NIVEAU BAC TLE D

Épreuve :***Mathématiques***

Situation d'évaluation

Contexte :Un concours de danse

Pour la fête de Gani , le ministre de la culture organise dans chaque ville un concours de danse traditionnel .

Celui de Djougou a lieu à la place de l'indépendance . Pour cette manifestation , la direction des services techniques de la mairie de Djougou projette l'érection d'un podium. Sur ce podium sera aménagé :

- un espace ABC pour les danseurs,
- un point D pour l'animateur,
- un point N pour l'implantation d'une baffe pour amplifier le son ,
- un espace (Δ) pour la danse ,
- un espace (S) pour la remise des récompenses,
- un espace (S') réservé aux trophées et médailles à distribuer.

Le travail est confié à Eptissam , directrice des services techniques .Elle se propose de repérer les différents emplacements réservés sur le podium. Elle désire aussi proposer une candidate qui représentera la mairie à ce concours .

Dans le plan du podium assimilé au plan complexe $(\mathscr{P})$ muni d'un repère orthonormé $(0; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, les affixes a, b et c respectives des points A, B et C sont les racines du polynôme P tel que $P(z) = z^3 - 2z^2 - (4+4i)z - 16 + 16i$ où z désigne une variable complexe .Les coordonnées du point N dans l'espace muni du repère orthonormé $(o; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ sont $(\sin(\frac{\pi}{8}), \sin(\frac{3\pi}{8}), \cos(\frac{3\pi}{8}))$.

Tâche : Tu es invité(e) à aider Eptissam dans son travail en résolvant chacun des trois problèmes suivants.

Problème 1

1.a. Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$, sachant que le points A appartient à la droite de repère $(0; \overrightarrow{u})$ et le point B appartient à la droite de repère $(0, \overrightarrow{v})$.

b. Sachant que les points A et B sont symétriques par rapport au point E détermine les coordonnées des points A, B, C et E .

c. Calcule $\dfrac{c-b}{a-b}$ et déduis-en la nature du triangle ABC.

2. En réalité les coordonnées des points A, B, C et E ont pour affixes respectives -1-i ; -3+i ; 2+i et i . Les points H et K désignent les barycentres respectifs des systèmes $\{(A,3),(B,1)\}$ et $\{(A,3),(B,-1)\}$.
   A tout point M du plan, distinct de A d'affixe z, on associe le point M' d' affixe z' tel que $z' = \dfrac{iz+3i+1}{z+1+i}$.

a. Détermine les coordonnées des points H et K.

b. Détermine géométriquement l'ensemble (Δ) des points M de $\mathscr{P}$ tels que $|z'| = 1$.

3.a. Ecris le nombre complexe $u = 2 - 2e^{i\frac{\pi}{4}}$ sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique .

b. Sachant que $\dfrac{3\pi}{8} = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{8}$, déduis-en la valeur exacte de $\sin(\frac{\pi}{8})$,$\sin(\frac{3\pi}{8})$ et de $\cos(\frac{3\pi}{8})$, puis les valeurs exactes des coordonnées du point N .

Problème 2

Les trophées ont la forme d'un cube $ABCDEFGH$.
On donne $AD = 8cm$. Soient D', B' , et E' respectivement les points des segments $[AD]$, $[AB]$,$[AE]$ tel que $AD' = AB' = AE' = 2cm$.
On admettra que l'espace affine est orienté et que $\mathscr{R} = (A; \overrightarrow{AD'}, \overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{AE'})$ est un repère orthonormé direct .

1. Calcule dans le repère $\mathscr{R}$ les coordonnées des sommets de ce cube .

2. Soient I le milieu du segment $[HE]$ et J celui $[CG]$.
   Calcule en cm^2 l'aire du triangle FIJ .

3. Soit Q le projeté orthogonal de G à la droite (IJ) .

4. $\overrightarrow{u} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(-\overrightarrow{AD'} + \overrightarrow{AB'})$.

a. Démontre que $\overrightarrow{u}$ est unitaire .

b. Détermine les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{v}$ tel que $\mathscr{R}_1 = (A; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{AE'})$ soit un repère orthonormé direct de l'espace .

Problème 3

L' espace est décoré par des cordes de portions des courbes des fonctions suivantes : $f(x) = \dfrac{x^3 - 3x - 1}{x - 1}$; $h(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x-1}} + x$; $g(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}x - \cos(x)$ et $v(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4$.

Partie A

1. Etudie les variations de g sur $[0; \pi]$.

2.a. Démontre que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution et une seule x_0 dans $[0; \pi]$.

b. Retrouve le résultat précédent en construisant sur $[0; \pi]$ les courbes représentative des fonctions g_1 et g_2 définies par $g_1(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}x$ et $g_2(x) = \cos(x)$.

3. Démontre que x_0 appartient à $[0,8; 0,9]$. Déduis-en une valeur approchée de x_0 à 10^{-2} près .

Partie B

4.a. Détermine le domaine de définition D_h de h.

b. Justifie que h est prolongeable par continuité en 1 , puis définis ce prolongement .

5.a. Etudie les variations de la fonction v définie sur $\mathbb{R}$ par $v(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4$.

b. Démontre que l'équation v(x)=0 admet une solution unique α telle que $-0,92 < \alpha < -0.91$.

c. Déduis –en le signe de $v(x)$ suivant les valeurs de x .

6. Soit g l'application définie de $]-\infty; 0]$ dans $]-\infty; 4]$ par g(x)=v(x).

a. Justifie que g admet une bijection réciproque g^{-1}.

b. Calcule $g^{-1}(0)$ et $g^{-1}(4)$.

c. Dresse le tableau de variation de f.

7.a. Justifie que l'ensemble de définition D de f est $D = \mathbb{R} - \{1\}$.

b. Calcule les limites de f aux bornes de D .

8.a. Détermine la fonction dérivée f' de f puis vérifie que , pour tout $x \in D$ $f'(x) = \dfrac{v(x)}{(x-1)^2}$.

b. Déduis – en le signe de f'(x), puis donne le sens de variation de f .

c. Dresse le tableau de variation de f.

9.a. Démontre que $f(\alpha) = \frac{3}{2}(\alpha - 1 - \dfrac{3}{\alpha - 1})$.

b. Donne un encadrement de $f(\alpha)$

c. Construis la courbe $(\mathscr{C})$ de f .

types de tirages	les p éléments sont ordonnés	les p éléments sont distincts	Outils	Nbre tirage
tirages successifs avec remise	Oui	Non	p-uplet	n^p
tirages successifs sans remise	Oui	Oui	p-arrangement	A_n^p
tirages simultanés	Non	Oui	p-combinaison	C_n^p