DISCIPLINE:***MATHEMATIQUES***

TERMINALE D

SITUATION D'EVALUATION

Context:

Un fermier qui désire aménager son nouveau domaine pour cela il se fait construire une pyramide régulière $SABCD$ de base $ABCD$ et dont les faces latérales sont entièrement en verre.L'architecte chargé de l'exécution des travaux a utilisé les informations suivantes:

- l'espace est orienté par un repère orthonormé direct $(\Omega; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$, (unité de longueur 11 mètres).
- les sommets A, B, C ont pour coordonnées: $A(1, 2, 3); B(-1, 0, 4); C(1, -1, 6)$
- l'une des faces latérales est contenue dans le plan (P) d'équation : $22x - 20y + 4z + 6 = 0$
- le sommets S appartient à l'ensemble (E) des points M de l'espace tels que : $(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB})\Lambda\vec{u} = (\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{DM})\Lambda\vec{u}$ avec $\vec{u} = \vec{e_1} - 2\vec{e_2} - 2\vec{e_3}$.

Renaud, jeune frère du fermier et élève en classe de terminale scientifique, se propose d'utiliser ces informations pour déterminer la quantité de verre ayant servi à couvrir la pyramide

Tâche: tu es invité à trouver des réponses aux préoccupations de Renaud

PROBLÈME 1

1. Calcul en mètre, la longueur du coté de la base de la pyramide
   (a) Détermine les coordonnées du point D
   (b) Détermine les coordonnées de l'isobarycentre G des points A, B, C, D
2. Démontre que l'ensemble (E) est la droite passant par le point H, milieu du segment $[AC]$, et dirigé par le vecteur $\vec{u}$
3. Écris une représentation paramétrique de (E)
4. Démontre qu'on a $S(\frac{1}{3}; \frac{11}{6}; \frac{35}{6})$

5. Calcul en mètre la hauteur de la pyramide

PROBLÈME 2

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

$(\mathcal{D})$ est la droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x = t - 1 \\ y - t + 1 \\ z = t + 2 \end{cases}$ (où $t \in \mathbb{R}$)

$(\mathbb{D}')$ est la droite d'équation cartésienne: $-x - 3 = y = -z - 1$

On considère les points $A(1;2;-1), B(-1;0;1) et C(2;1;-2)$.On désigne par G le barycentre des points pondérés $(A;-2) et (B;1)$, par H le barycentre des points pondérés $(B;3) et (C;2)$ et par (Δ) l'ensemble des points M de l'espace tels que $(2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}) \Lambda (3\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}) = \vec{O}$

6. Détermine la position relative des droites $(\mathcal{D}) et (\mathcal{D}')$.

   (a) Déduis-en que $(\mathcal{D}) et (\mathcal{D}')$ détermine un plan $(\mathcal{P})$ dont tu détermineras une équation cartésienne

7. Démontre que (Δ) est une droite dont tu donneras un repère .

   (a) Détermine une représentation paramétrique de (Δ)

   (b) calcule la distance du point O à la droite (Δ)

8. Détermine l'intersection de (Δ) et $(\mathcal{P})$

PROBLÈME 3

La valeur correspondant au prix des travaux est en dizaine de milliers d'euros du module de l'affixe du centre de l'ensemble (ϵ) des points $M(z)$ tel que $f(z) = \dfrac{z + 2 + 3i}{z - i}; (z \neq i)$ soit imaginaire pur où $-2 - 3i$ est une racine du polynôme $P(z) = z^3 + (1 + 4i)z^2 - 3z + 1 + 8i$

Partie A

9. Démontre que l'équation $P(z) = 0$ admet une solution imaginaire par z_0 qu'on précisera

10. justifie que $i^{2012} = 1$ et $i^{2013} = i$

11. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + (i^{2012} + 5i^{2013})z - 8 + i = 0$

12. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$

Partie B

Dans la suite $A_1, B_1, C_1, E_1 et M$ désigne les points du plan complexe d'affixe respectives:
$z_0 = i, z_1 = 1 - 2i, z_2 = -2 - 3i, z_4 = (-1 - 2\sqrt{3}) + (-1 + \sqrt{3})i$ et z puis on pose $U = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{z_0 + z_2}$

(a) Mettre $f(z_1)$ sous forme algébrique puis déduis-en la nature du triangle $A_1B_1C_1$.

(b) Mettre U sous forme algébrique et trigonométrique.

(c) Déduis-en les valeur exactes de $\cos\dfrac{5\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{5\pi}{12}$

(d) Écris U^{2014} sous forme algébrique.

13. Détermine la forme exponentielle de $f(z_4)$

14. Déduis-en la nature du triangle $A_1C_1E_1$

(a) Détermine l'ensemble (ξ) des points $M(z)$ tel que $\mid f(z) \mid = 1$

(b) Exprime les parties réelles et imaginaires de $f(z)$ en fonction de x et y où $z = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

(c) Détermine l'ensemble (ε) de points $M(z)$ tels que $f(z)$ soit un nombre réelle imaginaire pur