Classe:T^{leD}

DISCIPLINE:***MATHEMATIQUES***

RENFORCEMENT TLE D

- Le candidat doit traiter obligatoirement toutes les parties de l'épreuve.
- Il ne sera jugé que sur la base des traces écrites sur la copie.
- Il sera tenu grand compte de la clarté et de la précision des raisonnements.

Exercice 1

1. Résoudre l'équation différentielle : $6y'' - 12y' + 10y = 0$
2. Pour la suite numérique suivante: $(U_n)_{n\in\mathbb{N}} : \begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \dfrac{2U_n + 3}{U_n + 4} \end{cases}$,
calcule U_1 et U_2 et montre que pour tout entier naturel n,$U_n \in [0, 1]$.
3. Démontre que la suite de terme général $V_n = \dfrac{U_n - 1}{U_n + 3}$ est une suite géométrique et convergente puis calcul U_n en fonction de n
4. $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est -elle convergente? Si oui calculer sa limite.
5. On considere la transformation h de centre A du plan dans lui même qui transforme B en C avec $B(-6+5i)$, $C(-4+i)$, et A est l'antécédent de $A'(-3 - 16\sqrt{5}; 2 - 12\sqrt{5})$ par la transformation plane g d'expression analytique: $\begin{cases} x' = x + y + 2 \\ y' = -x + y - 1 \end{cases}$

5-a Démontrer que l'écriture complexe de h est $z' = iz + 1 + 7i$ et donner sa nature et ses éléments
caractéristiques.

5-b Démontrer que l'écriture complexe de g est $z' = (1 - i)z + 2 - i$ et Caractériser g à parti de son écriture complexe.

Problème

A- Soit la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $]0;+\infty[$ par :
$u(x) = x^2 - \ln x$

6. Détermine $u'(x)$ pour tout x appartient à $]0;+\infty[$.
7. Détermine le sens de variations de la fonction u
8. Achève l'étude des variations de la fonction de la fonction u
9. Déduis-en que la fonction u ne s'annule pas sur $]0;+\infty[$

B- On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie par:
$f(x) = x + \dfrac{1+\ln x}{x}$
On désigne par $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O, I, J) du plan

10. Prouve que la fonction f est définie sur $]0;+\infty[$
11. Justifie que la fonction f est dérivable sur $]0;+\infty[$
12. Démontre que pour tout x appartenant à $]0;+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{u(x)}{x^2}$
13. Déduis-en le sens de variation de la fonction f
14. Achève l'étude des variations de la fonction de la fonction f
15. Démontre que l'application $g : \begin{cases}]0;+\infty[\to f(]0;+\infty[) \\ x \mapsto g(x) = f(x) \end{cases}$
est une bijection.
16. Justifie que la droite $(\mathcal{D})$ d'équation $y = x$ est asymptôte à la courbe $(\mathcal{C})$ au voisinage de $+\infty$
17. Détermine la position de $(\mathcal{C})$ par rapport à $(\mathcal{D})$ sur $]0;+\infty[$
18. Prouve que la droite d'équation $x = 0$ est asymptôte à la courbe $(\mathcal{C})$ Construis dans un même repère la courbe représentative (Γ) de la bijection réciproque g^{-1} de g
19. Détermine les coordonnées du point A de la courbe $(\mathcal{C})$ ou la tangente est parallèle à $(\mathcal{D})$
20. Justifie que le point $A'(2, 1)$*appartient* à la courbe (Γ)
21. Détermine une équation de la tangente à la courbe (Γ) en A'