

Complejidad Computacional

Tema 1: Modelos de computación

¿Qué es la máquina de Turing?

➤ Definiciones:

- Modelo de computación no restringido
- Dispositivo matemático en el que se basan los computadores actuales
- Máquina imaginaria capaz de realizar de forma mecánica, los procesos que realizaría un matemático
- Máquina automática: No está diseñada como una tecnología de computación práctica, sino como un dispositivo hipotético que representa una máquina de computación

¿Qué es la máquina de Turing?

- Formaliza la idea intuitiva de un algoritmo
- Sistema que permitiera modelar cualquier proceso considerado como un cálculo (algoritmo)
- Computador ideal
 - Memoria ilimitada
 - Nunca comete errores
- Tiene más potencia que un autómata finito y el autómata de pila

Turing

- Turing (Londres 1912 – Cheshire 1954)
 - Matemático, lógico, criptógrafo, filósofo inglés
 - Uno de los padres de la computación
 - 1936: Definió la máquina de computación lógica
 - Artículo: *On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem*
 - Segunda Guerra mundial:
 - Trabajó en Bletchley Park
 - Descifrar los mensajes de Enigma
 - Definió “test de Turing”

Turing

- La máquina de computación lógica consistía en:
 - “... una ilimitada capacidad de memoria obtenida en la forma de una cinta infinita marcada con cuadrados, en cada uno de los cuales podría imprimirse un símbolo. En cualquier otro momento hay un símbolo en la máquina; llamado el símbolo leído. La máquina puede alterar el símbolo leído y su comportamiento está en parte determinado por ese símbolo, pero los símbolos en otros lugares de la cinta no afectan el comportamiento de la máquina. Sin embargo, la cinta se puede mover hacia delante y hacia atrás a través de la máquina, siendo esto una de las operaciones de la máquina. Por tanto, cualquier símbolo de la cinta puede tener finalmente una oportunidad.”

Definición

➤ Máquina de Turing:

- Dispositivo mecánico, capaz de adoptar un estado determinado, formado por una cinta infinita y una cabeza de lectura / escritura que se mueve sobre la cinta
- Cinta
 - Secuencia infinita de celdas (memoria ilimitada)
 - En cada celda un símbolo (alfabeto de la cinta)
 - Símbolo blanco
- Cabeza:
 - Lectura / Escritura
 - Movimiento: Izquierda / Derecha

Definición

- Máquina de Turing:
 - Uso de la cinta:
 - Almacenamiento datos de entrada
 - Elemento de salida
 - Memoria auxiliar
 - Estados
 - Se almacena el estado en que se encuentra
 - Número de estados finito
 - Estado inicial
 - Estados de parada

Definición

➤ Máquina de Turing:

- Tabla de instrucciones (función de transición)
 - Qué debe hacer la máquina
- Funcionamiento
 - Inicialmente la cinta contiene la cadena de entrada y el resto en blanco
 - Lee el símbolo en la posición actual
 - En función del símbolo leído y del estado actual
 - Pasa a un nuevo estado
 - Escribe un símbolo en la cinta en la posición actual
 - Mueve la cabeza una posición

Variaciones

- Todas son equivalentes computacionalmente
 - Escritura y movimiento independientes
 - Cinta infinita en una única dirección
 - Cabeza L/E con movimiento “esperar”
 - No determinista
 - División de la cinta en tramos o subceldas
 - Multicinta
 - Multidimensional

Definición Formal

➤ 7-tupla:

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, s, b, F, \delta)$$

donde:

- Q : Conjunto finito de estados
- Σ : Alfabeto de símbolos de entrada
- Γ : Alfabeto de la cinta
 - $\Sigma \subset \Gamma$
- s : Estado inicial
 - $s \in Q$
- b : Símbolo blanco
 - $b \in \Gamma \wedge b \notin \Sigma$

Definición Formal

➤ 7-tupla:

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, s, b, F, \delta)$$

donde:

- F: Conjunto de estados finales de aceptación
 - $F \subseteq Q$
- δ : función de transición
 - $\delta: Q \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{ L, R \}$
 - Función parcial

MT como aceptadoras de lenguajes

- Lenguaje aceptado por una Máquina de Turing:

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, s, b, F, \delta)$$

- El contenido inicial: palabra de entrada
 - La cabeza de L/E al comienzo de la palabra
 - La cadena es aceptada o rechazada
- Lenguaje Turing-reconocible (o recursivamente enumerable)

Definiciones

➤ Descripciones instantáneas

- Contenido de la cinta, estado actual y posición actual en la cinta
- Tripleta , con:
 - $\alpha_1, \alpha_2 \in \Gamma^*$
 - $q \in Q$

➤ Representación de un movimiento (\vdash)

- $q_0 abcd \vdash eq_0 bcd \Leftrightarrow \delta(q_0 a) = (q_0 eR)$

➤ Cierre transitivo de \vdash (\vdash^*)

- $q_0 abcd \vdash^* edbq_1 d \Leftrightarrow q_0 abcd \vdash \dots \vdash edbq_1 d$

MT como computadora de funciones

- Implementación de una función $f: y = f(x)$
 - El contenido inicial: los parámetros
 - El contenido final: el resultado de la función
 - Parada en un estado final
 - Implementa $f: y = f(x)$ si $q_0x \vdash^* q_fy$

Crear máquinas de Turing complejas

- Combinación de Máquinas de Turing
 - Sólo la primera máquina tiene estado de inicio
 - Crear un nuevo estado de parada y eliminar las paradas de cada máquina
 - Para cada estado de parada p y para cada $x \in \Gamma$:
 - Si se detiene: crear la transición al nuevo estado de parada
 - Si se transfiere el control a otra máquina: crear la transición al estado adecuado de la otra máquina