DU MOUVEMENT BROWNIEN AUX ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES STOCHASTIQUES ET AUX ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

Elmaleh Joachim
Serradj Fériel

26 mai 2025

Sommaire

- Théorie des processus stochastiques
- Équations différentielles stochastiques
- Équations différentielles aux dérivées partielles

Processus aléatoire

- On considère une application:

$$X : \mathbb{T} \times \Omega \to \mathbb{E}, \quad (t, \omega) \mapsto X(t, \omega)$$

- La coordonnée de X d'indice t est définie par:

$$\forall t \in \mathbb{T}, \quad X_t : \mathbb{T} \to \mathbb{E}, \quad \omega \mapsto X(t, \omega)$$

X est un processus aléatoire de Ω dans $\mathbb{E}$ indexé par $\mathbb{T}$ si ses coordonnées X_t sont des variables aléatoires sur Ω.

I. Théorie des processus stochastiques

Loi des processus aléatoires

- La tribu produit $\otimes_{t\in\mathbb{T}}\mathcal{E}$ est la tribu sur $E^{\mathbb{T}}$ engendrée par les sous-ensembles de $E^{\mathbb{T}}$ de la forme :

$$C = \prod_{t\in\mathbb{T}} A_t$$

- La loi du processus X est la mesure de probabilité P_X sur $\otimes_{t\in\mathbb{T}}\mathcal{E}$ définie par:

$$\forall A \in \otimes_{t\in\mathbb{T}}\mathcal{E}, \quad P_X(A) = P(X \in A)$$

- La loi de X est déterminée par ses marginales fini-dimensionnelles:

$$P_X(C) = P(X_{t_1}, ..., X_{t_n} \in A_{t_1} \times ... \times A_{t_n})$$

Deux processus aléatoires sont égaux en loi si leurs vecteurs fini-dimensionnels le sont.

Indépendance de deux processus

- Deux processus aléatoires sont indépendants ssi les tribus engendrées par leurs vecteurs fini-dimensionnels le sont. On a alors: $\forall n, m$

  X, Y sont indépendants $\Leftrightarrow \forall t_1, ..., t_n, s_1, ..., s_m,\ (X_{t_1}, ..., X_{t_n}), (Y_{s_1}, ..., Y_{s_m})$ sont indépendants

Définition: Une fonction aléatoire réelle continue est une fonction aléatoire réelle $X : (t, \omega) \mapsto X(t, \omega)$ telle que $\forall \omega,\ t \mapsto X(t, \omega)$ est continue.

Définition: Si X est une fonction aléatoire réelle continue, alors $\omega \mapsto X(., \omega)$ est mesurable de $(\Omega, \mathcal{A})$ dans $(C(\mathbb{T}, \mathbb{R}), \mathcal{B}(C))$

Fonction aléatoire gaussienne

Définition: Une fonction aléatoire réelle $(X(t))_{t\in\mathbb{T}}$ est gaussienne si tout vecteur fini-dimensionnel $(X(t_1), ..., X(t_n))$ est gaussien, avec $n \geq 1$ et $t_1, ..., t_n$ dans $\mathbb{T}$.

Mouvement brownien et martingales

Définition: On appelle mouvement brownien toute fonction aléatoire réelle continue $B = (B(t))_{t \geq 0}$ à accroissements indépendants gaussiens

$$B(t) - B(s) \sim \mathcal{N}(0, t - s)$$

avec $0 \leq s \leq t$ et $B(0) = 0$

Proposition:

(a) B est une fonction aléatoire réelle continue, gaussienne centrée de covariance $E(B(t)B(s)) = \min(s, t)$ et réciproquement ces propriétés caractérisent en loi le brownien.

(b) Si B est un mouvement brownien, il en est de même pour:

(i) $X(t) = \dfrac{B(a^2 t)}{a}$ avec $a \neq 0$

(ii) $X(t) = tB(\dfrac{1}{t}), \quad t > 0$ et $X(0) = 0$

(iii) $X(t) = B(t + t_0) - B(t_0)$

(iv) $X(t) = B(T + t) - B(T), \quad t \in [0, T]$ et $T > 0$

Principe d'invariance

Théorème de Donsker: La suite $(X^n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers vers le mouvement brownien. En d'autres termes, soit P_n la loi de X^n sur $C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ et soit P_B la loi de B. Alors,

$$P_n \longrightarrow P_B \quad \text{étroitement}$$

ou

$$\lim_{n\to+\infty} E(F(X^n)) = E(F(B)) \quad \text{pour toute} \quad F : C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) \to \mathbb{R} \quad \text{continue bornée}$$

Corollaire:

(1) La suite $(\max(X^n(t), t \in [0,1]))_n$ converge en loi vers $(\max(B(t), t \in [0,1]))$

(2) De même, $\displaystyle\int_0^1 (X^n(t))^2\, dt \xrightarrow{\mathcal{L}} \int_0^1 (B(t))^2\, dt$

(3) Soient $\overline{B}(t) = \max(B(s), s \in [0,t])$ la valeur record à l'instant t et $\overline{X^n}(t) = \max(X^n(s), s \in [0,t])$.
$\overline{X^n}$ converge en loi vers $\overline{B}$.

Construction du mouvement brownien

$\mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ avec $(\zeta_n)_n$ i.i.d $\sim \mathcal{N}(0,1)$.

$\mathcal{L}^2(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}, dt)$ avec $(\phi_n)_n$ base orthonormale et $\langle \phi, \psi \rangle = \int_{\mathbb{R}_+} \phi(t)\psi(t)dt$.

Soit $\tilde{\phi}_n$ la primitive de ϕ_n: $\tilde{\phi}_n(s) = \langle 1_{[0,s]}, \phi_n \rangle$. On pose:

$$B(s) = \sum_{n \geq 0} \tilde{\phi}_n(s)\zeta_n \text{ d'après la formule de Karhunen-Loève.}$$

$$\forall s \geq 0, \text{ la série } B(s) \text{ converge dans } \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, P).$$

De plus, $E(B(s)^2) = s$ et $E(B(s)B(s')) = \min(s, s')$.
B ainsi définie est une fonction aléatoire réelle gaussienne centrée de même covariance que le mouvement brownien.

Martingales

Définition: Etant donné un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, muni d'une filtration $\mathcal{F}$, une fonction aléatoire réelle $M = (M(t), t \geq 0)$ est appelée une $\mathcal{F}$-martingale ou martingale si elle est adaptée, intégrable et si:

$$\forall s < t, \quad E(M(t) \mid \mathcal{F}_s) = M(s) \text{ p.s}$$

$$\text{En particulier, } E(M(t)) = E(M(0))$$

Exemple: Un mouvement brownien B est une martingale pour sa filtartion $\mathcal{F}^B$. En effet:

$B(t) - B(s)$ est indépendant de $\mathcal{F}_s^B$ pour $0 \leq s < t$ où $\mathcal{F}_s^B = \sigma(B(r), r \leq s)$ et:

$$\begin{aligned} E(B(t) \mid \mathcal{F}_s^B) &= E(B(s) + B(t) - B(s) \mid \mathcal{F}_s^B) \\ &= E(B(s) \mid \mathcal{F}_s^B) + E(B(t) - B(s) \mid \mathcal{F}_s^B) \\ &= B(s) + E(B(t) - B(s)) \\ &= B(s) \end{aligned}$$

Définition: On dit que $M = (M(t))_t$ est une sous-martingale (respectivement sur-martingale) si elle est adaptée, intégrable et si:

$$\forall s < t,\ E(M(t) \mid \mathcal{F}_s) \geq M(s) \text{ p.s} \quad \text{(respectivement } E(M(t) \mid \mathcal{F}_s) \leq M(s) \text{ p.s)}$$

Théorème d'arrêt

- **Définition:** Une variable aléatoire $\tau : \Omega \to \mathbb{T} \cup \{+\infty\}$ est un $\mathcal{F}$-temps d'arrêt si:

$$\forall t \in \mathbb{T}, \quad \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$$

- **Théorème:** Soit $M = (M(t))_t$ une $\mathcal{F}$-martingale continue et τ un $\mathcal{F}$-temps d'arrêt borné, avec $0 \leq s \leq \tau < +\infty$, alors:

$$E(M(\tau) \mid \mathcal{F}_s) = M(s)$$

Si S est une $\mathcal{F}$-surmartingale continue, on a: $E(S(\tau) \mid \mathcal{F}_s) \leq S(s)$. Par conséquent, $E(M(\tau)) = E(M(0))$

I. Théorie des processus stochastiques

- **Corollaire:** Soient M une martingale continue, τ un temps d'arrêt p.s fini, tel que: $\forall n, \ |M(\tau \wedge n)| \leq K$ pour une constante $K < +\infty$, alors:

$$E(M(\tau)) = E((0))$$

- **Théorème:** Soient $M = (M(t))_t$ une $\mathcal{F}$-martingale continue et σ, τ deux $\mathcal{F}$-temps d'arrêt bornés, avec $0 \leq \sigma \leq \tau < +\infty$, alors:

$$E(M(\tau) \mid \mathcal{F}_\sigma) = M_\sigma$$

Si S est une $\mathcal{F}$-surmartingale continue, on a: $E(S(\tau) \mid \mathcal{F}_\sigma) \leq S_\sigma$

Inégalité de Doob

- **Théorème:(Inégalité de Doob)** Soit $M = (M_t)_{t \geq 0}$ une martingale continue, de carré intégrable. Alors pour tout $t > 0$ et tout $\lambda > 0$, on a :

$$\mathbb{P}\left(\max_{0 \leq s \leq t} |M(s)| > \lambda\right) \leq \frac{1}{\lambda^2}\mathbb{E}[M(t)^2]$$

- **Proposition:** Soit $S = (S_t)_{t \geq 0}$ une sous-martingale positive, continue. Pour tout $t > 0$ et $\lambda > 0$, on a :

$$\mathbb{P}\left(\max_{0 \leq s \leq t} S(s) > \lambda\right) \leq \frac{1}{\lambda}\mathbb{E}[S(t)]$$

Démonstration: On discrétise le temps : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $t_k = \frac{kt}{n}$, pour $k = 0, 1, ..., n$. Soit K la variable aléatoire définie comme le plus petit entier $k \leq n$ tel que $S(t_k) > \lambda$, si un tel k existe, et $K = +\infty$ sinon. Autrement dit $K = \inf\{k \leq n,\ S(t_k) > \lambda\}$ avec $\inf(\emptyset) = +\infty$.
Alors :

$$\mathbb{P}\left(\max_{0 \leq k \leq n} S(t_k) > \lambda\right) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(K = k)$$

Par l'inégalité de Markov :

$$\mathbb{P}(K = k) \leq \frac{1}{\lambda}\mathbb{E}[1_{\{K=k\}} S(t_k)]$$

Comme S est une sous-martingale :

$$\mathbb{E}[1_{\{K=k\}} S(t_k)] \leq \mathbb{E}[1_{\{K=k\}} \mathbb{E}[S(t) \mid \mathcal{F}_{t_k}]] = \mathbb{E}[1_{\{K=k\}} S(t)]$$

Donc :

$$\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(K = k) \leq \frac{1}{\lambda} \sum_{k=0}^{n} \mathbb{E}[1_{\{K=k\}} S(t)] = \frac{1}{\lambda}\mathbb{E}[S(t)]$$

Passage au temps continu : posons $A_n = \{\max_{0\leq k\leq n} S(t_k) > \lambda\}$. Comme $(A_{2^n})_n$ est une suite croissante pour l'inclusion, alors par le théorème de continuité croissante:

$$\mathbb{P}\left(\max_{0\leq s\leq t} S(s) > \lambda\right) \leq \mathbb{P}(\cup_{n\geq 0} A_{2^n}) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_{2^n}) \leq \frac{1}{\lambda}\mathbb{E}[S(t)]$$

Proposition:(Loi des grands nombres pour le mouvement brownien)

$$\lim_{t\to\infty} \frac{B(t)}{t} = 0 \quad \text{p.s.}$$

Corollaire:

$$\lim_{s\to 0^+} sB\left(\frac{1}{s}\right) = 0 \quad \text{p.s.}$$

Intégrale stochastique d'Itô

- **Définition:** Étant donnée une filtration $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t, t \geq 0)$ sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, un mouvement brownien B défini sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est appelé un $\mathcal{F}$-mouvement brownien s'il est adapté à $\mathcal{F}$, et si pour tout $0 \leq s \leq t$,

$$B(t) - B(s) \quad \text{est indépendant de } \mathcal{F}_s.$$

- **Définition:** Une fonction réelle $\varphi(t, \omega)$ définie sur $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ (respectivement, sur $[0, T] \times \Omega$) est dite progressivement mesurable si pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ (respectivement $t \in [0, T]$), l'application

$$(s, \omega) \mapsto \varphi(s, \omega) \quad \text{de } [0, t] \times \Omega \to \mathbb{R}$$

est $\mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t$-mesurable.

Proposition: Toute fonction aléatoire continue et adaptée est progressivement mesurable.

On définit $M^2(\mathbb{R}_+)$ comme l'espace des fonctions aléatoires progressivement mesurables telles que: $\mathbb{E}(\int_{\mathbb{R}_+} \phi(t,\omega)^2 dt) < +\infty$. $M^2(\mathbb{R}_+)$ est un espace de Hilbert muni du produit scalaire $\langle \phi, \psi \rangle = \mathbb{E}(\int_{\mathbb{R}_+} \phi(t,\omega)\psi(t,\omega) dt)$

Fonctions en escalier

Une fonction en escalier est une fonction aléatoire réelle $\varphi(t, \omega)$ de la forme :

$$\varphi(t, \omega) = \sum_{i=0}^{n-1} X_i(\omega)\, 1_{]t_i, t_{i+1}]}(t) \tag{1}$$

avec $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n$, et $X_i \in L^2(\mathcal{F}_{t_i})$.

Les X_i sont de carrés intégrables, $\mathcal{F}_{t_i}$-mesurables. Une telle fonction en escalier est progressivement mesurable: pour un borélien $B \subset \mathbb{R}$ et $T > 0$,

$$\{(t, \omega) \in [0, T] \times \Omega \mid \varphi(t, \omega) \in B\} = \bigcup_{i : t_i \leq T} (]t_i, t_{i+1} \wedge T] \times \{\omega \in \Omega \mid X_i(\omega) \in B\})$$

est réunion finie de rectangles de $\mathcal{B}([0, T]) \otimes \mathcal{F}_T$.

I. Théorie des processus stochastiques

Une telle fonction en escalier (1) est dans $M^2(\mathbb{R}_+)$:

$$\mathbb{E}\left(\int_{\mathbb{R}_+}\varphi(t)^2 dt\right) = \sum_{i=0}^{n-1}\mathbb{E}(X_i^2)(t_{i+1}-t_i) < +\infty \tag{2}$$

On définit l'intégrale stochastique des fonctions en escalier:

$$\int_{\mathbb{R}_+}\varphi(t)\,dB(t) = \sum_{i=0}^{n-1} X_i\,(B(t_{i+1}) - B(t_i)) \tag{3}$$

L'application $\varphi \mapsto \int \varphi\, dB$ ainsi définie est linéaire sur l'espace vectoriel $\mathcal{E}$ des fonctions en escalier (1) et à valeurs dans $L^2(\Omega)$:

$$\mathbb{E}\left(\left(\int_{\mathbb{R}_+}\varphi(t)\,dB(t)\right)^2\right) = \mathbb{E}\left(\int_{\mathbb{R}_+}\varphi(t)^2 dt\right) = \|\varphi\|^2_{M^2(\mathbb{R}_+)} \tag{4}$$

Approximations en escalier dans $M^2(\mathbb{R}_+)$

On considère l'opérateur linéaire P_n sur $L^2(\mathbb{R}_+)$, donné pour $f \in L^2(\mathbb{R}_+)$ par :

$$P_n f(t) = n \sum_{i=1}^{n^2} \left(\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f(s)\, ds \right) 1_{\left] \frac{i}{n}, \frac{i+1}{n} \right]}(t)$$

C'est une fonction en escalier, égale à la moyenne de f sur l'intervalle $\left] \frac{i}{n}, \frac{i+1}{n} \right]$.

L'opérateur P_n contracte la norme L^2, puisque par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$[P_n f(t)]^2 \leq n \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f(s)^2\, ds, \quad \text{pour } t \in \left] \frac{i}{n}, \frac{i+1}{n} \right],$$

de sorte que

$$\int_{\mathbb{R}_+} [P_n f(t)]^2 dt \leq \int_{\mathbb{R}_+} f(t)^2 dt. \tag{5}$$

Et finalement:

$$P_n f \longrightarrow f \quad \text{dans } L^2(\mathbb{R}_+) \text{ lorsque } n \to \infty, \tag{6}$$

pour toute fonction f continue à support compact, et donc pour toute $f \in L^2(\mathbb{R}_+)$ par densité dans L^2.

On utilise à présent l'opérateur d'approximation P_n dans $M^2(\mathbb{R}_+)$. Si $\varphi \in M^2(\mathbb{R}_+)$, alors $\varphi(\cdot,\omega) \in L^2(\mathbb{R}_+)$ pour presque tout ω, et on définit donc:

$$P_n\varphi(t,\omega) = (P_n\varphi(\cdot,\omega))(t)$$

Alors :

1. $P_n\varphi$ est une fonction en escalier, avec $t_i = i/n$, comme

$$\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} \varphi(s,\omega)\, ds \text{ est } \mathcal{F}_{t_i}\text{-mesurable, puisque } \varphi \text{ est progressivement mesurable.}$$

2. $P_n\varphi \to \varphi$ dans $M^2(\mathbb{R}_+)$. En effet, pour tout ω tel que $\varphi(\cdot,\omega) \in L^2(\mathbb{R}_+)$, (6) implique :

$$\int_{\mathbb{R}_+} (P_n\varphi(t,\omega) - \varphi(t,\omega))^2\, dt \longrightarrow 0$$

   En majorant $\int_{\mathbb{R}_+} (P_n\varphi(t,\omega) - \varphi(t,\omega))^2\, dt$ par une fonction indépendante de n et $\mathbb{P}$-intégrable avec l'inégalité de Minkowski, on obtient par le théorème de convergence dominée: $\|P_n\varphi - \varphi\|^2_{M^2(\mathbb{R}_+)} \longrightarrow 0$

Intégrale stochastique dans $M^2(\mathbb{R}_+)$

Définition: La variable aléatoire

$$\int_{\mathbb{R}_+} \varphi(t)\, dB(t) \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$$

est appelée intégrale stochastique de $\varphi \in M^2(\mathbb{R}_+)$.

Théorème: Pour $\varphi, \psi \in M^2(\mathbb{R}_+)$, on a :

$$\mathbb{E}\left(\int_{\mathbb{R}_+} \varphi(t)\, dB(t)\right) = 0,$$

$$\mathbb{E}\left(\left(\int_{\mathbb{R}_+} \varphi(t)\, dB(t)\right)^2\right) = \mathbb{E}\left(\int_{\mathbb{R}_+} \varphi(t)^2\, dt\right),$$

$$\mathbb{E}\left(\left(\int_{\mathbb{R}_+} \varphi(t)\, dB(t)\right)\left(\int_{\mathbb{R}_+} \psi(t)\, dB(t)\right)\right) = \mathbb{E}\left(\int_{\mathbb{R}_+} \varphi(t)\psi(t)\, dt\right).$$

On peut écrire ce prolongement comme une limite dans L^2 :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}_+} \varphi(t)\,dB(t) &= \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}_+} P_n\varphi(t)\,dB(t) \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n^2} n \left(\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} \varphi(s,\omega)\,ds \right) \left(B\left(\frac{i+1}{n}\right) - B\left(\frac{i}{n}\right) \right)\end{aligned} \tag{7}$$

L'intégrale stochastique sur M^2 est une martingale

Proposition: La fonction aléatoire $t \mapsto \int_0^t \varphi \, dB$ est continue en moyenne quadratique en tout point $t_0 > 0$, et elle possède une version continue sur $\mathbb{R}_+$.

Démonstration: Pour $t > t_0$, on a :

$$\mathbb{E}\left(\int_0^t \varphi \, dB - \int_0^{t_0} \varphi \, dB\right)^2 = \mathbb{E}\left(\int_{t_0}^t \varphi \, dB\right)^2 = \mathbb{E}\left(\int_{t_0}^t \varphi(s)^2 \, ds\right)$$

qui tend vers 0 lorsque $t \to t_0$.

Pour la continuité presque sûre, on note par définition $M_n(t) = \int_0^t P_n\varphi \, dB$ qui est continue pour tout ω. On applique l'inégalité de Doob avec la martingale $M_m - M_n$ sur un horizon $T < \infty$, ce qui donne :

$$\mathbb{P}\left(\max_{t\in[0,T]} |M_n(t) - M_m(t)| > r\right) \leq \frac{1}{r^2}\|P_n\varphi - P_m\varphi\|^2_{M^2([0,T])}, \quad r > 0,$$

qui tend vers 0 lorsque $n, m \to \infty$. Ainsi, la suite $(M_n)_n$ est de Cauchy en probabilité dans l'espace des fonctions continues sur $[0, T]$, muni de la norme uniforme. On peut donc extraire une sous-suite M_{n_k} qui converge uniformément sur les compacts de $\mathbb{R}_+$, presque sûrement. La limite M_∞ est continue et coïncide avec $\int_0^t \varphi \, dB$ p.s, c'est donc une version continue de l'intégrale stochastique.

I. Théorie des processus stochastiques

Proposition: Pour $\varphi \in M^2$, la fonction aléatoire

$$M(t) = \int_0^t \varphi(s)\, dB(s)$$

est une $\mathcal{F}$-martingale de carré intégrable, dont le crochet est donné par :

$$\langle M \rangle(t) = \int_0^t \varphi(s)^2\, ds.$$

Démonstration: On peut approximer $\int_s^t \varphi(u)\, dB(u)$ par une somme

$$\sum_i X_i[B(t_{i+1}) - B(t_i)],$$

où $X_i \in L^2(\mathcal{F}_{t_i})$.
M est $\mathcal{F}$-adaptée, de carré intégrable et par continuité de l'espérance conditionnelle dans L^2,

$$\mathbb{E}\left(\int_s^t \varphi(u)\,dB(u)\middle|\mathcal{F}_s\right) = L^2 - \lim \sum_i \mathbb{E}\left(X_i[B(t_{i+1}) - B(t_i)]|\mathcal{F}_s\right),$$

$$= L^2 - \lim \sum_i \mathbb{E}\left(X_i \mathbb{E}([B(t_{i+1}) - B(t_i)]|\mathcal{F}_{t_i})|\mathcal{F}_s\right) = 0,$$

car les accroissements du mouvement brownien sont indépendants de $\mathcal{F}_{t_i}$ et de moyenne nulle.

On montre que $M(t)^2 - \int_0^t \varphi(s)^2\,ds$ est une martingale, pour cela on utilise :

$$\mathbb{E}(M(t)^2 - M(s)^2|\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}([M(t) - M(s)]^2|\mathcal{F}_s),$$

$$= \mathbb{E}\left(\left(\int_s^t \varphi(u)\,dB(u)\right)^2\middle|\mathcal{F}_s\right) = \mathbb{E}\left(\int_s^t \varphi(u)^2\,du\middle|\mathcal{F}_s\right),$$

par convergence dans L^2qui entraîne la convergence des carrés dans L^1, et par continuité de l'espérance conditionnelle.

Formule d'Itô $\Phi(B(t))$**,** $\Phi \in C_b^2$

Soit $C_b^2 = \{\Phi \in C^2(\mathbb{R};\mathbb{R}) : \Phi, \Phi', \Phi''$ bornées$\}$

proposition: Pour $\Phi \in C_b^2$, on a p.s.

$$\Phi(B(t)) = \Phi(B(0)) + \int_0^t \Phi'(B(s))\, dB(s) + \frac{1}{2}\int_0^t \Phi''(B(s))\, ds, \quad \forall t.$$

Notation différentielle:

$$d\Phi(B(t)) = \Phi'(B(t))\, dB(t) + \frac{1}{2}\Phi''(B(t))\, dt, \text{ et } \Phi(B(t)) = \Phi(B(0)) + \int_0^t d\Phi(B(s)).$$

Formule d'Itô et processus d'Itô

Une fonction aléatoire réelle de la forme :

$$X(t) = X(0) + \int_0^t \phi(s)\, dB(s) + \int_0^t \psi(s)\, ds,$$

avec $\phi, \psi \in M^2$, $X(0) \in L^2(\mathcal{F}_0)$, est appelée processus d'Itô, et sa différentielle stochastique est notée :

$$dX(s) = \phi(s)\, dB(s) + \psi(s)\, ds.$$

proposition: (Formule d'Itô pour un processus d'Itô)

Pour $\Phi \in C_b^2$, on a :

$$\Phi(X(t)) = \Phi(X(0)) + \int_0^t \Phi'(X(s))\phi(s)\,dB(s) + \int_0^t \Phi'(X(s))\psi(s)\,ds + \frac{1}{2}\int_0^t \Phi''(X(s))\phi(s)^2\,ds.$$

En notation différentielle :

$$d\Phi(X(t)) = \Phi'(X(t))\,dX(t) + \frac{1}{2}\Phi''(X(t))\,d\langle X\rangle(t),$$

avec le crochet défini par :

$$\langle X\rangle(t) = \int_0^t \phi(s)^2\,ds,$$

c'est-à-dire le crochet de la partie martingale $\int_0^t \phi(s)\,dB(s)$.

II. Équations différentielles stochastiques

- EDS = généralisation EDO
- partie aléatoire : cours des actions, fréquence allélique dans une population, mouvements de particules soumises à des phénomènes de diffusion...
- exemples :

$$dV(t) = -bV(t)\,dt + \sigma\,dB(t), \qquad \text{(équation de Langevin)}$$

$$dX(t) = \sigma X(t)\,dB(t) + \mu X(t)\,dt \qquad \text{(MB géométrique)}$$

II.1 Cadre

- Soient $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, un mouvement brownien B, et une variable aléatoire X_0, tous définis sur le même espace $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, avec X_0 indépendant de B.

- On considère l'équation différentielle stochastique autonome :

$$\begin{cases} dX(t) = b(X(t))\,dt + \sigma(X(t))\,dB(t), \\ X(0) = X_0. \end{cases} \tag{E}$$

- b = dérive (ou *drift*)
- σ = le coefficient de diffusion de l'EDS

- La solution d'une telle équation est appelée un *processus de diffusion*.

II.2 Solutions fortes

- **Définition :** On appelle *solution forte* de l'équation (E) toute application aléatoire $X = (X(t); t \geq 0)$ définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, telle que :

  1. X est adaptée à la filtration $\mathcal{F}_t$,
  2. $\int_0^t \left(|b(X(s))| + \sigma^2(X(s))\right)\, ds < +\infty$ p.s. pour tout t, et on a p.s

$$X(t) = X_0 + \int_0^t b(X(s))\, ds + \int_0^t \sigma(X(s))\, dB(s) \quad \forall t \in [0, \infty]$$

II. Équations différentielles stochastiques

- **Théorème :** (Cauchy-Lipschitz pour EDS) Supposons que $X_0 \in L^2$ et que b et σ soient lipschitziennes i.e. :

  $$|b(x) - b(y)| + |\sigma(x) - \sigma(y)| \leq K|x - y|.$$

  Alors, l'équation (E) admet une unique solution forte $X \in M^2$.

Démonstration.

- **Unicité.** Soient $X, Y \in M^2$ deux solutions fortes. On a :

$$X(t) - Y(t) = \int_0^t [b(X(s)) - b(Y(s))]\, ds + \int_0^t [\sigma(X(s)) - \sigma(Y(s))]\, dB(s).$$

II. Équations différentielles stochastiques

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[|X(t)-Y(t)|^2] &= \mathbb{E}\left[\left|\int_0^t [b(X(s))-b(Y(s))]\,ds + \int_0^t [\sigma(X(s))-\sigma(Y(s))]\,dB(s)\right|^2\right] \\
&\leq 2\,\mathbb{E}\left[\left|\int_0^t [b(X(s))-b(Y(s))]\,ds\right|^2\right] + 2\,\mathbb{E}\left[\left|\int_0^t [\sigma(X(s))-\sigma(Y(s))]\,dB(s)\right|^2\right] \\
&\leq 2\,\mathbb{E}\left[\int_0^t |b(X(s))-b(Y(s))|\,ds\right]^2 + 2\,\mathbb{E}\left[\int_0^t |\sigma(X(s))-\sigma(Y(s))|^2\,ds\right] \\
&\leq 2t\,\mathbb{E}\left[\int_0^t |b(X(s))-b(Y(s))|^2\,ds\right] + 2\,\mathbb{E}\left[\int_0^t |\sigma(X(s))-\sigma(Y(s))|^2\,ds\right] \\
&\leq 2\,(T+1)\,K^2 \int_0^t \mathbb{E}[|X(s)-Y(s)|^2]\,ds \quad \forall t \leq T.
\end{aligned}
$$

Mais $X(0) = Y(0)$.

Par Grönwall, $\mathbb{E}[|X(t) - Y(t)|^2] = 0$ pour tout t, d'où l'unicité.

- **Existence.** On construit une suite de fonctions aléatoires $\{X_n(\cdot)\}_{n\geq 0}$ par le procédé d'itération de Picard.
  On pose :

$$X_0(t) = X_0$$

$$X_{n+1}(t) = X_0 + \int_0^t b(X_n(s))\,ds + \int_0^t \sigma(X_n(s))\,dB(s). \tag{P}$$

Alors $X_n \in M^2$, et :

$$X_{n+1}(t) - X_n(t) = \int_0^t [b(X_n(s)) - b(X_{n-1}(s))]\,ds + \int_0^t [\sigma(X_n(s)) - \sigma(X_{n-1}(s))]\,dB(s).$$

Par les mêmes estimations que précédemment, on montre que :

$$\mathbb{E}[|X_{n+1}(t) - X_n(t)|^2] \leq C_T \int_0^t \mathbb{E}[|X_n(s) - X_{n-1}(s)|^2 \,]ds \quad \forall t \leq T.$$

avec $C_T = 2\,(T+1)\,K^2$

Par récurrence, on obtient :

$$\mathbb{E}[|X_{n+1}(t) - X_n(t)|^2] \leq a\, C_T \frac{t^{n-1}}{(n-1)!},$$

où $a := \sup_{t \leq T} \mathbb{E}[|X_1(t) - X_0|^2] \leq C\; T^3\; \mathbb{E}[X_0^2] < \infty$.

Finalement,

$$\|X_{n+1} - X_n\|^2_{M^2[0,T]} \leq a \frac{(C_T T)^n}{n!}.$$

Donc,

$$\|X_{n+p}-X_n\|_{M^2[0,T]} \leq \sum_{k=n}^{n+p-1} \|X_{k+1}-X_k\|_{M^2[0,T]} \leq \sum_{k=n}^{n+p-1} \left(a\frac{(C_T T)^k}{k!}\right)^{1/2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Ainsi, la suite $\{X_n(\cdot)\}_{n\geq 0}$ est de Cauchy dans l'espace de Hilbert $M^2[0,T]$, $T>0$ donc elle converge vers une limite $X \in M^2[0,T]$.

En passant à la limite dans le schéma de Picard (P), on en conclut X est une solution forte :

$$X(t) = X_0 + \int_0^t \sigma(s, X(s))\, dB(s) + \int_0^t a(s, X(s))\, ds.$$

II.3 Solutions faibles

- $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, $(\mathcal{F}_t; t \geq 0)$, B, X_0 donnés : solution forte = fonctionnelle de X_0 et B :

$$X(t) = F(t; X_0, B).$$

- **Pour certaines équations, on ne peut pas trouver de solution forte, mais on peut définir la notion de solution dans un sens plus faible.**

- **Définition :** On appelle *solution faible* de l'équation différentielle stochastique (E) tout triplet

$$((\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}),\ (\mathcal{F}_t; t \geq 0),\ (B, X_0, X(\cdot)))\,,$$

  constitué d'un EdP, d'une filtration, d'un $(\mathcal{F}_t)$-MB B indépendant de la variable aléatoire X_0, et d'un processus aléatoire $X(\cdot)$ adapté à la filtration, tels que les points **1.** et **2.** de la définition de solution forte soient vérifiés.

II.4 Équation de Langevin

- On considère l'équation différentielle stochastique :

$$dV(t) = -bV(t)\,dt + \sigma\,dB(t),$$

avec condition initiale $V(0) \in L^2(\mathcal{F}_0)$.

- Cette équation est équivalente, au sens des intégrales stochastiques, à :

$$V(t) - V(0) + \int_0^t bV(s)\,ds = \sigma B(t), \quad \text{p.s.} \tag{L}$$

- **Proposition :** La solution de (L) partant de $V(0) \in L^2(\mathcal{F}_0)$ est donnée par le processus d'Ornstein-Uhlenbeck défini par :

$$V(t) = V(0)e^{-bt} + \int_0^t e^{-b(t-s)}\sigma\,dB(s) \tag{S}$$

Démonstration.

Comme $B(t)$ n'est pas différentiable, on introduit un nouveau processus plus régulier :

$$Y(t) := V(t) - \sigma B(t)$$

On a par (L) :

$$Y(t) - Y(0) + \int_0^t bY(s)\,ds = -\int_0^t b\,\sigma B(s)\,ds$$

Y est donc dérivable. On résout l'équation différentielle ordinaire suivante :

$$Y'(t) + bY(t) = -b\sigma B(t)$$

$$Y'(t)e^{bt} + bY(t)e^{bt} = -b\sigma e^{bt}B(t)$$

$$\frac{d}{dt}(e^{bt}Y(t)) = -b\sigma e^{bt}B(t)$$

$$e^{bt}Y(t) - Y(0) = -b\sigma \int_0^t e^{bs}B(s)\,ds$$

II. Équations différentielles stochastiques

Donc :

$$Y(t) = e^{-bt}Y(0) - \sigma b \int_0^t e^{-b(t-s)}B(s)\,ds$$

En revenant à V :

$$V(t) = Y(t) + \sigma B(t) = e^{-bt}V(0) + \sigma B(t) - \sigma b \int_0^t e^{-b(t-s)}B(s)\,ds$$

Par ailleurs, en intégrant par partie :

$$\int_0^t e^{bs}\,dB(s) + \int_0^t be^{bs}B(s)\,ds = [e^{bs}B(s)]_0^t = e^{bt}B(t) - B(0) = e^{bt}B(t)$$

$$\int_0^t \sigma\ b\ e^{-b(t-s)}B(s)\,ds = \sigma B(t) - \int_0^t \sigma\ b\ e^{-b(t-s)}\ ds$$

D'où :

$$V(t) = e^{-bt}V(0) + \int_0^t \sigma\ b\ e^{-b(t-s)}\ dB(s)$$

III. Équations différentielles aux dérivées partielles

- certaines EDP peuvent être résolues avec des méthodes probabilistes : problème de Dirichlet, équation de la chaleur, et formule de Feynman-Kac
- MB donne une idée intuitive de la solution

III.1 Fonctions harmoniques

- **Définition :** Soit $D \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert connexe. Une fonction $u : D \to \mathbb{R}^d$ est dite *harmonique* si elle est de classe C^2 sur D et vérifie l'équation de Laplace :
$$\Delta u(x) = 0 \quad \text{sur } D.$$
- On va relier les solution d'EDP à des espérances de processus arrêtés en des temps de sortie de domaine à l'aide de la proposition suivante.
- **Proposition :** Soit $G \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert borné avec $\overline{G} \subset D$. Soit $\tau_G = \inf\{t \geq 0 : B(t) \notin G\}$ le temps d'entrée du mouvement brownien B dans G^c. Si u est harmonique sur D, alors la fonction aléatoire,
$$M(t) = u\big(B(t \wedge \tau_G)\big) - u(a)$$
est une martingale centrée pour le mouvement brownien issu de a.

III.2 Problème de Dirichlet

- Le *problème de Dirichlet* consiste à résoudre l'équation de Laplace sur un domaine $D \subset \mathbb{R}^d$ avec des conditions au bord.

- Soient $D \subset \mathbb{R}^d$, $f : \partial D \to \mathbb{R}$ continue. On cherche une fonction $u : D \to \mathbb{R}$, continue sur $\overline{D}$ et de classe $\mathcal{C}^2$ sur D, telle que :

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{sur } D, \\ u = f & \text{sur } \partial D. \end{cases} \tag{D}$$

- On peut directement écrire une solution à (D, f):

$$u(x) := \mathbb{E}_x[f(B(\tau_D))] \ \text{ pour } x \in \overline{D}.$$

$$u(x) := \mathbb{E}_x[f(B(\tau_D))] \text{ pour } x \in \overline{D}.$$

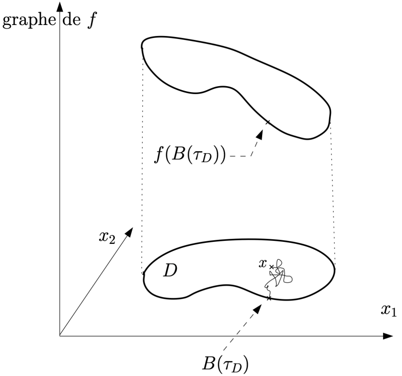

Figure: Problème de Dirichlet en dimension $d = 2$.

- Supposons, pour simplifier, que D est borné.
- Soit u une solution. Pour $\varepsilon > 0$, soit

$$D_\varepsilon := \{z \in D \,;\, \mathrm{dist}(z, D^c) > \varepsilon\}$$

le ε-intérieur de D. En prenant l'espérance, on voit que pour tout $x \in D$, et $\varepsilon > 0$ assez petit :

$$u(x) = \mathbb{E}_x\left[u\big(B(t \wedge \tau_{D_\varepsilon})\big)\right].$$

- PPL en $t \to \infty$, en utilisant que $\tau_{D_\varepsilon} < \infty$, et le théorème de convergence dominée, on obtient :

$$u(x) = \mathbb{E}_x\left[u(B(\tau_{D_\varepsilon}))\right] = \mathbb{E}_x\left[u(B(\tau_D))\right] = \mathbb{E}_x\left[f(B(\tau_D))\right].$$

car $\tau_{D_\varepsilon} \uparrow \tau_D$ et $B(\tau_{D_\varepsilon}) \to B(\tau_D)$ presque sûrement, quand $\varepsilon \to 0$, $u = f$ sur ∂D.

- Ainsi, la solution du problème de Dirichlet (D), si elle existe, est unique, et elle est donnée par :

$$u(x) = \mathbb{E}_x[f(B(\tau_D))].$$

III. Équations différentielles aux dérivées partielles

- Notons :
$$\sigma_D := \inf\{t > 0\ ;\ B(t) \notin D\}$$
le temps de sortie du mouvement brownien de D.

- **Définition :** Un domaine $D \subset \mathbb{R}^d$ est dit *régulier* s'il est ouvert, connexe, borné et si
$$\mathbb{P}_a(\sigma_D = 0) = 1 \quad \forall a \in \partial D,$$
i.e. le mouvement brownien partant du bord de D sort immédiatement de D $\mathbb{P}_x$-presque sûrement.

- **Remarque :** Un point $a \in \partial D$ est dit *irrégulier* si $\mathbb{P}_a(\sigma_D = 0) < 1$. On en déduit :
$$\mathbb{P}_a(\sigma_D = 0) = 0 \quad \text{pour tout point irrégulier } a.$$

- On peut aussi montrer que si D est régulier, alors $u(x) = f(x)$ pour $x \in \partial D$, et pour $a \in \partial D$, $\quad \lim_{x \to a,\ x \in D} u(x) = f(a)$.

III. Équations différentielles aux dérivées partielles

- Pour montrer que la fonction

$$u(x) = \mathbb{E}_x[f(B(\tau_D))]$$

est solution du problème de Dirichlet (D), il suffit de montrer que u est harmonique sur D, i.e. u satisfait la propriété de la valeur moyenne sur D.

- Pour $B(a,r) \subset D$, on a $\mathcal{F}_{\tau_{B(a,r)}} \subset \mathcal{F}_{\tau_D}$ car $\tau_{B(a,r)} \leq \tau_D$ et par conditionnement au temps de sortie de cette boule :

$$\begin{aligned} u(a) = &= \mathbb{E}_a\left[f\left(B(\tau_D)\right)\right] \\ &= \mathbb{E}_a\left[\mathbb{E}_a\left[f\left(B(\tau_D)\right) \mid \mathcal{F}_{\tau_{B(a,r)}}\right]\right] \\ &= \mathbb{E}_a\left[u\left(B(\tau_{B(a,r)})\right)\right] \\ &= \int_{\partial B(a,r)} u(y)\, \mu_{a,r}(dy). \end{aligned}$$

III.3 Équation de la chaleur

- On s'intéresse désormais à une équation de Laplace avec une évolution dans le temps.

- En dimension d quelconque, on appelle *équation de la chaleur* le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{1}{2}\Delta u, \\ u(0,\cdot) = f. \end{cases} \tag{C}$$

III. Équations différentielles aux dérivées partielles

- On considère la loi de $B(t)$ sachant $\mathcal{F}_s$ pour $t \geq s$: par indépendance et stationnarité des accroissements browniens, c'est la loi gaussienne $\mathcal{N}_d\big(B(s), (t-s)I_d\big)$ de densité au point y, en notant $B_s = x$, donnée par :

$$p(t-s; x, y) = g_{t-s}(y-x),$$

où $g_t(x) = \frac{1}{(2\pi t)^{d/2}} \exp\left(-\frac{\|x\|^2}{2t}\right)$, la densité de $\mathcal{N}(0, tI_d)$.

- On vérifie que $p = p(t; x, y)$ satisfait :

$$p^{-1}\frac{\partial}{\partial t}p = -\frac{d}{2t} + \frac{\|y-x\|^2}{2t^2},$$

et pour $1 \leq i \leq d$,

$$p^{-1}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}p = -\frac{1}{t} + \frac{(y_i - x_i)^2}{t^2}.$$

- En sommant sur $1 \leq i \leq d$, on obtient

$$p^{-1}\Delta_x p = \sum_{i=1}^{d} p^{-1}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}p = \sum_{i=1}^{d}\left(-\frac{1}{t} + \frac{(y_i - x_i)^2}{t^2}\right) = -\frac{d}{t} + \frac{\|y-x\|^2}{t^2}.$$

III. Équations différentielles aux dérivées partielles

$$p^{-1}\Delta_x p = \sum_{i=1}^{d} p^{-1}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}p = \sum_{i=1}^{d}\left(-\frac{1}{t}+\frac{(y_i-x_i)^2}{t^2}\right) = -\frac{d}{t}+\frac{\|y-x\|^2}{t^2}.$$

- On en déduit que $p = p(t; x, y)$ est solution de l'*équation progressive* (dite *forward* :
$$\frac{\partial}{\partial t}p = \frac{1}{2}\Delta_y p, \quad \lim_{t\searrow 0} p\, dy = \delta_x,$$
et par symétrie, p est également solution de l'*équation rétrograde* (dite *backward*) :
$$\frac{\partial}{\partial t}p = \frac{1}{2}\Delta_x p, \quad \lim_{t\searrow 0} p\, dx = \delta_y.$$
- En raison de ces relations, p est la solution fondamentale de l'équation de la chaleur. On appelle p le *noyau de la chaleur*.

III. Équations différentielles aux dérivées partielles

- **Proposition :** Supposons que la condition initiale f vérifie $\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|e^{-c|x|^2}\,dx < +\infty$ pour une constante $c > 0$. Alors,

$$u(t,x) := \mathbb{E}_x[f(B_t)]$$

est solution de l'équation de la chaleur sur $[0, \frac{1}{2c}[\times\mathbb{R}^d$.

Démonstration. Par définition, on a,

$$u(t,x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)p(t;x,y)\,dy.$$

Par l'hypothèse d'intégrabilité de f, on peut dériver sous le signe intégrale pour $t \in [0, \frac{1}{2c}[$:

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t,x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)\frac{\partial}{\partial t}p(t;x,y)\,dy,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}u(t,x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}p(t;x,y)\,dy,$$

$$\Delta u(t,x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)\Delta_x p(t;x,y)\,dy.$$

III. Équations différentielles aux dérivées partielles

On obtient,

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t,x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)\frac{\partial}{\partial t}p(t;x,y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)\frac{1}{2}\Delta_x p(t;x,y)\,dy = \frac{1}{2}\Delta u(t,x),$$

donc *u* est solution de l'équation de la chaleur sur cet intervalle de temps.

III.2 Équation de Feynman-Kac

- On considère l'équation aux dérivées partielles parabolique linéaire suivante :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{1}{2}\Delta u - k(x)\, u, \quad (t,x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^d, \\ u(0,\cdot) = f. \end{cases} \tag{FK}$$

- (FK) = généralisation de l'équation de la chaleur

Théorème : (Feynman-Kac) Soient $k : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ borélienne bornée, et $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ à croissance sous-exponentielle. Alors, toute solution $u(t,x)$ de classe $C^{1,2}$, dont le gradient est également à croissance sous-exponentielle uniformément en temps, est donnée par la formule :

$$u(t,x) = \mathbb{E}_x \left[f(B(t)) \exp\left(- \int_0^t k(B(s))\, ds \right) \right].$$

En particulier, une telle solution est unique.

Démonstration.

Soit $t \geq 0$. On applique la formule d'Itô à la fonction

$$s \mapsto u(t-s, B(s)) \exp\left(-\int_0^s k(B(r))\, dr\right)$$

au temps $s \in]0, t[$.
Comme s $\mapsto \exp\left(-\int_0^s k(B(r))\, dr\right)$ est à variation finie, il vient :

$$d\left[u(t-s, B(s)) \exp\left(-\int_0^s k(B(r))\, dr\right)\right] =$$

$$d\left[u(t-s, B(s))\right]\ \exp\left(-\int_0^s k(B(r))\, dr\right) + u(t-s, B(s))\ d\left[\exp\left(-\int_0^s k(B(r))\, dr\right)\right] + 0.$$

III. Équations différentielles aux dérivées partielles

On applique de nouveau la formule d'Itô multidimensionnelle à $s \mapsto u(t-s, B(s))$.

On obtient :

$$d\left[u(t-s,B(s))\right] = -\frac{\partial}{\partial t}u(t-s,B(s))\,ds + \nabla u(t-s,B(s))\,dB(s) + \frac{1}{2}\Delta u(t-s,B(s))\,ds,$$

et,

$$d\left[\exp\left(-\int_0^s k(B(r))\,dr\right)\right] = -k(B(s))\exp\left(-\int_0^s k(B(r))\,dr\right)ds.$$

Donc,

$$d\left[u(t-s,B(s))\exp\left(-\int_0^s k(B(r))\,dr\right)\right] =$$
$$\left[-\frac{\partial}{\partial t}u(t-s,B(s))\,ds - k(B(s))u(t-s,B(s))\,ds + \frac{1}{2}\Delta u(t-s,B(s))\,ds\right]$$
$$\times\ \exp\left(-\int_0^s k(B(r))\,dr\right)ds + \nabla u(t-s,B(s))\,dB(s)\exp\left(-\int_0^s k(B(r))\,dr\right).$$

III. Équations différentielles aux dérivées partielles

Mais $\frac{\partial}{\partial t} u = \frac{1}{2}\Delta u - ku$. Donc,

$$d\left[u(t-s, B(s))\exp\left(-\int_0^s k(B(r))\,dr\right)\right] = \nabla u(t-s, B(s))\; dB(s)\exp\left(-\int_0^s k(B(r))\,dr\right).$$

En intégrant entre $s = 0$ et $s = t$, on obtient :

$$\exp\left(-\int_0^t k(B(r))\,dr\right) f(B(t)) - u(t, B(0)) = \int_0^t \exp\left(-\int_0^s k(B(r))\,dr\right) \nabla u(t-s, B(s))\; dB(s).$$

L'intégrale stochastique est une martingale L^2, d'après les hypothèses de croissance sous-exponentielle de f et de bornitude de k, d'espérance nulle. Ainsi, en prenant l'espérance sous $\mathbb{P}_x$,

$$u(t, x) = \mathbb{E}_x\left[f(B(t))\exp\left(-\int_0^t k(B(s))\,ds\right)\right].$$

IV. Bibliographie

- Comets, F. ; Meyer, T. *Calcul stochastique et modèles de diffusion*. Dunod.
- Ito, Kiyoshi ; McKean, Henry P. Jr. *Diffusion Processes and Their Sample Paths*. Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, vol. 125. Academic Press, New York; Springer-Verlag, Berlin-New York, 2e édition, 1974.
- Sznitman, Alain-Sol. *Brownian Motion, Obstacles and Random Media*. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1998.
- Karatzas, Ioannis ; Shreve, Steven E. *Brownian Motion and Stochastic Calculus*. Graduate Texts in Mathematics, vol. 113. Springer-Verlag, New York, 1988.
- Breton, Jean-Christophe. *Calcul stochastique – M2 Mathématiques*. Université de Rennes, Novembre–Décembre 2021. `https://perso.univ-rennes1.fr/jean-christophe.breton/cours/M2/Calcul_Stochastique_M2.pdf`