Classe **:**T^{le} ***C-D***

TERMINALE D

Mathématiques

Situation d'évaluation

Contexte :Sensibilisation pour la lutte contre le SIDA

Une campagne de dépistage du VIH-SIDA à été organisée au profit des populations de Bougou. A cet effet, une tente moderne à été construite pour servir de cadre à cette opération ; quelques matériels ont été fixés respectivement aux points A ;B ;C et D de coordonnées respectives $(1;0;2)$;$(1;1;4)$;$(-1;1;1)$ et $(-2;-1;3)$ dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

Trois appareils respectivement fixés en des points U, V et S non alignés servent à infirmer ou confirmer les résultats des tests.Ils sont relayés par un quatrième appareil en un point H tel que $\overrightarrow{VH}+2\overrightarrow{VK}=\overrightarrow{SK}+\overrightarrow{UV}$ ou K est un point de commande des quatre appareils. Le point K de commande des quatre appareils est placé au croisement des plans (P_1), (P_2) et (P_3) d'équations respectives $2x-3y+z=10$, $x+2y-z=26$ et $3x-2y+z=0$

Cette tente est représentée à l'échelle réduite dans le plan complexe rapporté au repère $(0;\vec{u},\vec{v})$.

Kossi l'un des enfants du délégué du village de Bougou, en classe de terminale D a vu sur la site des notions de géométrie dans l'espace et des nombres complexes qu'il cherche à interpréter.

Tâche : Tu vas aider Kossi à trouver solutions à ses préoccupations en résolvant les trois problèmes suivants.

Problème 1

1. Justifie que les points A, B et C définissent un plan (P) dont on donnera une représentation paramétrique
2. Écris un système d'équations cartésiennes de la droite (D) passant par $E(-1;0;2)$ et perpendiculaire au plan (P)
3. a. Justifie que les points A,B,C et D sont non coplanaires.
   b.Déduis-en le nom de la figure formée par les quatre points A,B,C et D et calcule le volume du solide formé.

4. Soit (D_1) et (D_2) deux droites de l'espace données par leurs équations respectives :

$$(D_1) : \frac{2x+1}{2} = \frac{-y}{3} = z+1 \text{ et } (D_2) : \begin{cases} x = -2t \\ y = 6t-1 \\ z = -2t-3 \end{cases}$$

a-Justifie que (D_1) et (D_2) sont strictement parallèles.
b-Écris une équation cartésienne du plan (Q) contenant (D_1) et (D_2)

5. Justifie que (P) et (Q) sont sécants suivant une droite (D_3) dont-on donnera un vecteur directeur.

Problème 2

Le contrôleur des appareils veut se positionner en un point situé à égale distance des points U et V pour ne pas perdre de vue les points G et K dont il veut déterminer. On donne $U(1;0;-1)$ et $V(-2;1;0)$ et J le milieu de $[UV]$.
Soit $G = bar(A,2);(B,4);(C,2)$

9. Démontre que les vecteurs $\overrightarrow{KH}$,$\overrightarrow{KS}$ et $\overrightarrow{KU}$ sont coplanaires.
7. Justifie que H est le barycentre des points S,U et K et précise les coefficients de pondération.
8. a-Justifie l'existence du point G
b-Détermine les coordonnés du point G c-Soit (Γ) l'ensemble des points M de l'espace tels que $(2\overrightarrow{AM} + 4\overrightarrow{BM} + 2\overrightarrow{CM}) \wedge (\overrightarrow{MU} + \overrightarrow{MV}) = \vec{0}$
9. Détermine les coordonnées du point K

Problème 3

Cette tente est représentée dans le plan complexe rapporté au repère $(O;\vec{e_1},\vec{e_2})$ dans lequel on considère les nombres complexes z_1 et z_2 et le polynôme $P(z)$ définis par $z_1 = \sqrt{3} - i$; $z_2 = 1 + i$

$$P(z) = z^3 + (14 - i\sqrt{2})^2 + (74 - 14i\sqrt{2})z - 74i\sqrt{2}$$

10. Calcul $P(i\sqrt{2})$ et justifie que $P(z) = (z - i\sqrt{2})(z^2 + 14z + 74)$
11. Soit $t = z_1 \times z_2$
a.Ecris t et le conjugué de t sous forme algébrique
b. Calcul de deux manières différentes le module de t.
12. On pose $Z = \dfrac{z-2+i}{z+1-3i}$; $z \neq -1+3i$ et $z = x+iy$ avec $(x,y) \in \mathbb{R}^2$
a. Ecris Z en fonction de x et y
b. Détermine l'ensemble (Γ_1) des points M du plan d'affixe z pour que Z soit imaginaire pur.

c. Détermine l'ensemble (Γ_2) des points M du plan d'affixe z pour que Z soit réel

13. Détermine l'ensemble des points M du plan d'affixes z tel que

$$\mid \overline{z} + 5 - i \mid = \mid iz + 2 - i \mid$$