le cnam Ile-de-France	**Révision CNAM 09/03/2023** **UTC501 - Outils mathématiques pour Informatique**	le cnam Ile-de-France

1. Exercice

1. Effectuer la division euclidienne de 2002 par 6
2. Déterminer la congruence de 3^4 et 3^6 modulo 7
3. En déduire le reste de la division euclidienne de 91234^{2002} par 7 .

1. Exercice

Soit l'équation diophantienne **12648 x + 7548 *y* = 204** x et y des entiers

1. Calculer **PGCD (12648, 7548)**, ces deux entiers sont-ils premiers entre eux?

   L'équation **12648 x + 7548 *y* = 204** admet-elle une solution ? justifier votre réponse.

   On divisera l'équation de départ par le **PGCD** trouvé.
2. Soit l'identité de Bézout, **62 x + 37 *y* = 1** En utilisant l'algorithme d'Euclide étendu, déterminer une solution particulière de l'équation
3. Déterminer toutes les solutions de l'identité de Bézout, On utilisera le théorème de Gauss.
4. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation diophantienne de départ.

2. Exercice

On veut coder un mot de deux lettres selon la procédure suivante :

Étape 1 : Chaque lettre du **mot** est remplacée par un <u>entier</u> en utilisant le tableau ci-dessous :

A	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**	**H**	**I**	**J**	**K**	**L**	**M**
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
N	**O**	**P**	**Q**	**R**	**S**	**T**	**U**	**V**	**W**	**X**	**Y**	**Z**
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

On obtient un couple <u>d'entiers</u> (x_1, x_2) où x_1 correspond à la première lettre du mot et

x_2 correspond à la deuxième lettre du mot.

Étape 2 : (x_1, x_2) est transformé en (y_1, y_2) tel que :

$$(S1)\quad \begin{cases} y_1 = 11\,x_1 + 3\,x_2 \pmod{26} \\ y_2 = 7\,x_1 + 4\,x_2 \pmod{26} \end{cases}$$

avec $0 <= y_1 <= 25$ et $0 <= y_2 <= 25$.

Étape 3 : (y_1, y_2) est transformé en un **mot** de deux lettres en utilisant le tableau de correspondance donné dans l'étape 1.

<u>Exemple</u> :

	Étape 1		**étape 2**		**étape 3**	
TE	→	(19,4)	→	(13,19)	→	**NT**

1. Coder le mot **ST.**

2. On admet que le système (S1) est équivalent au système

$$\begin{cases} x_1 = 16\,y_1 + 3\,y_2 \pmod{26} \\ x_2 = 11\,y_1 + 5\,y_2 \pmod{26} \end{cases}$$

Décoder le mot **YJ**

3. Exercice : raisonnement

1. On souhaite montrer que si un entier n^2 est impair alors n est aussi impair
   a. Ecrire et démontrer la contraposée de la proposition qu'on souhaite démontrer.
   b. A-t-on démontré la proposition initiale ? justifier votre réponse.

2. Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$, on a
$$S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

3. Fixons un réel $x \geq 0$. Montrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$, $(1+x)^n \geq 1+nx$

4. Exercice : Chaîne de Markov

Un équipement informatique possède trois modes de fonctionnement : **actif**, en **veille** ou à l'***arrêt***.

Dans le cadre d'une étude énergétique, on s'intéresse au processus décrivant le mode de fonctionnement au cours du temps.

Le basculement d'un mode de fonctionnement à un autre ne peut se faire que toutes les microsecondes.

On note X_n le mode de fonctionnement dans lequel l'équipement informatique se trouve à l'instant t_n correspondant à la $n$ième microseconde d'observation.

Si à l'instant t_n l'équipement se trouve en mode veille, il restera encore en veille à l'instant suivar t_{n+1} avec une probabilité de **0,4** et il basculera en mode actif avec une probabilité de **0,6**.

Si à l'instant t_n l'équipement se trouve en mode actif, il y reste encore à l'instant suivant avec une probabilité de **0,2** et il bascule en mode veille avec une probabilité de **0,2**.

Enfin, si à l'instant t_n il est à l'arrêt, il y reste encore à l'instant suivant avec une probabilité de **0,** et il passe en mode actif avec une probabilité de **0,4**.

On suppose que le processus des modes de fonctionnement **$\{X_n\}$** peut être modélisé par un chaîne de Markov homogène. Le mode veille, actif et à l'arrêt sera représenté respectiveme par l'état **1**, **2** et **3**.

1) Déterminer le graphe et la matrice P de transition.

2) A l'instant initial, l'équipement se trouve en mode veille avec une probabilité de **1/4** et en mode actif avec une probabilité de **1/4**.

a. Donner la distribution de probabilité initiale

b. Quelle est la probabilité qu'il soit en mode actif **2** microsecondes plus tard ?

3) On suppose qu'à un instant donné il est en mode *actif*. Déterminer la probabilité qu'
mode veille, **2** microsecondes plus tard :

a. par un calcul matriciel ;

le cnam Ile-de-France	**Révision CNAM 09/03/2023**	le cnam Ile-de-France
	UTC501 - Outils mathématiques pour Informatique	

ANNEXE

Arithmétique	⇨**Propriété** $d / a, d / b \Rightarrow d / au + bv, \qquad \forall u, v \in \mathbb{Z}$ ⇨**Théorème de Bézout** $Si\ a \wedge b = 1$: il existe des entiers $\exists x, y \in tel\ que\ ax + by = 1$ ⇨**Identité de Bézout** $\forall a, b \in \mathbb{Z}$: il existe des entiers $\exists x, y \in tel\ que\ ax + by = PGCD(a,b)$ ⇨**Théorème de Gauss** $a / bc,\ a \wedge b = 1 \Rightarrow a / c$
Proposition	$P \Rightarrow Q\ : \qquad \neg P \vee Q$
Raisonnement	- Par récurrence - Par contraposé - Par l'absurde - Par un contre exemple
Système linéaire GAUSS	
Chaine de Markov	⇨ **Calcul matriciel** $\Pi_n = \Pi_0 \times M^n$