Algoritmos Voraces

Soluciones a los problemas

Grado en Informática
Departamento de Ciencias de la Computación e I. A.
E.T.S.I. Informática y de Telecomunicaciones
Universidad de Granada

- Contenedores en un barco
- Minimizando el número de visitas al proveedor
- Minimizando el tiempo medio de acceso
- Recubrimiento de un grafo no dirigido
- Reparaciones

Contenedores en un barco

Se tiene un buque mercante cuya capacidad de carga es de K toneladas y un conjunto de contenedores $c_1, \dots, c_n$ cuyos pesos respectivos son $p_1, \dots, p_n$ (expresados también en toneladas). Teniendo en cuenta que la capacidad del buque es menor que la suma total de los pesos de los contenedores:

- Diseñe un algoritmo que maximice el número de contenedores cargados. Demostrar su optimalidad.
- Diseñe un algoritmo que *intente* maximizar el número de toneladas cargadas.

Maximizando el número de contenedores cargados

El algoritmo voraz simplemente escoge en cada momento el contenedor todavía no cargado en el barco que tenga el menor peso. O dicho de otra forma, selecciona los contenedores en orden no decreciente de peso.

```
Ordenar de menor a mayor el vector de pesos p[];
i=1; fin=false; sum=0;
while (not fin && i<=n) {
   if sum+p[i] <= k {
      seleccionar c[i];
      i=i+1;
      sum=sum+p[i];
    }
   else fin=true;
}
```

Demostración de optimalidad del algoritmo

Sea $T = \{c_1, \ldots, c_n\}$ y supongamos sin pérdida de generalidad que $p_1 \leq p_2 \leq \ldots \leq p_n$.

La solución que proporciona el algoritmo voraz está formada por el conjunto $S = \{c_1, c_2, \ldots, c_m\}$ ($|S| = m$) de modo que $\sum_{c_i \in S} p_i = \sum_{i=1}^{m} p_i \leq K$ y $\sum_{i=1}^{m+1} p_i > K$.

En consecuencia tenemos también que $\sum_{c_i \in S} p_i + \sum_{c_i \in Q} p_i > K, \forall Q \subseteq T \setminus S, Q \neq \emptyset$ (puesto que $p_{m+1} \leq p_j \forall j > m$).

Veamos que cualquier otro subconjunto $U \subseteq T$ de items c_i que contenga un número mayor de items que S no es una solución válida, por lo que la solución óptima (con mayor número de items) es S.

Sea $U \subseteq T$ tal que $|U| = m' > m$. Se demostrará que $\sum_{a_i \in U} p_i > K$, por lo que el conjunto U no es una solución válida.

El valor de $\sum_{a_i \in U} p_i$ puede descomponerse mediante $\sum_{a_i \in U} p_i = \sum_{a_i \in S \cap U} p_i + \sum_{a_i \in U \setminus S} p_i$.

Tenemos que $|U| = m' = |S \cap U| + |U \setminus S|$, y que $|S| = m = |S \cap U| + |S \setminus U|$.

Luego $|U \setminus S| = m' - |S \cap U| > m - |S \cap U| = |S \setminus U|$, porque $m' > m$. Por tanto en el conjunto $U \setminus S$ hay más elementos que en $S \setminus U$.

Así que podemos sustituir los elementos de $U \setminus S$ por elementos de $S \setminus U$ (que tienen menor valor) y aun nos quedarán algunos elementos sobrantes (exactamente $|U \setminus S| - |S \setminus U|$).

Como todos los elementos de $U \setminus S$ son de mayor valor que todos los de $S \setminus U$ ($\forall c_j \in U \setminus S, \forall c_i \in S \setminus U, p_j \geq p_i$), entonces escojamos cualquier subconjunto $R \subsetneq U \setminus S$ tal que $|R| = |S \setminus U| < |U \setminus S|$ (de forma que el subconjunto $U \setminus S \setminus R \neq \emptyset$). Entonces

$$\sum_{c_i\in U} p_i = \sum_{c_i\in S\cap U} p_i + \sum_{c_i \in U\setminus S} p_i = \sum_{c_i\in S\cap U} p_i + \sum_{c_i\in R} p_i + \sum_{c_i\in U\setminus S\setminus R} p_i$$

$$\geq \sum_{c_i\in S\cap U} p_i + \sum_{c_i\in S\setminus U} p_i + \sum_{c_i\in U\setminus S\setminus R} p_i = \sum_{c_i\in S} p_i + \sum_{c_i\in U\setminus S\setminus R} p_i > K.$$

Y por tanto U no es una solución válida.

Minimizando el número de visitas al proveedor

Un granjero necesita disponer siempre de un determinado fertilizante. La cantidad máxima que puede almacenar la consume en *r* días, y antes de que eso ocurra necesita acudir a una tienda del pueblo para abastecerse. El problema es que dicha tienda tiene un horario de apertura muy irregular (solo abre determinados días). El granjero conoce los días en que abre la tienda, y desea minimizar el número de desplazamientos al pueblo para abastecerse.

- Diseñar un algoritmo greedy que determine en qué días debe acudir al pueblo a comprar fertilizante durante un periodo de tiempo determinado (por ejemplo durante el siguiente mes).
- Demostrar que el algoritmo encuentra siempre la solución óptima.

La idea del algoritmo es muy simple: aguantar lo máximo posible sin ir al pueblo, es decir acudir al pueblo en un día de apertura de la tienda, de modo que si no fuese ese día y acudiese en un día de apertura posterior, se quedaría sin fertilizante.

Para formalizar el problema, sean $d_1, d_2, \ldots, d_n$ los días en que abre la tienda durante el periodo de interés a partir del día de inicio ($d_0 = 0$), y d_{n+1} el día final del periodo de interés, de modo que si $i < j$ entonces $d_i < d_j$.

Para que el problema tenga solución, el número de días entre aperturas sucesivas de la tienda no puede ser mayor el número de días que tardamos en consumir el fertilizante (en caso contrario siempre nos quedaríamos sin fertilizante antes de la siguiente apertura), o sea $d_{i+1} - d_i \leq r \;\; \forall i = 0, \ldots, n$.

Una solución factible es una lista ordenada (de los días en que iremos al pueblo), $d_{j_0}, d_{j_1}, \ldots, d_{j_m}, d_{j_{m+1}}$, tal que $d_{j_0} = d_0$, $d_{j_{m+1}} = d_{n+1}$, y $d_{j_{i+1}} - d_{j_i} \leq r$.

La estrategia greedy es la siguiente: si nos encontramos en el día de visita d_i, entonces la siguiente visita será en el día d_{j^*} tal que $j^* = \text{máx}_{j>i}\{j \mid d_j - d_i \leq r\}$.

Eso equivale a decir que j^* es el día tal que $d_{j^*} - d_i \leq r$ pero $d_{j^*+1} - d_i > r$.

Optimalidad de la solución

Sea $d_{p_0}, d_{p_1}, \ldots, d_{p_m}, d_{p_{m+1}}$ la solución propuesta por el algoritmo greedy. Supongamos que hay otra solución factible $d_{q_0}, d_{q_1}, \ldots, d_{q_k}, d_{q_{k+1}}$ que es preferible, es decir que realiza menos visitas, $k < m$.

Vamos a demostrar por inducción en primer lugar que $\forall j = 1, \ldots, k,\ d_{p_j} \geq d_{q_j}$.

Para el caso $j = 1$ es resultado es evidente por la propia definición del algoritmo greedy: el granjero espera al último día de apertura al que puede llegar sin agotar el fertilizante (formalmente, si $d_{p_1} < d_{q_1}$, como debe ser $d_{p_1} \leq r$ y $d_{p_1+1} > r$, entonces $d_{q_1} \geq d_{p_1+1} > r$, y q no sería una solución factible).

Supongamos (hipótesis de inducción) que es cierto que $d_{p_{i-1}} \geq d_{q_{i-1}}$.

Entonces $d_{q_i} - d_{p_{i-1}} \leq d_{q_i} - d_{q_{i-1}}$, y como q es factible tenemos también que $d_{q_i} - d_{q_{i-1}} \leq r$. Por tanto $d_{q_i} - d_{p_{i-1}} \leq r$.

Esto significa que d_{q_i} está dentro del alcance de $d_{p_{i-1}}$, por lo que el algoritmo greedy pudo escoger d_{q_i} y no lo hizo, así que d_{q_i} no puede ser el día más lejano dentro del alcance, y por tanto $d_{p_i} \geq d_{q_i}$.

Queda pues probado que $\forall j = 1, \ldots, k,\ d_{p_j} \geq d_{q_j}$.

Finalmente, tenemos por un lado que $d_{p_k} \geq d_{q_k}$, por tanto $d_{n+1} - d_{p_k} \leq d_{n+1} - d_{q_k}$.

Además puesto que q es una solución factible, tiene que ser $d_{n+1} - d_{q_k} \leq r$.

Combinando ambas desigualdades tenemos $d_{n+1} - d_{p_k} \leq r$.

Esto significa que el día del final del periodo de interés está dentro del alcance del día d_{p_k}, por lo que no tendría sentido ir más días y llegamos a una contradicción con que $k < m$.

Minimizando el tiempo medio de acceso

Sean n programas $P_1, P_2, \ldots, P_n$ que hay que almacenar en una cinta. El programa P_i requiere s_i kilobytes de espacio; la cinta es suficientemente larga para almacenar todos los programas. Se sabe con qué frecuencia se utiliza cada programa: una fracción π_i de las solicitudes afecta al programa P_i (y por tanto $\sum_{i=1}^{n} \pi_i = 1$).

La información en la cinta se almacena con densidad constante, y la velocidad de la cinta también es constante. Una vez que se carga el programa, la cinta se rebobina hasta el principio.

Si los programas se almacenan por orden $i_1, i_2, \ldots, i_n$ el tiempo medio requerido para cargar un programa es, por tanto:

$$\hat{T} = c \sum_{j=1}^{n} \left[\pi_{i_j} \sum_{k=1}^{j} s_{i_k} \right]$$

donde la constante c depende de la densidad de grabación y de la velocidad de la cinta. Se desea minimizar $\hat{T}$ empleando un algoritmo voraz. Demostrar lo siguiente, o dar un contraejemplo: podemos seleccionar los programas (a) por orden no decreciente de s_i; (b) por orden no creciente de π_i; (c) por orden no creciente de π_i / s_i.

No optimalidad de las opciones (a) y (b)

Basta con encontrar un ejemplo en el que los tiempos de acceso obtenidos sean mayores que los obtenidos por alguna ordenación de los programas.

i	1	2	3
s_i	10	20	40
π_i	0.1	0.6	0.3

El criterio (a) origina el orden 1, 2, 3, con un valor $\hat{T}_a = 0{,}1 \cdot 10 + 0{,}6 \cdot 30 + 0{,}3 \cdot 70 = 40$.
El criterio (b) proporciona el orden 2, 3, 1 con valor $\hat{T}_b = 0{,}6 \cdot 20 + 0{,}3 \cdot 60 + 0{,}1 \cdot 70 = 37$.
En cambio, el orden 2, 1, 3 (que es el generado por el criterio (c), pues $\pi_2/s_2 = 0{,}03 > \pi_1/s_1 = 0{,}01 > \pi_3/s_3 = 0{,}0075$) obtiene un valor $\hat{T}_b = 0{,}6 \cdot 20 + 0{,}1 \cdot 30 + 0{,}3 \cdot 70 = 36$.

Optimalidad del criterio (c)

Consideremos una ordenación cualquiera (por simplicidad en la notación supongamos que es) $1, 2, \ldots, n$ y la ordenación resultante de intercambiar las posiciones i e $i+1$ (una trasposición), o sea $1, \ldots, i-1, i+1, i, i+2, \ldots, n$. El tiempo medio de acceso para la primera ordenación es (obviando la constante c)

$$\hat{T}_0 = \sum_{j=1}^{n}\left[\pi_j \sum_{k=1}^{j} s_k\right] = \sum_{j=1}^{i-1}\left[\pi_j \sum_{k=1}^{j} s_k\right] + \pi_i \sum_{k=1}^{i} s_k + \pi_{i+1} \sum_{k=1}^{i+1} s_k + \sum_{j=i+2}^{n}\left[\pi_j \sum_{k=1}^{j} s_k\right]$$

El tiempo requerido para la segunda ordenación es

$$\hat{T}_1 = \sum_{j=1}^{i-1}\left[\pi_j \sum_{k=1}^{j} s_k\right] + \pi_{i+1}\left(\sum_{k=1}^{i-1} s_k + s_{i+1}\right) + \pi_i \sum_{k=1}^{i+1} s_k + \sum_{j=i+2}^{n}\left[\pi_j \sum_{k=1}^{j} s_k\right]$$

Si restamos

$$
\begin{aligned}
\hat{T}_o - \hat{T}_t &= \pi_i \sum_{k=1}^{i} s_k + \pi_{i+1} \sum_{k=1}^{i+1} s_k - \pi_{i+1} \left(\sum_{k=1}^{i-1} s_k + s_{i+1} \right) - \pi_i \sum_{k=1}^{i+1} s_k \qquad (1) \\
&= -\pi_i s_{i+1} + \pi_{i+1} s_i
\end{aligned}
$$

Luego

$$\hat{T}_o \leq \hat{T}_t \Longleftrightarrow \pi_i / s_i \geq \pi_{i+1} / s_{i+1}$$

Es decir, que el tiempo medio de acceso es mejor (menor) cuando un programa con cociente π/s se coloca antes que otro programa cuyo cociente π/s sea menor.

Consideremos entonces la ordenación resultante del criterio (c). Por simplicidad en la notación supongamos que dicha ordenación es tal que $\pi_1/s_1 \geq \pi_2/s_2 \geq \ldots \geq \pi_n/s_n$ (sino renombramos los índices).

Cualquier otra ordenación se puede obtener a partir de esta como una permutación la misma, y toda permutación se puede obtener como una sucesión de trasposiciones.

En cada una de esas trasposiciones el tiempo medio de acceso se va incrementando, según lo visto antes. Por tanto ninguna de las otras ordenaciones tiene un tiempo de acceso menor que la del criterio (c), por lo que este criterio genera de forma voraz la ordenación óptima.

Recubrimiento de un grafo no dirigido

Consideremos un grafo no dirigido $G = (V, E)$. Un conjunto U se dice que es un recubrimiento de G si $U \subseteq V$ y cada arista en E incide en, al menos, un vértice o nodo de U, es decir $\forall(x, y) \in E$, bien $x \in U$ o $y \in U$. Un conjunto de nodos es un recubrimiento minimal de G si es un recubrimiento con el menor número posible de nodos.

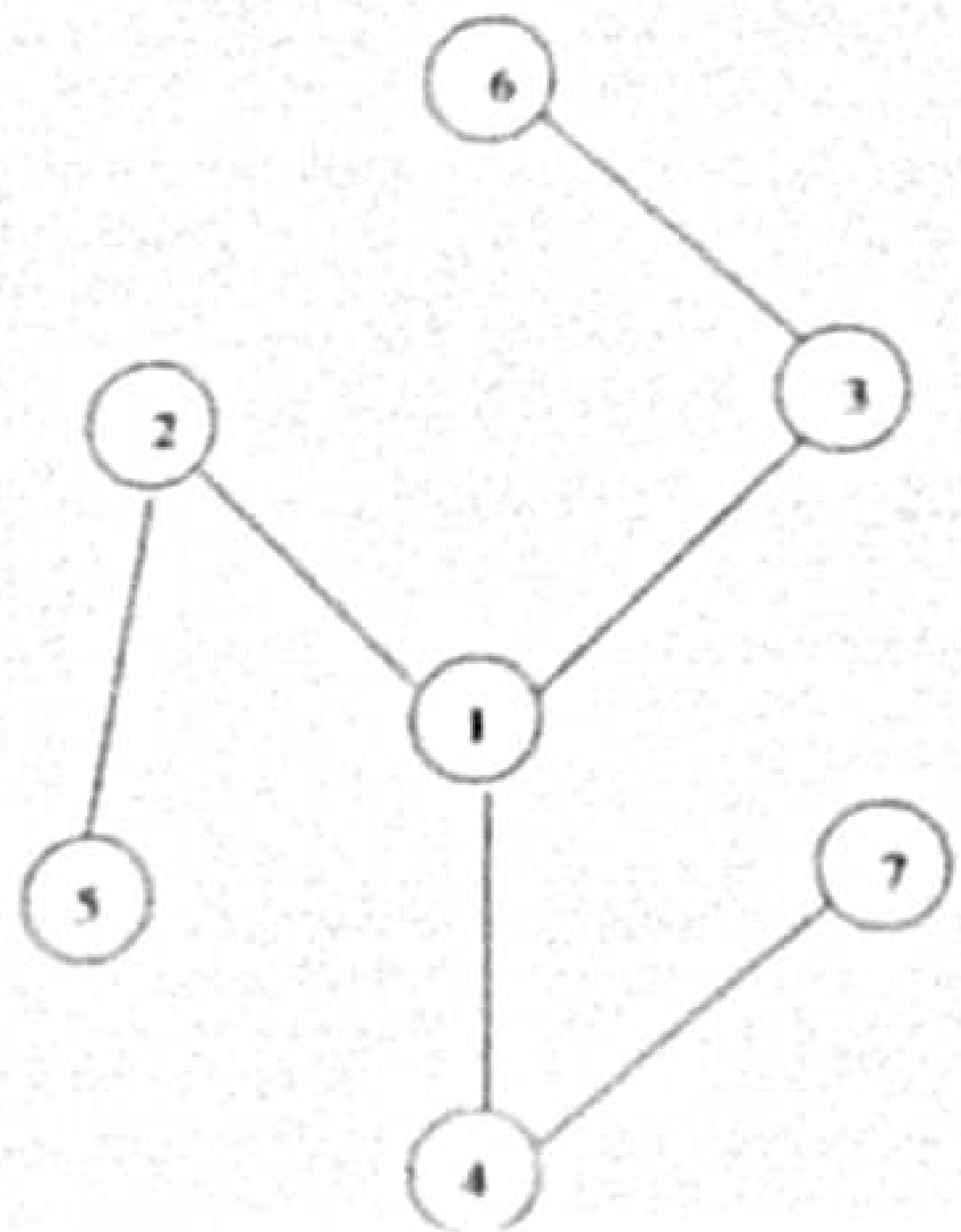
- Diseñar un algoritmo greedy para intentar obtener un recubrimiento minimal de G. Demostrar que el algoritmo es correcto, o dar un contraejemplo.
- Diseñar un algoritmo greedy que obtenga un recubrimiento minimal para el caso particular de grafos que sean árboles.

Algoritmo greedy para el caso de grafos cualesquiera

Se seleccionan de uno en uno los nodos que formarán el recubrimiento. Una función de selección razonable sería escoger en cada paso el nodo con mayor grado de incidencia de entre los nodos aún no seleccionados. De este modo se intenta recubrir el mayor número posible de aristas con el menor número de nodos.

```
recubrimiento(V,E) {
 U=vacio;
 while (E not vacio) {
   Sea v el nodo de V de maximo grado de incidencia
   U=U union {v};
   V=V-{v};
   E=E-{(u,w) | u=v ó w=v};}
 return (U)
}
```

Este algoritmo no garantiza encontrar un recubrimiento minimal. Por ejemplo, para el grafo $G = (V, E)$, donde $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ y $E = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 5), (3, 6), (4, 7)\}$, el algoritmo obtiene como resultado $U = \{1, 2, 3, 4\}$ o también, cambiando 5 por 2, 6 por 3 y 7 por 4. El tamaño del conjunto es 4, mientras que la solución óptima es $U^* = \{2, 3, 4\}$, de tamaño 3.



Algoritmo greedy para el caso de árboles

En un grafo que sea un árbol (o un bosque de árboles) siempre podemos encontrar al menos un nodo hoja (un nodo con una única arista incidente en él).
Para poder recubrir esa arista es necesario que alguno de sus nodos extremos esté en el recubrimiento.
Seleccionaremos el único nodo adyacente al nodo hoja (que tiene la posibilidad de recubrir otras aristas, mientras que el nodo hoja solo puede recubrir a su arista incidente). Si eliminamos del árbol todas las aristas incidentes en el nodo seleccionado, el resultado sigue siendo un bosque. Por tanto sigue existiendo al menos un nodo hoja en ese grafo. Repetimos el proceso hasta que hayamos eliminado todas las aristas del árbol (cuando tengamos solo una arista aislada, podemos escoger cualquiera de sus nodos extremos).
El resultado es necesariamente un recubrimiento minimal, porque todos los nodos seleccionados son imprescindibles para poder recubrir al menos una de las aristas.

Reparaciones

Un electricista necesita hacer n reparaciones urgentes, y sabe de antemano el tiempo que le va a llevar cada una de ellas: en la tarea i-ésima tardará t_i minutos. Como en su empresa le pagan dependiendo de la satisfacción del cliente, necesita decidir el orden en el que atenderá los avisos para minimizar el tiempo medio de atención de los clientes (desde el inicio hasta que su reparación es efectuada).

- Diseñar un algoritmo greedy para resolver esta tarea.
- Demostrar que el algoritmo obtiene la solución óptima.

El algoritmo greedy

Minimizar el tiempo medio de atención es lo mismo que minimizar el tiempo total de atención.

Como un cliente j espera mientras atienden a todos los clientes anteriores a él $i_1, i_2, \ldots, i_m$, el incremento en tiempo que se obtiene al añadir al cliente j es igual a la suma de los tiempos de servicio de esos clientes $\sum_{k=1}^{m} t_{i_k}$, más t_j.

Si se quiere minimizar el tiempo total, parece que lo mejor es atender a continuación al cliente con menor tiempo de servicio.

Por tanto la estrategia greedy es atender en cada momento al cliente que requiera menor tiempo de servicio de entre los restantes. Dicho de otra manera, atender a los clientes en orden no decreciente de tiempos de servicio.

Optimalidad de la solución

Sea $P = p_1 p_2 \ldots p_n$ cualquier permutación de los enteros de 1 a n, y sea $s_i = t_{p_i}$. Si se sirve a los clientes en el orden P, entonces el tiempo requerido para servir a todos los clientes será:

$$T(P) = s_1 + (s_1 + s_2) + (s_1 + s_2 + s_3) + \ldots + (s_1 + s_2 + \ldots + s_n) =$$
$$n s_1 + (n-1) s_2 + (n-2) s_3 + \ldots + 2 s_{n-1} + s_n = \sum_{k=1}^{n} (n-k+1) s_k$$

Si P no ordena a los clientes en orden creciente de tiempos de servicio, entonces podemos encontrar dos enteros a y b tal que $a < b$ y $s_a > s_b$. Es decir, se sirve al cliente a-ésimo antes que al b-ésimo, aunque el primero necesite más tiempo de servicio que el segundo.

Si intercambiamos las posiciones de esos dos clientes, obtenemos un nuevo orden de servicio P' (el orden P después de intercambiar los enteros p_a y p_b). Con esta nueva planificación, el tiempo total en el sistema de todos los clientes es:

$$T(P') = (n-a+1)s_b + (n-b+1)s_a + \sum_{k=1, k\neq a,b}^{n} (n-k+1)s_k$$

Esto es así porque para todos los s_i que no sean s_a y s_b, todos continuan apareciendo la misma cantidad de veces que antes. En cambio s_a que antes aparecía $n-a+1$ veces ahora se retrasa a la posición b, por lo que aparece $b-a$ veces menos, es decir s_a aparece $(n-a+1)-(b-a) = n-b+1$ veces. Por otro lado s_b que aparecía $n-b+1$ veces ahora se adelanta a la posición de a, por lo que aparece $b-a$ veces más, en total $(n-b+1)+(b-a) = n-a+1$ veces.

La diferencia entre los tiempos de ambas planificaciones es:

$$T(P) - T(P') = (n - a + 1)s_a + (n - b + 1)s_b - ((n - a + 1)s_b + (n - b + 1)s_a) = ((n - a + 1) - (n - b + 1))s_a + ((n - b + 1) - (n - a + 1))s_b = (b - a)(s_a - s_b) \geq 0$$

Por tanto la planificación P' es preferible a P (consume menos tiempo total). De este modo cualquier planificación que no ordene de forma no decreciente se puede mejorar sucesivamente intercambiando el orden de clientes que estén ordenados en orden decreciente de tiempos. Así las únicas planificaciones que no se pueden mejorar son las que ordenan de forma no decreciente todos sus elementos.