

Практика: Класифікація рівнянь в частинних похідних

1. Теоретичні відомості

Маємо рівняння

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + F(x, y, u, u_x, u_y) = 0, \quad (1)$$

для нього визначаємо дискримінант:

$$D \equiv a_{12}^2 - a_{11}a_{22},$$

при чому дискримінант визначаємо поточною ($D = D(x, y)$). Тоді тип рівняння (1) визначається в залежності від знаку D :

$D > 0$ — гіперболічного типу в точці (x, y) ;

$D = 0$ — параболічного типу в точці (x, y) ;

$D < 0$ — еліптичного типу в точці (x, y) .

Характеристичні рівняння для (1):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} \pm \sqrt{D}}{a_{11}}. \quad (2)$$

Тоді

- а) $D > 0$, $\phi(x, y) = C$ та $\psi(x, y) = C$ — загальні інтеграли характеристичних рівнянь (2).
Якщо виконати заміну змінних

$$\begin{aligned} \xi &= \phi(x, y), \\ \eta &= \psi(x, y), \end{aligned}$$

то зведемо рівняння (1) до першої канонічної гіперболічної форми:

$$u_{\xi\eta} = \Phi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta).$$

Якщо виконати заміну змінних

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\xi + \eta}{2}, \\ \beta &= \frac{\xi - \eta}{2}, \end{aligned}$$

то матимуть місце рівності:

$$\begin{aligned} u_\xi &= \frac{1}{2}(u_\alpha + u_\beta), \\ u_\eta &= \frac{1}{2}(u_\alpha - u_\beta), \\ u_{\xi\eta} &= \frac{1}{4}(u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta}), \end{aligned}$$

і тоді зведемо рівняння (1) до другої канонічної гіперболічної форми:

$$u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} = \Phi_1(\alpha, \beta, u, u_\alpha, u_\beta).$$

б) $D = 0$, $\phi(x, y) = C$ — єдиний загальний інтеграл характеристичного рівняння (2). Виконуючи заміну змінних

$$\begin{aligned}\xi &= \phi(x, y), \\ \eta &= \psi(x, y),\end{aligned}$$

де ψ — довільна лінійно незалежна від ϕ функція, зведемо рівняння (1) до канонічної параболічної форми:

$$\begin{aligned}u_{\eta\eta} &= \Phi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta) \\ \text{чи} \\ u_{\xi\xi} &= \Phi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta) \text{ (якщо взяти } \xi \text{ і } \eta \text{ навпаки)}.\end{aligned}$$

в) $D < 0$, $\phi(x, y) = C$ та $\phi^*(x, y) = C$ — комплексно спряжені загальні інтеграли характеристичних рівнянь (2). Виконавши заміну змінних

$$\begin{aligned}\xi &= \Re\phi, \\ \eta &= \Im\phi,\end{aligned}$$

зведемо рівняння (1) до канонічної еліптичної форми:

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = \Phi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta).$$

2. Приклади

Приклад 1

$$x^2 u_{xx} - y^2 u_{yy} = 0.$$

Для нього:

$$a_{11} = x^2, a_{12} = 0, a_{22} = -y^2, \quad D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = x^2y^2, \quad D > 0, \text{ якщо } x \neq 0, y \neq 0.$$

Рівняння характеристик:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} \pm \sqrt{D}}{a_{11}} = \pm \frac{\sqrt{x^2y^2}}{x^2} = \pm \frac{|x| \cdot |y|}{x^2} = \pm \frac{|y|}{|x|}.$$

Область гіперболічності — це об'єднання чотирьох квадрантів (без характеристичних осей), тому в кожному квадранті можна (і навіть слід) приводити рівняння окремо, розкриваючи відповідно модулі у рівнянні характеристик. Але там всюди стоїть знак „ \pm “, тому з точністю до

перестановки змінних нема різниці, якщо ці модулі взагалі зняти. Тому можемо виконати перетворення:

$$\frac{dy}{dx} = \pm \frac{y}{x} \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = \pm \frac{dx}{x} \Leftrightarrow \ln |y| = \pm \ln |x| + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Тоді

$$\text{або} \quad \ln |xy| = C, \quad \text{або} \quad \ln \left| \frac{y}{x} \right| = C,$$

звідки маємо загальні інтеграли

$$xy = C \quad \text{та} \quad \frac{y}{x} = C.$$

Поклавши $\xi = xy$, $\eta = \frac{y}{x}$, маємо:

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x = u_\xi y + u_\eta \left(-\frac{y}{x^2}\right),$$

$$\begin{aligned} u_{xx} &= (u_\xi)_x y + u_\xi y_x + (u_\eta)_x \left(-\frac{y}{x^2}\right) + u_\eta \frac{2y}{x^3} = y(u_{\xi\xi} \xi_x + u_{\xi\eta} \eta_x) + 0 - \frac{y}{x^2}(u_{\eta\xi} \xi_x + u_{\eta\eta} \eta_x) + u_\eta \frac{2y}{x^3} = \\ &= y(u_{\xi\xi} y - u_{\xi\eta} \frac{y}{x^2}) - \frac{y}{x^2}(u_{\eta\xi} y - u_{\eta\eta} \frac{y}{x^2}) + u_\eta \frac{2y}{x^3} = u_{\xi\xi} y^2 + \frac{y^2}{x^4} u_{\eta\eta} - \frac{2y^2}{x^2} u_{\xi\eta} + u_\eta \frac{2y}{x^3}, \end{aligned}$$

$$u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y = u_\xi x + u_\eta \frac{1}{x},$$

$$u_{yy} = x(u_{\xi\xi} \xi_y + u_{\xi\eta} \eta_y) + \frac{1}{x}(u_{\eta\xi} \xi_y + u_{\eta\eta} \eta_y) = x(u_{\xi\xi} x + u_{\xi\eta} \frac{1}{x}) + \frac{1}{x}(u_{\eta\xi} x + u_{\eta\eta} \frac{1}{x}) = x^2 u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + \frac{1}{x^2} u_{\eta\eta}.$$

Тоді, виконавши підстановку у початкове рівняння, приводимо до канонічної форми:

$$\begin{aligned} x^2 u_{xx} - y^2 u_{yy} &= 0 \Leftrightarrow x^2 y^2 u_{\xi\xi} + \frac{y^2}{x^2} u_{\eta\eta} - 2y^2 u_{\xi\eta} + \frac{2y}{x} u_\eta - x^2 y^2 u_{\xi\xi} - 2y^2 u_{\xi\eta} - \frac{y^2}{x^2} u_{\eta\eta} = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -4y^2 u_{\xi\eta} + \frac{2y}{x} u_\eta &= 0 \Leftrightarrow u_{\xi\eta} - \frac{1}{2xy} u_\eta = 0 \Leftrightarrow u_{\xi\eta} - \frac{1}{2\xi} u_\eta = 0. \end{aligned}$$

Можна і іншим способом. Наприклад, поклавши $\alpha = \frac{1}{2}(\xi + \eta) = \frac{1}{2}(xy + \frac{y}{x})$, $\beta = \frac{1}{2}(\xi - \eta) = \frac{1}{2}(xy - \frac{y}{x})$. Але можна загальні інтеграли брати і в їх початковому вигляді $\ln |y| \pm \ln |x| = C$. Тоді, поклавши $\xi = \ln |x|$, $\eta = \ln |y|$, маємо:

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x = u_\xi \frac{1}{x} + 0,$$

$$u_{xx} = -\frac{1}{x^2} u_\xi + \frac{1}{x}(u_{\xi\xi} \xi_x + u_{\xi\eta} \eta_x) = -\frac{1}{x^2} u_\xi + \frac{1}{x^2} u_{\xi\xi},$$

$$u_y = u_\eta \frac{1}{y},$$

$$u_{yy} = -\frac{1}{y^2} u_\eta + \frac{1}{y}(u_{\eta\xi} \xi_y + u_{\eta\eta} \eta_y) = -\frac{1}{y^2} u_\eta + \frac{1}{y^2} u_{\eta\eta}.$$

Тоді, виконавши підстановку у початкове рівняння, приводимо до канонічної форми:

$$x^2 u_{xx} - y^2 u_{yy} = 0 \Leftrightarrow -u_\xi + u_{\xi\xi} + u_\eta - u_{\eta\eta} = 0 \Leftrightarrow u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} + u_\eta - u_\xi = 0.$$

Відповідь: гіперболічне при $x^2 y^2 > 0$: $u_{\xi\eta} - \frac{1}{2\xi} u_\eta = 0$ (при $\xi = xy, \eta = \frac{y}{x}$) або
 $u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} + u_\eta - u_\xi = 0$ (при $\xi = \ln|x|, \eta = \ln|y|$);
 параболічне при $x = 0$ або $y = 0$: $u_{yy} = 0$ або $u_{xx} = 0$ відповідно;
 при $x = y = 0$: $0 = 0$ — нічого класифікувати.

Приклад 2

$$(1 + x^2)u_{xx} + (1 + y^2)u_{yy} + yu_y = 0.$$

Для нього:

$$a_{11} = 1 + x^2, \quad a_{12} = 0, \quad a_{22} = 1 + y^2, \\ D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = -(1 + x^2)(1 + y^2) < 0, \quad \text{при } (x; y) \in \mathbb{R}.$$

Рівняння всюди еліптичне. Рівняння характеристик:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} \pm \sqrt{D}}{a_{11}} = \frac{\pm i \sqrt{(1 + x^2)(1 + y^2)}}{1 + x^2} = \pm i \frac{\sqrt{1 + y^2}}{\sqrt{1 + x^2}} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{dy}{\sqrt{1 + y^2}} = \pm i \frac{dx}{\sqrt{1 + x^2}} \Rightarrow \\ \Rightarrow \ln \left| y + \sqrt{1 + y^2} \right| = \pm i \ln \left| x + \sqrt{1 + x^2} \right| + C.$$

Беремо дійсну й уявну частини загальних інтегралів:

$$\begin{cases} \xi = \ln \left| x + \sqrt{1 + x^2} \right| \\ \eta = \ln \left| y + \sqrt{1 + y^2} \right| \end{cases},$$

тоді маємо:

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x = u_\xi \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}, \\ u_{xx} = -x(1 + x^2)^{-\frac{3}{2}} u_\xi + \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} (u_{\xi\xi} \xi_x + u_{\xi\eta} \eta_x) = -x(1 + x^2)^{-\frac{3}{2}} u_\xi + \frac{u_{\xi\xi}}{1 + x^2},$$

цілком аналогічно:

$$u_y = u_\eta \frac{1}{\sqrt{1 + y^2}}, \\ u_{yy} = -y(1 + y^2)^{-\frac{3}{2}} u_\eta + \frac{u_{\eta\eta}}{1 + y^2}.$$

Тоді, підставляючи у початкове рівняння, маємо:

$$(1 + x^2)u_{xx} + (1 + y^2)u_{yy} + yu_y = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -x(1 + x^2)^{-\frac{1}{2}} u_\xi + u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} - y(1 + y^2)^{-\frac{1}{2}} u_\eta + y(1 + y^2)^{-\frac{1}{2}} u_\eta = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} - x(1 + x^2)^{-\frac{1}{2}} u_\xi = 0,$$

оскільки $\xi = \ln |x + \sqrt{1+x^2}| = \operatorname{arsh} x$, то $x = \operatorname{sh} \xi$, тоді:

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{\operatorname{sh} \xi}{\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 \xi}} = \frac{\operatorname{sh} \xi}{\operatorname{ch} \xi} = \tanh \xi,$$

а тоді приводимо рівняння до виду:

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} - (\tanh \xi)u_{\xi} = 0.$$

Відповідь: еліптичне, $u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} - (\tanh \xi)u_{\xi} = 0$, (при $\xi = \ln |x + \sqrt{1+x^2}|$, $\eta = \ln |y + \sqrt{1+y^2}|$).

Приклад 3

$$y^2 u_{xx} + 2y u_{xy} + u_{yy} = 0.$$

Для нього:

$$\begin{aligned} a_{11} &= y^2, & a_{12} &= y, & a_{22} &= 1, \\ D &= a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = y^2 - y^2 \cdot 1 = 0, & \text{при } (x; y) &\in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Рівняння всюди параболічне. Його рівняння характеристики:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} \pm \sqrt{D}}{a_{11}} = \frac{y}{y^2} = \frac{1}{y} \Leftrightarrow y dy = dx,$$

а загальний інтеграл рівняння характеристики:

$$y^2 - 2x = C.$$

Взявши

$$\begin{cases} \xi = y^2 - 2x \\ \eta = y \end{cases},$$

маємо:

$$\begin{aligned} u_x &= u_{\xi}\xi_x + u_{\eta}\eta_x = -2u_{\xi}, \\ u_{xx} &= -2(u_{\xi\xi}\xi_x + u_{\xi\eta}\eta_x) = -2(-2u_{\xi\xi}) = 4u_{\xi\xi}, \\ u_{xy} &= -2(u_{\xi\xi}\xi_y + u_{\xi\eta}\eta_y) = -2(u_{\xi\xi} \cdot 2y + u_{\xi\eta}), \\ u_y &= u_{\xi}\xi_y + u_{\eta}\eta_y = u_{\xi} \cdot 2y + u_{\eta}, \\ u_{yy} &= 2u_{\xi} + 2y(u_{\xi\xi}\xi_y + u_{\xi\eta}\eta_y) + u_{\eta\xi}\xi_y + u_{\eta\eta}\eta_y. \end{aligned}$$

Підставляючи у початкове рівняння, зводимо його до канонічного виду:

$$\begin{aligned} y^2 u_{xx} + 2y u_{xy} + u_{yy} &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 4y^2 u_{\xi\xi} - 4y(u_{\xi\xi}2y + u_{\xi\eta}) + 2u_{\xi} + 2y(u_{\xi\xi}2y + u_{\xi\eta} \cdot 1) + u_{\eta\xi} \cdot 2y + u_{\eta\eta} \cdot 1 &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 4y^2 u_{\xi\xi} - 8y^2 u_{\xi\xi} - 4yu_{\xi\eta} + 2u_{\xi} + 4y^2 u_{\xi\xi} + 2yu_{\xi\eta} + 2yu_{\eta\xi} + u_{\eta\eta} &= 0 \Leftrightarrow u_{\eta\eta} + 2u_{\xi} = 0. \end{aligned}$$

Відповідь: параболічне всюди, $u_{\eta\eta} + 2u_{\xi} = 0$, (при $\xi = y^2 - 2x$, $\eta = y$).

3. Домашнє завдання

- 1) $u_{xx} + 2u_{xy} - 4u_{yy} + 2u_x + 3u_y = 0;$
- 2) $u_{xx} + 2u_{xy} - 3u_{yy} + 2u_x + 6u_y = 0;$
- 3) $yu_{xx} - xu_{yy} + u_x + yu_y = 0;$
- 4) $u_{xx} + xyu_{yy} = 0;$
- 5) $u_{xx} - 2\cos x \cdot u_{xy} - (3 + \sin^2 x)u_{yy} - yu_y = 0.$

Практика: Метод Фур'є розділення змінних

1. Приклади

Приклад 1

Дано тонкий однорідний стержень $0 < x < l$, бічна поверхня якого ізолювана (теплоізоляція). Знайти закон розподілу температури в стержні, якщо кінці стержня підтримуються при нульовій температурі, а початкова температура $u|_{t=0} = u_0(x) = Ax(l-x)$, де $A = \text{const}$.

Маємо задачу:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & 0 < x < l, \\ u(0, t) = u(l, t) = 0, \\ u(x, 0) = Ax(l-x). \end{cases}$$

Методом Фур'є: $u(x, t) = X(x)T(t)$, тоді

$$XT' = a^2 TX'' \Leftrightarrow \frac{T'}{a^2 T} = \frac{X''}{X} = -\lambda,$$

звідки

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, \\ T' + \lambda a^2 T = 0, \end{cases}$$

Тоді маємо задачу Штурма-Ліувілля:

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, \\ X(0) = X(l) = 0, \end{cases}$$

звідки

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2, \quad X_n(x) = \sin \frac{\pi n x}{l}.$$

Тоді маємо

$$T'_n + \lambda_n a^2 T_n = 0 \quad \Leftrightarrow \quad T'_n + \left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 T_n = 0 \quad \Rightarrow \quad T_n = C_n e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t}.$$

Таким чином, маємо:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t} \sin \frac{\pi n x}{l}.$$

Початкова умова:

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{\pi n x}{l} = Ax(l - x).$$

Розкладаємо $Ax(l - x)$ в ряд Фур'є по системі $\left\{\sin \frac{\pi n x}{l}\right\}_{n=1}^{\infty}$. Множимо це на $\sin \frac{\pi m x}{l}$, $m \in \mathbb{N}$ і інтегруємо.

$$\begin{aligned} \int_0^l \sin \frac{\pi n x}{l} \cdot \sin \frac{\pi m x}{l} dx &= \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \frac{l}{2}, & m = n, \end{cases} \quad \text{тоді} \\ \frac{l}{2} C_n &= \int_0^l Ax(l - x) \sin \frac{\pi n x}{l} dx = -\frac{l}{\pi n} \int_0^l Ax(l - x) d\left(\cos \frac{\pi n x}{l}\right) = \\ &= \frac{l}{\pi n} \left(-Ax(l - x) \cos \frac{\pi n x}{l} \Big|_0^l + \int_0^l \cos \frac{\pi n x}{l} d(Ax(l - x)) \right) = \frac{lA}{\pi n} \int_0^l (l - 2x) \cos \frac{\pi n x}{l} dx = \\ &= \frac{lA}{\pi n} \cdot \frac{l}{\pi n} \int_0^l (l - 2x) d\left(\sin \frac{\pi n x}{l}\right) = \frac{Al^2}{\pi^2 n^2} \left((l - 2x) \sin \frac{\pi n x}{l} \Big|_0^l + 2 \int_0^l \sin \frac{\pi n x}{l} dx \right) = \\ &= \frac{2Al^3}{\pi^3 n^3} \left(-\cos \frac{\pi n x}{l} \Big|_0^l \right) = \frac{2Al^3}{\pi^3 n^3} (1 - (-1)^n) = \begin{cases} 0, & n = 2k, \\ \frac{4Al^3}{\pi^3 (2k + 1)^3}, & n = 2k + 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Значить,

$$C_n = \begin{cases} 0, & n = 2k, \\ \frac{8Al^2}{\pi^3 (2k + 1)^3}, & n = 2k + 1. \end{cases}$$

Тоді маємо:

$$u(x, t) = \frac{8Al^2}{\pi^3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k + 1)^3} e^{-\left(\frac{\pi(2k+1)a}{l}\right)^2 t} \cdot \sin \frac{\pi(2k + 1)x}{l}.$$

$$\text{Відповідь: } u(x, t) = \frac{8Al^2}{\pi^3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^3} e^{-\left(\frac{\pi(2k+1)a}{l}\right)^2 t} \sin \frac{\pi(2k+1)x}{l}.$$

Зауваження: якщо, наприклад, на кінець $x = l$ подається зовні тепловий потік, то умова пишеться так:

$$u_x(l, t) \equiv u_x|_{x=l} = q(t);$$

якщо ж $q(t) \equiv 0$, то кінець $x = l$ теплоізований. Якщо ж сказано, що на кінці $x = l$ йде теплообмін з оточуючим середовищем, то умова пишеться приблизно так:

$$(u_x + hu)|_{x=l} = hu_0,$$

де h — коефіцієнт теплообміну, u_0 — температура оточуючого середовища; якщо сказано, що є вільний теплообмін ($u_0 = 0$), тоді просто маємо $(u_x + hu)|_{x=l} = 0$.

Література

- [1] Владимиров В.С. — Сборник задач по уравнениям математической физики.
 [2] Очак Ю.С. — Методы математической физики.
 [3] Будяк, Самарский, Тихонов — Сборник задач по математической физике.

Приклад 2

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} - 1, & 0 < x < 1, \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, \\ u(x, 0) = 2x^2 - 2x. \end{cases}$$

Спочатку розв'язуємо (принаймні, починаємо розв'язувати) задачу з однорідною правою частиною:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & 0 < x < 1, \\ u(0, t) = u(1, t) = 0. \end{cases}$$

Розділяючи змінні в однорідній задачі

$$u(x, t) = X(x)T(t),$$

приходимо до задачі Штурма-Ліувілля:

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, \\ X(0) = X(1) = 0, \end{cases}$$

звідки

$$\lambda_n = (\pi n)^2, \quad X_n(x) = \sin(\pi n x), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Тоді розв'язок вихідної неоднорідної задачі шукаємо у вигляді ряду

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) X_n(x)$$

по системі власних функцій $\{X_n(x) = \sin(\pi n x)\}$ задачі Штурма-Ліувілля для відповідної однорідної задачі. Розкладемо праву частину за цією системою функцій:

$$\begin{aligned} -1 = \sum_{n=1}^{\infty} f_n X_n(x), \quad \text{маємо} \quad \int_0^1 (-1) \sin(\pi n x) dx = f_n \cdot \frac{1}{2}, \quad \text{звідки} \\ \frac{(-1)^n - 1}{\pi n} = f_n \cdot \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad f_n = \frac{2 \cdot ((-1)^n - 1)}{\pi n}. \end{aligned}$$

Тоді, підставивши заготовку в вихідне рівняння, матимемо:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} T'_n(t) X_n(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) X''_n(x) + \sum_{n=1}^{\infty} f_n X_n(x) \quad \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (T'_n(t) + (\pi n)^2 T_n(t) - f_n) \sin(\pi n x) &= 0. \end{aligned}$$

З початкової умови маємо:

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \sum_{n=1}^{\infty} T_n(0) X_n(x) = 2x^2 - 2x \quad \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow T_n(0) \cdot \frac{1}{2} &= \int_0^1 (2x^2 - 2x) \sin(\pi n x) dx = 4 \frac{(-1)^n - 1}{\pi^3 n^3} \quad \Leftrightarrow \\ T_n(0) &= \frac{8 \cdot ((-1)^n - 1)}{\pi^3 n^3}. \end{aligned}$$

Тоді маємо $\forall n \in \mathbb{N}$ рівняння:

$$\begin{cases} T'_n(t) + (\pi n)^2 T_n(t) - f_n = 0, \\ T_n(0) = \frac{8 \cdot ((-1)^n - 1)}{\pi^3 n^3}. \end{cases}$$

Рівняння розв'язуємо методом варіації постійної.

$$T'_n(t) = -(\pi n)^2 T_n(t) \quad \Leftrightarrow \quad T_n(t) = C_n e^{-(\pi n)^2 t}.$$

Припускаємо, що $C_n = C_n(t)$, тоді $T_n(t) = C_n(t) e^{-(\pi n)^2 t}$, звідки

$$\begin{aligned} C'_n(t) e^{-(\pi n)^2 t} - C_n(t) (\pi n)^2 e^{-(\pi n)^2 t} + (\pi n)^2 C_n(t) e^{-(\pi n)^2 t} - f_n &= 0 \quad \Leftrightarrow \quad C'_n(t) e^{-(\pi n)^2 t} = f_n, \text{ тоді} \\ C'_n(t) &= f_n \cdot e^{(\pi n)^2 t} \quad \Leftrightarrow \quad C_n(t) = \frac{f_n}{(\pi n)^2} e^{(\pi n)^2 t} + C. \end{aligned}$$

Значить, загальний розв'язок неоднорідного звичайного ДР:

$$T_n(t) = C_n(t) e^{-(\pi n)^2 t} = \frac{f_n}{(\pi n)^2} + C e^{-(\pi n)^2 t}.$$

З початкової умови:

$$\frac{8 \cdot ((-1)^n - 1)}{(\pi n)^3} = \frac{2 \cdot ((-1)^n - 1)}{(\pi n)^3} + C \cdot 1 \quad \Leftrightarrow \quad C = \frac{6 \cdot ((-1)^n - 1)}{(\pi n)^3}.$$

Значить,

$$T_n(t) = \frac{2 \cdot ((-1)^n - 1)}{(\pi n)^3} + \frac{6 \cdot ((-1)^n - 1)}{(\pi n)^3} e^{-(\pi n)^2 t}.$$

При $n = 2k$ буде $T_n(t) = 0$, тому розглядаємо при $n = 2k + 1$. Тоді остаточно:

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{-4}{(\pi(2k+1))^3} - \frac{12}{(\pi(2k+1))^3} e^{-(\pi(2k+1))^2 t} \right) \sin(\pi(2k+1)x) \quad \text{або ж}$$

$$u(x, t) = \frac{-4}{\pi^3} \sum_{k=0}^{\infty} \left(1 + 3e^{-(\pi(2k+1))^2 t} \right) \frac{\sin(\pi(2k+1)x)}{(2k+1)^3}.$$

Відповідь: $u(x, t) = \frac{-4}{\pi^3} \sum_{k=0}^{\infty} \left(1 + 3e^{-(\pi(2k+1))^2 t} \right) \frac{\sin(\pi(2k+1)x)}{(2k+1)^3}.$

Приклад 3

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + x, & 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ u(0, t) = t, \quad u(1, t) = 2t + 1, \\ u(x, 0) = 2x^2 - x. \end{cases}$$

Шукаємо розв'язок у вигляді

$$u(x, t) = v(x, t) + U(x, t),$$

де $v(x, t)$ — нова невідома функція, а $U(x, t)$ — підібрана так, щоб задовольняти неоднорідні граничні умови, тобто $U(0, t) = t$, $U(1, t) = 2t + 1$. Якщо треба таку $U(x, t)$, щоб $U(0, t) = \mu_1(t)$, $U(1, t) = \mu_2(t)$, то можна взяти

$$U(x, t) = \mu_1(t) + (\mu_2(t) - \mu_1(t)) \frac{x}{l}.$$

Тоді, в нашому випадку отримуємо:

$$U(x, t) = t + (2t + 1 - t) \frac{x}{1} = t + (t + 1)x.$$

Значить, маємо представлення

$$u(x, t) = v(x, t) + t + (t + 1)x.$$

Підставляємо в задачу:

$$u_t = u_{xx} + x \quad \Leftrightarrow \quad v_t + 1 + x = v_{xx} + x \quad \Leftrightarrow \quad v_t = v_{xx} - 1.$$

Граничні умови:

$$\begin{aligned} u(0, t) = t & \Leftrightarrow v(0, t) + t + 0 = t & \Leftrightarrow v(0, t) = 0; \\ u(1, t) = 2t + 1 & \Leftrightarrow v(1, t) + t + t + 1 = 2t + 1 & \Leftrightarrow v(1, t) = 0. \end{aligned}$$

Початкова умова:

$$u(x, 0) = 2x^2 - x \quad \Leftrightarrow \quad v(x, 0) + x = 2x^2 - x \quad \Leftrightarrow \quad v(x, 0) = 2x^2 - 2x.$$

Значить, маємо нову задачу відносно $v(x, t)$, але з однорідними граничними умовами:

$$\begin{cases} v_t = v_{xx} - 1, & 0 < x < 1, \ t > 0, \\ v(0, t) = v(1, t) = 0, \\ v(x, 0) = 2x^2 - 2x. \end{cases}$$

Ця задача була розв'язана в попередньому прикладі, тому можемо відразу виписати розв'язок:

$$u(x, t) = t + (t + 1)x - \frac{4}{\pi^3} \sum_{k=0}^{\infty} \left(1 + 3e^{-(\pi(2k+1))^2 t} \right) \frac{\sin(\pi(2k+1)x)}{(2k+1)^3}.$$

$$\text{Відповідь: } u(x, t) = t + (t + 1)x - \frac{4}{\pi^3} \sum_{k=0}^{\infty} \left(1 + 3e^{-(\pi(2k+1))^2 t} \right) \frac{\sin(\pi(2k+1)x)}{(2k+1)^3}.$$

Зауваження: при інших неоднорідних граничних умовах можливі інші функції заміни $U(x, t)$. Наприклад,

$$\begin{aligned} \text{для } u_x(0, t) = \alpha(t), \ u_x(l, t) = \beta(t) \quad \text{підійде заміна } U(x, t) = \alpha(t)x + (\beta(t) - \alpha(t))\frac{x^2}{2l}; \\ \text{при } u(0, t) = \alpha(t), \ u_x(l, t) = \beta(t) \quad \text{можна брати } U(x, t) = \alpha(t) + \beta(t)\frac{x^2}{2l} \quad \text{і т.д.} \end{aligned}$$

У випадку більш загальних неоднорідних умов в якості функції $U(x, t)$, що задовольняє граничні умови, можна спробувати взяти $U(x, t) = a(t) + b(t)x + c(t)x^2$, а потім визначити відповідні коефіцієнти $a(t), b(t), c(t)$. Нам підійде довільна така $U(x, t)$, лише б вона задовольняла граничні умови.

Приклад 4

Знайти форму $u(x, t)$ закріпленої на кінці $x = 0$ однорідної струни, правий кінець має горизонтальну дотичну, і на струну діє зовнішня сила з щільністю $F(x, t) \neq 0$. В початковий момент $t = 0$ форма струни визначається через $\phi(x)$, а швидкість — через $\psi(x)$. Знайти $u(x, t)$ за умов $\phi(x) = \psi(x) = 0$, а $F(x, t) = a^2$.

Загальна постановка задачі:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x, t), & 0 < x < l, \ t > 0, \\ u(0, t) = 0, \ \frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = 0, \\ u(x, 0) = \phi(x), \ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \psi(x). \end{cases}$$

Знайдемо спочатку власні функції однорідного рівняння

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, \\ u(0, t) = u_x(l, t) = 0. \end{cases}$$

Покладемо

$$u(x, t) = X(x) \cdot T(t),$$

тоді, розділяючи змінні, маємо:

$$\frac{T''}{a^2 T} = \frac{X''}{X} = -\lambda,$$

звідки

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, \\ X(0) = X'(l) = 0. \end{cases}$$

Знаходимо власні функції і значення:

$$\lambda_k = \left(\frac{\pi(2k-1)}{2l} \right)^2, \quad X_k(x) = \sin \frac{\pi(2k-1)x}{2l}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Розкладемо $F(x, t)$ по $\{X_k(x)\}$:

$$\begin{aligned} F(x, t) &= \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \sin \frac{\pi(2k-1)x}{2l}, \quad \text{тоді} \quad \int_0^l F(x, t) \sin \frac{\pi(2k-1)x}{2l} dx = f_k(t) \cdot \frac{l}{2}, \\ \text{бо} \quad \int_0^l \sin^2 \frac{\pi(2k-1)x}{2l} dx &= \frac{l}{2}, \quad \text{звідки} \quad f_k(t) = \frac{2}{l} \int_0^l F(x, t) \sin \frac{\pi(2k-1)x}{2l} dx. \end{aligned}$$

Шукаємо розв'язок неоднорідного рівняння у вигляді

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) X_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) \sin \frac{\pi(2k-1)x}{2l}.$$

Підставивши його в рівняння $u_{tt} = a^2 u_{xx} + F(x, t)$, маємо:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(u_k''(t) + \frac{\pi^2 a^2 (2k-1)^2}{4l^2} u_k(t) - f_k(t) \right) \sin \frac{\pi(2k-1)x}{2l} = 0,$$

звідки маємо рівняння:

$$u_k''(t) + \frac{\pi^2 a^2 (2k-1)^2}{4l^2} u_k(t) = f_k(t).$$

Початкові умови для нього будуть такі:

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \sum_{k=1}^{\infty} u_k(0) \sin \frac{\pi(2k-1)x}{2l} \quad \Leftrightarrow \quad u_k(0) = \frac{2}{l} \int_0^l \phi(x) \sin \frac{\pi(2k-1)x}{2l} dx, \quad \text{аналогічно} \\ u_t(x, 0) &= \sum_{k=1}^{\infty} u_k'(0) \sin \frac{\pi(2k-1)x}{2l} = \psi(x) \quad \Leftrightarrow \quad u_k'(0) = \frac{l}{2} \int_0^l \psi(x) \sin \frac{\pi(2k-1)x}{2l} dx. \end{aligned}$$

Після розв'язання ЗДР і знаходження $u_k(t) \forall k \in \mathbb{N}$, розв'язок всієї задачі дається через

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) X_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) \sin \frac{\pi(2k-1)x}{2l}.$$

Знайдемо тепер розв'язок для конкретних $\phi(x) = \psi(x) = 0$, $F(x, t) = a^2$. Тоді

$$\begin{aligned} f_k(t) &= \frac{2}{l} \int_0^l F(x, t) \sin \frac{\pi(2k-1)x}{2l} dx = \frac{2}{l} \int_0^l a^2 \sin \frac{\pi(2k-1)x}{2l} dx = \\ &= -\frac{2a^2}{l} \cdot \frac{2l}{\pi(2k-1)} \cos \frac{\pi(2k-1)x}{2l} \Big|_0^l = \frac{4a^2}{\pi(2k-1)}. \end{aligned}$$

Значить, треба знайти розв'язки рівнянь:

$$u_k''(t) + \frac{\pi^2 a^2 (2k-1)^2}{4l^2} u_k(t) = \frac{4a^2}{\pi(2k-1)}.$$

Оскільки $\phi(x) = \psi(x) = 0$, то $u_k(0) = u_k'(0) = 0$. Маємо диференціальне рівняння з постійними коефіцієнтами й вільним членом. Його характеристичне рівняння має комплексні корені, можемо пошукати частинний розв'язок неоднорідного рівняння у вигляді константи:

$$\tilde{u}_k(t) = \gamma_k \quad \Leftrightarrow \quad \gamma_k = \frac{16l^2}{\pi^3(2k-1)^3}.$$

Тому загальний розв'язок неоднорідного запишеться як

$$u_k(t) = \alpha_k \cos \frac{\pi a(2k-1)t}{2l} + \beta_k \sin \frac{\pi a(2k-1)t}{2l} + \frac{16l^2}{\pi^3(2k-1)^3}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

З умов $u_k(0) = u_k'(0) = 0$ маємо:

$$\begin{aligned} \alpha_k + \frac{16l^2}{\pi^3(2k-1)^3} &= 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_k = -\frac{16l^2}{\pi^3(2k-1)^3}, \\ \beta_k \frac{\pi a(2k-1)}{2l} &= 0 \quad \Rightarrow \quad \beta_k = 0. \end{aligned}$$

Таким чином, маємо:

$$u_k(t) = \frac{16l^2}{\pi^3(2k-1)^3} \left(1 - \cos \frac{\pi a(2k-1)t}{2l} \right) = \frac{32l^2}{\pi^3(2k-1)^3} \sin^2 \frac{\pi a(2k-1)t}{4l}.$$

Тоді

$$u(x, t) = \frac{32l^2}{\pi^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^3} \sin^2 \frac{\pi a(2k-1)t}{4l} \cdot \sin \frac{\pi(2k-1)x}{2l}.$$

$$\text{Відповідь: } u(x, t) = \frac{32l^2}{\pi^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^3} \sin^2 \frac{\pi a(2k-1)t}{4l} \cdot \sin \frac{\pi(2k-1)x}{2l}.$$

Зауваження: при постановці інших крайових умов отримаємо інші задачі Штурма-Ліувілля:

1)

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, \\ X'(0) = X'(l) = 0, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \lambda_k = \left(\frac{\pi k}{l} \right)^2, \quad X_k(x) = \cos \frac{\pi k x}{l},$$

де $k = 0, 1, 2, \dots$. Увага: тут точка $\lambda_0 = 0$ також є точкою спектру.

$$\|X_0\|^2 = l, \quad \|X_k\|^2 = \frac{l}{2}, \quad k \in \mathbb{N},$$

2)

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, \\ X'(0) = X(l) = 0, \end{cases} \Rightarrow \lambda_k = \left(\frac{\pi(2k-1)}{2l} \right)^2, \quad X_k(x) = \cos \frac{\pi(2k-1)x}{2l}, \quad k \in \mathbb{N},$$

$$\|X_k\|^2 = \frac{l}{2}.$$