Практика: Класифікація рівнянь в частинних похідних

1. Теоретичні відомості

Маємо рівняння

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + F(x, y, u, u_x, u_y) = 0, \tag{1}$$

для нього визначаємо дискримінант:

$$D \equiv a_{12}^2 - a_{11}a_{22},$$

при чому дискримінант визначаємо поточково ($D = D(x, y)$). Тоді тип рівняння (1) визначається в залежності від знаку D:

$D > 0$ — гіперболічного типу в точці (x, y);

$D = 0$ — параболічного типу в точці (x, y);

$D < 0$ — еліптичного типу в точці (x, y).

Характеристичні рівняння для (1):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} \pm \sqrt{D}}{a_{11}}. \tag{2}$$

Тоді

а) $D > 0$, $\phi(x, y) = C$ та $\psi(x, y) = C$ — загальні інтеграли характеристичних рівнянь (2). Якщо виконати заміну змінних

$$\begin{aligned} \xi &= \phi(x, y), \\ \eta &= \psi(x, y), \end{aligned}$$

то зведемо рівняння (1) до першої канонічної гіперболічної форми:

$$u_{\xi\eta} = \Phi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta).$$

Якщо виконати заміну змінних

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\xi + \eta}{2}, \\ \beta &= \frac{\xi - \eta}{2}, \end{aligned}$$

то матимуть місце рівності:

$$\begin{aligned} u_\xi &= \frac{1}{2}(u_\alpha + u_\beta), \\ u_\eta &= \frac{1}{2}(u_\alpha - u_\beta), \\ u_{\xi\eta} &= \frac{1}{4}(u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta}), \end{aligned}$$

і тоді зведемо рівняння (1) до другої канонічної гіперболічної форми:

$$u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} = \Phi_1(\alpha, \beta, u, u_\alpha, u_\beta).$$

б) $D = 0$, $\phi(x, y) = C$ — єдиний загальний інтеграл характеристичного рівняння (2). Виконуючи заміну змінних

$$\begin{aligned} \xi &= \phi(x, y), \\ \eta &= \psi(x, y), \end{aligned}$$

де ψ — довільна лінійно незалежна від ϕ функція, зведемо рівняння (1) до канонічної параболічної форми:

$$\begin{aligned} u_{\eta\eta} &= \Phi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta) \\ &\text{чи} \\ u_{\xi\xi} &= \Phi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta)(\text{якщо взяти } \xi \text{ і } \eta \text{ навпаки}). \end{aligned}$$

в) $D < 0$, $\phi(x, y) = C$ та $\phi^*(x, y) = C$ — комплексно спряжені загальні інтеграли характеристичних рівнянь (2). Виконавши заміну змінних

$$\begin{aligned} \xi &= \Re\phi, \\ \eta &= \Im\phi, \end{aligned}$$

зведемо рівняння (1) до канонічної еліптичної форми:

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = \Phi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta).$$

2. Приклади

Приклад 1

$$x^2 u_{xx} - y^2 u_{yy} = 0.$$

Для нього:

$$a_{11} = x^2, a_{12} = 0, a_{22} = -y^2, \quad D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = x^2y^2, \quad D > 0, \text{якщо } x \neq 0, y \neq 0.$$

Рівняння характеристик:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} \pm \sqrt{D}}{a_{11}} = \pm\frac{\sqrt{x^2y^2}}{x^2} = \pm\frac{|x| \cdot |y|}{x^2} = \pm\frac{|y|}{|x|}.$$

Область гіперболічності — це об'єднання чотирьох квадрантів (без характеристичних осей), тому в кожному квадранті можна (і навіть слід) приводити рівняння окремо, розкриваючи відповідно модулі у рівнянні характеристик. Але там всюди стоїть знак „$\pm$“, тому з точністю до

перестановки змінних нема різниці, якщо ці модулі взагалі зняти. Тому можемо виконати перетворення:
$$\frac{dy}{dx} = \pm\frac{y}{x} \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = \pm\frac{dx}{x} \Leftrightarrow \ln|y| = \pm\ln|x| + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Тоді
$$\text{або} \quad \ln|xy| = C, \quad \text{або} \quad \ln\left|\frac{y}{x}\right| = C,$$

звідки маємо загальні інтеграли
$$xy = C \quad \text{та} \quad \frac{y}{x} = C.$$

Поклавши $\xi = xy,\ \eta = \frac{y}{x}$, маємо:

$$\begin{aligned}
u_x &= u_\xi\xi_x + u_\eta\eta_x = u_\xi y + u_\eta(-\frac{y}{x^2}),\\
u_{xx} &=(u_\xi)_x y + u_\xi y_x + (u_\eta)_x(-\frac{y}{x^2}) + u_\eta\frac{2y}{x^3} = y(u_{\xi\xi}\xi_x + u_{\xi\eta}\eta_x) + 0 - \frac{y}{x^2}(u_{\eta\xi}\xi_x + u_{\eta\eta}\eta_x) + u_\eta\frac{2y}{x^3} =\\
&=y(u_{\xi\xi}y - u_{\xi\eta}\frac{y}{x^2}) - \frac{y}{x^2}(u_{\eta\xi}y - u_{\eta\eta}\frac{y}{x^2}) + u_\eta\frac{2y}{x^3} = u_{\xi\xi}y^2 + \frac{y^2}{x^4}u_{\eta\eta} - \frac{2y^2}{x^2}u_{\xi\eta} + u_\eta\frac{2y}{x^3},\\
u_y &= u_\xi\xi_y + u_\eta\eta_y = u_\xi x + u_\eta\frac{1}{x},\\
u_{yy} &= x(u_{\xi\xi}\xi_y + u_{\xi\eta}\eta_y) + \frac{1}{x}(u_{\eta\xi}\xi_y + u_{\eta\eta}\eta_y) = x(u_{\xi\xi}x + u_{\xi\eta}\frac{1}{x}) + \frac{1}{x}(u_{\eta\xi}x + u_{\eta\eta}\frac{1}{x}) = x^2u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + \frac{1}{x^2}u_{\eta\eta}.
\end{aligned}$$

Тоді, виконавши підстановку у початкове рівняння, приводимо до канонічної форми:

$$\begin{aligned}
&x^2u_{xx} - y^2u_{yy} = 0 \ \Leftrightarrow\ x^2y^2u_{\xi\xi} + \frac{y^2}{x^2}u_{\eta\eta} - 2y^2u_{\xi\eta} + \frac{2y}{x}u_\eta - x^2y^2u_{\xi\xi} - 2y^2u_{\xi\eta} - \frac{y^2}{x^2}u_{\eta\eta} = 0 \ \Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow\ -4y^2u_{\xi\eta} + \frac{2y}{x}u_\eta = 0 \ \Leftrightarrow\ u_{\xi\eta} - \frac{1}{2xy}u_\eta = 0 \ \Leftrightarrow\ u_{\xi\eta} - \frac{1}{2\xi}u_\eta = 0.
\end{aligned}$$

Можна і іншим способом. Наприклад, поклавши $\alpha = \frac{1}{2}(\xi + \eta) = \frac{1}{2}(xy + \frac{y}{x}),\ \beta = \frac{1}{2}(\xi - \eta) = \frac{1}{2}(xy + \frac{y}{x})$. Але можна загальні інтеграли брати і в їх початковому вигляді $\ln|y| \pm \ln|x| = C$. Тоді, поклавши $\xi = \ln|x|,\ \eta = \ln|y|$, маємо:

$$\begin{aligned}
u_x &= u_\xi\xi_x + u_\eta\eta_x = u_\xi\frac{1}{x} + 0,\\
u_{xx} &= -\frac{1}{x^2}u_\xi + \frac{1}{x}(u_{\xi\xi}\xi_x + u_{\xi\eta}\eta_x) = -\frac{1}{x^2}u_\xi + \frac{1}{x^2}u_{\xi\xi},\\
u_y &= u_\eta\frac{1}{y},\\
u_{yy} &= -\frac{1}{y^2}u_\eta + \frac{1}{y}(u_{\eta\xi}\xi_y + u_{\eta\eta}\eta_y) = -\frac{1}{y^2}u_\eta + \frac{1}{y^2}u_{\eta\eta}.
\end{aligned}$$

Тоді, виконавши підстановку у початкове рівняння, приводимо до канонічної форми:

$$x^2u_{xx} - y^2u_{yy} = 0 \ \Leftrightarrow\ -u_\xi + u_{\xi\xi} + u_\eta - u_{\eta\eta} = 0 \ \Leftrightarrow\ u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} + u_\eta - u_\xi = 0.$$

Відповідь: гіперболічне при $x^2y^2 > 0$: $u_{\xi\eta} - \frac{1}{2\xi}u_\eta = 0$ (при $\xi = xy, \eta = \frac{y}{x}$) або $u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} + u_\eta - u_\xi = 0$ (при $\xi = \ln|x|, \eta = \ln|y|$);
параболічне при $x = 0$ або $y = 0$: $u_{yy} = 0$ або $u_{xx} = 0$ відповідно;
при $x = y = 0$: $0 = 0$ — нічого класифікувати.

Приклад 2

$$(1+x^2)u_{xx} + (1+y^2)u_{yy} + yu_y = 0.$$

Для нього:

$$\begin{aligned}
&a_{11} = 1+x^2, \quad a_{12} = 0, \quad a_{22} = 1+y^2,\\
&D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = -(1+x^2)(1+y^2) < 0, \quad \text{при } (x;y) \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Рівняння всюди еліптичне. Рівняння характеристик:

$$\begin{aligned}
&\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} \pm \sqrt{D}}{a_{11}} = \frac{\pm i\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}}{1+x^2} = \pm i\frac{\sqrt{1+y^2}}{\sqrt{1+x^2}} \Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow \frac{dy}{\sqrt{1+y^2}} = \pm i\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} \Rightarrow\\
&\Rightarrow \ln\left|y + \sqrt{1+y^2}\right| = \pm i \ln\left|x + \sqrt{1+x^2}\right| + C.
\end{aligned}$$

Беремо дійсну й уявну частини загальних інтегралів:

$$\begin{cases}
\xi = \ln\left|x + \sqrt{1+x^2}\right|\\
\eta = \ln\left|y + \sqrt{1+y^2}\right|
\end{cases},$$

тоді маємо:

$$\begin{aligned}
&u_x = u_\xi \xi x + u_\eta \eta_x = u_\xi \frac{1}{\sqrt{1+x^2}},\\
&u_{xx} = -x(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}u_\xi + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}(u_{\xi\xi}\xi_x + u_{\xi\eta}\eta_x) = -x(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}u_\xi + \frac{u_{\xi\xi}}{1+x^2},
\end{aligned}$$

цілком аналогічно:

$$\begin{aligned}
&u_y = u_\eta \frac{1}{\sqrt{1+y^2}},\\
&u_{yy} = -y(1+y^2)^{-\frac{3}{2}}u_\eta + \frac{u_{\eta\eta}}{1+y^2}.
\end{aligned}$$

Тоді, підставляючи у початкове рівняння, маємо:

$$\begin{aligned}
&(1+x^2)u_{xx} + (1+y^2)u_{yy} + yu_y = 0 \Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow -x(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}u_\xi + u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} - y(1+y^2)^{-\frac{1}{2}}u_\eta + y(1+y^2)^{-\frac{1}{2}}u_\eta = 0 \Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} - x(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}u_\xi = 0,
\end{aligned}$$

оскільки $\xi = \ln\left|x + \sqrt{1+x^2}\right| = \mathtt{arsh}\, x$, то $x = \operatorname{sh}\xi$, тоді:

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{\operatorname{sh}\xi}{\sqrt{1+\operatorname{sh}^2\xi}} = \frac{\operatorname{sh}\xi}{\operatorname{ch}\xi} = \tanh\xi,$$

а тоді приводимо рівняння до виду:

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} - (\tanh\xi)u_\xi = 0.$$

Відповідь: еліптичне, $u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}-(\tanh\xi)u_\xi = 0$, (при $\xi = \ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right|,\ \eta = \ln\left|y+\sqrt{1+y^2}\right|$).

Приклад 3

$$y^2u_{xx} + 2yu_{xy} + u_{yy} = 0.$$

Для нього:

$$\begin{aligned}
&a_{11} = y^2, \quad a_{12} = y, \quad a_{22} = 1,\\
&D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = y^2 - y^2\cdot 1 = 0, \quad \text{при } (x;y)\in\mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Рівняння всюди параболічне. Його рівняння характеристики:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12}\pm\sqrt{D}}{a_{11}} = \frac{y}{y^2} = \frac{1}{y} \quad\Leftrightarrow\quad ydy = dx,$$

а загальний інтеграл рівняння характеристики:

$$y^2 - 2x = C.$$

Взявши

$$\begin{cases}\xi = y^2 - 2x\\ \eta = y\end{cases},$$

маємо:

$$\begin{aligned}
&u_x = u_\xi\xi_x + u_\eta\eta_x = -2u_\xi,\\
&u_{xx} = -2(u_{\xi\xi}\xi_x + u_{\xi\eta}\eta_x) = -2(-2u_{\xi\xi}) = 4u_{\xi\xi},\\
&u_{xy} = -2(u_{\xi\xi}\xi_y + u_{\xi\eta}\eta_y) = -2(u_{\xi\xi}\cdot 2y + u_{\xi\eta}),\\
&u_y = u_\xi\xi_y + u_\eta\eta_y = u_\xi\cdot 2y + u_\eta,\\
&u_{yy} = 2u_\xi + 2y(u_{\xi\xi}\xi_y + u_{\xi\eta}\eta_y) + u_{\eta\xi}\xi_y + u_{\eta\eta}\eta_y.
\end{aligned}$$

Підставляючи у початкове рівняння, зводимо його до канонічного виду:

$$\begin{aligned}
&y^2u_{xx} + 2yu_{xy} + u_{yy} = 0 \Leftrightarrow\\
\Leftrightarrow\ &4y^2u_{\xi\xi} - 4y(u_{\xi\xi}2y + u_{\xi\eta}) + 2u_\xi + 2y(u_{\xi\xi}2y + u_{\xi\eta}\cdot 1) + u_{\eta\xi}\cdot 2y + u_{\eta\eta}\cdot 1 = 0 \Leftrightarrow\\
\Leftrightarrow\ &4y^2u_{\xi\xi} - 8y^2u_{\xi\xi} - 4yu_{\xi\eta} + 2u_\xi + 4y^2u_{\xi\xi} + 2yu_{\xi\eta} + 2yu_{\eta\xi} + u_{\eta\eta} = 0 \Leftrightarrow\ u_{\eta\eta} + 2u_\xi = 0.
\end{aligned}$$

Відповідь: параболічне всюди, $u_{\eta\eta} + 2u_\xi = 0$, (при $\xi = y^2 - 2x,\ \eta = y$).

3. Домашнє завдання

1) $u_{xx} + 2u_{xy} - 4u_{yy} + 2u_x + 3u_y = 0$;

2) $u_{xx} + 2u_{xy} - 3u_{yy} + 2u_x + 6u_y = 0$;

3) $yu_{xx} - xu_{yy} + u_x + yu_y = 0$;

4) $u_{xx} + xyu_{yy} = 0$;

5) $u_{xx} - 2cosx \cdot u_{xy} - (3 + sin^2 x)u_{yy} - yu_y = 0$.

Практика: Метод Фур'є розділення змінних

1. Приклади

Приклад 1

Дано тонкий однорідний стержень $0 < x < l$, бічна поверхня якого ізольована (теплоізоляція). Знайти закон розподілу температури в стержні, якщо кінці стержня підтримуються при нульовій температурі, а початкова температура $u_{t=0} = u_0(x) = Ax(l - x)$, де $A = const$.

Маємо задачу:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \\ u(0, t) = u(l, t) = 0, \\ u(x, 0) = Ax(l - x). \end{cases}$$

Методом Фур'є: $u(x, t) = X(x)T(t)$, тоді

$$XT' = a^2 TX'' \Leftrightarrow \frac{T'}{a^2 T} = \frac{X''}{X} = -\lambda,$$

звідки

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, \\ T' + \lambda a^2 T = 0, \end{cases}$$

Тоді маємо задачу Штурма-Ліувілля:

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, \\ X(0) = X(l) = 0, \end{cases}$$

звідки

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2, \quad X_n(x) = \sin\frac{\pi n x}{l}.$$

Тоді маємо

$$T_n' + \lambda_n a^2 T_n = 0 \quad \Leftrightarrow \quad T_n' + \left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 T_n = 0 \quad \Rightarrow \quad T_n = C_n e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t}.$$

Таким чином, маємо:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t}\sin\frac{\pi n x}{l}.$$

Початкова умова:

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\sin\frac{\pi n x}{l}=Ax(l-x).$$

Розкладаємо $Ax(l-x)$ в ряд Фур'є по системі $\left\{\sin\frac{\pi n x}{l}\right\}_{n=1}^{\infty}$. Множимо це на $\sin\frac{\pi m x}{l}$, $m\in\mathbb{N}$ і інтегруємо.

$$\int_0^l \sin\frac{\pi n x}{l}\cdot\sin\frac{\pi m x}{l}dx=\begin{cases}0, & m\neq n,\\ \dfrac{l}{2}, & m=n,\end{cases}\qquad \text{тоді}$$

$$\begin{aligned}\frac{l}{2}C_n&=\int_0^l Ax(l-x)\sin\frac{\pi n x}{l}dx=-\frac{l}{\pi n}\int_0^l Ax(l-x)d\left(\cos\frac{\pi n x}{l}\right)=\\ &=\frac{l}{\pi n}\left(-Ax(l-x)\cos\frac{\pi n x}{l}\Big|_0^l+\int_0^l\cos\frac{\pi n x}{l}d(Ax(l-x))\right)=\frac{lA}{\pi n}\int_0^l(l-2x)\cos\frac{\pi n x}{l}dx=\\ &=\frac{lA}{\pi n}\cdot\frac{l}{\pi n}\int_0^l(l-2x)d\left(\sin\frac{\pi n x}{l}\right)=\frac{Al^2}{\pi^2n^2}\left((l-2x)\sin\frac{\pi n x}{l}\Big|_0^l+2\int_0^l\sin\frac{\pi n x}{l}dx\right)=\\ &=\frac{2Al^3}{\pi^3n^3}\left(-\cos\frac{\pi n x}{l}\Big|_0^l\right)=\frac{2Al^3}{\pi^3n^3}\left(1-(-1)^n\right)=\begin{cases}0, & n=2k,\\ \dfrac{4Al^3}{\pi^3(2k+1)^3}, & n=2k+1.\end{cases}\end{aligned}$$

Значить,

$$C_n=\begin{cases}0, & n=2k,\\ \dfrac{8Al^2}{\pi^3(2k+1)^3}, & n=2k+1.\end{cases}$$

Тоді маємо:

$$u(x,t)=\frac{8Al^2}{\pi^3}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^3}e^{-\left(\frac{\pi(2k+1)a}{l}\right)^2 t}\cdot\sin\frac{\pi(2k+1)x}{l}.$$

Відповідь: $u(x,t)=\frac{8Al^2}{\pi^3}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^3}e^{-\left(\frac{\pi(2k+1)a}{l}\right)^2 t}\sin\frac{\pi(2k+1)x}{l}$.

Зауваження: якщо, наприклад, на кінець $x=l$ подається зовні тепловий потік, то умова пишеться так:

$$u_x(l,t)\equiv u_x|_{x=l}=q(t);$$

якщо ж $q(t)\equiv 0$, то кінець $x=l$ теплоізольований. Якщо ж сказано, що на кінці $x=l$ йде теплообмін з оточуючим середовищем, то умова пишеться приблизно так:

$$(u_x+hu)|_{x=l}=hu_0,$$

де h — коефіцієнт теплообміну, u_0 — температура оточуючого середовища; якщо сказано, що є вільний теплообмін ($u_0=0$), тоді просто маємо $(u_x+hu)|_{x=l}=0$.

Література

[1] Владмиров В.С. — Сборник задач по уравнениям математической физики.

[2] Очак Ю.С. — Методы математической физики.

[3] Будяк, Самарский, Тихонов — Сборник задач по математической физике.

Приклад 2

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} - 1, \quad 0 < x < 1, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, \\ u(x,0) = 2x^2 - 2x. \end{cases}$$

Спочатку розв'язуємо (принаймні, починаємо розв'язувати) задачу з однорідною правою частиною:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, \quad 0 < x < 1, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0. \end{cases}$$

Розділяючи змінні в однорідній задачі

$$u(x,t) = X(x)T(t),$$

приходимо до задачі Штурма-Ліувілля:

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, \\ X(0) = X(1) = 0, \end{cases}$$

звідки

$$\lambda_n = (\pi n)^2, \quad X_n(x) = \sin(\pi n x),\ n \in \mathbb{N}.$$

Тоді розв'язок вихідної неоднорідної задачі шукаємо у вигляді ряда

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) X_n(x)$$

по системі власних функцій $\{X_n(x) = \sin(\pi n x)\}$ задачі Штурма-Ліувілля для відповідної однорідної задачі. Розкладемо праву частину за цією системою функцій:

$$-1 = \sum_{n=1}^{\infty} f_n X_n(x), \quad \text{маємо} \quad \int_0^1 (-1)\sin(\pi n x)dx = f_n \cdot \frac{1}{2}, \quad \text{звідки}$$
$$\frac{(-1)^n - 1}{\pi n} = f_n \cdot \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad f_n = \frac{2\cdot((-1)^n - 1)}{\pi n}.$$

Тоді, підставивши заготовку в вихідне рівняння, матимемо:

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n'(t)X_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)X_n''(x) + \sum_{n=1}^{\infty} f_n X_n(x) \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \big(T_n'(t) + (\pi n)^2 T_n(t) - f_n\big)\sin(\pi n x) = 0.$$

З початкової умови маємо:

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(0)X_n(x) = 2x^2 - 2x \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad T_n(0)\cdot\frac{1}{2} = \int_0^1 \big(2x^2 - 2x\big)\sin(\pi n x)dx = 4\frac{(-1)^n - 1}{\pi^3 n^3} \quad \Leftrightarrow$$
$$T_n(0) = \frac{8\cdot((-1)^n - 1)}{\pi^3 n^3}.$$

Тоді маємо $\forall n \in \mathbb{N}$ рівняння:

$$\begin{cases} T_n'(t) + (\pi n)^2 T_n(t) - f_n = 0, \\ T_n(0) = \dfrac{8\cdot((-1)^n - 1)}{\pi^3 n^3}. \end{cases}$$

Рівняння розв'язуємо методом варіації постійної.

$$T_n'(t) = -(\pi n)^2 T_n(t) \quad \Leftrightarrow \quad T_n(t) = C_n e^{-(\pi n)^2 t}.$$

Припускаємо, що $C_n = C_n(t)$, тоді $T_n(t) = C_n(t)e^{-(\pi n)^2 t}$, звідки

$$C_n'(t)e^{-(\pi n)^2 t} - C_n(t)(\pi n)^2 e^{-(\pi n)^2 t} + (\pi n)^2 C_n(t)e^{-(\pi n)^2 t} - f_n = 0 \quad \Leftrightarrow \quad C_n'(t)e^{-(\pi n)^2 t} = f_n, \text{тоді}$$
$$C_n'(t) = f_n \cdot e^{(\pi n)^2 t} \quad \Leftrightarrow \quad C_n(t) = \frac{f_n}{(\pi n)^2}e^{(\pi n)^2 t} + C.$$

Значить, загальний розв'язок неоднорідного звичайного ДР:

$$T_n(t) = C_n(t)e^{-(\pi n)^2 t} = \frac{f_n}{(\pi n)^2} + Ce^{-(\pi n)^2 t}.$$

З початкової умови:

$$\frac{8\cdot((-1)^n - 1)}{(\pi n)^3} = \frac{2\cdot((-1)^n - 1)}{(\pi n)^3} + C\cdot 1 \quad \Leftrightarrow \quad C = \frac{6\cdot((-1)^n - 1)}{(\pi n)^3}.$$

Значить,

$$T_n(t) = \frac{2\cdot((-1)^n - 1)}{(\pi n)^3} + \frac{6\cdot((-1)^n - 1)}{(\pi n)^3}e^{-(\pi n)^2 t}.$$

При $n = 2k$ буде $T_n(t) = 0$, тому розглядаємо при $n = 2k+1$. Тоді остаточно:

$$u(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{-4}{(\pi(2k+1))^3}-\frac{12}{(\pi(2k+1))^3}e^{-(\pi(2k+1))^2t}\right)\sin\left(\pi(2k+1)x\right)\quad \text{або ж}$$

$$u(x,t)=\frac{-4}{\pi^3}\sum_{k=0}^{\infty}\left(1+3e^{-(\pi(2k+1))^2t}\right)\frac{\sin\left(\pi(2k+1)x\right)}{(2k+1)^3}.$$

Відповідь: $u(x,t)=\frac{-4}{\pi^3}\sum_{k=0}^{\infty}\left(1+3e^{-(\pi(2k+1))^2t}\right)\frac{\sin(\pi(2k+1)x)}{(2k+1)^3}$.

Приклад 3

$$\begin{cases} u_t=u_{xx}+x, \quad 0<x<1,\ t>0,\\ u(0,t)=t,\ u(1,t)=2t+1,\\ u(x,0)=2x^2-x. \end{cases}$$

Шукаємо розв'язок у вигляді

$$u(x,t)=v(x,t)+U(x,t),$$

де $v(x,t)$ — нова невідома функція, а $U(x,t)$ — підібрана так, щоб задовольняти неоднорідні граничні умови, тобто $U(0,t)=t$, $U(1,t)=2t+1$. Якщо треба таку $U(x,t)$, щоб $U(0,t)=\mu_1(t)$, $U(l,t)=\mu_2(t)$, то можна взяти

$$U(x,t)=\mu_1(t)+(\mu_2(t)-\mu_1(t))\frac{x}{l}.$$

Тоді, в нашому випадку отримуємо:

$$U(x,t)=t+(2t+1-t)\frac{x}{1}=t+(t+1)x.$$

Значить, маємо представлення

$$u(x,t)=v(x,t)+t+(t+1)x.$$

Підставляємо в задачу:

$$u_t=u_{xx}+x \quad\Leftrightarrow\quad v_t+1+x=v_{xx}+x \quad\Leftrightarrow\quad v_t=v_{xx}-1.$$

Граничні умови:

$$u(0,t)=t \quad\Leftrightarrow\quad v(0,t)+t+0=t \quad\Leftrightarrow\quad v(0,t)=0;$$
$$u(1,t)=2t+1 \quad\Leftrightarrow\quad v(1,t)+t+t+1=2t+1 \quad\Leftrightarrow\quad v(1,t)=0.$$

Початкова умова:

$$u(x,0)=2x^2-x \quad\Leftrightarrow\quad v(x,0)+x=2x^2-x \quad\Leftrightarrow\quad v(x,0)=2x^2-2x.$$

Значить, маємо нову задачу відносно $v(x,t)$, але з однорідними граничними умовами:

$$\begin{cases} v_t = v_{xx} - 1, \quad 0 < x < 1, \ t > 0, \\ v(0,t) = v(1,t) = 0, \\ v(x,0) = 2x^2 - 2x. \end{cases}$$

Ця задача була розв'язана в попередньому прикладі, тому можемо відразу виписати розв'язок:

$$u(x,t) = t + (t+1)x - \frac{4}{\pi^3}\sum_{k=0}^{\infty}\left(1 + 3e^{-(\pi(2k+1))^2 t}\right)\frac{sin(\pi(2k+1)x)}{(2k+1)^3}.$$

Відповідь: $u(x,t) = t + (t+1)x - \frac{4}{\pi^3}\sum_{k=0}^{\infty}\left(1 + 3e^{-(\pi(2k+1))^2 t}\right)\frac{sin(\pi(2k+1)x)}{(2k+1)^3}$.

Зауваження: при інших неоднорідних граничних умовах можливі інші функції заміни $U(x,t)$. Наприклад,

для $u_x(0,t) = \alpha(t),\ u_x(l,t) = \beta(t)$ підійде заміна $U(x,t) = \alpha(t)x + (\beta(t) - \alpha(t))\dfrac{x^2}{2l}$;

при $u(0,t) = \alpha(t),\ u_x(l,t) = \beta(t)$ можна брати $U(x,t) = \alpha(t) + \beta(t)\dfrac{x^2}{2l}$ і т.д.

У випадку більш загальних неоднорідних умов в якості функції $U(x,t)$, що задовольняє граничні умови, можна спробувати взяти $U(x,t) = a(t) + b(t)x + c(t)x^2$, а потім визначити відповідні коефіцієнти $a(t), b(t), c(t)$. Нам підійде довільна така $U(x,t)$, лише б вона задовольняла граничні умови.