Seconde Scientifique

Contexte:

Binon est une élève en classe d'une seconde scientifique au collège ''La Joie''. Dans le laboratoire de ce collège, se trouve une table graduée dont on veut colorier en rouge l'ensemble des points d'abscisse x telles que $P(x) \leqslant 0$ où $P(x) = x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6$. Une voie rectiligne joint le mât et cet laboratoire. Cette voie est munie d'un repère orthonormé et l'administration du collège ''La Joie'' veut mettre des pavés sur l'ensemble des points d'abscisses x telles que $f(x) \leqslant 0$ avec $f(x) = \dfrac{x^3 + 2x^2 - 5x - 6}{x^3 - x^2 - 2x}$.

Binon voudrait étudier l'ensemble des points à colorier et la partie où les pavés seront posés

Tâche : Tu es invité(e) à aider l'administration et Binon en résolvant les problèmes suivants.

Problème 1

1. (a) Calcule $P(1)$ puis conclus.
   (b) Détermine par la méthode de la division euclidienne le polynôme du $3^{ème}$ degré Q tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x) = (x-1)Q(x)$.
2. (a) Justifie que -1 est un zéro de Q.
   (b) Détermine les nombres réels a, b et c tel que pour tout nombre réel x, $Q(x) = (x+1)(ax^2 + bx + c)$
3. Pour la suite, $a = 1$, $b = 1$ et $c = -6$ et on pose $R(x) = x^2 + x - 6$.
   (a) Donne la forme canonique de $R(x)$ puis déduis que $P(x) = (x-1)(x+1)(x-2)(x+3)$.
   (b) Détermine les racines de $P(x)$.
   (c) Étudie le signe de $P(x)$ dans un tableau selon les valeurs de x.
   (d) Déduis de ce qui précède l'ensemble des abscisses des points à colorier en rouge.

Problème 2

On désigne par T le polynôme défini comme suit : $T(x) = x(x+1)(x-2)$.

4. (a) Développe, réduis et ordonne suivant les puissances décroissantes de x $T(x)$.
   (b) Détermine l'ensemble de définition de f puis précise ses racines.
   (c) Simplifie $f(x)$ sur son ensemble de définition.

(d) Étudie le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x.

(e) Déduis-en l'ensemble des abscisses des points qui vont recevoir du pavé.

5. Résous dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :
(I_1) : $|2x-1| > 3$; (I_2) : $|2x+3| \leqslant |7x-12|$; (E) : $|2x-5| = |7-x|$

Problème 3

Soit g la fonction numérique à variable réelle définie de $]-\infty\,;-3[$ vers $]3\,;+\infty[$ par $g(x) = \dfrac{3x-2}{x+1}$ dont une branche de la courbe de g, contient la forme de la route qui relie la maison de Binon à son école.

6. ustifie que g est une application.

7. (a) Prouve que g est injective.

   (b) Prouve que g est surjective.

   (c) Déduis-en que g est bijective.

8. Définis la bijection réciproque g^{-1} de g.

Fin