

**Contexte:** Un anniversaire spécial

À l'occasion de l'anniversaire de Tatiana, ses amis lui ont organisé une fête spéciale. À cette belle fête étaient présents un nombre  $m$  de filles et un nombre  $q$  de garçons;  $m$  et  $q$  sont les solutions des équations  $A_m^4 = 156A_m^2$  et  $\mathbb{C}_q^2 = 91$ . Pour les salutations d'usage, les filles et les garçons se sont donné une accolade, les garçons se sont échangés une poignée de mains et les filles se sont donné une accolade.

Tatiana, l'heureuse du jour, est une passionnée des mathématiques. Ainsi, décide t-elle de déterminer entre autre le nombre de participants.

Les participants ont emprunté différentes voies dont les formes ressemblent aux courbes des fonctions ci-dessous:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto -(x-2)^2 + 1$$

$$g : [-3; +\infty[ \rightarrow [2; +\infty[ \\ x \mapsto \sqrt{3+x} + 2$$

$$h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$

$$f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 + 3$$

$$g_1 : \mathbb{R} - \{-1\} \rightarrow \mathbb{R} - \{2\} \\ x \mapsto \frac{2x+1}{x+1}$$

$$h_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \sqrt{x+1}$$

$$f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto |2x-1|$$

$$t : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \sqrt{|-2x^2 + 8x - 6|} - 3$$

**Tâche:** Tu vas aider Tatiana en traitant les problèmes suivants:

**Problème 1**

1. (a) Justifie que le nombre de filles participantes est 15  
(b) Justifie que le nombre de garçons participants est 14  
(c) Détermine le nombre de poignées de mains échangé  
(d) Détermine le nombre d'accolades partagé

2. Résous dans  $\mathbb{N}$  les équations:

$$(E_1) : 2\mathbb{C}_n^2 + 6\mathbb{C}_n^3 = 9n$$

$$(E_2) : \mathbb{C}_n^1 + \mathbb{C}_n^2 + \mathbb{C}_n^3 = 63$$

3. Exprime en fonction des entiers naturels  $n$  et/ou  $p$  les nombres suivants:

$$\frac{A_n^p}{A_n^{p-1}}$$

$$\frac{\mathbb{C}_n^2}{\mathbb{C}_{n-2}^3}$$

$$\mathbb{C}_{n-2}^4 \times \mathbb{C}_n^2$$

4. Calcule le coefficient du monôme  $x^4y^7$  dans le développement de l'expression  $P = (2x - 5y)^{11}$
5. On constate qu'à la fin de la soirée, trois boules contenant de belles notes ont été tirées de façon successive et sans remise parmi 15 dont 4 de couleur verte, 3 de couleur rouge et 3 de couleur blanche au fin d'honorer Tatiana.
  - (a) Détermine le nombre de tirages possibles
  - (b) Détermine le nombre de tirages:
    - i. Ne contenant aucune boule de couleur verte
    - ii. Contenant exactement deux boules rouges

**Problème 2**

Tatiana souhaite faire quelques études sur les fonctions  $f$  et  $t$ .

6. Détermine l'ensemble de définition de chacune de ces fonctions
7. (a) Démontre que  $f$  est majorée par 1

- (b) Trouve deux majorants de  $f$
  - (c) Démontre que  $f$  admet un maximum
8. Écris  $t(x)$  sans le symbole valeur absolue
9. Soit  $t_1$  la restriction de  $t$  à l'intervalle  $[1; 3]$  et  $t_2$  la restriction de  $t$  à l'intervalle  $[3; +\infty[$
- (a) Détermine  $t_1$  et  $t_2$
  - (b) Résous dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $t_2(x) = 2$
  - (c) Résous dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $t_1(x) = x - 4$

### Problème 3

Elle s'en rend compte que la fonction  $g$  est une application et veut en savoir davantage sur la nature de  $g$  et la composition de certaines des autres fonctions.

- 10. (a) Démontre que  $g$  est injective
  - (b) Démontre que  $g$  est surjective
  - (c) Déduis-en que  $g$  est bijective et détermine  $g^{-1}$ , la réciproque de  $g$
11. (a) Détermine  $g([1; +\infty[)$ , image directe de  $[1; +\infty[$  par  $g$
- (b) Détermine  $g^{-1}([5; +\infty[)$ , image réciproque de  $[5; +\infty[$  par  $g$
12. Résous dans  $]0; 1[$  l'inéquation  $h(x) < 1$
13. Détermine l'ensemble de définition des fonctions  $f_1$ ,  $g_1$ ,  $h_1$  et  $f_2$
14. Détermine l'ensemble de définition de  $f_1 \circ f_2$ ,  $g_1 \circ h_1$  et  $h_1 \circ g_1$
15. (a) Calcule  $f_1 \circ f_2$ ,  $\forall x \in D_{f_1 \circ f_2}$
- (b) Calcule  $h_1 \circ g_1$ ,  $\forall x \in D_{h_1 \circ g_1}$
- (c) Calcule  $g_1 \circ h_1$ ,  $\forall x \in D_{g_1 \circ h_1}$

**Fin**