—

PREMIERE C

Épreuve de Mathématiques

Contexte:

Au cours de la semaine culturelle organisée par ton établissement, divers jeux tiennent les spectateurs en haleine. L'un des jeux consiste à déterminer une valeur du réel x pour que la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 140 \\ u_{n+1} = \frac{3}{2}u_n\cos 2x + 220\sin^2 x \qquad \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

avec $x \in \mathbb{R}$ soit géométrique d'une part et d'autre part les propriétés de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.Taka élève très brillant en classe de 1^{re} scientifique affirme que pour $x = \frac{\pi}{6}$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une géométrique . Affi sa voisine de classe très étonnée décide de vérifier ces affirmations . A la fin des cérémonies et jeux diverses, une planche d'exercice de révision est remise aux élèves afin d'approfondir leurs compétences en mathématique pendant les vacances. Affi sollicite ton aide.

Tâche : Tu vas te servir de tes connaissances pour aider Affi à résoudre les problèmes suivants.

Problème 1

1. Montre que $u_1 = 210 - 200\sin^2 x$.
2. Détermine dans $]-\pi;\pi[$ les valeurs de x pour lesquelles $u_1 = 410 + 400\sin x$
3. On suppose que $x = \frac{\pi}{6}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définie la suite (v_n) par $v_n = \frac{3}{2}u_n - 990$.
   (a) Montre que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
   (b) Exprime v_n en fonction de n, puis u_n en fonction de n.
   (c) On pose $S_n = v_0 + v_1 + \cdot + v_{n+2}$. Calcule S_n en fonction de n, puis $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

4. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique et croissante définie par : $a_0a_4 = 260$ et $a_0 + a_4 = 36$

   (a) calcule a_0 et a_4 puis détermine la raison r de la suite (a_n)

   (b) Démontre que tous les termes de la suite (a_n) sont strictement positifs

   (c) On pose $T_n = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. Calcul T_n en fonction de n.

5. On considère la série statistique double (X, Y) dont les données sont regroupées dans le tableau ci-contre

X_i	11	12	16
Y_i	3,8	2,1	4,8

   .
   Choisie la lettre correspondante à la réponse juste.

   (a) la variance de X est 13

   (b) la covariance de cette série est $0,2$

   (c) La droite de régression de y en x a pour équation $y = 0,2x + 0.4$

Problème 2

Une phase du jeu concours consiste à déterminer la valeur exacte du nombre $\tan(\frac{\pi}{8})$. Soit x et y des réels.

6. Montre que : $\tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$

7. Déduis $\tan(2x)$ en fonction de $\tan x$

8. En déduis que :$\tan(3x) = \tan x \times \frac{3 - \tan^2 x}{1 - 3\tan^2 x}$

9. Application

   (a) Établir que $\frac{2\tan(\frac{\pi}{8})}{1 - \tan^2(\frac{\pi}{8})} = 1$

   (b) Démontre que le réel $\tan(\frac{\pi}{8})$ est solution de l'équation $t^2 + t - 1 = 0$

   (c) sans utiliser la calculatrice, détermine la valeur exacte de $\tan(\frac{\pi}{8})$, et interpréter la seconde solution de l'équation .

Problème 3

On considère f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x^2 + 3x - 5}{|x+1| - 2}$ et $\mathcal{C}_f$ sa représentation graphique dans un repère $(0; I, J)$

10. Étudie la continuité et la dérivabilité de f en $x_0 = -1$
11. Étudie les variations de f et dresse son tableau de variation.
12. Montre que $\mathcal{C}_f$ admet quatre asymptôtes dont on donnera les équations et la nature.
    (a) Étudie la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à ses asymptôtes non- verticales
    (b) Trace $\mathcal{C}_f$, ses asymptôtes ainsi que les demi-tangentes éventuelles
13. On définit la fonction g telle que $g(x) = f(-|x|)$
    (a) Montre que f et g coïncident sur un intervalle que l'on précisera.
    (b) Étudie la parité de g et en déduis un élément de symétrie .
    (c) Propose une méthode de construction de la courbe $\mathcal{C}_g$ de g
    (d) Construis $\mathcal{C}_g$ dans le même repère que $\mathcal{C}_f$