Classe:T^{leD}

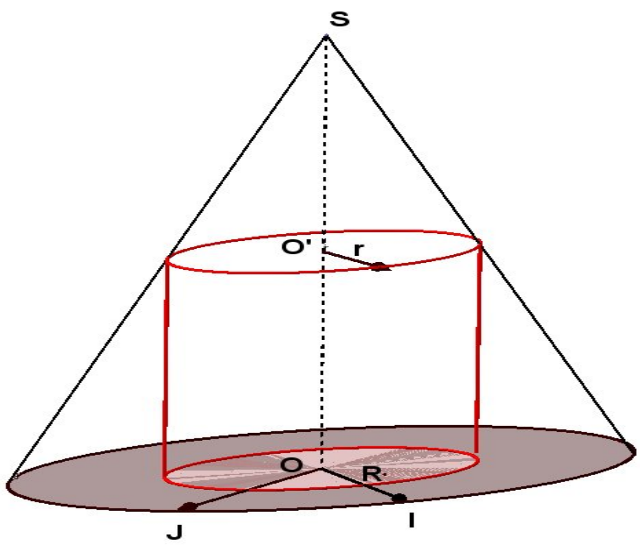
DISCIPLINE:***MATHÉMATIQUES***

TERMINALE D

SITUATION D'ÉVALUATION

Contexte:

On crée une ville nouvelle d'architecture futuriste,dans la banlieue de Paris . Les réservoirs d'eau portable sont des cylindres «habillés» par des cônes circulaire droit métalliques de hauteur $h = OS$ et de base R. On en donne une représentation en perspective.



- le cylindre droit, qui contient l'eau, est à l'intérieur du cône à pour hauteur $OO' = x$ et L'unité de longueur est $ul = 1mètre$
- Le cône circulaire droit de hauteur $h = 60$ et le cylindre ont même plan de base et même axe
- Le point I est sur le cercle de rayon $R = OI = 30$ tel que le triangle $0IJ$ est un triangle rectangle isocèle en O et le cercle qui est le bord de la base supérieure du cylindre doit être inclus dans le bord du cône.

- $\vec{i} = \frac{1}{30}\overrightarrow{OI}$, $\vec{j} = \frac{1}{30}\overrightarrow{OJ}$ et $\vec{k} = \frac{1}{60}\overrightarrow{OS}$
- Un robinet est placé au point A tel que $\overrightarrow{OA} = \frac{1}{60}\overrightarrow{OI} + \frac{\sqrt{3}}{60}\overrightarrow{OJ} + \frac{1}{60}\overrightarrow{OS}$
- Soit A le point d'intersection du cylindre et du segment $[SI]$ et $ul = 1m$

Audrey, élève en classe de terminal scientifique désire déterminer la hauteur du cylindre pour laquelle le volume de ce cylindre est maximal

Problème 1

1. Démontre que $(0; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère orthonormé directe
2. Détermine les coordonnées du points A dans le repère $(0; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$
3. Montrer que $(AO') \perp (OO')$ dans le plan (SOI) et que $\frac{OI}{O'A} = \frac{SO}{SO'}$.
4. Déduis de la question précédente que $r = \frac{R(h-x)}{h} = \frac{30(60-x)}{60}$.
5. Démontre que le volume V du cylindre s'exprime en fonction de x , R, et h par $V = \frac{\pi R^2}{h^2}(x^3 - 2hx^2 + h^2x)$
6. Déduis que $V = \frac{\pi}{4}f(x)$ avec $f(x) = x^3 - 120x^2 + 3600x$
7. On suppose que $EFGH$ est un carré de centre S.
   (a) Justifie que S est le barycentre des points pondérés $(E, 2)$,$(F, -4)$,$(G, 2)$ et $(H, -4)$
   (b) Détermine l'ensemble des points M du plan tels que $\| 2\overrightarrow{ME} - 4\overrightarrow{MF} + 2\overrightarrow{MG} - 4\overrightarrow{MH} \| = 6$

Problème 2

En réalité, les points O,I et J sont les points images des racines du polynômes complexe $p(z) = z^3 - 5z^2 + (10-2i)z - 10$ dans un plan complexe $\mathcal{P}$ rapporté à un repère orthonormé direct $(O'; \vec{i}, \vec{j})$

8. Détermine l'affixe du point O sachant que $O \in (\Delta) : y = x$.
9. Résous dans $\mathcal{C}$ l'équation $p(z) = 0$

10. Donne l'affixe des points I et J sachant que $Im(z_I) < 0$
11. Place les points O, I et J dans le repère $(O'; \vec{i}, \vec{j})$
12. Démontre que le triangle OIJ est rectangle en O
13. Détermine une équation cartésienne du cercle circonscrit au triangle OIJ.

Problème 3

Pour la mise en oeuvre du plan, Audrey propose à son père père d'étudier les variations de f

Partie A

14. Soit u la fonction définie par:

$$u(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2$$

15. Montre que l'équation $u(x) = 0$ admet une solution unique α dans $\mathbb{R}$ et que

$$\frac{-3}{4} < \alpha < \frac{-2}{3}$$

16. Donner le signe de $u(x)$

Partie B

Soit la fonction f définie par:

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^3 - x - 1}{x - 1} & six \leq 0 \\ f(x) = \dfrac{1}{x + \sqrt{1 + x^2}} & six > 0 \end{cases}$$

17. Etudie la continuité de f en 0.
18. Etudie la dérivabilité de f en 0 puis donner une interprétation géométrique des résultats.
19. Précise l'intervalle de $\mathbb{R}$ sur lequels f est dérivable.
20. (a) Démontre que $f'(x) = \dfrac{u(x)}{(x-1)^2}$ pour $x < 0$

(b) Déduis-en le signe de $f'(x)$ pour $x \leq 0$

(c) Résous l'equation $x + \sqrt{1+x^2} = 0$ et déduis-en le sens de variation de f sur $[0, +\infty[$

21. (a) Calcule les limites de f aux bornes de sont ensemble de définition.

    (b) Dresse le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$

    (c) Étudie les branches infinies de (c)

22. Montre que $f(\alpha) = \frac{1}{2}(3\alpha + 1 - \frac{3}{\alpha - 1})$ et que $\frac{13}{28} < f(\alpha) < \frac{4}{5}$ trace la courbe représentation (C) de f

Partie C

soit g la restriction de f sur $]0; +\infty[$ vers $I = f(]0; +\infty[)$

23. Détermine I

24. (a) Démontre que g admet une application réciproque g^{-1}

    (b) Etudie la continuité et la dérivabilité de g^{-1} dans le même sur son ensemble de définition

    (c) T racer la courbe représentative de g^{-1} dans le même repèreque (C)

    (d) expliciter g^{-1} , $\forall x \in I$