Classe : T^{le} ***EA***

Durée : *4 Heures*

TERMINALE E-A

Épreuve :***Mathématiques***

Problème 1

Dans le plan $(\mathcal{P})$ muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$,on considère les affixes a , b et c respectives des points A,B et C sont les racines du polynôme complexe $P(z) = z^3 - 2z^2 - (4+4i)z - 16 + 16i$ ou z désigne une variable complexe.

1.a. Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$, sachant que le points A appartient à la droite de repère $(0;\overrightarrow{u})$ et le point B appartient à la droite de repère $(0,\overrightarrow{v})$.

b. Sachant que les points A et B sont symétriques par rapport au point E détermine les coordonnées des points A, B, C et E .

c. Calcule $\dfrac{c-b}{a-b}$ et déduis-en la nature du triangle ABC.

2. En réalité les points A, B, C et E ont pour affixes respectives -1-i ; -3+i ; 2+i et i . Les points H et K désignent les barycentres respectifs des systèmes $\{(A,3),(B,1)\}$ et $\{(A,3),(B,-1)\}$. A tout point M du plan, distinct de A d'affixe z, on associe le point M' d' affixe z' tel que $z' = \dfrac{iz+3i+1}{z+1+i}$.

a. Détermine les coordonnées des points H et K.

b. Détermine géométriquement l'ensemble (Δ) des points M de $\mathscr{P}$ tels que $|z'| = 1$.

3.a. Ecris le nombre complexe $u = 2 - 2e^{i\frac{\pi}{4}}$ sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique .

Problème 2

On considère le cube $ABCDEFGH$. On donne $AD = 8cm$. Soient D', B' , et E' respectivement les points des segments $[AD]$, $[AB]$,$[AE]$ tel que
$AD' = AB' = AE' = 2cm$.
On admettra que l'espace affine est orienté et que $\mathscr{R} = (A;\overrightarrow{AD'},\overrightarrow{AB'},\overrightarrow{AE'})$ est un repère orthonormé direct .

1. Calcule dans le repère $\mathscr{R}$ les coordonnées des sommets de ce cube .
   Soient I le milieu du segment $[HE]$ et J celui $[CG]$.
2. Calcule en cm^2 l'aire du triangle FIJ

3. $\overrightarrow{u} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(-\overrightarrow{AD'} + \overrightarrow{AB'})$.

a. Démontre que $\overrightarrow{u}$ est unitaire .

b. Détermine les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{v}$ tel que $\mathscr{R}_1 = (A; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{AE'})$ soit un repère orthonormé direct de l'espace .

Problème 3

L' espace est décoré par des cordes de portions des courbes des fonctions suivantes :
$f(x) = \dfrac{x^3 - 3x - 1}{x - 1}$; $h(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x-1}} + x$; $g(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}x - \cos(x)$ et $v(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4$.

Partie A

1. Etudie les variations de g sur $[0; \pi]$.

2.a. Démontre que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution et une seule x_0 dans $[0; \pi]$.

3. Démontre que x_0 appartient à $[0,8; 0,9]$. Déduis-en une valeur approchée de x_0 à 10^{-2} près .

Partie B

4.a. Détermine le domaine de définition D_h de h.

b. Justifie que h est prolongeable par continuité en 1 , puis définis ce prolongement .

5.a. Etudie les variations de la fonction v définie sur $\mathbb{R}$ par $v(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4$.

b. Démontre que l'équation $v(x) = 0$ admet une solution unique α telle que $-0,92 < \alpha < -0.91$.

c. Déduis –en le signe de $v(x)$ suivant les valeurs de x .

6. Soit g l'application définie de $]-\infty; 0]$ dans $]-\infty; 4]$ par $g(x) = v(x)$.

a. Justifie que g admet une bijection réciproque g^{-1}.

b. Calcule $g^{-1}(0)$ et $g^{-1}(4)$.

c. Dresse le tableau de variation de f

7.a. Justifie que l'ensemble de définition D de f est $D = \mathbb{R} - \{1\}$.

b. Calcule les limites de f aux bornes de D .

8.a. Détermine la fonction dérivée f' de f puis vérifie que , pour tout $x \in D$
$f'(x) = \dfrac{v(x)}{(x-1)^2}$.

b. Déduis – en le signe de f'(x), puis donne le sens de variation de f .

c. Dresse le tableau de variation de f.

9.a. Démontre que $f(\alpha) = \frac{3}{2}(\alpha - 1 - \dfrac{3}{\alpha - 1})$.

b. Donne un encadrement de $f(\alpha)$

c. Construis la courbe $(\mathscr{C})$ de f .