Teorema della media

Alessio Serraino

March 1, 2016

Teorema: (della media) Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ continua in $[a,b]$.
Allora $\exists c \in [a,b] : f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx$
Dimostrazione:
Poichè f è continua in $[a,b]$ rispetta tutte le ipotesi del teorema di Weierstrass, possiede quindi un massimo M, ed un minimo m.
$\forall x \in [a,b]\;\; m \leq f(x)$ per definizione di minimo
$\forall x \in [a,b]\;\; M \geq f(x)$ per definizione di massimo
Allora per la monotonia dell'integrale definito valgono le seguenti disugualianze:

$$\int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b M dx$$

Moltiplicando tutto per $\frac{1}{b-a}$, che è una costante positiva (in quanto $b > a$ per ipotesi) le disuguaglianze non cambiano verso

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b m dx \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b M dx$$

Ma per l'integrale della costante $\frac{1}{b-a}\int_a^b m dx = m$ e $\frac{1}{b-a}\int_a^b M dx = M$, quindi, sostituendo

$$m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq M$$

Abbiamo dimostrato che il valore $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$ è compreso fra il minimo ed il massimo della funzione. Allora per il teorema dei valori intermedi $\exists c \in [a,b] : f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$, ovvero la tesi.