Теорема. (о представимости формул в КНФ).

Для любой формулы $\mathfrak{A}$, не являющейся тавтологией, существует равносильная формула $\mathfrak{B}$, находящаяся в КНФ.

Теорема. (о приведении к СДНФ).

Если формула $\mathfrak{A}$ не является противоречием, то существует равносильная ей формула $\mathfrak{B}$, находящаяся в СДНФ, зависящая от того же списка переменных. Такая СДНФ единственна с точностью до порядка элементарных конъюнкций.

Теорема. (о приведении к СКНФ).

Если формула $\mathfrak{A}$ не является тавтологией, то существует равносильная ей формула $\mathfrak{B}$, находящаяся в СКНФ, зависящая от того же списка переменных. Такая СКНФ единственна с точностью до порядка элементарных дизъюнкций.

Двойственные формулы

Связки & и $\vee$ называются ***двойственными.***

Формула $\mathfrak{A}$ *, содержащая лишь пропозициональные связки из множества $\{\neg; \&; \vee\}$, называется ***двойственной*** формуле $\mathfrak{A}$, если она получена из $\mathfrak{A}$ заменой & на $\vee$ и наоборот. Для таких формул есть свойство:

$$\mathfrak{A}^*(X_1, ..., X_n) \equiv \neg \mathfrak{A}(\neg X_1, ..., \neg X_n)$$

Если формула $\mathfrak{A}$ в СДНФ, то формула $\mathfrak{A}$ * в СКНФ и наоборот.

Алгоритм построения СДНФ по таблице истинности

1. В таблице истинности берем строки с Истинным (единичным) значением формулы (функции).

2. Для каждой такой строки записываем элементарную конъюнкцию по следующему правилу:
   - если значение пропозициональной переменной X_i равно **И** (1), то в элементарную конъюнкцию записываем X_i;
   - если значение пропозициональной переменной X_i равно Л (0), то в элементарную конъюнкцию записываем $\neg X_i$.
3. Все элементарные конъюнкции объединяем дизъюнкциями.

Алгоритм построения СКНФ по таблице истинности

1. В таблице истинности берем строки с Ложным (нулевым) значением формулы (функции).
2. Для каждой такой строки записываем элементарную дизъюнкцию по следующему правилу:
   - если значение пропозициональной переменной X_i равно Л (0), то в элементарную ~~конъюнкцию~~ дизъюнкц. записываем X_i;
   - если значение пропозициональной переменной X_i равно **И** (1), то в элементарную ~~конъюнкцию~~ дизъ. записываем $\neg X_i$.
3. Все элементарные дизъюнкции объединяем конъюнкциями.

Можно построить совершенные формулы и без таблиц истинности.

Алгоритм построения СДНФ и СКНФ с использованием равносильностей

Приведение к ДНФ:

1. По формулам равносильностей 9 и 10 заменяем эквиваленции и импликации через отрицания, конъюнкции и дизъюнкции.
2. По формулам де Моргана 6.1 – 6.2 вносим отрицания к пропозициональным переменным, чтобы они оставались лишь перед пропозициональными переменными, но не перед скобками.

3. По формуле дистрибутивности 4.1 вносим конъюнкции к пропозициональным переменным.

4. Отбрасываем все конъюнкции, содержащие пропозициональную переменную и ее отрицание и доводим вхождение каждой пропозициональной переменной в конъюнкцию до одного (на основании равносильностей 15.1; 13.1; 13.2 и 1.2).

Приведение к СДНФ:

5. Для каждой конъюнкции возможны два варианта:

а) элементарная конъюнкция C содержит переменную X_i или ее отрицание;

б) элементарная конъюнкция C не содержит переменную X_i и ее отрицание, тогда

$$C \equiv (C \,\&\, X_i) \vee (C \,\&\, \neg X_i).$$

6. Повторяем п.5 для всех элементарных конъюнкций, пока для любой пропозициональной переменной из списка переменных не выполнится п.5а.

7. Упорядочиваем каждую элементарную конъюнкцию, чтобы переменная X или ее отрицание стояли на i–ом месте и затем выбрасываем все вхождения кроме одного, для одинаковых элементарных конъюнкций.

Приведение к СКНФ аналогично, только вместо конъюнкций C рассматриваются дизъюнкции D, и в п.3 применяется равносильность 7.2, в п.5б замена имеет вид:

$$D \equiv (D \vee X_i) \,\&\, (D \vee \neg X_i).$$

Упражнения.

1. $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow (\neg B \,\&\, C))$ **привести к ДНФ и КНФ; к СДНФ и СКНФ.**

$$(A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow (\neg B \,\&\, C)) \underset{10.2}{\equiv} \neg(\neg A \vee B) \vee (\neg A \vee (\neg B \,\&\, C)) \underset{6.2}{\equiv}$$

$$\underset{6.2}{\equiv} (\neg\neg A \,\&\, \neg B) \vee (\neg A \vee (\neg B \,\&\, C)) \underset{8}{\equiv} (A \,\&\, \neg B) \vee (\neg A \vee (\neg B \,\&\, C)) \underset{3.2}{\equiv}$$

$$\underset{3.2}{\equiv} ((A \,\&\, \neg B) \vee \neg A) \vee (\neg B \,\&\, C) \underset{4.2}{\equiv}$$

$$\underset{4.2}{\equiv} ((A \vee \neg A) \,\&\, (\neg B \vee \neg A)) \vee (\neg B \,\&\, C) \underset{15.2}{\equiv}$$

$$\underset{15.2}{\equiv} (И \,\&\, (\neg B \vee \neg A)) \vee (\neg B \,\&\, C) \underset{14.1}{\equiv} (\neg B \vee \neg A) \vee (\neg B \,\&\, C) \underset{2.2}{\equiv}$$

$$\underset{2.2}{\equiv} (\neg A \vee \neg B) \vee (\neg B \,\&\, C) \underset{3.2}{\equiv} \neg A \vee (\neg B \vee (\neg B \,\&\, C)) \underset{5.2}{\equiv} \neg A \vee \neg B.$$

Эта формула является ДНФ и КНФ. Расширим ее до совершенных форм.

$$\neg A \vee \neg B \underset{7.2}{\equiv} (\neg A \,\&\, B) \vee (\neg A \,\&\, \neg B) \vee (A \,\&\, \neg B) \vee (\neg A \,\&\, \neg B) \underset{1.2}{\equiv}$$

$$\underset{1.2}{\equiv} (\neg A \,\&\, B) \vee (\neg A \,\&\, \neg B) \vee (A \,\&\, \neg B) \underset{7.2}{\equiv}$$

$$\underset{7.2}{\equiv} (\neg A \,\&\, B \,\&\, C) \vee (\neg A \,\&\, B \,\&\, \neg C) \vee (\neg A \,\&\, \neg B \,\&\, C) \vee$$

$$\vee (\neg A \,\&\, \neg B \,\&\, \neg C) \vee (A \,\&\, \neg B \,\&\, C) \vee (A \,\&\, \neg B \,\&\, \neg C).$$

Это – СДНФ.

Полученную КНФ расширим до СКНФ.

$$\neg A \vee \neg B \underset{7.1}{\equiv} (\neg A \vee \neg B \vee C) \,\&\, (\neg A \vee \neg B \vee \neg C).$$

По элементарным конъюнкциям в СДНФ можно составить оценки списка переменных, на которых каждая из них принимает значение Истина. Это, соответственно, (Л, И, И); (Л, И, Л); (Л, Л, И); (Л, Л, Л); (И, Л, И); (И, Л, Л). Правильность созданной СДНФ можно проверить по этим оценкам – в таблице истинности значение исходной формулы на них должно быть Истина.

Аналогично, по элементарным дизъюнкциям составляем оценки списка переменных, на которых каждая из них принимает значение Ложь. Это, соответственно, (И, И, Л); (И, И, И).

2. **Составить таблицы истинности для 2-х местных булевых функций.**