Практика: Класифікація рівнянь в частинних похідних

1. Теоретичні відомості

Маємо рівняння

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + F(x, y, u, u_x, u_y) = 0, \qquad (1)$$

для нього визначаємо дискримінант:

$$D \equiv a_{12}^2 - a_{11}a_{22},$$

при чому дискримінант визначаємо поточково ($D = D(x, y)$). Тоді тип рівняння (1) визначається в залежності від знаку D:

$D > 0$ — гіперболічного типу в точці (x, y);

$D = 0$ — параболічного типу в точці (x, y);

$D < 0$ — еліптичного типу в точці (x, y).

Характеристичні рівняння для (1):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} \pm \sqrt{D}}{a_{11}}. \qquad (2)$$

Тоді

а) $D > 0$, $\phi(x, y) = C$ та $\psi(x, y) = C$ — загальні інтеграли характеристичних рівнянь (2). Якщо виконати заміну змінних

$$\begin{aligned} \xi &= \phi(x, y), \\ \eta &= \psi(x, y), \end{aligned}$$

то зведемо рівняння (1) до першої канонічної гіперболічної форми:

$$u_{\xi\eta} = \Phi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta).$$

Якщо виконати заміну змінних

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\xi + \eta}{2}, \\ \beta &= \frac{\xi - \eta}{2}, \end{aligned}$$

то матимуть місце рівності:

$$\begin{aligned} u_\xi &= \frac{1}{2}(u_\alpha + u_\beta), \\ u_\eta &= \frac{1}{2}(u_\alpha - u_\beta), \\ u_{\xi\eta} &= \frac{1}{4}(u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta}), \end{aligned}$$

і тоді зведемо рівняння (1) до другої канонічної гіперболічної форми:

$$u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} = \Phi_1(\alpha, \beta, u, u_\alpha, u_\beta).$$

б) $D = 0$, $\phi(x, y) = C$ — єдиний загальний інтеграл характеристичного рівняння (2). Виконуючи заміну змінних

$$\begin{aligned} \xi &= \phi(x, y), \\ \eta &= \psi(x, y), \end{aligned}$$

де ψ — довільна лінійно незалежна від ϕ функція, зведемо рівняння (1) до канонічної параболічної форми:

$$\begin{aligned} u_{\eta\eta} &= \Phi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta) \\ &\text{чи} \\ u_{\xi\xi} &= \Phi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta)(\text{якщо взяти } \xi \text{ і } \eta \text{ навпаки}). \end{aligned}$$

в) $D < 0$, $\phi(x, y) = C$ та $\phi^*(x, y) = C$ — комплексно спряжені загальні інтеграли характеристичних рівнянь (2). Виконавши заміну змінних

$$\begin{aligned} \xi &= \Re\phi, \\ \eta &= \Im\phi, \end{aligned}$$

зведемо рівняння (1) до канонічної еліптичної форми:

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = \Phi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta).$$

2. Приклади

Приклад 1

$$x^2 u_{xx} - y^2 u_{yy} = 0.$$

Для нього:

$$a_{11} = x^2, a_{12} = 0, a_{22} = -y^2, \quad D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = x^2y^2, \quad D > 0, \text{якщо } x \neq 0, y \neq 0.$$

Рівняння характеристик:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} \pm \sqrt{D}}{a_{11}} = \pm\frac{\sqrt{x^2y^2}}{x^2} = \pm\frac{|x| \cdot |y|}{x^2} = \pm\frac{|y|}{|x|}.$$

Область гіперболічності — це об'єднання чотирьох квадрантів (без характеристичних осей), тому в кожному квадранті можна (і навіть слід) приводити рівняння окремо, розкриваючи відповідно модулі у рівнянні характеристик. Але там всюди стоїть знак „$\pm$“, тому з точністю до перестановки змінних нема різниці, якщо ці модулі взагалі зняти. Тому можемо виконати перетворення:

$$\frac{dy}{dx} = \pm\frac{y}{x} \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = \pm\frac{dx}{x} \Leftrightarrow \ln|y| = \pm\ln|x| + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Тоді

$$\text{або} \quad \ln|xy| = C, \quad \text{або} \quad \ln\left|\frac{y}{x}\right| = C,$$

звідки маємо загальні інтеграли

$$xy = C \quad \text{та} \quad \frac{y}{x} = C.$$

Поклавши $\xi = xy,\ \eta = \frac{y}{x}$, маємо:

$$\begin{aligned}
u_x &= u_\xi\xi_x + u_\eta\eta_x = u_\xi y + u_\eta(-\frac{y}{x^2}),\\
u_{xx} &= (u_\xi)_x y + u_\xi y_x + (u_\eta)_x(-\frac{y}{x^2}) + u_\eta\frac{2y}{x^3} = y(u_{\xi\xi}\xi_x + u_{\xi\eta}\eta_x) + 0 - \frac{y}{x^2}(u_{\eta\xi}\xi_x + u_{\eta\eta}\eta_x) + u_\eta\frac{2y}{x^3} =\\
&= y(u_{\xi\xi}y - u_{\xi\eta}\frac{y}{x^2}) - \frac{y}{x^2}(u_{\eta\xi}y - u_{\eta\eta}\frac{y}{x^2}) + u_\eta\frac{2y}{x^3} = u_{\xi\xi}y^2 + \frac{y^2}{x^4}u_{\eta\eta} - \frac{2y^2}{x^2}u_{\xi\eta} + u_\eta\frac{2y}{x^3},\\
u_y &= u_\xi\xi_y + u_\eta\eta_y = u_\xi x + u_\eta\frac{1}{x},\\
u_{yy} &= x(u_{\xi\xi}\xi_y + u_{\xi\eta}\eta_y) + \frac{1}{x}(u_{\eta\xi}\xi_y + u_{\eta\eta}\eta_y) = x(u_{\xi\xi}x + u_{\xi\eta}\frac{1}{x}) + \frac{1}{x}(u_{\eta\xi}x + u_{\eta\eta}\frac{1}{x}) = x^2u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + \frac{1}{x^2}u_{\eta\eta}.
\end{aligned}$$

Тоді, виконавши підстановку у початкове рівняння, приводимо до канонічної форми:

$$\begin{aligned}
&x^2u_{xx} - y^2u_{yy} = 0 \;\Leftrightarrow\; x^2y^2u_{\xi\xi} + \frac{y^2}{x^2}u_{\eta\eta} - 2y^2u_{\xi\eta} + \frac{2y}{x}u_\eta - x^2y^2u_{\xi\xi} - 2y^2u_{\xi\eta} - \frac{y^2}{x^2}u_{\eta\eta} = 0 \;\Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow\; -4y^2u_{\xi\eta} + \frac{2y}{x}u_\eta = 0 \;\Leftrightarrow\; u_{\xi\eta} - \frac{1}{2xy}u_\eta = 0 \;\Leftrightarrow\; u_{\xi\eta} - \frac{1}{2\xi}u_\eta = 0.
\end{aligned}$$

Можна і іншим способом. Наприклад, поклавши $\alpha = \frac{1}{2}(\xi + \eta) = \frac{1}{2}(xy + \frac{y}{x}),\ \beta = \frac{1}{2}(\xi - \eta) = \frac{1}{2}(xy + \frac{y}{x})$. Але можна загальні інтеграли брати і в їх початковому вигляді $\ln|y| \pm \ln|x| = C$. Тоді, поклавши $\xi = \ln|x|,\ \eta = \ln|y|$, маємо:

$$\begin{aligned}
u_x &= u_\xi\xi_x + u_\eta\eta_x = u_\xi\frac{1}{x} + 0,\\
u_{xx} &= -\frac{1}{x^2}u_\xi + \frac{1}{x}(u_{\xi\xi}\xi_x + u_{\xi\eta}\eta_x) = -\frac{1}{x^2}u_\xi + \frac{1}{x^2}u_{\xi\xi},\\
u_y &= u_\eta\frac{1}{y},\\
u_{yy} &= -\frac{1}{y^2}u_\eta + \frac{1}{y}(u_{\eta\xi}\xi_y + u_{\eta\eta}\eta_y) = -\frac{1}{y^2}u_\eta + \frac{1}{y^2}u_{\eta\eta}.
\end{aligned}$$

Тоді, виконавши підстановку у початкове рівняння, приводимо до канонічної форми:

$$x^2u_{xx} - y^2u_{yy} = 0 \;\Leftrightarrow\; -u_\xi + u_{\xi\xi} + u_\eta - u_{\eta\eta} = 0 \;\Leftrightarrow\; u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} + u_\eta - u_\xi = 0.$$

Відповідь: гіперболічне при $x^2y^2 > 0$: $u_{\xi\eta} - \frac{1}{2\xi}u_\eta = 0$ (при $\xi = xy, \eta = \frac{y}{x}$) або $u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} + u_\eta - u_\xi = 0$ (при $\xi = \ln|x|, \eta = \ln|y|$);
параболічне при $x = 0$ або $y = 0$: $u_{yy} = 0$ або $u_{xx} = 0$ відповідно;
при $x = y = 0$: $0 = 0$ — нічого класифікувати.