征 解

Seris Lee 每周五

2025 年 3 月 21 日

目录 1–3, 7, 9: 数论 4–66: 三角 8: 超越方程

1 问题

1. 求证: $n \equiv 0$ 或 $3 \mod 4$ 是 $1, 1, 2, 3, \cdots, n, n$ 排成一行, 存在任 2 个 i 之间有 i 个数的排列的必要条件. (赵子铭 供)

2. 25 元集, 有 n 个 5 元子集, 满足 $\forall i, j \in [1, n]$ $(i, j \in \mathbb{Z})$, $|A_i \cap A_j| \leq 1$, 求 n 的最大值.
(赵子铭 供)

3. $\forall a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{N}^+$, 证明:
$$\prod_{1\leq i<j\leq n} (j-i) \mid \prod_{1\leq i<j\leq n} (a_j - a_i)\,.$$
(张博涵 供)

4. 证明:
$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin\frac{k\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}\,.$$
(曹铭杰 供)

5. 证明:
$$\sum_{k=1}^{n} \cos\frac{2k-1}{2n+1}\pi = \frac{1}{2}\,.$$
(陈宇航 供)

6. 证明方程 $\sin\sin\sin\sin x = \cos\cos\cos\cos x$ 无实数解. (张博涵 供)

7. 设 $\{a_n\}$ $(n \geq 1)$ 是一正整数列, 满足递推式 $a_{n+1} = pa_n^s + q$ $(p, s \in \mathbb{N}^+, q \in \mathbb{Z})$, 且 $a_n \mod m$ 是周期数列. 是否存在这样的 $\{a_n\}$, 使其从第 i 项 $(i > m)$ 才开始进入周期?
(陈宇航 张博涵 供)

8. 求方程 $x^2 = 2^x$ 的负数解. (闫家宁 供)

9. 设正整数 $a < b$, 求 $\overline{ab} \mid \overline{a(a+1)(a+2)\cdots b}$ 的充分必要条件. (张博涵 供)

2 已知解答

2.1 三角 (张博涵供, 陈宇航解答)

证明: $\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{k\pi}{2n+1}=\frac{1}{2^n}$.

配对法. 由二倍角公式知

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{k\pi}{2n+1}&=\frac{\cos\frac{\pi}{2n+1}\cdots\cos\frac{n\pi}{2n+1}\cdot\sin\frac{\pi}{2n+1}\cdots\sin\frac{n\pi}{2n+1}}{\sin\frac{\pi}{2n+1}\cdots\sin\frac{n\pi}{2n+1}}\\&=\frac{1}{2^n}\cdot\frac{\sin\frac{2\pi}{2n+1}\sin\frac{4\pi}{2n+1}\cdots\sin\frac{2n\pi}{2n+1}}{\sin\frac{\pi}{2n+1}\cdots\sin\frac{n\pi}{2n+1}}\\&=\frac{1}{2^n}.\end{aligned}$$

2.2 数论 (张博涵供, 自答, 或伪证)

回想数列周期性的证明. a_n 模 m 的余数有 m 种, 由抽屉原理知, 其中必有两项的余数相等, 不妨设为 a_r 和 a_t, 则由递推公式知 a_{r+1} 和 a_{t+1} 模 m 的余数相等, 以此类推, $a_n \mod m$ 是周期数列 (不一定是纯周期), 且周期 $T \le m$. 于是考虑最大情况 $T = m$, 此时最晚应于第 m 项进入周期, 因为若在第 $m+1$ 项才进入周期, 前面还剩 m 项, 则由递推公式, 周期从第 1 项开始, 矛盾! 所以不存在 $\{a_n\}$, 使其从第 i 项 $(i > m)$ 才开始进入周期.