Année scolaire 2019 – 2020
Classe :T^{le} ***C-D***
Heure : **4 heures**

DEVOIR DU PREMIER TRIMESTRE

Mathématiques

NB : la terminale C traitera en commun avec la terminale D les problèmes 1 et 3

Situation d'évaluation

Contexte :Poste de police de TOGNON

La construction du poste de police de TOGNON est achevé. le commissaire affecté prend connaissance des lieux et décide de positionner trois policiers à des points stratégiques du bâtiment En utilisant la marquette du bâtiment représenté par un cube $ABCDEFGH$, il repère les trois policiers par les points P,Q,R tels que $\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AQ} = 4\overrightarrow{AD}$ et R le barycentre des points pondérées $(C;-1)$ et $(G;2)$.Une lampe d'éclairage sera installée au milieu M du segment $[AE]$.Kaled qui est le fils du commissaire et élève en classe de terminale D, décide d'utiliser ces informations pour résoudre les problèmes suivants.

Tâche : tu es invité(e) à faire comme eux.

Problème 1

A

1. Justifie que (B, C, H, A) est un repère de l'espace.
2. Quels sont dans ce repère, les triplets de coordonnées des points G,F et E
3. a. Écris une représentation paramétrique de la droite (GF)
   b. Écris une représentation paramétrique du plan (EFG)
4. Justifie que $\overrightarrow{AF}$ est un vecteur normal au plan (EBC)

B

L'espace est muni du repère orthonormé direct $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$.

5. a. Démontre que R a pour coordonnée $(1, 1, 2)$
   b. Détermine la nature du triangle PQR puis détermine son aire.
6. Calcul de deux manière différentes la distance du point M à la droite (BC).
7. Démontre qu'une équation du plan (PQR) est : $4x + 2y + z - 8 = 0$.
8. On désigne par K le projeté orthogonal du point E sur le plan PQR.
   a. Détermine un système d'équation cartésiennes de la droite (EK).
   b. Calcul de deux manières différentes la distance du point E au plan PQR.
   c. Démontre que le point K appartient à la droite (PR).

Problème 2

Kaled se propose de chercher des lieux géométriques. il désigne par I le barycentre des points pondérés $(A;-1)$,$(B;1)$ et $(C;1)$, puis J l'isobarycentre des points A,B et C.

9. a. Démontre que $ABIC$ est un parallélogramme.
b. Justifie que l'ensemble (Δ) des points M de l'espace tels que
$\left(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right)\Lambda\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)=\vec{0}$ est une droite dont tu préciseras un repère.
b. Démontre que l'ensemble (Γ) des points M de l'espace tels que
$\left(-\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right).\left(2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right)=\vec{0}$ est un plan dont tu préciseras une équation cartésienne.

Problème 3

.. L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.On considère les points $E^{'}(1,2,3)$,$F^{'}(2,1,2)$,$G^{'}(5,7,2)$,$H^{'}(5,0,9)$. Soit (D_1) la droite de système d'équations cartésiennes $\dfrac{7-x}{-4}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{12-z}{-6}$.

11. Justifie que les points $E^{'}$,$F^{'}$ et $G^{'}$ définissent un plan (P_1) dont on établira une équation cartésienne.
12. a. Précise un repère de la droite (D_1) puis justifie que $H^{'}\in(D_1)$.
b. Démontre que (D_1) et (P_1) sont sécants puis détermine $(D_1)\cap(P_1)$.
c. Justifie $E^{'}F^{'}G^{'}H^{'}$ est un tétraèdre puis calcul son volume.
13. a. Démontre que le triplet $\left(\overrightarrow{E^{'}F^{'}},\overrightarrow{E^{'}G^{'}},\overrightarrow{E^{'}H^{'}}\right)$ est une base orthogonale de l'ensemble des vecteurs de l'espace.
b. Détermine les coordonnées du point O dans le repère$\left(E^{'};\overrightarrow{E^{'}F^{'}},\overrightarrow{E^{'}G^{'}},\overrightarrow{E^{'}H^{'}}\right)$.
14. $(\mathcal{D}_2)$ est la droite passant par $A^{'}(0,0,1)$ et dirigée par $\vec{u}=\vec{i}+\vec{j}$. $(\mathcal{D}_3)$ est la droite passant par $A^{''}(0,0,-1)$ et dirigée par $\vec{u}=\vec{i}-\vec{j}$. $(\mathcal{E})$ l'ensemble des points équidistants des droites $(\mathcal{D}_2)$ et $(\mathcal{D}_3)$.

a. Vérifie que les droites $(\mathcal{D}_1)$ et $(\mathcal{D}_2)$ sont orthogonales et non coplanaires.

b. Si $M(x,y,z)$ est un point quelconque de l'espace, justifie que $M\in(\mathcal{C})$ si et seulement si $xy+2z=0$

15 **(Tout ce qui suit uniquement pour la C)**
$ABCD$ est un tétraèdre tel que : $AB = CD = 4$; $BC = AD = 3$ et $BD = AC = 6$;G_1 est le barycentre des points pondérés $(A; 2)$ et $(C; -1)$, G_2 est le barycentre des points pondérés $(B; -3)$ et $(D; 4)$ et G est le milieu de $[G_1G_2]$

a. Écris G comme barycentre des points A,B,C et D puis comme barycentre des points G_1,B et D.

b. Détermine les coordonnées de G dans le repère $(A; B; C; D)$.

16. Les droites (GB) et (GD) coupent respectivement (G_1D) et (G_1B) en R et S.

a. Trouve les nombres réels α et β tels que : $\overrightarrow{DR} = \alpha\overrightarrow{G_1D}$ et $\overrightarrow{G_1S} = \beta\overrightarrow{G_1B}$.

17. Dans chacun des cas suivants, détermine l'ensemble des points M de l'espace supposé orienté qui vérifient la condition indiquée :

a. $(2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC})\Lambda\overrightarrow{MD} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{MB}\Lambda(2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC})$

b. $\parallel 2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC} \parallel = 2 \parallel -3\overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MD} \parallel$

C. $2MA^2 + MB^2 - 3MC^2 = 10$
(on développera $2MA^2 + MB^2 - 3MC^2$ par rapport au point A).

18-a Démontre que $AG^2 = \frac{469}{4}$

b. Détermine l'ensemble des points M de l'espace tels que

$$2MA^2 - 3MB^2 - MC^2 + 4MD^2 = \frac{11}{2}$$

19. Détermine l'ensemble des points M de l'espace tels que :
$3\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} = 2MA^2$