

Teorema dei valori intermedi

Alessio Serraino

March 1, 2016

Teorema: (dei valori intermedi) Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua in $[a, b]$.

Allora f assume almeno una volta tutti i valori fra il suo massimo ed il suo minimo.

Dimostrazione:

La funzione f rispetta tutte le condizioni del teorema di Weierstrass in $[a, b]$. Ne segue che esistono un punto di massimo x_M per il quale f assume il suo valore massimo ($= M$), ed un punto di minimo x_m per il quale f assume il suo valore minimo ($= m$).

Consideriamo allora λ tale che $m < \lambda < M$, e la funzione $h(x) = f(x) - \lambda$ sull'intervallo $[x_m, x_M]$ (supposto che $x_m > x_M$, in caso contrario la dimostrazione è analoga).

Allora $h(x_m) = m - \lambda < 0$, $h(x_M) = M - \lambda > 0$, ovvero h ha valore di segno opposto agli estremi dell'intervallo. Appliciamo allora il teorema degli zeri che ci assicura che $\exists c \in (x_m, x_M) : h(c) = 0$, ciò implica che $f(c) = \lambda$, quindi esiste almeno un punto in cui la funzione vale λ . Poichè questo ragionamento è valido per ogni λ compreso fra il massimo ed il minimo la funzione assume almeno una volta tutti i valori fra il suo massimo ed il suo minimo, come volevamo dimostrare.