

Практика: Класифікація рівнянь в частинних похідних

1. Теоретичні відомості

Маємо рівняння

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + F(x, y, u, u_x, u_y) = 0, \quad (1)$$

для нього визначаємо дискримінант:

$$D \equiv a_{12}^2 - a_{11}a_{22},$$

при чому дискримінант визначаємо поточною ($D = D(x, y)$). Тоді тип рівняння (1) визначається в залежності від знаку D :

$D > 0$ — гіперболічного типу в точці (x, y) ;

$D = 0$ — параболічного типу в точці (x, y) ;

$D < 0$ — еліптичного типу в точці (x, y) .

Характеристичні рівняння для (1):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} \pm \sqrt{D}}{a_{11}}. \quad (2)$$

Тоді

- а) $D > 0$, $\phi(x, y) = C$ та $\psi(x, y) = C$ — загальні інтеграли характеристичних рівнянь (2).
Якщо виконати заміну змінних

$$\begin{aligned} \xi &= \phi(x, y), \\ \eta &= \psi(x, y), \end{aligned}$$

то зведемо рівняння (1) до першої канонічної гіперболічної форми:

$$u_{\xi\eta} = \Phi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta).$$

Якщо виконати заміну змінних

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\xi + \eta}{2}, \\ \beta &= \frac{\xi - \eta}{2}, \end{aligned}$$

то матимуть місце рівності:

$$\begin{aligned} u_\xi &= \frac{1}{2}(u_\alpha + u_\beta), \\ u_\eta &= \frac{1}{2}(u_\alpha - u_\beta), \\ u_{\xi\eta} &= \frac{1}{4}(u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta}), \end{aligned}$$

і тоді зведемо рівняння (1) до другої канонічної гіперболічної форми:

$$u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} = \Phi_1(\alpha, \beta, u, u_\alpha, u_\beta).$$

б) $D = 0$, $\phi(x, y) = C$ — єдиний загальний інтеграл характеристичного рівняння (2). Виконуючи заміну змінних

$$\begin{aligned}\xi &= \phi(x, y), \\ \eta &= \psi(x, y),\end{aligned}$$

де ψ — довільна лінійно незалежна від ϕ функція, зведемо рівняння (1) до канонічної параболічної форми:

$$\begin{aligned}u_{\eta\eta} &= \Phi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta) \\ \text{чи} \\ u_{\xi\xi} &= \Phi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta) \text{ (якщо взяти } \xi \text{ і } \eta \text{ навпаки)}.\end{aligned}$$

в) $D < 0$, $\phi(x, y) = C$ та $\phi^*(x, y) = C$ — комплексно спряжені загальні інтеграли характеристичних рівнянь (2). Виконавши заміну змінних

$$\begin{aligned}\xi &= \Re\phi, \\ \eta &= \Im\phi,\end{aligned}$$

зведемо рівняння (1) до канонічної еліптичної форми:

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = \Phi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta).$$

2. Приклади

Приклад 1

$$x^2 u_{xx} - y^2 u_{yy} = 0.$$

Для нього:

$$a_{11} = x^2, a_{12} = 0, a_{22} = -y^2, \quad D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = x^2y^2, \quad D > 0, \text{ якщо } x \neq 0, y \neq 0.$$

Рівняння характеристик:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} \pm \sqrt{D}}{a_{11}} = \pm \frac{\sqrt{x^2y^2}}{x^2} = \pm \frac{|x| \cdot |y|}{x^2} = \pm \frac{|y|}{|x|}.$$

Область гіперболічності — це об'єднання чотирьох квадрантів (без характеристичних осей), тому в кожному квадранті можна (і навіть слід) приводити рівняння окремо, розкриваючи відповідно модулі у рівнянні характеристик. Але там всюди стоїть знак „ \pm “, тому з точністю до

перестановки змінних нема різниці, якщо ці модулі взагалі зняти. Тому можемо виконати перетворення:

$$\frac{dy}{dx} = \pm \frac{y}{x} \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = \pm \frac{dx}{x} \Leftrightarrow \ln |y| = \pm \ln |x| + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Тоді

$$\text{або} \quad \ln |xy| = C, \quad \text{або} \quad \ln \left| \frac{y}{x} \right| = C,$$

звідки маємо загальні інтеграли

$$xy = C \quad \text{та} \quad \frac{y}{x} = C.$$

Поклавши $\xi = xy$, $\eta = \frac{y}{x}$, маємо:

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x = u_\xi y + u_\eta \left(-\frac{y}{x^2}\right),$$

$$\begin{aligned} u_{xx} &= (u_\xi)_x y + u_\xi y_x + (u_\eta)_x \left(-\frac{y}{x^2}\right) + u_\eta \frac{2y}{x^3} = y(u_{\xi\xi} \xi_x + u_{\xi\eta} \eta_x) + 0 - \frac{y}{x^2}(u_{\eta\xi} \xi_x + u_{\eta\eta} \eta_x) + u_\eta \frac{2y}{x^3} = \\ &= y(u_{\xi\xi} y - u_{\xi\eta} \frac{y}{x^2}) - \frac{y}{x^2}(u_{\eta\xi} y - u_{\eta\eta} \frac{y}{x^2}) + u_\eta \frac{2y}{x^3} = u_{\xi\xi} y^2 + \frac{y^2}{x^4} u_{\eta\eta} - \frac{2y^2}{x^2} u_{\xi\eta} + u_\eta \frac{2y}{x^3}, \end{aligned}$$

$$u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y = u_\xi x + u_\eta \frac{1}{x},$$

$$u_{yy} = x(u_{\xi\xi} \xi_y + u_{\xi\eta} \eta_y) + \frac{1}{x}(u_{\eta\xi} \xi_y + u_{\eta\eta} \eta_y) = x(u_{\xi\xi} x + u_{\xi\eta} \frac{1}{x}) + \frac{1}{x}(u_{\eta\xi} x + u_{\eta\eta} \frac{1}{x}) = x^2 u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + \frac{1}{x^2} u_{\eta\eta}.$$

Тоді, виконавши підстановку у початкове рівняння, приводимо до канонічної форми:

$$\begin{aligned} x^2 u_{xx} - y^2 u_{yy} &= 0 \Leftrightarrow x^2 y^2 u_{\xi\xi} + \frac{y^2}{x^2} u_{\eta\eta} - 2y^2 u_{\xi\eta} + \frac{2y}{x} u_\eta - x^2 y^2 u_{\xi\xi} - 2y^2 u_{\xi\eta} - \frac{y^2}{x^2} u_{\eta\eta} = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -4y^2 u_{\xi\eta} + \frac{2y}{x} u_\eta &= 0 \Leftrightarrow u_{\xi\eta} - \frac{1}{2xy} u_\eta = 0 \Leftrightarrow u_{\xi\eta} - \frac{1}{2\xi} u_\eta = 0. \end{aligned}$$

Можна і іншим способом. Наприклад, поклавши $\alpha = \frac{1}{2}(\xi + \eta) = \frac{1}{2}(xy + \frac{y}{x})$, $\beta = \frac{1}{2}(\xi - \eta) = \frac{1}{2}(xy - \frac{y}{x})$. Але можна загальні інтеграли брати і в їх початковому вигляді $\ln |y| \pm \ln |x| = C$. Тоді, поклавши $\xi = \ln |x|$, $\eta = \ln |y|$, маємо:

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x = u_\xi \frac{1}{x} + 0,$$

$$u_{xx} = -\frac{1}{x^2} u_\xi + \frac{1}{x}(u_{\xi\xi} \xi_x + u_{\xi\eta} \eta_x) = -\frac{1}{x^2} u_\xi + \frac{1}{x^2} u_{\xi\xi},$$

$$u_y = u_\eta \frac{1}{y},$$

$$u_{yy} = -\frac{1}{y^2} u_\eta + \frac{1}{y}(u_{\eta\xi} \xi_y + u_{\eta\eta} \eta_y) = -\frac{1}{y^2} u_\eta + \frac{1}{y^2} u_{\eta\eta}.$$

Тоді, виконавши підстановку у початкове рівняння, приводимо до канонічної форми:

$$x^2 u_{xx} - y^2 u_{yy} = 0 \Leftrightarrow -u_\xi + u_{\xi\xi} + u_\eta - u_{\eta\eta} = 0 \Leftrightarrow u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} + u_\eta - u_\xi = 0.$$

Відповідь: гіперболічне при $x^2 y^2 > 0$: $u_{\xi\eta} - \frac{1}{2\xi} u_\eta = 0$ (при $\xi = xy, \eta = \frac{y}{x}$) або
 $u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} + u_\eta - u_\xi = 0$ (при $\xi = \ln|x|, \eta = \ln|y|$);
 параболічне при $x = 0$ або $y = 0$: $u_{yy} = 0$ або $u_{xx} = 0$ відповідно;
 при $x = y = 0$: $0 = 0$ — нічого класифікувати.

Приклад 2

$$(1 + x^2)u_{xx} + (1 + y^2)u_{yy} + yu_y = 0.$$

Для нього:

$$a_{11} = 1 + x^2, \quad a_{12} = 0, \quad a_{22} = 1 + y^2, \\ D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = -(1 + x^2)(1 + y^2) < 0, \quad \text{при } (x; y) \in \mathbb{R}.$$

Рівняння всюди еліптичне. Рівняння характеристик:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} \pm \sqrt{D}}{a_{11}} = \frac{\pm i \sqrt{(1 + x^2)(1 + y^2)}}{1 + x^2} = \pm i \frac{\sqrt{1 + y^2}}{\sqrt{1 + x^2}} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{dy}{\sqrt{1 + y^2}} = \pm i \frac{dx}{\sqrt{1 + x^2}} \Rightarrow \\ \Rightarrow \ln \left| y + \sqrt{1 + y^2} \right| = \pm i \ln \left| x + \sqrt{1 + x^2} \right| + C.$$

Беремо дійсну й уявну частини загальних інтегралів:

$$\begin{cases} \xi = \ln \left| x + \sqrt{1 + x^2} \right| \\ \eta = \ln \left| y + \sqrt{1 + y^2} \right| \end{cases},$$

Тоді маємо:

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x = u_\xi \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}, \\ u_{xx} = -x(1 + x^2)^{-\frac{3}{2}} u_\xi + \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} (u_{\xi\xi} \xi_x + u_{\xi\eta} \eta_x) = -x(1 + x^2)^{-\frac{3}{2}} u_\xi + \frac{u_{\xi\xi}}{1 + x^2},$$

цілком аналогічно:

$$u_y = u_\eta \frac{1}{\sqrt{1 + y^2}}, \\ u_{yy} = -y(1 + y^2)^{-\frac{3}{2}} u_\eta + \frac{u_{\eta\eta}}{1 + y^2}.$$

Тоді, підставляючи у початкове рівняння, маємо:

$$(1 + x^2)u_{xx} + (1 + y^2)u_{yy} + yu_y = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -x(1 + x^2)^{-\frac{1}{2}} u_\xi + u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} - y(1 + y^2)^{-\frac{1}{2}} u_\eta + y(1 + y^2)^{-\frac{1}{2}} u_\eta = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} - x(1 + x^2)^{-\frac{1}{2}} u_\xi = 0,$$

оскільки $\xi = \ln |x + \sqrt{1+x^2}| = \operatorname{arsh} x$, то $x = \operatorname{sh} \xi$, тоді:

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{\operatorname{sh} \xi}{\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 \xi}} = \frac{\operatorname{sh} \xi}{\operatorname{ch} \xi} = \tanh \xi,$$

а тоді приводимо рівняння до виду:

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} - (\tanh \xi)u_{\xi} = 0.$$

Відповідь: еліптичне, $u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} - (\tanh \xi)u_{\xi} = 0$, (при $\xi = \ln |x + \sqrt{1+x^2}|$, $\eta = \ln |y + \sqrt{1+y^2}|$).

Приклад 3

$$y^2 u_{xx} + 2y u_{xy} + u_{yy} = 0.$$

Для нього:

$$\begin{aligned} a_{11} &= y^2, & a_{12} &= y, & a_{22} &= 1, \\ D &= a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = y^2 - y^2 \cdot 1 = 0, & \text{при } (x; y) &\in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Рівняння всюди параболічне. Його рівняння характеристики:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} \pm \sqrt{D}}{a_{11}} = \frac{y}{y^2} = \frac{1}{y} \Leftrightarrow y dy = dx,$$

а загальний інтеграл рівняння характеристики:

$$y^2 - 2x = C.$$

Взявши

$$\begin{cases} \xi = y^2 - 2x \\ \eta = y \end{cases},$$

маємо:

$$\begin{aligned} u_x &= u_{\xi}\xi_x + u_{\eta}\eta_x = -2u_{\xi}, \\ u_{xx} &= -2(u_{\xi\xi}\xi_x + u_{\xi\eta}\eta_x) = -2(-2u_{\xi\xi}) = 4u_{\xi\xi}, \\ u_{xy} &= -2(u_{\xi\xi}\xi_y + u_{\xi\eta}\eta_y) = -2(u_{\xi\xi} \cdot 2y + u_{\xi\eta}), \\ u_y &= u_{\xi}\xi_y + u_{\eta}\eta_y = u_{\xi} \cdot 2y + u_{\eta}, \\ u_{yy} &= 2u_{\xi} + 2y(u_{\xi\xi}\xi_y + u_{\xi\eta}\eta_y) + u_{\eta\xi}\xi_y + u_{\eta\eta}\eta_y. \end{aligned}$$

Підставляючи у початкове рівняння, зводимо його до канонічного виду:

$$\begin{aligned} y^2 u_{xx} + 2y u_{xy} + u_{yy} &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 4y^2 u_{\xi\xi} - 4y(u_{\xi\xi}2y + u_{\xi\eta}) + 2u_{\xi} + 2y(u_{\xi\xi}2y + u_{\xi\eta} \cdot 1) + u_{\eta\xi} \cdot 2y + u_{\eta\eta} \cdot 1 &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 4y^2 u_{\xi\xi} - 8y^2 u_{\xi\xi} - 4yu_{\xi\eta} + 2u_{\xi} + 4y^2 u_{\xi\xi} + 2yu_{\xi\eta} + 2yu_{\eta\xi} + u_{\eta\eta} &= 0 \Leftrightarrow u_{\eta\eta} + 2u_{\xi} = 0. \end{aligned}$$

Відповідь: параболічне всюди, $u_{\eta\eta} + 2u_{\xi} = 0$, (при $\xi = y^2 - 2x$, $\eta = y$).

3. Домашнє завдання

- 1) $u_{xx} + 2u_{xy} - 4u_{yy} + 2u_x + 3u_y = 0;$
- 2) $u_{xx} + 2u_{xy} - 3u_{yy} + 2u_x + 6u_y = 0;$
- 3) $yu_{xx} - xu_{yy} + u_x + yu_y = 0;$
- 4) $u_{xx} + xyu_{yy} = 0;$
- 5) $u_{xx} - 2\cos x \cdot u_{xy} - (3 + \sin^2 x)u_{yy} - yu_y = 0.$

Практика: Метод Фур'є розділення змінних

1. Приклади

Приклад 1

Дано тонкий однорідний стержень $0 < x < l$, бічна поверхня якого ізолювана (теплоізоляція). Знайти закон розподілу температури в стержні, якщо кінці стержня підтримуються при нульовій температурі, а початкова температура $u_{t=0} = u_0(x) = Ax(l-x)$, де $A = \text{const}$.

Маємо задачу:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & 0 < x < l, \\ u(0, t) = u(l, t) = 0, \\ u(x, 0) = Ax(l-x). \end{cases}$$

Методом Фур'є: $u(x, t) = X(x)T(t)$, тоді

$$XT' = a^2 TX'' \Leftrightarrow \frac{T'}{a^2 T} = \frac{X''}{X} = -\lambda,$$

звідки

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, \\ T' + \lambda a^2 T = 0, \end{cases}$$

Тоді маємо задачу Штурма-Ліувілля:

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, \\ X(0) = X(l) = 0, \end{cases}$$

звідки

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2, \quad X_n(x) = \sin \frac{\pi n x}{l}.$$

Тоді маємо

$$T'_n + \lambda_n a^2 T_n = 0 \quad \Leftrightarrow \quad T'_n + \left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 T_n = 0 \quad \Rightarrow \quad T_n = C_n e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t}.$$

Таким чином, маємо:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t} \sin \frac{\pi n x}{l}.$$

Початкова умова:

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{\pi n x}{l} = Ax(l - x).$$

Розкладаємо $Ax(l - x)$ в ряд Фур'є по системі $\left\{\sin \frac{\pi n x}{l}\right\}_{n=1}^{\infty}$. Множимо це на $\sin \frac{\pi m x}{l}$, $m \in \mathbb{N}$ і інтегруємо.

$$\begin{aligned} \int_0^l \sin \frac{\pi n x}{l} \cdot \sin \frac{\pi m x}{l} dx &= \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \frac{l}{2}, & m = n, \end{cases} \quad \text{тоді} \\ \frac{l}{2} C_n &= \int_0^l Ax(l - x) \sin \frac{\pi n x}{l} dx = -\frac{l}{\pi n} \int_0^l Ax(l - x) d\left(\cos \frac{\pi n x}{l}\right) = \\ &= \frac{l}{\pi n} \left(-Ax(l - x) \cos \frac{\pi n x}{l} \Big|_0^l + \int_0^l \cos \frac{\pi n x}{l} d(Ax(l - x)) \right) = \frac{lA}{\pi n} \int_0^l (l - 2x) \cos \frac{\pi n x}{l} dx = \\ &= \frac{lA}{\pi n} \cdot \frac{l}{\pi n} \int_0^l (l - 2x) d\left(\sin \frac{\pi n x}{l}\right) = \frac{Al^2}{\pi^2 n^2} \left((l - 2x) \sin \frac{\pi n x}{l} \Big|_0^l + 2 \int_0^l \sin \frac{\pi n x}{l} dx \right) = \\ &= \frac{2Al^3}{\pi^3 n^3} \left(-\cos \frac{\pi n x}{l} \Big|_0^l \right) = \frac{2Al^3}{\pi^3 n^3} (1 - (-1)^n) = \begin{cases} 0, & n = 2k, \\ \frac{4Al^3}{\pi^3 (2k + 1)^3}, & n = 2k + 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Значить,

$$C_n = \begin{cases} 0, & n = 2k, \\ \frac{8Al^2}{\pi^3 (2k + 1)^3}, & n = 2k + 1. \end{cases}$$

Тоді маємо:

$$u(x, t) = \frac{8Al^2}{\pi^3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k + 1)^3} e^{-\left(\frac{\pi(2k+1)a}{l}\right)^2 t} \cdot \sin \frac{\pi(2k + 1)x}{l}.$$

$$\text{Відповідь: } u(x, t) = \frac{8Al^2}{\pi^3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^3} e^{-\left(\frac{\pi(2k+1)a}{l}\right)^2 t} \sin \frac{\pi(2k+1)x}{l}.$$

Зауваження: якщо, наприклад, на кінець $x = l$ подається зовні тепловий потік, то умова пишеться так:

$$u_x(l, t) \equiv u_x|_{x=l} = q(t);$$

якщо ж $q(t) \equiv 0$, то кінець $x = l$ теплоізований. Якщо ж сказано, що на кінці $x = l$ йде теплообмін з оточуючим середовищем, то умова пишеться приблизно так:

$$(u_x + hu)|_{x=l} = hu_0,$$

де h — коефіцієнт теплообміну, u_0 — температура оточуючого середовища; якщо сказано, що є вільний теплообмін ($u_0 = 0$), тоді просто маємо $(u_x + hu)|_{x=l} = 0$.

Література

- [1] Владимиров В.С. — Сборник задач по уравнениям математической физики.
- [2] Очак Ю.С. — Методы математической физики.
- [3] Будяк, Самарский, Тихонов — Сборник задач по математической физике.