**Année scolaire** 2018 − 2019
**Classe**:$T^{leC}$
**Heure**: **4 heures**

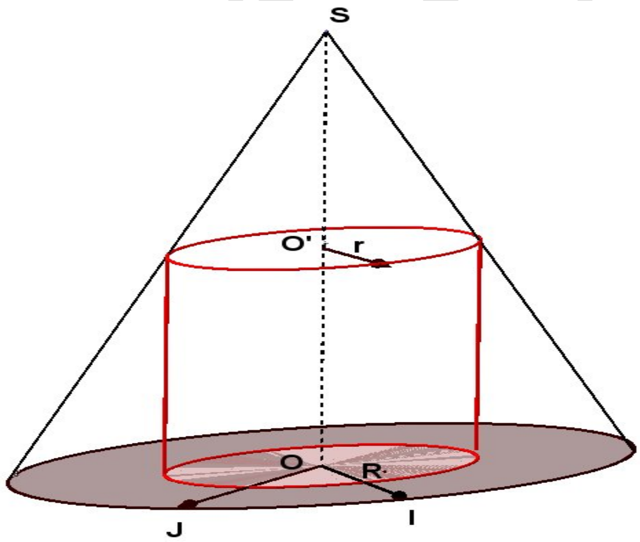
## DISCIPLINE:*MATHÉMATIQUES*

## *DEVOIR DU DEUXIEME TRIMESTRE*

## SITUATION D'ÉVALUATION

**Contexte**:

On crée une ville nouvelle d'architecture futuriste,dans la banlieue de Cotonou . Les réservoirs d'eau portable sont des cylindres «habillés» par des cônes métalliques de hauteur h et de base R.On en donne une représentation en perspective.




- le cylindre droit, qui contient l'eau, est à l'intérieur du cône à pour hauteur $OO' = x$
- Le cône de hauteur $h = 60m$ et le cylindre ont même plan de base et même plan de base et même axe
- Le point I est sur le cercle de rayon $R = OI = 30m$ tel que le triangle $0IJ$ est un triangle rectangle isocèle en O et le cercle qui est le bord de la base supérieure du cylindre doit être inclus dans le bord du cône.

- $\vec{i} = \frac{1}{30}\overrightarrow{OI}$ , $\vec{j} = \frac{1}{30}\overrightarrow{OJ}$ et $\vec{k} = \frac{1}{60}\overrightarrow{OS}$
- Un robinet $R_1$ est placé au point A tel que $\overrightarrow{OA} = \frac{1}{60}\overrightarrow{OI} + \frac{\sqrt{3}}{60}\overrightarrow{OJ} + \frac{1}{60}\overrightarrow{OS}$
- Soit A le point d'intersection du cylindre et du segment $[SI]$

Audrey, élève en classe de terminal scientifique désire déterminer la hauteur du cylindre pour laquelle le volume de ce cylindre est maximal

## <u>**Problème 1**</u>

1. Détermine les coordonnées du points $A$
2. Démontre que $(0;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est un repère orthonormé directe
3. Justifie que S est le barycentre des points pondérés $(E,2)$,$(F,-4)$,$(G,2)$ et $(H,-4)$
4. Détermine l'ensemble $(r)$ ds points M du plan rapporté au repère $(S;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})$ tels que $2ME^2 - 4MF^2 + 2MG^2 - 4MH^2 = -5$ avec $SG = 30$
5. Le robinet $R_2$ est placé au point $B$ image du point A par l'application $s_1 \circ s_2$ ou $s_1$ est la réflexion de plan $(SOI)$ et $s_2$ la réflexion du plan $(OIJ)$
6. Justifie que $s_1 \circ s_2$ est un demi-tour dont tu préciseras l'axe $(\Delta)$
7. Détermine les coordonnées du point $B$
8. Calcul $V' - V$ en fonction de x ou $V'$ le volume du cône

## <u>**Problème 2**</u>

$\theta$ est un nombre réel appartenant à l'intervalle $[0,\pi]$ En réalité, les points $M_1$ et $M_2$ sont les points images des solutions respectives $Z_1$ et $Z_2$ de l'équation

$$E_\theta : z^2 - (2+2i)(1+e^{i\theta})z + e^{i\theta}(2+2i)^2 = 0$$

1. Démontre que le discriminant de l'équation $E_\theta$ est : $(2+2i)^2(1-e^{i\theta})^2$ puis résous dans $\mathbb{C}$, l'équation $E_\theta$.
2. On note $z_1$ la solution de $E_\theta$ indépendante de $\theta$
   (a) Exprime $z_2$ en fonction de $z_1$
   (b) En déduis que le triangle $OM_1M_2$ est isocèle en un point à préciser.

(c) Pour quelle valeur de $\theta$ les points $M_1$ et $M_2$ sont symétriques par rapport à l'axe des imaginaires purs?

3. Pour tout entiers naturel n non nul, on considère les nombres :

$$a_n = 4 \times 10^n - 1$$

$$b_n = 2 \times 10^n - 1$$

$$c_n = 2 \times 10^n + 1$$

4. Démontre que , pour tout entier naturel non nul n, $a_n$ et $c_n$ sont divisibles par 3 et $b_n$ n'est pas divisible par 3

5. L'entier $b_3$ est-il premier?

6. (a) Démontre que pour tout entier naturel non nul, $a_{2n} = c_n b_n$

   (b) En deduire la décomposition de $a_6$ en produit de factuers premiers.

7. Démontre que , pour tout entier n non nul on a

$$PGCD(b_n, c_n) = PGCD(b_n, 2)$$

8. Soit l'équation $(E)$ : $b_3 x + c_3 y = 1$ d'inconnues les entiers relatifs x et y

   (a) Justifie que l'équation $(E)$ admet au moins une solution

   (b) Résous l'équation $(E)$

## Problème 3

Pour la mise en œuvre du plan, Audrey propose à son père père d'étudier les variations de f

### Partie A

9. Soit u la fonction définie par:

$$u(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2$$

10. Montre que l'équation $u(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha$ dans $\mathbb{R}$ et que

$$\frac{-4}{3} < \alpha < \frac{-2}{3}$$

11. Donner le signe de $u(x)$

## Partie B

Soit la fonction f définie par:

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^3 - x - 1}{x - 1} & six \leq 0 \\ f(x) = \dfrac{1}{x + \sqrt{1 + x^2}} & \text{si x>0} \end{cases}$$

12. Étudie la continuité de $f$ en 0.
13. Étudie la dérivabilité de f en 0 puis donner une interprétation géométrique des résultats.
14. Précise l'intervalle de $\mathbb{R}$ sur lequel f est dérivable.
15. (a) Démontre que $f'(x) = \dfrac{u(x)}{(x-1)^2}$ pour $x < 0$
    (b) Déduis-en le signe de $f'(x)$ pour $x \leq 0$
    (c) Résous l'équation $x + \sqrt{1 + x^2} = 0$ et déduis-en le sens de variation de f sur $[0, +\infty[$
16. (a) Calcule les limites de f aux bornes de sont ensemble de définition.
    (b) dresse le tableau de variation de $f$ sur $\mathbb{R}$
    (c) Etudie les branches infinies de $(c)$
17. Montre que $f(\alpha) = \dfrac{1}{2}(3\alpha + 1 - \dfrac{3}{\alpha - 1})$ et que $\dfrac{2}{15} < f(\alpha) < \dfrac{2}{5}$ trace la courbe représentation $(C)$ de f

## Partie C

Soit g la restriction de f sur $]0; +\infty[$ vers $I = f(]0; +\infty[)$

18. Détermine I
19. (a) Démontre que g admet une application réciproque $g^{-1}$
    (b) Etudie la continuité et la dérivabilité de $g^{-1}$ dans le même sur son ensemble de définition
    (c) Tracer la courbe représentative de $g^{-1}$ dans le même repèreque $(C)$
    (d) Expliciter $g^{-1}$ , $\forall x \in I$