

Classe: T^{leD}

DISCIPLINE: MATHÉMATIQUES

Evaluation sommative

SITUATION D'ÉVALUATION

Contexte:

En visite dans une librairie, Julien, un élève de la classe terminal D a acheté un livre de mathématiques. Sur la couverture de cet ouvrage on trouve:

- Une fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^3 - 12x + 8$
- Les nombres complexes $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ and $k = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$
- L'équation complexe d'inconnue z définie par $(E): z^2 + (1 - i\sqrt{3})z - (1 + i\sqrt{3}) = 0$
- $a = \frac{\sqrt{3} + i}{2}$ et $b = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$

Une fois à la maison, Julien se préoccupe des liens qui existent entre certaines des indications de la couverture.

Tâche: tu es invité à répondre aux préoccupations de Julien en résolvant les trois problèmes suivants.

Problème 1

- 1- a) Étudie les variations de f .
- 1- b) Démonstre que l'équation $f(x) = 0$ admet trois solutions sur \mathbb{R}
- 1- c) Démontrer que l'une de ses solutions notée α est dans $]0, 1[$
- 2- a) Détermine un encadrement de α d'amplitude 0.1
- 2- b) Déduis le signe de $f(x)$ sur $]0, 1[$

- 3- a) Démontre que la fonction $g(x) = \frac{f(x) + 12x}{x + 2}$ est prolongeable par continuité en -2

Problème 2

- 3- b) Démontre que les solutions dans l'ensemble \mathbb{C} de l'équation $x^3 - 1 = 0$ sont $1, j$ et k
- 5- a) Résous dans \mathbb{C} l'équation (E) et exprime les solutions z' et z'' de (E) en fonction de a et b
- 5- b) Mets a et b sous forme trigonométrique et représente leurs points images A et B dans le plan complexe
- 5- c) En déduis une construction simple des points images des solutions de l'équation (E) puis mets ces solutions sous forme trigonométrique
- 6- a) Déduis de ce qui précède les valeurs exactes respectives de $\cos \frac{5\pi}{12}$ et $\sin \frac{5\pi}{12}$