

Un insieme e l'insieme delle sue parti non hanno la stessa cardinalità

March 1, 2016

Sia A un insieme, A e $P(A)$ Non hanno la stessa cardinalità.

Supponiamo per assurdo che A e $P(A)$ abbiano la stessa cardinalità. Allora esiste una relazione biunivoca $f: A \rightarrow P(A)$.

Sia $X = \{a \in A: a \notin f(a)\}$. Osserviamo che $X \in P(A)$ in quanto i suoi elementi sono alcuni (o eventualmente tutti) gli elementi di A .

Poichè f è biunivoca $\exists x \in A: X = f(x)$.

Allora possiamo scrivere $x \in f(x) \iff x \in X$, poichè $f(x) = X$ per il modo in cui abbiamo scelto x .

Ma è anche vero che, per la definizione di X , $x \in X \iff x \notin f(x)$, quindi concatenando le due espressioni si ha:

$$x \in f(x) \iff x \in X \iff x \notin f(x)$$

Che è evidentemente un assurdo, nato per aver supposto che A e $P(A)$ abbiano la stessa cardinalità. Quindi A e $P(A)$ non hanno la stessa cardinalità.