Année scolaire $2018-2019$
Classe *:* T^{leD}
Heure: **2 heures 15min**

DISCIPLINE: *MATHÉMATIQUES*

Évaluation sommative du 17/01/2019

SITUATION D'ÉVALUATION

Contexte:

En visite dans une librairie,julien,un élève de la classe terminal D a acheté un livre de mathématiques.Sur la couverture de cet ouvrage on trouve:

- Une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 12x + 8$
- Les nombre complexes $j = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ and $k = -\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
- L'équation complexe d'inconnue z définie par (E): $z^2+(1-i\sqrt{3})z-(1+i\sqrt{3}) = 0$
- $a = \dfrac{\sqrt{3}+i}{2}$ et $b = \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$
- $u(x) = \sqrt{\dfrac{x^3}{1-x}}$, $v(x) = \left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^2$ et $w(x) = \dfrac{1+\cos(2x)}{\cos(2x)-3}$

Une fois à la maison, julien se préoccupe des liens qui existent entre certaines des indications de la couverture.

Tâche: tu es invités à répondre aux préoccupations de Julien en résolvant les trois problèmes suivants.

Problème 1

1- a) Etudie les variations de f.

1- b) Démontre que l'equation $f(x) = 0$ admet trois solutions sur $\mathbb{R}$

1- c)Démontre que l'une de ses solutions notée α est dans $]0, 1[$

2- a) Détermine un encadrement de α d'amplitude 0.1

2- b) Déduis le signe de $f(x)$ sur $]0, 1[$

3- a) Démontre que la fonction $g(x) = \dfrac{f(x) + 12x}{x + 2}$ est prolongeable par continuité en -2

4-) Etudie la dérivabilité des fonctions u,v et w sur leur ensemble de définition puis calcul la fonction dérivée sur leur ensemble de dérivabilité

Problème 2

3- b) Démontre que les solutions dans l'ensemble $\mathbb{C}$ de l'équation $x^3 - 1 = 0$ sont 1,j et k

5- a) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) et exprime les solutions z' et $z"$ de (E) en fonction de a et b

5- b) Mets a et b sous forme trigonométrique et représente leurs points images A et B dans le plan complexe

5- c) En déduis une construction simple des points images des solutions de l'equation (E) puis mets ces solutions sous forme trigonométrique

6- a) Déduis de ce qui précède les valeurs exactes respectives de $\cos\dfrac{5\pi}{12}$ $\sin\dfrac{5\pi}{12}$

7-) Soit l'expression $P(z) = z^3 - 4z + 6z - 4$

7- a) Montre que l'équation $P(z) = 0$ admet une solution réélle

8- On note A, B et C les points images des solutions de l'équation $P(z) = 0$ dans le plan complexe $(0; \vec{e_1}, \vec{e_2})$ tels que $Im(z_A) = 0$, $Im(z_B) > 0$ et $Im(z_C) < 0$.

8- a) Calcul le module et un argument des nombres complexes z_A,z_B et z_C

8- b) Montre que le triangle ABC est isocèle et rectangle et en déduis le centre et le rayon du cercle passant par les points A,B et C