ALGORÍTMICA

Tema 1. La Eficiencia de los Algoritmos

Resolución de ecuaciones de recurrencia

Resolución Ecuaciones de Recurrencia

- Métodos:

  - Expansión
  - Sustitución
  - Árbol de Recursión
  - Ecuación Característica
  - Fórmula Maestra

Expansión

- Ir progresivamente desarrollando la ecuación para diversos niveles, sustituyendo cada aparición del valor de la función por la expresión especificada en la recurrencia
- Identificar un patrón general
- Aplicar ese patrón para resolver, llevando el argumento de la función a algún caso básico

Expansión: Función factorial

$$
\begin{aligned}
T(n) &= c + T(n - 1) \\
&= c + (c + T(n-2)) = 2c + T(n-2) \\
&= 2c + (c + T(n-3)) = 3c + T(n-3) \\
&\dots \\
&= ic + T(n-i) \\
&\dots \\
&= (n-1)c + T(n - (n-1)) = (n-1)c + d
\end{aligned}
$$

De donde $T(n)$ es $O(n)$

Expansión y cambio de variable

```
int E(int n) {
    if (n == 1)
        return 0;
    else
        return E(n/2) + 1;
}
```

$$T(n) = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ 1 + T\left(\frac{n}{2}\right) & n > 1 \end{cases}$$

T(n) es $O(\log_2(n))$

- $T(n)=1+T(n/2);$
- cambio de variable $n=2^m$, $m=\log_2 n$
- $T(2^m) = 1+T(2^{m-1})$
- $T(n) = T(2^m) = 1+T(2^{m-1}) = 1+1+T(2^{m-2}) =$
  $2+T(2^{m-2}) = 2+1+T(2^{m-3}) = 3+T(2^{m-3}) = \ldots$
  $i+T(2^{m-i}) = \ldots = m+T(2^0) = m+1 =$
  $1+\log_2 n$

Expansión: otro ejemplo

$$T(n) = T\left(\frac{n}{2}\right) + n^2, \quad n \geq 2, \quad T(1) = 1$$

- Cambio de variable: $n=2^m$
- $n^2 = (2^m)^2=(2^2)^m=4^m$

$T(2^m) = T(2^{m-1}) + 4^m=$

$= T(2^{m-2}) + 4^{m-1} + 4^m$

…

$= T(2^{m-i}) + [4^{m-(i-1)} + … + 4^{m-1} + 4^m]$

Ejemplo

$$T(2^m) = T(1) + [4^1 + \cdots + 4^{m-2} + 4^{m-1} + 4^m]$$

$$= \sum_{i=0}^{m} 4^i = \frac{4^{m+1} - 1}{4 - 1} = \frac{4}{3}4^m - \frac{1}{3}$$

$$= [4^m = n^2] = \frac{4}{3}n^2 - \frac{1}{3}$$

T(n) es O(n^2)

Ejercicio: Resolved

T(n)=2T(n/2)+1

T(n)=2T(n/2)+n

Sustitución

- Adivinar o intuir la forma de la solución
- Usar inducción matemática para probarlo (sustituyendo la función por la forma intuida cuando se aplica la inducción a valores más pequeños)
- Se usa para establecer cotas superiores o inferiores de la recurrencia (no para obtener la solución exacta)

Sustitución: ejemplo

- $T(n) = 2T(n/2)+n, T(1) = 1$
- "Intuimos" que $T(n) = O(n \lg n)$, o sea que $T(n) <= cn\lg n, n >= n_0$
- Usando inducción
- $T(n)=2T(n/2)+n<=2(c(n/2)\lg(n/2))+n=$ $cn\lg(n/2)+n=cn\lg n-cn\lg 2+n=cn\lg n-n(c-1) <= cn\lg n$ siempre que $c>=1$
- Caso base (1 no sirve): $T(2)=2T(1)+2=4$

  $4=T(2)<=c2\lg 2=2c$ siempre que $c>=2$

Sustitución: otro ejemplo

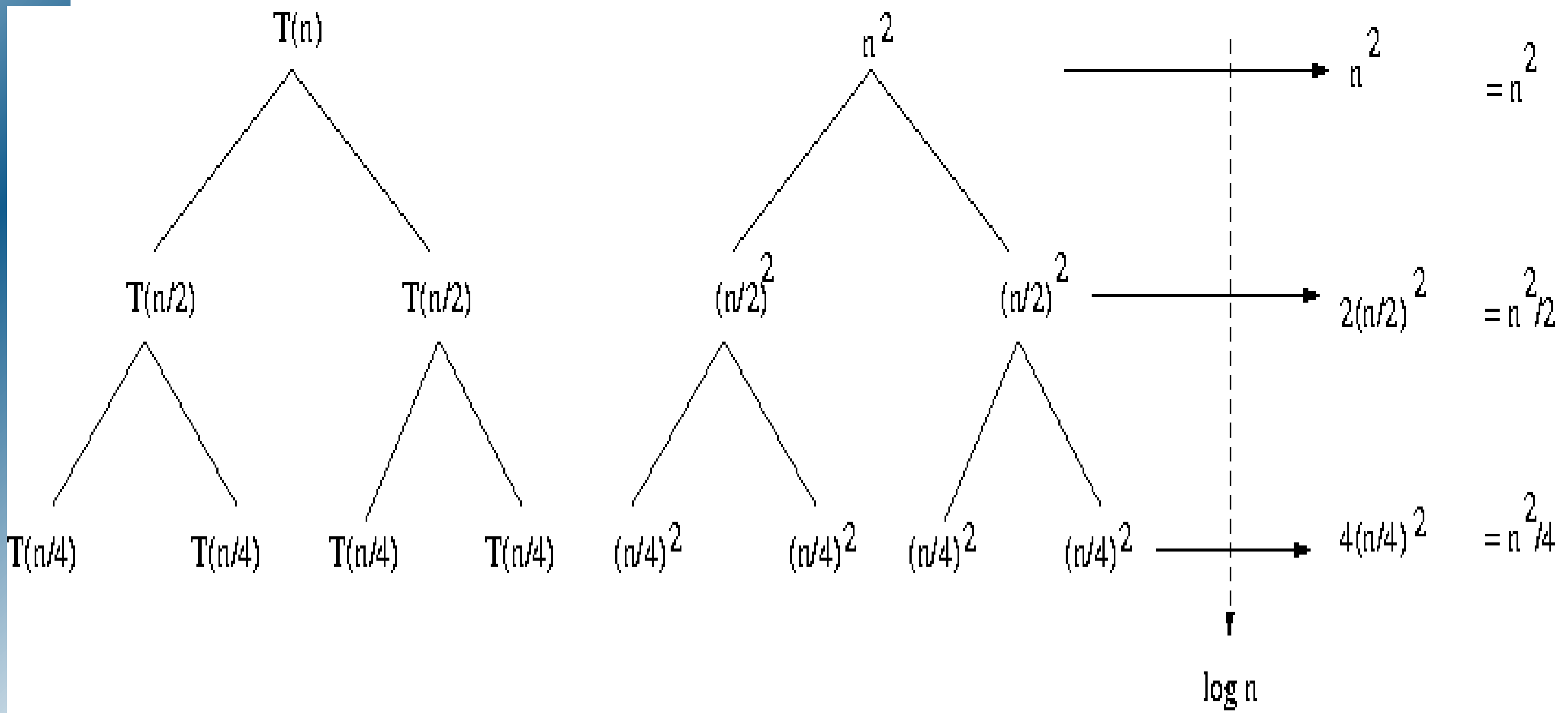
- $T(n) = c + T(n – 1), T(1)=d$
- “Intuimos” que $T(n)=O(n)$, o sea que $T(n)<=rn$, $n>=n_0$
- Empleando inducción
- $T(n) = T(n-1)+c <= r(n-1)+c = rn -r+c <= rn$ siempre que $r>=c$
- Caso base:
- $T(1)=d <= r*1$ siempre que $r>=d$

Árboles de recursión

Se representa gráficamente el proceso de recursión. Factores a tener en cuenta:

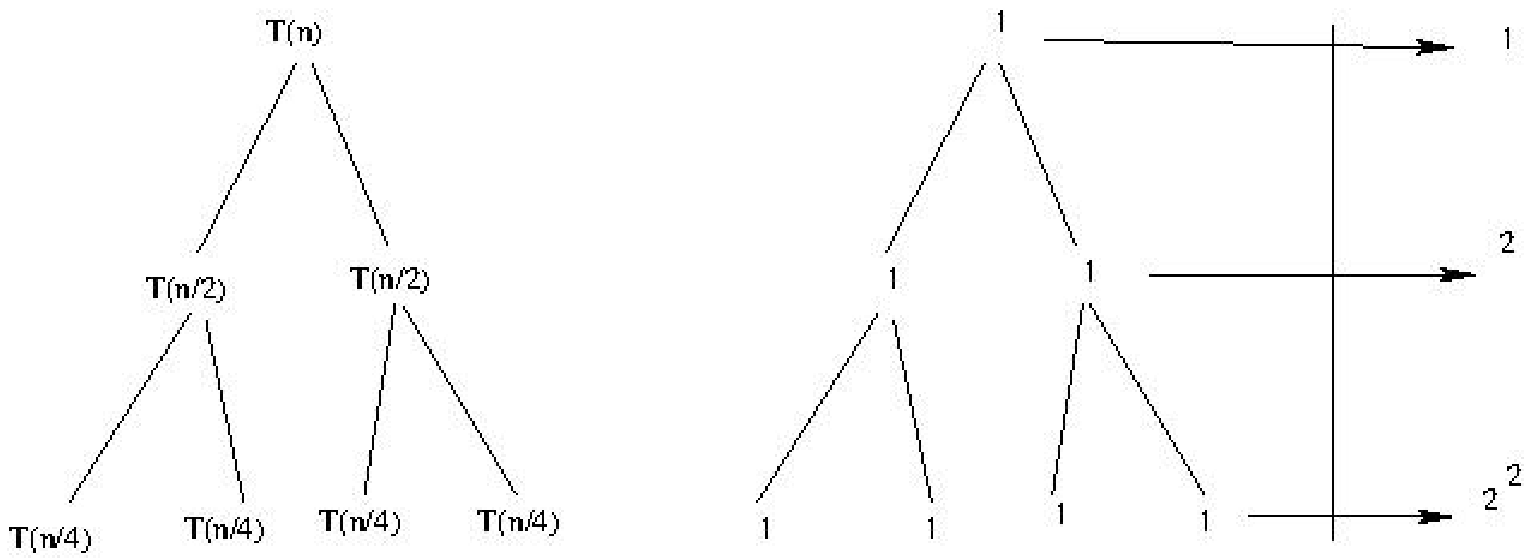
- El tamaño de las entradas usado como argumento en la siguiente relación de recurrencia.
- La suma del trabajo realizado en cada nivel de recursión.
- El número de niveles.
- La suma del trabajo en todos los niveles de recursión.

Arboles de recursión



Árbol de recursión: ejemplo

- $T(n)=2T(n/2)+1$



Árbol de recursión: ejemplo

- Suma en cada nivel:
- Nivel 1: 1
- Nivel 2: 2*1=2
- Nivel 3: 2^2*1 ….
- Nivel i: 2^{i-1}*1
- ¿Cuántos niveles? $n/2^i=1$, luego $i=1+\lg_2 n$ (+nivel inicial)
- Suma por niveles: sum_{i=1}^{1+lg$_2$n}2^{i-1} = sum_{j=0}^{lg$_2$n}2^j =$2^{1+\lg n}$-1 = 2n-1
- Luego T(n)=O(n)

Ecuación característica

$$a_n T(n) + a_1 T(n-1) + \ldots + a_k T(n-k) = O(b^n p(n))$$

1.- Construcción de la ecuación característica.
2.- Construcción del polinomio característico asociado a la recurrencia inicial.
3.- Factorización del polinomio mediante el cálculo de las raíces del mismo
4.- Representar la ecuación de recurrencia mediante la siguiente combinación líneal

$$t_n = \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=0}^{m_i - 1} c_{ij} n^j r_i^n$$

5.- **Calcular las constantes**

Recurrencias homogéneas

- Consideramos recurrencias *homogéneas lineales con coeficientes constantes*:

$$a_0 t_n + a_1 t_{n-1} + \cdots + a_k t_{n-k} = 0$$

- Lineales: no hay términos $t_{n-1}t_{n-j}, t^2_{n-i}$
- Homogénea: igualada a 0
- Con coeficientes constantes: a_i son constantes
- Ejemplo (sucesión de Fibonacci)

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \quad \Rightarrow \quad f_n - f_{n-1} - f_{n-2} = 0$$

- *Observación*: las combinaciones lineales de las soluciones de la recurrencia también son soluciones

Recurrencias homogéneas (II)

Suposición (intuición) $t_n = x^n$ con x una constante desconocida

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_k x^{n-k} = 0$$

satisfecha si x=0 o (ecuación característica)

$$a_0 x^k + a_1 x^{k-1} + \cdots + a_k = 0$$

Polinomio característico

$$p(x) = a_0 x^k + a_1 x^{k-1} + \cdots + a_k$$

Recurrencias homogéneas (III)

(Teorema fundamental del Álgebra)

$$p(x) = \prod_{i=1}^{k} (x - r_i)$$

Consideremos una raíz del polinomio característico, r_i, $p(r_i) = 0$, r_i^n es solución de la recurrencia.

Además,

$$t_n = \sum_{i=1}^{k} c_i r_i^n$$

también son soluciones.

Las k constantes c_i se determinan mediante condiciones iniciales

Cuando todos los r_i son distintos, éstas son las únicas soluciones

Ejemplo: Fibonacci

$$f_n = \begin{cases} n, & \text{si } n = 0 \text{ ó } n = 1 \\ f_{n-1} + f_{n-2} & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$f_n - f_{n-1} - f_{n-2} = 0$$

$$p(x) = x^2 - x - 1$$

$$r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad y \quad r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Solución Fibonacci

Solución general:

$$f_n = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n$$

$$\begin{array}{ccccc} c_1 & + & c_2 & = & 0 \\ r_1 c_1 & + & r_2 c_2 & = & 1 \end{array}$$

$$c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad y \quad c_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

Ejemplo

$$t_n = \begin{cases} 0, & n = 0 \\ 5, & n = 1 \\ 3t_{n-1} + 4t_{n-2}, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$t_n - 3t_{n-1} - 4t_{n-2} = 0$$

$$x^2 - 3x - 4 = (x+1)(x-4)$$

$$t_n = c_1(-1)^n + c_2 4^n$$

A partir de las condiciones iniciales:

$c_1+c_2=0$

$-c_1+4c_2=5$

$c_1 = -1$ y $c_2 = 1$

Raíces múltiples

- Las raíces de la ecuación característica no son distintas.
- Sea

  $p(x) = a_0x^k + a_1x^{k-1} + ... + a_k$

  y r una raíz múltiple.
- Para cualquier valor $n \geq k$, sea el polinomio,

  $h(x) = x[x^{n-k}p(x)]' = a_0nx^n + a_1(n-1)x^{n-1} +...+ a_k(n-k)x^{n-k}$

  Veamos que si (p. ej) r es doble (de multiplicidad 2), entonces $t = nr^n$ también es una solución

Raíces múltiples

- En efecto, sea $q(x)$ el polinomio tal que

  $p(x) = (x-r)^2 q(x)$.

- Entonces,

  $$h(x) = x[(x-r)^2 x^{n-k} q(x)]' =$$

  $$= x[2(x-r)x^{n-k} q(x) + (x-r)^2 [x^{n-k} q(x)]']$$

- Como $h(r) = 0$, se demuestra que,

  $a_0 n r^n + a_1 (n-1) r^{n-1} + \ldots + a_k (n-k) r^{n-k} = 0$

  es decir, $t = n r^n$ es también una solución

Raíces múltiples

- Mas generalmente, si m es la multiplicidad de la raiz r, entonces

  $t_1 = r^n$, $t_2 = nr^n$, $t_3 = n^2r^n$,..., $t_m = n^{m-1}r^n$

  son todas las posibles soluciones de la ecuación.

- La solución general es una combinación lineal de estos términos y de los términos contribuidos por otras raíces de la ecuación característica.

Raíces múltiples

En general, sean r_i con multiplicidad m_i, i=1,…,l, las diferentes soluciones de p(x).

Entonces

$$t_n = \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=0}^{m_i - 1} c_{ij} n^j r_i^n$$

son todas las soluciones

De nuevo hay k constantes a determinar por las condiciones iniciales

Ejemplo

$$t_n = 5t_{n-1} - 8t_{n-2} + 4t_{n-3},\ n \geq 3,\ t_0=0,\ t_1=1 \text{ y } t_2=2$$

$$t_n - 5t_{n-1} + 8t_{n-2} - 4t_{n-3} = 0$$

$$X^3 - 5x^2 + 8x - 4 = (x-1)(x-2)^2$$

$$t_n = c_1(1)^n + c_2 2^n + c_3 n 2^n$$

A partir de las condiciones iniciales:

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 \qquad\qquad &= 0,\ n = 0 \\ c_1 + 2c_2 + 2c_3 &= 1,\ n = 1 \\ c_1 + 4c_2 + 8c_3 &= 2,\ n = 2 \end{aligned}$$

$c_1 = -2,\ c_2 = 2,\ c_3 = -1/2$

$$t_n = 2^{n+1} - n2^{n-1} - 2$$

Recurrencias no homogéneas

$$a_0 t_n + a_1 t_{n-1} + \ldots + a_k t_{n-k} = b^n p(n)$$

- b es una constante
- p(n) es un polinomio de n de grado d
- Ejemplo: $t_n - 2t_{n-1} = 3^n$
- En este caso b=3 y p(n)=1 es un polinomio de grado 0
- El polinomio característico es:
- $$p(x) = (a_0 x^k + a_1 x^{k-1} + \cdots + a_k)(x - b)^{d+1}$$
-
- En el ejemplo, (x-2)(X-3)
- Se procede igual que en el caso homogéneo, salvo que las condiciones iniciales se obtienen de la propia recurrencia

Ejemplo

$$t_n = \begin{cases} 0, & \text{si } n = 0 \\ 2t_{n-1} + 1 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$t_n - 2t_{n-1} = 1 \qquad p(x) = (x-2)(x-1)$$

$$\text{Solución general}: \quad t_n = c_1 2^n + c_2$$

$$\begin{array}{ccccc} c_1 & + & c_2 & = & 0 \\ 2c_1 & + & c_2 & = & 1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} c_1 = 1 \\ c_2 = -1 \end{array}$$

$$t_n = 2^n - 1$$

Ejemplo

$$t_n = 2t_{n-1} + n$$

$$p(x) = (x-2)(x-1)^2$$

Solución general : $t_n = c_1 2^n + c_2 1^n + c_3 n 1^n$

$$\begin{array}{ccccccccc} c_1 & + & c_2 & & & = & 0 & & c_1 = 2 \\ 2c_1 & + & c_2 & + & c_3 & = & 1 & \Rightarrow & c_2 = -2 \\ 4c_1 & + & c_2 & + & 2c_3 & = & 4 & & c_3 = -1 \end{array}$$

$$t_n = 2^{n+1} - n - 2$$

$O(2^n)$

Ejemplo

$$t_n - 2t_{n-1} = (n+5)\, 3^n,\ t_0=0$$

- Ecuación característica: $(x-2)(x-3)^2 = 0$
- La solución es: $t_n = c_1 2^n + c_2 3^n + c_3 n3^n$

A partir de la condición inicial y la propia recurrencia:

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 \qquad\qquad &= 0, \quad n = 0 \\ 2c_1 + 3c_2 + 3c_3 &= 18, \ n = 1 \\ 4c_1 + 9c_2 + 18c_3 &= 99, \ n = 2 \end{aligned}$$

$c_1 = -9,\ c_2 = 9,\ c_3 = 3$

- $t_n = n3^{n+1} + 9(3^n - 2^n) = O(n3^n)$

Generalización

$$a_0\, t_n + a_1\, t_{n-1} + \ldots + a_k\, t_{n-k} = b_1{}^n p_1(n) + b_2{}^n p_2(n) + \ldots$$

donde las b_i son constantes distintas y los $p_i(n)$ son polinomios en n de grado d_i respectivamente.

Polinomio característico

$$(a_0 x^k + a_1 x^{k-1} + \ldots + a_k)(x-b_1)^{d1+1}\,(x-b_2)^{d2+1} \ldots$$

Generalización: ejemplo

$$t_n = 2t_{n-1} + n + 2^n,\ n \geq 1,\ \text{con } t_0 = 0.$$

$b_1 = 1$, $p_1(n) = n$, $b_2 = 2$, $p_2(n) = 1$.

- Polinomio característico: $(x-2)(x-1)^2(x-2) = (x-1)^2(x-2)^2$
- Solución general:

$$t_n = c_1 1^n + c_2 n1^n + c_3 2^n + c_4 n2^n$$

Cambio de variable

- **Calcular el orden de T(n) si n es potencia de 2, y**

$$T(n) = 4T(n/2) + n, \; n > 1$$

- Reemplazamos n por 2^k (de modo que $k = \lg n$) para obtener $T(2^k) = 4T(2^{k-1}) + 2^k$. Esto puede escribirse,

$$t_k = 4t_{k-1} + 2^k$$

- si $t_k = T(2^k) = T(n)$. (n es una potencia de 2)

Cambio de variable

$$t_k = 4t_{k-1} + 2^k$$

- Ecuación característica es $(x-4)(x-2) = 0$
- entonces $t_k = c_1 4^k + c_2 2^k$.
- Poniendo n en lugar de k, tenemos

$$T(n) = c_1 n^2 + c_2 n$$

T(n) por tanto es $O(n^2$ /n es una potencia de 2)

Cambio de variable

- Encontrar el orden de $T(n)$ si n es una potencia de 2 y si

  $T(n) = 4T(n/2) + n^2$, $n > 1$

- Obtenemos sucesivamente

  $T(2^k) = 4T(2^{k-1}) + 4^k$, y $t_k = 4t_{k-1} + 4^k$

- Ecuación característica: $(x-4)^2 = 0$,

  $t_k = c_1 4^k + c_2 k4^k$, $\mathbf{T(n) = c_1 n^2 + c_2 n^2 lgn}$

- $O(n^2 \log n$ / n es potencia de 2).

Cambio de variable

- Calcular el orden de T(n) si n es una potencia de 2

$T(n) = 2T(n/2) + n\lg n,\ n > 1$

- Obtenemos

$$T(2^k) = 2T(2^{k-1}) + k2^k$$

$$t_k = 2t_{k-1} + k2^k$$

- Ecuación característica es $(x-2)^3 = 0$, y así,

$$t_k = c_1 2^k + c_2 k2^k + c_3 k^2 2^k$$

$$T(n) = c_1 n + c_2 n\lg n + c_3 n\lg^2 n$$

- T(n) es O(nlog^{2}n / n es potencia de 2).

Cambio de variable

- Calcular el orden de $T(n)$ si n es potencia de 2 y $T(n) = 3T(n/2) + cn$ (c es constante, $n \geq 1$).
- Obtenemos sucesivamente,

$$T(2^k) = 3T(2^{k-1}) + c2^k$$
$$t_k = 3t_{k-1} + c2^k$$

- Ecuación característica: $(x-3)(x-2) = 0$, y así,

$$t_k = c_1 3^k + c_2 2^k$$
$$T(n) = c_1 3^{\lg n} + c_2 n$$

- y como $a^{\lg b} = b^{\lg a}$, $T(n) = c_1 n^{\lg 3} + c_2 n$

y finalmente $T(n)$ es $O(n^{\lg 3}$ / n es potencia de 2).

Transformaciones del rango

- $T(n) = nT^2(n/2)$, $n > 1$, $T(1) = 6$ y n potencia de 2.
- Cambiamos la variable: $t_k = T(2^k)$, y así

  $$t_k = 2^k\, t^2_{k-1} \, , \; k > 0; \; t_0 = 6.$$

- Esta recurrencia no es lineal, y uno de los coeficientes no es constante.
- Para transformar el rango, creamos una nueva recurrencia tomando $V_k = \lg t_k$, lo que da,

  $$V_k = k + 2\, V_{k-1} \, , \; k > 0; \; V_0 = \lg 6.$$

- Ecuación característica: $(x-2)(x-1)^2 = 0$ y así,

$$V_k = c_1\, 2^k + c_2\, 1^k + c_3\, k1^k = c_1\, 2^k + c_2 + c_3\, k$$

Transformaciones del rango

$$V_k = k + 2\, V_{k-1}$$

$$V_k = c_1\, 2^k + c_2 + c_3\, k$$

$V_0=\lg 6$, $V_1=1+2V_0=1+2\lg 6$, $V_2=2+2V_1=4+4\lg 6$

$\lg 6 = c_1+c_2$

$1+2\lg 6 = 2c_1+c_2+c_3$ –> $c_1=2+\lg 6=3+\lg 3$, $c_2=-2$, $c_3=-1$

$4+4\lg 6 = 4c_1+c_2+2c_3$

$\lg t_k = V_k= (3+\lg 3)2^k -2 - k$ –-> $t_k= 2^{V_k} =2^{(3+\lg 3)n-2-\lg n}$

$$T(n) = 2^{(3+\lg 3)n}/(4n)$$

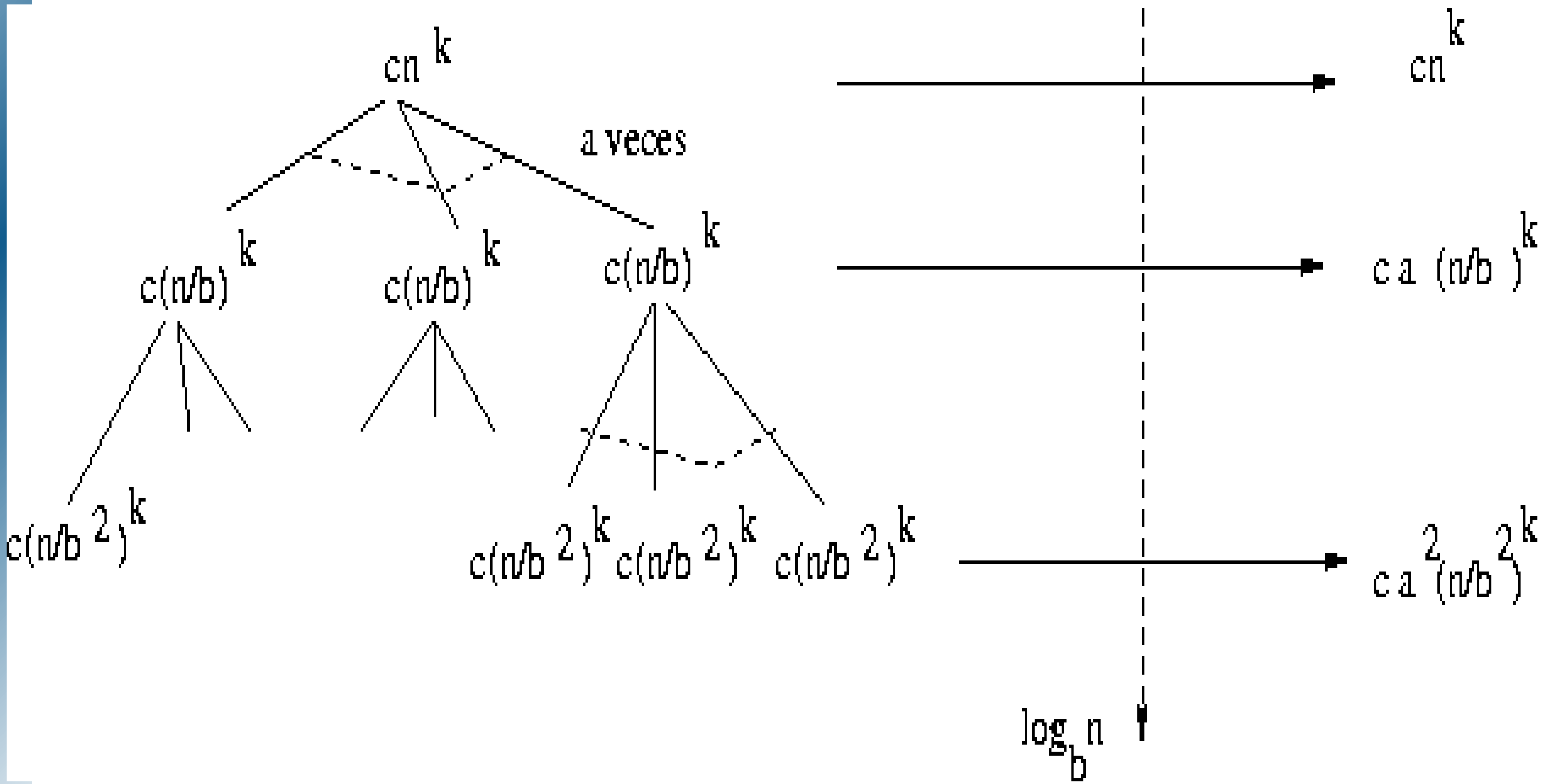
Fórmula maestra

- $T(n) = aT(n/b)+cn^k$,

  con $T(1)=c$, $b>1$, $k>=0$

- $T(n)=\Theta(n^k)$ si $a<b^k$
- $T(n)=\Theta(n^k \log n)$ si $a=b^k$
- $T(n)=\Theta(n^{\log_b a})$ si $a>b^k$

Fórmula Maestra: árbol de recursión



F. maestra: árbol de recursión

- Nivel 0: cn^k
- Nivel 1: $ca(n/b)^k$
- Nivel 2: $ca^2(n/b^2)^k$
- Nivel i: $ca^i(n/b^i)^k$
- Hay $\log_b n$ niveles
- Luego tenemos

$$\sum_{i=0}^{\log_b(n)} c\,a^i\left(\frac{n}{b^i}\right)^k = c\,n^k \sum_{i=0}^{\log_b(n)} \left(\frac{a}{b^k}\right)^i$$

$$\sum_{i=0}^{p} r^i = p+1 \; si \; r=1$$

$$\frac{r^{p+1}-1}{r-1} \; si \; r>1$$

$$\frac{1-r^{p+1}}{1-r} \; si \; r<1$$

F. maestra: árbol de recursión

- Si $a=b^k$

$$c\,n^k \sum_{i=0}^{\log_b(n)} \left(\frac{a}{b^k}\right)^i = c\,n^k (1+\log_b n) = \Theta(n^k \log n)$$

- Si $a<b^k$

$$c\,n^k \sum_{i=0}^{\log_b(n)} \left(\frac{a}{b^k}\right)^i = c\,n^k \frac{1-\dfrac{a^{1+\log_b n}}{b^{k(1+\log_b n)}}}{1-\dfrac{a}{b^k}}$$

- Si $a>b^k$

$$c\,n^k \sum_{i=0}^{\log_b(n)} \left(\frac{a}{b^k}\right)^i = c\,n^k \frac{\dfrac{a^{1+\log_b n}}{b^{k(1+\log_b n)}}-1}{\dfrac{a}{b^k}-1}$$

F. maestra: árbol de recursión

- Si $a<b^k$

$$c\,n^k \sum_{i=0}^{\log_b(n)} \left(\frac{a}{b^k}\right)^i = c\,n^k \frac{1-\dfrac{a^{1+\log_b n}}{b^{k(1+\log_b n)}}}{1-\dfrac{a}{b^k}}$$

$$\frac{b^k c\,n^k - c\,a\,n^{\log_b a}}{b^k - a} = \Theta\left(n^k\right)$$

- Si $a>b^k$

$$c\,n^k \sum_{i=0}^{\log_b(n)} \left(\frac{a}{b^k}\right)^i = c\,n^k \frac{\dfrac{a^{1+\log_b n}}{b^{k(1+\log_b n)}}-1}{\dfrac{a}{b^k}-1}$$

$$\frac{c\,a\,n^{\log_b a} - b^k c\,n^k}{a - b^k} = \Theta\left(n^{\log_b a}\right)$$

F. maestra: ec. característica

- $T(n) = aT(n/b)+cn^k$
- Cambio de variable: $n = b^r$, $r = \log_b n$
- $T(b^r) = T(n) = aT(n/b)+cn^k = aT(b^{r-1})+cb^{rk}$
- $T_r = at_{r-1}+c(b^k)^r$, o sea $t_r - at_{r-1} = c(b^k)^r$
- El polinomio característico es

  $(x-a)(x-b^k)$

F. maestra: ec. característica

- Si a != b^k las soluciones son de la forma

  $c_1 a^r + c_2 b^{kr} = c_1 a^{\log_b n} + c_2 n^k = c_1 n^{\log_b a} + c_2 n^k =$

  $O(n^{\log_b a})$ si $a > b^k$

  $O(n^k)$ si $a < b^k$

- Si a = b^k entonces las soluciones son

  $c_1 b^{kr} + c_2 r b^{kr} = c_1 n^k + c_2 n^k \log_b n = O(n^k \log n)$

Recurrencia General II

$$T(n) = \begin{cases} f(n) & si\ 0 \leq n < c \\ aT(n-c) + bn^k & si\ c \leq n \end{cases}$$

$$Entonces$$

$$T(n) = O(n^k)\ si\ a < 1$$

$$T(n) = O(n^{k+1})\ si\ a = 1$$

$$T(n) = O(a^{n/c})\ si\ a > 1$$

Teoría de Algoritmos

Tema 1. Planteamiento General

Tema 2. La Eficiencia de los Algoritmos

<u>Tema 3. Algoritmos “Divide y vencerás”</u>

Tema 4. Algoritmos Voraces (“Greedy”)

Tema 5. Algoritmos para la Exploración de Grafos (“Backtraking”, “Branch and Bound”)

Tema 6. Algoritmos basados en Programación Dinámica

Tema 7. Otras Técnicas Algorítmicas de Resolución de Problemas