# Практика: Класифікація рівнянь в частинних похідних

## 1. Теоретичні відомості

Маємо рівняння

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + F(x, y, u, u_x, u_y) = 0, \tag{1}$$

для нього визначаємо дискримінант:

$$D \equiv a_{12}^2 - a_{11}a_{22},$$

при чому дискримінант визначаємо поточково ( $D = D(x, y)$). Тоді тип рівняння (1) визначається в залежності від знаку $D$:

$D > 0$ — гіперболічного типу в точці $(x, y)$;

$D = 0$ — параболічного типу в точці $(x, y)$;

$D < 0$ — еліптичного типу в точці $(x, y)$.

Характеристичні рівняння для (1):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} \pm \sqrt{D}}{a_{11}}. \tag{2}$$

Тоді

a) $D > 0$, $\phi(x, y) = C$ та $\psi(x, y) = C$ — загальні інтеграли характеристичних рівнянь (2). Якщо виконати заміну змінних

$$\begin{aligned} \xi &= \phi(x, y), \\ \eta &= \psi(x, y), \end{aligned}$$

то зведемо рівняння (1) до першої канонічної гіперболічної форми:

$$u_{\xi\eta} = \Phi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta).$$

Якщо виконати заміну змінних

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\xi + \eta}{2}, \\ \beta &= \frac{\xi - \eta}{2}, \end{aligned}$$

то матимуть місце рівності:

$$\begin{aligned} u_\xi &= \frac{1}{2}(u_\alpha + u_\beta), \\ u_\eta &= \frac{1}{2}(u_\alpha - u_\beta), \\ u_{\xi\eta} &= \frac{1}{4}(u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta}), \end{aligned}$$

і тоді зведемо рівняння (1) до другої канонічної гіперболічної форми:

$$u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} = \Phi_1(\alpha, \beta, u, u_\alpha, u_\beta).$$

б) $D = 0$, $\phi(x, y) = C$ — єдиний загальний інтеграл характеристичного рівняння (2). Виконуючи заміну змінних

$$\begin{aligned} \xi &= \phi(x, y), \\ \eta &= \psi(x, y), \end{aligned}$$

де $\psi$ — довільна лінійно незалежна від $\phi$ функція, зведемо рівняння (1) до канонічної параболічної форми:

$$\begin{aligned} u_{\eta\eta} &= \Phi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta) \\ &\text{чи} \\ u_{\xi\xi} &= \Phi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta)(\text{якщо взяти } \xi \text{ і } \eta \text{ навпаки}). \end{aligned}$$

в) $D < 0$, $\phi(x, y) = C$ та $\phi^*(x, y) = C$ — комплексно спряжені загальні інтеграли характеристичних рівнянь (2). Виконавши заміну змінних

$$\begin{aligned} \xi &= \Re\phi, \\ \eta &= \Im\phi, \end{aligned}$$

зведемо рівняння (1) до канонічної еліптичної форми:

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = \Phi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta).$$

# 2. Приклади

## Приклад 1

$$x^2 u_{xx} - y^2 u_{yy} = 0.$$

Для нього:

$$a_{11} = x^2, a_{12} = 0, a_{22} = -y^2, \quad D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = x^2y^2, \quad D > 0, \text{якщо } x \neq 0, y \neq 0.$$

Рівняння характеристик:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} \pm \sqrt{D}}{a_{11}} = \pm\frac{\sqrt{x^2y^2}}{x^2} = \pm\frac{|x| \cdot |y|}{x^2} = \pm\frac{|y|}{|x|}.$$

Область гіперболічності — це об'єднання чотирьох квадрантів (без характеристичних осей), тому в кожному квадранті можна (і навіть слід) приводити рівняння окремо, розкриваючи відповідно модулі у рівнянні характеристик. Але там всюди стоїть знак „±“, тому з точністю до перестановки змінних нема різниці, якщо ці модулі взагалі зняти. Тому можемо виконати перетворення:

$$\frac{dy}{dx}=\pm\frac{y}{x}\Leftrightarrow\frac{dy}{y}=\pm\frac{dx}{x}\Leftrightarrow\ln|y|=\pm\ln|x|+C,\quad C\in\mathbb{R}.$$

Тоді

$$\text{або}\quad \ln|xy|=C,\quad \text{або}\quad \ln\left|\frac{y}{x}\right|=C,$$

звідки маємо загальні інтеграли

$$xy=C\quad\text{та}\quad \frac{y}{x}=C.$$

Поклавши $\xi=xy,\ \eta=\frac{y}{x}$, маємо:

$$\begin{aligned}
&u_x=u_\xi\xi_x+u_\eta\eta_x=u_\xi y+u_\eta(-\frac{y}{x^2}),\\
&u_{xx}=(u_\xi)_xy+u_\xi y_x+(u_\eta)_x(-\frac{y}{x^2})+u_\eta\frac{2y}{x^3}=y(u_{\xi\xi}\xi_x+u_{\xi\eta}\eta_x)+0-\frac{y}{x^2}(u_{\eta\xi}\xi_x+u_{\eta\eta}\eta_x)+u_\eta\frac{2y}{x^3}=\\
&\qquad=y(u_{\xi\xi}y-u_{\xi\eta}\frac{y}{x^2})-\frac{y}{x^2}(u_{\eta\xi}y-u_{\eta\eta}\frac{y}{x^2})+u_\eta\frac{2y}{x^3}=u_{\xi\xi}y^2+\frac{y^2}{x^4}u_{\eta\eta}-\frac{2y^2}{x^2}u_{\xi\eta}+u_\eta\frac{2y}{x^3},\\
&u_y=u_\xi\xi_y+u_\eta\eta_y=u_\xi x+u_\eta\frac{1}{x},\\
&u_{yy}=x(u_{\xi\xi}\xi_y+u_{\xi\eta}\eta_y)+\frac{1}{x}(u_{\eta\xi}\xi_y+u_{\eta\eta}\eta_y)=x(u_{\xi\xi}x+u_{\xi\eta}\frac{1}{x})+\frac{1}{x}(u_{\eta\xi}x+u_{\eta\eta}\frac{1}{x})=x^2u_{\xi\xi}+2u_{\xi\eta}+\frac{1}{x^2}u_{\eta\eta}.
\end{aligned}$$

Тоді, виконавши підстановку у початкове рівняння, приводимо до канонічної форми:

$$x^2u_{xx}-y^2u_{yy}=0\ \Leftrightarrow\ x^2y^2u_{\xi\xi}+\frac{y^2}{x^2}u_{\eta\eta}-2y^2u_{\xi\eta}+\frac{2y}{x}u_\eta-x^2y^2u_{\xi\xi}-2y^2u_{\xi\eta}-\frac{y^2}{x^2}u_{\eta\eta}=0\ \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\ -4y^2u_{\xi\eta}+\frac{2y}{x}u_\eta=0\ \Leftrightarrow\ u_{\xi\eta}-\frac{1}{2xy}u_\eta=0\ \Leftrightarrow\ u_{\xi\eta}-\frac{1}{2\xi}u_\eta=0.$$

Можна і іншим способом. Наприклад, поклавши $\alpha=\frac12(\xi+\eta)=\frac12(xy+\frac{y}{x}),\ \beta=\frac12(\xi-\eta)=\frac12(xy+\frac{y}{x})$. Але можна загальні інтеграли брати і в їх початковому вигляді $\ln|y|\pm\ln|x|=C$. Тоді, поклавши $\xi=\ln|x|,\ \eta=\ln|y|$, маємо:

$$\begin{aligned}
&u_x=u_\xi\xi_x+u_\eta\eta_x=u_\xi\frac{1}{x}+0,\\
&u_{xx}=-\frac{1}{x^2}u_\xi+\frac{1}{x}(u_{\xi\xi}\xi_x+u_{\xi\eta}\eta_x)=-\frac{1}{x^2}u_\xi+\frac{1}{x^2}u_{\xi\xi},\\
&u_y=u_\eta\frac{1}{y},\\
&u_{yy}=-\frac{1}{y^2}u_\eta+\frac{1}{y}(u_{\eta\xi}\xi_y+u_{\eta\eta}\eta_y)=-\frac{1}{y^2}u_\eta+\frac{1}{y^2}u_{\eta\eta}.
\end{aligned}$$

Тоді, виконавши підстановку у початкове рівняння, приводимо до канонічної форми:

$$x^2u_{xx}-y^2u_{yy}=0\ \Leftrightarrow\ -u_\xi+u_{\xi\xi}+u_\eta-u_{\eta\eta}=0\ \Leftrightarrow\ u_{\xi\xi}-u_{\eta\eta}+u_\eta-u_\xi=0.$$

*Відповідь:* гіперболічне при $x^2y^2>0$: $u_{\xi\eta}-\frac{1}{2\xi}u_\eta=0$ (при $\xi=xy,\eta=\frac{y}{x}$) або $u_{\xi\xi}-u_{\eta\eta}+u_\eta-u_\xi=0$ (при $\xi=\ln|x|,\eta=\ln|y|$);
параболічне при $x=0$ або $y=0$: $u_{yy}=0$ або $u_{xx}=0$ відповідно;
при $x=y=0$: $0=0$ — нічого класифікувати.

## Приклад 2

$$(1+x^2)u_{xx}+(1+y^2)u_{yy}+yu_y=0.$$

Для нього:

$$\begin{aligned}
&a_{11}=1+x^2,\quad a_{12}=0,\quad a_{22}=1+y^2,\\
&D=a_{12}^2-a_{11}a_{22}=-(1+x^2)(1+y^2)<0,\quad \text{при } (x;y)\in\mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Рівняння всюди еліптичне. Рівняння характеристик:

$$\begin{aligned}
&\frac{dy}{dx}=\frac{a_{12}\pm\sqrt{D}}{a_{11}}=\frac{\pm i\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}}{1+x^2}=\pm i\frac{\sqrt{1+y^2}}{\sqrt{1+x^2}}\Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow\frac{dy}{\sqrt{1+y^2}}=\pm i\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}\Rightarrow\\
&\Rightarrow\ln\left|y+\sqrt{1+y^2}\right|=\pm i\ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right|+C.
\end{aligned}$$

Беремо дійсну й уявну частини загальних інтегралів:

$$\begin{cases}\xi=\ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right|\\ \eta=\ln\left|y+\sqrt{1+y^2}\right|\end{cases},$$

тоді маємо:

$$\begin{aligned}
&u_x=u_\xi\xi x+u_\eta\eta_x=u_\xi\frac{1}{\sqrt{1+x^2}},\\
&u_{xx}=-x(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}u_\xi+\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}(u_{\xi\xi}\xi_x+u_{\xi\eta}\eta_x)=-x(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}u_\xi+\frac{u_{\xi\xi}}{1+x^2},
\end{aligned}$$

цілком аналогічно:

$$\begin{aligned}
&u_y=u_\eta\frac{1}{\sqrt{1+y^2}},\\
&u_{yy}=-y(1+y^2)^{-\frac{3}{2}}u_\eta+\frac{u_{\eta\eta}}{1+y^2}.
\end{aligned}$$

Тоді, підставляючи у початкове рівняння, маємо:

$$\begin{aligned}
&(1+x^2)u_{xx}+(1+y^2)u_{yy}+yu_y=0\Leftrightarrow\\
\Leftrightarrow\ &-x(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}u_\xi+u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}-y(1+y^2)^{-\frac{1}{2}}u_\eta+y(1+y^2)^{-\frac{1}{2}}u_\eta=0\Leftrightarrow\\
\Leftrightarrow\ &u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}-x(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}u_\xi=0,
\end{aligned}$$

оскільки $\xi = \ln\left|x + \sqrt{1+x^2}\right| = \texttt{arsh}\, x$, то $x = \operatorname{sh}\xi$, тоді:

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{\operatorname{sh}\xi}{\sqrt{1+\operatorname{sh}^2\xi}} = \frac{\operatorname{sh}\xi}{\operatorname{ch}\xi} = \tanh\xi,$$

а тоді приводимо рівняння до виду:

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} - (\tanh\xi)u_\xi = 0.$$

*Відповідь:* еліптичне, $u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}-(\tanh\xi)u_\xi = 0$, (при $\xi = \ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right|,\ \eta = \ln\left|y+\sqrt{1+y^2}\right|$).

## Приклад 3

$$y^2 u_{xx} + 2y u_{xy} + u_{yy} = 0.$$

Для нього:

$$\begin{aligned}&a_{11} = y^2, \quad a_{12} = y, \quad a_{22} = 1,\\ &D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = y^2 - y^2\cdot 1 = 0, \quad \text{при } (x;y)\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

Рівняння всюди параболічне. Його рівняння характеристики:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12}\pm\sqrt{D}}{a_{11}} = \frac{y}{y^2} = \frac{1}{y} \quad \Leftrightarrow \quad ydy = dx,$$

а загальний інтеграл рівняння характеристики:

$$y^2 - 2x = C.$$

Взявши

$$\begin{cases}\xi = y^2 - 2x\\ \eta = y\end{cases},$$

маємо:

$$\begin{aligned}&u_x = u_\xi\xi_x + u_\eta\eta_x = -2u_\xi,\\ &u_{xx} = -2(u_{\xi\xi}\xi_x + u_{\xi\eta}\eta_x) = -2(-2u_{\xi\xi}) = 4u_{\xi\xi},\\ &u_{xy} = -2(u_{\xi\xi}\xi_y + u_{\xi\eta}\eta_y) = -2(u_{\xi\xi}\cdot 2y + u_{\xi\eta}),\\ &u_y = u_\xi\xi_y + u_\eta\eta_y = u_\xi\cdot 2y + u_\eta,\\ &u_{yy} = 2u_\xi + 2y(u_{\xi\xi}\xi_y + u_{\xi\eta}\eta_y) + u_{\eta\xi}\xi_y + u_{\eta\eta}\eta_y.\end{aligned}$$

Підставляючи у початкове рівняння, зводимо його до канонічного виду:

$$\begin{aligned}&y^2u_{xx} + 2yu_{xy} + u_{yy} = 0 \Leftrightarrow\\ \Leftrightarrow\ &4y^2u_{\xi\xi} - 4y(u_{\xi\xi}2y + u_{\xi\eta}) + 2u_\xi + 2y(u_{\xi\xi}2y + u_{\xi\eta}\cdot 1) + u_{\eta\xi}\cdot 2y + u_{\eta\eta}\cdot 1 = 0 \Leftrightarrow\\ \Leftrightarrow\ &4y^2u_{\xi\xi} - 8y^2u_{\xi\xi} - 4yu_{\xi\eta} + 2u_\xi + 4y^2u_{\xi\xi} + 2yu_{\xi\eta} + 2yu_{\eta\xi} + u_{\eta\eta} = 0 \Leftrightarrow\ u_{\eta\eta} + 2u_\xi = 0.\end{aligned}$$

*Відповідь:* параболічне всюди, $u_{\eta\eta} + 2u_\xi = 0$, (при $\xi = y^2 - 2x,\ \eta = y$).

# 3. Домашнє завдання

1) $u_{xx} + 2u_{xy} - 4u_{yy} + 2u_x + 3u_y = 0;$

2) $u_{xx} + 2u_{xy} - 3u_{yy} + 2u_x + 6u_y = 0;$

3) $yu_{xx} - xu_{yy} + u_x + yu_y = 0;$

4) $u_{xx} + xyu_{yy} = 0;$

5) $u_{xx} - 2cosx \cdot u_{xy} - (3 + sin^2 x)u_{yy} - yu_y = 0.$

# Практика: Метод Фур'є розділення змінних

## 1. Приклади

### Приклад 1

Дано тонкий однорідний стержень $0 < x < l$, бічна поверхня якого ізольована (теплоізоляція). Знайти закон розподілу температури в стержні, якщо кінці стержня підтримуються при нульовій температурі, а початкова температура $u|_{t=0} = u_0(x) = Ax(l - x)$, де $A = const$.

Маємо задачу:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \\ u(0,t) = u(l,t) = 0, \\ u(x,0) = Ax(l-x). \end{cases}$$

Методом Фур'є: $u(x,t) = X(x)T(t)$, тоді

$$XT' = a^2 TX'' \Leftrightarrow \frac{T'}{a^2 T} = \frac{X''}{X} = -\lambda,$$

звідки

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, \\ T' + \lambda a^2 T = 0, \end{cases}$$

Тоді маємо задачу Штурма-Ліувілля:

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, \\ X(0) = X(l) = 0, \end{cases}$$

звідки

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2, \quad X_n(x) = \sin\frac{\pi n x}{l}.$$

Тоді маємо

$$T_n' + \lambda_n a^2 T_n = 0 \quad \Leftrightarrow \quad T_n' + \left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 T_n = 0 \quad \Rightarrow \quad T_n = C_n e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t}.$$

Таким чином, маємо:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t}\sin\frac{\pi n x}{l}.$$

Початкова умова:

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\sin\frac{\pi n x}{l}=Ax(l-x).$$

Розкладаємо $Ax(l-x)$ в ряд Фур'є по системі $\left\{\sin\frac{\pi n x}{l}\right\}_{n=1}^{\infty}$. Множимо це на $\sin\frac{\pi m x}{l}$, $m\in\mathbb{N}$ і інтегруємо.

$$\int_0^l \sin\frac{\pi n x}{l}\cdot\sin\frac{\pi m x}{l}dx=\begin{cases}0, & m\neq n,\\ \dfrac{l}{2}, & m=n,\end{cases}\qquad \text{тоді}$$

$$\frac{l}{2}C_n=\int_0^l Ax(l-x)\sin\frac{\pi n x}{l}dx=-\frac{l}{\pi n}\int_0^l Ax(l-x)d\left(\cos\frac{\pi n x}{l}\right)=$$
$$=\frac{l}{\pi n}\left(-Ax(l-x)\cos\frac{\pi n x}{l}\Big|_0^l+\int_0^l\cos\frac{\pi n x}{l}d(Ax(l-x))\right)=\frac{lA}{\pi n}\int_0^l(l-2x)\cos\frac{\pi n x}{l}dx=$$
$$=\frac{lA}{\pi n}\cdot\frac{l}{\pi n}\int_0^l(l-2x)d\left(\sin\frac{\pi n x}{l}\right)=\frac{Al^2}{\pi^2 n^2}\left((l-2x)\sin\frac{\pi n x}{l}\Big|_0^l+2\int_0^l\sin\frac{\pi n x}{l}dx\right)=$$
$$=\frac{2Al^3}{\pi^3 n^3}\left(-\cos\frac{\pi n x}{l}\Big|_0^l\right)=\frac{2Al^3}{\pi^3 n^3}\left(1-(-1)^n\right)=\begin{cases}0, & n=2k,\\ \dfrac{4Al^3}{\pi^3(2k+1)^3}, & n=2k+1.\end{cases}$$

Значить,

$$C_n=\begin{cases}0, & n=2k,\\ \dfrac{8Al^2}{\pi^3(2k+1)^3}, & n=2k+1.\end{cases}$$

Тоді маємо:

$$u(x,t)=\frac{8Al^2}{\pi^3}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^3}e^{-\left(\frac{\pi(2k+1)a}{l}\right)^2 t}\cdot\sin\frac{\pi(2k+1)x}{l}.$$

*Відповідь:* $u(x,t)=\frac{8Al^2}{\pi^3}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^3}e^{-\left(\frac{\pi(2k+1)a}{l}\right)^2 t}\sin\frac{\pi(2k+1)x}{l}$.

**Зауваження:** якщо, наприклад, на кінець $x=l$ подається зовні тепловий потік, то умова пишеться так:

$$u_x(l,t)\equiv u_x|_{x=l}=q(t);$$

якщо ж $q(t)\equiv 0$, то кінець $x=l$ теплоізольований. Якщо ж сказано, що на кінці $x=l$ йде теплообмін з оточуючим середовищем, то умова пишеться приблизно так:

$$(u_x+hu)|_{x=l}=hu_0,$$

де $h$ — коефіцієнт теплообміну, $u_0$ — температура оточуючого середовища; якщо сказано, що є вільний теплообмін ($u_0=0$), тоді просто маємо $(u_x+hu)|_{x=l}=0$.

# Література


[1] Владмиров В.С. — Сборник задач по уравнениям математической физики.

[2] Очак Ю.С. — Методы математической физики.

[3] Будяк, Самарский, Тихонов — Сборник задач по математической физике.


## Приклад 2

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} - 1, \quad 0 < x < 1, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, \\ u(x,0) = 2x^2 - 2x. \end{cases}$$

Спочатку розв'язуємо (принаймні, починаємо розв'язувати) задачу з однорідною правою частиною:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, \quad 0 < x < 1, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0. \end{cases}$$

Розділяючи змінні в однорідній задачі

$$u(x,t) = X(x)T(t),$$

приходимо до задачі Штурма-Ліувілля:

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, \\ X(0) = X(1) = 0, \end{cases}$$

звідки

$$\lambda_n = (\pi n)^2, \quad X_n(x) = \sin(\pi n x), \ n \in \mathbb{N}.$$

Тоді розв'язок вихідної неоднорідної задачі шукаємо у вигляді ряда

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) X_n(x)$$

по системі власних функцій $\{X_n(x) = \sin(\pi n x)\}$ задачі Штурма-Ліувілля для відповідної однорідної задачі. Розкладемо праву частину за цією системою функцій:

$$-1 = \sum_{n=1}^{\infty} f_n X_n(x), \quad \text{маємо} \quad \int_0^1 (-1)\sin(\pi n x)dx = f_n \cdot \frac{1}{2}, \quad \text{звідки}$$
$$\frac{(-1)^n - 1}{\pi n} = f_n \cdot \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad f_n = \frac{2 \cdot ((-1)^n - 1)}{\pi n}.$$

Тоді, підставивши заготовку в вихідне рівняння, матимемо:

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n'(t)X_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)X_n''(x) + \sum_{n=1}^{\infty} f_n X_n(x) \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(T_n'(t) + (\pi n)^2 T_n(t) - f_n\right) \sin(\pi n x) = 0.$$

З початкової умови маємо:

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(0)X_n(x) = 2x^2 - 2x \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad T_n(0)\cdot\frac{1}{2} = \int_0^1 \left(2x^2-2x\right)\sin(\pi n x)dx = 4\frac{(-1)^n-1}{\pi^3 n^3} \quad \Leftrightarrow$$
$$T_n(0) = \frac{8\cdot((-1)^n-1)}{\pi^3 n^3}.$$

Тоді маємо $\forall n \in \mathbb{N}$ рівняння:

$$\begin{cases} T_n'(t) + (\pi n)^2 T_n(t) - f_n = 0, \\ T_n(0) = \dfrac{8\cdot((-1)^n-1)}{\pi^3 n^3}. \end{cases}$$

Рівняння розв'язуємо методом варіації постійної.

$$T_n'(t) = -(\pi n)^2 T_n(t) \quad \Leftrightarrow \quad T_n(t) = C_n e^{-(\pi n)^2 t}.$$

Припускаємо, що $C_n = C_n(t)$, тоді $T_n(t) = C_n(t)e^{-(\pi n)^2 t}$, звідки

$$C_n'(t)e^{-(\pi n)^2 t} - C_n(t)(\pi n)^2 e^{-(\pi n)^2 t} + (\pi n)^2 C_n(t)e^{-(\pi n)^2 t} - f_n = 0 \quad \Leftrightarrow \quad C_n'(t)e^{-(\pi n)^2 t} = f_n, \text{тоді}$$
$$C_n'(t) = f_n\cdot e^{(\pi n)^2 t} \quad \Leftrightarrow \quad C_n(t) = \frac{f_n}{(\pi n)^2}e^{(\pi n)^2 t} + C.$$

Значить, загальний розв'язок неоднорідного звичайного ДР:

$$T_n(t) = C_n(t)e^{-(\pi n)^2 t} = \frac{f_n}{(\pi n)^2} + Ce^{-(\pi n)^2 t}.$$

З початкової умови:

$$\frac{8\cdot((-1)^n-1)}{(\pi n)^3} = \frac{2\cdot((-1)^n-1)}{(\pi n)^3} + C\cdot 1 \quad \Leftrightarrow \quad C = \frac{6\cdot((-1)^n-1)}{(\pi n)^3}.$$

Значить,

$$T_n(t) = \frac{2\cdot((-1)^n-1)}{(\pi n)^3} + \frac{6\cdot((-1)^n-1)}{(\pi n)^3}e^{-(\pi n)^2 t}.$$

При $n = 2k$ буде $T_n(t) = 0$, тому розглядаємо при $n = 2k+1$. Тоді остаточно:

$$u(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{-4}{(\pi(2k+1))^3}-\frac{12}{(\pi(2k+1))^3}e^{-(\pi(2k+1))^2t}\right)\sin\left(\pi(2k+1)x\right)\quad \text{або ж}$$

$$u(x,t)=\frac{-4}{\pi^3}\sum_{k=0}^{\infty}\left(1+3e^{-(\pi(2k+1))^2t}\right)\frac{\sin\left(\pi(2k+1)x\right)}{(2k+1)^3}.$$

*Відповідь:* $u(x,t)=\frac{-4}{\pi^3}\sum_{k=0}^{\infty}\left(1+3e^{-(\pi(2k+1))^2t}\right)\frac{\sin\left(\pi(2k+1)x\right)}{(2k+1)^3}$.

## Приклад 3

$$\begin{cases} u_t=u_{xx}+x, \quad 0<x<1,\ t>0,\\ u(0,t)=t,\ u(1,t)=2t+1,\\ u(x,0)=2x^2-x. \end{cases}$$

Шукаємо розв'язок у вигляді

$$u(x,t)=v(x,t)+U(x,t),$$

де $v(x,t)$ — нова невідома функція, а $U(x,t)$ — підібрана так, щоб задовольняти неоднорідні граничні умови, тобто $U(0,t)=t$, $U(1,t)=2t+1$. Якщо треба таку $U(x,t)$, щоб $U(0,t)=\mu_1(t)$, $U(l,t)=\mu_2(t)$, то можна взяти

$$U(x,t)=\mu_1(t)+(\mu_2(t)-\mu_1(t))\frac{x}{l}.$$

Тоді, в нашому випадку отримуємо:

$$U(x,t)=t+(2t+1-t)\frac{x}{1}=t+(t+1)x.$$

Значить, маємо представлення

$$u(x,t)=v(x,t)+t+(t+1)x.$$

Підставляємо в задачу:

$$u_t=u_{xx}+x \quad\Leftrightarrow\quad v_t+1+x=v_{xx}+x \quad\Leftrightarrow\quad v_t=v_{xx}-1.$$

Граничні умови:

$$u(0,t)=t \quad\Leftrightarrow\quad v(0,t)+t+0=t \quad\Leftrightarrow\quad v(0,t)=0;$$
$$u(1,t)=2t+1 \quad\Leftrightarrow\quad v(1,t)+t+t+1=2t+1 \quad\Leftrightarrow\quad v(1,t)=0.$$

Початкова умова:

$$u(x,0)=2x^2-x \quad\Leftrightarrow\quad v(x,0)+x=2x^2-x \quad\Leftrightarrow\quad v(x,0)=2x^2-2x.$$

Значить, маємо нову задачу відносно $v(x,t)$, але з однорідними граничними умовами:

$$\begin{cases} v_t = v_{xx} - 1, \quad 0 < x < 1,\ t > 0, \\ v(0,t) = v(1,t) = 0, \\ v(x,0) = 2x^2 - 2x. \end{cases}$$

Ця задача була розв'язана в попередньому прикладі, тому можемо відразу виписати розв'язок:

$$u(x,t) = t + (t+1)x - \frac{4}{\pi^3}\sum_{k=0}^{\infty}\left(1 + 3e^{-(\pi(2k+1))^2 t}\right)\frac{\sin\left(\pi(2k+1)x\right)}{(2k+1)^3}.$$

*Відповідь:* $u(x,t) = t + (t+1)x - \frac{4}{\pi^3}\sum_{k=0}^{\infty}\left(1 + 3e^{-(\pi(2k+1))^2 t}\right)\frac{\sin(\pi(2k+1)x)}{(2k+1)^3}$.

**Зауваження:** при інших неоднорідних граничних умовах можливі інші функції заміни $U(x,t)$. Наприклад,

$$\text{для}\quad u_x(0,t) = \alpha(t),\ u_x(l,t) = \beta(t)\quad \text{підійде заміна}\quad U(x,t) = \alpha(t)x + (\beta(t) - \alpha(t))\frac{x^2}{2l};$$

$$\text{при}\quad u(0,t) = \alpha(t),\ u_x(l,t) = \beta(t)\quad \text{можна брати}\quad U(x,t) = \alpha(t) + \beta(t)\frac{x^2}{2l}\quad \text{і т.д.}$$

У випадку більш загальних неоднорідних умов в якості функції $U(x,t)$, що задовольняє граничні умови, можна спробувати взяти $U(x,t) = a(t) + b(t)x + c(t)x^2$, а потім визначити відповідні коефіцієнти $a(t), b(t), c(t)$. Нам підійде довільна така $U(x,t)$, лише б вона задовольняла граничні умови.

## Приклад 4

Знайти форму $u(x,t)$ закріпленої на кінці $x = 0$ однорідної струни, правий кінець має горизонтальну дотичну, і на струну діє зовнішня сила з щільністю $F(x,t) \neq 0$. В початковий момент $t = 0$ форма струни визначається через $\phi(x)$, а швидкість — через $\psi(x)$. Знайти $u(x,t)$ за умов $\phi(x) = \psi(x) = 0$, а $F(x,t) = a^2$.

Загальна постановка задачі:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x,t), \quad 0 < x < l,\ t > 0, \\ u(0,t) = 0,\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(l,t) = 0, \\ u(x,0) = \phi(x),\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x). \end{cases}$$

Знайдемо спочатку власні функції однорідного рівняння

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, \\ u(0,t) = u_x(l,t) = 0. \end{cases}$$

Покладемо

$$u(x,t) = X(x)\cdot T(t),$$

тоді, розділяючи змінні, маємо:

$$\frac{T''}{a^2T} = \frac{X''}{X} = -\lambda,$$

звідки

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, \\ X(0) = X'(l) = 0. \end{cases}$$

Знаходимо власні функції і значення:

$$\lambda_k = \left(\frac{\pi(2k-1)}{2l}\right)^2, \quad X_k(x) = \sin\frac{\pi(2k-1)x}{2l},\ k \in \mathbb{N}.$$

Розкладемо $F(x,t)$ по $\{X_k(x)\}$:

$$F(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t)\sin\frac{\pi(2k-1)x}{2l}, \quad \text{тоді} \quad \int_0^l F(x,t)\sin\frac{\pi(2k-1)x}{2l}dx = f_k(t)\cdot\frac{l}{2},$$

$$\text{бо} \quad \int_0^l \sin^2\frac{\pi(2k-1)x}{2l}dx = \frac{l}{2}, \quad \text{звідки} \quad f_k(t) = \frac{2}{l}\int_0^l F(x,t)\sin\frac{\pi(2k-1)x}{2l}dx.$$

Шукаємо розв'язок неоднорідного рівняння у вигляді

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t)X_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t)\sin\frac{\pi(2k-1)x}{2l}.$$

Підставивши його в рівняння $u_{tt} = a^2u_{xx} + F(x,t)$, маємо:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(u_k''(t) + \frac{\pi^2a^2(2k-1)^2}{4l^2}u_k(t) - f_k(t)\right)\sin\frac{\pi(2k-1)x}{2l} = 0,$$

звідки маємо рівняння:

$$u_k''(t) + \frac{\pi^2a^2(2k-1)^2}{4l^2}u_k(t) = f_k(t).$$

Початкові умови для нього будуть такі:

$$u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(0)\sin\frac{\pi(2k-1)x}{2l} \quad \Leftrightarrow \quad u_k(0) = \frac{2}{l}\int_0^l \phi(x)\sin\frac{\pi(2k-1)x}{2l}dx, \quad \text{аналогічно}$$

$$u_t(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k'(0)\sin\frac{\pi(2k-1)x}{2l} = \psi(x) \quad \Leftrightarrow \quad u_k'(0) = \frac{l}{2}\int_0^l \psi(x)\sin\frac{\pi(2k-1)x}{2l}dx.$$

Після розв'язання ЗДР і знаходження $u_k(t)$ $\forall k \in \mathbb{N}$, розв'язок всієї задачі дається через

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t)X_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t)\sin\frac{\pi(2k-1)x}{2l}.$$

Знайдемо тепер розв'язок для конкретних $\phi(x) = \psi(x) = 0,\ F(x,t) = a^2$. Тоді

$$f_k(t) = \frac{2}{l}\int_0^l F(x,t)\sin\frac{\pi(2k-1)x}{2l}dx = \frac{2}{l}\int_0^l a^2\sin\frac{\pi(2k-1)x}{2l}dx =$$
$$= -\frac{2a^2}{l}\cdot\frac{2l}{\pi(2k-1)}\cos\frac{\pi(2k-1)x}{2l}\bigg|_0^l = \frac{4a^2}{\pi(2k-1)}.$$

Значить, треба знайти розв'язки рівнянь:

$$u_k''(t) + \frac{\pi^2 a^2(2k-1)^2}{4l^2}u_k(t) = \frac{4a^2}{\pi(2k-1)}.$$

Оскільки $\phi(x) = \psi(x) = 0$, то $u_k(0) = u_k'(0) = 0$. Маємо диференціальне рівняння з постійними коефіцієнтами й вільним членом. Його характеристичне рівняння має комплексні корені, можемо пошукати частинний розв'язок неоднорідного рівняння у вигляді константи:

$$\tilde{u}_k(t) = \gamma_k \quad\Leftrightarrow\quad \gamma_k = \frac{16l^2}{\pi^3(2k-1)^3}.$$

Тому загальний розв'язок неоднорідного запишеться як

$$u_k(t) = \alpha_k\cos\frac{\pi a(2k-1)t}{2l} + \beta_k\sin\frac{\pi a(2k-1)t}{2l} + \frac{16l^2}{\pi^3(2k-1)^3},\ k\in\mathbb{N}.$$

З умов $u_k(0) = u_k'(0) = 0$ маємо:

$$\alpha_k + \frac{16l^2}{\pi^3(2k-1)^3} = 0 \quad\Rightarrow\quad \alpha_k = -\frac{16l^2}{\pi^3(2k-1)^3},$$
$$\beta_k\frac{\pi a(2k-1)}{2l} = 0 \quad\Rightarrow\quad \beta_k = 0.$$

Таким чином, маємо:

$$u_k(t) = \frac{16l^2}{\pi^3(2k-1)^3}\left(1-\cos\frac{\pi a(2k-1)t}{2l}\right) = \frac{32l^2}{\pi^3(2k-1)^3}\sin^2\frac{\pi a(2k-1)t}{4l}.$$

Тоді

$$u(x,t) = \frac{32l^2}{\pi^3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^3}\sin^2\frac{\pi a(2k-1)t}{4l}\cdot\sin\frac{\pi(2k-1)x}{2l}.$$

*Відповідь:* $u(x,t) = \frac{32l^2}{\pi^3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^3}\sin^2\frac{\pi a(2k-1)t}{4l}\cdot\sin\frac{\pi(2k-1)x}{2l}$.

**Зауваження:** при постановці інших крайових умов отримаємо інші задачі Штурма-Ліувілля:

1)

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, \\ X'(0) = X'(l) = 0, \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \lambda_k = \left(\frac{\pi k}{l}\right)^2,\ X_k(x) = \cos\frac{\pi kx}{l},$$

де $k = 0,1,2,\ldots$. Увага: тут точка $\lambda_0 = 0$ також є точкою спектру.

$$\|X_0\|^2 = l,\ \|X_k\|^2 = \frac{l}{2},\quad k\in\mathbb{N},$$

2)

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, \\ X'(0) = X(l) = 0, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \lambda_k = \left(\frac{\pi(2k-1)}{2l}\right)^2, \ X_k(x) = \cos\frac{\pi(2k-1)x}{2l}, \quad k \in \mathbb{N},$$

$$\|X_k\|^2 = \frac{l}{2}.$$

## Приклад 5

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + t(x+1), \\ u_x(0,t) = t^2, \\ u(1,t) = t^2, \\ u(x,0) = 0, \end{cases}$$

Функція $U(x,t) = xt^2$ задовольняє граничні умови, тому представимо розв'язок як

$$u(x,t) = v(x,t) + U(x,t).$$

Тоді маємо задачу:

$$\begin{cases} v_t + 2xt = v_{xx} + t(x+1), \\ v_x(0,t) + t^2 = t^2, \ v(1,t) + t^2 = t^2, \\ v(x,0) + 0 = 0, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} v_t = v_{xx} + t(1-x), \\ v_x(0,t) = v(1,t) = 0, \\ v(x,0) = 0, \end{cases}$$

При розділенні змінних в однорідній задачі отримаємо задачу Штурма-Ліувілля:

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, \\ X'(0) = X(1) = 0, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \lambda_k = \left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right)^2, \ X_k(x) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right)x\right), \quad k = \overline{0, 1, \ldots}.$$

Значить, можна шукати розв'язок у вигляді

$$v(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} T_k(t) \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right)x\right)$$

Підставляємо його в $v_t = v_{xx} + t(1-x)$. Розкладемо спочатку $t(1-x)$ по $\{X_k(x)\}$:

$$t(1-x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(t) \cos\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right)x \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad t \cdot \int_0^1 (1-x)\cos\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right)x dx = f_k(t)\int_0^1 \left(\cos\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right)x\right)^2 dx \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{t}{\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right)^2} = f_k(t) \cdot \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad f_k(t) = \frac{2t}{\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right)^2}.$$

Тоді маємо задачу:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(T_k'(t)+\left(\frac{\pi}{2}+\pi k\right)^2 T_k(t)-\frac{2t}{\left(\frac{\pi}{2}+\pi k\right)^2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}+\pi k\right)x=0.$$

Початкова умова:

$$v(x,0)=\sum_{k=0}^{\infty}T_k(0)\cos\left(\frac{\pi}{2}+\pi k\right)x=0 \quad\Leftrightarrow\quad T_k(0)=0.$$

Отже, маємо:

$$\begin{cases} T_k'(t)+\left(\frac{\pi}{2}+\pi k\right)^2 T_k(t)=\dfrac{2t}{\left(\frac{\pi}{2}+\pi k\right)^2},\\ T_k(0)=0. \end{cases}$$

Загальний розв'язок однорідного рівняння:

$$\tilde{T}_k(t)=Ce^{-\left(\frac{\pi}{2}+\pi k\right)^2 t}.$$

Частинний розв'язок неоднорідного рівняння пошукаємо у вигляді $At+B$, тоді буде

$$A+\left(\frac{\pi}{2}+\pi k\right)^2(At+B)=\frac{2t}{\left(\frac{\pi}{2}+\pi k\right)^2} \quad\Leftrightarrow\quad A+\left(\frac{\pi}{2}+\pi k\right)^2 B+\left(\frac{\pi}{2}+\pi k\right)^2 tA=\frac{2t}{\left(\frac{\pi}{2}+\pi k\right)^2} \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad A=\frac{2}{\left(\frac{\pi}{2}+\pi k\right)^4},\ B=\frac{-2}{\left(\frac{\pi}{2}+\pi k\right)^6}.$$

Значить загальний розв'язок неоднорідного рівняння:

$$T_k(t)=Ce^{-\left(\frac{\pi}{2}+\pi k\right)^2 t}+\frac{2t}{\left(\frac{\pi}{2}+\pi k\right)^4}-\frac{2}{\left(\frac{\pi}{2}+\pi k\right)^6}.$$

З умови $T_k(0)=0$ знаходимо $C=\frac{2}{\left(\frac{\pi}{2}+\pi k\right)^6}$. Тоді:

$$T_k(t)=\frac{2}{\left(\frac{\pi}{2}+\pi k\right)^6}\left(e^{-\left(\frac{\pi}{2}+\pi k\right)^2 t}-1\right)+\frac{2t}{\left(\frac{\pi}{2}+\pi k\right)^4}.$$

*Відповідь:* $u(x,t)=xt^2+\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{2}{\left(\frac{\pi}{2}+\pi k\right)^6}\left(e^{-\left(\frac{\pi}{2}+\pi k\right)^2 t}-1\right)+\frac{2t}{\left(\frac{\pi}{2}+\pi k\right)^4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}+\pi k\right)x.$

## Приклад 6

$$\begin{cases} u_{tt}=u_{xx}-4u,\\ u(0,t)=u(1,t)=0,\\ u(x,0)=x^2-x,\\ u_t(x,0)=0, \end{cases}$$

Розв'язок шукатимемо у вигляді:

$$u(x,t) = X(x)\cdot T(t).$$

Тоді маємо

$$T(x)T''(t) = X''(x)T(t) - 4X(x)T(t),$$

ділимо на $X(x)T(t)$ і маємо:

$$\frac{T''(t)}{T(t)} + 4 = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda.$$

Тоді для $X(x)$ маємо:

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0,\ 0 < x < 1, \\ X(0) = X(1) = 0, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \lambda_n = (\pi n)^2,\ X_n(x) = \sin(\pi n x), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Для $T(t)$ маємо:

$$T_n''(t) + (\lambda_n + 4)T_n(t) = 0,$$

оскільки $\lambda_n + 4 > 0$, то розв'язок буде (характеристичне рівняння $e^{\mu t} \to \mu^2 + (\lambda_n + 4) = 0$):

$$T_n(t) = C_n \sin\sqrt{(\pi n)^2 + 4}t + D_n \cos\sqrt{(\pi n)^2 + 4}t.$$

Тоді загальний розв'язок

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)X_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n \sin\sqrt{(\pi n)^2 + 4}t + D_n \cos\sqrt{(\pi n)^2 + 4}t\right)\sin(\pi n x).$$

З початкових умов:

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin(\pi n x) = x^2 - x \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad D_n \cdot \int_0^1 (\sin(\pi n x))^2 dx = \int_0^1 (x^2 - x)\sin(\pi n x)dx \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad D_n \cdot \frac{1}{2} = \frac{2((-1)^n - 1)}{\pi^3 n^3} \quad \Leftrightarrow \quad D_n = \frac{4}{\pi^3 n^3}((-1)^n - 1) = \begin{cases} 0,\ n = 2k, \\ \dfrac{-8}{\pi^3(2k+1)^3},\ n = 2k+1, \end{cases}$$

$$u_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sqrt{(\pi n)^2 + 4}\sin(\pi n x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad C_n = 0.$$

*Відповідь:* $u(x,t) = -\frac{8}{\pi^3}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^3}\cos\left(t\sqrt{\pi^2(2k+1)^2 + 4}\right)\sin(\pi(2k+1)x)$.

## Приклад 7

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx},\ 0 < x < 1, \\ u(0,t) = 0, \\ u_x(1,t) + hu(1,t) = 0,\ h > 0, \\ u(x,0) = \phi(x). \end{cases}$$

Розділяємо змінні:

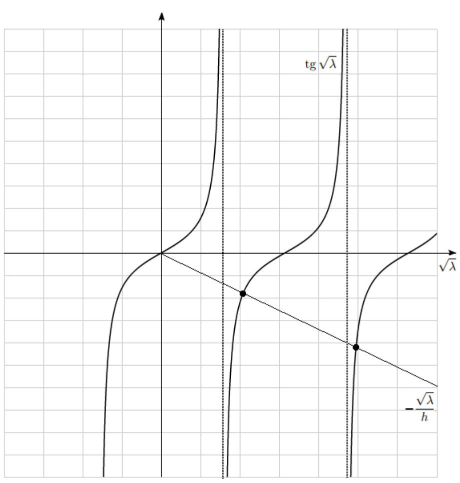
$$\frac{T'}{a^2T} = \frac{X''}{X} = -\lambda,$$

тоді для $X(x)$ маємо:

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, \\ X(0) = 0, \\ X'(1) + hX(1) = 0. \end{cases}$$

Аналогічно, як і в найпростішому випадку, можна довести, що $\lambda > 0$. Та і якщо $\lambda < 0$, то $T(t)$ експоненційно зростає, що суперечить теплофізичній суті.

Тоді




$$X(x) = C\sin\sqrt{\lambda}x + D\cos\sqrt{\lambda}x,$$
$$X(0) = D\cdot 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad D = 0,$$
$$X'(1) + hX(1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad C\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda} + hC\sin\sqrt{\lambda} = 0 \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad \operatorname{tg}\sqrt{\lambda} = -\frac{\sqrt{\lambda}}{h}.$$

Видно, що корені цього рівняння строго додатні, їх зліченна кількість і вони зростають. Позначимо їх через $\lambda_n,\ n \in \mathbb{N}$. Відповідно, власні функції $X_n(x) = \sin\sqrt{\lambda_n}x$.

Для $T(t)$ маємо:

$$T_n' + a^2\lambda_n T_n = 0 \quad \Leftrightarrow \quad T_n(t) = C_n e^{-a^2\lambda_n t}.$$

Тоді розв'язок буде:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-a^2\lambda_n t}\sin\left(x\sqrt{\lambda_n}\right).$$

Знайдемо $C_n$:

$$\int_0^1 \phi(x)\sin\left(x\sqrt{\lambda_n}\right)dx = C_n\cdot\int_0^1\left(\sin\left(x\sqrt{\lambda_n}\right)\right)^2 dx,$$
$$\int_0^1 \sin^2\left(x\sqrt{\lambda_n}\right)dx = \frac{1}{2}\int_0^1\left(1-\cos\left(2x\sqrt{\lambda_n}\right)\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\cdot 2\cdot\sqrt{\lambda_n}}\sin\left(2\sqrt{\lambda_n}\cdot x\right)\Big|_0^1 =$$
$$= \frac{1}{2} - \frac{\sin\left(2\sqrt{\lambda_n}\right)}{4\sqrt{\lambda_n}} = \frac{1}{2} - \frac{\sin\sqrt{\lambda_n}\cos\sqrt{\lambda_n}}{2\sqrt{\lambda_n}} \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad C_n = \frac{2\sqrt{\lambda_n}}{\sqrt{\lambda_n} - \sin\sqrt{\lambda_n}\cos\sqrt{\lambda_n}}\int_0^1 \phi(x)\sin\left(x\sqrt{\lambda_n}\right)dx.$$

*Відповідь:* $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-a^2\lambda_n t}\sin\left(x\sqrt{\lambda_n}\right)$, де $C_n$ визначено формулою вище, а $\{\lambda_n\}, n \in \mathbb{N}$ — корені рівняння $\operatorname{tg}\sqrt{\lambda} = -\frac{\sqrt{\lambda}}{h}$.