NIVEAU TERMINALE D

Épreuve :***Mathématiques***

Situation d'évaluation

Contexte : La fete du retraité
Pour souhaiter un bon départ à la retraite au surveillant générale de l'etablissement,les professeurs de mathématiques du Complexe scolaire notre Dame de Laurette CSNDL ont organisé une petite fete. La reception a lieu dans une grande salle ayant la forme d'un cube $ABCDEFGH$.Dans le repère orthonormé direct $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ des jeux de décoration sont placés aux points $I(1; \frac{1}{3}, 0)$;$K(\frac{3}{4}; 0; 1)$;$L(a; 1; 0$
et $J(0; \frac{2}{3}; 1)$ où a est un nombre réel de $[0, 1]$. le gâteau prévu devrait faire apparaitre une portion de la courbe $(\mathcal{C})$ d'équation $y = f(x)$ où f est la fonction par $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \sqrt{1 - x^2}$
BONOU jeune professeur présent à la fête, se demande s'il est possible de choisir le réel a de sorte que les droites (KL) et (IJ) soient sécantes et il veux étudier les variations de la fonction f afin de se rendre compte des propriétes sur la courbe de f
Tâche :Tu vas aider BONOU à avoir une réponse à ses préocupations en traitant les problèmes suivants.

Problème 1

1. Détermine une représentation paramétrique de la droite (IJ)
2. Justifie que :
$$\begin{cases} x = (a - \frac{3}{4})t + \frac{3}{4} \\ y = t \\ z = -t + 1 \end{cases}, t \quad \textit{réel}$$ est une représentation paramétrique de la droite (KL)
3. Détermine suivant les valeurs de a l'intersection des droites (KL) et (IJ)
4. Détermine une équation cartésienne du plan (IJK) lorsque $a = \frac{1}{4}$ puis détermine l'intersection de ce plan et de la droite (DH)

Problème 2

On pose $X = \frac{u + iv}{2 - 3i}$ où u et v sont deux nombres réels

5. (a) sachant que $\mid X \mid = \sqrt{2}$ et que $\frac{3\pi}{4}$ est un argument de X, détermine u et v

(b) Sachant que $(E) : z^4 - 476 + 480i = 0$

(a) Justifie que si z_0 est une solution de (E), alors $-z_0$, iz_0 et $-iz_0$ sont aussi solutions de (E)

(b) Calcul $(1+5i)^4$ sous forme algébrique

(c) Déduis-en la résolution de l'équation (E) dans $\mathbb{C}$

6. Le plan complexe (P) muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J).On désigne par $z_1, z_2, z_3 et z_4$ les solutions de l'équation (E) avec
$\mathrm{Re}(z_1) < \mathrm{Re}(z_2) < \mathrm{Re}(z_4) < \mathrm{Re}(z_3)$. A_1, A_2, A_3, A_4 sont des points d'affixes z_1, z_2, z_3 et z_4

   (a) Place les points A_1, A_2, A_3, A_4

   (b) Détermine la nature du quadrilatère $A_1A_2A_3A_4$

   (c) Établis une équation cartésienne du cercle (τ) circonscrit au triangle $A_1A_2A_3$

PROBLEME 3

Le plan est muni d'un repère orthonormé directe (O, I, J).Soit f la fonction définie par :$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \sqrt{1+x^2}$

Partie A

Soit la fonction g définie par : $g(x) = 1 - x\sqrt{1+x^2}$

7. Etudie les variation de g.

   (a) Démontre que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution α et que $0,78 < \alpha < 0,79$.

   (b) Déduis-en le signe de $g(x)$

   (c) Démontre que $f(\alpha) = \dfrac{\alpha^4 - 3}{3\alpha}$ et que $-1,13 < f(\alpha) < -1,10$

8. Démontre que l'équation $g(x) = x$ admet une solution unique β telle que : $0,4 < \beta < 0,5$

   (a) Etudie le sens de variation de g' (la dérivée première de la fonction f). Que représente le point $I(0;1)$ pour la courbe $(\mathcal{C}_g)$?

   (b) Justifie que $\forall x \in [0,4; 0,5], \mid g'(x) \mid \leqslant \frac{3}{2}$ puis que $\mid g(x) - \beta \mid \leqslant \frac{3}{2} \mid x - \beta \mid$

Partie B

9. (a) Etudie le sens de variation de f (on exprimera f en fonction de $g(x)$)

   (b) Dresse le tableau de variation de variation de f

   (c) Etudie les branche infinie de $(\mathcal{C}_f)$

10. Soit h l'application de $\mathbb{R}_-$ dans $f(\mathbb{R}_-)$ définie par : $h(x) = f(x)$

(a) Justifier que h admet une bijection h^{-1} et précise sont ensemble de définition j.

(b) Etudie la dérivabilité de h^{-1} sur J. Justifie que le point $A(-\sqrt{3}-2; -\sqrt{3})$ est un point de $(\mathcal{C}_h^{-1})$ puis déterminer une équation cartésienne de la tangente (T) à $(\mathcal{C}_h^{-1})$ au point d'abscisse A

11. Trace les courbes $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_h^{-1})$ dans un même repère

12. Soit les fonctions $i(x) = -f(x)$;$k(x) = f(-x)$;$p(x) =\mid f(x) \mid$
sans étudier ces fonctions , représenter chacune de leur courbe représentative.