<u>Année scolaire</u> 2016 – 2017
<u>Classe</u>T^{le} *D*

Travaux dirigés du 27/01/2018

<u>Épreuve</u> :*Mathématiques*

<u>Situation d'évaluation</u>

<u>Contexte</u> :Un concours de danse
Pour la fête de Gani , le ministre de la culture organise dans chaque ville un concours de danse traditionnel .
Celui de Djougou a lieu à la place de l'indépendance . Pour cette manifestation , la direction des services techniques de la mairie de Djougou projette l'érection d'un podium. Sur ce podium sera aménagé :
• un espace ABC pour les danseurs,
• un point D pour l'animateur,
• un point N pour l'implantation d'une baffe pour amplifier le son ,
• un espace (Δ) pour la danse ,
• un espace (S) pour la remise des récompenses,
• un espace (S') réservé aux trophées et médailles à distribuer.
Le travail est confié à Eptissam , directrice des services techniques .Elle se propose de repérer les différents emplacements réservés sur le podium. Elle désire aussi proposer une candidate qui représentera la mairie à ce concours .
Dans le plan du podium assimilé au plan complexe $(\mathscr{P})$ muni d'un repère orthonormé $(0;\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$, les affixes a, b et c respectives des points A, B et C sont les racines du polynôme P tel que $P(z) = z^3 - 2z^2 - (4+4i)z - 16 + 16i$ où z désigne une variable complexe .Les coordonnées du point N dans l'espace muni du repère orthonormé $(o;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ sont $(\sin(\frac{\pi}{8}), \sin(\frac{3\pi}{8}), \cos(\frac{3\pi}{8})$.
<u>Tâche</u> : Tu es invité(e) à aider Eptissam dans son travail en résolvant chacun des trois problèmes suivants.

<u>Problème 1</u>

1.a. Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$, sachant que le points A appartient à la droite de repère $(0;\overrightarrow{u})$ et le point B appartient à la droite de repère $(0,\overrightarrow{v})$.

b. Sachant que les points A et B sont symétriques par rapport au point E détermine les coordonnées des points A, B, C et E .

c. Calcule $\dfrac{c-b}{a-b}$ et déduis-en la nature du triangle ABC.

2. En réalité les coordonnées des points A, B, C et E ont pour affixes respectives -1-i ; -3+i ; 2+i et i . Les points H et K désignent les barycentres respectifs des systèmes $\{(A,3),(B,1)\}$ et $\{(A,3),(B,-1)\}$.
   A tout point M du plan, distinct de A d'affixe z, on associe le point M' d' affixe z' tel que $z' = \dfrac{iz+3i+1}{z+1+i}$.

a. Détermine les coordonnées des points H et K.

b. Détermine géométriquement l'ensemble (Δ) des points M de $\mathscr{P}$ tels que $|z'| = 1$.

3.a. Ecris le nombre complexe $u = 2 - 2e^{i\frac{\pi}{4}}$ sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique .

b. Sachant que $\dfrac{3\pi}{8} = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{8}$, déduis-en la valeur exacte de $\sin(\frac{\pi}{8})$,$\sin(\frac{3\pi}{8})$ et de $\cos(\frac{3\pi}{8})$, puis les valeurs exactes des coordonnées du point N .

Problème 2

Les trophées ont la forme d'un cube $ABCDEFGH$.
On donne $AD = 8cm$. Soient D', B' , et E' respectivement les points des segments $[AD]$, $[AB]$,$[AE]$ tel que $AD' = AB' = AE' = 2cm$.
On admettra que l'espace affine est orienté et que $\mathscr{R} = (A; \overrightarrow{AD'}, \overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{AE'})$ est un repère orthonormé direct .

1. Calcule dans le repère $\mathscr{R}$ les coordonnées des sommets de ce cube .

2. Soient I le milieu du segment $[HE]$ et J celui $[CG]$.
   Calcule en cm^2 l'aire du triangle FIJ .

3. Soit Q le projeté orthogonal de G à la droite (IJ) .

4. $\overrightarrow{u} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(-\overrightarrow{AD'} + \overrightarrow{AB'})$.

a. Démontre que $\overrightarrow{u}$ est unitaire .

b. Détermine les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{v}$ tel que $\mathscr{R}_1 = (A; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{AE'})$ soit un repère orthonormé direct de l'espace .

Problème 3

Partie A

Soit $U(x)$ la fonction définie par : $U(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2$

1. Etudie les variations de U
2. Montre que l'équation $U(x) = 0$ admet une solution unique α dans $\mathbb{R}$ et que : $\frac{-4}{3} < \alpha < \frac{-2}{3}$
3. Donner le signe de $u(x)$

Partie B

Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^3 - x - 1}{x - 1}, \text{si x<0} \\ f(x) = \dfrac{1}{x + \sqrt{1 + x^2}}, \text{si x>0} \end{cases}$

4. Etudie la continuité de f en 0
5. Etudie la dérivabilité de f en 0
6. Donne une interprétation géométrique des résultats
7. Précise l'intervalle de $\mathbb{R}$ sur lequels f est dérivable
8. (a) Calcul $f'(x)$ pour $x < 0$) (on précisera f'(x) en fonction de $U(x)$)
   (b) Déduis-en le signe de $f'(x)$ et précise le sens de variation de f
9. (a) Calcul $f'(x)$ pour $x \geq 0$
   (b) Résous l'équation $x\sqrt{1 + x^2} = 0$ et déduis-en le sens de variation de f sur $[0; +\infty[$
10. (a) calcul les limites de f aux bornes de son ensembled de définition.
    (b) Dresse le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$
    (c) Etudie les branches infines de $(\mathcal{C})$
11. Montre que $f(\alpha) = \frac{1}{2}(3\alpha + 1 - \frac{3}{\alpha - 1})$ et que $\frac{2}{15} < f(\alpha) < \frac{2}{5}$
12. Trace la courbe représentative $\mathcal{C}$ de f

Partie C

Soit g la restriction de la fonction f sur $]0; +\infty[$ vers $I = f(]0; +\infty[)$

13. D"termine I
14. (a) Démontre que g admet une application réciproque g^{-1}
    (b) Etudie la contionuité et la dérivabilité de g^{-1} sur son ensemble de définition
    (c) Trace la courbe représentative de g^{-1} dans le même repère que $\mathcal{C}$
15. Explicite g^{-1}, $\forall x \in I$