Практика: Класифікація рівнянь в частинних похідних

1. Теоретичні відомості

Маємо рівняння

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + F(x, y, u, u_x, u_y) = 0, \tag{1}$$

для нього визначаємо дискримінант:

$$D \equiv a_{12}^2 - a_{11}a_{22},$$

при чому дискримінант визначаємо поточково ($D = D(x, y)$). Тоді тип рівняння (1) визначається в залежності від знаку D:

$D > 0$ — гіперболічного типу в точці (x, y);

$D = 0$ — параболічного типу в точці (x, y);

$D < 0$ — еліптичного типу в точці (x, y).

Характеристичні рівняння для (1):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} \pm \sqrt{D}}{a_{11}}. \tag{2}$$

Тоді

а) $D > 0$, $\phi(x, y) = C$ та $\psi(x, y) = C$ — загальні інтеграли характеристичних рівнянь (2). Якщо виконати заміну змінних

$$\begin{aligned} \xi &= \phi(x, y), \\ \eta &= \psi(x, y), \end{aligned}$$

то зведемо рівняння (1) до першої канонічної гіперболічної форми:

$$u_{\xi\eta} = \Phi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta).$$

Якщо виконати заміну змінних

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\xi + \eta}{2}, \\ \beta &= \frac{\xi - \eta}{2}, \end{aligned}$$

то матимуть місце рівності:

$$\begin{aligned} u_\xi &= \frac{1}{2}(u_\alpha + u_\beta), \\ u_\eta &= \frac{1}{2}(u_\alpha - u_\beta), \\ u_{\xi\eta} &= \frac{1}{4}(u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta}), \end{aligned}$$

і тоді зведемо рівняння (1) до другої канонічної гіперболічної форми:

$$u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} = \Phi_1(\alpha, \beta, u, u_\alpha, u_\beta).$$

б) $D = 0$, $\phi(x, y) = C$ — єдиний загальний інтеграл характеристичного рівняння (2). Виконуючи заміну змінних

$$\begin{aligned} \xi &= \phi(x, y), \\ \eta &= \psi(x, y), \end{aligned}$$

де ψ — довільна лінійно незалежна від ϕ функція, зведемо рівняння (1) до канонічної параболічної форми:

$$\begin{aligned} u_{\eta\eta} &= \Phi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta) \\ &\text{чи} \\ u_{\xi\xi} &= \Phi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta)(\text{якщо взяти } \xi \text{ і } \eta \text{ навпаки}). \end{aligned}$$

в) $D < 0$, $\phi(x, y) = C$ та $\phi^*(x, y) = C$ — комплексно спряжені загальні інтеграли характеристичних рівнянь (2). Виконавши заміну змінних

$$\begin{aligned} \xi &= \Re\phi, \\ \eta &= \Im\phi, \end{aligned}$$

зведемо рівняння (1) до канонічної еліптичної форми:

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = \Phi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta).$$

2. Приклади

Приклад 1

$$x^2 u_{xx} - y^2 u_{yy} = 0.$$

Для нього:

$$a_{11} = x^2, a_{12} = 0, a_{22} = -y^2, \quad D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = x^2y^2, \quad D > 0, \text{якщо } x \neq 0, y \neq 0.$$

Рівняння характеристик:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} \pm \sqrt{D}}{a_{11}} = \pm\frac{\sqrt{x^2y^2}}{x^2} = \pm\frac{|x| \cdot |y|}{x^2} = \pm\frac{|y|}{|x|}.$$

Область гіперболічності — це об'єднання чотирьох квадрантів (без характеристичних осей), тому в кожному квадранті можна (і навіть слід) приводити рівняння окремо, розкриваючи відповідно модулі у рівнянні характеристик. Але там всюди стоїть знак „±“, тому з точністю до

перестановки змінних нема різниці, якщо ці модулі взагалі зняти. Тому можемо виконати перетворення:
$$\frac{dy}{dx} = \pm\frac{y}{x} \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = \pm\frac{dx}{x} \Leftrightarrow \ln|y| = \pm\ln|x| + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Тоді
$$\text{або} \quad \ln|xy| = C, \quad \text{або} \quad \ln\left|\frac{y}{x}\right| = C,$$
звідки маємо загальні інтеграли
$$xy = C \quad \text{та} \quad \frac{y}{x} = C.$$

Поклавши $\xi = xy,\ \eta = \frac{y}{x}$, маємо:

$$\begin{aligned}
u_x &= u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x = u_\xi y + u_\eta(-\frac{y}{x^2}),\\
u_{xx} =&(u_\xi)_x y + u_\xi y_x + (u_\eta)_x(-\frac{y}{x^2}) + u_\eta\frac{2y}{x^3} = y(u_{\xi\xi}\xi_x + u_{\xi\eta}\eta_x) + 0 - \frac{y}{x^2}(u_{\eta\xi}\xi_x + u_{\eta\eta}\eta_x) + u_\eta\frac{2y}{x^3} =\\
&= y(u_{\xi\xi}y - u_{\xi\eta}\frac{y}{x^2}) - \frac{y}{x^2}(u_{\eta\xi}y - u_{\eta\eta}\frac{y}{x^2}) + u_\eta\frac{2y}{x^3} = u_{\xi\xi}y^2 + \frac{y^2}{x^4}u_{\eta\eta} - \frac{2y^2}{x^2}u_{\xi\eta} + u_\eta\frac{2y}{x^3},\\
u_y &= u_\xi\xi_y + u_\eta\eta_y = u_\xi x + u_\eta\frac{1}{x},\\
u_{yy} &= x(u_{\xi\xi}\xi_y + u_{\xi\eta}\eta_y) + \frac{1}{x}(u_{\eta\xi}\xi_y + u_{\eta\eta}\eta_y) = x(u_{\xi\xi}x + u_{\xi\eta}\frac{1}{x}) + \frac{1}{x}(u_{\eta\xi}x + u_{\eta\eta}\frac{1}{x}) = x^2u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + \frac{1}{x^2}u_{\eta\eta}.
\end{aligned}$$

Тоді, виконавши підстановку у початкове рівняння, приводимо до канонічної форми:

$$\begin{aligned}
x^2u_{xx} - y^2u_{yy} = 0 \ \Leftrightarrow\ x^2y^2u_{\xi\xi} + \frac{y^2}{x^2}u_{\eta\eta} - 2y^2u_{\xi\eta} + \frac{2y}{x}u_\eta - x^2y^2u_{\xi\xi} - 2y^2u_{\xi\eta} - \frac{y^2}{x^2}u_{\eta\eta} = 0 \ \Leftrightarrow\\
\Leftrightarrow\ -4y^2u_{\xi\eta} + \frac{2y}{x}u_\eta = 0 \ \Leftrightarrow\ u_{\xi\eta} - \frac{1}{2xy}u_\eta = 0 \ \Leftrightarrow\ u_{\xi\eta} - \frac{1}{2\xi}u_\eta = 0.
\end{aligned}$$

Можна і іншим способом. Наприклад, поклавши $\alpha = \frac{1}{2}(\xi+\eta) = \frac{1}{2}(xy + \frac{y}{x}),\ \beta = \frac{1}{2}(\xi - \eta) = \frac{1}{2}(xy + \frac{y}{x})$. Але можна загальні інтеграли брати і в їх початковому вигляді $\ln|y| \pm \ln|x| = C$. Тоді, поклавши $\xi = \ln|x|,\ \eta = \ln|y|$, маємо:

$$\begin{aligned}
u_x &= u_\xi\xi_x + u_\eta\eta_x = u_\xi\frac{1}{x} + 0,\\
u_{xx} &= -\frac{1}{x^2}u_\xi + \frac{1}{x}(u_{\xi\xi}\xi_x + u_{\xi\eta}\eta_x) = -\frac{1}{x^2}u_\xi + \frac{1}{x^2}u_{\xi\xi},\\
u_y &= u_\eta\frac{1}{y},\\
u_{yy} &= -\frac{1}{y^2}u_\eta + \frac{1}{y}(u_{\eta\xi}\xi_y + u_{\eta\eta}\eta_y) = -\frac{1}{y^2}u_\eta + \frac{1}{y^2}u_{\eta\eta}.
\end{aligned}$$

Тоді, виконавши підстановку у початкове рівняння, приводимо до канонічної форми:

$$x^2u_{xx} - y^2u_{yy} = 0 \ \Leftrightarrow\ -u_\xi + u_{\xi\xi} + u_\eta - u_{\eta\eta} = 0 \ \Leftrightarrow\ u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} + u_\eta - u_\xi = 0.$$

Відповідь: гіперболічне при $x^2y^2 > 0$: $u_{\xi\eta} - \frac{1}{2\xi}u_\eta = 0$ (при $\xi = xy, \eta = \frac{y}{x}$) або
$u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} + u_\eta - u_\xi = 0$ (при $\xi = \ln|x|, \eta = \ln|y|$);
параболічне при $x = 0$ або $y = 0$: $u_{yy} = 0$ або $u_{xx} = 0$ відповідно;
при $x = y = 0$: $0 = 0$ — нічого класифікувати.

Приклад 2

$$(1+x^2)u_{xx} + (1+y^2)u_{yy} + yu_y = 0.$$

Для нього:

$$\begin{aligned}
&a_{11} = 1 + x^2, \quad a_{12} = 0, \quad a_{22} = 1 + y^2,\\
&D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = -(1+x^2)(1+y^2) < 0, \quad \text{при } (x;y) \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Рівняння всюди еліптичне. Рівняння характеристик:

$$\begin{aligned}
&\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} \pm \sqrt{D}}{a_{11}} = \frac{\pm i\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}}{1+x^2} = \pm i\frac{\sqrt{1+y^2}}{\sqrt{1+x^2}} \Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow \frac{dy}{\sqrt{1+y^2}} = \pm i\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} \Rightarrow\\
&\Rightarrow \ln\left|y + \sqrt{1+y^2}\right| = \pm i \ln\left|x + \sqrt{1+x^2}\right| + C.
\end{aligned}$$

Беремо дійсну й уявну частини загальних інтегралів:

$$\begin{cases}
\xi = \ln\left|x + \sqrt{1+x^2}\right|\\
\eta = \ln\left|y + \sqrt{1+y^2}\right|
\end{cases},$$

тоді маємо:

$$\begin{aligned}
&u_x = u_\xi \xi x + u_\eta \eta_x = u_\xi \frac{1}{\sqrt{1+x^2}},\\
&u_{xx} = -x(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}u_\xi + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}(u_{\xi\xi}\xi_x + u_{\xi\eta}\eta_x) = -x(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}u_\xi + \frac{u_{\xi\xi}}{1+x^2},
\end{aligned}$$

цілком аналогічно:

$$\begin{aligned}
&u_y = u_\eta \frac{1}{\sqrt{1+y^2}},\\
&u_{yy} = -y(1+y^2)^{-\frac{3}{2}}u_\eta + \frac{u_{\eta\eta}}{1+y^2}.
\end{aligned}$$

Тоді, підставляючи у початкове рівняння, маємо:

$$\begin{aligned}
&(1+x^2)u_{xx} + (1+y^2)u_{yy} + yu_y = 0 \Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow -x(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}u_\xi + u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} - y(1+y^2)^{-\frac{1}{2}}u_\eta + y(1+y^2)^{-\frac{1}{2}}u_\eta = 0 \Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} - x(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}u_\xi = 0,
\end{aligned}$$

оскільки $\xi = \ln\left|x + \sqrt{1+x^2}\right| = \mathtt{arsh}\, x$, то $x = \operatorname{sh}\xi$, тоді:

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{\operatorname{sh}\xi}{\sqrt{1+\operatorname{sh}^2\xi}} = \frac{\operatorname{sh}\xi}{\operatorname{ch}\xi} = \tanh\xi,$$

а тоді приводимо рівняння до виду:

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} - (\tanh\xi)u_\xi = 0.$$

Відповідь: еліптичне, $u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}-(\tanh\xi)u_\xi = 0$, (при $\xi = \ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right|,\ \eta = \ln\left|y+\sqrt{1+y^2}\right|$).

Приклад 3

$$y^2u_{xx} + 2yu_{xy} + u_{yy} = 0.$$

Для нього:

$$\begin{aligned} &a_{11} = y^2, \quad a_{12} = y, \quad a_{22} = 1,\\ &D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = y^2 - y^2\cdot 1 = 0, \quad \text{при } (x;y)\in\mathbb{R}. \end{aligned}$$

Рівняння всюди параболічне. Його рівняння характеристики:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12}\pm\sqrt{D}}{a_{11}} = \frac{y}{y^2} = \frac{1}{y} \quad \Leftrightarrow \quad ydy = dx,$$

а загальний інтеграл рівняння характеристики:

$$y^2 - 2x = C.$$

Взявши

$$\begin{cases} \xi = y^2 - 2x\\ \eta = y \end{cases},$$

маємо:

$$\begin{aligned} &u_x = u_\xi\xi_x + u_\eta\eta_x = -2u_\xi,\\ &u_{xx} = -2(u_{\xi\xi}\xi_x + u_{\xi\eta}\eta_x) = -2(-2u_{\xi\xi}) = 4u_{\xi\xi},\\ &u_{xy} = -2(u_{\xi\xi}\xi_y + u_{\xi\eta}\eta_y) = -2(u_{\xi\xi}\cdot 2y + u_{\xi\eta}),\\ &u_y = u_\xi\xi_y + u_\eta\eta_y = u_\xi\cdot 2y + u_\eta,\\ &u_{yy} = 2u_\xi + 2y(u_{\xi\xi}\xi_y + u_{\xi\eta}\eta_y) + u_{\eta\xi}\xi_y + u_{\eta\eta}\eta_y. \end{aligned}$$

Підставляючи у початкове рівняння, зводимо його до канонічного виду:

$$\begin{aligned} &y^2u_{xx} + 2yu_{xy} + u_{yy} = 0 \Leftrightarrow\\ \Leftrightarrow\ &4y^2u_{\xi\xi} - 4y(u_{\xi\xi}2y + u_{\xi\eta}) + 2u_\xi + 2y(u_{\xi\xi}2y + u_{\xi\eta}\cdot 1) + u_{\eta\xi}\cdot 2y + u_{\eta\eta}\cdot 1 = 0 \Leftrightarrow\\ \Leftrightarrow\ &4y^2u_{\xi\xi} - 8y^2u_{\xi\xi} - 4yu_{\xi\eta} + 2u_\xi + 4y^2u_{\xi\xi} + 2yu_{\xi\eta} + 2yu_{\eta\xi} + u_{\eta\eta} = 0 \Leftrightarrow\ u_{\eta\eta} + 2u_\xi = 0. \end{aligned}$$

Відповідь: параболічне всюди, $u_{\eta\eta} + 2u_\xi = 0$, (при $\xi = y^2 - 2x,\ \eta = y$).