

# Практика: Класифікація рівнянь в частинних похідних

## 1. Теоретичні відомості

Маємо рівняння

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + F(x, y, u, u_x, u_y) = 0, \quad (1)$$

для нього визначаємо дискримінант:

$$D \equiv a_{12}^2 - a_{11}a_{22},$$

при чому дискримінант визначаємо поточною ( $D = D(x, y)$ ). Тоді тип рівняння (1) визначається в залежності від знаку  $D$ :

$D > 0$  — гіперболічного типу в точці  $(x, y)$ ;

$D = 0$  — параболічного типу в точці  $(x, y)$ ;

$D < 0$  — еліптичного типу в точці  $(x, y)$ .

Характеристичні рівняння для (1):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} \pm \sqrt{D}}{a_{11}}. \quad (2)$$

Тоді

- а)  $D > 0$ ,  $\phi(x, y) = C$  та  $\psi(x, y) = C$  — загальні інтеграли характеристичних рівнянь (2).  
Якщо виконати заміну змінних

$$\begin{aligned} \xi &= \phi(x, y), \\ \eta &= \psi(x, y), \end{aligned}$$

то зведемо рівняння (1) до першої канонічної гіперболічної форми:

$$u_{\xi\eta} = \Phi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta).$$

Якщо виконати заміну змінних

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\xi + \eta}{2}, \\ \beta &= \frac{\xi - \eta}{2}, \end{aligned}$$

то матимуть місце рівності:

$$\begin{aligned} u_\xi &= \frac{1}{2}(u_\alpha + u_\beta), \\ u_\eta &= \frac{1}{2}(u_\alpha - u_\beta), \\ u_{\xi\eta} &= \frac{1}{4}(u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta}), \end{aligned}$$

і тоді зведемо рівняння (1) до другої канонічної гіперболічної форми:

$$u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} = \Phi_1(\alpha, \beta, u, u_\alpha, u_\beta).$$

б)  $D = 0$ ,  $\phi(x, y) = C$  — єдиний загальний інтеграл характеристичного рівняння (2). Виконуючи заміну змінних

$$\begin{aligned}\xi &= \phi(x, y), \\ \eta &= \psi(x, y),\end{aligned}$$

де  $\psi$  — довільна лінійно незалежна від  $\phi$  функція, зведемо рівняння (1) до канонічної параболічної форми:

$$\begin{aligned}u_{\eta\eta} &= \Phi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta) \\ \text{чи} \\ u_{\xi\xi} &= \Phi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta) \text{ (якщо взяти } \xi \text{ і } \eta \text{ навпаки)}.\end{aligned}$$

в)  $D < 0$ ,  $\phi(x, y) = C$  та  $\phi^*(x, y) = C$  — комплексно спряжені загальні інтеграли характеристичних рівнянь (2). Виконавши заміну змінних

$$\begin{aligned}\xi &= \Re\phi, \\ \eta &= \Im\phi,\end{aligned}$$

зведемо рівняння (1) до канонічної еліптичної форми:

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = \Phi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta).$$

## 2. Приклади

### Приклад 1

$$x^2 u_{xx} - y^2 u_{yy} = 0.$$

Для нього:

$$a_{11} = x^2, a_{12} = 0, a_{22} = -y^2, \quad D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = x^2y^2, \quad D > 0, \text{ якщо } x \neq 0, y \neq 0.$$

Рівняння характеристик:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} \pm \sqrt{D}}{a_{11}} = \pm \frac{\sqrt{x^2y^2}}{x^2} = \pm \frac{|x| \cdot |y|}{x^2} = \pm \frac{|y|}{|x|}.$$

Область гіперболічності — це об'єднання чотирьох квадрантів (без характеристичних осей), тому в кожному квадранті можна (і навіть слід) приводити рівняння окремо, розкриваючи відповідно модулі у рівнянні характеристик. Але там всюди стоїть знак „ $\pm$ “, тому з точністю до

перестановки змінних нема різниці, якщо ці модулі взагалі зняти. Тому можемо виконати перетворення:

$$\frac{dy}{dx} = \pm \frac{y}{x} \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = \pm \frac{dx}{x} \Leftrightarrow \ln |y| = \pm \ln |x| + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Тоді

$$\text{або} \quad \ln |xy| = C, \quad \text{або} \quad \ln \left| \frac{y}{x} \right| = C,$$

звідки маємо загальні інтеграли

$$xy = C \quad \text{та} \quad \frac{y}{x} = C.$$

Поклавши  $\xi = xy$ ,  $\eta = \frac{y}{x}$ , маємо:

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x = u_\xi y + u_\eta \left(-\frac{y}{x^2}\right),$$

$$\begin{aligned} u_{xx} &= (u_\xi)_x y + u_\xi y_x + (u_\eta)_x \left(-\frac{y}{x^2}\right) + u_\eta \frac{2y}{x^3} = y(u_{\xi\xi} \xi_x + u_{\xi\eta} \eta_x) + 0 - \frac{y}{x^2}(u_{\eta\xi} \xi_x + u_{\eta\eta} \eta_x) + u_\eta \frac{2y}{x^3} = \\ &= y(u_{\xi\xi} y - u_{\xi\eta} \frac{y}{x^2}) - \frac{y}{x^2}(u_{\eta\xi} y - u_{\eta\eta} \frac{y}{x^2}) + u_\eta \frac{2y}{x^3} = u_{\xi\xi} y^2 + \frac{y^2}{x^4} u_{\eta\eta} - \frac{2y^2}{x^2} u_{\xi\eta} + u_\eta \frac{2y}{x^3}, \end{aligned}$$

$$u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y = u_\xi x + u_\eta \frac{1}{x},$$

$$u_{yy} = x(u_{\xi\xi} \xi_y + u_{\xi\eta} \eta_y) + \frac{1}{x}(u_{\eta\xi} \xi_y + u_{\eta\eta} \eta_y) = x(u_{\xi\xi} x + u_{\xi\eta} \frac{1}{x}) + \frac{1}{x}(u_{\eta\xi} x + u_{\eta\eta} \frac{1}{x}) = x^2 u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + \frac{1}{x^2} u_{\eta\eta}.$$

Тоді, виконавши підстановку у початкове рівняння, приводимо до канонічної форми:

$$\begin{aligned} x^2 u_{xx} - y^2 u_{yy} &= 0 \Leftrightarrow x^2 y^2 u_{\xi\xi} + \frac{y^2}{x^2} u_{\eta\eta} - 2y^2 u_{\xi\eta} + \frac{2y}{x} u_\eta - x^2 y^2 u_{\xi\xi} - 2y^2 u_{\xi\eta} - \frac{y^2}{x^2} u_{\eta\eta} = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -4y^2 u_{\xi\eta} + \frac{2y}{x} u_\eta &= 0 \Leftrightarrow u_{\xi\eta} - \frac{1}{2xy} u_\eta = 0 \Leftrightarrow u_{\xi\eta} - \frac{1}{2\xi} u_\eta = 0. \end{aligned}$$

Можна і іншим способом. Наприклад, поклавши  $\alpha = \frac{1}{2}(\xi + \eta) = \frac{1}{2}(xy + \frac{y}{x})$ ,  $\beta = \frac{1}{2}(\xi - \eta) = \frac{1}{2}(xy - \frac{y}{x})$ . Але можна загальні інтеграли брати і в їх початковому вигляді  $\ln |y| \pm \ln |x| = C$ . Тоді, поклавши  $\xi = \ln |x|$ ,  $\eta = \ln |y|$ , маємо:

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x = u_\xi \frac{1}{x} + 0,$$

$$u_{xx} = -\frac{1}{x^2} u_\xi + \frac{1}{x}(u_{\xi\xi} \xi_x + u_{\xi\eta} \eta_x) = -\frac{1}{x^2} u_\xi + \frac{1}{x^2} u_{\xi\xi},$$

$$u_y = u_\eta \frac{1}{y},$$

$$u_{yy} = -\frac{1}{y^2} u_\eta + \frac{1}{y}(u_{\eta\xi} \xi_y + u_{\eta\eta} \eta_y) = -\frac{1}{y^2} u_\eta + \frac{1}{y^2} u_{\eta\eta}.$$

Тоді, виконавши підстановку у початкове рівняння, приводимо до канонічної форми:

$$x^2 u_{xx} - y^2 u_{yy} = 0 \Leftrightarrow -u_\xi + u_{\xi\xi} + u_\eta - u_{\eta\eta} = 0 \Leftrightarrow u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} + u_\eta - u_\xi = 0.$$

*Відповідь:* гіперболічне при  $x^2 y^2 > 0$ :  $u_{\xi\eta} - \frac{1}{2\xi} u_\eta = 0$  (при  $\xi = xy, \eta = \frac{y}{x}$ ) або  
 $u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} + u_\eta - u_\xi = 0$  (при  $\xi = \ln|x|, \eta = \ln|y|$ );  
 параболічне при  $x = 0$  або  $y = 0$ :  $u_{yy} = 0$  або  $u_{xx} = 0$  відповідно;  
 при  $x = y = 0$ :  $0 = 0$  — нічого класифікувати.

## Приклад 2

$$(1 + x^2)u_{xx} + (1 + y^2)u_{yy} + yu_y = 0.$$

Для нього:

$$a_{11} = 1 + x^2, \quad a_{12} = 0, \quad a_{22} = 1 + y^2, \\ D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = -(1 + x^2)(1 + y^2) < 0, \quad \text{при } (x; y) \in \mathbb{R}.$$

Рівняння всюди еліптичне. Рівняння характеристик:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} \pm \sqrt{D}}{a_{11}} = \frac{\pm i \sqrt{(1 + x^2)(1 + y^2)}}{1 + x^2} = \pm i \frac{\sqrt{1 + y^2}}{\sqrt{1 + x^2}} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{dy}{\sqrt{1 + y^2}} = \pm i \frac{dx}{\sqrt{1 + x^2}} \Rightarrow \\ \Rightarrow \ln \left| y + \sqrt{1 + y^2} \right| = \pm i \ln \left| x + \sqrt{1 + x^2} \right| + C.$$

Беремо дійсну й уявну частини загальних інтегралів:

$$\begin{cases} \xi = \ln \left| x + \sqrt{1 + x^2} \right| \\ \eta = \ln \left| y + \sqrt{1 + y^2} \right| \end{cases},$$

Тоді маємо:

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x = u_\xi \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}, \\ u_{xx} = -x(1 + x^2)^{-\frac{3}{2}} u_\xi + \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} (u_{\xi\xi} \xi_x + u_{\xi\eta} \eta_x) = -x(1 + x^2)^{-\frac{3}{2}} u_\xi + \frac{u_{\xi\xi}}{1 + x^2},$$

цілком аналогічно:

$$u_y = u_\eta \frac{1}{\sqrt{1 + y^2}}, \\ u_{yy} = -y(1 + y^2)^{-\frac{3}{2}} u_\eta + \frac{u_{\eta\eta}}{1 + y^2}.$$

Тоді, підставляючи у початкове рівняння, маємо:

$$(1 + x^2)u_{xx} + (1 + y^2)u_{yy} + yu_y = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -x(1 + x^2)^{-\frac{1}{2}} u_\xi + u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} - y(1 + y^2)^{-\frac{1}{2}} u_\eta + y(1 + y^2)^{-\frac{1}{2}} u_\eta = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} - x(1 + x^2)^{-\frac{1}{2}} u_\xi = 0,$$

оскільки  $\xi = \ln |x + \sqrt{1+x^2}| = \operatorname{arsh} x$ , то  $x = \operatorname{sh} \xi$ , тоді:

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{\operatorname{sh} \xi}{\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 \xi}} = \frac{\operatorname{sh} \xi}{\operatorname{ch} \xi} = \tanh \xi,$$

а тоді приводимо рівняння до виду:

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} - (\tanh \xi)u_{\xi} = 0.$$

*Відповідь:* еліптичне,  $u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} - (\tanh \xi)u_{\xi} = 0$ , (при  $\xi = \ln |x + \sqrt{1+x^2}|$ ,  $\eta = \ln |y + \sqrt{1+y^2}|$ ).

### Приклад 3

$$y^2 u_{xx} + 2y u_{xy} + u_{yy} = 0.$$

Для нього:

$$\begin{aligned} a_{11} &= y^2, & a_{12} &= y, & a_{22} &= 1, \\ D &= a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = y^2 - y^2 \cdot 1 = 0, & \text{при } (x; y) &\in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Рівняння всюди параболічне. Його рівняння характеристики:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} \pm \sqrt{D}}{a_{11}} = \frac{y}{y^2} = \frac{1}{y} \Leftrightarrow y dy = dx,$$

а загальний інтеграл рівняння характеристики:

$$y^2 - 2x = C.$$

Взявши

$$\begin{cases} \xi = y^2 - 2x \\ \eta = y \end{cases},$$

маємо:

$$\begin{aligned} u_x &= u_{\xi}\xi_x + u_{\eta}\eta_x = -2u_{\xi}, \\ u_{xx} &= -2(u_{\xi\xi}\xi_x + u_{\xi\eta}\eta_x) = -2(-2u_{\xi\xi}) = 4u_{\xi\xi}, \\ u_{xy} &= -2(u_{\xi\xi}\xi_y + u_{\xi\eta}\eta_y) = -2(u_{\xi\xi} \cdot 2y + u_{\xi\eta}), \\ u_y &= u_{\xi}\xi_y + u_{\eta}\eta_y = u_{\xi} \cdot 2y + u_{\eta}, \\ u_{yy} &= 2u_{\xi} + 2y(u_{\xi\xi}\xi_y + u_{\xi\eta}\eta_y) + u_{\eta\xi}\xi_y + u_{\eta\eta}\eta_y. \end{aligned}$$

Підставляючи у початкове рівняння, зводимо його до канонічного виду:

$$\begin{aligned} y^2 u_{xx} + 2y u_{xy} + u_{yy} &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 4y^2 u_{\xi\xi} - 4y(u_{\xi\xi}2y + u_{\xi\eta}) + 2u_{\xi} + 2y(u_{\xi\xi}2y + u_{\xi\eta} \cdot 1) + u_{\eta\xi} \cdot 2y + u_{\eta\eta} \cdot 1 &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 4y^2 u_{\xi\xi} - 8y^2 u_{\xi\xi} - 4yu_{\xi\eta} + 2u_{\xi} + 4y^2 u_{\xi\xi} + 2yu_{\xi\eta} + 2yu_{\eta\xi} + u_{\eta\eta} &= 0 \Leftrightarrow u_{\eta\eta} + 2u_{\xi} = 0. \end{aligned}$$

*Відповідь:* параболічне всюди,  $u_{\eta\eta} + 2u_{\xi} = 0$ , (при  $\xi = y^2 - 2x$ ,  $\eta = y$ ).

### 3. Домашнє завдання

$$1) \ u_{xx} + 2u_{xy} - 4u_{yy} + 2u_x + 3u_y = 0;$$

$$2) \ u_{xx} + 2u_{xy} - 3u_{yy} + 2u_x + 6u_y = 0;$$

$$3) \ yu_{xx} - xu_{yy} + u_x + yu_y = 0;$$

$$4) \ u_{xx} + xyu_{yy} = 0;$$

$$5) \ u_{xx} - 2\cos x \cdot u_{xy} - (3 + \sin^2 x)u_{yy} - yu_y = 0.$$