Практика: Класифікація рівнянь в частинних похідних

1. Теоретичні відомості

Маємо рівняння

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + F(x, y, u, u_x, u_y) = 0, \tag{1}$$

для нього визначаємо дискримінант:

$$D \equiv a_{12}^2 - a_{11}a_{22},$$

при чому дискримінант визначаємо поточково ($D = D(x, y)$). Тоді тип рівняння (1) визначається в залежності від знаку D:

$D > 0$ — гіперболічного типу в точці (x, y);

$D = 0$ — параболічного типу в точці (x, y);

$D < 0$ — еліптичного типу в точці (x, y).

Характеристичні рівняння для (1):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} \pm \sqrt{D}}{a_{11}}. \tag{2}$$

Тоді

а) $D > 0$, $\phi(x, y) = C$ та $\psi(x, y) = C$ — загальні інтеграли характеристичних рівнянь (2). Якщо виконати заміну змінних

$$\begin{aligned} \xi &= \phi(x, y), \\ \eta &= \psi(x, y), \end{aligned}$$

то зведемо рівняння (1) до першої канонічної гіперболічної форми:

$$u_{\xi\eta} = \Phi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta).$$

Якщо виконати заміну змінних

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\xi + \eta}{2}, \\ \beta &= \frac{\xi - \eta}{2}, \end{aligned}$$

то матимуть місце рівності:

$$\begin{aligned} u_\xi &= \frac{1}{2}(u_\alpha + u_\beta), \\ u_\eta &= \frac{1}{2}(u_\alpha - u_\beta), \\ u_{\xi\eta} &= \frac{1}{4}(u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta}), \end{aligned}$$

і тоді зведемо рівняння (1) до другої канонічної гіперболічної форми:

$$u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} = \Phi_1(\alpha, \beta, u, u_\alpha, u_\beta).$$

б) $D = 0$, $\phi(x, y) = C$ — єдиний загальний інтеграл характеристичного рівняння (2). Виконуючи заміну змінних

$$\begin{aligned} \xi &= \phi(x, y), \\ \eta &= \psi(x, y), \end{aligned}$$

де ψ — довільна лінійно незалежна від ϕ функція, зведемо рівняння (1) до канонічної параболічної форми:

$$\begin{aligned} u_{\eta\eta} &= \Phi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta) \\ &\text{чи} \\ u_{\xi\xi} &= \Phi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta) (\text{якщо взяти } \xi \text{ і } \eta \text{ навпаки}). \end{aligned}$$

в) $D < 0$, $\phi(x, y) = C$ та $\phi^*(x, y) = C$ — комплексно спряжені загальні інтеграли характеристичних рівнянь (2). Виконавши заміну змінних

$$\begin{aligned} \xi &= \Re\phi, \\ \eta &= \Im\phi, \end{aligned}$$

зведемо рівняння (1) до канонічної еліптичної форми:

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = \Phi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta).$$

2. Приклади

Приклад 1

$$x^2 u_{xx} - y^2 u_{yy} = 0.$$

Для нього:

$$a_{11} = x^2, a_{12} = 0, a_{22} = -y^2, \quad D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = x^2y^2, \quad D > 0, \text{якщо } x \neq 0, y \neq 0.$$

Рівняння характеристик:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} \pm \sqrt{D}}{a_{11}} = \pm\frac{\sqrt{x^2y^2}}{x^2} = \pm\frac{|x| \cdot |y|}{x^2} = \pm\frac{|y|}{|x|}.$$

Область гіперболічності — це об'єднання чотирьох квадрантів (без характеристичних осей), тому в кожному квадранті можна (і навіть слід) приводити рівняння окремо, розкриваючи відповідно модулі у рівнянні характеристик. Але там всюди стоїть знак „±“, тому з точністю до перестановки змінних нема різниці, якщо ці модулі взагалі зняти. Тому можемо виконати перетворення:

$$\frac{dy}{dx} = \pm\frac{y}{x} \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = \pm\frac{dx}{x} \Leftrightarrow \ln|y| = \pm\ln|x| + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Тоді

$$\text{або} \quad \ln|xy| = C, \quad \text{або} \quad \ln\left|\frac{y}{x}\right| = C,$$

звідки маємо загальні інтеграли

$$xy = C \quad \text{та} \quad \frac{y}{x} = C.$$

Поклавши $\xi = xy,\ \eta = \frac{y}{x}$, маємо:

$$\begin{aligned}
u_x &= u_\xi\xi_x + u_\eta\eta_x = u_\xi y + u_\eta(-\frac{y}{x^2}),\\
u_{xx} &=(u_\xi)_x y + u_\xi y_x + (u_\eta)_x(-\frac{y}{x^2}) + u_\eta\frac{2y}{x^3} = y(u_{\xi\xi}\xi_x + u_{\xi\eta}\eta_x) + 0 - \frac{y}{x^2}(u_{\eta\xi}\xi_x + u_{\eta\eta}\eta_x) + u_\eta\frac{2y}{x^3} =\\
&=y(u_{\xi\xi}y - u_{\xi\eta}\frac{y}{x^2}) - \frac{y}{x^2}(u_{\eta\xi}y - u_{\eta\eta}\frac{y}{x^2}) + u_\eta\frac{2y}{x^3} = u_{\xi\xi}y^2 + \frac{y^2}{x^4}u_{\eta\eta} - \frac{2y^2}{x^2}u_{\xi\eta} + u_\eta\frac{2y}{x^3},\\
u_y &=u_\xi\xi_y + u_\eta\eta_y = u_\xi x + u_\eta\frac{1}{x},\\
u_{yy} &=x(u_{\xi\xi}\xi_y + u_{\xi\eta}\eta_y) + \frac{1}{x}(u_{\eta\xi}\xi_y + u_{\eta\eta}\eta_y) = x(u_{\xi\xi}x + u_{\xi\eta}\frac{1}{x}) + \frac{1}{x}(u_{\eta\xi}x + u_{\eta\eta}\frac{1}{x}) =\\
&=x^2u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + \frac{1}{x^2}u_{\eta\eta}.
\end{aligned}$$

Тоді, виконавши підстановку у початкове рівняння, приводимо до канонічної форми:

$$x^2u_{xx} - y^2u_{yy} = 0 \ \Leftrightarrow\ x^2y^2u_{\xi\xi} + \frac{y^2}{x^2}u_{\eta\eta} - 2y^2u_{\xi\eta} + \frac{2y}{x}u_\eta - x^2y^2u_{\xi\xi} - 2y^2u_{\xi\eta} - \frac{y^2}{x^2}u_{\eta\eta} = 0 \ \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\ -4y^2u_{\xi\eta} + \frac{2y}{x}u_\eta = 0 \ \Leftrightarrow\ u_{\xi\eta} - \frac{1}{2xy}u_\eta = 0 \ \Leftrightarrow\ u_{\xi\eta} - \frac{1}{2\xi}u_\eta = 0.$$

Можна і іншим способом. Наприклад, поклавши $\alpha = \frac{1}{2}(\xi + \eta) = \frac{1}{2}(xy + \frac{y}{x}),\ \beta = \frac{1}{2}(\xi - \eta) = \frac{1}{2}(xy + \frac{y}{x})$. Але можна загальні інтеграли брати і в їх початковому вигляді $\ln|y| \pm \ln|x| = C$. Тоді, поклавши $\xi = \ln|x|,\ \eta = \ln|y|$, маємо:

$$\begin{aligned}
u_x &= u_\xi\xi_x + u_\eta\eta_x = u_\xi\frac{1}{x} + 0,\\
u_{xx} &= -\frac{1}{x^2}u_\xi + \frac{1}{x}(u_{\xi\xi}\xi_x + u_{\xi\eta}\eta_x) = -\frac{1}{x^2}u_\xi + \frac{1}{x^2}u_{\xi\xi},\\
u_y &= u_\eta\frac{1}{y},\\
u_{yy} &= -\frac{1}{y^2}u_\eta + \frac{1}{y}(u_{\eta\xi}\xi_y + u_{\eta\eta}\eta_y) = -\frac{1}{y^2}u_\eta + \frac{1}{y^2}u_{\eta\eta}.
\end{aligned}$$

Тоді, виконавши підстановку у початкове рівняння, приводимо до канонічної форми:

$$x^2u_{xx} - y^2u_{yy} = 0 \ \Leftrightarrow\ -u_\xi + u_{\xi\xi} + u_\eta - u_{\eta\eta} = 0 \ \Leftrightarrow\ u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} + u_\eta - u_\xi = 0.$$

Відповідь: гіперболічне при $x^2y^2 > 0$: $u_{\xi\eta} - \frac{1}{2\xi}u_\eta = 0$ (при $\xi = xy, \eta = \frac{y}{x}$) або
$u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} + u_\eta - u_\xi = 0$ (при $\xi = \ln|x|, \eta = \ln|y|$);
параболічне при $x = 0$ або $y = 0$: $u_{yy} = 0$ або $u_{xx} = 0$ відповідно;
при $x = y = 0$: $0 = 0$ — нічого класифікувати.

Приклад 2

$$(1+x^2)u_{xx} + (1+y^2)u_{yy} + yu_y = 0.$$

Для нього:

$$\begin{aligned} &a_{11} = 1 + x^2, \quad a_{12} = 0, \quad a_{22} = 1 + y^2, \\ &D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = -(1+x^2)(1+y^2) < 0, \quad \text{при } (x;y) \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Рівняння всюди еліптичне. Рівняння характеристик:

$$\begin{aligned} &\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} \pm \sqrt{D}}{a_{11}} = \frac{\pm i\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}}{1+x^2} = \pm i\frac{\sqrt{1+y^2}}{\sqrt{1+x^2}} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{dy}{\sqrt{1+y^2}} = \pm i\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \ln\left|y + \sqrt{1+y^2}\right| = \pm i \ln\left|x + \sqrt{1+x^2}\right| + C. \end{aligned}$$

Беремо дійсну й уявну частини загальних інтегралів:

$$\begin{cases} \xi = \ln\left|x + \sqrt{1+x^2}\right| \\ \eta = \ln\left|y + \sqrt{1+y^2}\right| \end{cases},$$

тоді маємо:

$$\begin{aligned} &u_x = u_\xi \xi x + u_\eta \eta_x = u_\xi \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \\ &u_{xx} = -x(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}u_\xi + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}(u_{\xi\xi}\xi_x + u_{\xi\eta}\eta_x) = -x(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}u_\xi + \frac{u_{\xi\xi}}{1+x^2}, \end{aligned}$$

цілком аналогічно:

$$\begin{aligned} &u_y = u_\eta \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}, \\ &u_{yy} = -y(1+y^2)^{-\frac{3}{2}}u_\eta + \frac{u_{\eta\eta}}{1+y^2}. \end{aligned}$$

Тоді, підставляючи у початкове рівняння, маємо:

$$\begin{aligned} &(1+x^2)u_{xx} + (1+y^2)u_{yy} + yu_y = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -x(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}u_\xi + u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} - y(1+y^2)^{-\frac{1}{2}}u_\eta + y(1+y^2)^{-\frac{1}{2}}u_\eta = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} - x(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}u_\xi = 0, \end{aligned}$$

оскільки $\xi = \ln\left|x + \sqrt{1+x^2}\right| = \texttt{arsh}\, x$, то $x = \operatorname{sh}\xi$, тоді:

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{\operatorname{sh}\xi}{\sqrt{1+\operatorname{sh}^2\xi}} = \frac{\operatorname{sh}\xi}{\operatorname{ch}\xi} = \tanh\xi,$$

а тоді приводимо рівняння до виду:

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} - (\tanh\xi)u_\xi = 0.$$

Відповідь: еліптичне, $u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}-(\tanh\xi)u_\xi = 0$, (при $\xi = \ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right|,\ \eta = \ln\left|y+\sqrt{1+y^2}\right|$).

Приклад 3

$$y^2u_{xx} + 2yu_{xy} + u_{yy} = 0.$$

Для нього:

$$\begin{aligned} &a_{11} = y^2, \quad a_{12} = y, \quad a_{22} = 1, \\ &D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = y^2 - y^2\cdot 1 = 0, \quad \text{при } (x;y)\in\mathbb{R}. \end{aligned}$$

Рівняння всюди параболічне. Його рівняння характеристики:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12}\pm\sqrt{D}}{a_{11}} = \frac{y}{y^2} = \frac{1}{y} \quad \Leftrightarrow \quad ydy = dx,$$

а загальний інтеграл рівняння характеристики:

$$y^2 - 2x = C.$$

Взявши

$$\begin{cases} \xi = y^2 - 2x \\ \eta = y \end{cases},$$

маємо:

$$\begin{aligned} &u_x = u_\xi\xi_x + u_\eta\eta_x = -2u_\xi, \\ &u_{xx} = -2(u_{\xi\xi}\xi_x + u_{\xi\eta}\eta_x) = -2(-2u_{\xi\xi}) = 4u_{\xi\xi}, \\ &u_{xy} = -2(u_{\xi\xi}\xi_y + u_{\xi\eta}\eta_y) = -2(u_{\xi\xi}\cdot 2y + u_{\xi\eta}), \\ &u_y = u_\xi\xi_y + u_\eta\eta_y = u_\xi\cdot 2y + u_\eta, \\ &u_{yy} = 2u_\xi + 2y(u_{\xi\xi}\xi_y + u_{\xi\eta}\eta_y) + u_{\eta\xi}\xi_y + u_{\eta\eta}\eta_y. \end{aligned}$$

Підставляючи у початкове рівняння, зводимо його до канонічного виду:

$$\begin{aligned} &y^2u_{xx} + 2yu_{xy} + u_{yy} = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow\ &4y^2u_{\xi\xi} - 4y(u_{\xi\xi}2y + u_{\xi\eta}) + 2u_\xi + 2y(u_{\xi\xi}2y + u_{\xi\eta}\cdot 1) + u_{\eta\xi}\cdot 2y + u_{\eta\eta}\cdot 1 = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow\ &4y^2u_{\xi\xi} - 8y^2u_{\xi\xi} - 4yu_{\xi\eta} + 2u_\xi + 4y^2u_{\xi\xi} + 2yu_{\xi\eta} + 2yu_{\eta\xi} + u_{\eta\eta} = 0 \Leftrightarrow\ u_{\eta\eta} + 2u_\xi = 0. \end{aligned}$$

Відповідь: параболічне всюди, $u_{\eta\eta} + 2u_\xi = 0$, (при $\xi = y^2 - 2x,\ \eta = y$).

3. Домашнє завдання

1) $u_{xx} + 2u_{xy} - 4u_{yy} + 2u_x + 3u_y = 0$;

2) $u_{xx} + 2u_{xy} - 3u_{yy} + 2u_x + 6u_y = 0$;

3) $yu_{xx} - xu_{yy} + u_x + yu_y = 0$;

4) $u_{xx} + xyu_{yy} = 0$;

5) $u_{xx} - 2cosx \cdot u_{xy} - (3 + sin^2 x)u_{yy} - yu_y = 0$.

Практика: Метод Фур'є розділення змінних

1. Приклади

Приклад 1

Дано тонкий однорідний стержень $0 < x < l$, бічна поверхня якого ізольована (теплоізоляція). Знайти закон розподілу температури в стержні, якщо кінці стержня підтримуються при нульовій температурі, а початкова температура $u|_{t=0} = u_0(x) = Ax(l - x)$, де $A = const$.

Маємо задачу:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \\ u(0,t) = u(l,t) = 0, \\ u(x,0) = Ax(l - x). \end{cases}$$

Методом Фур'є: $u(x,t) = X(x)T(t)$, тоді

$$XT' = a^2 TX'' \Leftrightarrow \frac{T'}{a^2 T} = \frac{X''}{X} = -\lambda,$$

звідки

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, \\ T' + \lambda a^2 T = 0, \end{cases}$$

Тоді маємо задачу Штурма-Ліувілля:

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, \\ X(0) = X(l) = 0, \end{cases}$$

звідки

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2, \quad X_n(x) = \sin\frac{\pi n x}{l}.$$

Тоді маємо

$$T_n' + \lambda_n a^2 T_n = 0 \quad \Leftrightarrow \quad T_n' + \left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 T_n = 0 \quad \Rightarrow \quad T_n = C_n e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t}.$$

Таким чином, маємо:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t}\sin\frac{\pi n x}{l}.$$

Початкова умова:

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\sin\frac{\pi n x}{l}=Ax(l-x).$$

Розкладаємо $Ax(l-x)$ в ряд Фур'є по системі $\left\{\sin\frac{\pi n x}{l}\right\}_{n=1}^{\infty}$. Множимо це на $\sin\frac{\pi m x}{l}$, $m\in\mathbb{N}$ і інтегруємо.

$$\int\limits_0^l \sin\frac{\pi n x}{l}\cdot\sin\frac{\pi m x}{l}dx=\begin{cases}0, & m\neq n,\\ \dfrac{l}{2}, & m=n,\end{cases}\qquad \text{тоді}$$

$$\frac{l}{2}C_n=\int\limits_0^l Ax(l-x)\sin\frac{\pi n x}{l}dx=-\frac{l}{\pi n}\int\limits_0^l Ax(l-x)d\left(\cos\frac{\pi n x}{l}\right)=$$

$$=\frac{l}{\pi n}\left(-Ax(l-x)\cos\frac{\pi n x}{l}\Big|_0^l+\int\limits_0^l\cos\frac{\pi n x}{l}d(Ax(l-x))\right)=\frac{lA}{\pi n}\int\limits_0^l(l-2x)\cos\frac{\pi n x}{l}dx=$$

$$=\frac{lA}{\pi n}\cdot\frac{l}{\pi n}\int\limits_0^l(l-2x)d\left(\sin\frac{\pi n x}{l}\right)=\frac{Al^2}{\pi^2 n^2}\left((l-2x)\sin\frac{\pi n x}{l}\Big|_0^l+2\int\limits_0^l\sin\frac{\pi n x}{l}dx\right)=$$

$$=\frac{2Al^3}{\pi^3 n^3}\left(-\cos\frac{\pi n x}{l}\Big|_0^l\right)=\frac{2Al^3}{\pi^3 n^3}\left(1-(-1)^n\right)=\begin{cases}0, & n=2k,\\ \dfrac{4Al^3}{\pi^3(2k+1)^3}, & n=2k+1.\end{cases}$$

Значить,

$$C_n=\begin{cases}0, & n=2k,\\ \dfrac{8Al^2}{\pi^3(2k+1)^3}, & n=2k+1.\end{cases}$$

Тоді маємо:

$$u(x,t)=\frac{8Al^2}{\pi^3}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^3}e^{-\left(\frac{\pi(2k+1)a}{l}\right)^2 t}\cdot\sin\frac{\pi(2k+1)x}{l}.$$

Відповідь: $u(x,t)=\frac{8Al^2}{\pi^3}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^3}e^{-\left(\frac{\pi(2k+1)a}{l}\right)^2 t}\sin\frac{\pi(2k+1)x}{l}$.

Зауваження: якщо, наприклад, на кінець $x=l$ подається зовні тепловий потік, то умова пишеться так:

$$u_x(l,t)\equiv u_x|_{x=l}=q(t);$$

якщо ж $q(t)\equiv 0$, то кінець $x=l$ теплоізольований. Якщо ж сказано, що на кінці $x=l$ йде теплообмін з оточуючим середовищем, то умова пишеться приблизно так:

$$(u_x+hu)|_{x=l}=hu_0,$$

де h — коефіцієнт теплообміну, u_0 — температура оточуючого середовища; якщо сказано, що є вільний теплообмін ($u_0 = 0$), тоді просто маємо $(u_x + hu)|_{x=l} = 0$.

Література

[1] Владмиров В.С. — Сборник задач по уравнениям математической физики.

[2] Очак Ю.С. — Методы математической физики.

[3] Будяк, Самарский, Тихонов — Сборник задач по математической физике.

Приклад 2

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} - 1, \quad 0 < x < 1, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, \\ u(x,0) = 2x^2 - 2x. \end{cases}$$

Спочатку розв'язуємо (принаймні, починаємо розв'язувати) задачу з однорідною правою частиною:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, \quad 0 < x < 1, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0. \end{cases}$$

Розділяючи змінні в однорідній задачі

$$u(x,t) = X(x)T(t),$$

приходимо до задачі Штурма-Ліувілля:

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, \\ X(0) = X(1) = 0, \end{cases}$$

звідки

$$\lambda_n = (\pi n)^2, \quad X_n(x) = \sin(\pi n x), \ n \in \mathbb{N}.$$

Тоді розв'язок вихідної неоднорідної задачі шукаємо у вигляді ряда

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) X_n(x)$$

по системі власних функцій $\{X_n(x) = \sin(\pi n x)\}$ задачі Штурма-Ліувілля для відповідної однорідної задачі. Розкладемо праву частину за цією системою функцій:

$$-1 = \sum_{n=1}^{\infty} f_n X_n(x), \quad \text{маємо} \quad \int_0^1 (-1)\sin(\pi n x) dx = f_n \cdot \frac{1}{2}, \quad \text{звідки}$$

$$\frac{(-1)^n - 1}{\pi n} = f_n \cdot \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad f_n = \frac{2 \cdot ((-1)^n - 1)}{\pi n}.$$

Тоді, підставивши заготовку в вихідне рівняння, матимемо:

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n'(t)X_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)X_n''(x) + \sum_{n=1}^{\infty} f_n X_n(x) \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(T_n'(t) + (\pi n)^2 T_n(t) - f_n\right) \sin(\pi n x) = 0.$$

З початкової умови маємо:

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(0)X_n(x) = 2x^2 - 2x \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad T_n(0)\cdot\frac{1}{2} = \int\limits_0^1 \left(2x^2 - 2x\right)\sin(\pi n x)dx = 4\frac{(-1)^n - 1}{\pi^3 n^3} \quad \Leftrightarrow$$
$$T_n(0) = \frac{8\cdot((-1)^n - 1)}{\pi^3 n^3}.$$

Тоді маємо $\forall n \in \mathbb{N}$ рівняння:

$$\begin{cases} T_n'(t) + (\pi n)^2 T_n(t) - f_n = 0, \\ T_n(0) = \dfrac{8\cdot((-1)^n - 1)}{\pi^3 n^3}. \end{cases}$$

Рівняння розв'язуємо методом варіації постійної.

$$T_n'(t) = -(\pi n)^2 T_n(t) \quad \Leftrightarrow \quad T_n(t) = C_n e^{-(\pi n)^2 t}.$$

Припускаємо, що $C_n = C_n(t)$, тоді $T_n(t) = C_n(t)e^{-(\pi n)^2 t}$, звідки

$$C_n'(t)e^{-(\pi n)^2 t} - C_n(t)(\pi n)^2 e^{-(\pi n)^2 t} + (\pi n)^2 C_n(t)e^{-(\pi n)^2 t} - f_n = 0 \quad \Leftrightarrow \quad C_n'(t)e^{-(\pi n)^2 t} = f_n, \text{тоді}$$
$$C_n'(t) = f_n \cdot e^{(\pi n)^2 t} \quad \Leftrightarrow \quad C_n(t) = \frac{f_n}{(\pi n)^2}e^{(\pi n)^2 t} + C.$$

Значить, загальний розв'язок неоднорідного звичайного ДР:

$$T_n(t) = C_n(t)e^{-(\pi n)^2 t} = \frac{f_n}{(\pi n)^2} + Ce^{-(\pi n)^2 t}.$$

З початкової умови:

$$\frac{8\cdot((-1)^n - 1)}{(\pi n)^3} = \frac{2\cdot((-1)^n - 1)}{(\pi n)^3} + C\cdot 1 \quad \Leftrightarrow \quad C = \frac{6\cdot((-1)^n - 1)}{(\pi n)^3}.$$

Значить,

$$T_n(t) = \frac{2\cdot((-1)^n - 1)}{(\pi n)^3} + \frac{6\cdot((-1)^n - 1)}{(\pi n)^3}e^{-(\pi n)^2 t}.$$

При $n = 2k$ буде $T_n(t) = 0$, тому розглядаємо при $n = 2k + 1$. Тоді остаточно:

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{-4}{(\pi(2k+1))^3} - \frac{12}{(\pi(2k+1))^3} e^{-(\pi(2k+1))^2 t} \right) \sin\left(\pi(2k+1)x\right) \quad \text{або ж}$$

$$u(x,t) = \frac{-4}{\pi^3} \sum_{k=0}^{\infty} \left(1 + 3e^{-(\pi(2k+1))^2 t}\right) \frac{\sin\left(\pi(2k+1)x\right)}{(2k+1)^3}.$$

Відповідь: $u(x,t) = \frac{-4}{\pi^3} \sum_{k=0}^{\infty} \left(1 + 3e^{-(\pi(2k+1))^2 t}\right) \frac{\sin(\pi(2k+1)x)}{(2k+1)^3}$.

Приклад 3

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + x, \quad 0 < x < 1,\ t > 0, \\ u(0,t) = t,\ u(1,t) = 2t + 1, \\ u(x,0) = 2x^2 - x. \end{cases}$$

Шукаємо розв'язок у вигляді

$$u(x,t) = v(x,t) + U(x,t),$$

де $v(x,t)$ — нова невідома функція, а $U(x,t)$ — підібрана так, щоб задовольняти неоднорідні граничні умови, тобто $U(0,t) = t$, $U(1,t) = 2t + 1$. Якщо треба таку $U(x,t)$, щоб $U(0,t) = \mu_1(t)$, $U(l,t) = \mu_2(t)$, то можна взяти

$$U(x,t) = \mu_1(t) + (\mu_2(t) - \mu_1(t))\frac{x}{l}.$$

Тоді, в нашому випадку отримуємо:

$$U(x,t) = t + (2t + 1 - t)\frac{x}{1} = t + (t+1)x.$$

Значить, маємо представлення

$$u(x,t) = v(x,t) + t + (t+1)x.$$

Підставляємо в задачу:

$$u_t = u_{xx} + x \quad \Leftrightarrow \quad v_t + 1 + x = v_{xx} + x \quad \Leftrightarrow \quad v_t = v_{xx} - 1.$$

Граничні умови:

$$\begin{aligned} &u(0,t) = t \quad \Leftrightarrow \quad v(0,t) + t + 0 = t \quad \Leftrightarrow \quad v(0,t) = 0; \\ &u(1,t) = 2t + 1 \quad \Leftrightarrow \quad v(1,t) + t + t + 1 = 2t + 1 \quad \Leftrightarrow \quad v(1,t) = 0. \end{aligned}$$

Початкова умова:

$$u(x,0) = 2x^2 - x \quad \Leftrightarrow \quad v(x,0) + x = 2x^2 - x \quad \Leftrightarrow \quad v(x,0) = 2x^2 - 2x.$$

Значить, маємо нову задачу відносно $v(x,t)$, але з однорідними граничними умовами:

$$\begin{cases} v_t = v_{xx} - 1, \quad 0 < x < 1,\ t > 0, \\ v(0,t) = v(1,t) = 0, \\ v(x,0) = 2x^2 - 2x. \end{cases}$$

Ця задача була розв'язана в попередньому прикладі, тому можемо відразу виписати розв'язок:

$$u(x,t) = t + (t+1)x - \frac{4}{\pi^3} \sum_{k=0}^{\infty} \left(1 + 3e^{-(\pi(2k+1))^2 t}\right) \frac{\sin(\pi(2k+1)x)}{(2k+1)^3}.$$

Відповідь: $u(x,t) = t + (t+1)x - \frac{4}{\pi^3} \sum_{k=0}^{\infty} \left(1 + 3e^{-(\pi(2k+1))^2 t}\right) \frac{\sin(\pi(2k+1)x)}{(2k+1)^3}$.

Зауваження: при інших неоднорідних граничних умовах можливі інші функції заміни $U(x,t)$. Наприклад,

$$\text{для} \quad u_x(0,t) = \alpha(t),\ u_x(l,t) = \beta(t) \quad \text{підійде заміна} \quad U(x,t) = \alpha(t)x + (\beta(t) - \alpha(t))\frac{x^2}{2l};$$

$$\text{при} \quad u(0,t) = \alpha(t),\ u_x(l,t) = \beta(t) \quad \text{можна брати} \quad U(x,t) = \alpha(t) + \beta(t)\frac{x^2}{2l} \quad \text{і т.д.}$$

У випадку більш загальних неоднорідних умов в якості функції $U(x,t)$, що задовольняє граничні умови, можна спробувати взяти $U(x,t) = a(t) + b(t)x + c(t)x^2$, а потім визначити відповідні коефіцієнти $a(t), b(t), c(t)$. Нам підійде довільна така $U(x,t)$, лише б вона задовольняла граничні умови.

Приклад 4

Знайти форму $u(x,t)$ закріпленої на кінці $x = 0$ однорідної струни, правий кінець має горизонтальну дотичну, і на струну діє зовнішня сила з щільністю $F(x,t) \neq 0$. В початковий момент $t = 0$ форма струни визначається через $\phi(x)$, а швидкість — через $\psi(x)$. Знайти $u(x,t)$ за умов $\phi(x) = \psi(x) = 0$, а $F(x,t) = a^2$.

Загальна постановка задачі:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x,t), \quad 0 < x < l,\ t > 0, \\ u(0,t) = 0,\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(l,t) = 0, \\ u(x,0) = \phi(x),\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x). \end{cases}$$

Знайдемо спочатку власні функції однорідного рівняння

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, \\ u(0,t) = u_x(l,t) = 0. \end{cases}$$

Покладемо

$$u(x,t) = X(x) \cdot T(t),$$

тоді, розділяючи змінні, маємо:

$$\frac{T''}{a^2T} = \frac{X''}{X} = -\lambda,$$

звідки

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, \\ X(0) = X'(l) = 0. \end{cases}$$

Знаходимо власні функції і значення:

$$\lambda_k = \left(\frac{\pi(2k-1)}{2l}\right)^2, \quad X_k(x) = \sin\frac{\pi(2k-1)x}{2l}, \ k \in \mathbb{N}.$$

Розкладемо $F(x,t)$ по $\{X_k(x)\}$:

$$F(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t)\sin\frac{\pi(2k-1)x}{2l}, \quad \text{тоді} \quad \int\limits_0^l F(x,t)\sin\frac{\pi(2k-1)x}{2l}dx = f_k(t)\cdot\frac{l}{2},$$

$$\text{бо} \quad \int\limits_0^l \sin^2\frac{\pi(2k-1)x}{2l}dx = \frac{l}{2}, \quad \text{звідки} \quad f_k(t) = \frac{2}{l}\int\limits_0^l F(x,t)\sin\frac{\pi(2k-1)x}{2l}dx.$$

Шукаємо розв'язок неоднорідного рівняння у вигляді

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t)X_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t)\sin\frac{\pi(2k-1)x}{2l}.$$

Підставивши його в рівняння $u_{tt} = a^2u_{xx} + F(x,t)$, маємо:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(u_k''(t) + \frac{\pi^2a^2(2k-1)^2}{4l^2}u_k(t) - f_k(t)\right)\sin\frac{\pi(2k-1)x}{2l} = 0,$$

звідки маємо рівняння:

$$u_k''(t) + \frac{\pi^2a^2(2k-1)^2}{4l^2}u_k(t) = f_k(t).$$

Початкові умови для нього будуть такі:

$$u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(0)\sin\frac{\pi(2k-1)x}{2l} \quad \Leftrightarrow \quad u_k(0) = \frac{2}{l}\int\limits_0^l \phi(x)\sin\frac{\pi(2k-1)x}{2l}dx, \quad \text{аналогічно}$$

$$u_t(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k'(0)\sin\frac{\pi(2k-1)x}{2l} = \psi(x) \quad \Leftrightarrow \quad u_k'(0) = \frac{l}{2}\int\limits_0^l \psi(x)\sin\frac{\pi(2k-1)x}{2l}dx.$$

Після розв'язання ЗДР і знаходження $u_k(t)$ $\forall k \in \mathbb{N}$, розв'язок всієї задачі дається через

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t)X_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t)\sin\frac{\pi(2k-1)x}{2l}.$$

Знайдемо тепер розв'язок для конкретних $\phi(x) = \psi(x) = 0,\ F(x,t) = a^2$. Тоді

$$f_k(t) = \frac{2}{l}\int\limits_0^l F(x,t)\sin\frac{\pi(2k-1)x}{2l}dx = \frac{2}{l}\int\limits_0^l a^2\sin\frac{\pi(2k-1)x}{2l}dx =$$

$$= -\frac{2a^2}{l}\cdot\frac{2l}{\pi(2k-1)}\cos\frac{\pi(2k-1)x}{2l}\bigg|_0^l = \frac{4a^2}{\pi(2k-1)}.$$

Значить, треба знайти розв'язки рівнянь:

$$u_k''(t) + \frac{\pi^2a^2(2k-1)^2}{4l^2}u_k(t) = \frac{4a^2}{\pi(2k-1)}.$$

Оскільки $\phi(x) = \psi(x) = 0$, то $u_k(0) = u_k'(0) = 0$. Маємо диференціальне рівняння з постійними коефіцієнтами й вільним членом. Його характеристичне рівняння має комплексні корені, можемо пошукати частинний розв'язок неоднорідного рівняння у вигляді константи:

$$\tilde{u}_k(t) = \gamma_k \quad\Leftrightarrow\quad \gamma_k = \frac{16l^2}{\pi^3(2k-1)^3}.$$

Тому загальний розв'язок неоднорідного запишеться як

$$u_k(t) = \alpha_k\cos\frac{\pi a(2k-1)t}{2l} + \beta_k\sin\frac{\pi a(2k-1)t}{2l} + \frac{16l^2}{\pi^3(2k-1)^3},\ k\in\mathbb{N}.$$

З умов $u_k(0) = u_k'(0) = 0$ маємо:

$$\alpha_k + \frac{16l^2}{\pi^3(2k-1)^3} = 0 \quad\Rightarrow\quad \alpha_k = -\frac{16l^2}{\pi^3(2k-1)^3},$$
$$\beta_k\frac{\pi a(2k-1)}{2l} = 0 \quad\Rightarrow\quad \beta_k = 0.$$

Таким чином, маємо:

$$u_k(t) = \frac{16l^2}{\pi^3(2k-1)^3}\left(1-\cos\frac{\pi a(2k-1)t}{2l}\right) = \frac{32l^2}{\pi^3(2k-1)^3}\sin^2\frac{\pi a(2k-1)t}{4l}.$$

Тоді

$$u(x,t) = \frac{32l^2}{\pi^3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^3}\sin^2\frac{\pi a(2k-1)t}{4l}\cdot\sin\frac{\pi(2k-1)x}{2l}.$$

Відповідь: $u(x,t) = \frac{32l^2}{\pi^3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^3}\sin^2\frac{\pi a(2k-1)t}{4l}\cdot\sin\frac{\pi(2k-1)x}{2l}$.

Зауваження: при постановці інших крайових умов отримаємо інші задачі Штурма-Ліувілля:

1)

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, \\ X'(0) = X'(l) = 0, \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \lambda_k = \left(\frac{\pi k}{l}\right)^2,\ X_k(x) = \cos\frac{\pi kx}{l},$$

де $k = 0, 1, 2, \ldots$. Увага: тут точка $\lambda_0 = 0$ також є точкою спектру.

$$\|X_0\|^2 = l,\ \|X_k\|^2 = \frac{l}{2},\quad k\in\mathbb{N},$$

2)

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, \\ X'(0) = X(l) = 0, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \lambda_k = \left(\frac{\pi(2k-1)}{2l}\right)^2, \ X_k(x) = \cos\frac{\pi(2k-1)x}{2l}, \quad k \in \mathbb{N},$$

$$\|X_k\|^2 = \frac{l}{2}.$$

Приклад 5

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + t(x+1), \\ u_x(0,t) = t^2, \\ u(1,t) = t^2, \\ u(x,0) = 0, \end{cases}$$

Функція $U(x,t) = xt^2$ задовольняє граничні умови, тому представимо розв'язок як

$$u(x,t) = v(x,t) + U(x,t).$$

Тоді маємо задачу:

$$\begin{cases} v_t + 2xt = v_{xx} + t(x+1), \\ v_x(0,t) + t^2 = t^2, \ v(1,t) + t^2 = t^2, \\ v(x,0) + 0 = 0, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} v_t = v_{xx} + t(1-x), \\ v_x(0,t) = v(1,t) = 0, \\ v(x,0) = 0, \end{cases}$$

При розділенні змінних в однорідній задачі отримаємо задачу Штурма-Ліувілля:

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, \\ X'(0) = X(1) = 0, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \lambda_k = \left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right)^2, \ X_k(x) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right)x\right), \quad k = \overline{0, 1, \ldots}.$$

Значить, можна шукати розв'язок у вигляді

$$v(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} T_k(t) \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right)x\right)$$

Підставляємо його в $v_t = v_{xx} + t(1-x)$. Розкладемо спочатку $t(1-x)$ по $\{X_k(x)\}$:

$$t(1-x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(t) \cos\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right)x \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad t \cdot \int_0^1 (1-x)\cos\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right)x dx = f_k(t) \int_0^1 \left(\cos\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right)x\right)^2 dx \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{t}{\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right)^2} = f_k(t) \cdot \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad f_k(t) = \frac{2t}{\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right)^2}.$$

Тоді маємо задачу:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(T_k'(t)+\left(\frac{\pi}{2}+\pi k\right)^2 T_k(t)-\frac{2t}{\left(\frac{\pi}{2}+\pi k\right)^2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}+\pi k\right)x=0.$$

Початкова умова:

$$v(x,0)=\sum_{k=0}^{\infty}T_k(0)\cos\left(\frac{\pi}{2}+\pi k\right)x=0 \quad\Leftrightarrow\quad T_k(0)=0.$$

Отже, маємо:

$$\begin{cases} T_k'(t)+\left(\frac{\pi}{2}+\pi k\right)^2 T_k(t)=\dfrac{2t}{\left(\frac{\pi}{2}+\pi k\right)^2},\\ T_k(0)=0.\end{cases}$$

Загальний розв'язок однорідного рівняння:

$$\tilde{T}_k(t)=Ce^{-\left(\frac{\pi}{2}+\pi k\right)^2 t}.$$

Частинний розв'язок неоднорідного рівняння пошукаємо у вигляді $At+B$, тоді буде

$$A+\left(\frac{\pi}{2}+\pi k\right)^2(At+B)=\frac{2t}{\left(\frac{\pi}{2}+\pi k\right)^2}\quad\Leftrightarrow\quad A+\left(\frac{\pi}{2}+\pi k\right)^2 B+\left(\frac{\pi}{2}+\pi k\right)^2 tA=\frac{2t}{\left(\frac{\pi}{2}+\pi k\right)^2}\quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad A=\frac{2}{\left(\frac{\pi}{2}+\pi k\right)^4},\ B=\frac{-2}{\left(\frac{\pi}{2}+\pi k\right)^6}.$$

Значить загальний розв'язок неоднорідного рівняння:

$$T_k(t)=Ce^{-\left(\frac{\pi}{2}+\pi k\right)^2 t}+\frac{2t}{\left(\frac{\pi}{2}+\pi k\right)^4}-\frac{2}{\left(\frac{\pi}{2}+\pi k\right)^6}.$$

З умови $T_k(0)=0$ знаходимо $C=\frac{2}{\left(\frac{\pi}{2}+\pi k\right)^6}$. Тоді:

$$T_k(t)=\frac{2}{\left(\frac{\pi}{2}+\pi k\right)^6}\left(e^{-\left(\frac{\pi}{2}+\pi k\right)^2 t}-1\right)+\frac{2t}{\left(\frac{\pi}{2}+\pi k\right)^4}.$$

Відповідь: $u(x,t)=xt^2+\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{2}{\left(\frac{\pi}{2}+\pi k\right)^6}\left(e^{-\left(\frac{\pi}{2}+\pi k\right)^2 t}-1\right)+\frac{2t}{\left(\frac{\pi}{2}+\pi k\right)^4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}+\pi k\right)x.$

Приклад 6

$$\begin{cases} u_{tt}=u_{xx}-4u,\\ u(0,t)=u(1,t)=0,\\ u(x,0)=x^2-x,\\ u_t(x,0)=0,\end{cases}$$

Розв'язок шукатимемо у вигляді:

$$u(x,t) = X(x) \cdot T(t).$$

Тоді маємо

$$T(x)T''(t) = X''(x)T(t) - 4X(x)T(t),$$

ділимо на $X(x)T(t)$ і маємо:

$$\frac{T''(t)}{T(t)} + 4 = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda.$$

Тоді для $X(x)$ маємо:

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, \ 0 < x < 1, \\ X(0) = X(1) = 0, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \lambda_n = (\pi n)^2, \ X_n(x) = \sin(\pi n x), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Для $T(t)$ маємо:

$$T_n''(t) + (\lambda_n + 4)T_n(t) = 0,$$

оскільки $\lambda_n + 4 > 0$, то розв'язок буде (характеристичне рівняння $e^{\mu t} \to \mu^2 + (\lambda_n + 4) = 0$):

$$T_n(t) = C_n \sin \sqrt{(\pi n)^2 + 4}t + D_n \cos \sqrt{(\pi n)^2 + 4}t.$$

Тоді загальний розв'язок

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)X_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_n \sin \sqrt{(\pi n)^2 + 4}t + D_n \cos \sqrt{(\pi n)^2 + 4}t \right) \sin(\pi n x).$$

З початкових умов:

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin(\pi n x) = x^2 - x \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad D_n \cdot \int_0^1 (\sin(\pi n x))^2 dx = \int_0^1 (x^2 - x) \sin(\pi n x) dx \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad D_n \cdot \frac{1}{2} = \frac{2((-1)^n - 1)}{\pi^3 n^3} \quad \Leftrightarrow \quad D_n = \frac{4}{\pi^3 n^3}((-1)^n - 1) = \begin{cases} 0, \ n = 2k, \\ \dfrac{-8}{\pi^3 (2k+1)^3}, \ n = 2k+1, \end{cases}$$

$$u_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sqrt{(\pi n)^2 + 4} \sin(\pi n x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad C_n = 0.$$

Відповідь: $u(x,t) = -\frac{8}{\pi^3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^3} \cos\left(t\sqrt{\pi^2(2k+1)^2 + 4} \right) \sin(\pi(2k+1)x)$.

Приклад 7

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx},\ 0 < x < 1, \\ u(0,t) = 0, \\ u_x(1,t) + hu(1,t) = 0,\ h > 0, \\ u(x,0) = \phi(x). \end{cases}$$

Розділяємо змінні:

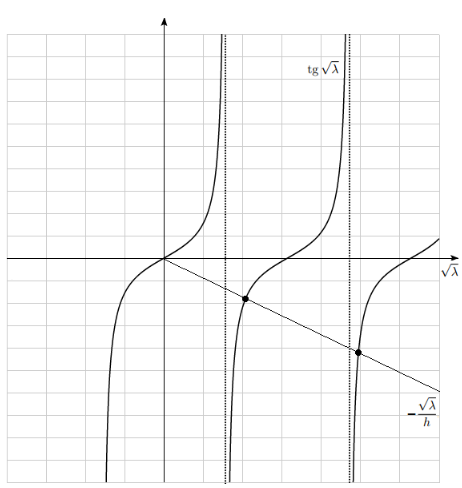
$$\frac{T'}{a^2 T} = \frac{X''}{X} = -\lambda,$$

тоді для $X(x)$ маємо:

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, \\ X(0) = 0, \\ X'(1) + hX(1) = 0. \end{cases}$$

Аналогічно, як і в найпростішому випадку, можна довести, що $\lambda > 0$. Та і якщо $\lambda < 0$, то $T(t)$ експоненційно зростає, що суперечить теплофізичній суті.

Тоді



$$\begin{aligned} &X(x) = C\sin\sqrt{\lambda}x + D\cos\sqrt{\lambda}x, \\ &X(0) = D \cdot 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad D = 0, \\ &X'(1) + hX(1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad C\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda} + hC\sin\sqrt{\lambda} = 0 \quad \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad \operatorname{tg}\sqrt{\lambda} = -\frac{\sqrt{\lambda}}{h}. \end{aligned}$$

Видно, що корені цього рівняння строго додатні, їх зліченна кількість і вони зростають. Позначимо їх через $\lambda_n,\ n \in \mathbb{N}$. Відповідно, власні функції $X_n(x) = \sin\sqrt{\lambda_n}x$.

Для $T(t)$ маємо:

$$T_n' + a^2\lambda_n T_n = 0 \quad \Leftrightarrow \quad T_n(t) = C_n e^{-a^2\lambda_n t}.$$

Тоді розв'язок буде:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-a^2\lambda_n t}\sin\left(x\sqrt{\lambda_n}\right).$$

Знайдемо C_n:

$$\int_0^1 \phi(x)\sin\left(x\sqrt{\lambda_n}\right)dx = C_n\cdot\int_0^1\left(\sin\left(x\sqrt{\lambda_n}\right)\right)^2dx,$$

$$\int_0^1 \sin^2\left(x\sqrt{\lambda_n}\right)dx = \frac{1}{2}\int_0^1\left(1-\cos\left(2x\sqrt{\lambda_n}\right)\right) = \frac{1}{2}-\frac{1}{2\cdot 2\cdot\sqrt{\lambda_n}}\sin\left(2\sqrt{\lambda_n}\cdot x\right)\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{2}-\frac{\sin\left(2\sqrt{\lambda_n}\right)}{4\sqrt{\lambda_n}} = \frac{1}{2}-\frac{\sin\sqrt{\lambda_n}\cos\sqrt{\lambda_n}}{2\sqrt{\lambda_n}} \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad C_n = \frac{2\sqrt{\lambda_n}}{\sqrt{\lambda_n}-\sin\sqrt{\lambda_n}\cos\sqrt{\lambda_n}}\int_0^1\phi(x)\sin\left(x\sqrt{\lambda_n}\right)dx.$$

Відповідь: $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n e^{-a^2\lambda_n t}\sin\left(x\sqrt{\lambda_n}\right)$, де C_n визначено формулою вище, а $\{\lambda_n\}, n\in\mathbb{N}$ — корені рівняння $\operatorname{tg}\sqrt{\lambda}=-\frac{\sqrt{\lambda}}{h}$.

Приклад 8

Знайти поперечні коливання прямокутної мембрани $\{0\le x\le p,\ 0\le y\le q\}$ із закріпленими краями, спричинені початковим відхиленням $\phi(x,y)$ та початковою швидкістю $\psi(x,y)$.

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2(u_{xx}+u_{yy}),\\ u(0,y,t)=u(p,y,t)=u(x,0,t)=u(x,q,t)=0,\\ u(x,y,0)=\phi(x,y),\\ u_t(x,y,0)=\psi(x,y).\end{cases}$$

Розділимо змінні:

$$u(x,y,t)=T(t)V(x,y).$$

Тоді

$$V(x,y)T''(t)=a^2T(t)\Delta V(x,y)\quad\Leftrightarrow\quad\frac{T''(t)}{a^2T(t)}=\frac{\Delta V(x,y)}{V(x,y)}=-\lambda.$$

Розглянемо

$$\frac{\Delta V}{V}=-\lambda\quad\Rightarrow\quad V_{xx}+V_{yy}=-\lambda V.$$

Покладемо $V(x,y)=X(x)Y(y)$, тоді

$$X''Y+XY''=-\lambda XY \;\Leftrightarrow\; \frac{X''}{X}+\frac{Y''}{Y}=-\lambda \;\Leftrightarrow\; \frac{X''}{X}=-\frac{Y''}{Y}-\lambda\equiv-\mu \;\Leftrightarrow\; \begin{cases}X''+\mu X=0,\\ Y''+\nu Y=0,\end{cases}$$

де $\nu=\lambda-\mu$.

$$X(x)=C_1\sin\sqrt{\mu}x+C_2\cos\sqrt{\mu}x,$$

з граничних умов $X(0) = X(p) = 0$ знаходимо:

$$\mu_n = \left(\frac{\pi n}{p}\right)^2, \quad X_n(x) = \sin\frac{\pi n x}{p}.$$

Аналогічно

$$Y'' + \nu Y = 0 \quad \Rightarrow \quad \nu_k = \frac{\pi k}{q}, \quad Y_k(y) = \sin\frac{\pi k y}{q}.$$

Тоді

$$\lambda_{nk} = \nu_k + \mu_n = \pi^2\left(\frac{n^2}{p^2} + \frac{k^2}{q^2}\right), \quad V_{nk}(x,y) = X_n(x)Y_k(y) = \sin\frac{\pi n x}{p}\cdot\sin\frac{\pi k y}{q}.$$

Дано, $T''_{nk} + a^2\lambda_{nk}T_{nk} = 0$, звідки маємо:

$$T_{nk}(t) = C_{nk}\sin\left(a\sqrt{\lambda_{nk}}t\right) + D_{nk}\cos\left(a\sqrt{\lambda_{nk}}t\right).$$

Тоді

$$u(x,y,t) = \sum_{n,k=1}^{\infty} T_{nk}(t)V_{nk}(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\left(C_{nk}\sin\left(a\sqrt{\lambda_{nk}}t\right) + D_{nk}\cos\left(a\sqrt{\lambda_{nk}}t\right)\right)\sin\frac{\pi n x}{p}\sin\frac{\pi k y}{q}.$$

З початкових умов маємо:

$$u(x,y,0) = \sum_{n,k=1}^{\infty} D_{nk}\sin\frac{\pi n x}{p}\sin\frac{\pi k y}{q} = \phi(x,y) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad D_{nk} = \frac{4}{pq}\int_0^p\int_0^q \phi(x,y)\sin\frac{\pi n x}{p}\sin\frac{\pi k y}{q}dxdy,$$

аналогічно

$$u_t(x,y,0) = \sum_{n,k=1}^{\infty} C_{nk}a\sqrt{\lambda_{nk}}\sin\frac{\pi n x}{p}\sin\frac{\pi k y}{q} = \psi(x,y) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad C_{nk} = \frac{4}{pqa\sqrt{\lambda_{nk}}}\int_0^p\int_0^q \psi(x,y)\sin\frac{\pi n x}{p}\sin\frac{\pi k y}{q}dxdy.$$

Підставляючи C_{nk} та D_{nk} у $u(x,y,t)$, отримаємо відповідь.

Відповідь: $u(x,y,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\left(C_{nk}\sin\left(a\sqrt{\lambda_{nk}}t\right) + D_{nk}\cos\left(a\sqrt{\lambda_{nk}}t\right)\right)\sin\frac{\pi n x}{p}\sin\frac{\pi k y}{q}$, де C_{nk} та D_{nk} визначені формулами вище.

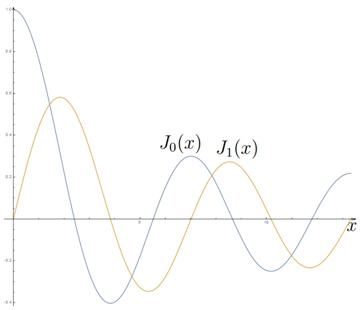
Практика: Функції Бесселя

1. Теоретичні відомості

Рівняння

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - v^2)y = 0$$

називають рівнянням Бесселя, а довільний його розв'язок (не нульовий) — циліндричною функцією.



Прикладом циліндричної функції може слугувати наступна функція:

$$J_v(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+v+1)\Gamma(k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+v}.$$

Це так звана функція Бесселя першого роду порядку v.

Властивості $J_v(x)$:

1) якщо μ_1 та μ_2 — дійсні корені рівняння

$$\alpha J_v(\mu) + \beta\mu J_v'(\mu) = 0, \quad \alpha \geq 0,\ \beta \geq 0,\ \alpha+\beta > 0,$$

то при $v > -1$ буде

$$\int_0^1 x J_v(\mu_1 x) J_v(\mu_2 x) dx = 0,$$

якщо $\mu_1^2 \neq \mu_2^2$.

Крім того,

$$\int_0^1 x J_v^2(\mu_i x) dx = \frac{1}{2}\left(J_v'(\mu_i)\right)^2 + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{v^2}{\mu_i^2}\right) J_v^2(\mu_i);$$

2) у попередньому співвідношенні $\alpha J_v(\mu) + \beta\mu J_v'(\mu) = 0$ за тих же умов корені всі дійсні й прості (крім, можливо, нуля). Значить, можна перенумерувати додатні корені:

$$\mu_1 < \mu_2 < \ldots$$

3) за тих же умов система $\left\{J_v(\mu_k^{(v)} x)\right\}$, $k \in \mathbb{N}$, утворює повну ортогональну систему в просторі $L_2(0;1)$ з вагою $\rho(x) = x$.

4) $J_{v+1}(x) + J_{v-1}(x) = \frac{2v}{x} J_v(x); \quad J_v'(x) = J_{v-1}(x) - \frac{v}{x} J_v(x) = \frac{v}{x} J_v(x) - J_{v+1}(x);$

5) якщо $J_v(\mu_i) = 0$ то $\int_0^1 x J_v^2(\mu_i x) dx = \frac{1}{2} J_{v+1}^2(\mu_i)$.

2. Приклади

Приклад 1

Знайти розподіл температури в нескінченному круглому циліндрі $0 \leq r \leq r_0$ при умові, що початкова температура $u(r,0) = u_0(1 - \frac{r^2}{r_0^2})$, а на поверхні циліндра підтримується нульова температура.

Нескінченність циліндра — не залежить від z, однорідність — не залежить від полярного кута ϕ. В циліндричних координатах:

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\phi\phi} + u_{zz}.$$

Тоді

$$\begin{cases} u_t = a^2\left(u_{rr} + \dfrac{1}{r}u_r\right), \ 0 < r < r_0, \\ u(r,0) = u_0\left(1 - \dfrac{r^2}{r_0^2}\right), \ u(r_0,t) = 0. \end{cases}$$

$$u(r,t) = R(r)T(t) \quad \Rightarrow \quad R(r)T'(t) = a^2\left(R''(r)T(t) + \frac{1}{r}R'(r)T(t)\right), \text{ звідки}$$

$$\frac{T'}{Ta^2} = \frac{R''(r)}{R(r)} + \frac{1}{r}\cdot\frac{R'(r)}{R(r)} = -\lambda \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} T' + a^2\lambda T = 0, \\ R'' + \dfrac{1}{r}R' + \lambda R = 0. \end{cases}$$

З граничних умов маємо $R(r_0) = 0$.

$$R'' + \frac{1}{r}R' + \lambda R = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r^2R'' + rR' + \lambda r^2 R = 0.$$

Зробимо заміну $\tilde{r} = \sqrt{\lambda}r$. Тоді, позначивши $\tilde{R}(\tilde{r}) \equiv R(r)$, маємо:

$$R' = \frac{dR}{dr} = \frac{dR}{d\tilde{r}}\cdot\frac{d\tilde{r}}{dr} = \sqrt{\lambda}\tilde{R}', \quad R'' = \lambda\tilde{R}'',$$

і тоді буде

$$\tilde{r}^2\tilde{R}'' + \tilde{r}\tilde{R}' + \tilde{r}^2\tilde{R} = 0,$$

його частинний розв'язок

$$\tilde{R}(\tilde{r}) = J_0(\tilde{r}) = J_0\left(\sqrt{\lambda}r\right).$$

Значить, рівнянню $r^2R'' + rR' + \lambda r^2R = 0$ задовольняє функція:

$$R(r) = J_0\left(\sqrt{\lambda}r\right).$$

Гранична умова

$$R(r_0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad J_0\left(r_0\sqrt{\lambda}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r_0\sqrt{\lambda} = \mu_n, \ n \in \mathbb{N},$$

де μ_n — корінь функції Бесселя $J_0(x)$: $J_0(\mu_n) = 0$. Значить,

$$\lambda = \lambda_n = \left(\frac{\mu_n}{r_0}\right)^2,$$

і відповідні їм власні функції:

$$R_n(r) = J_0\left(\frac{\mu_n}{r_0}r\right).$$

$$T_n' + a^2\lambda_n T_n = 0 \quad \Leftrightarrow \quad T_n(t) = C_n e^{-a^2\frac{\mu_n^2}{r_0^2}t}.$$

Значить,

$$u(r,t)=\sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-a^2\frac{\mu_n^2}{r_0^2}t}\cdot J_0\left(\frac{r\mu_n}{r_0}\right),$$

$$u(r,0)=\sum_{n=1}^{\infty} C_n J_0\left(\frac{r\mu_n}{r_0}\right)=u_0\left(1-\frac{r^2}{r_0^2}\right).$$

Тоді

$$C_n\int\limits_0^{r_0} r\cdot J_0^2\left(\mu_n\frac{r}{r_0}\right)dr=\int\limits_0^{r0} u_0\left(1-\frac{r^2}{r_0^2}\right)r\cdot J_0\left(\mu_n\cdot\frac{r}{r_0}\right)dr.$$

Тоді

$$\int\limits_0^{r0} r\cdot J_0^2\left(\mu_n\frac{r}{r_0}\right)dr=|r=r_0x|=r_0^2\int\limits_0^1 xJ_0^2(\mu_n x)dx=\frac{r_0^2}{2}J_1^2(\mu_n).$$

Для обчислення другого інтегралу скористаємося табличною формулою:

$$\int\limits_0^1 J_0(\mu_n x)x\left(1-x^2\right)dx=\frac{2}{\mu_n^2}J_2(\mu_n).$$

Тоді

$$\int\limits_0^{r_0} u_0\left(1-\left(\frac{r}{r_0}\right)^2\right)r\cdot J_0\left(\mu_n\cdot\frac{r}{r_0}\right)dr=|r=r_0x|=u_0\cdot r_0^2\int\limits_0^1 x(1-x^2)J_0(\mu_n x)dx=$$

$$=u_0r_0^2\frac{2}{\mu_n^2}J_2(\mu_n)=u_0r_0^2\cdot\frac{2}{\mu_n^2}\cdot\frac{2}{\mu_n}\cdot J_1(\mu_n),$$

звідки

$$C_n=\frac{8u_0}{\mu_n^3}\cdot\frac{1}{J_1(\mu_n)}.$$

Відповідь: $u(r,t)=8u_0\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\mu_n^3\cdot J_1(\mu_n)}\cdot e^{-\frac{a^2\mu_n^2}{r_0^2}t}\cdot J_0\left(\frac{r}{r_0}\mu_n\right)$, де $\{\mu_n\}$, $n\in\mathbb{N}$ — корені рівняння $J_0(\mu)=0$.

3. Теоретичні відомості (продовження)

Часто використовують *циліндричні функції другого роду (функції Неймана)*

$$N_v(x)=\frac{\cos(\pi v)\cdot J_v(x)-J_{-v}(x)}{\sin(\pi v)},\ v\notin\mathbb{Z};\quad N_n(x)\equiv\lim_{v\to n,\ v\notin\mathbb{Z}}N_v(x),\ n\in\mathbb{Z}.$$

Визначник Вронського

$$W\left[J_v(x);N_v(x)\right]=\frac{2}{\pi x}>0\quad\forall x>0,$$

значить $J_v(x)$ та $N_v(x)$ — лінійно незалежні. Тоді загальний розв'язок рівняння Бесселя можна представити як

$$y(x) = C_1 J_v(x) + C_2 N_v(x),$$

де $C_i = const$. $N_0(x) \sim \ln x$ та $N_v(x) \sim x^{-v}$ при $x \to 0$, тому в нулі $x = 0$ функція Неймана має особливість.

Циліндричні функції третього роду (функції Ханкеля):

$$H_v^{(1)}(x) = J_v(x) + iN_v(x),$$
$$H_v^{(2)}(x) = J_v(x) - iN_v(x).$$

Видно, що J_v та N_v є аналогами $\cos x$ та $\sin x$, а $H_v^{(1)}$ та $H_v^{(2)}$ — аналогами e^{ix} та e^{-ix}.