1 Équations différentielles stochastiques

Les équations différentielles stochastiques généralisent les équations différentielles classiques. Elles y incorporent une partie aléatoire, souvent conduite par un mouvement brownien.

1.1 Existence et unicité de solutions fortes

Soient $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, un mouvement brownien B, et une variable aléatoire X_0, tous définis sur le même espace $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, avec X_0 indépendant de B. On considère l'équation différentielle stochastique homogène :

$$dX(t) = b(X(t))\,dt + \sigma(X(t))\,dB(t), \quad X(0) = X_0. \tag{1}$$

Les fonctions b et σ sont appelées respectivement la dérive (ou *drift*) et le coefficient de diffusion de l'EDS.

La solution d'une telle équation est appelée un *processus de diffusion*, ou simplement *diffusion*.

Notons $\mathcal{F}_t$ la tribu engendrée par $B(s)$ pour $s \leq t$, et par X_0, complétée par les ensembles négligeables pour $\mathbb{P}$.

Définition : (solution forte) On appelle *solution forte* de l'équation (1) toute application aléatoire $X = (X(t); t \geq 0)$ définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, telle que :

1. X est adaptée à la filtration $\mathcal{F}_t$,
2. $\int_0^t (|b(X(s))| + \sigma^2(X(s)))\,ds < +\infty$ p.s. pour tout t, et on a p.s

$$X(t) = X_0 + \int_0^t b(X(s))\,ds + \int_0^t \sigma(X(s))\,dB(s) \quad \forall t \in [0, \infty] \tag{2}$$

Cette condition garantit que les intégrales dans (2) sont bien définies (i.e. $b(X) \in M^1_{\text{loc}}$, $\sigma(X) \in M^2_{\text{loc}}$) de sorte que X est un bien un processus d'Itô.

Théorème : (Cauchy-Lipschitz pour EDS) Supposons que $X_0 \in L^2$ et que b et σ soient lipschitziennes i.e. :

$$|b(x) - b(y)| + |\sigma(x) - \sigma(y)| \leq K|x - y|.$$

Alors, l'équation (1) admet une unique solution forte $X \in M^2$.

Démonstration. **Unicité.** Soient $X, Y \in M^2$ deux solutions. On a :

$$X(t) - Y(t) = \int_0^t [b(X(s)) - b(Y(s))]\,ds + \int_0^t [\sigma(X(s)) - \sigma(Y(s))]\,dB(s).$$

En utilisant l'inégalité de Swcharz puis la propriété d'isométrie de l'intégrale stochastique, on obtient :

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[|X(t)-Y(t)|^2] &= \mathbb{E}\left[\left|\int_0^t [b(X(s))-b(Y(s))]\,ds + \int_0^t [\sigma(X(s))-\sigma(Y(s))]\,dB(s)\right|^2\right] \\
&\le 2\,\mathbb{E}\left[\left|\int_0^t [b(X(s))-b(Y(s))]\,ds\right|^2\right] + 2\,\mathbb{E}\left[\left|\int_0^t [\sigma(X(s))-\sigma(Y(s))]\,dB(s)\right|^2\right] \\
&\le 2\,\mathbb{E}\left[\int_0^t |b(X(s))-b(Y(s))|\,ds\right]^2 + 2\,\mathbb{E}\left[\int_0^t |\sigma(X(s))-\sigma(Y(s))|^2\,ds\right] \\
&\le 2t\,\mathbb{E}\left[\int_0^t |b(X(s))-b(Y(s))|^2\,ds\right] + 2\,\mathbb{E}\left[\int_0^t |\sigma(X(s))-\sigma(Y(s))|^2\,ds\right] \\
&\le 2\ (T+1)\ K^2 \int_0^t \mathbb{E}[|X(s)-Y(s)|^2]\,ds \quad \forall t \le T.
\end{aligned}
$$

Comme $X(0) = Y(0)$, on conclut que par le lemme de Grönwall que $\mathbb{E}[|X(t)-Y(t)|^2] = 0$ pour tout t, d'où l'unicité.

Existence. On construit une suite de fonctions aléatoires $\{X_n(\cdot)\}_{n\ge 0}$ par le procédé d'itération de Picard. On pose :

$$
X_0(t) = X_0
$$
$$
X_{n+1}(t) = X_0 + \int_0^t b(X_n(s))\,ds + \int_0^t \sigma(X_n(s))\,dB(s).
$$

Alors $X_n \in M^2$, et :

$$
X_{n+1}(t) - X_n(t) = \int_0^t [b(X_n(s)) - b(X_{n-1}(s))]\,ds + \int_0^t [\sigma(X_n(s)) - \sigma(X_{n-1}(s))]\,dB(s).
$$

Par les mêmes estimations que précédemment, on montre que :

$$
\mathbb{E}|X_{n+1}(t) - X_n(t)|^2 \le C_T \int_0^t \mathbb{E}[|X_n(s) - X_{n-1}(s)|^2\ ]ds \quad \forall t \le T.
$$

avec $C_T = 2\ (T+1)\ K^2$

Par récurrence, on obtient :

$$
\mathbb{E}[|X_{n+1}(t) - X_n(t)|^2] \le a\ C_T \frac{t^{n-1}}{(n-1)!},
$$

où $a := \sup_{t\le T} \mathbb{E}[|X_1(t) - X_0|^2] \le C\ T^3\ \mathbb{E}[X_0^2] < \infty$.

Finalement,

$$
\|X_{n+1} - X_n\|^2_{M^2[0,T]} \le a \frac{(C_T T)^n}{n!},
$$

donc,

$$
\|X_{n+p} - X_n\|_{M^2[0,T]} \le \sum_{k=n}^{n+p-1} \|X_{k+1} - X_k\|_{M^2[0,T]} \le \sum_{k=n}^{n+p-1} \left(a \frac{(C_T T)^k}{k!}\right)^{1/2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.
$$

Ainsi, la suite $\{X_n(\cdot)\}_{n\ge 0}$ est de Cauchy dans l'espace de Hilbert $M^2[0,T]$, $T > 0$ donc elle converge vers une limite $X \in M^2[0,T]$.

En passant à la limite dans le schéma de Picard, on en conclut X est une solution forte :

$$
X(t) = X_0 + \int_0^t \sigma(s, X(s))\,dB(s) + \int_0^t a(s, X(s))\,ds.
$$

$\square$

1.2 Solutions faibles

Jusqu'à présent, l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, la filtration complétée $(\mathcal{F}_t; t \geq 0)$, le mouvement brownien B, la condition initiale X_0 étaient donnés. Par le procédé des itérations de Picard, on a construit la solution à l'aide de ces contraintes. La solution forte obtenue est alors une fonctionnelle de X_0 et B :

$$X(t) = F(t; X_0, B).$$

Pour certaines équations, on ne peut pas trouver de solution forte, mais on peut définir la notion de solution dans un sens plus faible.

Définition : (solution faible) On appelle *solution faible* de l'équation différentielle stochastique **?** tout triplet

$$((\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}),\ (\mathcal{F}_t; t \geq 0),\ (B, X_0, X(\cdot)))\,,$$

constitué d'un espace de probabilité, d'une filtration, d'un $(\mathcal{F}_t)$-mouvement brownien B indépendant de la variable aléatoire X_0, et d'un processus aléatoire $X(\cdot)$ adapté à la filtration, tels que les points **1.** et **2.** de la définition de solution forte soient vérifiés.

1.3 Équation de Langevin

On considère l'équation différentielle stochastique :

$$dV(t) = -bV(t)\,dt + \sigma\,dB(t),$$

avec condition initiale $V(0) \in L^2(\mathcal{F}_0)$.

Cette équation est équivalente, au sens des intégrales stochastiques, à :

$$V(t) - V(0) + \int_0^t bV(s)\,ds = \sigma B(t), \quad \text{p.s.} \tag{3}$$

Proposition : La solution de (3) partant de $V(0) \in L^2(\mathcal{F}_0)$ est donnée par le processus d'Ornstein-Uhlenbeck défini par :

$$V(t) = V(0)e^{-bt} + \int_0^t e^{-b(t-s)}\sigma\ dB(s)$$

Démonstration. Comme $B(t)$ n'est pas différentiable, on introduit un nouveau processus plus régulier :

$$Y(t) := V(t) - \sigma B(t)$$

On a :

$$Y(t) - Y(0) + \int_0^t bY(s)\,ds = -\int_0^t b\sigma B(s)\,ds$$

Y est donc dérivable, on résout (pour ω fixé) l'équation différentielle ordinaire suivante :

$$Y'(t) + bY(t) = -b\sigma B(t)$$

$$Y'(t)e^{bt} + bY(t)e^{bt} = -b\sigma e^{bt}B(t)$$

$$\frac{d}{dt}(e^{bt}Y(t)) = -b\sigma e^{bt}B(t)$$

$$e^{bt}Y(t) - Y(0) = -b\sigma \int_0^t e^{bs}B(s)\,ds$$

Donc :

$$Y(t) = e^{-bt}Y(0) - \sigma b \int_0^t e^{-b(t-s)}B(s)\,ds$$

En revenant à V :

$$V(t) = Y(t) + \sigma B(t) = e^{-bt}V(0) + \sigma B(t) - \sigma b \int_0^t e^{-b(t-s)}B(s)\,ds$$

Par ailleurs, en intégrant par partie :

$$\int_0^t e^{bs}\,dB(s) + \int_0^t be^{bs}B(s)\,ds = [e^{bs}B(s)]_0^t = e^{bt}B(t) - B(0) = e^{bt}B(t)$$
$$\int_0^t \sigma\ b\ e^{-b(t-s)}B(s)\,ds = \sigma B(t) - \int_0^t \sigma\ b\ e^{-b(t-s)}\,ds$$

D'où :

$$V(t) = e^{-bt}V(0) + \int_0^t \sigma\ b\ e^{-b(t-s)}\,dB(s)$$

□

2 Mouvement brownien et équations aux dérivées partielles

On étudie dans ce chapitre les liens entre mouvement brownien et équations liées au laplacien : problème de Dirichlet, équation de la chaleur, et formule de Feynman-Kac.

2.1 Fonctions harmoniques

Définition : Soit $D \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert. Soit $u : D \to \mathbb{R}^d$ de classe C^2. Le *laplacien* de u est défini par :

$$\Delta u(x) = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i^2}.$$

Le laplacien est naturellement relié au mouvement brownien B dans $\mathbb{R}^d$ issu de $a \in \mathbb{R}^d$, i.e., $B(\cdot) - a$ est un mouvement brownien issu de 0. En effet, on rappelle que, par la formule d'Itô, si $\Phi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ est de classe C^2, alors :

$$\begin{aligned}\Phi(B(t)) &= \Phi(a) + \int_0^t \nabla\Phi(B(s))dB(s) + \frac{1}{2}\int_0^t \Delta\Phi(B(s))\,ds \\ &= N(t) + \frac{1}{2}\int_0^t \Delta\Phi(B(s))\,ds,\end{aligned}$$

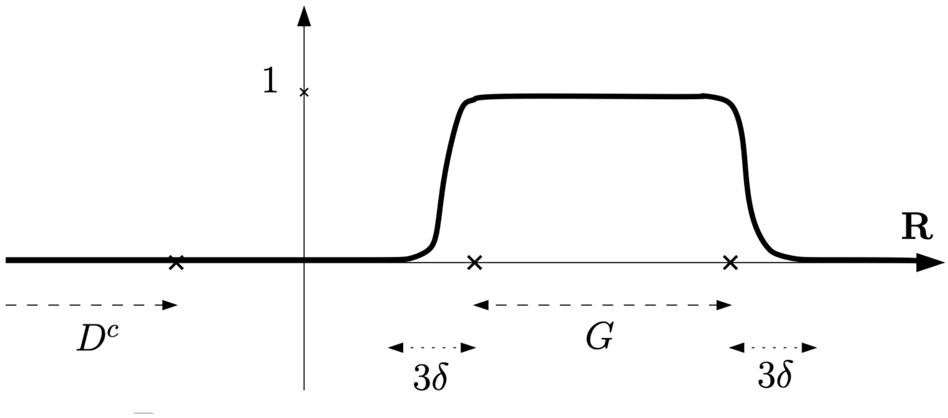

FIGURE 1 – Fonction $(1_{G_{2\delta}} * \rho) \times u$

où la martingale locale $N(t)$ est définie par $N(t) = \Phi(a) + \int_0^t \nabla\Phi(B(s))\, dB(s)$.

Définition : Soit $D \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert connexe. Une fonction $u : D \to \mathbb{R}^d$ est dite *harmonique* si elle est de classe C^2 sur D et vérifie l'équation de Laplace :

$$\Delta u(x) = 0 \quad \text{sur } D.$$

On va relier les solution d'EDP à des espérances de processus arrêtés en des temps de sortie de domaine à l'aide de la proposition suivante.

Proposition : Soit $G \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert borné avec $\overline{G} \subset D$. Soit $\tau_G = \inf\{t \geq 0 : B(t) \notin G\}$ le temps d'entrée du mouvement brownien B dans G^c. Si u est harmonique sur D, alors la fonction aléatoire,

$$M(t) = u\Big(B(t \wedge \tau_G)\Big) - u(a)$$

est une martingale centrée pour le mouvement brownien issu de a.

Démonstration. La fonction u n'est définie que sur G. Pour appliquer la formule d'Itô, on la prolonge en une fonction $\Phi \in C^2(\mathbb{R}^d)$ qui coïncide avec u sur G, par exemple,

$$\Phi = \begin{cases} (1_{G_{2\delta}} * \rho) \times u & \text{dans } D, \\ 0 & \text{dans } D^c, \end{cases}$$

avec G_ε le ε-voisinage de G, $4\delta = \text{dist}(G, D^c) > 0$, et ρ une fonction test de classe C^∞ à support dans la boule de $\mathbb{R}^d$ centrée en 0 de rayon δ, telle que $\int_{\mathbb{R}^d} \rho = 1$.

On a

$$\Phi\Big(B(t \wedge \tau_G)\Big) = N(t \wedge \tau_G) + \frac{1}{2}\int_0^{t\wedge\tau_G} \Delta\Phi(B(s))\, ds,$$

et comme $\Phi = u$ sur G et que u y est harmonique, $\Delta\Phi(B(s)) = 0$ pour $s \in [0, t \wedge \tau_G]$,

$$\begin{aligned} u\Big(B(t \wedge \tau_G)\Big) &= N(t \wedge \tau_G) \\ &= u(a) + \int_0^{t\wedge\tau_G} \nabla\Phi(B(s))\, dB(s) \\ &= u(a) + \int_0^t \mathbf{1}_{[0,\tau_G[}(s) \nabla\Phi(B(s))\, dB(s) \end{aligned}$$

Puisque $\nabla\Phi$ est borné sur $\overline{G}$ ($\Phi \in C^1(\mathbb{R}^d)$ par construction), on a $\forall t \geq 0$,

$$\mathbb{E}\left[\left\langle \int^{\cdot} \mathbf{1}_{[0,\tau_G]}(s)\nabla\Phi(B(s))\ dB(s), \int^{\cdot} \mathbf{1}_{[0,\tau_G]}(s)\nabla\Phi(B(s))\ dB(s)\right\rangle_t\right] =$$

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t \mathbf{1}_{[0,\tau_G]}(s)\|\nabla\Phi(B(s))\|^2\, ds\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t \|\nabla\Phi(B(s\wedge\tau_G))\|^2\, ds\right] < +\infty.$$

donc la martingale locale $\left(\int_0^t \mathbf{1}_{[0,\tau_G]}(s)\nabla\Phi(B(s))\ dB(s)\right)_{t\geq 0}$ est L^2.

Finalement,

$$M(t) = u\Big(B(t\wedge\tau_G)\Big) - u(a) = \int_0^t \mathbf{1}_{[0,\tau_G]}(s)\nabla\Phi(B(s))\ dB(s)$$

est une martingale L^2 centrée.

□

Définition : Soit $D \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert. Une fonction $u : D \to \mathbb{R}$ vérifie la *propriété de la moyenne* sur D si $\forall a \in D,\ \forall r > 0$ tels que $\overline{B(a,r)} \subset D$,

$$u(a) = \int_{\partial B(a,r)} u(y)\, d\mu_{a,r}(y)$$

où $\mu_{a,r}$ désigne la mesure de probabilité uniforme sur la sphère $\partial B(a,r)$.

Notons que le volume de la boule $B(a,r)$ est donné par :

$$\mathrm{Vol}(B(a,r)) = \frac{2r^d\pi^{\frac{d}{2}}}{d\,\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)} := V_r,$$

et son aire de surface est :

$$S_r = \partial_r \mathrm{Vol}(B(a,r)) = \frac{2r^{d-1}\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)} = \frac{d}{r}V_r.$$

En particulier, l'intégrale de Lebesgue d'une fonction f sur $B(a,r)$ peut s'écrire sous la forme itérée :

$$\int_{B(a,r)} f(x)\, dx = \int_0^r S_\rho \int_{\partial B(a,\rho)} f(y)\, d\mu_{a,\rho}(y)\, d\rho.$$

Le mouvement brownien B issu de a est isotrope ie. la loi de B est invariante par les rotations de centre a. En effet si R_a est une rotation centrée en a alors $R_a(B) \sim B$. Par conséquent, la loi du point de sortie $B_{\tau_{\partial B(a,r)}}$ de B de la boule $B(a,r)$ est aussi invariante par les rotations de centre a : $R_a\Big(B_{\tau_{\partial B(a,r)}}\Big) \sim B_{\tau_{\partial B(a,r)}}$.

Comme la loi uniforme $\mu_{a,r}$ est la seule probabilité sur la sphère $\partial B(a,r)$ qui possède cette invariance, on en déduit que :

$$P_a\Big(B_{\tau_{\partial B(a,r)}} \in \cdot\Big) = \mu_{a,r}.$$

Le résultat suivant peut être démontré analytiquement. Cependant, une preuve probabiliste simple peut être basée sur la formule d'Itô.

Proposition : Soit $D \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert. Si $u : D \to \mathbb{R}$ est harmonique sur D, alors elle vérifie la propriété de la moyenne sur D.

Démonstration. Posons $G = B(a,r)$. D'après la proposition précédente, on obtient

$$u(a) = \mathbb{E}_a\left[u\left(B(t \wedge \tau_{\partial B(a,r)})\right)\right] = \mathbb{E}_a\left[u\left(B(\tau_{\partial B(a,r)})\right)\right] = \int_{\partial B(a,r)} u(x)\,\mu_{a,r}(dx).$$

en faisant tendre t vers l'infini, puis en utilisant le théorème de convergence dominée et le fait que $\mu_{a,r}$ est la loi de sortie du mouvement brownien.

□

On peut également montrer la réciproque :

Proposition : Si $u : D \to \mathbb{R}$ vérifie la propriété de la moyenne sur D, alors $u \in C^\infty(D)$ et elle est harmonique sur D.

Démonstration. Montrons que u est de classe C^∞. Pour $\varepsilon > 0$, soit $g_\varepsilon : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}_+$ la fonction $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ définie par :

$$g_\varepsilon(x) = \begin{cases} c(\varepsilon)\exp\left(\frac{1}{\|x\|^2-\varepsilon^2}\right) & \text{si } \|x\| < \varepsilon, \\ 0 & \text{si } \|x\| \geq \varepsilon, \end{cases}$$

où la constante c_ε est choisie de sorte que :

$$\int_{B(0,\varepsilon)} g_\varepsilon(x)\,dx = c(\varepsilon)\int_0^\varepsilon \left(\int_{\partial B_\rho} \exp\left(\frac{1}{\rho^2-\varepsilon^2}\right)\mu_{0,\rho}(dy)\right) d\rho = 1.$$

Ainsi, pour $\varepsilon > 0$ et $a \in D$ tels que $\overline{B(a,\varepsilon)} \subset D$, on pose :

$$u_\varepsilon(a) := \int_{B(0,\varepsilon)} u(a+x)g_\varepsilon(x)\ dx = \int_{\mathbb{R}^d} u(y)g_\varepsilon(y-a)\ dy.$$

Il est clair que $u_\varepsilon \in C^\infty(D)$.

De plus, pour tout $a \in D$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\overline{B(a,\varepsilon)} \subset D$, et on a alors :

$$\begin{aligned} u_\varepsilon(a) &= \int_{\mathbb{R}^d} u(x)g_\varepsilon(x-a)\,dx \\ &= \int_{B(0,\varepsilon)} u(a+x)g_\varepsilon(x)\,dx \\ &= c(\varepsilon)\int_0^\varepsilon S_\rho\left(\int_{\partial B_\rho} u(a+x)\exp\left(\frac{1}{\rho^2-\varepsilon^2}\right)\,d\mu_{0,\rho}(x)\right)\,d\rho \\ &= c(\varepsilon)\int_0^\varepsilon S_\rho\left(\int_{\partial B(a,\rho)} u(x)\,d\mu_{0,\rho}(x)\right)\exp\left(\frac{1}{\rho^2-\varepsilon^2}\right)d\rho \\ &= c(\varepsilon)\int_0^\varepsilon S_\rho\ u(a)\exp\left(\frac{1}{\rho^2-\varepsilon^2}\right)d\rho \\ &= u(a). \end{aligned}$$

Donc $u \in C^\infty(D)$.

Montrons que $\Delta u = 0$ sur D.
Soit $a \in D$, on a, par un développement de Taylor de u en a :

$$u(a+y) = u(a) + \sum_{i=1}^{d} y_i \frac{\partial u}{\partial x_i}(a) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d} y_i y_j \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(a) + o(\|y\|^2)$$

$\forall y \in B(0,\varepsilon)$ où $\varepsilon > 0$ tel que $\overline{B(a,\varepsilon)} \subset D$.

Par symétrie :

$$\int_{\partial B(0,\varepsilon)} y_i \, d\mu_{0,\varepsilon} y = 0 \quad \text{et} \quad \int_{\partial B(0,\varepsilon)} y_i y_j \, d\mu_{0,\varepsilon}(y) = 0 \ \ \forall i \neq j.$$

D'où en intégrant,

$$u(a) = \int_{\partial B(0,\varepsilon)} u(a+y) \, d\mu_{0,\varepsilon}(y) = u(a) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(a) \int_{\partial B(0,\varepsilon)} y_i^2 \, d\mu_{0,\varepsilon}(y) + o(\varepsilon^2).$$

Mais,

$$\begin{aligned}
\int_{\partial B(0,\varepsilon)} y_i^2 \, d\mu_{0,\varepsilon}(y) &= \frac{1}{d}\sum_{i=1}^{d} \int_{\partial B(0,\varepsilon)} y_i^2 \, d\mu_{0,\varepsilon}(y) \\
&= \int_{\partial B(0,\varepsilon)} \|y\|^2 \, d\mu_{0,\varepsilon}(y) \\
&= \frac{\varepsilon^2}{d}.
\end{aligned}$$

On obtient :

$$u(a) = u(a) + \frac{\varepsilon^2}{2d}\Delta u(a) + o(\varepsilon^2)$$

Divisant par ε^2 et laissant $\varepsilon \to 0$, on obtient $\Delta u(a) = 0$.

□

Corollaire : (Principe du maximum) Soit u une fonction harmonique sur un ouvert $D \subset \mathbb{R}^d$. Alors :

(1) si u atteint son maximum en un point intérieur à D, et si l'ouvert D est connexe, alors u est constante sur D,

(2) pour tout compact $F \subset D$, u atteint son maximum sur le bord ∂F de F.

Démonstration. (2) Soient $M := \sup_{x \in D} u(x)$ et $D_M := \{x \in D \mid u(x) = M\}$.

upposons que D_M soit non vide, et montrons que $D_M = D$.

Comme u est continue, l'ensemble D_M est fermé dans D.

Soit $a \in D_M$, il existe $r > 0$ tel que $\overline{B(a,r)} \subset D$. D'après la propriété de la valeur moyenne, on a :

$$M = u(a) = \frac{1}{\mathrm{V_r}} \int_{B(a,r)} u(x) \, dx.$$

On en déduit que $u = M$ sur $B(a,r)$, donc D_M est ouvert dans D. Puisque D est connexe, $D_M = D$.

(1) Soient $a \in \mathring{F}$ et G la composante connexe de $\mathring{F}$ contenant a. Par la propriété de la valeur moyenne :

$$u(a) \leq \max\{u(x) \mid x \in \partial G\},$$

avec égalité si et seulement si u est constante sur G, d'après (2). Or, $\partial G \subset \partial \mathring{F} \subset \partial F$, donc :

$$u(a) \leq \max\{u(x) \mid x \in \partial F\},$$

□

2.2 Problème de Dirichlet

Le *problème de Dirichlet* consiste à résoudre l'équation de Laplace sur un domaine $D \subset \mathbb{R}^d$ avec des conditions au bord.

Étant donné un ouvert $D \subset \mathbb{R}^d$, et une fonction continue $f : \partial D \to \mathbb{R}$, le problème de Dirichlet (D, f) consiste à trouver une fonction $u : D \to \mathbb{R}$, continue sur $\overline{D}$ et de classe $\mathcal{C}^2$ sur D, telle que :

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{sur } D, \\ u = f & \text{sur } \partial D. \end{cases}$$

Le problème de Dirichlet peut être résolu par des méthodes analytiques comme la séparation des variables, les transformations de Fourier ou les fonctions de Green. Cependant, grâce à une approche probabiliste, exploitant les propriétés du mouvement brownien, on peut directement écrire une solution à (D, f) :

$$u(x) := \mathbb{E}_x[f(B(\tau_D))] \quad \text{pour } x \in \overline{D}.$$

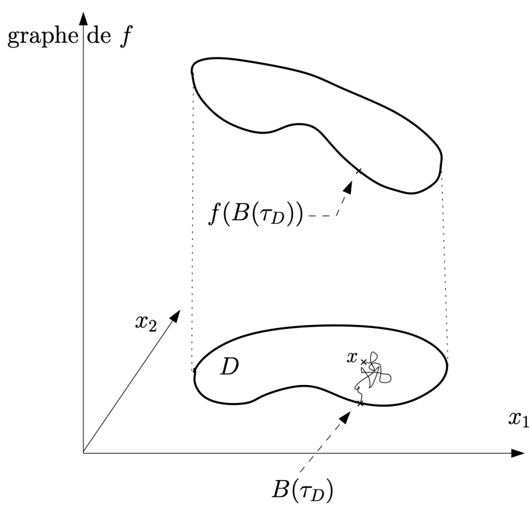

FIGURE 2 – Problème de Dirichlet en dimension $d = 2$.

Supposons, pour simplifier, que D est borné.

Montrons que toute solution du problème de Dirichlet (D, f) est de la forme ci-dessus. Soit u une solution. Pour $\varepsilon > 0$, soit

$$D_\varepsilon := \{z \in D \; ; \; \mathrm{dist}(z, D^c) > \varepsilon\}$$

le ε-intérieur de D. En prenant l'espérance, on voit que pour tout $x \in D$, et $\varepsilon > 0$ assez petit :

$$u(x) = \mathbb{E}_x\left[u\Big(B(t \wedge \tau_{D_\varepsilon})\Big)\right].$$

En faisant tendre $t \to \infty$, en utilisant que $\tau_{D_\varepsilon} < \infty$, et le théorème de convergence dominée, on obtient :

$$u(x) = \mathbb{E}_x\left[u(B(\tau_{D_\varepsilon}))\right] = \mathbb{E}_x\left[u(B(\tau_D))\right] = \mathbb{E}_x\left[f(B(\tau_D))\right].$$

car $\tau_{D_\varepsilon} \uparrow \tau_D$ et $B(\tau_{D_\varepsilon}) \to B(\tau_D)$ presque sûrement, quand $\varepsilon \to 0$, $u = f$ sur ∂D.

Ainsi, la solution du problème de Dirichlet (D, f), si elle existe, est unique, et elle est donnée par :

$$u(x) = \mathbb{E}_x[f(B(\tau_D))].$$

Montrer l'existence de la solution, pour des domaines D « presque » généraux.

Notons :

$$\sigma_D := \inf\{t > 0\ ;\ B(t) \notin D\}$$

le temps de sortie du mouvement brownien de D.

Définition : Un domaine $D \subset \mathbb{R}^d$ est dit *régulier* s'il est ouvert, connexe, borné et si

$$\mathbb{P}_a(\sigma_D = 0) = 1 \quad \forall a \in \partial D,$$

i.e. le mouvement brownien partant du bord de D sort immédiatement de D $\mathbb{P}_x$-presque sûrement.

Remarque : Un point $a \in \partial D$ est dit *irrégulier* si $\mathbb{P}_a(\sigma_D = 0) < 1$. Mais $\{\sigma_D = 0\} \in \mathcal{F}^B_{0+}$, donc, par la loi du tout ou rien de Blumenthal,

$$\mathbb{P}_a(\sigma_D = 0) = 0 \quad \text{pour tout point irrégulier } a.$$

On peut montrer que si D est régulier, alors $u(x) = f(x)$ pour $x \in \partial D$, et pour $a \in \partial D$, $\quad \lim_{x \to a,\, x \in D} u(x) = f(a)$ (**réf**).

Pour montrer que la fonction

$$u(x) = \mathbb{E}_x[f(B(\tau_D))]$$

est solution du problème de Dirichlet (D, f), il suffit de montrer que u est harmonique sur D, c'est-à-dire, que u satisfait la propriété de la valeur moyenne sur D.

Pour $B(a,r) \subset D$, on a $\mathcal{F}_{\tau_{B(a,r)}} \subset \mathcal{F}_{\tau_D}$ car $\tau_{B(a,r)} \leq \tau_D$ et par conditionnement au temps de sortie de cette boule :

$$\begin{aligned} u(a) &= = \mathbb{E}_a\left[f\left(B(\tau_D)\right)\right] \\ &= \mathbb{E}_a\left[\mathbb{E}_a\left[f\left(B(\tau_D)\right) \mid \mathcal{F}_{\tau_{B(a,r)}}\right]\right] \\ &= \mathbb{E}_a\left[u\left(B(\tau_{B(a,r)})\right)\right] \\ &= \int_{\partial B(a,r)} u(y)\, \mu_{a,r}(dy). \end{aligned}$$

En effet, par indépendance des accroissements, le processus $\Big(B(t+\tau_{B(a,r)}) - B(\tau_{B(a,r)})\Big)_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien issu de 0, indépendant de $\mathcal{F}_{\tau_{B(a,r)}}$ donc $\mathbb{E}_a\left[f(B(\tau_D)) \mid \mathcal{F}_{\tau_{B(a,r)}}\right] = u\left(B(\tau_{B(a,r)})\right)$.

Donc u est harmonique sur D, i.e u vérifie l'équation de Laplace sur D.

Il en résulte le théorème suivant :

Thérorème : Si D est un ouvert borné régulier, alors la fonction

$$u(x) := \mathbb{E}_x[f(B(\tau_D))]$$

est l'unique solution du problème de Dirichlet (D, f).

2.3 Équation de la chaleur

On s'intéresse désormais à une équation de Laplace avec une évolution dans le temps. En dimension d quelconque, on appelle *équation de la chaleur* le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{1}{2}\Delta u, \\ u(0,\cdot) = f. \end{cases}$$

On considère la loi de $B(t)$ sachant $\mathcal{F}_s$ pour $t \geq s$: par indépendance et stationnarité des accroissements browniens, c'est la loi gaussienne $\mathcal{N}_d\Big(B(s), (t-s)I_d\Big)$ de densité au point y, en notant $B_s = x$, donnée par :

$$p(t-s; x, y) = g_{t-s}(y-x),$$

où $g_t(x) = \frac{1}{(2\pi t)^{d/2}} \exp\left(-\frac{\|x\|^2}{2t}\right)$, la densité de $\mathcal{N}(0, tI_d)$.

On vérifie que $p = p(t; x, y)$ satisfait :

$$p^{-1}\frac{\partial}{\partial t}p = -\frac{d}{2t} + \frac{\|y-x\|^2}{2t^2},$$

et pour $1 \leq i \leq d$,

$$p^{-1}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}p = -\frac{1}{t} + \frac{(y_i - x_i)^2}{t^2}.$$

En sommant sur $1 \leq i \leq d$, on obtient

$$p^{-1}\Delta_x p = \sum_{i=1}^{d} p^{-1}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}p = \sum_{i=1}^{d}\left(-\frac{1}{t} + \frac{(y_i-x_i)^2}{t^2}\right) = -\frac{d}{t} + \frac{\|y-x\|^2}{t^2}.$$

On en déduit que $p = p(t; x, y)$ est solution de l'*équation progressive* (dite *forward* :

$$\frac{\partial}{\partial t}p = \frac{1}{2}\Delta_y p, \quad \lim_{t\searrow 0} p\ dy = \delta_x,$$

et par symétrie, p est également solution de l'*équation rétrograde* (dite *backward*) :

$$\frac{\partial}{\partial t}p = \frac{1}{2}\Delta_x p, \quad \lim_{t \searrow 0} p\, dx = \delta_y.$$

En raison de ces relations, p est la solution fondamentale de l'équation de la chaleur. On appelle p le *noyau de la chaleur.*

Proposition Supposons que la condition initiale f vérifie $\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)| e^{-c|x|^2}\, dx < +\infty$ pour une constante $c > 0$. Alors,

$$u(t, x) := \mathbb{E}_x[f(B_t)]$$

est solution de l'équation de la chaleur sur $[0, \frac{1}{2c}[\times \mathbb{R}^d$.

Démonstration. Par définition, on a,

$$u(t, x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y) p(t; x, y)\, dy.$$

Par l'hypothèse d'intégrabilité de f, on peut dériver sous le signe intégrale pour $t \in [0, \frac{1}{2c}[$:

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t, x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y) \frac{\partial}{\partial t} p(t; x, y)\, dy,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} u(t, x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y) \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} p(t; x, y)\, dy,$$

$$\Delta u(t, x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y) \Delta_x p(t; x, y)\, dy.$$

On obtient,

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t, x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y) \frac{\partial}{\partial t} p(t; x, y)\, dy = \int_{\mathbb{R}^d} f(y) \frac{1}{2} \Delta_x p(t; x, y)\, dy = \frac{1}{2} \Delta u(t, x),$$

d'après l'équation rétrograde, u est solution de l'équation de la chaleur sur cet intervalle de temps.

$\square$

2.4 Équation de Feynman-Kac

On considère l'équation aux dérivées partielles parabolique linéaire suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u = \frac{1}{2} \Delta u - k(x) u, & (t, x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^d, \\ u(0, \cdot) = f. \end{cases}$$

Notons que cette équation généralise l'équation de la chaleur, qui correspond au cas $k \equiv 0$.

Théorème : (Feynman-Kac) Soient $k : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ borélienne bornée, et $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ à croissance sous-exponentielle. Alors, toute solution $u(t, x)$ de classe $C^{1,2}$, dont le gradient est également à croissance sous-exponentielle uniformément en temps, est donnée par la formule :

$$u(t, x) = \mathbb{E}_x \left[f(B(t)) \exp\left(- \int_0^t k(B(s))\, ds \right) \right].$$

En particulier, une telle solution est unique.

Démonstration. Soit $t \geq 0$. On applique la formule d'Itô à la fonction

$$s \mapsto u(t-s, B(s)) \exp\left(-\int_0^s k(B(r))\, dr\right)$$

au temps $s \in]0, t[$. Comme s $\mapsto \exp\left(-\int_0^s k(B(r))\, dr\right)$ est à variation finie, il vient :

$$d\left[u(t-s, B(s)) \exp\left(-\int_0^s k(B(r))\, dr\right)\right] =$$

$$d\left[u(t-s, B(s))\right]\ \exp\left(-\int_0^s k(B(r))\, dr\right) + u(t-s, B(s))\ d\left[\exp\left(-\int_0^s k(B(r))\, dr\right)\right] + 0.$$

On applique de nouveau la formule d'Itô multidimensionnelle à $s \mapsto u(t-s, B(s))$. On obtient :

$$d\left[u(t-s, B(s))\right] = -\frac{\partial}{\partial t} u(t-s, B(s))\, ds + \nabla u(t-s, B(s))\ dB(s) + \frac{1}{2}\Delta u(t-s, B(s))\, ds,$$

et,

$$d\left[\exp\left(-\int_0^s k(B(r))\, dr\right)\right] = -k(B(s)) \exp\left(-\int_0^s k(B(r))\, dr\right) ds.$$

Donc,

$$d\left[u(t-s, B(s)) \exp\left(-\int_0^s k(B(r))\, dr\right)\right] =$$

$$\left[-\frac{\partial}{\partial t} u(t-s, B(s))\ ds - k(B(s)) u(t-s, B(s))\ ds + \frac{1}{2}\Delta u(t-s, B(s))\ ds\right] \times \exp\left(-\int_0^s k(B(r))\, dr\right) ds$$

$$+\nabla u(t-s, B(s))\ dB(s) \exp\left(-\int_0^s k(B(r))\, dr\right).$$

Mais $\frac{\partial}{\partial t} u = \frac{1}{2}\Delta u - ku$. Donc,

$$d\left[u(t-s, B(s)) \exp\left(-\int_0^s k(B(r))\, dr\right)\right] = \nabla u(t-s, B(s))\ dB(s) \exp\left(-\int_0^s k(B(r))\, dr\right).$$

En intégrant entre $s = 0$ et $s = t$, on obtient :

$$\exp\left(-\int_0^t k(B(r))\, dr\right) f(B(t)) - u(t, B(0)) = \int_0^t \exp\left(-\int_0^s k(B(r))\, dr\right) \nabla u(t-s, B(s))\, dB(s).$$

L'intégrale stochastique est une martingale L^2, d'après les hypothèses de croissance sous-exponentielle de f et de bornitude de k, d'espérance nulle. Ainsi, en prenant l'espérance sous $\mathbb{P}_x$,

$$u(t, x) = \mathbb{E}_x\left[f(B(t)) \exp\left(-\int_0^t k(B(s))\, ds\right)\right].$$

□

Cas de l'EDP sur un domaine

Soient D un domaine borné régulier de $\mathbb{R}^d$, et k une fonction mesurable bornée sur D. On considère l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u = \dfrac{1}{2}\Delta u - ku, & (t,x) \in \mathbb{R}_+^* \times D, \\ u(0,\cdot) = f & \text{sur } \overline{D}, \\ u(\cdot, x) \equiv 0 & \text{pour } x \in \partial D. \end{cases}$$

Soit u une solution de cette EDP, continue sur $\mathbb{R}_+ \times \overline{D}$, de classe $\mathcal{C}^{1,2}$, bornée, et à dérivées bornées. Alors,

$$u(t,x) = \mathbb{E}_x \left[f(B(t))\, \mathbf{1}_{\{t \le \tau_D\}} \exp\left(-\int_0^t k(B(s))\, ds \right) \right],$$

où τ_D désigne le temps de sortie de D pour le mouvement brownien B.

Comme précédemment, on applique la formule d'Itô à la fonction :

$$s \mapsto u(t-s, B(s \wedge \tau_D)) \exp\left(-\int_0^s k(B(r \wedge \tau_D))\, dr \right).$$

Notons que, pour $x \in \partial D$, on a $\tau_D = 0$ sous $\mathbb{P}_x$, et on récupère la condition au bord $u(\cdot, x) \equiv 0$ pour $x \in \partial D$.

3 Bibliographie

- Comets, F. ; Meyer, T. *Calcul stochastique et modèles de diffusion.* Dunod.
- Ito, Kiyoshi ; McKean, Henry P. Jr. *Diffusion Processes and Their Sample Paths.* Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, vol. 125. Academic Press, New York ; Springer-Verlag, Berlin-New York, 2e édition, 1974.
- Sznitman, Alain-Sol. *Brownian Motion, Obstacles and Random Media.* Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1998.
- Karatzas, Ioannis ; Shreve, Steven E. *Brownian Motion and Stochastic Calculus.* Graduate Texts in Mathematics, vol. 113. Springer-Verlag, New York, 1988.
- Breton, Jean-Christophe. *Calcul stochastique – M2 Mathématiques.* Université de Rennes, Novembre–Décembre 2021. `https://perso.univ-rennes1.fr/jean-christophe.breton/cours/M2/Calcul_Stochastique_M2.pdf`