Classe **:T^{le} D**

TERMINALE D

Mathématiques

Situation d'évaluation

Contexte :Poste de police de TOGNON

La construction du poste de police de TOGNON est achevé. le commissaire affecté prend connaissance des lieux et décide de positionner trois policiers à des points stratégiques du bâtiment En utilisant la marquette du bâtiment représenté par un cube $ABCDEFGH$, il repère les trois policiers par les points P,Q,R tels que $\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AQ} = 4\overrightarrow{AD}$ et R le barycentre des points pondérées $(C;-1)$ et $(G;2)$.Une lampe d'éclairage sera installée au milieu M du segment $[AE]$.Kaled qui est le fils du commissaire et élève en classe de terminale D, décide d'utiliser ces informations pour résoudre les problèmes suivants.

Tâche : tu es invité(e) à faire comme eux.

Problème 1

A

1. Justifie que (B, C, H, A) est un repère de l'espace.
2. Quels sont dans ce repère, les triplets de coordonnées des points G,F et E
3. a. Écris une représentation paramétrique de la droite (GF)
   b. Écris une représentation paramétrique du plan (EFG)
4. Justifie que $\overrightarrow{AF}$ est un vecteur normal au plan (EBC)

B

L'espace est muni du repère orthonormé direct $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$.

5. a. Démontre que R a pour coordonnée $(1, 1, 2)$
   b. Détermine la nature du triangle PQR puis détermine son aire.
6. Calcul de deux manière différentes la distance du point M à la droite (BC).
7. Démontre qu'une équation du plan (PQR) est : $4x + 2y + z - 8 = 0$.
8. On désigne par K le projeté orthogonal du point E sur le plan PQR.
   a. Détermine un système d'équation cartésiennes de la droite (EK).
   b. Calcul de deux manières différentes la distance du point E au plan PQR.
   c. Démontre que le point K appartient à la droite (PR).

Problème 2

Kaled se propose de chercher des lieux géométriques. il désigne par I le barycentre des points pondérés $(A;-1)$,$(B;1)$ et $(C;1)$, puis J l'isobarycentre des points A,B et C.

9. a. Démontre que $ABIC$ est un parallélogramme.
   b. Justifie que l'ensemble (Δ) des points M de l'espace tels que $\left(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right)\Lambda\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)=\vec{0}$ est une droite dont tu préciseras un repère.
   b. Démontre que l'ensemble (Γ) des points M de l'espace tels que $\left(-\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right).\left(2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right)=\vec{0}$ est un plan dont tu préciseras une équation cartésienne.

Problème 3

.. L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.On considère les points $E^{'}(1,2,3)$,$F^{'}(2,1,2)$,$G^{'}(5,7,2)$,$H^{'}(5,0,9)$. Soit (D_1) la droite de système d'équations cartésiennes $\dfrac{7-x}{-4}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{12-z}{-6}$.

11. Justifie que les points $E^{'}$,$F^{'}$ et $G^{'}$ définissent un plan (P_1) dont on établira une équation cartésienne.
12. a. Précise un repère de la droite (D_1) puis justifie que $H^{'}\in(D_1)$.
    b. Démontre que (D_1) et (P_1) sont sécants puis détermine $(D_1)\cap(P_1)$.
    c. Justifie $E^{'}F^{'}G^{'}H^{'}$ est un tétraèdre puis calcul son volume.
13. a. Démontre que le triplet $\left(\overrightarrow{E^{'}F^{'}},\overrightarrow{E^{'}G^{'}},\overrightarrow{E^{'}H^{'}}\right)$ est une base orthogonale de l'ensemble des vecteurs de l'espace.
    b. Détermine les coordonnées du point O dans le repère$\left(E^{'};\overrightarrow{E^{'}F^{'}},\overrightarrow{E^{'}G^{'}},\overrightarrow{E^{'}H^{'}}\right)$.
14. Résoudre dans $\mathbb{R}^3$, par la méthode du pivot de Gauss

$$(S_3):\begin{cases} x+2y+4z=-1 \\ x-my+m^2z=m+1 \quad (m\in\mathbb{R}) \\ 2x+my+2mz=2 \end{cases}$$