed beschäftigen sich mit unendlich dimensionalen Mannigfaltigkeiten, um den universellen Chern-Charakter zu beschreiben.

Definition

Die eingeschränkte Grassmann Mannigfaltigkeit $\mathrm{Gr}_{\mathrm{res}}$ ist der Raum aller Unterräume $W \subset \mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{H}_-$, sodass

- $\pi_+ : W \to \mathcal{H}_+$ ein Fredholm Operator ist.
- $\pi_- : W \to \mathcal{H}_-$ ein Hilbert–Schmidt Operator ist.

Arbeiten von Segal, Quillen und Freed beschäftigen sich mit unendlich dimensionalen Mannigfaltigkeiten, um den universellen Chern-Charakter zu beschreiben.

Definition

Die eingeschränkte Grassmann Mannigfaltigkeit $\mathrm{Gr}_{\mathrm{res}}$ ist der Raum aller Unterräume $W \subset \mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{H}_-$, sodass

- $\pi_+ : W \to \mathcal{H}_+$ ein Fredholm Operator ist.
- $\pi_- : W \to \mathcal{H}_-$ ein Hilbert–Schmidt Operator ist.

Definition

Die eingeschränkte unitäre Gruppe U^1 ist der Raum aller beschränkten unitären Operatoren P auf $\mathcal{H}_+$, sodass $P - \mathrm{id} \in L^1$ ein Spurklasseoperator ist.

Klassifizierende Räume für K-Theorie

Theorem

Für jede glatte G-Mannigfaltigkeit ist

$$\begin{aligned} ([M, \mathrm{Gr}_{\mathrm{res}}]_G, \boxplus) &\cong K^0_G(M) \\ ([M, \mathrm{U}^1]_G, \boxplus) &\cong K^1_G(M) \end{aligned}$$

wobei die Blocksummenoperation

$$\begin{aligned} \boxplus \colon \mathrm{Gr}_{\mathrm{res}} \times \mathrm{Gr}_{\mathrm{res}} &\to \mathrm{Gr}_{\mathrm{res}} \\ \boxplus \colon \mathrm{U}^1 \times \mathrm{U}^1 &\to \mathrm{U}^1, \end{aligned}$$

der Summe von Untervektorräumen bzw. Blocksumme von Matrizen entspricht.

Auf $\mathrm{Gr}_{\mathrm{res}}$ und U^1 existieren (per Konstruktion!) spezielle Lie-Algebra-wertige Differenzialformen:

- Die Krümmungsform auf dem universellen Bündel $R \in \Omega^2(\mathrm{Gr}_{\mathrm{res}}; L^1)$.
- Die Maurer–Cartan Form $\omega \in \Omega^1(\mathrm{U}^1; L^1)$.

Auf $\mathrm{Gr}_{\mathrm{res}}$ und U^1 existieren (per Konstruktion!) spezielle Lie-Algebra-wertige Differenzialformen:

- Die Krümmungsform auf dem universellen Bündel $R \in \Omega^2(\mathrm{Gr}_{\mathrm{res}}; L^1)$.
- Die Maurer–Cartan Form $\omega \in \Omega^1(\mathrm{U}^1; L^1)$.

Theorem

Die folgenden Differenzialformen sind de Rham-Repräsentanten des universellen delokalisierten Chern-Charakters:

$$\mathrm{ch}_{\mathrm{even}} = \bigoplus_{g \in G} \mathrm{tr}\left(g \exp\left(\frac{i}{2\pi} R_g \right) \right).$$

$$\mathrm{ch}_{\mathrm{odd}} = \bigoplus_{g \in G} \sum_{k \geq 1} \left(\frac{i}{2\pi} \right)^k \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(2k-1)!} \mathrm{tr}\left(g \left(\omega_g \right)^{2k-1} \right)$$

Äquivariante Differenzielle K-Theorie

Definition/Theorem

Die Gruppen

$$\hat{K}^0_G(M) = \mathrm{Map}^G_{\mathrm{Smooth}}(M, \mathrm{Gr}_{\mathrm{res}}) \times \Omega^1_{\mathrm{delok}}(M)/\sim \quad \text{und}$$
$$\hat{K}^1_G(M) = \mathrm{Map}^G_{\mathrm{Smooth}}(M, \mathrm{U}^1) \times \Omega^0_{\mathrm{delok}}(M)/\sim$$

definieren eine differenzielle Erweiterung.

Äquivariante Differenzielle K-Theorie

Definition/Theorem

Die Gruppen

$$\hat{K}^0_G(M) = \mathrm{Map}^G_{\mathrm{Smooth}}(M, \mathrm{Gr}_{\mathrm{res}}) \times \Omega^1_{\mathrm{delok}}(M)/\sim \quad \text{und}$$
$$\hat{K}^1_G(M) = \mathrm{Map}^G_{\mathrm{Smooth}}(M, \mathrm{U}^1) \times \Omega^0_{\mathrm{delok}}(M)/\sim$$

definieren eine differenzielle Erweiterung. Hierbei ist $(f_1, \omega_1) \sim (f_0, \omega_0)$, falls es eine glatte G-Homotopie f_t von f_0 zu f_1 gibt, sodass

$$\mathrm{CS}_G(f_t) = \bigoplus_g \int_I \mathrm{Ch}(f_t) = \omega_1 - \omega_0 + \text{exakt}.$$

Äquivariante Differenzielle K-Theorie

Definition/Theorem

Die Gruppen

$$\hat{K}^0_G(M) = \mathrm{Map}^G_{\mathrm{Smooth}}(M, \mathrm{Gr}_{\mathrm{res}}) \times \Omega^1_{\mathrm{delok}}(M)/\sim \quad \text{und}$$
$$\hat{K}^1_G(M) = \mathrm{Map}^G_{\mathrm{Smooth}}(M, \mathrm{U}^1) \times \Omega^0_{\mathrm{delok}}(M)/\sim$$

definieren eine differenzielle Erweiterung. Hierbei ist $(f_1, \omega_1) \sim (f_0, \omega_0)$, falls es eine glatte G-Homotopie f_t von f_0 zu f_1 gibt, sodass

$$\mathrm{CS}_G(f_t) = \bigoplus_g \int_I \mathrm{Ch}(f_t) = \omega_1 - \omega_0 + \text{exakt}.$$

Vermutung (Äquivariantes Venice-Lemma)

Sei

$$\mathrm{d}\omega \in \Omega^0_{\mathrm{delok}}(M) \qquad \text{oder} \qquad \mathrm{d}\omega \in \Omega^1_{\mathrm{delok}}(M)$$

eine exakte delokalisierte Differenzialform. Dann ist $\mathrm{d}\omega$ die Chern Form $f^*\mathrm{ch}$ einer nullhomotopen G-Abbildung

$$f\colon M \to \mathrm{Gr}_{\mathrm{res}} \quad \text{oder} \quad f\colon M \to \mathrm{U}^1.$$

Wenn das äquivariante Venice-Lemma gilt, so kann man stets auf Zykel (f, ω) mit $\omega = 0$ reduzieren. Somit ist in diesem Fall jede Klasse in $\hat{K}_G$ allein durch eine Abbildung f charakterisiert.

Zykelabbildungen (gerader Fall)

Ein Zykel für $K_G^0(M)$ ist ein G-Vektorbündel $E \to M$. Es gibt eine natürliche Transformation

$$\mathrm{cycl}\colon \mathrm{Vect}_G \to K_G^0,$$

die wir die **topologische Zykelabbildung** nennen.

Ein **geometrischer Lift** der topologischen Zykelabbildung ist eine natürliche Transformation

$$\widehat{\mathrm{cycl}}\colon \mathrm{Vect}_G^\nabla \to \hat{K}_G^0$$

mit $R \circ \widehat{\mathrm{cycl}} = \mathrm{Ch}_G$ und $I \circ \widehat{\mathrm{cycl}} = \mathrm{cycl}$.

Zykelabbildungen sind nützlich, um Klassen in $\hat{K}_G$ explizit zu beschreiben.

Zykelabbildungen sind nützlich, um Klassen in $\hat{K}_G$ explizit zu beschreiben.

Theorem (Existenz von Zykelabbildungen)

Die oben definierte differenzielle Erweiterung $\hat{K}_G^*$ besitzt sowohl eine gerade als auch eine ungerade geometrische Zykelabbildung.

Zykelabbildungen sind nützlich, um Klassen in $\hat{K}_G$ explizit zu beschreiben.

Theorem (Existenz von Zykelabbildungen)

Die oben definierte differenzielle Erweiterung $\hat{K}_G^*$ besitzt sowohl eine gerade als auch eine ungerade geometrische Zykelabbildung.

Theorem (Äquivariante Eindeutigkeit)

Bis auf Isomorphie ist $\hat{K}_G^*$ die eindeutige differenzielle Erweiterung, die sowohl eine gerade, als auch eine ungerade Zykelabbildung zulässt.

Offene Fragen

- Kompakte Lie Gruppen / diskrete Gruppen?
- Explizite Cup Produkt Struktur auf $\hat{K}_G$?
- Explizite Pushforward / Indexabbildungen?
- Erweiterung auf unendlich-dimensionale Mannigfaltigkeiten?
- Mehr explizite Berechnungen!

Vielen Dank für eure Aufmerksamkeit!