Année scolaire 2017 − 2018
Classe :T^{le}**D**
Heure : **4 heures**

Premier Devoir Surveillé du deuxième trimestre

Épreuve :***Mathématiques***

Situation d'évaluation

Contexte : La fete du retraité
Pour souhaiter un bon départ à la retraite au surveillant générale de l'etablissement,les professeurs de mathématiques du Complexe scolaire notre Dame de Laurette CSNDL ont organisé une petite fete. La reception a lieu dans une grande salle ayant la forme d'un cube $ABCDEFGH$.Dans le repère orthonormé direct $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ des jeux de décoration sont placés aux points $I(1; \frac{1}{3})$;$K(\frac{3}{4}; 0; 1)$;$L(a; 1; 0)$ et $J(0; \frac{2}{3}; 1)$ où a est un nombre réel de $[0, 1]$. le gâteau prévu devrait faire apparaitre une portion de la courbe $(\mathcal{C})$ d'équation $y = f(x)$ où f est la fonction par $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \sqrt{1-x}$
BONOU jeune professeur présent à la fête, se demande s'il est possible de choisir le réel a de sorte que les droites (KL) et (IJ) soient sécantes et il veux étudier les variations de la fonction f afin de se rendre compte des propriétes sur la courbe de f
Tâche :Tu vas aider BONOU à avoir une réponse à ses préocupations en traitant les problèmes suivants.
Problème 1

1. Détermine une représentation paramétrique de la droite (IJ)
2. Justifie que :
$$\begin{cases} x = (a - \frac{3}{4})t + \frac{3}{4} \\ y = t \\ z = -t + 1 \end{cases}$$
, t *réel* est une représentation paramétrique de la droite (KL)
3. Détermine suivant les valeurs de a l'intersection des droites (KL) et (IJ)
4. Détermine une équation cartésienne du plan (IJK) lorsque $a = \frac{1}{4}$ puis détermine l'intersection de ce plan et de la droite (DH)

PROBLEME 3

Le plan est muni d'un repère orthonormé directe (O, I, J).Soit f la fonction définie par :$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \sqrt{1+x}$

Partie A

Soit la fonction g définie par : $g(x) = 1 - x\sqrt{1+x^2}$

5. Etudie les variation de g.
   (a) Démontre que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution α et que $0,78 < \alpha < 0,79$.
   (b) Déduis-en le signe de $g(x)$
   (c) Démontre que $f(\alpha) = \dfrac{\alpha^4 - 3}{3\alpha}$ et que $-1,13 < f(\alpha) < -1,10$
6. Démontre que l'équation $g(x) = x$ admet une solution unique β telle que : $0,4 < \beta < 0,5$
   (a) Etudie le sens de variation de g' (la dérivée première de la fonction f). Que représente le point $I(0;1)$ pour la courbe $(\mathcal{C}_g)$?
   (b) Justifie que $\forall x \in [0,4;0,5], \mid g'(x) \mid \leqslant \dfrac{3}{2}$ puis que $\mid g(x) - \beta \mid \leqslant \dfrac{3}{2} \mid x - \beta \mid$

Partie B

7. (a) Etudie le sens de variation de f (on exprimera f en fonction de $g(x)$)
   (b) Dresse le tableau de variation de variation de f
   (c) Etudie les branche infinie de $(\mathcal{C}_f)$
8. Soit h l'application de $\mathbb{R}_-$ dans $f(\mathbb{R}_-)$ définie par : $h(x) = f(x)$
   (a) Justifier que h admet une bijection h^{-1} et précise sont ensemble de définition j.
   (b) Etudie la dérivabilité de h^{-1} sur J. Justifie que le point $A(-\sqrt{3}-2; -\sqrt{3})$ est un point de $(\mathcal{C}_h^{-1})$ puis déterminer une équation cartésienne de la tangente (T) à $(\mathcal{C}_h^{-1})$ au point d'abscisse A
9. Trace les courbes $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_h^{-1})$ dans un même repère
10. Soit les fonctions $i(x) = -f(x)$;$k(x) = f(-x)$;$p(x) =\mid f(x) \mid$
    sans étudier ces fonctions , représenter chacune de leur courbe représentative.