UNIVERSIDAD DE GRANADA

# Serie unimodal de números

## Algorítmica

**Aarón Bueno Rodríguez**
**Bryan Moreno Picamán**
**Miguel Ángel Rodríguez Serrano**

2º Grado Ingeniería Informática

# Algoritmo Sencillo

## Algoritmo sencillo

El algoritmo que a cualquier persona se le ocurriría para resolver este problema hubiera funcionado de la siguiente manera:

- Avanzamos desde la primera posición del vector de una en una hasta que encontremos que el valor de la posición actual es menor que el de la anterior.
- Devolvemos la posición anterior, que es el índice.

La implementación del algoritmo resultante es la siguiente:

```
int Unimodal(int v[], int ini, int fin){
  int max = ini;
  for (int i = ini + 1; i <= fin; i++){
    if ( v[i] > v[max]){//Todavía no hemos llegado al pico
      max = i;//Guardamos la posicion
    }
    else{//Ya ha encontrado el pico, no hace falta seguir
      return max;//Devolvemos la posición anterior
    }
  }
}
```

Vamos a analizar su eficiencia:

```
int Unimodal(int v[], int ini, int fin){
  int max = ini;                                            //O(1)
  for (int i = ini + 1; i <= fin; i++){                     //O(n)
    if ( v[i] > v[max]){//Todavía no hemos llegado al pico  //O(1)
      max = i;//Guardamos la posicion                       //O(1)
    }
    else{//Ya ha encontrado el pico, no hace falta seguir
      return max;//Devolvemos la posición anterior          //O(1)
    }
  }
}
```

## Cálculo de Eficiencia Teórica

Para realizar el cálculo de la eficiencia teórica, hacemos uso de la fórmula maestra:

$$T(n) = I \cdot T\left(\frac{n}{b}\right) + G(n)$$

Mediante la cual y considerando $G(n)$ constante, y las siguientes condiciones:

- Número de subproblemas=4
- Dificultad de dividir y combinar=0

Obtenemos:

$$T(n) = 2 \cdot T\left(\frac{n}{4}\right) + 1$$

$$\downarrow$$

$$T(n) = T\left(\frac{n}{2}\right) + 1$$

Teniendo en cuenta que si $I = b^k$, esto quiere decir que $O(n^k \log(n))$, y como $k = 0 \rightarrow n^k = 1$, podemos concluir que $O(\log(n))$

Como se puede ver, el código es del orden de eficiencia teórico O(n). Una vez calculada su eficiencia teórica, vamos a calcular su eficiencia empírica valiéndonos para ello del siguiente script:

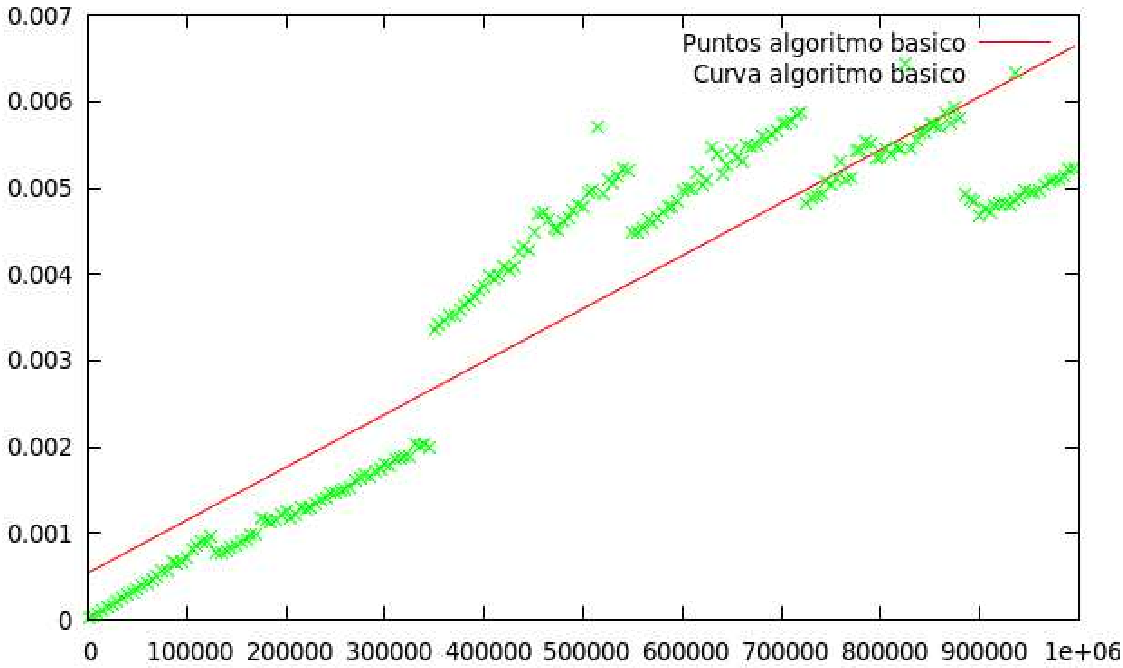
```
#!/bin/csh -vx
@ i = 100
while ( $i < 20000000 )
./algoritmoBasico $i >> basico.dat
@ i += 100000
end
```

## Cálculo eficiencia Híbrida

Hemos usado la librería *ctime* para calcular el tiempo. Ahora calculamos su eficiencia híbrida con *gnuplot*. Hemos utilizado la función $f(x) = a_0 \cdot x + a_1$ Las constantes que han salido son:

```
Final set of parameters            Asymptotic Standard Error
=======================            ==========================

a0              = 6.12614e-09      +/- 2.019e-10    (3.296%)
a1              = 0.000539472      +/- 0.0001161    (21.53%)
```

La gráfica resultante tanto de la eficiencia empírica como híbrida ha sido la siguiente:




Los puntos pueden estar dispersos, dependiendo de cuán lejos se encuentre el índice del inicio del vector. Vamos a intentar mejorar este algoritmo creando un algoritmo de tipo Divide y Vencerás.

# Algoritmo
# Divide y Vencerás

## Algoritmo Divide y Vencerás

Nuestra idea ha sido la siguiente:

- Nos posicionamos en la mitad del vector.
- Comparamos los valores de las posiciones a ambos lados de la mitad:
    - Si el valor en la posición medio es menor que el que hay en medio-1, el índice se encuentra a la izquierda de medio, así que dividimos en dos el vector entre la posición inicial y medio, y devolvemos la posición del valor máximo que haya entre esas dos partes.
    - Si no, si el valor en la posición medio es menor al de medio+1, se hace lo mismo pero esta vez con la mitad entre medio y la posición final dada.
    - Si no es ninguno de los dos casos anteriores, significa que en realidad el punto medio es el que tiene mayor valor, por lo tanto es el índice y lo devuelve.

La implementación del algoritmo explicado queda de la siguiente forma:

```
int posMax(vector<int> &v,int pos1, int pos2){
  if(v[pos1]>v[pos2])
    return pos1;
  else
    return pos2;
}

int Unimodal(vector<int> &v, int ini, int fin){
  if (ini == fin){//Caso base 1. Sólo tenemos 1 elemento
    return ini;
  }
  else if (ini+1 == fin){//Caso base 2. Tenemos 2 elementos
    return posMax(v,ini,fin);
  }
  else{//Tenemos más de dos elementos
    int medio = (fin+ini)/2, cuarto,primera_pos,segunda_pos, maximo;

    if(v[medio]<v[medio-1]){//El pico está a la izquierda de medio
      cuarto = (medio+ini)/2;//Si tenemos 3 elementos, cuarto == ini
      primera_pos = Unimodal(v,ini,cuarto);
      segunda_pos = Unimodal(v,cuarto+1,medio);
    }
    else if(v[medio]<v[medio+1]){//El pico está a la derecha de medio
      cuarto = (fin+medio)/2;//Si tenemos 3 elementos, cuarto == medio
      primera_pos = Unimodal(v,medio,cuarto);
      segunda_pos = Unimodal(v,cuarto+1,fin);
    }
    else//Caso base 3.El pico es medio
      return medio;

    maximo = posMax(v,primera_pos,segunda_pos);

    return maximo;
  }
}
```

Procedemos a analizar su eficiencia teórica:

```
int posMax(vector<int> &v,int pos1, int pos2){
  if(v[pos1]>v[pos2])                                                    //O(1)
    return pos1;                                                         //O(1)
  else
    return pos2;                                                         //O(1)
}

int Unimodal(vector<int> &v, int ini, int fin){
  if (ini == fin){//Caso base 1. Sólo tenemos 1 elemento                 //O(1)
    return ini;                                                          //O(1)
  }
  else if (ini+1 == fin){//Caso base 2. Tenemos 2 elementos              //O(1)
    return posMax(v,ini,fin);                                            //O(1)
  }
  else{//Tenemos más de dos elementos
    int medio = (fin+ini)/2, cuarto,primera_pos,segunda_pos, maximo;     //O(1)

    if(v[medio]<v[medio-1]){//El pico está a la izquierda de medio       //O(1)
      cuarto = (medio+ini)/2;//Si tenemos 3 elementos, cuarto == ini     //O(1)
      primera_pos = Unimodal(v,ini,cuarto);                              //O(n/4)
      segunda_pos = Unimodal(v,cuarto+1,medio);                          //O(n/4)
    }
    else if(v[medio]<v[medio+1]){//El pico está a la derecha de medio    //O(1)
      cuarto = (fin+medio)/2;//Si tenemos 3 elementos, cuarto == medio   //O(1)
      primera_pos = Unimodal(v,medio,cuarto);                            //O(n/4)
      segunda_pos = Unimodal(v,cuarto+1,fin);                            //O(n/4)
    }
    else//Caso base 3.El pico es medio
      return medio;                                                      //O(1)

    maximo = posMax(v,primera_pos,segunda_pos);                          //O(1)

    return maximo;                                                       //O(1)
  }
}
```

La fórmula maestra resultante se puede apreciar que es:

$$\boldsymbol{T(n) = 2 \cdot \frac{t}{4} + c = \frac{t}{2} + c}$$

La resolvemos y queda que es del tipo de eficiencia O(log (n)), por lo que este algoritmo en teoría es bastante más eficiente que el anterior.

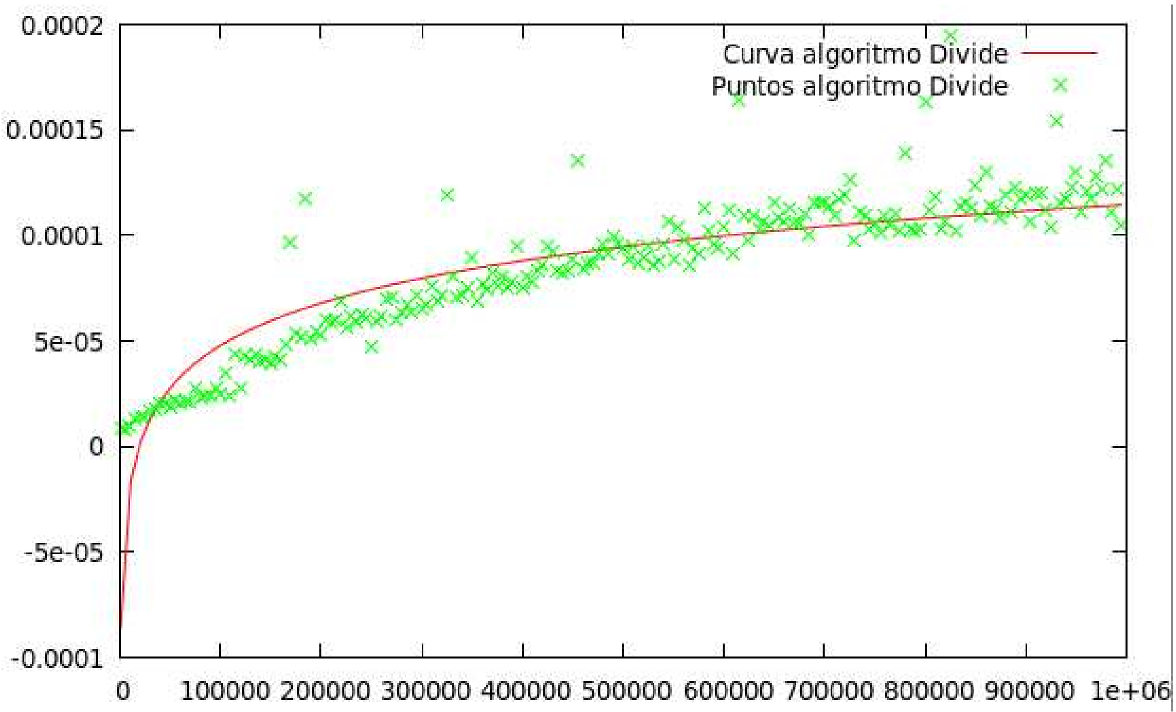
Procedemos a calcular su eficiencia empírica e híbrida. Para la empírica hemos usado el siguiente script:

```
#!/bin/csh -vx
@ i = 100
while ( $i < 20000000 )
./algoritmoDivide $i >> divide.dat
@ i += 100000
end
```

Metemos los datos calculados en gnuplot. Utilizamos la función g(x)=a2*log(x) + a3, y calculamos a partir de ellos sus constantes ocultas:

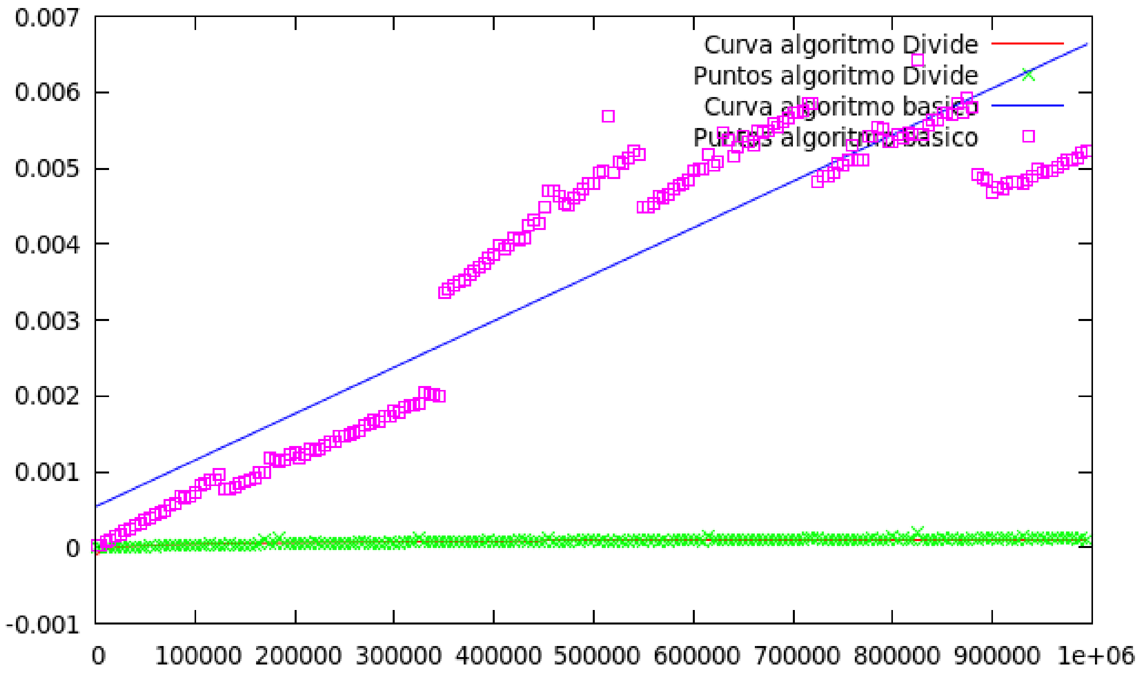
```
Final set of parameters            Asymptotic Standard Error
=======================            ==========================

a2              = 2.90271e-05      +/- 1.154e-06    (3.977%)
a3              = -0.000286357     +/- 1.482e-05    (5.176%)
```

El resultado de la eficiencia híbrida y empírica se encuentra en la siguiente gŕafica:




Recordemos que es normal que los puntos estén dispersos, ya que eso depende de dónde esté situado el pico.

Por último, vamos a comprobar las eficiencias de ambos algoritmos, a ver si es verdad que se cumple que el algoritmo divide y vencerás es más eficiente que el obvio, valiéndonos de una gráfica con los dos algoritmos:




Queda demostrado que para este problema en particular es infinitamente más eficiente un algoritmo Divide y Vencerás que el haber creado un algoritmo normal, como bien puede apreciarse.