Année scolaire 2016 – 2017
Classe :T^{le} ***E-A***
Heure : **4 heures**

Premier Devoir Surveillé du deuxième trimestre

Épreuve :***Mathématiques***

Situation d'évaluation

EXERCICE 1

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.Soient (P_1) et (P_2) les plans d'équations respectives $2x + y + 2z + 1 = 0$ et $x - 2y + 6z = 0$.

1. Montrer que les plans (P_1) et les plans (P_2) sont sécants selon une droite (D) dont on préciserea une représentations paramétriques
2. On considère les points $A, BetC$ de coordonnées respectives $(1; 0; 2)$, $(1; 1; 4)$,$(-1; 1; 1)$
   (a) Détermine les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$
   (b) Montrer que les points $A, BetC$ ne sont pas alignés
   (c) En déduire une équation cartésienne du plan (ABC)

EXERCICE 2

On pose $a = \dfrac{u + iv}{2 - 3i}$ où u et v sont deux nombres réels

(a) Sachant que $\mid a \mid = \sqrt{2}$ et que $\dfrac{3\pi}{4}$ est un argument de a, determine $uetv$
(b) Sachant que $(E) : z^4 - 476 + 480i = 0$
   i. Justifie que si z_0 est une solution de (E), alors $-z_0$, iz_0 et $-iz_0$ sont aussi solutions de (E)
   ii. Calcul $(1 + 5i)^4$ sous forme algébrique
   iii. Déduis-en la résolution de l'équation (E)

PROBLEME

On considère la fonction u de la variable réelle x,définie par
$u(x) = x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x}$.
Soit $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de u dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

Partie A

3. (a) Justifie que l'ensemble de définition D de u est :
   $D =]-\infty, 2] \cup [0, +\infty[$
   (b) Etudie la dérivabilité de u à gauche en -2 et à droite en 0

(c) Que peut-on en conclure pour la courbe $(\mathcal{C})$ aux points d'abscisses respectives -2 et 0 ?

(d) Etudie les variations de u et dresser le tableau de ces variations.

4. (a) Démontrer que la courbe $(\mathcal{C})$ admet deux asymptotes dont on précisera les équations respectives

   (b) construire $(\mathcal{C})$

Partie B

Soit la fonction définie de $]0, +\infty[$ dans $]1, +\infty[$ par $v(x) = u(x)$

5. Démontre que v est une bijection .

   (a) On désigne par v^{-1} la bijection réciproque de v.

   (b) Prouver que v^{-1} est dérivable sur un intervalle J à préciser .

   (c) Calcul $(v^{-1})'(x)$, pour tout x appartenent à J

   (d) Construire, dans le meme repère que la courbe $(\mathcal{C})$ de u, la courbe $(\mathcal{C})'$ de v^{-1}

Partie C

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 2x}$.On désigne par (Γ) la courbe représentative de f dna sle repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

On rappel que $(\ln(g(x)))' = \dfrac{g'(x)}{g(x)}$

6. Démontre que la fonction F définie par :
   $F(x) = \ln(x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x})$, est une primitive sur $]0, +\infty[$ de la fonction f

7. Calcul l'aire $\mathcal{A}$ de la région (R) du plan délimitée par la courbe (Γ), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 3$.
   (Sachant que $\mathcal{A} = F(3) - F(2)$)

8. Détermine les nombre réels α et β tels que , pour tout x appartenant à $]0, +\infty[$, on ait
   $$\frac{1}{x^2 + 2x} = \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x + 2}$$