NIVEAU BACCALAURÉAT Tle C

Épreuve de Mathématiques

Contexte:

Au cours de la semaine culturelle organisée par ton établissement, divers jeux tiennent les spectateurs en haleine. L'un des jeux consiste à lancer deux gros dés tétraédiques parfaits D_1 et D_2 et, lorsqu'ils sont au repos, à observer l'inscription de sa face supérieure. Les différentes faces du dé D_1 portent les inscriptions 0; 1; -1; 2 et sur les faces de D_2 sont marqués 1; -1 ; 0 ; 1.On note α le nombre relevé sur D_1 et β celui relevé sur D_2 .Soit f la transformation du plan d'écriture complexe : $z' = \overline{az} + 1 + i$ avec $a = \alpha + i\beta$.

L'animateur du jeu vante les surprises agréables et les gains qui attendent ceux qui tentent leur chance.Taka élève en classe de $T^{le}C$ s'intéresse aux éléments caractéristiques de la transformation f et au nombre de jeux disponibles la semaine culturelle. A la fin des cérémonies une planche d'exercice de révision est remise aux élèves en classe d'examen. Taka sollicite ton aide.

Tâche : Tu vas te servir de tes connaissances pour aider Taka à résoudre les problèmes suivants.

Problème 1

1. (a) Détermine la probabilité pour que f soit une similitude plane indirecte.
   (b) Détermine la probabilité pour que f soit un antidéplacement
2. On pose dans cette question: $\alpha = 1$ et $\beta = -1$
   (a) Quelle est la nature précise de f
   (b) Détermine les éléments caractéristiques de f

Problème 2

Une phase du jeu consiste à déterminer le nombre de jeux disponibles pendant la semaine culturelle par le calcul de la limite en millier de la suite $(nI_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $I_0 = \int_0^1 \sqrt{1+t}\mathrm{d}t$ et $I_n = \int_0^1 t^n\sqrt{1+t}\mathrm{d}t$

3. Calcule I_0 et I_1

4. Compare t^n et t^{n+1}, lorsque $0 \leq t \leq 1$ et $n > 0$

5. (a) Établir que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{\sqrt{2}}{n+1}$

   (b) Démontre que pour tout t élément de $[0;1]$, on a:
   $0 \leq \sqrt{2} - \sqrt{1+t} \leq \frac{1}{2}(1-t)$

   (c) Détermine le nombre de jeux disponibles pendant la semaine culturelle.

Problème 3

Partie A

L'espace orienté est muni d'un repère orthonormé $(\Omega; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.On considère les plans (P) et (Q) d'équations cartésiennes respectives : $x-y+z-3=0$ et $2x-y-3z+4=0$.

6. Détermine l'expression analytique du demi-tour d'axe $(P) \cap (Q)$.

7. Soit le vecteur $\vec{u} = -2\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$.

   (a) Détermine une représentation paramétrique du plan (P') tel que $t_{\vec{u}} = f \circ S_{(P')}$, ou f et $S_{(P')}$ désignent respectivement les réflexions de plan (P) et (P'), et $t_{\vec{u}}$ la translation de vecteur $\vec{u}$.

8. On considère le pont $O(0;4;0)$ et les vecteurs $\vec{e_1} = \frac{1}{\sqrt{5}}(\vec{i} + 2\vec{j})$ et $\vec{e_2} = \frac{1}{\sqrt{10}}\left(6\vec{i} - 3\vec{j} + 5\vec{k}\right)$

   (a) Démontre que $(O; \vec{e_1}, \vec{e_2})$ est un repère orthonormé de (Q).

   (b) On désigne par h la restriction de f au plan (Q)

   (c) Détermine l'expression analytique de h relativement au repère $(O; \vec{e_1}, \vec{e_2})$

Partie B

On suppose que le plan complexe (Q) est muni du repère orthonormé direct $R = (O; \vec{e_1}, \vec{e_2})$. A tout point $M(x, y)$ du plan associé, lorsque cela est possible, le nombre complexe $z_{m,a} = \frac{1}{\ln 2}\ln\left(2^x + a^2 + 1\right) + i\left[2x(-m + \ln(ax)) - y\right]$, où m et a sont des paramètres réels avec a différents de zéro.

9. Détermine l'ensemble des points M tels que $z_{m,a}$ soit un nombre réel strictement positif.

10. On définit ainsi une famille de courbes $(C_{m,a})$ d'équation: $y = f_{m,a}(x)$

    (a) Détermine le domaine de définition $D_{m,a}$ de $f_{m,a}$.

    (b) Etudie les variations de $f_{m,a}$

11. On considère maintenant la fonction g définie par:
$$\begin{cases} g(x) = 1 - \sqrt{1-2x-2x^2} \qquad si \qquad x \leq 0 \\ g(x) = f_{1,1}(x) \qquad si \qquad x > 0 \end{cases}$$
On désigne par (Γ) la courbe de g dans le repère R.

    (a) Etudie la continuité et la dérivabilité de g en $x = 0$ puis interpréter graphiquement le résultat de la dérivabilité.

12. On désigne par (Γ_1) la courbe dans R de la restriction de g à l'intervalle $]-\infty, 0[$

    (a) Démontre que (Γ_1) est la portion d'une ellipse (E) dont on précisera: le centre ; les sommets, les foyers et les directrices .

    (b) Discuter suivant les valeurs du paramètre réel t, le nombre de solutions de l'équation: $g(x) - x - t = 0$

    (c) Calcule l'aire A du domaine plan délimité par la courbe (Γ), l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives: $x = 1$ et $x = e$.

Partie C

13. On désigne par F la transformation du plan d'expression analytique :
$$\begin{cases} x' = x + y \\ y' = \frac{1}{2}y \end{cases}$$

    (a) Démontre que F est une affinité dont on donnera le rapport, la direction et l'axe.

    (b) Détermine une équation cartésienne de $F(\Gamma_1)$.

14. Pour tout entier naturel n, on pose: $M_{n+1} = F(M_n)$

    (a) Détermine en fonction de x_0, u_0 et n les coordonnés (x_n, y_n) de M_n

    (b) Détermine en fonction des points M_n, pour lesquels x_n et y_n ont une limite nulle, lorsque n tend vers $+\infty$