<u>DISCIPLINE</u>:*MATHÉMATIQUES*

NIVEAU Tle C-D

<u>SITUATION D'ÉVALUATION</u>

<u>Contexte</u>:

En visite dans une librairie,Julien ,un élève de la classe terminal D a acheté un livre de mathématiques. Sur la couverture de cet ouvrage on trouve les informations ci après:

- Dans espace rapporté à un repère orthonormé direct: $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, $A(3;2;-1)$,$H(1;-1;3)$,$B(-6;1;1)$,$C(4;-3;3)$ et $D(-1;-5;-1)$
- $I=\int_e^{\alpha} x(1-\ln x)\mathrm{d}x$ et $J=\int_e^{\alpha} x(1-\ln x)^2\mathrm{d}x$, α est un réel positif.
- (C_g) et (C_f) désignent les courbes respectives des fonctions numériques g et f dans le plan muni d'un repère orthonormal $(0;\vec{u},\vec{v})$ unité graphique 2cm

$$f(x)=x-1+(x^2+2)e^{-x}$$

Une fois à la maison, Julien se préoccupe des liens qui existent entre certaines des indications de la couverture.

<u>Tâche</u>: Tu es invité(e)s à répondre aux préoccupations de Julien en résolvant les trois problèmes suivants.

<u>Problème 1</u>

1. Calcule la longueur AH
2. Détermine une équation cartésienne du plan $(\mathcal{P}_1)$ passant par H et perpendiculaire à (AH).
3. Démontre que les points B, C et D appartiennent au plan $(\mathcal{P}_1)$
4. Calcul les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{BC}\Lambda\overrightarrow{BD}$
5. Démontre que l'aire du triangle BCD est égale $5\sqrt{29}$
6. (a) Calcul l'aire du triangle ABC

(b) Démontre que le volume du tétraèdre $ABCD$ est égal à $\dfrac{143}{3}$

(c) Calcul la distance du point D au plan ABC

(d) Calcule I par une intégration par partie et J par une double intégration par partie puis la limite de I et J lorsque α tend vers 0

Problème 2

Sur la quatrième de couverture il est marqué que les points d'affixes z_1, z_2, z_3 et z_4 sont racines du polynôme complexe défini par

$$P(z) = z^4 - 4(1-i)z^3 + 12iz^2 - 8(1-i)z + 20$$

7. Détermine les nombres complexes a et b tels que

$$\forall z \in \mathbb{C} \qquad P(z) = (z^2 + 2i)(z^2 + az + b)$$

8. Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$

9. Détermine z_1, z_2, z_3 et z_4 tels que $Re(z_1) = Re(z_3)$, $Im(z_1) < 0$ et $Im(z_2) = Im(z_4)$, $Re(z_2) < 0$

10. On donne points A, B, C et D d'affixes respectives $1-i$; $-1+i$; $1+3i$; et $3+i$ dans le plan complexe P rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

11. Place les points A, B, C et D dans le plan P.

12. Démontre que le quadrilatère $ABCD$ est un carré puis détermine en radians $mes(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BC})$

13. Donne une équation cartésienne du cercle (C) circonscrit à ce carré.

14. Soit E le point du plan tel que $OE = 2OC$ et $mes(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OE}) = \dfrac{\pi}{6}$

    (a) Donne sous forme algébrique l'affixe du point E

Problème 3
Partie A

Julien considère la fonction numérique g de la variable réelle x définie par

$$g(x) = 1 - (x^2 - 2x + 2)e^{-x}$$

15. Étudie les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$

16. Dresse le tableau de variation de g.

17. Démontre que la courbe $(\mathcal{C}_g)$ coupe une fois l'axe des abscisses dans $\mathbb{R}$ en $x = \alpha$ tel que $0,35 \leq \alpha \leq 0,36$

Partie B

18. Calcule les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$

19. Calcule $f^{'}(x)$ sur le domaine de dérivabilité de f

20. Déduis en t'aidant de la partie A , le sens de variations de f puis dresse son tableau de variation.

21. Démontre que
$$f(\alpha) = \alpha(1 + 2e^{-\alpha})$$

22. Détermine un encadrement de $f(\alpha)$ d'amplitude 4×10^{-2}

23. Démontre que la droite (Δ) d'équation $y = x - 1$ est asymptôte à $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$ et préciser la position relative de $(\mathcal{C}_f)$ par rapport à (Δ)

24. Donne une équation de la tangente (T) à $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse 0

25. Trace $(\mathcal{C}_f)$, (Δ) et (T) sur la même figure .

26. (a) Détermine les réels a, b et c tels que la fonction P définie sur $\mathbb{R}$ par
$$P(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$$
soit une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $p : x \mapsto (x^2 + 2)e^{-x}$
    (b) Calcule en fonction de α l'aire $\mathcal{A}$ en cm^2 de la partie du plan limitée par $(\mathcal{C}_f)$,(Δ) et les droites d'équations $x = -\alpha$ et $x = 0$
    (c) Justifie que $\mathcal{A} = 4e^{2\alpha} + 8e^{\alpha} - 16$

27. Démontre que pour tout x élément de $[1; 2]$,
$$1 \leq f(x) \leq 2$$

28. Démontre que pour tout x élément de $[1; 2]$
$$0 \leq f'(x) \leq \frac{3}{4}$$

29. Démontre que l'equation $f(x) = x$ admet une unique solution β dans $[1; 2]$

30. Démontre que $\forall x \in [1; 2], \qquad \mid f(x) - \beta \mid \leq \frac{3}{4} \mid x - \beta \mid$