

## Введение

Будем рассматривать разреженные линейные недоопределенные системы с вложенной сетевой структурой. Их структура наследуется из задач где применяются неоднородные сетевые потоки с переменными внешними потоками узлов. Одно из приложений рассматриваемых недоопределенных систем — задача о расположении сенсоров для мультиграфа. Задача заключается в расположении минимального количества сенсоров в узлах мультиграфа для определения величины потока на дугах и переменных интенсивностей узлов для всего мультиграфа. Исследование ранга разреженной матрицы основано на конструктивной теории декомпозиции разреженных СЛАУ.

Данная задача имеет широкое практическое применение, пример которого будет рассмотрен далее.

Для реализации алгоритмов, описанных в работе используется система компьютерной алгебры Wolfram Mathematica. Данная система компьютерной алгебры включает в себя возможность производить символьные вычисления, что позволяет построить общее решение для рассматриваемой разреженной СЛАУ и, используя возможности системы по упрощению логических выражений, проверить и продемонстрировать корректность построенного общего решения, а также наглядно продемонстрировать построенные вспомогательные структуры. Более того, данная система компьютерной алгебры предоставляет широкие возможности по оптимизации кода, такие как автоматическая параллелизация вычислений и компиляция часто используемых модулей, что позволяет значительно увеличить скорость вычислений.

# Глава 1. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ОСНОВА И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть  $G = (I, U)$  — конечный ориентированный связный мультиграф без циклов с множеством узлов  $I$  и множеством дуг  $U$ ,  $|U| \gg |I|$ . Пусть  $K (|K| < \infty)$  — множество различных потоков, проходящих через сеть  $G$ . Полагаяем  $K = \{1, \dots, |K|\}$ . Зафиксируем связную сеть, соответствующую конкретному потоку  $k \in K$ :  $G^k = (I^k, U^k)$ ,  $I^k \subseteq I$ ,  $U^k = \{(i, j)^k : (i, j) \in \hat{U}^k\}$ ,  $\hat{U}^k \in U$  — множество дуг  $G$ , по которым проходит поток  $k \in K$ . Кроме того, для каждой мультидуги  $(i, j) \in U$  введем множество  $K(i, j) = \{k \in K : (i, j)^k \in U^k\}$ , которое содержит все потоки, проходящие по мультидуге  $(i, j)$ .

## 1.1 Построение СЛАУ для рассматриваемого мультиграфа

Рассмотрим следующую разреженную недоопределенную СЛАУ:

$$\sum_{j \in I_i^+(U^k)} x_{ij}^k - \sum_{j \in I_i^-(U^k)} x_{ji}^k = \begin{cases} a_i^k, & i \in I^k \setminus I_k^*, \\ x_i^k \text{sign}(i), & i \in I_k^*. \end{cases}, k \in K, \quad (1)$$

$$\sum_{k \in K} \left( \sum_{(i,j)^k \in U^k} \lambda_{ij}^{k,p} x_{ij}^k \right) + \sum_{k \in K} \sum_{i \in I_k^*} \lambda_i^{k,p} x_i^k = \beta_p, p = \overline{1, q}. \quad (2)$$

Здесь  $I_i^+(U^k) = \{j \in I^k : (i, j)^k \in U^k\}$ ,  $I_i^-(U^k) = \{j \in I^k : (j, i)^k \in U^k\}$ ,  $x_{ij}^k$  — величина потока вдоль дуги  $(i, j)^k$ . Узлы  $i^k \in I_k^*$ ,  $k \in K$  (обозначаем  $i$  если  $k$  определено контекстом) называются динамическими (или базисными) — узлы с переменной интенсивностью  $x_i^k$ ,

$$\text{sign}(i^k) = \begin{cases} 1, & i^k \in I_{k+}^*, \\ -1, & i^k \in I_{k-}^*; \end{cases}$$

$$I_{k+}^*, I_{k-}^* \subseteq I_k^*, I_{k+}^* \cap I_{k-}^* = \emptyset$$

,

$$a_i^k, \lambda_{ij}^{k,p}, \lambda_i^{k,p}, \beta_p \in \mathbb{R}$$

Матрица системы (1) - (2) имеет блочную структуру вида:

$$A = \begin{bmatrix} M & B \\ Q & T \end{bmatrix}$$

Здесь  $M$  — матрица с блочно-диагональной структурой размера  $\sum_{k \in K} |I^k| \times \sum_{k \in K} |U^k|$ , т.к. каждый ее блок представляет из себя матрицу размера  $|I^k| \times |U^k|$  — матрицу инцидентности сети  $G^k = (I^k, U^k)$ ,  $k \in K$ , условно запишем  $M = M_1 \oplus \dots \oplus M_{|K|}$ , где  $M_k$ ,  $k \in K$  — блоки матрицы  $M$ ;  $Q$  — матрица размера  $q \times \sum_{k \in K} |U^k|$  с элементами  $\lambda_{ij}^{k,p}$ ,  $(i, j) \in U$ ,  $k \in K(i, j)$ ,  $p = \overline{1, q}$ .

Матрица  $B$  — разреженная матрица с блочно-диагональной структурой размера  $\sum_{k \in K} |I^k| \times \sum_{k \in K} |I_k^*|$ , т.к. каждый ее блок представляет из себя матрицу размера  $|I^k| \times |I_k^*|$  матрицы сети  $G^k, k \in K$ , условно запишем  $B = B_1 \oplus \dots \oplus B_{|K|}$ . Матрица  $B_k$  колонке  $j$  имеет ненулевой элемент равный  $-sign(i)$  в строке  $i$  для всех  $j \in I_k^*$ , все остальные элементы равны нулю,  $i \in I^k, k \in K$ .  $T$  — матрица размера  $q \times \sum_{k \in K} |I_k^*|$  и состоит из элементов  $\lambda_i^{k,p}, i \in I_k^*, k \in K, p = \overline{1, q}$ . В [1], [3] рассматриваются СЛАУ с включенной сетевой структурой. Их структура унаследована из задач о гомогенном сетевом потоке с узлами с переменным внешним потоком. В [4] исследуются разреженные линейные системы с фрактальными матрицами. В этой работе рассматривается алгоритм декомпозиции разреженных систем для мультиграфа, которые используются в задаче расположения сенсоров.

Считаем, что  $\sum_{k \in K} |I^k| + q < \sum_{k \in K} |U^k| + \sum_{k \in K} |I_k^*|$ .

**Теорема 1.** Ранг матрицы  $[M_k \ B_k]$  системы (1) для фиксированного  $k \in K$  и графа  $G^k, I_k^* \neq \emptyset$  равен  $|I^k|/|1|$ .

Характеристический вектор цикла, характеристический вектор цепи с учетом направления с привязкой к узлу, характеристический вектор цепи с учетом направления с привязкой к дуге для заданного  $k \in K$  составлены в соответствии с правилами [1].

**Теорема 2.** Характеристический вектор цикла, характеристический вектор цепи с учетом направления с привязкой к узлу, характеристический вектор цепи с учетом направления с привязкой к дуге для заданного  $k \in K$  удовлетворяют системе (3) [1, 2].

$$\sum_{j \in I_i^+(U^k)} x_{ij}^k - \sum_{j \in I_i^-(U^k)} x_{ji}^k = \begin{cases} 0, & i \in I^k \setminus I_k^*, \\ x_i^k sign(i), & i \in I_k^*. \end{cases}, k \in K. \quad (3)$$

**Теорема 3.** Любое решение системы 3 для фиксированного  $k \in K$  есть линейная комбинация характеристических векторов [1].

**О п р е д е л е н и е 1.** Будем называть упорядоченную пару множеств  $R = \{U_R^k, I_R^{*k}, k \in K\}, U_R^k \subseteq U^k$  и  $I_R^{*k} \subseteq I_k^*$  опорой для мультиграфа  $G$  и системы (1) если для него система

$$\sum_{j \in I_i^+(\tilde{U}^k)} x_{ij}^k - \sum_{j \in I_i^-(\tilde{U}^k)} x_{ji}^k = \begin{cases} 0, & i \in I^k \setminus \tilde{I}_k^*, \\ x_i^k sign(i), & i \in \tilde{I}_k^*. \end{cases}, k \in K. \quad (4)$$

при  $U^k = U_R^k, I_k^* = I_R^{*k}$  имеет единственное тривиальное решение, но при этом

для всех следующих пар множеств система (4) имеет нетривиальные решения:

$$\begin{aligned}\tilde{R} &= \{\tilde{U}^k, \tilde{I}_k^*, k \in K\}, \\ \tilde{U}^{k_0} &= U_R^{k_0} \cup (i_0, j_0)^{k_0}, (i_0, j_0)^{k_0} \in (U^{k_0} \setminus U_R^{k_0}); \\ \tilde{U}^k &= U_R^k, k \in (K \setminus k_0); \tilde{I}_k^* = I_R^*, k \in K \\ \tilde{R} &= \{\tilde{U}^k, \tilde{I}_k^*, k \in K\}, \\ \tilde{U}^k &= U_R^k, k \in K; \tilde{I}_{k_0}^* = (I_R^{*k_0} \cup \{i_0\}), i_0 \in (I_{k_0}^* \setminus I_R^{*k_0}); \tilde{I}_k^* = I_R^*, k \in (K \setminus k_0).\end{aligned}$$

Для подмножества дуг  $U_1 \subseteq U$  введем понятие множества ницедентных узлов как

$$I(U_1) = \{i \in I : (i, j) \in U_1 \vee (j, i) \in U_1\}.$$

Для каждого  $k \in K$  построим лес из  $\tilde{t}_k$  деревьев  $T^{k, t_k} = \{I_T^{k, t_k}, U_T^{k, t_k}\}$ , где  $I_T^{k, t_k} = I(U_T^{k, t_k})$ ,  $U_T^{k, t_k} \subseteq U_R^k$ ,  $t_k = \overline{1, \tilde{t}_k}$ , таких, что каждое дерево  $T^{k, t_k}$  содержит ровно один узел  $u_{t_k} \in I_R^{*k}$ ,  $\forall t_k = \overline{1, \tilde{t}_k}$ ,  $k \in K$ .

Для каждого  $k \in K$  построим следующие множества:

$$U_R^k = \bigcup_{t_k=1}^{\tilde{t}_k} U_T^{k, t_k}, \quad I_R^{*k} = \left\{ u_{t_k} : t_k = \overline{1, \tilde{t}_k} \right\}$$

#### Теорема 4. (Критерий опоры сети)

Упорядоченная пара множеств  $R = \{U_R^k, I_R^{*k}, k \in K\}$ ,  $U_R^k \subseteq U^k$ ,  $I_R^{*k} \subseteq I_k^*$  является опорой мультиграфа  $G$  для системы (1) тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

1. Каждая компонента связности  $T^{k, t_k} = \{I(U_T^{k, t_k}), U_T^{k, t_k}\}$ ,  $t_k = \overline{1, \tilde{t}_k}$  является деревом;
2. Множество узлов леса  $T^{k, t_k} = \{I(U_T^{k, t_k}), U_T^{k, t_k}\}$ ,  $t_k = \overline{1, \tilde{t}_k}$  покрывает все узлы графа  $G^k = (I^k, U^k)$ , то есть выполняется:

$$\bigcup_{t_k=1}^{\tilde{t}_k} I(U_T^{k, t_k}) = I^k;$$

3. Каждая компонента связности  $T^{k, t_k} = \{I(U_T^{k, t_k}), U_T^{k, t_k}\}$ ,  $t_k = \overline{1, \tilde{t}_k}$  содержит ровно один базисный узел из  $I_R^{*k}$ , то есть выполняется:

$$|I_R^{*k} \cap I(U_T^{k, t_k})| = 1, \quad \forall t_k = \overline{1, \tilde{t}_k}.$$

После того, как опора  $R = \{U_R^k, I_R^{*k}, k \in K\}$  мультиграфа  $G$  для системы (1) построена, можно рассмотреть несколько структур, которые могут быть получены путем добавления одной неопорной дуги к опоре  $R$ .

**О п р е д е л е н и е 2.** *Характеристическим вектором, порожденным дугой  $(\tau, \rho)^k \in (U^k \setminus U_R^k)$  называется вектор*

$$\delta^k(\tau, \rho) = (\delta_{ij}^k(\tau, \rho), (i, j)^k \in U^k; \delta_i^k(\tau, \rho), i \in I_k^*),$$

*построенный по следующим правилам для фиксированного  $k$ :*

1) Если множество  $U_R^k \cup \{(\tau, \rho)^k\}$  имеет цикл  $L_k = \{I_L^k, U_L^k\}$ , то  $\delta^k(\tau, \rho)$  — характеристический вектор этого цикла и дуга  $(\tau, \rho)^k$  выбирается как определяющая направление обхода цикла.

2) Если в множестве  $U_R^k \cup \{(\tau, \rho)^k\}$  содержится цепь  $C_k = I_C^k, U_C^k$ , соединяющая узлы  $u$  и  $v \in I_R^{*k}$ , то  $\delta^k(\tau, \rho)$  — характеристический вектор цепи и дуга  $(\tau, \rho)^k$  выбирается как определяющая направление обхода цепи  $C$ .

**О п р е д е л е н и е 3.** *Характеристическим вектором, порожденным узлом  $\gamma \in (I^k \setminus I_R^{*k})$  называется вектор*

$$\delta^k(\gamma) = (\delta_{ij}^k(\gamma), (i, j)^k \in U^k; \delta_i^k(\gamma), i \in I_k^*),$$

*построенный как характеристический вектор цепи для фиксированного  $k$ , которая соединяет узлы  $\gamma$  и  $v \in I_R^{*k}$ , причем направление цепи выбирается таким образом, что  $\gamma$  — ее начало.*

**Теорема 5.** *Общее решение системы (1) для фиксированного  $k \in K$  может быть представлено в виде:*

$$x_{ij}^k = \sum_{(\tau, \rho)^k \in (U^k \setminus U_R^k)} x_{\tau\rho}^k \delta_{ij}^k(\tau, \rho) + \sum_{\gamma \in I_k^* \setminus I_R^{*k}} x_{\gamma}^k \delta_{ij}^k(\gamma) + \tilde{x}_{ij}^k, \quad (i, j)^k \in U_R^k; \quad (5)$$

$$x_i^k = \sum_{(\tau, \rho)^k \in (U^k \setminus U_R^k)} x_{\tau\rho}^k \delta_i^k(\tau, \rho) + \sum_{\gamma \in I_k^* \setminus I_R^{*k}} x_{\gamma}^k \delta_i^k(\gamma) + \tilde{x}_i^k, \quad i \in I_R^{*k}; \quad (6)$$

где  $\tilde{x}^k = (\tilde{x}_{ij}^k, (i, j) \in U^k; \tilde{x}_i^k, i \in I_k^*)$  — частное решение неоднородной системы (1), то есть вектор  $(x_{ij}^{*k}, x_i^{*k})$  определенный как:

$$x_{ij}^{*k} = \sum_{(\tau, \rho)^k \in (U^k \setminus U_R^k)} x_{\tau\rho}^k \delta_{ij}^k(\tau, \rho) + \sum_{\gamma \in I_k^* \setminus I_R^{*k}} x_{\gamma}^k \delta_{ij}^k(\gamma), \quad (i, j)^k \in U_R^k;$$

$$x_i^{*k} = \sum_{(\tau, \rho)^k \in (U^k \setminus U_R^k)} x_{\tau\rho}^k \delta_i^k(\tau, \rho) + \sum_{\gamma \in I_k^* \setminus I_R^{*k}} x_{\gamma}^k \delta_i^k(\gamma), \quad i \in I_R^{*k};$$

является решением однородной системы (3).

Доказательство этой теоремы для фиксированного  $k$  можно найти в [1,3], общее неоднородное решение системы (1) находится как сумма общего решения однородной системы (3) и любого частного решения неоднородной системы (1).

Заметим, что теорема 5 и формулы (5)-(6) справедливы для любого частного решения  $\tilde{x}^k = (\tilde{x}_{ij}^k, (i, j) \in U^k; \tilde{x}_i^k, i \in I_k^*)$  системы (1), таким образом можно наложить ограничение на это частное решение, например, положить:

$$\begin{aligned}\tilde{x}_{\tau\rho}^k &= 0, (\tau, \rho) \in U^k \setminus U_R^k; \\ \tilde{x}_\gamma^k &= 0, \gamma \in I_k^* \setminus I_R^{*k}\end{aligned}$$

Далее будем использовать формулы (5)-(6), подразумевая, что частное решение  $\tilde{x}^k$  построено в соответствии со введенными ограничениями.

## 1.2 Опора мультиграфа для системы дополнительных уравнений

Пусть  $R = \{U_R^k, I_R^{*k}, k \in K\}$ ,  $U_R^k \subseteq U^k$ ,  $I_R^{*k} \subseteq I_k^*$  — опора мультиграфа  $G$  для системы (1). Выберем произвольно множества  $W = \{U_W^k, I_W^{*k}, k \in K\}$ ,  $|W| = q$ ,  $U_W^k \subseteq U^k \setminus U_R^k$ ,  $I_W^{*k} \subseteq I_k^* \setminus I_R^{*k}$ . Если подставить общее решение системы (1), которое имеет вид (5)-(6) в систему (2), система (2) примет следующий вид:

$$\sum_{k \in K} \left( \sum_{(\tau, \rho)^k \in U^k \setminus U_R^k} \Lambda_{\tau\rho}^{k,p} x_{\tau\rho}^k \right) + \sum_{k \in K} \left( \sum_{\gamma \in I_k^* \setminus I_R^{*k}} \Lambda_\gamma^{k,p} x_\gamma^k \right) = A_p, p = \overline{1, q}, \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned}\Lambda_{\tau\rho}^{k,p} &= \lambda_{\tau\rho}^{k,p} + \sum_{(i,j)^k \in U_R^k} \lambda_{ij}^{k,p} \delta_{ij}^k(\tau, \rho) + \sum_{i \in I_R^{*k}} \lambda_i^{k,p} \delta_i^k(\tau, \rho), \\ \Lambda_\gamma^{k,p} &= \lambda_\gamma^{k,p} + \sum_{(i,j)^k \in U_R^k} \lambda_{ij}^{k,p} \delta_{ij}^k(\gamma) + \sum_{i \in I_R^{*k}} \lambda_i^{k,p} \delta_i^k(\gamma), \\ A_p &= \beta_p - \sum_{k \in K} \sum_{(i,j)^k \in U_R^k} \lambda_{ij}^{k,p} \tilde{x}_{ij}^k - \sum_{k \in K} \sum_{i \in I_R^{*k}} \lambda_i^{k,p} \tilde{x}_i^k.\end{aligned}$$

В системе (7) отделим переменные, относящиеся ко множеству  $W$ , после чего получим (8)

$$\begin{aligned}\sum_{k \in K} \sum_{(\tau, \rho)^k \in U_W^k} \Lambda_{\tau\rho}^{k,p} x_{\tau\rho}^k + \sum_{k \in K} \sum_{\gamma \in I_W^{*k}} \Lambda_\gamma^{k,p} x_\gamma^k &= A_p - \sum_{k \in K} \sum_{(\tau, \rho)^k \in U^k \setminus (U_W^k \cup U_R^k)} \Lambda_{\tau\rho}^{k,p} x_{\tau\rho}^k - \\ &- \sum_{k \in K} \sum_{\gamma \in I_k^* \setminus (I_W^{*k} \cup I_R^{*k})} \Lambda_\gamma^{k,p} x_\gamma^k, p = \overline{1, q}\end{aligned} \quad (8)$$

## 1.3 Теоретические свойства мультиграфов

**О п р е д е л е н и е 4.** Будем называть опорой мультиграфа  $G$  для систем (1)-(2) такую упорядоченную пару множеств  $Z = \{U_Z^k, I_Z^{*k}, k \in K\}$ ,  $U_Z^k \subseteq U^k$ ,  $I_Z^{*k} \subseteq I_k^*$ , что для  $\tilde{Z} = \{\tilde{U}^k, \tilde{I}_k^*, k \in K\}$ , при  $\tilde{U}^k = U_Z^k$ ,  $\tilde{I}_k^* = I_Z^{*k}$  система

$$\sum_{j \in I_i^+(\tilde{U}^k)} x_{ij}^k - \sum_{j \in I_i^-(\tilde{U}^k)} x_{ji}^k = \begin{cases} 0, & i \in I^k \setminus \tilde{I}_k^*, \\ x_i^k \text{sign}(i), & i \in \tilde{I}_k^*; \end{cases} \quad k \in K; \quad (9)$$

$$\sum_{k \in K} \left( \sum_{(i,j)^k \in \tilde{U}^k} \lambda_{ij}^{k,p} x_{ij}^k \right) + \sum_{k \in K} \sum_{i \in \tilde{I}_k^*} \lambda_i^{k,p} x_i^k = 0, \quad p = \overline{1, q}$$

имеет только тривиальное решение, но система (9) имеет нетривиальное решение хотя бы для одной из следующих пар  $\tilde{Z}$ :

1.  $\tilde{Z} = \{\tilde{U}^k, \tilde{I}_k^*, k \in K\}$ , при  $\tilde{U}^{k_0} = U_Z^{k_0} \cup \{(i_0, j_0)^{k_0}\}$ ,  $(i_0, j_0)^{k_0} \in U^{k_0} \setminus U_Z^{k_0}$ ;  
 $\tilde{U}^k = U_Z^k$ , при  $k \in K \setminus \{k_0\}$ ;  
 $\tilde{I}_k^* = I_Z^{*k}$ ,  $k \in K$ ;
2.  $\tilde{Z} = \{\tilde{U}^k, \tilde{I}_k^*, k \in K\}$  при  $\tilde{U}^k = U_Z^k$ ,  $k \in K$ ;  
 $\tilde{I}_{k_0}^* = I_Z^{*k_0} \cup \{i_0\}$ ,  $i_0 \in I_{k_0}^* \setminus I_Z^{*k_0}$ ;  
 $\tilde{I}_k^* = I_Z^{*k}$ ,  $k \in K \setminus \{k_0\}$ .

**Теорема 5.** Пара множеств  $Z = \{U_Z^k, I_Z^{*k}, k \in K\}$ ,  $U_Z^k \subseteq U^k$ ,  $I_Z^{*k} \subseteq I_k^*$  является опорой мультиграфа  $G = \{I, U\}$  для системы (1)-(2) тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

1. Пара множеств  $Z = \{U_Z^k, I_Z^{*k}, k \in K\}$  может быть разделена на 2 пары множеств:  $R = \{U_R^k, I_R^{*k}, k \in K\}$  и  $W = \{U_W^k, I_W^{*k}, k \in K\}$ , такие, что  $R \cup W = Z$  и  $R \cap W = \emptyset$  и при этом  $R$  — опора мультиграфа  $G$  для системы (1);
2.  $|W| = q$ , где  $q$  — количество линейно независимых уравнений в системе (2), или ранг системы (2), то есть  $q = \text{rank}(2)$ ;
3. матрица  $D$  системы (8), элементами которой являются детерминанты  $\Lambda_{\tau\rho}^{k,p}, \Lambda_{\gamma}^{k,p}$  структур, порожденных дугами и узлами пары  $W$ , является невырожденной.

Таким образом введено понятие опоры мультиграфа для систем (1)-(2). Из теоремы 5 следует, что для построения опоры мультиграфа  $G = \{I, U\}$   $Z = \{U_Z^k, I_Z^{*k}, k \in K\}$  необходимо сначала построить опору мультиграфа  $G$  для системы (1)  $R = \{U_R^k, I_R^{*k}, k \in K\}$ , которая образует лес деревьев, который покрывает все узлы из множества  $I^k$ ,  $\forall k \in K$  и каждая компонента связности этого леса деревьев включает ровно один узел из множества  $I_R^{*k}$ . Далее произвольно выбирается

$$W = \{U_W^k, I_W^{*k}, k \in K\} |W| = q$$

и

$$N = \{U_N^k, I_N^{*k}, k \in K\}, U_N^k = U^k \setminus (U_R^k \cup U_W^k), I_N^{*k} = I_k^* \setminus (I_R^{*k} \cup I_W^{*k})$$

и вычисляются детерминанты элементов путем добавления элементов этих множеств к опоре  $R$  и поиска циклов или цепей.

#### 1.4 Постановка задачи о расположении программируемых устройств (сенсоров) для оценки величины потока в узлах мультиграфа

Рассмотрим конечный связный ориентированный мультиграф  $G = \{I, U\}$ , и пусть для фиксированного  $k \in K$  орграф  $G^k = \{I^k, U^k\}$  симметричный, то есть если  $(i, j)^k \in U^k$ , то  $(j, i)^k \in U^k$ . Заметим, что  $G^k$  — орграф, величина потока на дугах  $(i, j)^k$  и  $(j, i)^k$  в общем случае будет различна. Чтобы подчеркнуть это различие, мы будем рассматривать  $G^k = I^k, U^k$  как двунаправленный орграф.

Величину потока будем рассматривать как функцию  $x : U \rightarrow R$ , которая удовлетворяет следующей системе:

$$\sum_{j \in I_i^+(U^k)} x_{ij}^k - \sum_{j \in I_i^-(U^k)} x_{ji}^k = \begin{cases} 0, & i \in I^k \setminus I_k^*, \\ x_i^k, & i \in I_k^*. \end{cases}, k \in K, \quad (10)$$

где  $I_k^* \subseteq I^k, k \in K$  — множество узлов с переменным внешним потоком,  $x_i^k$  — переменный внешний поток на узле  $i \in I_k^*$ . Если переменный внешний поток  $x_i^k$  узла  $i$  положительный, то узел  $i$  — источник, если  $x_i^k$  — отрицательный, то узел  $i$  — сток. Для переменных внешних потоков должно выполняться условие глобального баланса:

$$\sum_{i \in I_k^*} x_i^k = 0, \forall k \in K.$$

Из теоремы 1 следует, что если  $I_k^* \neq \emptyset$ , то ранг системы (10) для связного орграфа  $G^k = (I^k, U^k)$  для фиксированного  $k \in K$  будет равен количеству узлов  $G^k$ , то есть  $rank(10) = |I^k|$ .

Пусть для того, чтобы получить информацию о величине потока на дугах  $(i, j)^k \in U^k$  и переменных интенсивностях узлов  $i \in I_k^*, k \in K$ , необходимо поместить "сенсор" на соответствующий узел. Узлы орграфа, на которых были



размещены сенсоры, будем называть отслеживаемыми (monitored), а множество всех отслеживаемых узлов обозначим  $M$ , т.е.  $M = \bigcup_{k \in K} M^k$ ,  $M^k \subseteq I^k$ ,  $k \in K$ . Предполагается, что если узел  $i^k$  — отслеживаемый, то известны величины потоков на всех входящих в него и исходящих из него дугах то есть

$$x_{ij}^k = f_{ij}^k, j \in I_i^+(U^k), \quad x_{ji}^k = f_{ji}^k, j \in I_i^-(U^k), \quad i \in M^k, \quad k \in K. \quad (11)$$

Если множество отслеживаемых узлов  $M$  содержит узлы  $i^k \in I_k^*$ , то нам также известны их переменные интенсивности, то есть

$$x_i^k = f_i^k, \quad i \in M^k \cap I_k^*, \quad k \in K. \quad (12)$$

Рассмотрим узел  $i \in I^k$  сети  $G^k = (I^k, U^k)$ . пусть для каждой исходящей дуги  $(i, j)^k \in U^k$  известна действительная величина  $p_{ij}^k \in (0, 1]$ , которая отражает, какая часть величины всего исходящего потока на узле  $i$   $\sum_{j \in I_i^+(U^k)} x_{ij}^k$  идет по дуге  $(i, j)^k$ . То есть

$$x_{ij}^k = p_{ij}^k \sum_{\tilde{j} \in I_i^+(U^k)} x_{i\tilde{j}}^k.$$

Таким образом, если  $|I_i^+(U^k)| > 1$  для узла  $i \in I^k$ , то величины потоков на всех исходящих дугах могут быть выражены через величину потока на одной из них, например выберем дугу  $(i, \tilde{j})^k \in U^k$ ,  $\tilde{j} \in I_i^+(U^k)$ , тогда все  $x_{ij}^k$ ,  $j \in I_i^+(U^k)$  можно записать в виде:

$$x_{ij}^k = \frac{p_{ij}^k}{p_{i\tilde{j}}^k} x_{i\tilde{j}}^k, \quad j \in I_i^+(U^k). \quad (13)$$

Заметим, что формула (13) справедлива и при  $j = \tilde{j}$ , тогда  $x_{ij}^k = \frac{p_{ij}^k}{p_{i\tilde{j}}^k} x_{i\tilde{j}}^k = x_{ij}^k$ .

Таким образом можно сформулировать задачу о расположении сенсоров: *какое минимальное число отслеживаемых узлов необходимо для того, чтобы система (10) имела единственное решение.*

Иначе говоря необходимо построить множество

$$M = \bigcup_{k \in K} M^k,$$

такое, что  $|M| \rightarrow \min$  и система (10) с учетом (11)-(12), а также (13) имеет единственное решение.

Отметим, что данная задача имеет широкое применение в различных областях, позволяя минимизировать затраты на установку оборудования для оценки

потока. Например, если представить дорожную сеть некоторого города в качестве сети  $G$ , где транспортные развязки образуют узлы, а дороги — дуги, въезды, выезды и парковки считать внешним потоком, а в качестве различных типов потока задать грузовой, пассажирский, легковой, пешеходный транспорт, то полученный граф будет разреженный, так как в большинстве случаев планировка дорог планарна, и степень большинства развязок не превосходит 4 (перекрестки). Таким образом решив задачу о расположении сенсоров для такого мультиграфа можно с минимальными затратами покрыть город сенсорами и получить возможность оценить интенсивность транспортного потока, что в свою очередь позволит произвести оптимизацию в сильно загруженных местах.

## Глава 2. АЛГОРИТМИЧЕСКИЕ И СТРУКТУРНЫЕ СВОЙСТВА ПОСТРОЕНИЯ ОПТИМАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОЦЕНКИ ПОТОКОВ НА НЕНАБЛЮДАЕМОЙ ЧАСТИ МУЛЬТИГРАФА

### 2.1 Вычисление оценки величины потока на ненаблюдаемой части мультиграфа с учетом коэффициентов $p_{ij}$

Рассмотрим систему (10). Подставим в нее известные величины потока, то есть для узлов

$$i \in M, \quad M = \bigcup_{k \in K} M^k$$

$$x_{ij}^k = f_{ij}^k, j \in I_i^+(U^k), \quad x_{ji}^k = f_{ji}^k, j \in I_i^-(U^k), \quad i \in M^k, \quad k \in K$$

считаем, что величины  $f_{ij}^k$  известны.

Если  $|I_i^+(U^k)| > 1$  для узла  $i \in I^k$ , то величины потоков на всех исходящих дугах могут быть выражены через величину потока на одной из них, например выберем дугу  $(i, \tilde{j})^k \in U^k, \tilde{j} \in I_i^+(U^k)$ , тогда все  $x_{ij}^k, j \in I_i^+(U^k)$  можно записать в виде:

$$x_{ij}^k = \frac{p_{ij}^k}{p_{i\tilde{j}}^k} x_{i\tilde{j}}^k, j \in I_i^+(U^k). \quad (14)$$

Подставим (14) в систему (10),  $i \in I^k, k \in K$ .

Теперь удалим из графов  $G^k = (I^k, U^k), k \in K$  все дуги и узлы, для которых величина потока и переменные интенсивности уже определены. Таким образом получим новый мультиграф  $\bar{G} = (\bar{I}, \bar{U})$ , состоящий из графов  $\bar{G}^k = (\bar{I}^k, \bar{U}^k), k \in K$ , причем  $\bar{G}^k = (\bar{I}^k, \bar{U}^k)$  — в общем случае несвязный граф, относящийся к соответствующему типу потока  $k \in K$ . Для каждой мультидуги  $(i, j) \in \bar{U}$  введем множество  $\bar{K}(i, j) = \{k \in K : (i, j)^k \in \bar{U}^k\}$  содержащее все типы потоков, проходящие по этой мультидуге.

Новый мультиграф  $\bar{G}$  несвязный, то есть можно выделить в нем компоненты связности, некоторые из которых могут не содержать ни одного из узлов с переменной интенсивностью  $i \in \bar{I}_k^*$ , где  $\bar{I}_k^*$  — множество узлов с переменной интенсивностью полученного графа  $\bar{G}^k, k \in K$ .

Если  $|I_i^+(\bar{U}^k)| > 1$  для узла  $i \in \bar{I}^k$ , то величины потоков на всех исходящих дугах могут быть выражены через величину потока на одной из них, например выберем дугу  $(i, \tilde{j})^k \in \bar{U}^k, \tilde{j} \in I_i^+(\bar{U}^k)$ , тогда все  $x_{ij}^k, j \in I_i^+(\bar{U}^k)$  можно записать в виде:

$$x_{ij}^k = \frac{p_{ij}^k}{p_{i\tilde{j}}^k} x_{i\tilde{j}}^k, j \in I_i^+(\bar{U}^k). \quad (15)$$

При этом система (10) с учетом (15) для нового мультиграфа  $\overline{G}$  примет следующий вид:

$$\sum_{j \in I_i^+(\overline{U}^k)} x_{ij}^k - \sum_{j \in I_i^-(\overline{U}^k)} x_{ji}^k = \begin{cases} a_i^k, & i \in \overline{I}^k \setminus \overline{I}_k^*, \\ x_i^k + b_i, & i \in \overline{I}_k^*; \end{cases}, \quad k \in K; \quad (16)$$

$$\sum_{(i,j) \in \overline{U}} \sum_{k \in \overline{K}(i,j)} \lambda_{ij}^{k,p} x_{ij}^k = 0, \quad p = \overline{1}, q,$$

где  $a_i^k, b_i, \lambda_{ij}^{k,p} = \text{const.}$

Приведем алгоритм построения множества

$$\overline{I} = \bigcup_{k \in K} I^k \setminus M_k^*,$$

то есть множества узлов нового мультиграфа  $\overline{G}$ :

1. Построить разрез  $CC(M) = \bigcup_{k \in K} CC(M^k)$  для множества отслеживаемых узлов  $M = \bigcup_{k \in K} M^k$ .
2. Найти узлы множества  $I(CC(M))$ .
3. Построить множество  $M_k^+ = I(CC(M^k)) \setminus M^k, \quad k \in K$ .
4. Сформировать множества  $M_k^* = M^k \cup M_k^+$  и  $\overline{I}^k = I^k \setminus M_k^*, \quad k \in K$ .

Неизвестные переменные в системе (16) — это величины потоков на исходящих дугах из узлов  $i \in \overline{I}^k, \quad k \in K$ , а также переменные интенсивности  $x_i^k$  узлов  $i \in \overline{I}_k^*, \quad k \in K$  нового мультиграфа  $\overline{G}$ . Этот новый мультиграф  $\overline{G}$  состоит из компонент связности. Если фиксированная компонента связности нового мультиграфа  $\overline{G}$  содержит узлы из множества  $\overline{I}_k^*$ , то, по теореме 1, с помощью теоремы 4 можно найти ранг матрицы системы (16), так как система (16) — частный случай системы (1)-(2) для этой компоненты связности.

Если фиксированная компонента связности нового мультиграфа  $\overline{G} = (\overline{I}, \overline{U})$  не содержит узлов с переменной интенсивностью из  $\overline{I}_k^*$ , то мы используем теорию декомпозиции, описанную в [2] для этой компоненты связности.

Система (16) имеет единственное решение для заданного  $M$  тогда и только тогда, когда ранг матрицы этой системы совпадает с количеством неизвестных в ней.

## 2.2 Алгоритм построения опоры графа

Рассмотрим мультиграф  $G = (I, U)$  и заметим, что опора этого мультиграфа  $R = \{U_R^k, I_R^{*k}\}, k \in K$  может быть построена как объединение опор  $R^k$  графов  $G^k = (I^k, U^k), k \in K$ , причем для фиксированного  $k \in K$  построение опоры  $R^k$  зависит только от графа  $G^k$ . Этот факт следует из теоремы 4. Таким образом построение опоры мультиграфа может быть сведено к построению  $|K|$  опор графов с однородным потоком.

Рассмотрим теперь граф  $G = (I, U), |K| = 1$ , то есть случай однородного потока. Для этого графа запишем систему (1) в виде:

$$\sum_{j \in I_i^+(U)} x_{ij} - \sum_{j \in I_i^-(U)} x_{ji} = \begin{cases} a_i, & i \in I \setminus I^*, \\ a_i + x_i, & i \in I^*. \end{cases}, \quad (17)$$

Для системы (17) выполняется тождество глобального баланса (18), которое может быть получено путем суммирования уравнений системы (17).

$$\sum_{i \in I \setminus I^*} a_i + \sum_{i \in I^*} (a_i + x_i) = 0. \quad (18)$$

Уравнение (18), после перегруппировки слагаемых, может быть записано в виде (19)

$$\sum_{i \in I^*} x_i = - \sum_{i \in I} a_i. \quad (19)$$

Рассмотрим теперь граф  $\hat{G} = (I \cup \{\xi\}, U \cup \{(\xi, u), u \in I^*\})$ , который получается добавлением к графу  $G = (I, U)$  фиктивного узла  $\xi$  и дуг  $(\xi, u), u \in I^*$ . Также положим переменный внешний поток  $\hat{x}_i = 0, i \in I^*$ . Для графа  $\hat{G}$  запишем систему уравнений баланса (1) в виде

$$\begin{aligned} \sum_{j \in I_i^+(U)} x_{ij} - \sum_{j \in I_i^-(U)} x_{ji} &= a_i, i \in I \setminus I^*, \\ \sum_{j \in I_i^+(U)} x_{ij} - \sum_{j \in I_i^-(U)} x_{ji} - x_{\xi i} &= a_i, i \in I^*, \\ \sum_{j \in I^*} x_{\xi j} &= a_\xi. \end{aligned} \quad (20)$$

Выполним простое преобразование, получим (21)

$$\begin{aligned}
\sum_{j \in I_i^+(U)} x_{ij} - \sum_{j \in I_i^-(U)} x_{ji} &= a_i, i \in I \setminus I^*, \\
\sum_{j \in I_i^+(U)} x_{ij} - \sum_{j \in I_i^-(U)} x_{ji} &= x_{\xi i} + a_i, i \in I^*, \\
\sum_{j \in I^*} x_{\xi j} &= a_\xi
\end{aligned} \tag{21}$$

Просуммировав уравнения (21) получим (22)

$$a_\xi = - \sum_{i \in I^*} a_i \tag{22}$$

Полученная система уравнений (21) – (22) соответствует рассмотренной ранее системе уравнений (17), (19) при  $x_{\xi i} = x_i, i \in I^*$ .

Таким образом задача построения опоры графа с переменным внешним потоком эквивалентна задаче построения опоры для приведенного графа  $\widehat{G}$  с постоянным внешним потоком. Для графа  $\widehat{G}$  опора совпадает с его остовом, т.е.  $\widehat{R} = \{\widehat{U}_T, \emptyset\}$  и может быть построена простым обходом в ширину или глубину или любым другим известным способом. Заметим, что оптимальный способ построения остова выбирается в зависимости от структуры графа и специфики предметной области, однако оценочная сложность для них составляет  $O(|I| + |U|)$ .

Опора графа  $G = (I, U)$  получается из опоры  $\widehat{R}$  вспомогательного графа  $\widehat{G}$  путем удаления узла  $\xi$  и добавления узлов  $i \in I^*$ , смежных с узлом  $\xi$ , т.е.  $R = \{U_R, I_R^*\}$ ,  $U_R = \{(u, v) \in \widehat{U}_T, u \neq \xi\}$ ,  $I_R^* = \{u, (\xi, u) \in \widehat{U}_T\}$ .

Докажем, что построенная пара множеств  $R$  является опорой. Для доказательства воспользуемся теоремой 4. Покажем, что выполнены все условия критерия:

1. Т.к.  $R$  получено из остова  $\widehat{R}$  путем удаления узла, то для него справедливо следующее свойство деревьев: при удалении вершины дерева, оно распадается на лес поддеревьев. таким образом все компоненты связности  $R$  являются поддеревьями дерева  $\widehat{R}$ .
2. Т.к.  $\widehat{R}$  — остов графа  $\widehat{G}$ , то он покрывает все узлы этого графа, т.е. для него множество покрываемых узлов совпадает с множеством узлов графа  $\widehat{G}$  и равно  $I \cup \{\xi\}$ .  $R$  получено из  $\widehat{R}$  путем удаления узла  $\xi$ , т.е. множество покрываемых узлов для него равно  $I$ .

3. Т.к.  $I_R^* ::= \{u, (\xi, u) \in \hat{U}_T\}$ , то после удаления узла  $\xi$  в каждом образованном поддереве окажется в точности 1 опорный узел.

### 2.3 Структуры для представления опоры графа в памяти компьютера

Пусть  $G$  — орграф с постоянным внешним потоком. Такое допущение может быть сделано без ограничения общности, т.к. если  $G$  — орграф с переменным внешним потоком, то его свойства совпадают со свойствами вспомогательного орграфа  $\hat{G}$  с постоянным внешним потоком, как было показано ранее. В этом случае вместо орграфа  $G$  исследуется соответствующий орграф  $\hat{G}$ . В случае постоянного внешнего потока опора графа совпадает с остовом и является деревом. Для хранения таких деревьев в памяти компьютера выберем один из узлов  $r \in I^T$  в качестве корня и временно изменим направления всех дуг так, чтобы они были направлены от корня к листьям и так получим  $T^*$ . Теперь пара  $(T, r)$  образует корневое дерево.

Для представления корневого дерева в памяти воспользуемся корневыми структурами: *pred* и *dir*.

Здесь *pred* — список предков, в котором в ячейке, соответствующей номеру узла  $v \in I^T$  записан номер предыдущего узла из цепи  $C(r, v)$ , для всех  $v \in I^T \setminus \{r\}$ . У корневого узла предок не определен, так что  $pred[r] = 0$ . *dir* — список направлений,  $dir[v] = 1$  если  $(pred[v], v) \in U^T$  и  $-1$ , если  $(v, pred[v]) \in U^T$ ,  $dir[r] ::= 0$ .

Для описания дерева  $T$  приведенных структур достаточно, однако для эффективной работы с ними необходимо добавить 2 вспомогательных структуры: *depth* и *d*. *depth* — список глубин, для каждого узла хранит расстояние от него до корня. *d* — список династического обхода дерева, или его топологическая сортировка.

Алгоритм построения остова и корневых структур приведен в модуле *buildTree* Листинга А1.

Для вычисления характеристических векторов дуг используется алгоритм нахождения наименьшего общего предка (least common ancestor, lca). Утверждается, что при добавлении дуги к корневому дереву образуется ровно 1 цикл, и этот цикл состоит из добавленной дуги  $(u, v) \in U^T$ ,  $C(u, lca(u, v))$  и  $C(v, lca(u, v))$ . Таким образом вычисление  $\delta_{uv}$  сводится к вычислению  $lca(u, v)$  и подъему от каждого из концов дуги к их *lca*. Т.к. предварительно построен список высот, то нахождение *lca* может быть выполнено за  $O(|I|)$  операций подъема, и сложность вычисления всех характеристических векторов составляет  $O(|I| * (|U| - |I|))$  операций.

Отметим, что в случае, если переменный внешний поток неоднородный, то опора графа, в общем случае, не является деревом. В этом случае удобно вос-

пользоваться рассмотренным ранее вспомогательным графом  $\widehat{G}$  и вместо опоры  $R$  хранить и обрабатывать остов  $\widehat{R}$ . Нетрудно видеть, что характеристики узлов  $i \in I^*$  графа  $G$  соответствуют характеристикам дуг  $(\xi, i), i \in I^*$  графа  $\widehat{G}$ .

## 2.4 Структура общего решения задачи оценки величины потока для орграфа с неоднородным внешним потоком

Пусть дан орграф  $G = (I, U)$  и вектор  $a = (a_1, \dots, a_n), n = |I|$  — величина внешнего потока,  $a_i$  — величина внешнего потока на узле  $i \in I$ . Тогда для этого орграфа можно записать систему уравнений баланса вида (23):

$$\sum_{j \in I_i^+(U)} x_{ij} - \sum_{j \in I_i^-(U)} x_{ji} = a_i, \quad i \in I. \quad (23)$$

Пусть для этого графа также задана система из  $q$  дополнительных уравнений вида (24):

$$\sum_{(i,j) \in U} \lambda_{ij}^p x_{ij} = 0, \quad p = \overline{1, q}. \quad (24)$$

В контексте рассматриваемой задачи эти уравнения могут быть получены после применения тождества (13) к дугам, исходящим из ненаблюдаемого узла  $i \in I, |I_i^+(U)| > 1$ . Таким образом задача оценки потока в ненаблюдаемой части орграфа  $G$  эквивалентна задаче нахождения общего решения неоднородной СЛАУ. Из теоремы о структуре общего решения неоднородной СЛАУ [??] следует, что оценка величины потока  $x = (x_{ij}, (i, j) \in U)$  может быть найдена как сумма некоторого частного решения задачи для случая неоднородного внешнего потока и общего решения задачи для случая однородного потока ( $a = \bar{0}$ ). Таким образом необходимо привести алгоритмы построения частного решения  $\tilde{x} = (\tilde{x}_{ij}, (i, j) \in U)$  для задачи с неоднородным внешним протоком и общего решения  $x^o = (x_{ij}^o, (i, j) \in U)$  для задачи однородного внешнего потока (полагая  $a = \bar{0} = (0, \dots, 0)$ ).

## 2.5 Построение частного решения системы уравнений баланса

Рассмотрим систему вида (23) уравнений баланса для графа  $\widehat{G} = (\widehat{I}, \widehat{U}), \widehat{I} = I \cup \{\xi\}, \widehat{U} = U \cup \{(\xi, u) : u \in I^*\}$ :

$$\sum_{j \in I_i^+(\widehat{U})} x_{ij} - \sum_{j \in I_i^-(\widehat{U})} x_{ji} = a_i, \quad i \in \widehat{I}. \quad (25)$$

Пусть  $\widehat{T} = \{\widehat{I}, \widehat{U}_T\}, \widehat{U}_T \subseteq \widehat{U}$  — остов графа  $\widehat{G}$ . Будем называть дуги  $(u, v) \in \widehat{U}_T$  и соответствующие им  $x_{uv}, (u, v) \in \widehat{U}_T$  базисными (опорными, остовными), а остальные — небазисными (неопорными, неостовными). Множество всех небазисных дуг обозначим  $\widehat{U}_{-T}$ , то есть  $\widehat{U}_{-T} = \widehat{U} \setminus \widehat{U}_T$ .



Для построения частного решения системы уравнений баланса (25)  $\tilde{x} = (\tilde{x}_{uv}, (u, v) \in \hat{U})$  положим небазисные компоненты вектора  $\tilde{x}$  равными 0. Тогда для узлов  $i \in \hat{I}$ , которые являются *листьями*  $\hat{T}$  уравнения (25) принимают вид

$$-\tilde{x}_{e(i)} * \text{dir}[i] = a_i, \quad (26)$$

где

$$e(u) = \begin{cases} (u, \text{pred}[u]), & \text{dir}[u] = 1, \\ (\text{pred}[u], u), & \text{dir}[u] = -1. \end{cases}$$

Таким образом можно вычислить дуговые потоки для частного решения для листьев дерева  $\hat{T}$  согласно (26). После этого, подставив найденные значения в уравнения (25) и удалив листья из  $\hat{T}$  можно получить значения для новых листьев. В итоге, повторив эту последовательность действий до тех пор, пока не будет удален последний узел, будут вычислены все базисные компоненты вектора  $\tilde{x}$ .

Заметим, что для вычисления  $\tilde{x}_{e(u)}, u \in \hat{I}$  необходимо и достаточно, чтобы были вычислены все значения базисных потоков для поддерева с корнем в узле  $u$  в дереве  $\hat{T}$ . Чтобы оптимально вычислить эти значения можно выполнить обход  $\hat{T}$  в обратном династическом порядке. Такой порядок обхода гарантирует, что до посещения узла  $u \in \hat{I}$  будут посещены все потомки узла  $u$ . При таком обходе на каждом шаге обновляются ровно 2 значения базисных компонент  $\tilde{x}$  по формулам (используется подход метода Зейделя):

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{e(u)} &= \tilde{x}_{e(u)} - \text{dir}[u] * a_u \\ \tilde{x}_{e(\text{pred}[u])} &= \tilde{x}_{e(\text{pred}[u])} + \text{dir}[u] * \text{dir}[\text{pred}[u]] * \tilde{x}_{e(u)}. \end{aligned} \quad (27)$$

## 2.6 Построение общего решения для однородной системы уравнений баланса

Построим общее решение задачи оценки величины потока для системы уравнений баланса для случая однородного и неоднородного внешнего потока.

Рассмотрим однородную систему уравнений баланса для орграфа  $\hat{G} = (\hat{I}, \hat{U})$ :

$$\sum_{j \in I_i^+(\hat{U})} x_{ij} - \sum_{j \in I_i^-(\hat{U})} x_{ji} = 0, \quad i \in \hat{I}. \quad (28)$$

Для построения общего решения системы (28) зафиксируем  $x_{\tau\rho} = \varphi_{\tau\rho}, (i, j) \in \hat{U}_{-T}$  и заметим, что в *замкнутой* системе (если внешний поток однороден) выполняется закон сохранения потока в цикле, то есть при изменении величины потока на небазисной дуге на величину  $\Delta x_{\tau\rho}, (\tau, \rho) \in \hat{U}_{-T}$ , это изменение распространяется *на и только на* дуги из цикла, порожденного дугой  $(\tau, \rho)$  в дереве

$\widehat{T}$  [??]. Также заметим, что система (28) имеет тривиальное решение. Из свойств характеристических векторов и вышеперечисленных свойств замкнутой системы следует, что характеристические векторы небазисных дуг являются базисом пространства решений системы (28). Таким образом можно записать общее решение в виде

$$x_{ij}^o = \sum_{(\tau, \rho) \in \widehat{U}_{-T}} \varphi_{\tau\rho} * \delta_{ij}(\tau, \rho), (i, j) \in \widehat{U}_T. \quad (29)$$

При этом формула (29) справедлива и для дуг  $(i, j) \in \widehat{U}_{-T}$ , т.к. для  $\delta_{ij}(\tau, \rho)$  справедливы свойства  $\delta_{\tau\rho}(\tau, \rho) = 1, \delta_{ij}(\tau, \rho) = 0, (i, j) \in \widehat{U}_{-T} \setminus \{(\tau, \rho)\}$ .

Таким образом общее решение исходной системы уравнений баланса (25) может быть построено как

$$x = \tilde{x} + x^o, \quad (30)$$

где  $\tilde{x}$  может быть найдено по алгоритму, приведенному в главе 2.5, а  $x^o$  может быть найдено по формуле (29).

## 2.7 Построение общего решения для системы дополнительных уравнений

Подставим в левые части уравнений системы (24)  $x_{ij} = \delta_{ij}(\tau, \rho), (i, j) \in \widehat{U}, \forall (\tau, \rho) \in \widehat{U}_{-T}$ . помучим матрицу детерминантов циклов  $\Lambda = [\Lambda_{\tau\rho}^p, p = \overline{1, q}; (\tau, \rho) \in \widehat{U}_{-T}]$  размера  $q \times |\widehat{U}_{-T}|$ . Т.е.

$$\Lambda_{\tau\rho}^p = \lambda_{\tau\rho}^p + \sum_{(i, j) \in \widehat{U}_T} \lambda_{ij}^p \delta_{ij}(\tau, \rho) = \sum_{(i, j) \in L_{\tau\rho}} \lambda_{ij}^p \delta_{ij}(\tau, \rho), \quad (31)$$

где  $L_{\tau\rho}$  — цикл, порожденный дугой  $(\tau, \rho)$  относительно дерева  $T$ .

Вычислим ранг матрицы  $\Lambda$ . Возможны следующие случаи:

- если  $rank(\Lambda) = q = |\widehat{U}_{-T}|$ , то система имеет единственное решение. Это означает, что исходная сеть  $G$  полностью наблюдаемая. То есть, установив сенсоры в отслеживаемые узлы  $u \in M$ , можно однозначно оценить дуговые потоки всей сети  $G$ .
- если  $rank(\Lambda) < |\widehat{U}_{-T}|$ , то система недоопределена. В этом случае при решении задачи о расположении сенсоров следует выбрать новое множество отслеживаемых узлов  $M$  и перейти к решению задачи оценки потоков в сети для нового множества  $M$ .
- если  $q > |\widehat{U}_{-T}|$  и  $rank(\Lambda) = |\widehat{U}_{-T}|$ , то система переопределена, в этом случае сеть  $G$  наблюдаема и при этом возможно разработать алгоритм проверки и корректировки входных данных на основе избыточных  $rank(\Lambda) - q$  уравнений.

Для построения общего решения задачи оценки потока в сети из  $\widehat{U}_{-T}$  выделяют  $r = \text{rank}(\Lambda)$  опорных для системы дополнительных уравнений дуг  $\widehat{U}_W \subseteq \widehat{U}_{-T}$ ,  $|\widehat{U}_W| = \text{rank}(\Lambda)$  и формируют подматрицу  $\Lambda_W$  из соответствующих столбцов.  $\widehat{U}_W$  выбирают так, чтобы матрица  $\Lambda_W$  была невырожденной. Общее решение этой системы находится как решение системы

$$\Lambda_W x'_W = \beta, \quad (32)$$

где

$$\beta = \left( - \sum_{(i,j) \in \widehat{U}_T} \lambda_{ij}^p \tilde{x}_{ij} - \sum_{(i,j) \in (\widehat{U}_{-T} \setminus \widehat{U}_W)} \lambda_{ij}^p x_{ij}, p = \overline{1, q} \right)' \quad (33)$$

Общее решение систем (23), (24) строится как объединение решений (30) и (32). При этом в решении системы уравнений баланса (30) следует учитывать решение системы дополнительных уравнений (32).

### Глава 3. АНАЛИЗ РАБОТЫ АЛГОРИТМА НА ПРИМЕРЕ ОРГРАФА (ПОСТРОЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ И ЧИСЛЕННЫХ РЕШЕНИЙ)

Проанализируем работу алгоритма декомпозиции системы для оценки потоков в сети, на примере орграфа  $G = (I, U)$ ,  
 $I = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ ,  
 $U = \{(1, 2), (2, 1), (1, 5), (5, 1), (2, 8), (8, 2), (3, 4), (4, 3), (3, 8), (8, 3), (4, 7), (7, 4), (8, 5), (5, 8), (7, 6), (6, 7), (2, 5), (5, 2), (6, 4), (4, 6), (9, 6), (6, 9), (9, 5), (5, 9), (9, 2), (2, 9), (3, 5), (5, 3)\}$ ,  $I^* = \{2, 3, 7, 8, 9\}$  (см. рисунок 3.1).

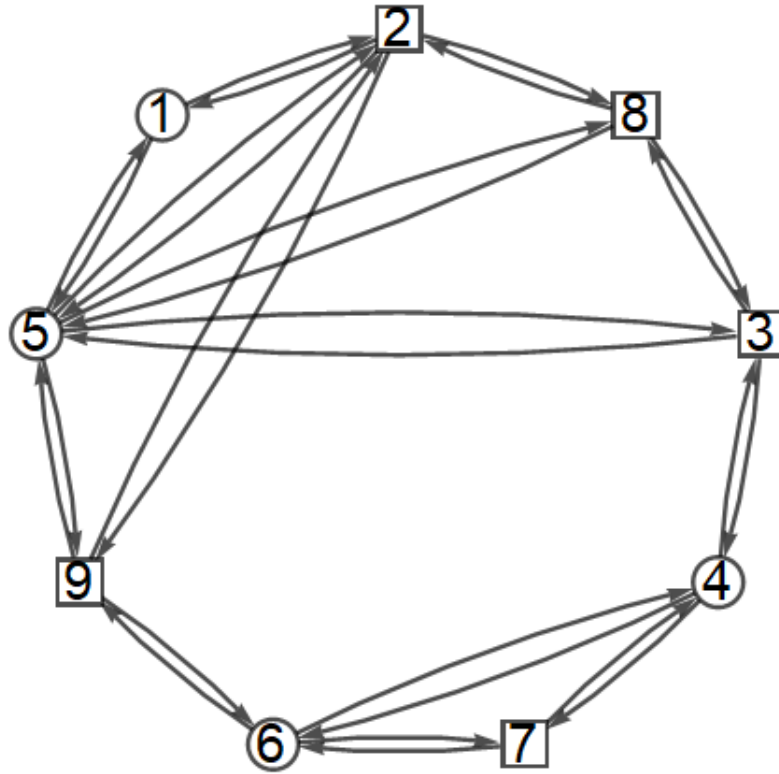


Рисунок 3.1 — Орграф  $G$

На рисунке 3.1 узлы с переменным внешним потоком  $i \in I^*$  помечены квадратами, остальные — кругами.

#### 3.1 Недоопределенная система

Положим  $M = \{9\}$ . Удалим из  $G$  узел  $i = 9$  (см. рисунок 3.2). Построим разрез  $CC(M) = \{(6, 9), (9, 6), (5, 9), (9, 5), (2, 9), (9, 2)\}$ , найдем  $I(CC(M)) = \{2, 5, 6, 9\}$ , построим  $M^+ = I(CC(M)) \setminus M = \{2, 5, 6\}$ , сформируем множества  $M^* = M \cup M^+ = \{2, 5, 6, 9\}$  и  $\tilde{I} = I \setminus M^* = \{1, 3, 4, 7, 8\}$ . Удалим дуги, исходящие из узлов  $i \in \tilde{I}$ , т.к. поток на них известен и получим орграф  $\bar{G} = (\bar{I}, \bar{U})$  — ненаблюдаемую часть орграфа  $G$ ,  $\bar{I} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ ,

$\overline{U} = \{(1, 2), (1, 5), (3, 4), (3, 5), (3, 8), (4, 3), (4, 6), (4, 7), (7, 4), (7, 6), (8, 2), (8, 3), (8, 5)\}$  (см рисунок 3.3).

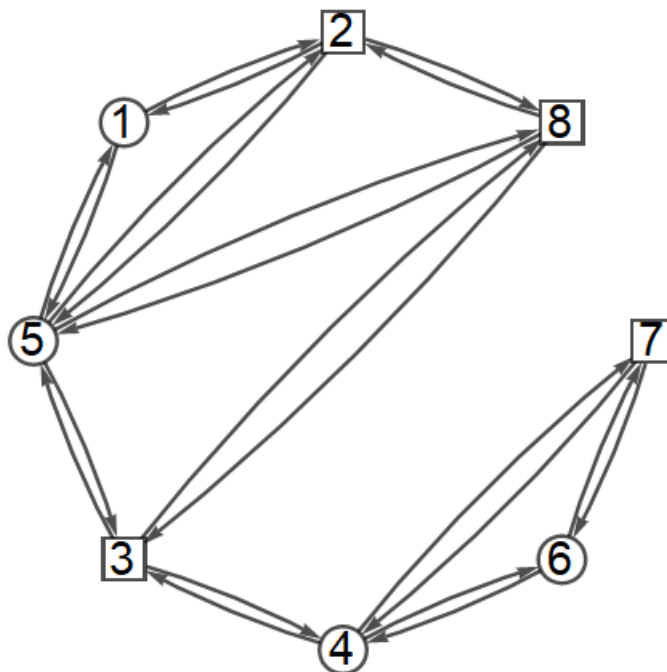


Рисунок 3.2 — Орграф после удаления отслеживаемого узла  $M = \{9\}$

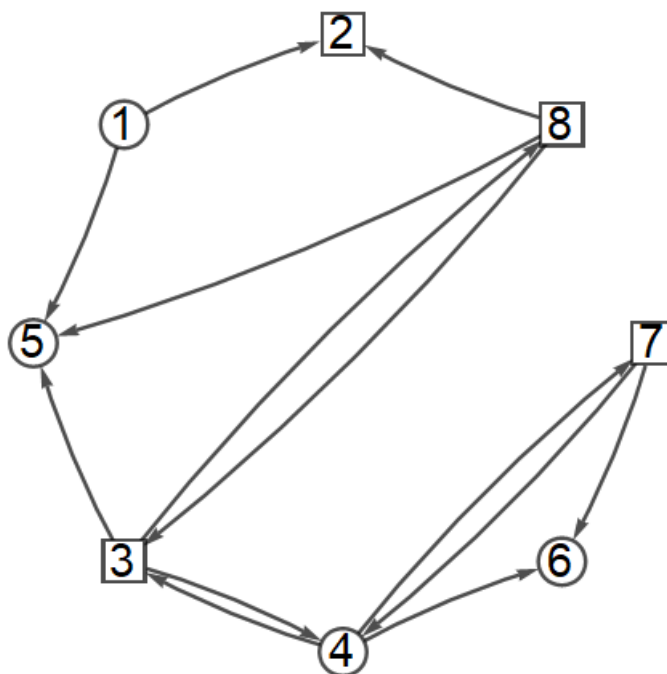


Рисунок 3.3 — Орграф  $\overline{G}$

К орграфу  $\overline{G}$  добавим фиктивный узел  $\xi$  и дуги  $(\xi, 2), (\xi, 3), (\xi, 7), (\xi, 8)$ , получим  $\hat{G} = (\hat{I}, \hat{U})$  и построим опору  $T$  графа  $\hat{G}$  для системы (34) (на рисунке

— — — — —

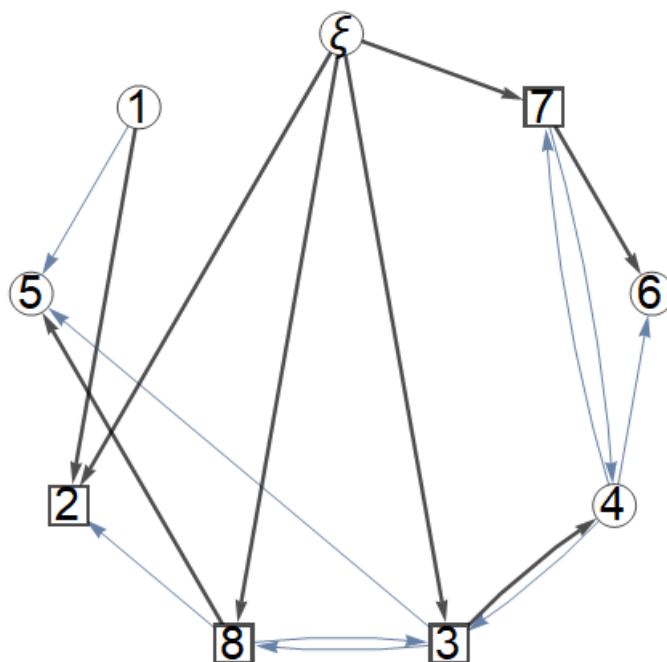


Рисунок 3.3 — Орграф  $\hat{G}$   
с помеченной опорой для системы (34)

Для опоры  $T$  выберем узел  $\xi$  в качестве корня и построим корневые и вспомогательные структуры для представления в памяти компьютера (см. таблицу 3.1).

Таблица 3.1 — Корневые структуры для хранения  $T$

$i$	1	2	3	4	5	6	7	8	$\xi$
$pred[i]$	2	$\xi$	$\xi$	3	8	7	$\xi$	$\xi$	0
$dir[i]$	-1	1	1	1	1	1	1	1	0
$depth[i]$	2	1	1	2	2	2	1	1	0
$d[i]$	8	1	4	7	3	$\xi$	6	5	2

Для орграфа  $\hat{G}$  вычислим  $a_i, i \in \bar{I}$  с учетом преобразований, произведенных ранее, по формулам (14), (15) запишем систему уравнений баланса:

$$\begin{aligned} -x_{1,2} - x_{1,5} &= -\frac{f_{2,9}p_{2,1}}{p_{2,9}} - \frac{f_{5,9}p_{5,1}}{p_{5,9}}, \\ x_{\xi,2} + x_{1,2} + x_{8,2} &= \frac{f_{2,9}(p_{2,1} + p_{2,5} + p_{2,8} + p_{2,9})}{p_{2,9}} - \frac{f_{5,9}p_{5,2}}{p_{5,9}} - f_{9,2}, \\ x_{1,5} + x_{3,5} + x_{8,5} &= \frac{f_{5,9}(p_{5,1} + p_{5,2} + p_{5,3} + p_{5,8} + p_{5,9})}{p_{5,9}} - \frac{f_{2,9}p_{2,5}}{p_{2,9}} - f_{9,5}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_{\xi,8} + x_{3,8} - x_{8,2} - x_{8,3} - x_{8,5} &= -\frac{f_{2,9}p_{2,8}}{p_{2,9}} - \frac{f_{5,9}p_{5,8}}{p_{5,9}}, \\
x_{\xi,3} - x_{3,4} - x_{3,5} - x_{3,8} + x_{4,3} + x_{8,3} &= -\frac{f_{5,9}p_{5,3}}{p_{5,9}}, \\
x_{3,4} - x_{4,3} - x_{4,6} - x_{4,7} + x_{7,4} &= -\frac{f_{6,9}p_{6,4}}{p_{6,9}}, \\
x_{\xi,7} + x_{4,7} - x_{7,4} - x_{7,6} &= -\frac{f_{6,9}p_{6,7}}{p_{6,9}}, \\
x_{4,6} + x_{7,6} &= \frac{f_{6,9}(p_{6,4} + p_{6,7} + p_{6,9})}{p_{6,9}} - f_{9,6}, \\
-x_{\xi,2} - x_{\xi,3} - x_{\xi,7} - x_{\xi,8} &= -f_{2,9} - f_{5,9} - f_{6,9} + f_{9,2} + f_{9,5} + f_{9,6}.
\end{aligned} \tag{34}$$

Положим небазисные потоки равными 0 и построим частное решение системы (34):

$$\begin{aligned}
\tilde{x}_{1,5} &\rightarrow 0, \quad \tilde{x}_{3,5} \rightarrow 0, \quad \tilde{x}_{3,8} \rightarrow 0, \quad \tilde{x}_{4,3} \rightarrow 0, \quad \tilde{x}_{4,6} \rightarrow 0, \\
\tilde{x}_{4,7} &\rightarrow 0, \quad \tilde{x}_{7,4} \rightarrow 0, \quad \tilde{x}_{8,2} \rightarrow 0, \quad \tilde{x}_{8,3} \rightarrow 0, \\
\tilde{x}_{1,2} &\rightarrow \frac{f_{2,9}p_{2,1}}{p_{2,9}} + \frac{f_{5,9}p_{5,1}}{p_{5,9}}, \\
\tilde{x}_{3,4} &\rightarrow -\frac{f_{6,9}p_{6,4}}{p_{6,9}}, \\
\tilde{x}_{7,6} &\rightarrow \frac{f_{6,9}(p_{6,4} + p_{6,7} + p_{6,9})}{p_{6,9}} - f_{9,6}, \\
\tilde{x}_{8,5} &\rightarrow \frac{f_{5,9}(p_{5,1} + p_{5,2} + p_{5,3} + p_{5,8} + p_{5,9})}{p_{5,9}} - \frac{f_{2,9}p_{2,5}}{p_{2,9}} - f_{9,5}, \\
\tilde{x}_{9,2} &\rightarrow \frac{f_{2,9}(p_{2,1} + p_{2,5} + p_{2,8} + p_{2,9})}{p_{2,9}} - \frac{f_{2,9}p_{2,1}}{p_{2,9}} - \frac{f_{5,9}p_{5,1}}{p_{5,9}} - \frac{f_{5,9}p_{5,2}}{p_{5,9}} - f_{9,2}, \\
\tilde{x}_{9,3} &\rightarrow -\frac{f_{5,9}p_{5,3}}{p_{5,9}} - \frac{f_{6,9}p_{6,4}}{p_{6,9}}, \\
\tilde{x}_{9,7} &\rightarrow \frac{f_{6,9}(p_{6,4} + p_{6,7} + p_{6,9})}{p_{6,9}} - \frac{f_{6,9}p_{6,7}}{p_{6,9}} - f_{9,6}, \\
\tilde{x}_{9,8} &\rightarrow \frac{f_{5,9}(p_{5,1} + p_{5,2} + p_{5,3} + p_{5,8} + p_{5,9})}{p_{5,9}} - \frac{f_{2,9}p_{2,5}}{p_{2,9}} - \frac{f_{2,9}p_{2,8}}{p_{2,9}} - \frac{f_{5,9}p_{5,8}}{p_{5,9}} - \\
&\quad - f_{9,5}.
\end{aligned} \tag{35}$$

Построим характеристические векторы  $\delta_{ij}(\tau, \rho)$  (см. таблицу 3.2) в том числе и для дуг, инцидентных узлу  $\xi$  (см. таблицу 3.3).

**Таблица 3.2 — Характеристические векторы**

	$\delta_{1,2}$	$\delta_{1,5}$	$\delta_{8,2}$	$\delta_{3,4}$	$\delta_{4,3}$	$\delta_{3,8}$	$\delta_{8,3}$	$\delta_{4,7}$	$\delta_{7,4}$	$\delta_{8,5}$	$\delta_{7,6}$	$\delta_{4,6}$	$\delta_{3,5}$
(1,5)	-1	1	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0
(8,2)	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
(4,3)	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
(3,8)	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
(8,3)	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
(4,7)	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0
(7,4)	0	0	0	-1	0	0	0	0	1	0	0	0	0
(4,6)	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	-1	1	0
(3,5)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	1

**Таблица 3.3 — Характеристические векторы для дуг, инцидентных  $\xi$**

	$\delta_{\xi,2}$	$\delta_{\xi,3}$	$\delta_{\xi,7}$	$\delta_{\xi,8}$
(1,5)	1	0	0	-1
(8,2)	-1	0	0	1
(4,3)	0	0	0	0
(3,8)	0	1	0	-1
(8,3)	0	-1	0	1
(4,7)	0	1	-1	0
(7,4)	0	-1	1	0
(4,6)	0	1	-1	0
(3,5)	0	1	0	-1

Построим общее решение однородной системы уравнений баланса:



$$\begin{aligned}
x_{1,2} &\rightarrow \frac{f_{2,9}p_{2,1}}{p_{2,9}} + \frac{f_{5,9}p_{5,1}}{p_{5,9}} - x_{1,5}, \\
x_{3,4} &\rightarrow -\frac{f_{6,9}p_{6,4}}{p_{6,9}} + x_{4,3} + x_{4,6} + x_{4,7} - x_{7,4}, \\
x_{8,5} &\rightarrow \frac{f_{5,9}(p_{5,1} + p_{5,2} + p_{5,3} + p_{5,8} + p_{5,9})}{p_{5,9}} - \frac{f_{2,9}p_{2,5}}{p_{2,9}} - f_{9,5} - x_{1,5} - x_{3,5}, \\
x_{7,6} &\rightarrow \frac{f_{6,9}(p_{6,4} + p_{6,7} + p_{6,9})}{p_{6,9}} - f_{9,6} - x_{4,6}, \\
x_{\xi,2} &\rightarrow \frac{f_{2,9}(p_{2,1} + p_{2,5} + p_{2,8} + p_{2,9})}{p_{2,9}} - \frac{f_{2,9}p_{2,1}}{p_{2,9}} - \frac{f_{5,9}p_{5,1}}{p_{5,9}} - \frac{f_{5,9}p_{5,2}}{p_{5,9}} - \\
&\quad - f_{9,2} + x_{1,5} - x_{8,2}, \\
x_{\xi,3} &\rightarrow -\frac{f_{5,9}p_{5,3}}{p_{5,9}} - \frac{f_{6,9}p_{6,4}}{p_{6,9}} + x_{3,5} + x_{3,8} + x_{4,6} + x_{4,7} - x_{7,4} - x_{8,3}, \\
x_{\xi,7} &\rightarrow \frac{f_{6,9}(p_{6,4} + p_{6,7} + p_{6,9})}{p_{6,9}} - \frac{f_{6,9}p_{6,7}}{p_{6,9}} - f_{9,6} - x_{4,6} - x_{4,7} + x_{7,4}, \\
x_{\xi,8} &\rightarrow \frac{f_{5,9}(p_{5,1} + p_{5,2} + p_{5,3} + p_{5,8} + p_{5,9})}{p_{5,9}} - \frac{f_{2,9}p_{2,5}}{p_{2,9}} - \frac{f_{2,9}p_{2,8}}{p_{2,9}} - \\
&\quad - \frac{f_{5,9}p_{5,8}}{p_{5,9}} - f_{9,5} - x_{1,5} - x_{3,5} - x_{3,8} + x_{8,2} + x_{8,3}
\end{aligned} \tag{36}$$

По формулам (14), (15) построим систему дополнительных уравнений

$$\begin{aligned}
x_{1,2} - \frac{p_{1,5}x_{1,5}}{p_{1,2}} &= 0, \quad x_{3,4} - \frac{p_{3,8}x_{3,8}}{p_{3,4}} = 0, \quad x_{3,4} - \frac{p_{3,5}x_{3,5}}{p_{3,4}} = 0, \\
x_{4,3} - \frac{p_{4,7}x_{4,7}}{p_{4,3}} &= 0, \quad x_{4,3} - \frac{p_{4,6}x_{4,6}}{p_{4,3}} = 0, \quad x_{7,4} - \frac{p_{7,6}x_{7,6}}{p_{7,4}} = 0, \\
x_{8,2} - \frac{p_{8,3}x_{8,3}}{p_{8,2}} &= 0, \quad x_{8,2} - \frac{p_{8,5}x_{8,5}}{p_{8,2}} = 0
\end{aligned} \tag{37}$$

и запишем матрицу  $\Lambda$ , элементы которой могут быть найдены по формуле (31):

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -\frac{p_{1,5}}{p_{1,2}} - 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{p_{3,8}}{p_{3,4}} & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -\frac{p_{3,5}}{p_{3,4}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{p_{4,7}}{p_{4,3}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{p_{4,6}}{p_{4,3}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{p_{7,6}}{p_{7,4}} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{p_{8,3}}{p_{8,2}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{p_{8,5}}{p_{8,2}} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{p_{8,5}}{p_{8,2}} \end{pmatrix}.$$

$rank(\Lambda) = 8$ , т.к. небазисных дуг 9, то система недоопределена, выберем  $\hat{U}_W = \{(1, 5), (8, 2), (4, 3), (3, 8), (8, 3), (4, 7), (7, 4), (4, 6)\}$ , тогда  $\hat{U}_{-T} \setminus \hat{U}_W = \{(3, 5)\}$ . Таким образом

$$\Lambda_W = \begin{pmatrix} -\frac{p_{1,5}}{p_{1,2}} - 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{p_{3,8}}{p_{3,4}} & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -\frac{p_{3,5}}{p_{3,4}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{p_{4,7}}{p_{4,3}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{p_{4,6}}{p_{4,3}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{p_{7,6}}{p_{7,4}} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{p_{8,3}}{p_{8,2}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{p_{8,5}}{p_{8,2}} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{p_{8,5}}{p_{8,2}} \end{pmatrix},$$

а

$$\det(\Lambda_W) = \frac{(p_{1,2} + p_{1,5}) p_{3,8} (p_{4,6} p_{4,7} p_{7,4} + p_{4,3} (p_{4,6} p_{7,4} + p_{4,7} (p_{7,4} + p_{7,6}))) p_{8,3}}{p_{1,2} p_{3,4} p_{4,3}^2 p_{7,4} p_{8,2}}.$$

Т.к.  $p_{ij} > 0$ , и в  $\det(\Lambda_W)$  присутствуют только операции умножения и сложения, то  $\det(\Lambda_W) \neq 0 \Rightarrow$  матрица  $\Lambda_W$  — невырожденная.

Вычислим  $\beta$  по формуле (33):

$$\beta = \begin{pmatrix} -\frac{f_{2,9}p_{2,1}}{p_{2,9}} - \frac{f_{5,9}p_{5,1}}{p_{5,9}} \\ \frac{f_{6,9}p_{6,4}}{p_{6,9}} \\ \frac{f_{6,9}p_{6,4}}{p_{6,9}} + \frac{p_{3,5}x_{3,5}}{p_{3,4}} \\ 0 \\ 0 \\ p_{7,6} \left( \frac{f_{6,9}(p_{6,4} + p_{6,7} + p_{6,9})}{p_{6,9}} - f_{9,6} \right) p_{7,4}^{-1} \\ 0 \\ p_{8,5} \left( \frac{f_{5,9}(p_{5,1} + p_{5,2} + p_{5,3} + p_{5,8} + p_{5,9})}{p_{5,9}} - \frac{f_{2,9}p_{2,5}}{p_{2,9}} - f_{9,5} - x_{3,5} \right) \\ \hline p_{8,2} \end{pmatrix} \quad (38)$$

Общее решение системы (34), (37) может быть получено по описанным выше правилам, однако в данном примере оно будет опущено в силу того, что оно занимает слишком много места.

### 3.2 Переопределенная система

В предыдущем примере рассмотрены алгоритмические, структурные и технологические решения разреженной *недоопределенной* системы. Если изменить количество отслеживаемых узлов, либо их конфигурацию, то ранг системы может измениться, т.е. возможно, что система будет *переопределенной*. Рассмотрим случай построения решения для переопределенной системы. Для графа  $G$ , представленного на рисунке 3.1 положим  $M = \{8, 9\}$  и удалим узлы  $i \in M$  из орграфа  $G$  (см. рисунок 3.4).

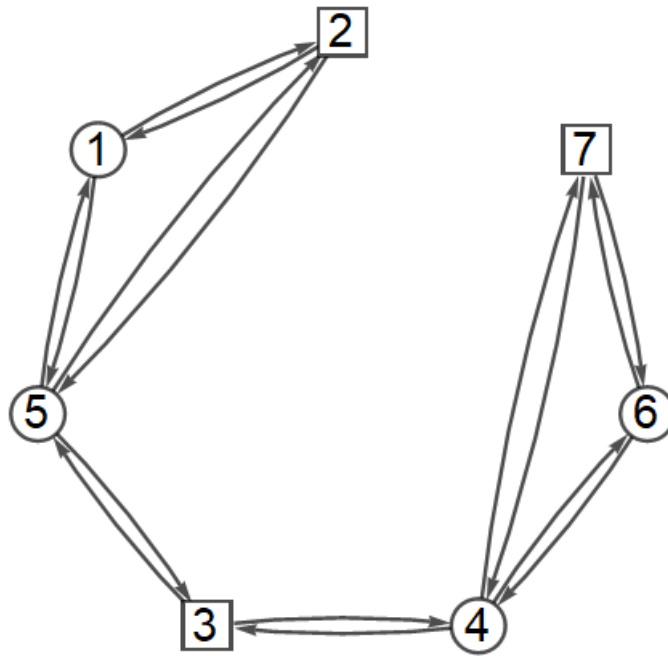


Рисунок 3.4 — Оргграф после  
удаления отслеживаемого узла  $M = \{8, 9\}$

Удалим дуги, исходящие из узлов  $i \in \tilde{I}$ , т.к. поток на них известен и получим оргграф  $\bar{G} = (\bar{I}, \bar{U})$ ,  
 $\bar{I} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ ,  
 $\bar{U} = \{(1, 2), (1, 5), (4, 3), (4, 7), (7, 4), (7, 6), (4, 6)\}$  (см рисунок 3.5).

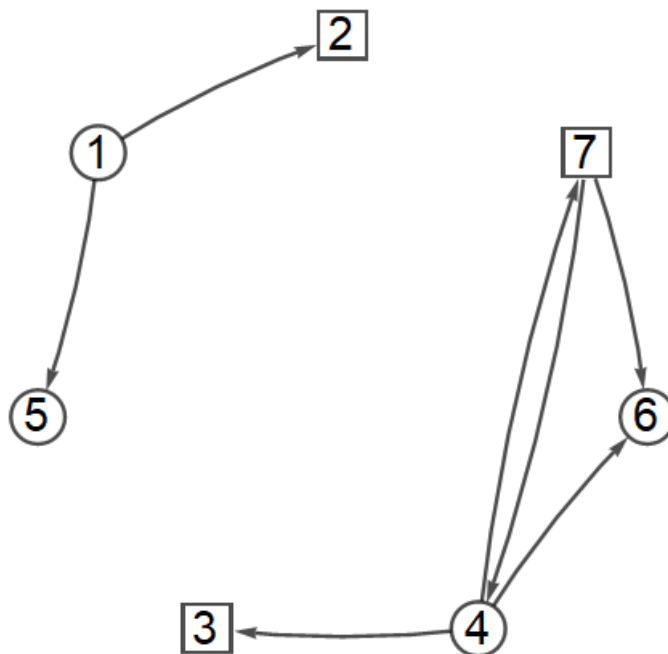
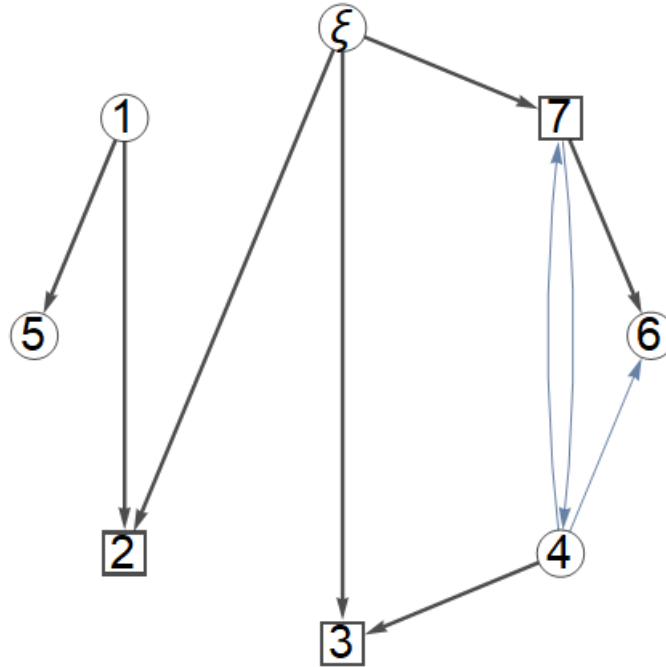


Рисунок 3.5 — Оргграф  $\bar{G}$

Дополним оргграф  $\overline{G} = (\overline{I}, \overline{U})$  узлом  $\xi$  и дугами  $(\xi, 2), (\xi, 3), (\xi, 7)$ , получим оргграф  $\widehat{G} = (\widehat{I}, \widehat{U}), \widehat{I} = \overline{I} \cup \{\xi\}, \widehat{U} = \overline{U} \cup \{(\xi, 2), (\xi, 3), (\xi, 7)\}$  и построим его опору  $T$  (на рисунке 3.4 опора полученного оргграфа отмечена жирными дугами).



**Рисунок 3.6 — Оргграф  $\widehat{G}$   
с помеченной опорой**

Для опоры оргграфа выберем узел  $\xi$  в качестве корня и построим корневые и вспомогательные структуры (см. таблицу 3.4).

**Таблица 3.4 — Корневые структуры для хранения  $T$**

$i$	1	2	3	4	5	6	7	$\xi$
$pred[i]$	2	$\xi$	$\xi$	3	1	7	$\xi$	0
$dir[i]$	-1	1	1	-1	1	1	1	0
$depth[i]$	2	1	1	2	3	2	1	0
$d[i]$	5	1	4	7	3	$\xi$	6	2

Для оргграфа  $\widehat{G}$  вычислим  $a_i, i \in \overline{I}$  с учетом преобразований, произведенных ранее, по формулам (14), (15) запишем систему уравнений баланса:

$$\begin{aligned}
-x_{1,2} - x_{1,5} &= -\frac{f_{2,8}p_{2,1}}{p_{2,8}} - \frac{f_{2,9}p_{2,1}}{p_{2,9}} + p_{5,1} \left( -\frac{f_{5,8}}{p_{5,8}} - \frac{f_{5,9}}{p_{5,9}} \right), \\
x_{\xi,2} + x_{1,2} &= \frac{f_{2,8}(p_{2,1} + p_{2,5} + p_{2,8})}{p_{2,8}} + \frac{f_{2,9}(p_{2,1} + p_{2,5} + p_{2,9})}{p_{2,9}} - \\
&\quad - \frac{f_{5,8}p_{5,2}}{p_{5,8}} - \frac{f_{5,9}p_{5,2}}{p_{5,9}} - f_{8,2} - f_{9,2}, \\
x_{1,5} &= \frac{f_{5,8}(p_{5,1} + p_{5,2} + p_{5,3} + p_{5,8})}{p_{5,8}} + \frac{f_{5,9}(p_{5,1} + p_{5,2} + p_{5,3} + p_{5,9})}{p_{5,9}} - \\
&\quad - \frac{f_{2,8}p_{2,5}}{p_{2,8}} - \frac{f_{2,9}p_{2,5}}{p_{2,9}} - \frac{f_{3,8}p_{3,5}}{p_{3,8}} - f_{8,5} - f_{9,5}, \\
x_{\xi,3} + x_{4,3} &= \frac{f_{3,8}(p_{3,4} + p_{3,5} + p_{3,8})}{p_{3,8}} + p_{5,3} \left( -\frac{f_{5,8}}{p_{5,8}} - \frac{f_{5,9}}{p_{5,9}} \right) - f_{8,3}, \\
-x_{4,3} - x_{4,6} - x_{4,7} + x_{7,4} &= -\frac{f_{3,8}p_{3,4}}{p_{3,8}} - \frac{f_{6,9}p_{6,4}}{p_{6,9}}, \\
x_{\xi,7} + x_{4,7} - x_{7,4} - x_{7,6} &= -\frac{f_{6,9}p_{6,7}}{p_{6,9}}, \\
x_{4,6} + x_{7,6} &= \frac{f_{6,9}(p_{6,4} + p_{6,7} + p_{6,9})}{p_{6,9}} - f_{9,6}, \\
-x_{\xi,2} - x_{\xi,3} - x_{\xi,7} &= -f_{2,8} - f_{2,9} - f_{3,8} - f_{5,8} - f_{5,9} - f_{6,9} + f_{8,2} + f_{8,3} + \\
&\quad + f_{8,5} + f_{9,2} + f_{9,5} + f_{9,6}.
\end{aligned} \tag{39}$$

Положим небазисные потоки равными 0 и построим частное решение системы (39):

$$\begin{aligned}
& \tilde{x}_{4,6} \rightarrow 0, \tilde{x}_{4,7} \rightarrow 0, \tilde{x}_{7,4} \rightarrow 0, \\
& \tilde{x}_{1,2} \rightarrow f_{8,5} + f_{9,5} - p_{5,1} \left( -\frac{f_{5,8}}{p_{5,8}} - \frac{f_{5,9}}{p_{5,9}} \right) + \frac{f_{2,8}p_{2,1}}{p_{2,8}} + \frac{f_{2,8}p_{2,5}}{p_{2,8}} + \frac{f_{2,9}p_{2,1}}{p_{2,9}} + \\
& + \frac{f_{2,9}p_{2,5}}{p_{2,9}} + \frac{f_{3,8}p_{3,5}}{p_{3,8}} - \frac{f_{5,8}(p_{5,1} + p_{5,2} + p_{5,3} + p_{5,8})}{p_{5,8}} - \frac{f_{5,9}(p_{5,1} + p_{5,2} + p_{5,3} + p_{5,9})}{p_{5,9}}, \\
& \tilde{x}_{1,5} \rightarrow -f_{8,5} - f_{9,5} + \frac{f_{5,8}(p_{5,1} + p_{5,2} + p_{5,3} + p_{5,8})}{p_{5,8}} + \frac{f_{5,9}(p_{5,1} + p_{5,2} + p_{5,3} + p_{5,9})}{p_{5,9}} - \\
& - \frac{f_{2,8}p_{2,5}}{p_{2,8}} - \frac{f_{2,9}p_{2,5}}{p_{2,9}} - \frac{f_{3,8}p_{3,5}}{p_{3,8}}, \\
& \tilde{x}_{4,3} \rightarrow \frac{f_{3,8}p_{3,4}}{p_{3,8}} + \frac{f_{6,9}p_{6,4}}{p_{6,9}}, \\
& \tilde{x}_{7,6} \rightarrow \frac{f_{6,9}(p_{6,4} + p_{6,7} + p_{6,9})}{p_{6,9}} - f_{9,6}, \\
& \tilde{x}_{8,2} \rightarrow -f_{8,2} - f_{8,5} - f_{9,2} - f_{9,5} + \frac{f_{2,8}(p_{2,1} + p_{2,5} + p_{2,8})}{p_{2,8}} + \frac{f_{2,9}(p_{2,1} + p_{2,5} + p_{2,9})}{p_{2,9}} + \\
& + \frac{f_{5,8}(p_{5,1} + p_{5,2} + p_{5,3} + p_{5,8})}{p_{5,8}} + p_{5,1} \left( -\frac{f_{5,8}}{p_{5,8}} - \frac{f_{5,9}}{p_{5,9}} \right) + \\
& + \frac{f_{5,9}(p_{5,1} + p_{5,2} + p_{5,3} + p_{5,9})}{p_{5,9}} - \frac{f_{2,8}p_{2,1}}{p_{2,8}} - \frac{f_{2,8}p_{2,5}}{p_{2,8}} - \frac{f_{2,9}p_{2,1}}{p_{2,9}} - \frac{f_{2,9}p_{2,5}}{p_{2,9}} - \\
& - \frac{f_{3,8}p_{3,5}}{p_{3,8}} - \frac{f_{5,8}p_{5,2}}{p_{5,8}} - \frac{f_{5,9}p_{5,2}}{p_{5,9}}, \\
& \tilde{x}_{8,3} \rightarrow -f_{8,3} + \frac{f_{3,8}(p_{3,4} + p_{3,5} + p_{3,8})}{p_{3,8}} + p_{5,3} \left( -\frac{f_{5,8}}{p_{5,8}} - \frac{f_{5,9}}{p_{5,9}} \right) - \frac{f_{3,8}p_{3,4}}{p_{3,8}} - \frac{f_{6,9}p_{6,4}}{p_{6,9}}, \\
& \tilde{x}_{8,7} \rightarrow -f_{9,6} + \frac{f_{6,9}(p_{6,4} + p_{6,7} + p_{6,9})}{p_{6,9}} - \frac{f_{6,9}p_{6,7}}{p_{6,9}}
\end{aligned}$$

Построим характеристические векторы  $\delta_{ij}(\tau, \rho)$  (см. таблицу 3.5).

<b>Таблица 3.5 — Характеристические векторы</b>										
$(\tau, \rho)$	$\delta_{1,2}$	$\delta_{1,5}$	$\delta_{4,3}$	$\delta_{4,7}$	$\delta_{7,4}$	$\delta_{7,6}$	$\delta_{4,6}$	$\delta_{\xi,2}$	$\delta_{\xi,3}$	$\delta_{\xi,7}$
(4,7)	0	0	-1	1	0	0	0	0	1	-1
(7,4)	0	0	1	0	1	0	0	0	-1	1
(4,6)	0	0	-1	0	0	-1	1	0	1	-1

И построим общее решение однородной системы уравнений баланса. В силу слишком большого размера оно приведено не будет.

По формулам (14), (15) построим систему дополнительных уравнений

$$\begin{aligned}
x_{1,2} - \frac{p_{1,5}x_{1,5}}{p_{1,2}} &= 0, \\
x_{4,3} - \frac{p_{4,7}x_{4,7}}{p_{4,3}} &= 0, \\
x_{4,3} - \frac{p_{4,6}x_{4,6}}{p_{4,3}} &= 0, \\
x_{7,4} - \frac{p_{7,6}x_{7,6}}{p_{7,4}} &= 0
\end{aligned} \tag{40}$$

и запишем матрицу  $\Lambda$ , элементы которой могут быть найдены по формуле (31):

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\frac{p_{4,7}}{p_{4,3}} - 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -\frac{p_{4,6}}{p_{4,3}} - 1 \\ 0 & 1 & \frac{p_{7,6}}{p_{7,4}} \end{pmatrix}.$$

$\text{rank}(\Lambda) = 3$ . Т.к. небазисных дуг 3, а  $q = 4$ , то система переопределена, выберем  $\widehat{U}_W = \widehat{U}_{-T}$ , тогда  $\widehat{U}_{-T} \setminus \widehat{U}_W = \emptyset$ . Таким образом нужно выбрать 3 линейно независимых уравнения, т.к. 4-е линейно зависимо от них и должно выполняться при условии, что коэффициенты  $p_{ij}$  и значения  $f_{ij}$  заданы корректно. Выберем уравнения с номерами 2,3,4 и соответствующую им подматрицу

$$\Lambda_W = \begin{pmatrix} -\frac{p_{4,7}}{p_{4,3}} - 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -\frac{p_{4,6}}{p_{4,3}} - 1 \\ 0 & 1 & \frac{p_{7,6}}{p_{7,4}} \end{pmatrix}$$

тогда

$$\det(\Lambda_W) = \frac{p_{4,3} \left( -p_{4,6} - \frac{p_{4,7}(p_{7,4} + p_{7,6})}{p_{7,4}} \right) - p_{4,6}p_{4,7}}{p_{4,3}^2}.$$

Т.к.  $p_{ij} > 0$ , то в выражении  $\det(\Lambda_W)$  все слагаемые строго отрицательны, тогда  $\det(\Lambda_W) \neq 0 \Rightarrow$  матрица  $\Lambda_W$  — невырожденная.

Вычислим  $\beta$  по формуле (33). Опустим результат вычисления в силу громоздкости. Общее решение систем (39), (40) может быть получено по описанным выше правилам, однако в данном примере оно будет опущено в силу того, что оно занимает слишком много места.

### 3.3.1 Единственное решение (аналитический вид)

В примере 3.2 система переопределена и, при условии корректности входных данных, имеет единственное решение. Однако полученное решение при



$M = \{8, 9\}$  может не быть оптимальным. При этом можно утверждать, что верхняя граница мощности множества отслеживаемых узлов  $M$  равна 2. Рассмотрим случай  $|M| = 1, M = \{5\}$ . В силу особенностей реализации алгоритма перенумеруем узлы в графе  $G$  так, чтобы отслеживаемые узлы имели максимальные номера, т.е. изменим номер узла 5 на 9, а узла 9 на 5 и получим орграф  $G' = (I', U'), I' = I, U' = \{(1, 2), (2, 1), (1, 9), (9, 1), (2, 8), (8, 2), (3, 4), (4, 3), (3, 8), (8, 3), (4, 7), (8, 9), (9, 8), (7, 6), (6, 7), (2, 9), (9, 2), (6, 4), (4, 6), (5, 6), (6, 5), (5, 9), (9, 5), (5, 2), (2, 5), (3, 9), (9, 3)\}$  (см. рисунок 3.7), тогда  $M' = \{9\}$ .

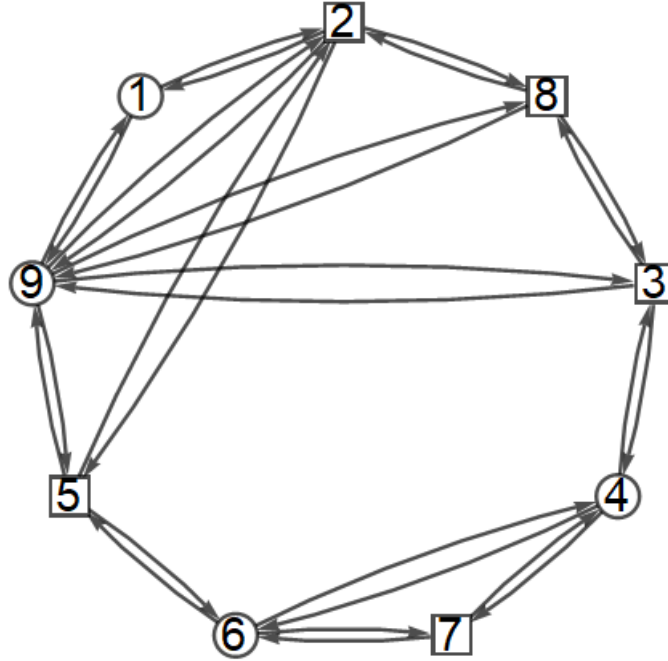


Рисунок 3.7 — Орграф  $G'$

Удалим узлы  $i \in M'$  из орграфа  $G'$  (см. рисунок 3.8).

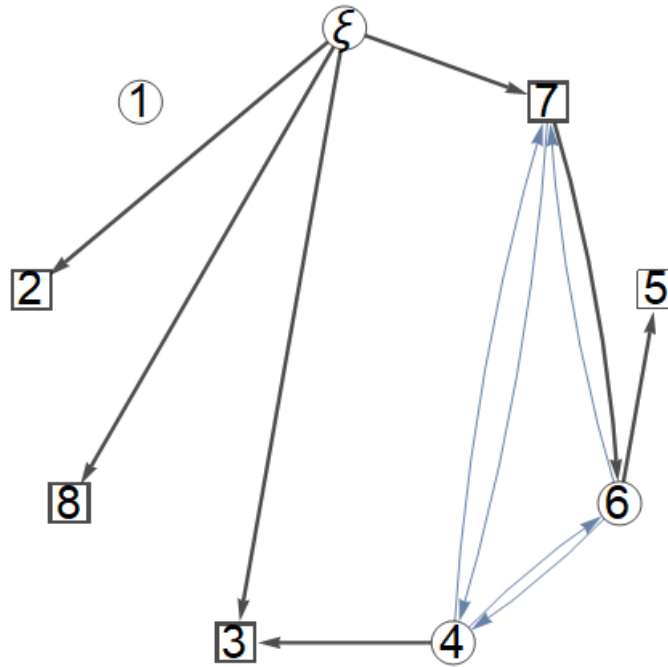


```
graph TD; 4((4)) --> 3[3]; 4((4)) --> 6((6)); 4((4)) --> 7[7]; 6((6)) --> 4((4)); 6((6)) --> 7[7]; 7[7] --> 6((6)); 7[7] --> 7[7]; 5[5] --> 6((6)); 1((1)); 2[2]; 3[3]; 4((4)); 5[5]; 6((6)); 7[7]; 8[8];
```

Рисунок 3.9 — Орграф  $\overline{G}$

Дополним оргграф  $\bar{G} = (\bar{I}, \bar{U})$  узлом  $\xi$  и дугами  $(\xi, 2), (\xi, 3), (\xi, 5), (\xi, 7), (\xi, 8),$

получим оргграф  $\hat{G} = (\hat{I}, \hat{U})$ ,  $\hat{I} = \bar{I} \cup \{\xi\}$ ,  $\hat{U} = \bar{U} \cup \{(\xi, 2), (\xi, 3), (\xi, 5), (\xi, 7), (\xi, 8)\}$  и построим его опору  $T$  (на рисунке 3.10 опора полученного оргграфа отмечена жирными дугами).



**Рисунок 3.10 — Оргграф  $\hat{G}$  с помеченной опорой**

Заметим, что узел 1 оказался в отдельной компоненте связности. Это означает, что, при условии, что входные данные корректны, т.е. выполняется

$$\frac{f_{2,9}p_{2,1}}{p_{2,9}} + f_{9,1} = f_{1,9} \left( \frac{p_{1,2}}{p_{1,9}} + 1 \right),$$

все дуговые потоки, связанные с этим узлом, определены. Теперь необходимо решить задачу оценки потока для второй компоненты связности.

Для опоры оргграфа выберем узел  $\xi$  в качестве корня и построим корневые и вспомогательные структуры (см. таблицу 3.6).

**Таблица 3.6 — Корневые структуры для хранения  $T$**

$i$	2	3	4	5	6	7	8	$\xi$
$pred[i]$	$\xi$	$\xi$	3	6	7	$\xi$	$\xi$	0
$dir[i]$	1	1	-1	1	1	1	1	0
$depth[i]$	1	1	2	3	2	1	1	0
$d[i]$	8	4	7	$\xi$	5	6	3	2

Для оргграфа  $\hat{G}$  вычислим  $a_i, i \in \bar{I}$  с учетом преобразований, произведенных ранее, по формулам (14), (15) запишем систему уравнений баланса:

$$\begin{aligned}
x_{\xi,2} &= \frac{f_{2,9}(p_{2,1} + p_{2,5} + p_{2,8} + p_{2,9})}{p_{2,9}} - \frac{f_{1,9}p_{1,2}}{p_{1,9}} - \frac{f_{5,9}p_{5,2}}{p_{5,9}} - \frac{f_{8,9}p_{8,2}}{p_{8,9}} - f_{9,2}, \\
x_{\xi,8} &= \frac{f_{8,9}(p_{8,2} + p_{8,3} + p_{8,9})}{p_{8,9}} - \frac{f_{2,9}p_{2,8}}{p_{2,9}} - \frac{f_{3,9}p_{3,8}}{p_{3,9}} - f_{9,8}, \\
x_{\xi,3} + x_{4,3} &= \frac{f_{3,9}(p_{3,4} + p_{3,8} + p_{3,9})}{p_{3,9}} - \frac{f_{8,9}p_{8,3}}{p_{8,9}} - f_{9,3}, \\
-x_{4,3} - x_{4,6} - x_{4,7} + x_{6,4} + x_{7,4} &= -\frac{f_{3,9}p_{3,4}}{p_{3,9}}, \\
x_{\xi,7} + x_{4,7} + x_{6,7} - x_{7,4} - x_{7,6} &= 0, \\
x_{4,6} - x_{6,4} - x_{6,5} - x_{6,7} + x_{7,6} &= -\frac{f_{5,9}p_{5,6}}{p_{5,9}}, \\
x_{6,5} &= \frac{f_{5,9}(p_{5,2} + p_{5,6} + p_{5,9})}{p_{5,9}} - \frac{f_{2,9}p_{2,5}}{p_{2,9}} - f_{9,5}, \\
-x_{\xi,2} - x_{\xi,3} - x_{\xi,7} - x_{\xi,8} &= -f_{1,9} - f_{2,9} - f_{3,9} - f_{5,9} - f_{8,9} + f_{9,1} + f_{9,2} + \\
&\quad + f_{9,3} + f_{9,5} + f_{9,8}.
\end{aligned} \tag{41}$$

Положим небазисные потоки равными 0 и построим частное решение системы (41):

$$\begin{aligned}
\tilde{x}_{4,6} &\rightarrow 0, \tilde{x}_{4,7} \rightarrow 0, \tilde{x}_{6,4} \rightarrow 0, \tilde{x}_{6,7} \rightarrow 0, \tilde{x}_{7,4} \rightarrow 0, \\
\tilde{x}_{4,3} &\rightarrow \frac{f_{3,9}p_{3,4}}{p_{3,9}}, \\
\tilde{x}_{6,5} &\rightarrow \frac{f_{5,9}(p_{5,2} + p_{5,6} + p_{5,9})}{p_{5,9}} - \frac{f_{2,9}p_{2,5}}{p_{2,9}} - f_{9,5}, \\
\tilde{x}_{7,6} &\rightarrow \frac{f_{5,9}(p_{5,2} + p_{5,6} + p_{5,9})}{p_{5,9}} - \frac{f_{2,9}p_{2,5}}{p_{2,9}} - \frac{f_{5,9}p_{5,6}}{p_{5,9}} - f_{9,5}, \\
\tilde{x}_{9,2} &\rightarrow \frac{f_{2,9}(p_{2,1} + p_{2,5} + p_{2,8} + p_{2,9})}{p_{2,9}} - \frac{f_{1,9}p_{1,2}}{p_{1,9}} - \frac{f_{5,9}p_{5,2}}{p_{5,9}} - \frac{f_{8,9}p_{8,2}}{p_{8,9}} - f_{9,2}, \\
\tilde{x}_{9,3} &\rightarrow \frac{f_{3,9}(p_{3,4} + p_{3,8} + p_{3,9})}{p_{3,9}} - \frac{f_{3,9}p_{3,4}}{p_{3,9}} - \frac{f_{8,9}p_{8,3}}{p_{8,9}} - f_{9,3}, \\
\tilde{x}_{9,7} &\rightarrow \frac{f_{5,9}(p_{5,2} + p_{5,6} + p_{5,9})}{p_{5,9}} - \frac{f_{2,9}p_{2,5}}{p_{2,9}} - \frac{f_{5,9}p_{5,6}}{p_{5,9}} - f_{9,5}, \\
\tilde{x}_{9,8} &\rightarrow \frac{f_{8,9}(p_{8,2} + p_{8,3} + p_{8,9})}{p_{8,9}} - \frac{f_{2,9}p_{2,8}}{p_{2,9}} - \frac{f_{3,9}p_{3,8}}{p_{3,9}} - f_{9,8}.
\end{aligned}$$

Построим характеристические векторы  $\delta_{ij}(\tau, \rho)$  (см. таблицу 3.7).

**Таблица 3.7 — Характеристические векторы**

	$\delta_{4,3}$	$\delta_{4,7}$	$\delta_{7,4}$	$\delta_{7,6}$	$\delta_{6,7}$	$\delta_{6,4}$	$\delta_{4,6}$	$\delta_{6,5}$	$\delta_{\xi,2}$	$\delta_{\xi,3}$	$\delta_{\xi,7}$	$\delta_{\xi,8}$
(4,7)	-1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	-1	0
(7,4)	1	0	1	0	0	0	0	0	0	-1	1	0
(6,7)	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0
(6,4)	1	0	0	1	0	1	0	0	0	-1	1	0
(4,6)	-1	0	0	-1	0	0	1	0	0	1	-1	0

И построим общее решение однородной системы уравнений баланса. В силу слишком большого размера оно приведено не будет.

По формулам (14), (15) построим систему дополнительных уравнений

$$\begin{aligned}
 x_{4,3} - \frac{p_{4,7}x_{4,7}}{p_{4,3}} &= 0, \\
 x_{4,3} - \frac{p_{4,6}x_{4,6}}{p_{4,3}} &= 0, \\
 x_{6,7} - \frac{p_{6,4}x_{6,4}}{p_{6,7}} &= 0, \\
 x_{6,7} - \frac{p_{6,5}x_{6,5}}{p_{6,7}} &= 0, \\
 x_{7,4} - \frac{p_{7,6}x_{7,6}}{p_{7,4}} &= 0.
 \end{aligned} \tag{42}$$

и запишем матрицу  $\Lambda$ , элементы которой могут быть найдены по формуле (31):

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -\frac{p_{4,7}}{p_{4,3}} - 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & -\frac{p_{4,6}}{p_{4,3}} - 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{p_{6,4}}{p_{6,7}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{p_{7,6}}{p_{7,4}} & -\frac{p_{7,6}}{p_{7,4}} & \frac{p_{7,6}}{p_{7,4}} \end{pmatrix}.$$

$rank(\Lambda) = 5$ . Т.к. небазисных дуг 5 и  $q = 5$ , то система имеет единственное решение. Соответственно выберем  $\widehat{U}_W = \widehat{U}_{-T}$ , тогда  $\widehat{U}_{-T} \setminus \widehat{U}_W = \emptyset$ . Таким образом  $\Lambda_W = \Lambda$ . Тогда

$$\det(\Lambda_W) = -\frac{p_{6,4}(p_{4,6}p_{4,7}p_{7,4} + p_{4,3}(p_{4,6}p_{7,4} + p_{4,7}(p_{7,4} + p_{7,6})))}{p_{4,3}^2 p_{6,7} p_{7,4}}.$$

Т.к.  $p_{ij} > 0$ , то в  $\det(\Lambda_W)$  все слагаемые строго положительны, тогда  $\det(\Lambda_W) \neq 0 \Rightarrow$  матрица  $\Lambda_W$  — невырожденная.

Вычислим  $\beta$  по формуле (33). Опустим результат вычисления в силу громоздкости. Общее решение систем (39), (40) может быть получено по описанным выше правилам, однако в данном примере оно будет опущено в силу того, что оно занимает слишком много места.

Таким образом показано, что оптимальное решение задачи расположения сенсоров для графа  $G$ , изображенного на рисунке 3.1, достигается при одном отслеживаемом узле  $M = \{5\}$ .

## Список литературы

1. L. A. Pilipchuk, Y. V. Malakhouskaya, D. R. Kincaid, and M. Lai, East-West J. of Mathematics 4, No 2, (2002), 191-201.
2. Пилипчук Л. А. Линейные неоднородные задачи потокового программирования: учеб.-метод. пособие / Л. А. Пилипчук. - Минск: БГУ, 2009. - 222 с.
3. L. A. Pilipchuk, A. S. Pilipchuk, Y. H. Pesheva, International Journal of Pure and Applied Mathematics (IJPAM) 54, No 2, (2009), 193-205.
4. I. V. Romanovski, L. A. Pilipchuk, Computing 76, (2006), 353-357.
5. L. Bianco, G. Confessore, M. Gentili, Combinatorial Aspects of the Sensor Location Problem. Annals of Operation Research 144, 1, (2006), 201-234.
6. Пилипчук, Л. А. Разреженные недоопределенные системы линейных алгебраических уравнений / Л. А. Пилипчук. – Минск : БГУ, 2012. – 260 с.