Classe:T^{le} ***D***

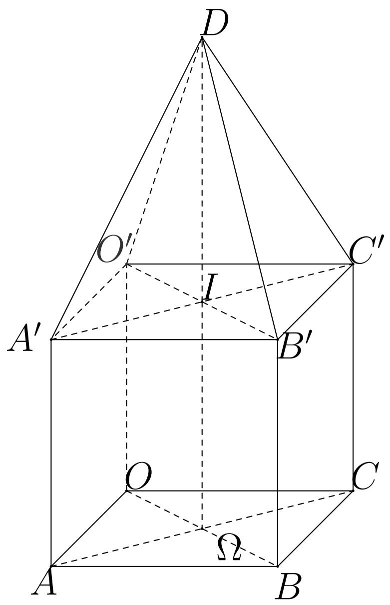
TERMINALE D

Mathématiques

Contexte:

Sur le dispositif schématisé ci-contre, une cible est placée en un point D, sommet d'une pyramide régulière à base carrée $A'B'C'O'$ de hauteur $0,5$. $OABCO'A'B'C'$ est un cube d' arête 1 (l'unité de longueur étant $\frac{1}{2}m$).L'espace $(\mathcal{E})$ est rapporté au repère orthonormé direct $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ avec $\vec{i}=\overrightarrow{OA}$; $\vec{j}=\overrightarrow{OC}$; $\vec{k}=\overrightarrow{OO'}$.
Un jeu consiste à tirer une balle d'une machine et essayer d'atteindre la cible.
On suppose que les trajectoires de toutes les balles tirées sont rectilignes et dépendent de certains paramètres que le joueur fait rentrer dans la machine.Trois amis Jacques, Jean et Amina ont fait chacun un essai sans succès. Les trajectoires de la balle tirées par Jacques est la droite (Δ_2) de système d'équation cartésiennes: $\begin{cases}4x+y+3z=5\\2x+y+2z=5\end{cases}$

Enfin Amina a tiré une balle dont la trajectoire est la droite (Δ_3) passant par les points $E(2,5;3)$ et $F(-4,1,1)$. Cocou , un élève en classe de terminale,qui veut aussi faire un essai se demande comment il doit s'y prendre pour atteindre la cible.



Tâche: Tu vas aider Cocou en résolvant les problèmes suivants:

PROBLÈME 1

1. Démontre que $M(x,y,z) \in (\Delta_2) \iff \begin{cases} x = -2+t \\ y = 1+2t \\ z = 4-2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$

2. Demontre que $\Omega_1(1;–1;2)$ n'appartient pas à (Δ_2)

3. Déterminer les coordonnées des points d'intersections, s'il en existe, de la droite (Δ_2) avec la sphère S de centre $\Omega_1(1;–1;2)$ et de rayon $r = \sqrt{20}m$.

4. Détermine un repère de chacune des droites (Δ_2)et (Δ_3).

5. Démontre que (Δ_2) et (Δ_3) sont sécants en un point K dont on précisera les coordonnées.

6. Détermine une équation cartésienne du plan (Q) contenant les droites (Δ_2) et (Δ_3)

7. Calcul en cm la distance du point F à la droites (Δ_2)

8. Détermine une équation cartésienne du plan (R) contenant F et perpendiculaire à (Δ_2).

9. En Déduire les coordonnées du point H projeté orthogonal de F sur la droite (Δ_2), puis calcule d'une autre façon la distance du point F à la droite (Δ_2)

10. Justifie que les points pondérés $(E,2)$ et $(F,-1)$ admettent un barycentre T

11. Détermine l'ensemble (τ) des points M de l'espace $(\mathcal{E})$ tels que $2\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{EM} = \overrightarrow{MF} \wedge \overrightarrow{MA}$.

12. On pose $G = bar\{(E,2),(B,4),(H,2)\}$ et I mileu du segment $[FC]$

12 a. Donne la nature de l'ensemble des points M de l'espace tels que $(2\overrightarrow{ME} + 4\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MH}).(\overrightarrow{MF} + \overrightarrow{MC}) = 0$

PROBLÈME 2

Cocou élève en classe de terminale qui veut aussi faire un essai a reçu une information susceptible de l'aider à atteindre la cible disant:
il faudra que la trajectoire de la balle soit dans le plan (L) dont une représentation paramétrique est la suivante:

$$\begin{cases} x = 1 - \alpha - \beta \\ y = \alpha + \beta \qquad ou (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \\ z = 1 - \beta \end{cases}$$

13. (a) Détermine une équation cartésienne du plan (L)
    (b) Vérifie que le point C' appartient à (L)
14. (a) Démontre que les vecteurs $\overrightarrow{\Omega D} = \frac{3}{2}\overrightarrow{OO'}$
    (b) Déduis-en les coordonnées du point D .
    (c) Vérifier que le point D appartient à (L)
15. Cocou décide de donner pour trajectoire à la balle la droite (Δ) passant par les points C' et $R(1, 0, 2)$
    (a) Donner une représentation paramétrique de la droite (Δ)
    (b) Prouve que Cocou atteindra la cible?

PROBLÈME 3

16. Cocou dans le plan complexe $(\Omega; \vec{e_1}, \vec{e_2})$ désir placer des lampadaires aux points R et S d'affixes respectifs:
    $Z_1 = \frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$ et $Z_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$

    a. Ecrire le produit Z_1Z_2 sous forme algébrique

    b. Ecrire sous forme exponentielle les nombres complexes Z_1,Z_2 et Z_1Z_2

    c. En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$
17. on pose $Z_3 = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}Z_1$

a. Vérifier que $Z_3 = e^{-i\frac{\pi}{12}}\left(e^{i\frac{\pi}{12}} + e^{-i\frac{\pi}{12}}\right)$

b. En déduire le module et un argument de Z_3

c. Démontre que Z_3^{12} est un nombre réel strictement négatif

18. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$ unité graphique $2cm$, on considère les points A et B d'affixes respectives Z_1 et Z_2

a. Donner une interprétation géométrique du module et d'un argument de Z_1

b. Détermine géométriquement l'ensemble des points M d'affixes z tels que : $\mid 2z - \sqrt{6} - \sqrt{2} \mid = \mid 2z - 1 + 1i \mid$