Teorema di permanenza del segno

Alessio Serraino

March 6, 2016

Teorema: (di permanenza del segno) Sia $\{a_n\}$una successione convergente ad a. Se $a > 0$ allora $a_n > 0$ definitivamente.

Dimostrazione:

Per ipotesi $a_n \to a$, quindi vale $\forall \varepsilon > 0$ $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$ definitivamente. Allora scegliamo $\varepsilon = \frac{a}{2}$, poichè $a > 0$ per ipotesi, anche $\varepsilon > 0$.

Otteniamo: $a - \frac{a}{2} < a_n < a + \frac{a}{2}$ definitivamente, ovvero, “buttando via” la seconda disugualianza, e semplificando l’espressione, $\frac{a}{2} < a_n$ definitivamente.

Ma $\frac{a}{2} > 0$, quindi a maggior ragione anche $a_n > 0$ definitivamente, che è quanto volevamo dimostrare.

Corollario: Se $a_n \to a$ e $a_n > 0$ definitivamente allora $a > 0$.

Supponiamo per assurdo che sia $a < 0$, allora dal teorema di permanenza del segno seguirebbe che $a_n < 0$ definitivamente, che contraddice l’ipotesi, assurdo. Quindi $a > 0$.

Corollario: Se $a_n \to a$, $b_n \to b$, e $a > b$, allora $a_n > b_n$ definitivamente.

Consideriamo la sequenza $c_n = a_n - b_n$. Per il teorema sul limite della somma $c_n \to a - b > 0$, perchè $a > b$. Quindi per il teorema di permanenza del segno $c_n > 0$ definitivamente, ovvero $a_n - b_n > 0$ definitivamente, $a_n > b_n$definitivamente, che è ciò che volevamo dimostrare.

Corollario: Se $a_n \to a$, $b_n \to b$, e $a_n > b_n$ definitivamente allora $a > b$.

Ragioniamo come prima, consideriamo la sequenza $c_n = a_n - b_n > 0$ definitivamente per ipotesi. Per quanto affermato dal corollario del teorema di permaneza del segno, $c_n \to c > 0$.

Ma per il teorema sulla somma dei limiti $c = a - b$, quindi $a > b$, che è quanto volevamo dimostrare.