Seconde scientifique

Contexte :

M. TCHIKE est un professeur principal d'une classe de Terminale C d'effectif 13 dans un établissement privé. Le Directeur du collège lui informe que la présentation statistique des moyennes du premier trimestre dans un tableau rectangulaire $ABCD$ de dimensions $AB = 4$; $BC = 2$ qu'il avait déposé est presque vide et la détermination des deux nombres a et b du tableau suffit pour compléter le tableau.

M. TCHIKE ayant pris acte de l'information, souvient que dans le plan muni du repère $(A; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ avec $\overrightarrow{i} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{j} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$, les nombres a et b sont tels que les vecteurs $\overrightarrow{u}(a; 3)$ et $\overrightarrow{v}(b; 1)$ soient colinéaires, le vecteur $\overrightarrow{w}(a-1; b)$ soit orthogonal à la droite $(\Delta) : x - 2y + 3 = 0$, puis le point G est le centre de gravité du triangle BCD.

Victoria, une élève en classe de 2^{nde} scientifique très impressionnée par la scène se donne la tâche de déterminer les nombres a et b, la position du point G.

Tâche : Toi aussi en classe de 2^{nde} scientifique, fais comme Victoria en résolvant les trois problèmes suivants.

Problème 1

1. (a) Démontre que $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ une base orthonormée du plan vectoriel.
   (b) Démontre que pour tout point M du plan; on a: $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{DM} = 3\overrightarrow{MG}$.
   (c) Détermine les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AG}$ dans la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.
2. (a) Donne un vecteur normal $\overrightarrow{u'}$ et un repère $(A; \overrightarrow{v'})$ de la droite (Δ).
   (b) Calcule le déterminant des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, puis celui des vecteurs $\overrightarrow{u'}$ et $\overrightarrow{w}$.
   (c) Montre que les nombres a et b vérifient le système (S) d'équations suivant, puis déduis-en leurs valeurs.
   $(S) : \begin{cases} a - 3b = 0 \\ a - 2b = 1 \end{cases}$
3. (a) Justifie à présent que $(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ est une base du plan vectoriel.
   (b) Un point $M(x, y)$ dans le repère $(A; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ a pour coordonnées (x', y') dans le repère $(A; \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$.
   Exprime x' et y' en fonction de x et y.
4. Détermine dans le repère $(A; \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$
5. (a) les coordonnées du point G.
   (b) une représentation paramétrique de la droite (Δ).

Problème 2

M. TCHIKE souvient aussi que le nombre a du tableau est le seul entier élément de l'ensemble solution des inéquations de l'expression (I) : $\frac{x-2}{x-1} \leqslant \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1} \leqslant \frac{x-1}{x-2}$.

6. Déterminé l'ensemble de validité D de (I).
7. Démontre que pour tout réel x élément de D.

(a) $\dfrac{x-2}{x-1} \leqslant \dfrac{1}{x-2} - \dfrac{1}{x-1} \Longleftrightarrow \dfrac{x-3}{x-1} \leqslant 0.$

(b) $\dfrac{1}{x-2} - \dfrac{1}{x-1} \leqslant \dfrac{x-1}{x-2} \Longleftrightarrow \dfrac{x}{1-x} \leqslant 0.$

8. (a) Étudie les signes de $\dfrac{x-3}{x-1}$ et $\dfrac{x}{1-x}$ dans même tableau.

   (b) Déduis-en l'ensemble solution E dans $\mathbb{R}$ de (I); puis retrouve la valeur de a.

Problème 3

On considère les fonctions suivantes :

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2 - x - 6$
$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{2x-3}{x-1}$
$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{x+1}{\sqrt{|2x-3|-5}}$

$k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x - 2$
$l : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{x^2-4}{x+2}$
$m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 2x^2 - \dfrac{1}{x+1}$.

9. (a) Calcule $f(0)$, $f(-2)$ et $f(3)$ puis déduis que f n'est pas une injection.

   (b) Justifie que g est une application bijective puis définis sa réciproque g^{-1}.

10. (a) Détermine l'ensemble de définition des fonctions h, k et l.

    (b) Justifie que les fonctions k et l ne sont pas égales puis détermine le plus grand ensemble sur lequel elles coïncident.

11. (a) Pour tous nombres réels α et β éléments de l'intervalle $[0; +\infty[$ tels que $\alpha < \beta$; compare $2\alpha^2$ et $2\beta^2$ puis $\dfrac{1}{\alpha+1}$ et $\dfrac{1}{\beta+1}$.

    (b) Déduis le sens de variation de la fonction m sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

Fin