Algorítmica

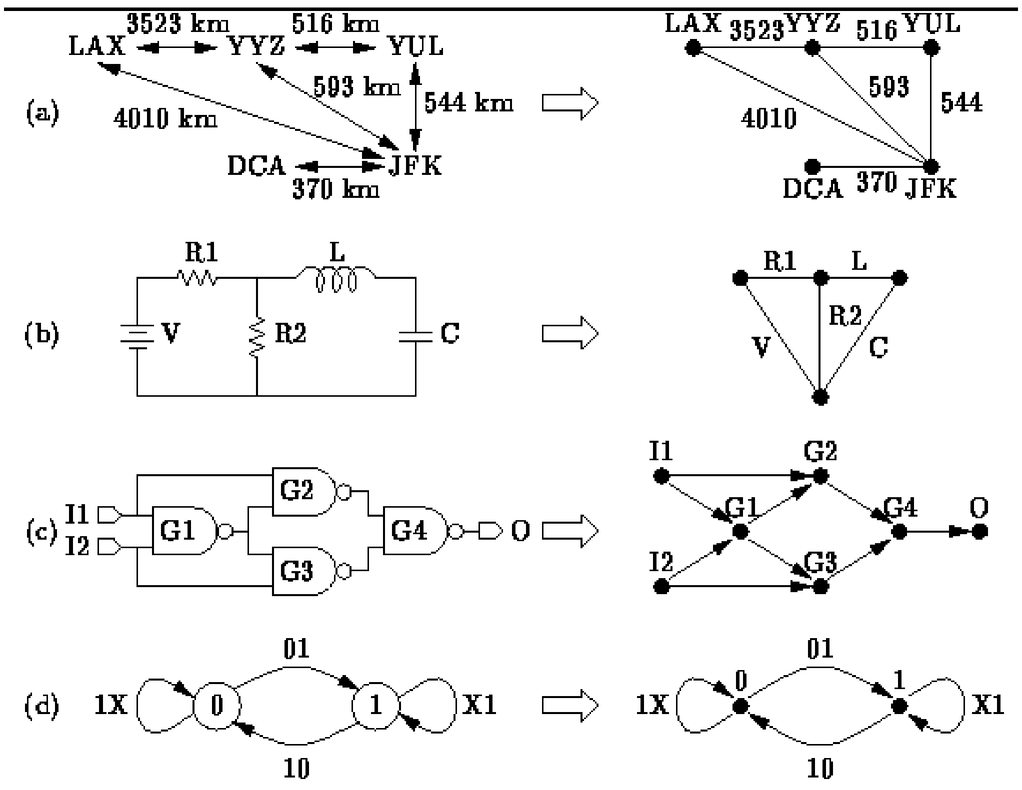
Algoritmos Greedy

Repaso de grafos

Algoritmos Greedy para Grafos

- ¿ Por qué hay que estudiar grafos?
- Podemos abstraer grafos de distintas situaciones físicas del mundo real para:
  - Resolver problemas de recorridos dando servicios eficientes a nuestros clientes o a los usuarios de los sistemas:
  - Por ejemplo el Problema del Viajante de Comercio
  - Diseñar Redes poco costosas de computadores de telefonía, etc.
- Son básicos en Inteligencia Artificial, pero también en Arquitectura y en otras muchas Ingenierías
- Desde luego en Robótica

Algoritmos Greedy para Grafos



a) Problema del viajante de comercio

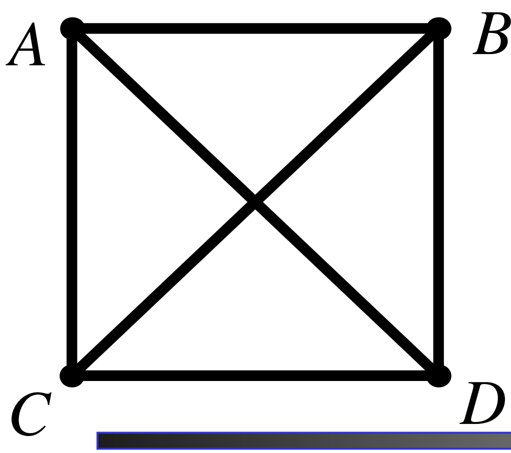
b) Un circuito eléctrico: los puntos indican donde se conectan las componentes, que son las aristas

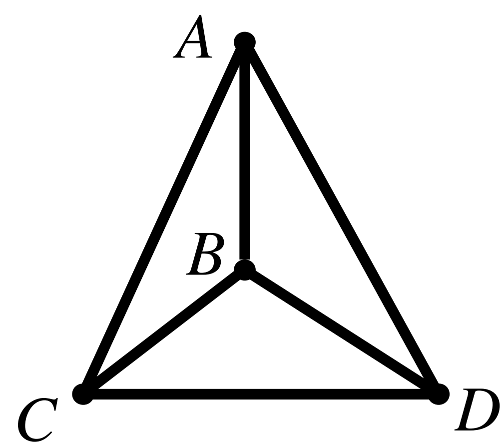
c) Un circuito lógico: los nodos son puertas lógicas y los arcos marcan flujos

d) Una maquina de estado finito: los nodos son los estados y los arcos las transiciones posibles

Nociones básicas de grafos

- Un grafo se define con dos conjuntos:
  - Un conjunto de **vertices** (nodos), y
  - Un conjunto de **aristas**
- Cuando las aristas tienen origen y final (dirección), se habla de **Grafos Dirigidos**, y en lugar de aristas tendremos arcos. Tambien hay **Grafos Ponderados**





Definición formal

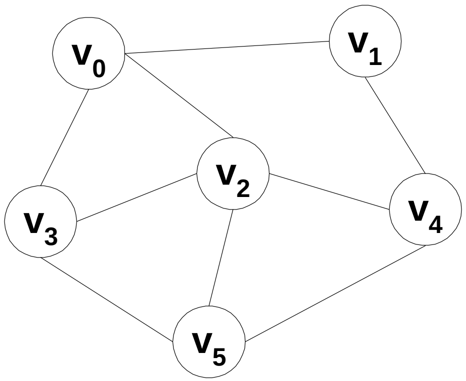
- Sea $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ un conjunto finito, no vacío. Sea $A \subseteq X \times X$ una relación. Al par $G = (X,A)$ se le llama **grafo dirigido.**
- Sea $I_X = \{(x_i, x_i), i = 1, 2, \ldots, n\}$ y $X\_^{2} = (X \times X) - I_X$ (para eliminar lazos). Definimos en $X\_^{2}$ una relación R tal que:

  $(x_i, x_j)R(x_h, x_k) \Leftrightarrow (x_i,x_j) = (x_h,x_k)$ ó $(x_i, x_j) = (x_k, x_h)$

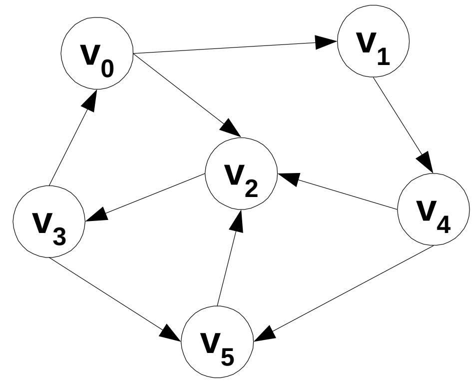
  (para quitar la dirección de los puntos).
- R es una relación de equivalencia. Definimos el conjunto cociente $(X\_^{2} / R)$ para esa relación. Al par $G = (X, B)$, con $B \subseteq X\_^{2} / R$

  se le llama **grafo no dirigido**

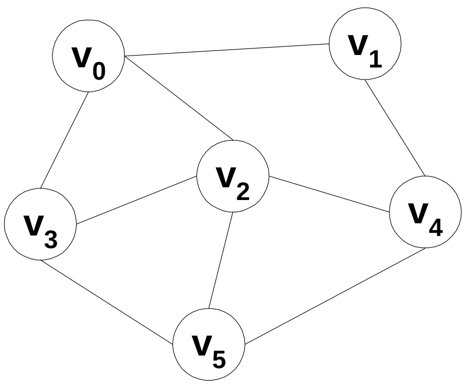
Ejemplos



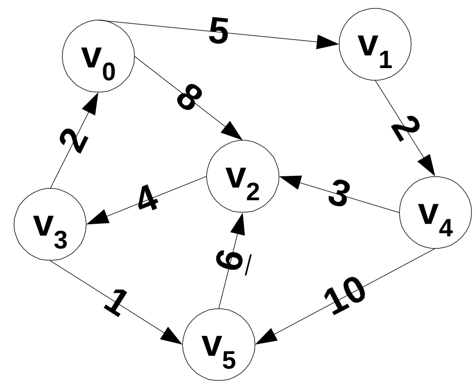
No Dirigido



Dirigido



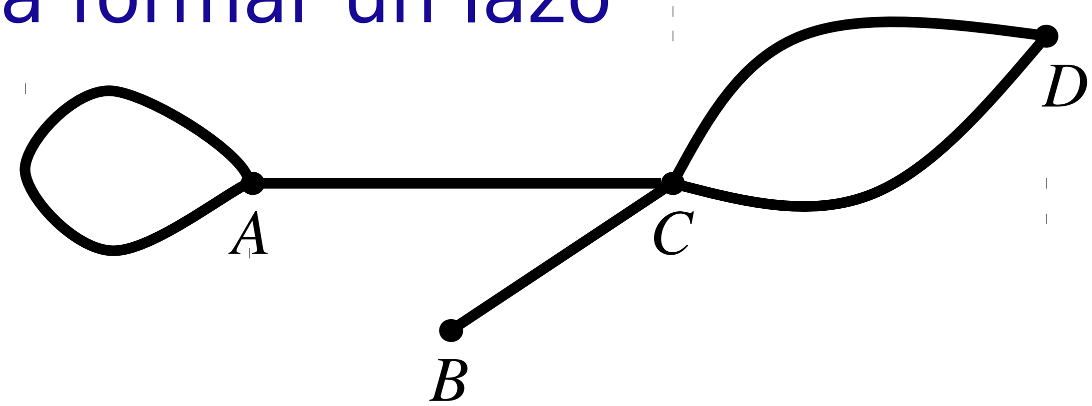
No Ponderado



Ponderado

Nociones básicas de grafos

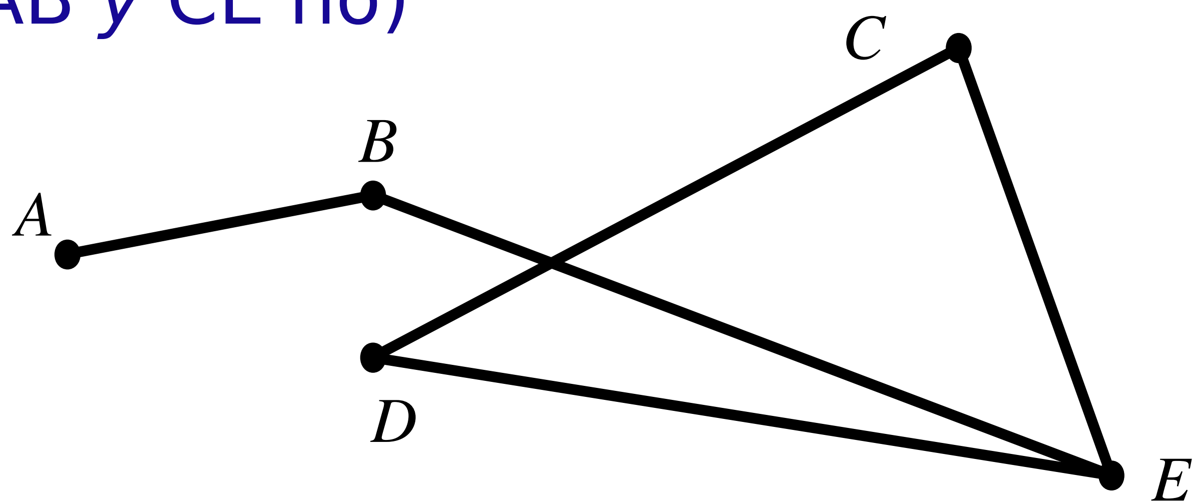
- Podemos unir dos vertices varias veces, obteniendo multiples aristas
- Podemos unir un vertice a si mismo, para formar un lazo



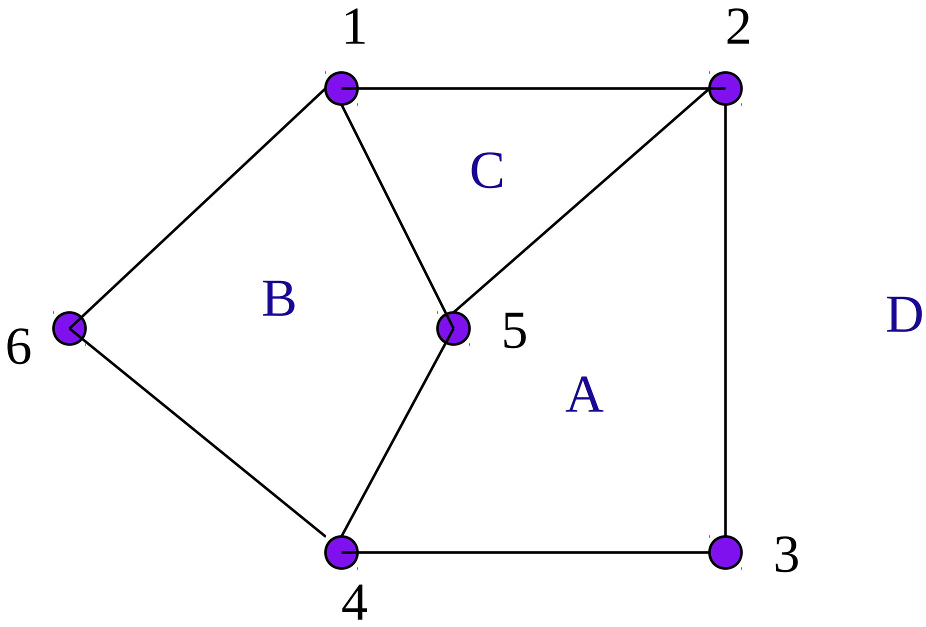
- Un grafo es completo si cualquier par de vertices distintos esta unido por una arista

Nociones básicas de grafos

- Dos vertices son adyacentes si existe una arista que los une (B y E son adyacentes, pero B y D no)
- Dos aristas son adyacentes si comparten un vertice (AB y BE son adyacentes, pero las AB *y* CE no)



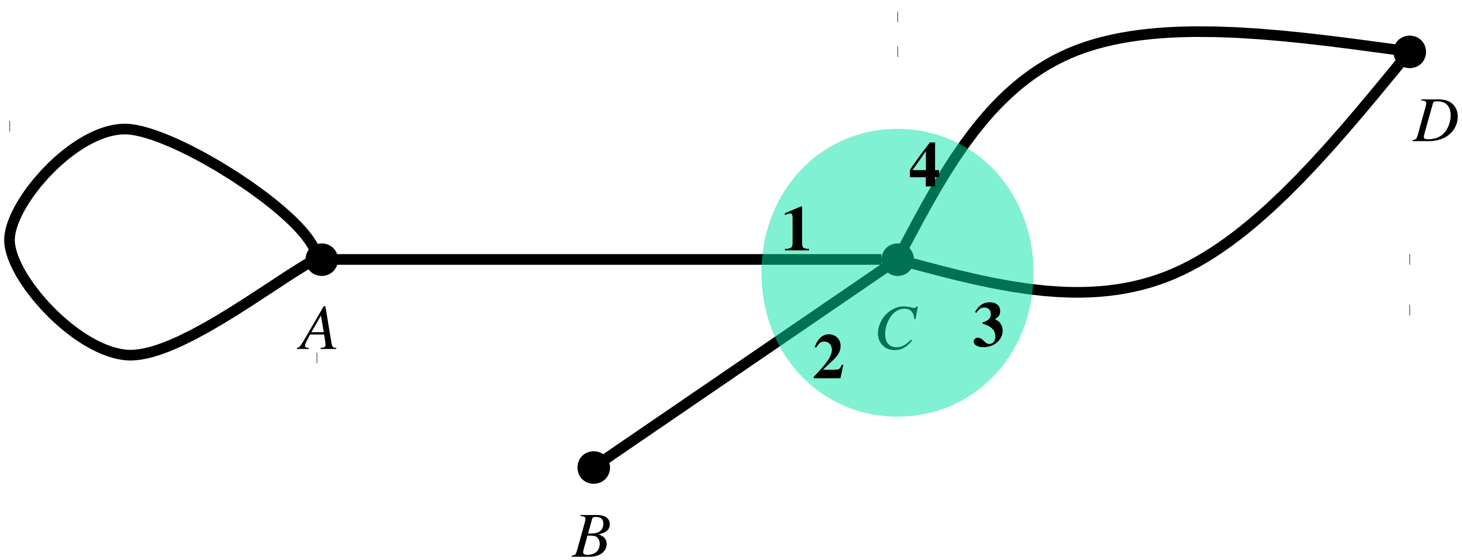
Nociones básicas de grafos



Un grafo se llama plano si puede pintarse en el plano (o en una esfera) sin que se crucen sus aristas.

Nociones básicas de grafos

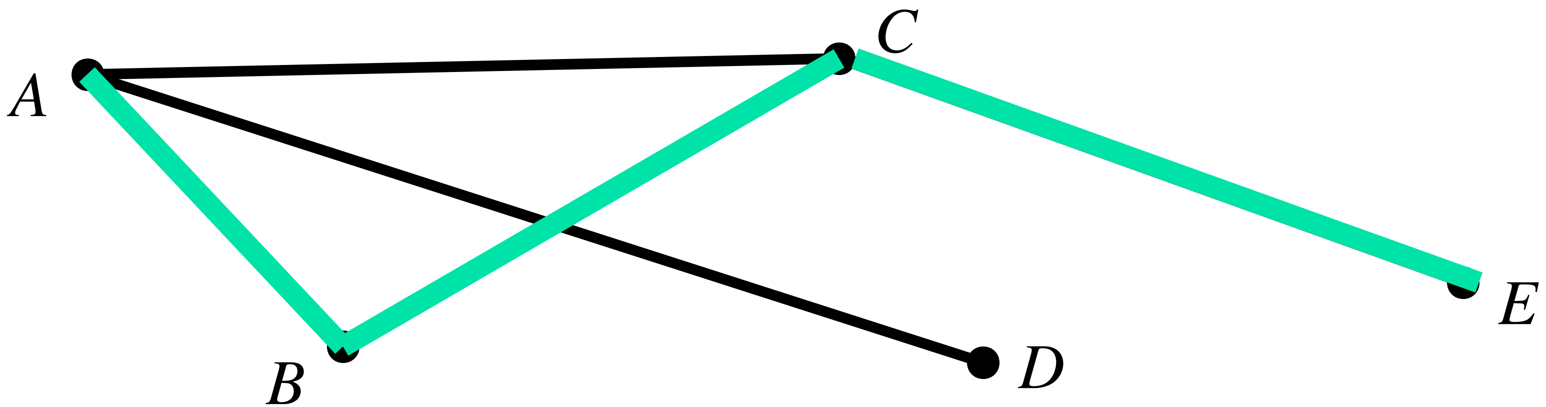
- El grado de un vertice es el numero de aristas que pasan por ese vertice.



Gra(C) = 4, Gra(A) = 3, Gra(B) = 1, Gra(D) = 2

Nociones básicas de grafos

- Un **camino** es una sucesion de aristas distintas adyacentes.
  - ¡No se permite repetir aristas en un camino!

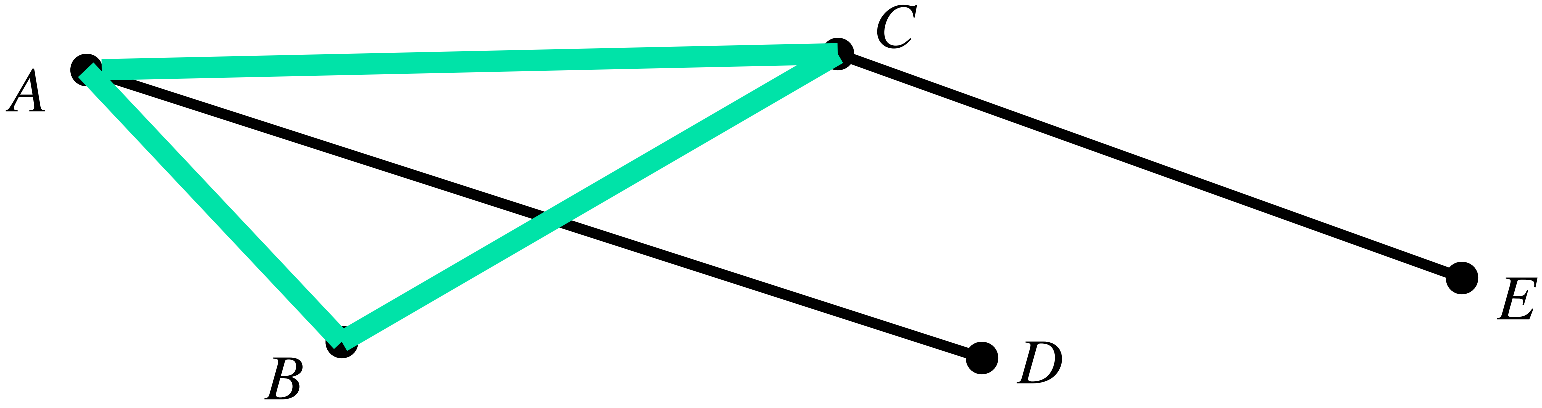


Las aristas AB, BC, y CE forman el camino ***A,B,C,E***

Las aristas AD, DA y AC no forman un camino (repeticion)

Nociones básicas de grafos

- Un **circuito** es un camino que comienza y termina en el mismo vertice.
  - ¡No se permite repetir aristas!

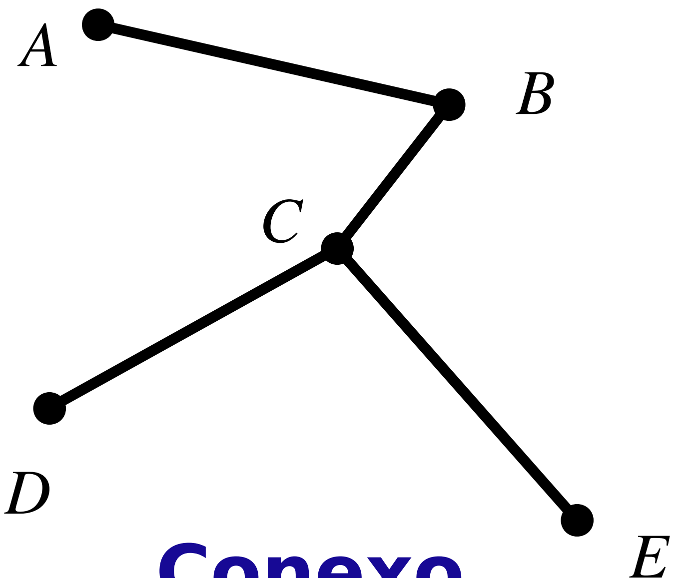


AB, BC, and CA forman el circuito ***A,B,C,A***

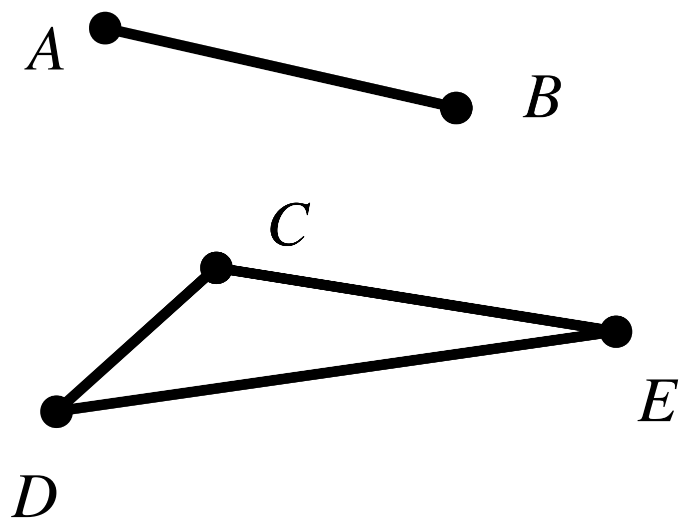
Las aristas BA y AD no forman un circuito

Nociones básicas de grafos

- Un grafo se dice **conexo** si cualesquiera dos vertices pueden unirse por un camino. Si un grafo no es conexo, se llama **inconexo**

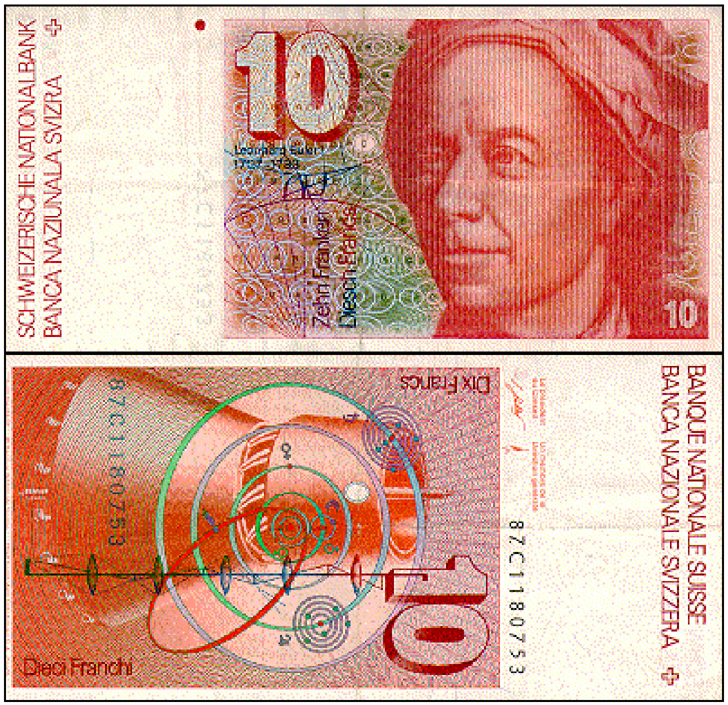


Conexo



Inconexo

Nociones básicas de grafos

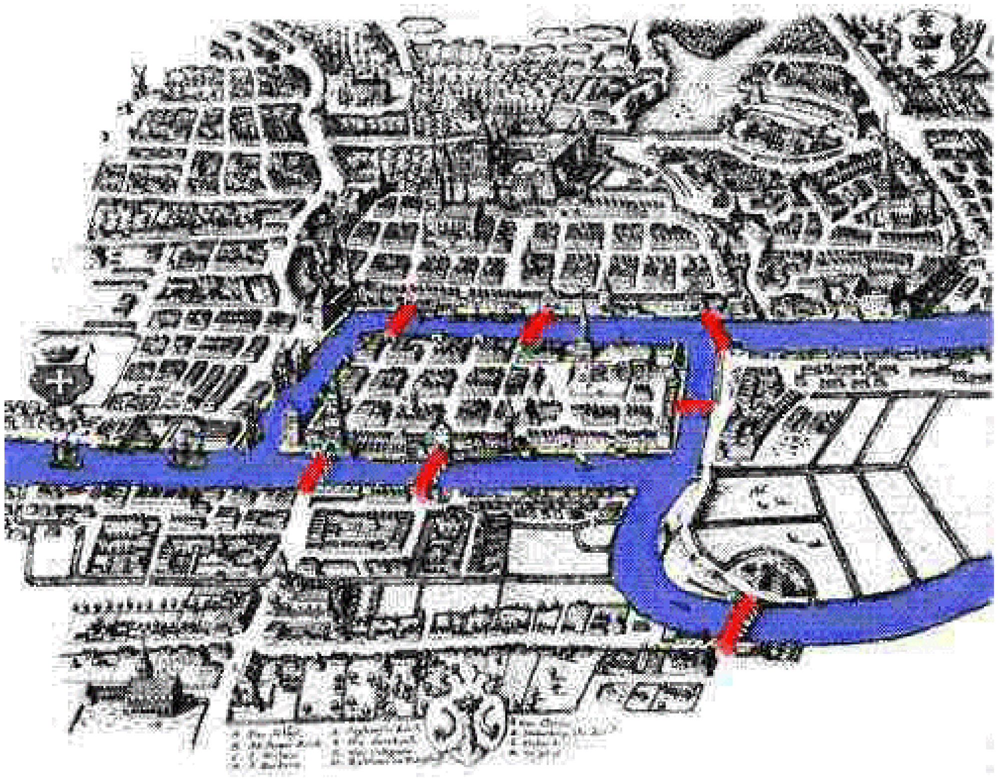


Leonhard Euler (1707-1783) ha sido el matemático mas prolifico de todos los tiempos, con contribuciones importantes en Geometria, Calculo, Fisica, ... y Grafos.

Aproximadamente la mitad de sus publicaciones las escribio despues de quedar ciego. Cuando perdió la vista comentó:

“Asi ahora me distraere menos.”

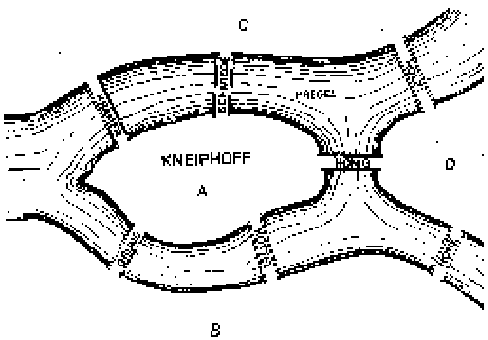
Nociones básicas de grafos

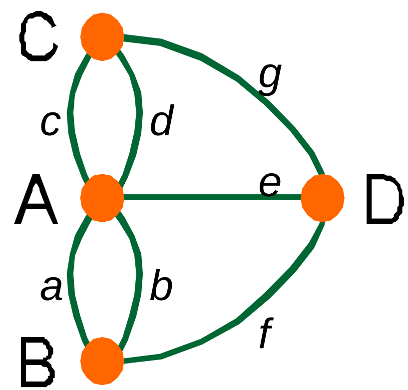


En la ciudad de **Königsberg** en Austria, hay una isla llamada **"Kneiphoff"** bordeada por el rio **Pregel**. Hay **siete puentes** conectando las orillas. El problema es saber si una persona puede recorrer todos estos puentes, pasando por todos y cada uno de ellos solamente una vez, y volviendo a su punto de partida

Nociones básicas de grafos

- Cuando Euler llego a Königsberg, habia consenso en la imposibilidad de hacer aquel recorrido, pero nadie lo aseguraba con certeza
- Euler planteo el problema como uno de grafos:
  - Cada parte de tierra supondria un vertice, y
  - Cada puente representaria una arista





Y en 1736 demostró la imposibilidad de dar un paseo como el que se quería

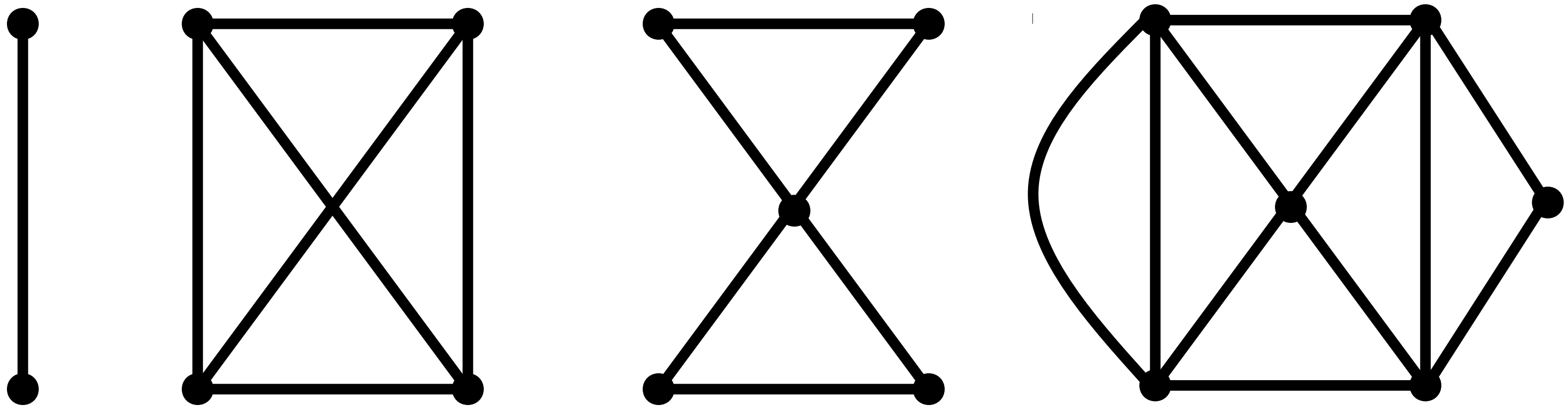
Nociones básicas de grafos

- Un **Camino Euleriano** es un camino que pasa a traves de cada arista del grafo una y solo una vez
- Un **Circuito Euleriano** es un circuito que pasa por cada arista del grafo una y solo una vez
- **Teorema de Euler**
  - Si todos los vertices de un grafo son de grado impar, entonces no existen circuitos eulerianos.
  - Si un grafo es conexo y todos sus vertices son de grado par, existe al menos un circuito euleriano.

Nociones básicas de grafos

- Un **Circuito Hamiltoniano** es un circuito que pasa a traves de cada vertice una y solo una vez, y termina en el mismo vertice en el que comenzó.
- Los **Circuitos Hamiltonianos y los Circuitos Eulerianos** son conceptos distintos y separados: En un grafo podemos tener de unos, y no de otros.
- A diferencia de los Circuitos Eulerianos, no tenemos un resultado simple que nos diga si un grafo tiene o no Circuitos Hamiltonianos.

Ejemplos



¿Circuito Euleriano?

no no si si

¿Circuito Hamiltoniano?

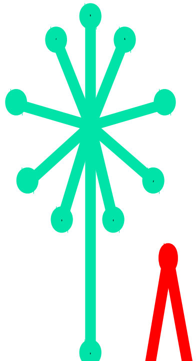
no si no si

Ejemplos

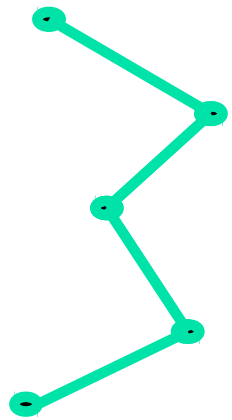
- La determinacion de un circuito euleriano minimal es lo que se conoce con el nombre del Problema del Cartero Chino:
  - Encontrar el circuito de longitud minimal que recorre cada arista de un grafo al menos una vez.
- A la busqueda de un circuito hamiltoniano minimal recibe el nombre de Problema del Viajante de Comercio:
  - Hallar el circuito de longitud minimal que recorre todos los nodos de un grafo una y solo una vez, comenzando y terminando por el mismo vertice

Nociones básicas de grafos

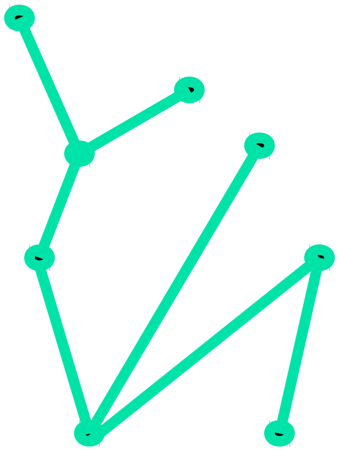
- Un **arbol** es un grafo que no tiene ciclos.
- Un grafo conexo y sin circuitos, se llama un **arbol**

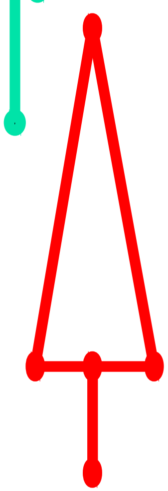


Si

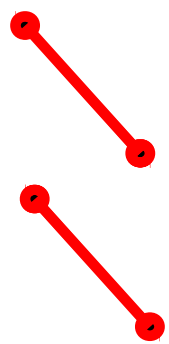


Si

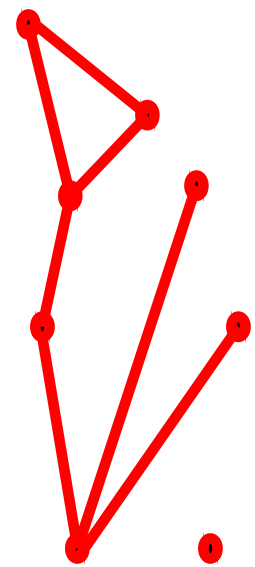




No



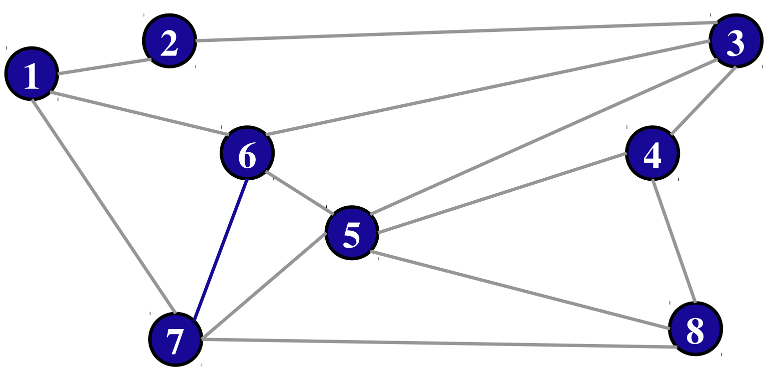
No



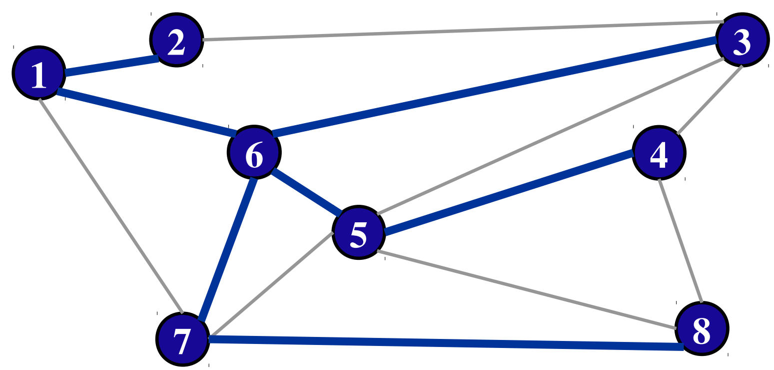
Árbol Generador de un Grafo

- Sea T = (V, F) un subgrafo de G = (V, E).
  - T es un arbol generador de G:
  - T es aciclico y conexo.
  - T es conexo y tiene |V| - 1 arcos.
  - T es aciclico y tiene |V| - 1 arcos.

G = (V, E)

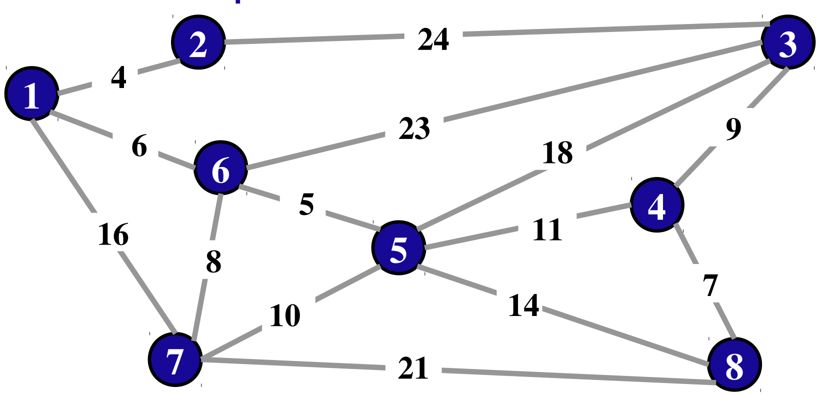


T = (V, F)

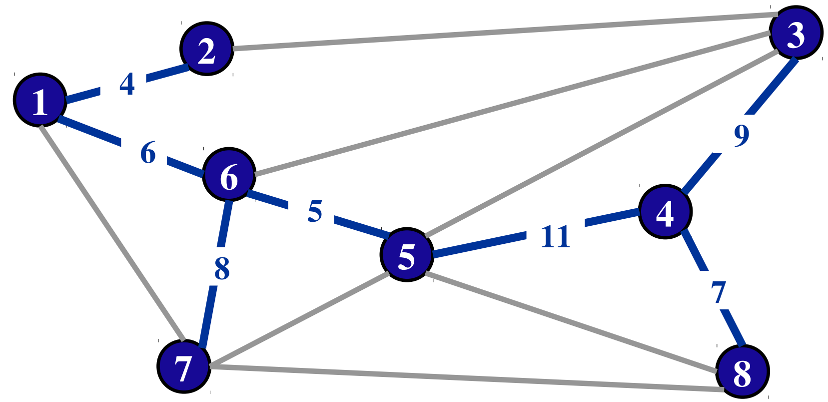


Arbol Generador Minimal

- Dado un grafo conexo G con pesos en sus arcos c_e, un **Arbol Generador Minimal** es un arbol generador de G en el que la suma de los pesos de sus arcos es minima.



G = (V, E)



T = (V, F) l(T) = 50)

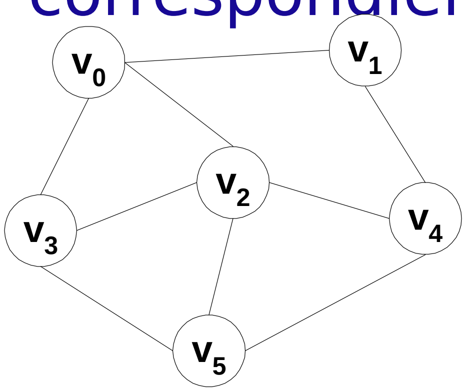
- **Teorema de Cayley** (1889). Hay n^{n-2} arboles generadores de K_n (el grafo completo de n vertices)
  - Por tanto el empleo de la fuerza bruta para encontrar el AGM de un grafo no es un metodo recomendable

La matriz de adyacencia

- Si suponemos un grafo G = (X, E) con n vértices, entonces su matriz de adyacencia es:

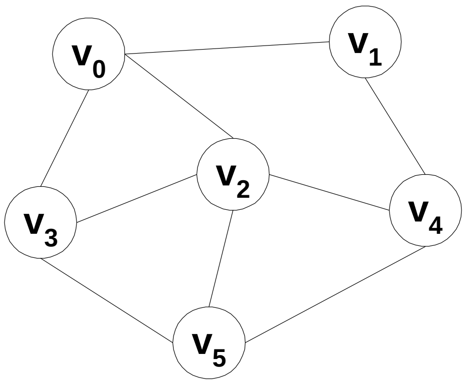
$$A_G(i,j)=\begin{cases} 1\ldots\ldots si\,(x_i, x_j)\in E \\ 0\ldots\ldots si\,(x_i, x_j)\notin E \end{cases}$$

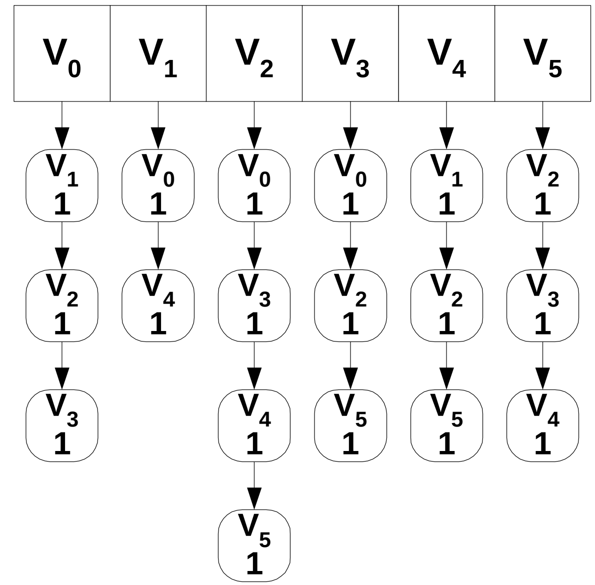
- Cuando el grafo es ponderado, el valor que aparece en cada casilla es el peso de la arista correspondiente

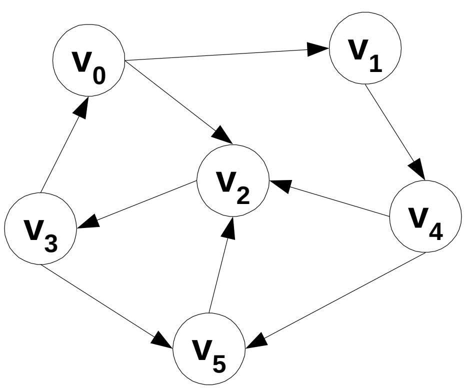


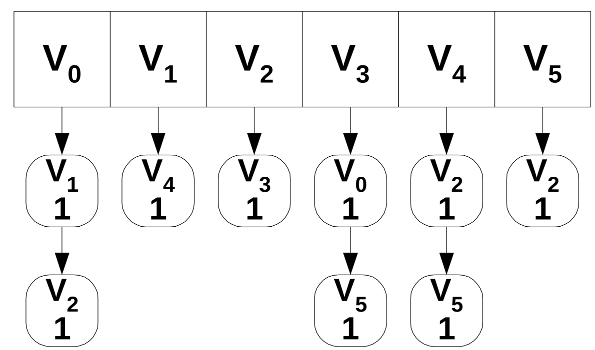
left → right	0	1	2	3	4	5
0	-	1	1	1	-	-
1	1	-	-	-	1	-
2	1	-	-	1	1	1
3	1	-	1	-	-	1
4	-	1	1	-	-	1
5	-	-	1	1	1	-

Representación por listas de adyacencia









Matriz de Incidencia

- Si se trata de un grafo no dirigido, entonces la matriz es:

$$B_G(i,j)=\begin{cases} 1\ldots\ldots si\ldots x_i\ldots esta\ldots en\ldots a_j \\ 0\ldots\ldots en\ldots otro\ldots caso \end{cases}$$

donde x_i es un nodo y a_j es una arista.

- Si se trata de un grafo dirigido, entonces la matriz es:

$$B(i,j)=\begin{cases} +1\ldots\ldots si\ldots x_i\ldots es\ldots inicial\ldots en\ldots a_j \\ 0\ldots\ldots en\ldots otro\ldots caso\ldots(bucle) \\ -1\ldots\ldots si\ldots x_i\ldots es\ldots final\ldots en\ldots a_j \end{cases}$$

donde x_i es un nodo y a_j es un arco.