Criterio del Rapporto

Alessio Serraino

March 6, 2016

<u>Teorema:</u> (criterio del rapporto per le successioni) Sia $\{a_n\}$ una successione, ed esista $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l \in \mathbb{R}^*$.

Se $l < 1$ allora $\{a_n\}$ converge a 0, se $l > 1$ allora $\{a_n\}$ diverge a $+\infty$.

Dimostrazione

- Dimostriamo il caso $l < 1$

$\forall\varepsilon > 0\ \exists n_0 \colon \forall n \geq n_0\ l - \varepsilon < a_n < l + \varepsilon$, e poichè è vera per ogni ε lo scegliamo in modo che $l + \varepsilon < 1$, il che è sempre possibile, per esempio scegliendo $\varepsilon = \frac{l+1}{2}$. Allora, trascurando la prima parte della disequazione, vale che:

$a_{n_0+1} < (l+\varepsilon)\, a_{n_0}$

$a_{n_0+2} < (l+\varepsilon)\, a_{n_{0+1}} < (l+\varepsilon)^2\, a_{n_0}$

$a_{n_0+3} < (l+\varepsilon)\, a_{n_0+2} < (l+\varepsilon)^2\, a_{n_0+1} < (l+\varepsilon)^3\, a_{n_0}$

....

In genere vale

$a_{n_0+k} < (l+\varepsilon)^k\, a_{n_0}$

Ma $(l+\varepsilon) < 1$, quindi quando $k \to +\infty$ $(l+\varepsilon)^k$ diventa arbitrariamente piccolo. Moltiplicato per a_{n_0}, che è fissato si ha che il secondo membro della disequazione diventa arbitrariamente piccolo. D'altro canto il primo è minore, quindi quando $k \to +\infty$ anche il primo diventa più piccolo di ogni costante positiva, ciò dimostra che $a_n \to 0$.

- Dimostriamo il caso $l > 1$, (ed eventualmente $l = +\infty$)

$\forall\varepsilon > 0\ \exists n_0 \colon \forall n \geq n_0\ l - \varepsilon < a_n < l + \varepsilon$, scegliamo questa volta ε lo scegliamo in modo che $l - \varepsilon > 1$, per esempio scegliendo $\varepsilon = \frac{l+1}{2}$. E costruiamo una sequenza di disuguaglianze simili al caso precedente

$a_{n_0+1} > (l-\varepsilon)\, a_{n_0}$

$a_{n_0+2} > (l-\varepsilon)\, a_{n_{0+1}} > (l-\varepsilon)^2\, a_{n_0}$

$a_{n_0+3} > (l-\varepsilon)\, a_{n_0+2} > (l-\varepsilon)^2\, a_{n_0+1} > (l-\varepsilon)^3\, a_{n_0}$

....

In genere vale

$a_{n_0+k} > (l-\varepsilon)^k\, a_{n_0}$

Ma $(l-\varepsilon) > 1$, quindi quando $k \to +\infty$ $(l-\varepsilon)^k$ diventa arbitrariamente grande. Moltiplicato per a_{n_0}, che è fissato si ha che il secondo membro della disequazione diventa arbitrariamente grande, ed a maggior ragione anche il primo, che è maggiore del secondo. Quindi $\{a_n\}$ diverge a $+\infty$.