

Année scolaire 2019 – 2020

Classe: $T^{\text{le}} C$

Heure: 4 heures

COMPOSITION DU PREMIER TRIMESTRE

Mathématiques

Contexte:

Ayant participé au grand jeu concours organisé par la mairie de la commune de DOUNIA, fofo, un élève en classe de terminale C , à remporté le premier prix, dont un joli coffret de grande valeur ayant la forme d'un pavé droit $ABCDEFGH$ de sens direct, dont la base $ABCD$ est un carré de côté $AB = 1$ et dont la hauteur est $AE = 2$. Fofo, cherche à en savoir un peu plus les aspects géométriques de ce coffret. Il pose :

- $\vec{i} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{j} = \overrightarrow{AD}$ et $\vec{k} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$
- Fofo désigne par O le centre de ce coffret, par I et J les milieux respectifs des segments $[BE]$ et $[EG]$
- L'unité de longueur est $ul = 2\text{cm}$.

Tâche:

Tu vas aider fofo dans ses recherches en traitant les trois problèmes suivants:

Problème1

1. Exprimer le point G comme barycentre des points A, B, D, E .
2. Démontre que le triplet $(A; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ forme un repère orthonormé direct.
 - a- Calcul BJ^2 et GI^2
 - b- Calcul les produits scalaires $\overrightarrow{OE} \cdot \overrightarrow{OG}$ et $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OE}$ puis en déduire $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OG}$.
3. Déterminer l'ensemble (E) des points M de l'espace tel que $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{ME} \cdot \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{MB} = 17$.

4. Déterminer le rapport et le centre de l'homothétie qui transforme le point I en B et le point J en G

Problème 2

5.
 - a-Détermine une équation cartésienne du plan (BEG)
 - b- Détermine l'expression analytique de la réflexion $S_{(BEG)}$ de plan (BEG)
6.
 - a-Détermine une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par le point F et perpendiculaire au plan (BEG)
 - b-Détermine les coordonnées le point d'intersection I de la droite (Δ) et du plan (BEG)
 - c-Détermine l'expression analytique du demi-tour $S_{(\Delta)}$ d'axe la droite (Δ)
7. Détermine l'expression analytique de la composée $S_{(P)} \circ S_{(BEG)}$
8. Fofo considère un plan (P) passant par le point F et parallèle au plan (BEG)
 - a-Détermine la nature et les éléments caractéristiques de la composée $S_{(P)} \circ S_{(BEG)}$
 - b-détermine l'expression analytique de la composée $S_{(P)} \circ S_{(BEG)}$
 - c-En déduire l'expression analytique de la réflexion $S_{(P)}$ de plan (P)
 - d-Démontre que le plan (P) est globalement invariant par le demi-tour $S_{(\Delta)}$
9. Fofo considère un plan (Q) contenant la droite (Δ)
 - a-Démontre que le plan (Q) est globalement invariant par la réflexion $S_{(P)}$ de plan (P)
 - b-Détermine la nature et les éléments caractéristiques de la composée $S_{(Q)} \circ S_{(BEG)}$
 - c-En déduire l'expression analytique de la réflexion $S_{(Q)}$ de plan Q
 - d-Détermine une équation cartésienne du plan (Q)

Problème 3

Dans le plan complexe muni du repère orthonormé $(A; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ fofo place des lampadaires aux points M_1 et M_2 d'affixes respectifs $u = i - \sqrt{3}$ et $v = 2 + u$

10.
 - a-Donne une interprétation géométrique du module et un argument de u

b-Ecris une forme exponentielle de u

11. Démontre que $\forall \theta \in \mathbb{R}$ on a:

$$1 + e^{i\theta} = 2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\theta} \text{ et } 1 + e^{i\theta} = -2i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\theta}$$

12. a-Donne une forme trigonométrique de v

b-En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$

13. Détermine le plus petit entier naturel n pour que v^{2017n} soit imaginaire pur

14. Détermine les entiers relatifs n pour que v^n soit un nombre réel non nul.