



# UNIVERSIDAD DE GRANADA

---

Facultad de Ciencias

DOBLE GRADO EN FÍSICA Y MATEMÁTICAS

TRABAJO FIN DE GRADO

## GRUPOS DE ISOMETRÍAS EN LOS MODELOS COSMOLÓGICOS DE FRIEDMANN-LEMAÎTRE- ROBERTSON-WALKER

Presentado por:  
**D. Sergio Turrado Prieto**

Tutor:  
**D. Antonio Lasanta Becerra**

Cotutor:  
**D. Bert Janssen**

Curso Académico 2022-2023

#### DECLARACIÓN DE ORIGINALIDAD

D. Sergio Turrado Prieto

Declaro explícitamente que el trabajo presentado como Trabajo de Fin de Grado (TFG), correspondiente al curso académico 2022-2023, es original, entendida esta, en el sentido de que no ha utilizado para la elaboración del trabajo fuentes sin citarlas debidamente.

En Granada a 18 de julio de 2023

Fdo: Sergio Turrado Prieto

# Índice general

Agradecimientos . . . . .	5
<b>Introducción</b>	<b>9</b>
<b>1 Notación y ambiente general de trabajo</b>	<b>13</b>
<b>2 Vectores de Killing y transformaciones de Weyl</b>	<b>15</b>
2.1 Vectores de Killing y aplicaciones . . . . .	15
2.1.1 La derivada de Lie y el corchete de Lie . . . . .	15
2.1.2 Vectores de Killing . . . . .	20
2.1.3 Condiciones de simetría máxima . . . . .	24
2.1.4 Aplicaciones físicas de los vectores de Killing . . . . .	28
2.2 Transformaciones conformes de coordenadas en $\mathbb{R}^{1,N-1}$ y transformaciones de Weyl en variedades diferenciables . . . . .	29
2.3 Cálculo de vectores de Killing conformes y vectores de Killing en las variedades $\mathbb{K}^N$ . . . . .	33
<b>3 Métricas Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker</b>	<b>37</b>
3.1 Métricas FLRW: forma y tensores de curvatura . . . . .	37
3.2 Modelos cosmológicos de métricas FLRW . . . . .	40
3.3 Modelos sencillos de métricas FLRW . . . . .	42
3.3.1 Universo estático de Einstein . . . . .	42
3.3.2 Espacio de De Sitter . . . . .	42
3.3.3 Espacio de Einstein-De Sitter . . . . .	43
3.4 Transformaciones conformes y métricas FLRW máximamente simétricas . .	44
<b>4 Cálculo de vectores de Killing en métricas FLRW</b>	<b>49</b>
4.1 Vectores de Killing del universo de De Sitter . . . . .	51
4.2 Vectores de Killing del universo de Einstein - De Sitter . . . . .	53
4.3 Vectores de Killing intrínsecos de métricas FLRW generales con $\dot{\mathbf{a}}(\mathbf{t}) \neq \mathbf{0}$ .	56
4.4 Vectores de Killing de métricas FLRW con $\mathbf{k} = \mathbf{0}$ . . . . .	58
4.5 Vectores de Killing de métricas FLRW con $\dot{\mathbf{a}}(\mathbf{t}) = \mathbf{0}$ . . . . .	61
<b>Conclusiones</b>	<b>65</b>

Referencias . . . . . 68

## Agradecimientos

En primer lugar, me gustaría expresar mi gratitud hacia las personas que, de alguna manera u otra, han contribuido a que este Trabajo de Fin de Grado llegue a buen puerto. Quiero agradecer a mi cotutor, Bert Janssen, su ayuda y guía, y sobre todo la pasión y empeño que pone cada día en su labor docente e investigadora, que han servido de inspiración a lo largo del curso académico. A mi tutor, Antonio Lasanta, sus consejos y su diligencia. También a Alejandro Jiménez Cano su ayuda y clarividencia, que con total seguridad me han ahorrado muchas horas de trabajo valdío, y al profesor Antonio Rodríguez Garzón su ayuda con la bibliografía matemática. Por último, quiero dar las gracias a mi familia y a mis amigos cercanos por su apoyo incondicional y su confianza en que este trabajo saliera adelante, incluso cuando yo mismo dudaba de ello. A mi amigo Adri, gracias por tus sugerencias y tu tiempo. En especial, quiero acordarme de mis compañeros de piso Laura, Enrique y María. Gracias por vuestra paciencia en el día a día y vuestro apoyo. Sois los que mejor sabéis lo difícil que ha sido el camino, esta memoria os la dedico a vosotros.

## Summary

In the geometrical formulation of General Relativity, the Universe is described by a four-dimensional differentiable manifold, together with a lorentzian metric. Roughly one hundred years ago, it was shown that the most general family of metrics that allow for an homogeneous and isotropic universe are the so-called *Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker* metrics. Such metrics accurately describe our Universe at very large scales. The homogeneity and isotropy of universes described by Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker metrics naturally leads to the question of how many *symmetries* these universes have, and which are they.

Throughout this undergraduate thesis, we will show that symmetries are described by *metric isometries* in the manifold. In order to calculate them, defining the *Lie derivative* will be required, and its use will result in the characterisation of metric isometries via the *Killing vectors*, which indicate symmetry directions in the differentiable manifold. Hence, a manifold will have as many symmetries as Killing vectors.

Even though the rigorous mathematical formulation of these concepts is complicated, we will see that in practice, obtaining the symmetry group of a FLRW space amounts to solving a system of partial differential equations in curved space in order to find the Killing vectors, and afterwards computing certain simple (although tedious) commutation relations between these vectors.

The initial goal of this thesis is to examine the number of symmetries of some particular cosmological models based on FLRW metrics. The contents that follow are related to the subjects of *Relatividad General* of the degree in Physics and *Variedades Diferenciables* of the degree in Mathematics. The primary bibliography consulted has been chapters 15, 23 and 24 of [1]. Chapters 8 and 9 of [2], and chapters 1-4 of [3] have also been important (although secondary).

The general structure of the thesis is the following:

In chapter 1, we introduce the geometrical formalism and the notation that will be used throughout the thesis.

In chapter 2, we present the mathematical tools that will be needed to geometrically calculate the symmetries of a differentiable manifold. More precisely, we will define the Lie derivative along a vector field as a means to eventually define the Killing vectors. It will be shown that, for every independent Killing vector, the manifold has a symmetry, and, moreover, that the set of Killing vectors is a real Lie algebra that generates the group of symmetries of the manifold. In subsection 2.1.3, the intuitive concepts of homogeneity and isotropy lead to the definition of maximally symmetric manifolds in terms of their curvature tensors, and also in terms of the number of linearly independent Killing vectors that they allow.

Noether's Theorem states that every symmetry is associated with a conservation law. In subsection 2.1.4, we explicitly calculate the conserved quantity associated with each Killing vector.

In section 2.2, we generalise the concept of Killing vectors to that of conformal Killing vectors, and explain the relation between them. Conformal Killing vectors and Killing vectors of the  $N$ -dimensional Minkowski space are then explicitly calculated. Additionally, we define the Weyl transformations of the metric, which are then used in section 2.3 to calculate the conformal Killing vectors and Killing vectors of maximally symmetric

riemannian manifolds, which in term will represent spatial sections of universes described by FLRW metrics.

In chapter 3, FLRW metrics are formally introduced as being the ones that satisfy the Cosmological Principle of homogeneity and describe perfect fluids. Throughout said chapter, we will present the cosmological equations that govern the behaviour of FLRW universes, and briefly describe the most currently accepted cosmological model. Furthermore, we present some simple yet historically remarkable models of universes with a FLRW metric, such as Einstein's Static Universe, De Sitter space and the Einstein-De Sitter universe.

In section 3.4 we show that FLRW metrics are conformally flat, which will make it easier to calculate their Killing vectors in certain cases. Additionally, maximally symmetric FLRW metrics are characterised in terms of their scale factor and the curvature of their spatial sections. This leads to a consistency condition for their possible foliations.

Lastly, in chapter 4, we take on the task of calculating the number of Killing vectors of the FLRW models, that is to say, their number of symmetries. The combined information about the form of such metrics from chapter 3 and the mathematical tools and results from section 2 will allow us to calculate the number of symmetries in these spaces via the number of linearly independent Killing vectors that they admit. The strategy followed has been to substitute an appropriate Ansatz in the Killing equation and then take advantage of the different mathematical results proved throughout the thesis in order to solve it.

Using this approach, the Killing vectors of the De Sitter and Einstein-De Sitter spaces have been calculated. Moreover, 6 Killing vectors have been found for every FLRW metric with a non-constant scale factor, which yields a lower bound of 6 symmetries for spaces described by such metrics.

In the case of FLRW metrics with a constant scale factor, the Killing equation has been fully solved, finding 7 independent Killing vectors for an arbitrary non-zero value of the spatial curvature, and 10 Killing vectors for spaces with a spatial curvature of zero. This result is consistent with the characterisation of maximal symmetry for FLRW spaces found in section 3.4.

For FLRW metrics with flat spatial curvature, 6 Killing vectors have been found for a non-constant scale factor, and 10 for a constant one, which is consistent with the characterisation of maximal symmetry mentioned above. However, the 10 Killing vectors of the De Sitter space have not been found in this section.

This thesis ends with a section of conclusions, in which we consider the initial goals to have been met, and we explain the lines of research that are still being followed in order to fully solve the Killing equation for an arbitrary FLRW metric. This more ambitious objective was not the initial goal of this thesis.





# Introducción

Todas las civilizaciones de las que se tiene constancia histórica tienen mitos sobre su creación y su lugar en el Universo. Y es que, desde tiempos remotos, el ser humano se ha preguntado por el origen mismo del mundo en el que vive. Ya en la época griega presocrática, Anaximandro y Thales de Mileto (siglo VI A.C.) trataron de realizar suposiciones sobre la forma y constitución del Universo. En el Renacimiento, el astrónomo y matemático polaco Nicolás Copérnico (1473-1543) sostenía en *De revolutionibus orbium coelestium* ([4]) que la Tierra no ocupa ningún lugar especial en el Universo, lo que se conoce como el *principio Copernicano*. Aunque él no lo sabía, no iba tan desencaminado. Hoy en día, en los años 20 del siglo XXI, la formulación moderna de la Cosmología cumple 100 años, y en parte se basa en el mismo concepto, rebautizado esta vez como *Principio Cosmológico* y formulado con rigor en el ámbito de la geometría.

Esta formulación geométrica de la Cosmología, que está de centenario, ha llevado a la actual cosmovisión de un universo en evolución, aunque el camino para llegar hasta aquí ha sido cuanto menos tortuoso (consúltese [5], chap. 1 para un resumen). En 1915, el físico alemán Albert Einstein (1879-1955) publica su teoría de la Relatividad General, y dos años después, en 1917, consigue una solución de un universo con materia a sus propias ecuaciones, que representa el primer modelo cosmológico matemáticamente riguroso: el *Universo Estático de Einstein*. Debido a los prejuicios de la época, Einstein obligó a que su universo fuese matemáticamente estático, es decir, que no sufriese expansión ni contracción. Para ello, tuvo que introducir *ad hoc* una *constante cosmológica* en sus ecuaciones, en lo que él mismo calificaría posteriormente como su mayor error. En 1918, el astrónomo y matemático neerlandés Willem de Sitter tomó la constante cosmológica de Einstein y demostró que un universo sin materia y dominado por esa constante habría de estar en constante expansión. Este hallazgo supuso el abandono de la idea de universo estático, y el primer antecedente de un universo en evolución. En 1922, el físico y matemático Alexander Friedmann (1888-1925) resolvió las ecuaciones de Einstein utilizando un *Ansatz* para la métrica que asumía la homogeneidad e isotropía del Universo, y mostró que, en general, las ecuaciones de Einstein suponiendo estos principios llevan a un universo dinámico. Posteriormente, en 1927, el físico y sacerdote belga Georges Lemaître (1894-1966) descubrió las ecuaciones de Friedmann de manera independiente, aunque sus hallazgos han pasado desapercibidos hasta recientemente. Además, fue el primero en poner a prueba esta idea de universo en evolución deduciendo teóricamente y demostrando experimentalmente la relación lineal entre la velocidad de recesión de las galaxias y su distancia a partir de las observaciones de Vesto Slipher en 1917. Erróneamente se suele atribuir este mérito al astrónomo estadounidense Edwin Hubble (1889-1953), [6] quien derivó la misma ley (que lleva su nombre) en 1929. En 1935 y 1936, el matemático inglés Arthur Walker (1909-2001) y el físico estadounidense Howard Robertson (1903-

1961) demostraron de manera independiente que la métrica que utilizó Friedmann para resolver las ecuaciones de Einstein es la más general posible que preserva homogeneidad e isotropía. Es por eso que se conoce como *métrica Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker*.

Por otra parte, un concepto central en Física es el de la *simetría*. Históricamente, los físicos siempre se han preguntado por cuáles son las simetrías de su sistema de estudio. Una simetría es una cierta transformación bajo la que el sistema queda invariante. Ya en el siglo XVII, el científico italiano Galileo Galilei (1564-1642) postuló las simetrías que debía cumplir un sistema físico, en términos de los cambios de coordenadas que debía admitir la formulación matemática que lo describe. Actualmente, se sabe que no todos los sistemas físicos transforman bien bajo las simetrías galileanas, pero el concepto de simetría sigue estando muy presente en campos como la Física de Partículas, y está muy relacionado con la Teoría de Grupos.

El estudio de los modelos cosmológicos nacidos de métricas Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker lleva por lo tanto de manera natural a preguntarnos por cuántas simetrías tienen estos universos, y cuáles son.

En la formulación geométrica de la Relatividad General, el Universo se describe mediante variedades diferenciables de cuatro dimensiones, equipadas con una métrica lorentziana. En el desarrollo de esta memoria veremos que las simetrías de estos espacios se traducen de manera natural en *isometrías* de la métrica. El cálculo de estas isometrías y sus generadores requerirá del uso de la *derivada de Lie*, y nos llevará a caracterizar las isometrías de una métrica a través de los llamados *vectores de Killing*, que serán los que den las direcciones de simetría de la variedad diferenciable, y por tanto esta tendrá tantas simetrías diferentes como vectores de Killing. Aunque la formulación matemática rigurosa de estos conceptos es algo complicada, veremos que, en la práctica, calcular el grupo de simetrías de un espacio FLRW se reduce a resolver un sistema de ecuaciones diferenciales en espacio curvo para encontrar los vectores de Killing, y calcular posteriormente unas relaciones de conmutación sencillas (aunque tediosas) entre estos últimos.

El objetivo de partida de este Trabajo de Fin de Grado será estudiar cuántas simetrías tienen algunos modelos cosmológicos concretos basados en métricas FLRW. Los contenidos que se exponen en esta memoria tienen relación con las asignaturas de Relatividad General del grado en Física y Variedades Diferenciables del grado en Matemáticas. La bibliografía principal que se ha consultado para este trabajo ha consistido en los capítulos 15, 23 y 24 de [1]. Asimismo, han sido importantes (aunque no principales) los capítulos 8 y 9 de [2] y los capítulos 1-4 de [3].

El esquema general de razonamiento es el siguiente:

En el capítulo 1 se introduce el formalismo geométrico y la notación que se utilizará.

En el capítulo 2 se presentan las herramientas matemáticas que permitirán calcular mediante métodos geométricos las simetrías de una variedad diferenciable. En concreto, se definirá la derivada de Lie a lo largo de un campo vectorial como herramienta para poder definir los vectores de Killing. Se verá que por cada vector de Killing independiente, la variedad tiene una simetría, y además que el conjunto de vectores de Killing es un álgebra de Lie real que genera el grupo de simetrías de la variedad. En la subsección 2.1.3, a partir de los conceptos intuitivos de homogeneidad e isotropía, definimos las variedades máximamente simétricas en términos de sus tensores de curvatura y también del número de vectores de Killing linealmente independientes que admiten.

El Teorema de Noether establece que cada simetría está asociada a una ley de con-

servación, y en la subsección 2.1.4 se calcula explícitamente cuál es la cantidad que se conserva asociada a cada vector de Killing.

En la sección 2.2 se generaliza el concepto de vectores de Killing a los vectores de Killing conformes, y se explica la relación entre ellos. Se calculan explícitamente los vectores de Killing conformes y los vectores de Killing del espacio de Minkowski  $N$ -dimensional. Asimismo, se definen las transformaciones de Weyl de la métrica, que se aprovechan en la sección 2.3 para calcular explícitamente los vectores de Killing conformes y los vectores de Killing de las variedades máximamente simétricas de signatura riemanniana, que serán las secciones espaciales de los espacios con métricas FLRW.

En el capítulo 3 se introducen formalmente las métricas FLRW como aquellas que cumplen el Principio Cosmológico de homogeneidad y que describen fluidos perfectos. A lo largo de dicho capítulo, se presentan las ecuaciones cosmológicas que rigen el comportamiento de universos FLRW y se hace una breve reseña sobre el modelo cosmológico más aceptado actualmente. Asimismo, se presentan algunos modelos sencillos e históricamente relevantes de universos basados en métricas FLRW, como son el Universo Estático de Einstein, el espacio de De Sitter o el universo de Einstein-De Sitter.

En la sección 3.4 se demuestra que las métricas FLRW son conformemente planas, lo que facilitará el cálculo de sus vectores de Killing en casos concretos. Asimismo, se caracterizan las métricas FLRW de simetría máxima en términos de su factor de escala y de la curvatura de sus secciones espaciales, y se encuentra una condición de ligadura sobre sus posibles foliaciones.

Por último, en el capítulo 4 se aborda el cálculo del número de vectores de Killing de los modelos FLRW, lo cual permite calcular su número de simetrías. La información combinada sobre la forma de estas métricas del capítulo 3 con las herramientas y resultados matemáticos del capítulo 2 permiten calcular el número de simetrías de estos espacios a través del número de vectores de Killing linealmente independientes que admiten. La estrategia seguida ha sido probar un Ansatz adecuado para la ecuación de Killing y aprovechar los resultados matemáticos expuestos a lo largo de esta memoria.

En concreto, se han calculado los vectores de Killing de los espacios de De Sitter y Einstein-De Sitter. Asimismo, se han encontrado 6 vectores de Killing para todas las métricas FLRW con factor de escala no constante, lo que se traduce en una cota inferior de 6 simetrías para ellas.

En las métricas FLRW con factor de escala constante, se ha resuelto completamente la ecuación de Killing, encontrando 7 vectores de Killing independientes para curvatura espacial arbitraria y 10 vectores de Killing para espacios de curvatura espacial nula. Esto es consistente con la caracterización de simetría máxima para métricas FLRW encontrada en la sección 3.4.

Para métricas FLRW generales con curvatura espacial plana, se han encontrado 6 vectores de Killing en el caso general de factor de escala no constante, y 10 vectores de Killing si el factor de escala es constante, de manera consistente con la mencionada caracterización de simetría máxima. Sin embargo, no se han podido encontrar los 10 vectores de Killing del universo de De Sitter en esta sección.

Esta memoria finaliza con un apartado de conclusiones, donde se dan por alcanzados los objetivos planteados y se explican las líneas en las que se sigue investigando para alcanzar el objetivo más general (que no es el de este Trabajo de Fin de Grado) de calcular los vectores de Killing de todas las métricas FLRW.



# Capítulo 1

## Notación y ambiente general de trabajo

En este capítulo se introduce la notación para los objetos matemáticos que se utilizarán a lo largo del presente trabajo. En general, se seguirá la notación y las convenciones de [1].

Como es habitual en el contexto de la Relatividad General, se trabajará con variedades diferenciables regulares de dimensión 4, denotadas como  $\mathcal{M}^4$ . Sus cambios de parámetros se denotarán como  $y^\mu(x^\nu)$ , mientras que a sus jacobianas se les llamará  $\frac{\partial y^\mu}{\partial x^\nu}$ . Los superíndices  $\mu, \nu$  recorren cuatro valores, que serán eventualmente llamados 0, 1, 2, 3. Al espacio tangente a  $\mathcal{M}^4$  en un punto  $p$  se lo denotará por  $T_p(\mathcal{M}^4)$ . Las coordenadas de un campo vectorial contravariante  $V(x)$  definido en la variedad se denotarán con notación de superíndices  $V^\mu$ , y las coordenadas de un campo vectorial covariante (una aplicación lineal)  $W(x)$  se denotarán con notación de subíndices  $W_\mu$ . Más generalmente, se denotarán las coordenadas de un campo tensorial  $A(x)$  de rango  $(m, n)$  (o  $(m, n)$ -tensor) por  $A_{\sigma_1, \dots, \sigma_n}^{\rho_1, \dots, \rho_m}$ . Se utilizará el criterio de sumación de Einstein de índices repetidos, de manera que, por ejemplo,  $x^\mu y_\mu \equiv \sum_{i=0}^3 x^i y_i$ . Las coordenadas de un  $(m, n)$ -tensor  $A$  cambiarán con un cambio de base  $x \rightarrow y$  como

$$(A')_{\mu_1 \dots \mu_n}^{\nu_1 \dots \nu_m} = \frac{\partial y^{\nu_1}}{\partial x^{\rho_1}} \dots \frac{\partial y^{\nu_m}}{\partial x^{\rho_m}} \frac{\partial x^{\sigma_1}}{\partial y^{\mu_1}} \dots \frac{\partial x^{\sigma_n}}{\partial y^{\mu_n}} A_{\sigma_1 \dots \sigma_n}^{\rho_1 \dots \rho_m}. \quad (1.0.1)$$

La métrica de la variedad se notará por  $g_{\mu\nu}$ , y es una métrica de signatura lorentziana que se utilizará para subir y bajar índices según  $V_\mu = g_{\mu\nu} V^\nu$ .<sup>1</sup> Siempre que no se indique lo contrario, se supondrá una variedad diferenciable  $\mathcal{M}^4$  con métrica de signatura lorentziana. Asimismo, se denotará por  $g^{\mu\nu}$  a la métrica inversa de  $g_{\mu\nu}$ , tal que  $g^{\mu\nu} g_{\nu\rho} = \delta_\rho^\mu$ . Dado  $S_{\mu_1, \dots, \mu_n}^{\nu_1, \dots, \nu_m}$  un campo tensorial de rango  $(m, n)$ , se define la derivada covariante de  $S_{\mu_1, \dots, \mu_n}^{\nu_1, \dots, \nu_m}$  en la dirección de la coordenada  $x^\sigma$  como el  $(m, n+1)$ -tensor

$$\begin{aligned} \nabla_\sigma S_{\mu_1 \dots \mu_n}^{\nu_1 \dots \nu_m} &= \partial_\sigma S_{\mu_1 \dots \mu_n}^{\nu_1 \dots \nu_m} + \\ &+ \Gamma_{\sigma\lambda}^{\nu_1} S_{\mu_1 \dots \mu_n}^{\lambda \dots \nu_m} + \dots + \Gamma_{\sigma\lambda}^{\nu_m} S_{\mu_1 \dots \mu_n}^{\nu_1 \dots \lambda} - \\ &- \Gamma_{\sigma\mu_1}^\lambda S_{\lambda \dots \mu_n}^{\nu_1 \dots \nu_m} - \dots - \Gamma_{\sigma\mu_n}^\lambda S_{\mu_1 \dots \lambda}^{\nu_1 \dots \nu_m}, \end{aligned} \quad (1.0.2)$$

<sup>1</sup>Ponerle a  $g_{\mu\nu}$  el apellido *lorentziana* quiere decir que, por la Ley de Inercia de Sylvester ([7], páginas 266-268), en cada espacio tangente  $T_p(\mathcal{M}^4)$  hay un cambio de coordenadas que transforma a  $g_{\mu\nu}$  en  $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ , la métrica de Minkowski.

donde los símbolos de Christoffel (o conexión afín)  $\Gamma_{\mu\nu}^\rho$  son funciones sobre la variedad dadas por la conexión de Levi Civita según

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \frac{1}{2}g^{\sigma\lambda}(\partial_\mu g_{\lambda\nu} + \partial_\nu g_{\mu\lambda} - \partial_\lambda g_{\mu\nu}), \quad (1.0.3)$$

de manera que se cumple  $\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \Gamma_{\nu\mu}^\rho$  y  $\nabla_\rho g_{\mu\nu} = 0$ . Recuérdese que el conmutador de las derivadas covariantes en las direcciones  $x^\mu$  y  $x^\nu$  viene dado con la conexión de Levi-Civita por

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu]V^\lambda = \nabla_\mu(\nabla_\nu V^\lambda) - \nabla_\nu(\nabla_\mu V^\lambda) = \mathcal{R}_{\mu\nu\rho}^\lambda V^\rho, \quad (1.0.4)$$

donde  $\mathcal{R}_{\mu\nu\rho}^\lambda = \partial_\mu \Gamma_{\nu\rho}^\lambda - \partial_\nu \Gamma_{\mu\rho}^\lambda + \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda \Gamma_{\nu\rho}^\sigma - \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda \Gamma_{\mu\rho}^\sigma$  denota al tensor de Riemann. En la conexión de Levi-Civita, el tensor de Riemann proporciona toda la información sobre la curvatura de la variedad diferenciable. También se llamará tensor de Riemann al tensor  $\mathcal{R}_{\mu\nu\rho\lambda} = g_{\lambda\sigma} \mathcal{R}_{\mu\nu\rho}^\sigma$  resultante de bajar el índice  $\lambda$  con la métrica. Se define asimismo el tensor de Ricci como la contracción  $\mathcal{R}_{\mu\rho} = g^{\nu\lambda} \mathcal{R}_{\mu\nu\rho\lambda} = \mathcal{R}_{\mu\lambda\rho}^\lambda$  del tensor de Riemann, y el escalar de Ricci como la contracción  $\mathcal{R} = g^{\mu\rho} \mathcal{R}_{\mu\rho}$  del tensor de Ricci.

## Capítulo 2

# Vectores de Killing y transformaciones de Weyl

A continuación, se procede a describir los principales resultados y herramientas matemáticas que se utilizarán a lo largo de esta memoria, y que eventualmente permitirán calcular el número de simetrías de los universos de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker.

### 2.1 Vectores de Killing y aplicaciones

El objetivo de esta sección es definir la *derivada de Lie* de un campo vectorial, y, a partir de su aplicación a la métrica, los llamados *vectores de Killing*. El formalismo de vectores de Killing es el que permitirá caracterizar las *simetrías* de una variedad diferenciable, de manera que cada vector de Killing estará asociado a una cierta simetría. Esto nos llevará a definir las variedades *máximamente simétricas* y a demostrar una de las implicaciones del *Teorema de Noether*, que relaciona simetrías y cantidades conservadas.

#### 2.1.1 La derivada de Lie y el corchete de Lie

Esta sección va encaminada a definir de manera rigurosa la *derivada de Lie* a lo largo de un campo vectorial en una variedad diferenciable, y sirve de mero puente para introducir el concepto de vectores de Killing en la sección 2.1.2, que son los que verdaderamente permiten trabajar en el lenguaje natural de las simetrías. La derivada de Lie permite derivar campos tensoriales a lo largo de las curvas integrales de un campo vectorial dado de manera independiente de coordenadas y preservando el rango de los campos tensoriales sobre los que actúa. Además, se verá que tomar derivada de Lie es una operación *cerrada por conmutadores*, es decir, que el conmutador de las derivadas de Lie en dos direcciones diferentes es a su vez una derivada de Lie. Estas propiedades se traducirán de una manera elegante en la relación entre los vectores de Killing de un espacio y su grupo de simetrías en la sección 2.1.2.

En primer lugar es necesario hacer algunas observaciones sobre curvas integrales y flujos en variedades diferenciables. Estos son conceptos técnicos que sirven como soporte matemático para la eventual definición de la derivada de Lie.

Dado un campo vectorial  $V$ , se quiere buscar una curva diferenciable  $\gamma$  de manera que su derivada en cada punto  $p$  coincida con el valor del campo  $V$  en  $p$  (que es un vector de  $T_p(\mathcal{M}^4)$ ). Esto significa justamente que  $\gamma$  sea una *curva integral* de  $V$ .

**Definición 1.** Sea  $V$  un campo vectorial definido sobre  $\mathcal{M}^4$  una variedad diferenciable, y sea  $J \subseteq \mathbb{R}$  un intervalo. Una **curva integral** de  $V$  es una aplicación diferenciable  $\gamma : J \rightarrow \mathcal{M}^4$  tal que

$$\gamma'(t) = V(\gamma(t)), \forall t \in J. \quad (2.1.1)$$

Si  $0 \in J$ , el punto  $\gamma(0)$  se llama **condición inicial** de  $\gamma$ . Una curva integral que no puede ser extendida a un intervalo de definición mayor se denomina **curva integral maximal**.

Inmediatamente se tiene la siguiente

**Proposición 1 (Existencia local de curvas integrales con condición inicial).** Sea  $V$  un campo vectorial diferenciable sobre  $\mathcal{M}^4$  una 4-variedad diferenciable. Entonces,  $\forall p \in \mathcal{M}^4$ ,  $\exists \varepsilon > 0$  y una curva diferenciable  $\gamma_p : ]-\varepsilon, \varepsilon[ \rightarrow \mathcal{M}^4$  de manera que  $\gamma_p$  es una curva integral de  $V$  con condición inicial  $\gamma_p(0) = p$ .

*Demostración.* Se puede encontrar en [2], proposición 9.2. No es el propósito de esta memoria explicitarla.  $\square$

En vista de la Proposición 1, es natural entonces definir una aplicación  $\theta : J \times \mathcal{M}^4 \rightarrow \mathcal{M}^4$  con  $\theta(t, p) = \gamma_p(t)$  que asigne a cada punto  $p$  y a cada  $t$  (el parámetro en que se parametriza la curva se llamará *tiempo*, pero esto no es ninguna magnitud física) el valor  $\gamma_p(t)$  de la curva integral de condición inicial  $p$  en un tiempo  $t$ , con la salvedad de que todas las curvas integrales asociadas a puntos de  $\mathcal{M}^4$  tienen que estar definidas en  $J$ . La existencia de esta curva está asegurada por la proposición 1, y naturalmente  $\theta(0, p) = p$ . Esto motiva la definición de los llamados *flujos* sobre  $\mathcal{M}^4$ .

**Definición 2.** Sea  $\mathcal{M}^4$  una variedad diferenciable. Un **dominio de flujo** es un subconjunto  $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R} \times \mathcal{M}^4$  de forma que  $\forall p \in \mathcal{M}^4$ , el conjunto  $\mathcal{D}^{(p)} = \{t \in \mathbb{R} : (t, p) \in \mathcal{D}\}$  es un intervalo abierto de  $\mathbb{R}$  que contiene a 0. Dado  $\mathcal{D}$  un dominio de flujo, un **flujo** en  $\mathcal{M}^4$  es una aplicación continua  $\theta : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{M}^4$  que satisface las siguientes propiedades para todo  $p \in \mathcal{M}^4$ :

- $\theta(0, p) = p$ .
- Si  $s \in \mathcal{D}^{(p)}$  y  $t \in \mathcal{D}^{(\theta(s, p))}$  son tales que  $s + t \in \mathcal{D}^{(p)}$ , entonces  $\theta(t, \theta(s, p)) = \theta(t + s, p)$ .

Si  $\theta$  es un flujo de  $\mathcal{M}^4$ , se definen las aplicaciones  $\theta_t(p) = \theta^{(p)}(t) = \theta(t, p)$ ,  $\forall (t, p) \in \mathcal{D}$ , y se define  $M_t = \{p \in \mathcal{M}^4 : (t, p) \in \mathcal{D}\}$ , de forma que  $p \in M_t \Leftrightarrow t \in \mathcal{D}^{(p)} \Leftrightarrow (t, p) \in \mathcal{D}$ . Si  $\theta$  además es diferenciable, se define el **generador infinitesimal** de  $\theta$  como el campo vectorial  $p \mapsto V_p = (\theta^{(p)})'(0)$ , con la idea evidente de que para cada punto  $p$ ,  $\theta^{(p)}$  es una curva integral de  $V$  de condición inicial  $p$ . La demostración de este hecho se puede encontrar en [2], proposición 9.11, y las dos condiciones de la definición de flujo se toman para que esto sea verdad. Por último,  $\theta$  se dice **maximal** si su dominio de flujo asociado no puede ser extendido. La idea que subyace aquí es que se pretende utilizar el flujo como *lenguaje de cambio* entre espacios tangentes distintos. Esto será posible gracias al siguiente Teorema.



**Teorema 1 (Teorema Fundamental del Flujo).** Sea  $V$  un campo vectorial diferenciable definido sobre una variedad diferenciable  $\mathcal{M}^4$ . Entonces, existe un único flujo maximal  $\theta : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{M}^4$  con dominio de flujo  $\mathcal{D}$  cuyo generador infinitesimal es  $V$ . Este flujo cumple las siguientes propiedades:

- (a) Para cada  $p \in \mathcal{M}^4$ , la curva  $\theta^{(p)} : \mathcal{D}^{(p)} \rightarrow \mathcal{M}^4$  es la única curva integral maximal de  $V$  con condición inicial  $p$ .
- (b) Si  $s \in \mathcal{D}^{(p)}$ , entonces  $\mathcal{D}^{(\theta(s,p))} = \mathcal{D}^{(p)} - s = \{t - s : t \in \mathcal{D}^{(p)}\}$ .
- (c)  $\forall t \in \mathbb{R}$ , el conjunto  $M_t$  es un abierto de  $\mathcal{M}^4$ , y  $\theta_t : M_t \rightarrow M_{-t}$  es un difeomorfismo con inversa  $\theta_{-t}$ .

*Demostración.* Se puede encontrar en [2], teorema 9.12. Excede el propósito de esta memoria.  $\square$

Gracias al Teorema 1, si  $W$  es cualquier otro campo vectorial diferenciable sobre  $\mathcal{M}^4$ , podemos pasar de  $W \in T_p(\mathcal{M}^4)$  a un representante suyo en el plano tangente en un punto  $\theta_t(p) = q$  "próximo a  $p$ "<sup>1</sup> utilizando la diferencial del flujo maximal  $\theta$  asociado a  $V$  en  $t$  (pues efectivamente  $d(\theta_t)_p(W_p) \in T_q(\mathcal{M}^4)$ ), y de manera que  $q$  está unido a  $p$  por una curva integral de  $V$  con condición inicial  $p$ . Además, por el apartado (c), este cambio de planos tangentes también se puede hacer *a la inversa* usando  $d(\theta_{-t})_q : T_q(\mathcal{M}^4) \rightarrow T_p(\mathcal{M}^4)$ .

Puesto que la diferencia  $d(\theta_{-t})_{\theta_t(p)}(W_{\theta_t(p)}) - W_p$  es computable, ya que se realiza entre vectores del mismo plano tangente  $T_p(\mathcal{M}^4)$ , podemos por fin definir la *derivada de Lie* del campo  $W$  en la dirección de  $V$ .

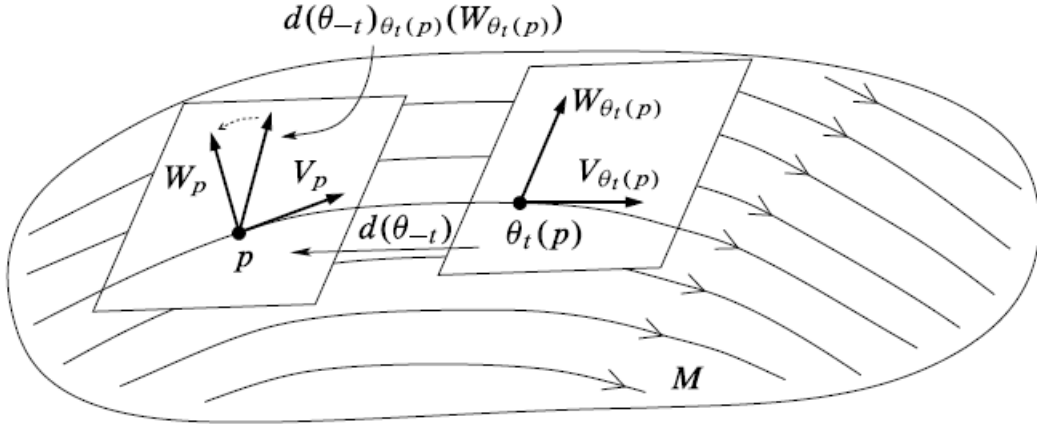


Figura 2.1: La derivada de Lie de un campo vectorial ([2], figura 9.13).

<sup>1</sup> $q$  es próximo a  $p$  en el sentido de que ha de existir una curva integral para el campo  $V$  que pase por  $p$  y  $q$ , y esta solamente está definida localmente para cada  $p \in \mathcal{M}^4$  según la proposición 1.

**Definición 3 (Derivada de Lie).** Sea  $\mathcal{M}^4$  una variedad diferenciable,  $V$  un campo vectorial diferenciable definido en  $\mathcal{M}^4$  y sea  $\theta$  el flujo maximal asociado a  $V$ . Entonces, para cada campo vectorial diferenciable  $W$  sobre  $\mathcal{M}^4$  se define la **derivada de Lie de  $W$  respecto de  $V$**  como

$$\mathcal{L}_V W(p) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{d(\theta_{-t})_{\theta_t(p)}(W_{\theta_t(p)}) - W_p}{t}, \quad (2.1.2)$$

allí donde dicho límite exista.

El subíndice en  $d(\theta_{-t})$  indica en qué punto se computa la función diferencial de  $\theta_{-t}$ , y los subíndices de  $W$  indican en qué punto se evalúa  $W$ . La derivada de Lie (2.1.2) representa el cambio del campo  $W$  a lo largo de las curvas integrales de  $V$ , y presenta la ventaja de que permite derivar a lo largo de un campo vectorial diferenciable  $V$  cualquiera, independientemente de coordenadas. A continuación se verá una manera de calcular la expresión en un sistema de coordenadas de la derivada de Lie, observando que coincide con el llamado *corchete de Lie*. Estudiar el corchete de Lie es útil porque permite demostrar propiedades que luego cumplirán los vectores de Killing, y que evidenciarán cómo estos *generan* las simetrías de la variedad.

Una *derivación* es cualquier operador  $F : \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}^4) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}^4)$  que cumpla la regla de Leibniz  $F(f \cdot g) = f \cdot F(g) + F(f) \cdot g$ . Es conocido que se puede identificar cada campo vectorial diferenciable  $V$  definido sobre  $\mathcal{M}^4$  con una derivación ([2], proposición 8.15) cuando se ve como un operador  $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}^4) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}^4)$  actuando sobre un campo escalar  $f$  con  $V(f(p)) = V^\mu \partial_\mu f(p)$ . El superíndice  $\mu$  que acompaña al campo vectorial  $V$  indica sus coordenadas en un sistema  $x^\mu$  dado. A la inversa, también es verdad: cada derivación se identifica con un campo vectorial diferenciable. Atendiendo a ello se tiene la siguiente definición.

**Definición 4 (Corchete de Lie).** Sea  $S$  un campo vectorial diferenciable definido sobre una variedad diferenciable, y sea  $V$  otro campo vectorial diferenciable, ambos en un sistema de coordenadas  $x^\mu$  concreto. El **corchete de Lie de  $V$  y  $S$**  se define como el operador  $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}^4) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}^4)$  dado por

$$[V, S](f) = V(S(f)) - S(V(f)) = (V^\lambda \partial_\lambda S^\mu - S^\lambda \partial_\lambda V^\mu) \partial_\mu f, \quad (2.1.3)$$

El resultado sorprendente es que (ver [2], teorema 9.38) **la derivada de Lie y el corchete de Lie coinciden** computacionalmente:

$$\mathcal{L}_V S^\mu = [V, S]^\mu = V^\lambda \partial_\lambda S^\mu - S^\lambda \partial_\lambda V^\mu. \quad (2.1.4)$$

Esta expresión (2.1.4) es la que se usará en adelante para la derivada de Lie. De forma general, la derivada de Lie de un campo tensorial  $S_{\mu_1 \dots \mu_n}^{v_1 \dots v_m}$  de rango  $(m, n)$  en la dirección del campo  $V^\mu$  se define como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_V S_{\mu_1 \dots \mu_n}^{v_1 \dots v_m} = & V^\lambda \partial_\lambda S_{\mu_1 \dots \mu_n}^{v_1 \dots v_m} - \partial_\lambda V^{v_1} S_{\mu_1 \dots \mu_n}^{\lambda \dots v_m} - \dots - \partial_\lambda V^{v_m} S_{\mu_1 \dots \mu_n}^{v_1 \dots \lambda} \\ & + \partial_{v_1} V^\lambda S_{\lambda \dots \mu_n}^{v_1 \dots v_m} + \dots + \partial_{v_m} V^\lambda S_{\mu_1 \dots \lambda}^{v_1 \dots v_m}. \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

Véase entonces que la derivada de Lie ofrece la ventaja preservar el rango de los campos vectoriales sobre los que actúa: efectivamente, de la expresión (2.1.4) y de las reglas de transformación por cambio de base (1.0.1) de  $V^\mu$ ,  $S^\mu$  y  $\partial_\mu$  se deriva fácilmente que  $\mathcal{L}_V S'^\rho = \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\beta} \mathcal{L}_V S^\beta$  y por lo tanto la derivada de Lie  $\mathcal{L}_V S^\mu$  es un campo vectorial, al transformar como tal.

La identificación entre campos vectoriales y derivaciones asegura que el corchete de Lie aplicado a un campo escalar ha de ser una derivación. Efectivamente, se puede comprobar mediante un cálculo elemental usando (2.1.3) que el corchete de Lie cumple la regla de Leibniz  $[V, S](fg) = f[V, S]g + ([V, S]f)g$ , y también las siguientes propiedades, que la derivada de Lie hereda a través de (2.1.4):

- **Bilinealidad:**  $[\alpha V + \beta W, S] = \alpha[V, S] + \beta[W, S]$ , para escalares  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  y campos vectoriales  $V, W, S$ .
- **Antisimetría:**  $[V, S] = -[S, V]$ , como consecuencia de la definición del corchete de Lie.
- **Identidad de Jacobi:**  $[[V, W], S] + [[W, S], V] + [[S, V], W] = 0$ .

Así definidas para la derivada de Lie, estas propiedades no parecen decir gran cosa, pero veremos que también las heredan los vectores de Killing, y entonces sí que permitirán llegar a resultados importantes sobre la relación de estos con el grupo de simetrías de  $\mathcal{M}^4$ .

Como vamos a estar interesados en estudiar las simetrías de determinados espacios, y estas tienen una estructura de grupo con un determinado álgebra de conmutación, será útil estudiar el conmutador de las derivadas de Lie. En particular, veamos que cuando se aplica la derivada de Lie respecto de dos campos vectoriales distintos sucesivamente, esta operación en general no conmuta. Sin embargo, el conmutador resultante de tomar derivada de Lie respecto de dos campos  $V, W$  en distinto orden equivale a tomar derivada de Lie respecto del campo  $[V, W]$ .

**Proposición 2.** Sean  $V, W, A$  tres campos vectoriales diferenciables definidos en  $\mathcal{M}^4$ . Entonces

$$\mathcal{L}_W(\mathcal{L}_V A) - \mathcal{L}_V(\mathcal{L}_W A) = \mathcal{L}_{[W, V]} A \quad (2.1.6)$$

*Demostración.* En un sistema de coordenadas cualquiera:  $\mathcal{L}_V A^\mu = V^\lambda \partial_\lambda A^\mu - A^\lambda \partial_\lambda V^\mu$ . Tomando de nuevo derivada de Lie:  $\mathcal{L}_W(\mathcal{L}_V A^\mu) = W^\lambda \partial_\lambda (\mathcal{L}_V A^\mu) - (\mathcal{L}_V A)^\lambda \partial_\lambda W^\mu = W^\lambda \partial_\lambda (V^\sigma \partial_\sigma A^\mu - A^\sigma \partial_\sigma V^\mu) - (V^\sigma \partial_\sigma A^\lambda - A^\sigma \partial_\sigma V^\lambda) \partial_\lambda W^\mu$ . Tras realizar las derivaciones correspondientes y reorganizar:  $\mathcal{L}_W(\mathcal{L}_V A^\mu) = W^\sigma \partial_\sigma V^\lambda \partial_\lambda A^\mu + W^\sigma V^\lambda \partial_\sigma \partial_\lambda A^\mu - W^\sigma \partial_\sigma A^\lambda \partial_\lambda V^\mu - W^\sigma A^\lambda \partial_\sigma \partial_\lambda V^\mu - V^\lambda \partial_\lambda A^\sigma \partial_\sigma W^\mu + A^\lambda \partial_\lambda V^\sigma \partial_\sigma W^\mu$ . Análogamente, derivar en el orden contrario lleva a:  $\mathcal{L}_V(\mathcal{L}_W A^\mu) = V^\sigma \partial_\sigma W^\lambda \partial_\lambda A^\mu + V^\sigma W^\lambda \partial_\sigma \partial_\lambda A^\mu - V^\sigma \partial_\sigma A^\lambda \partial_\lambda W^\mu - V^\sigma A^\lambda \partial_\sigma \partial_\lambda W^\mu - W^\lambda \partial_\lambda A^\sigma \partial_\sigma V^\mu + A^\lambda \partial_\lambda W^\sigma \partial_\sigma V^\mu$ . El segundo término de ambas expresiones coincide por la conmutación de las parciales de segundo grado, mientras que, debido a que los índices  $\sigma$  y  $\lambda$  son mudos, y por tanto intercambiables, el tercer término de la primera expresión coincide con el quinto de la segunda, y el quinto término de la primera expresión coincide con el tercero de la segunda, y por lo tanto todos estos términos desaparecen al tomar la diferencia de ambas expresiones. Efectivamente, tras reorganizar términos:  $\mathcal{L}_W(\mathcal{L}_V A^\mu) - \mathcal{L}_V(\mathcal{L}_W A^\mu) = [W^\sigma \partial_\sigma V^\lambda - V^\sigma \partial_\sigma W^\lambda] \partial_\lambda A^\mu - A^\lambda \partial_\lambda [W^\sigma \partial_\sigma V^\mu - V^\sigma \partial_\sigma W^\mu] = \mathcal{L}_{[W, V]} A^\mu$ , donde se ha tenido en cuenta que  $[W, V]^\mu = W^\sigma \partial_\sigma V^\mu - V^\sigma \partial_\sigma W^\mu$ .  $\square$

Esta última proposición 2 proporciona una interpretación para el corchete de Lie de  $V$  y  $W$ : no es más que el campo vectorial asociado a la derivación resultante de tomar el conmutador de las derivadas de Lie respecto de  $V$  y  $W$ . Además, establece que el conmutador de dos derivadas de Lie es una derivada de Lie, por lo que la operación  $A^\mu \longrightarrow \mathcal{L}_V A^\mu$  es cerrada, como se adelantó.

Todas estas propiedades de la derivada de Lie solo tienen sentido en esta memoria porque serán satisfechas por los vectores de Killing. Llevamos un tiempo adelantando que estos tendrán una estrecha relación con las simetrías, y ya se está en condiciones de explicar cuál es esta relación, y cómo se traduce en el cálculo de las simetrías de un espacio.

### 2.1.2 Vectores de Killing

La métrica  $g_{\mu\nu}$  es el campo tensorial que contiene toda la información de relevancia física en Relatividad General, y por lo tanto es natural tratar de aprovechar la derivada de Lie definida en la sección 2.1.1 para obtener información acerca de  $g_{\mu\nu}$ . En particular, la derivada de Lie permitirá encontrar las curvas en una variedad diferenciable a lo largo de las cuales  $g_{\mu\nu}$  es *invariante*, llamadas *curvas isométricas*. Esto dará lugar a la definición de los vectores de Killing, que son la herramienta matemática principal de esta memoria. A lo largo de esta sección se verá que los vectores de Killing están estrechamente relacionados con las simetrías de la variedad diferenciable a través de las isometrías.

A la hora de caracterizar las simetrías, puesto que  $g_{\mu\nu}$  contiene la información geométrica de la variedad, nos preguntamos si se pueden caracterizar los puntos de la variedad métricamente indistinguibles. Una manera de hacerlo es buscar una curva en  $\mathcal{M}^4$  a lo largo de la cual la métrica sea invariante, de manera que una puntos métricamente equivalentes. Esta será la curva integral de un cierto campo vectorial, que representa una *dirección de simetría* de la variedad. Es a este campo vectorial a lo que llamamos un *vector de Killing*. Gracias al lenguaje de la derivada de Lie, encontrar los vectores de Killing  $k$  de  $g_{\mu\nu}$  equivale a plantear la ecuación

$$\mathcal{L}_k g_{\mu\nu} = 0,$$

pero esta expresión se puede simplificar usando la conexión de Levi-Civita, lo que llevará a la definición 5.

**Proposición 3.** *Si se toma la conexión de Levi-Civita, entonces*

$$\mathcal{L}_k g_{\mu\nu} = 0 \Leftrightarrow \nabla_\mu k_\nu + \nabla_\nu k_\mu = 0. \quad (2.1.7)$$

*Esto es independiente del sistema de coordenadas utilizado.*

*Demostración.* Utilizando la definición (1.0.2) de la derivada covariante, y la condición de compatibilidad de la métrica  $\nabla_\lambda g_{\mu\nu} = 0$  en la ecuación (1.0.3), se tiene que  $\partial_\lambda g_{\mu\nu} = \Gamma_{\lambda\mu}^\rho g_{\rho\nu} + \Gamma_{\lambda\nu}^\rho g_{\mu\rho}$ , por lo que

$$\begin{aligned} 0 &= \mathcal{L}_k g_{\mu\nu} = k^\lambda \partial_\lambda g_{\mu\nu} + g_{\lambda\nu} \partial_\mu k^\lambda + g_{\mu\lambda} \partial_\nu k^\lambda = (k^\lambda \Gamma_{\lambda\mu}^\rho g_{\rho\nu} + g_{\lambda\nu} \partial_\mu k^\lambda) + (k^\lambda \Gamma_{\lambda\nu}^\rho g_{\mu\rho} + g_{\mu\lambda} \partial_\nu k^\lambda) \\ &= \nabla_\mu (k^\lambda g_{\lambda\nu}) + \nabla_\nu (k^\lambda g_{\mu\lambda}) = g_{\lambda\nu} \nabla_\mu k^\lambda + g_{\mu\lambda} \nabla_\nu k^\lambda = \nabla_\mu k_\nu + \nabla_\nu k_\mu, \end{aligned}$$

donde en la penúltima igualdad se ha usado la compatibilidad de la métrica y la regla de Leibniz, y en la última se ha usado la propiedad de bajada de los índices de los tensores  $\nabla_\mu k^\lambda$  y  $\nabla_\nu k^\lambda$  con la métrica. Puesto que la derivada de Lie es independiente de coordenadas, la condición  $\nabla_\mu k_\nu + \nabla_\nu k_\mu = 0$  es independiente del sistema de coordenadas elegido.  $\square$

**Definición 5.** Un campo vectorial  $k$  definido en una variedad diferenciable se dice que es un **vector de Killing** si en cualquier sistema de coordenadas verifica

$$\nabla_\mu k_\nu + \nabla_\nu k_\mu = 0. \quad (2.1.8)$$

La ecuación (2.1.8) se denomina *ecuación de Killing*. Su interpretación es que cada vector de Killing es un campo vectorial que es el generador infinitesimal de una curva isométrica de  $g_{\mu\nu}$  en la variedad  $\mathcal{M}^4$ , a lo largo de la cual la métrica no varía, y que por tanto es una curva que une puntos métricamente equivalentes, o *relacionados por simetría*. Esta ecuación es lineal, y por lo tanto cualquier combinación lineal real de vectores de Killing será un nuevo vector de Killing. Esto asegura que el conjunto de vectores de Killing es un espacio vectorial real (visto como un espacio vectorial de funciones, entendiendo los vectores de Killing como campos vectoriales en el haz tangente), y por lo tanto solo hay que preocuparse por las soluciones linealmente independientes de (2.1.8).

Ahora podemos pasar a ver cómo utilizar las propiedades del corchete de Lie de la sección anterior para dotar de estructura al conjunto de vectores de Killing. Al final de esta sección veremos que esta estructura genera el grupo de simetrías de la variedad a través de los cambios de base isométricos. En concreto, la estructura que vamos a ver que los vectores de Killing verifican es la de *álgebra de Lie*, con la operación dada por tomar corchete de Lie.

**Definición 6.** Un *álgebra de Lie real* es un espacio vectorial real  $g$  junto con una operación binaria  $g \times g \longrightarrow g$ ,  $(a, b) \mapsto [a, b]$  bilineal, antisimétrica y que cumple la identidad de Jacobi.

**Proposición 4.** El conjunto de vectores de Killing  $k^\mu$ , con la operación binaria asociada  $[k, l]^\mu = k^\lambda \partial_\lambda l^\mu - l^\lambda \partial_\lambda k^\mu$ , es un álgebra de Lie real.

*Demostración.* Como ya se ha comentado, el conjunto de vectores de Killing forma un espacio vectorial real. En la sección 2.1.1 se vio que  $[k, l]$  cumple las propiedades de bilinealidad, antisimetría y la identidad de Jacobi. Por lo tanto, solo resta probar que el conmutador de dos vectores de Killing resulta en otro vector de Killing, y que por tanto el álgebra de vectores de Killing es un álgebra cerrada. Si  $k$  y  $l$  son vectores de Killing, entonces utilizando la proposición 2 y que  $\mathcal{L}_k g_{\mu\nu} = \mathcal{L}_l g_{\mu\nu} = 0$ , se tiene que  $\mathcal{L}_{[k, l]} g_{\mu\nu} = \mathcal{L}_l (\mathcal{L}_k g_{\mu\nu}) - \mathcal{L}_k (\mathcal{L}_l g_{\mu\nu}) = 0$ , puesto que la derivada de Lie del campo vectorial constantemente cero es cero. Por lo tanto,  $[k, l]$  es otro vector de Killing, con lo que el álgebra de vectores de Killing cierra. Por lo tanto, los vectores de Killing forman un álgebra de Lie.  $\square$

La propiedad más importante de las álgebras de Lie es que cada álgebra de Lie  $g$  tiene asociado un grupo continuo, llamado *grupo de Lie* ([3], Teorema 5.25). Aunque no es el objetivo de esta memoria, se pasa a resumir la conexión fundamental entre un grupo de Lie de matrices  $G$  y su álgebra de Lie  $g$ , que también es isomorfa a un grupo de matrices (ver [3], definición 3.18): resulta que el álgebra de Lie representa las relaciones de conmutación entre elementos del grupo  $G$  muy próximos al elemento neutro (ver [8], sección 4.4).

La conexión entre el álgebra y el grupo de Lie es la función exponencial  $e : g \longrightarrow G$ , la cual es un homeomorfismo local (ver [3], corolario 3.44) que lleva elementos del álgebra al grupo de Lie.

Puesto que  $g$  es un espacio vectorial generado por una base  $\{a_1, \dots, a_n\}$ , el grupo de Lie  $G$  estará *generado* por  $\{e^{a_1}, \dots, e^{a_n}\}$ , que son los llamados *generadores* del grupo de Lie alrededor de la identidad ([3], corolario 3.47).

Por lo tanto, se tiene que  $g$  es el *espacio tangente a  $G$  en la identidad* ([3], corolario 3.46), o lo que se llama una linealización del grupo entorno al elemento neutro.

**Definición 7.** Un *grupo de Lie* es una variedad diferenciable  $G$  con una estructura de grupo asociada, de manera que la aplicación  $G \times G \rightarrow G$  definida por  $(a, b) \mapsto ab^{-1}$  es de clase  $C^\infty$ .

Los grupos de Lie de mayor relevancia son los grupos de Lie de matrices, que admiten una *representación* (ver [9]) que se materializa en el grupo  $GL(n, \mathbb{R})$  (véase [3]), como el grupo  $SO(3)$  de rotaciones de  $\mathbb{R}^3$ . La representación matricial de  $SO(3)$  puede ser entendida como un conjunto de matrices de cambios de base que preservan la ortonormalidad y la orientación de la base, de manera que un sistema que tenga simetría de rotación será idéntico para cada uno de estos sistemas de coordenadas. Esta noción se generaliza cuando tenemos una métrica en los cambios de base llamados *isometrías*.

**Definición 8.** Una *isometría* es una transformación  $x \rightarrow x'$  de las coordenadas de la variedad  $\mathcal{M}^4$  que preserva la métrica, de manera que si  $g_{\mu\nu}(x)$  es la expresión de la métrica en coordenadas  $x$ , y  $g'_{\mu\nu}(x')$  es la expresión en las coordenadas  $x'$ , entonces  $g'_{\mu\nu}(x')$  es la misma función de su argumento  $x'^\mu$  que la función original  $g_{\mu\nu}(x)$  de su argumento  $x^\mu$ . Esto es

$$g'_{\mu\nu}(x) = g_{\mu\nu}(x) \Leftrightarrow g_{\mu\nu}(x) = \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\nu} g_{\rho\sigma}(x'). \quad (2.1.9)$$

Se llega a la equivalencia (2.1.9) utilizando la regla de transformación de la métrica dada por (1.0.1) (ver [10], páginas 375, 376). La interpretación geométrica de (2.1.9) es que los puntos de la variedad relacionados por el cambio de parámetros  $x \rightarrow x'$  son *equivalentes* a ojos de la métrica, esto es, son geoméricamente indistinguibles, lo cual coincide con la noción de que  $\mathcal{M}^4$  tiene una cierta *simetría*. Tal como se han descrito, las isometrías (2.1.9) de una variedad diferenciable también dan lugar a un grupo de Lie. Como el cambio de parámetros de la variedad diferenciable es un difeomorfismo local, y por tanto invertible, cada matriz de cambio de base  $\frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu}$  pertenece a  $GL(4, \mathbb{R})$ , de manera que estas matrices constituyen una representación del grupo continuo de isometrías de  $\mathcal{M}^4$ .

Ya estamos preparados para ver que *el álgebra de los vectores de Killing genera el grupo de Lie de isometrías de  $\mathcal{M}^4$* . Esto se lleva a cabo a través de la función exponencial, que ya hemos visto que codifica una linealización del grupo de Lie. Esta linealización equivale a una expansión en serie de Taylor en las coordenadas que definen la operación de grupo ([8], página 56). Vamos a ver que el álgebra de los conmutadores  $[k, l]^\mu$  de los vectores de Killing es el mismo álgebra de conmutación que el del grupo de simetrías de la variedad.

**Teorema 2.** El conjunto de vectores de Killing forma un álgebra de Lie real que genera el grupo de Lie de isometrías de la variedad. En particular,

$$[k_a, k_b]^\mu = f_{ab}^c k_c^\mu, \quad (2.1.10)$$

donde los  $f_{ab}^c$  son las constantes de estructura del grupo de simetrías.

*Demostración.* Ya se ha visto que los vectores de Killing forman un álgebra de Lie real con el corchete de Lie como operación. Lo único que se tiene que ver, como se explica en [8]



(sección 4.4), es que las relaciones de conmutación que satisfacen los vectores de Killing son las que satisfacen los elementos del grupo de isometrías continuas para isometrías *infinitesimales*, es decir, hasta primer orden en desarrollo en serie de Taylor (según [8], pág. 56), lo cual proviene de la linealización del mapa exponencial entre el álgebra de Lie y el grupo de Lie. Esto justifica la validez matemática de la demostración completa que se puede encontrar en [1], páginas 462-463. Aquí meramente se esboza la idea por falta de espacio.

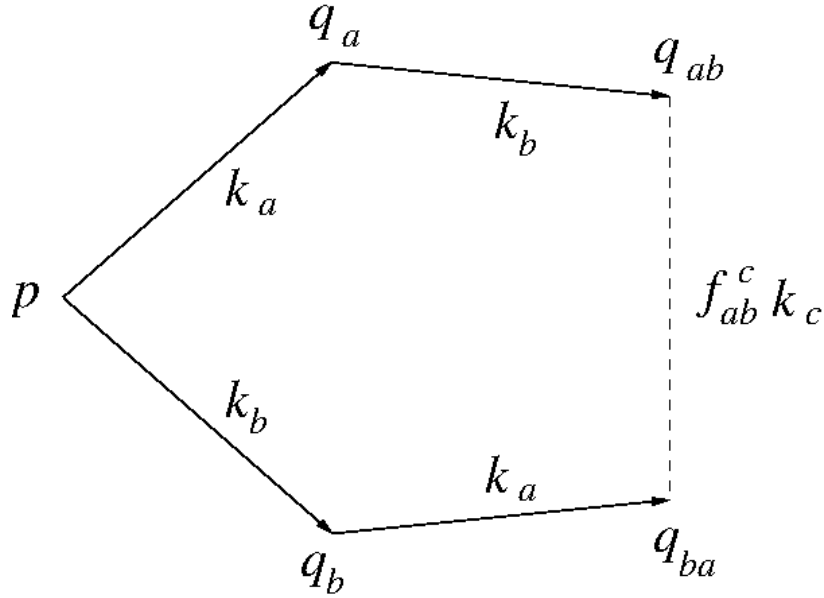


Figura 2.2: Esquema de conmutación de las isometrías dadas por los vectores de Killing  $k_a$  y  $k_b$  ([1], figura 23.4).

Sea pues un punto  $p$  cualquiera, y sean dos isometrías infinitesimales en la dirección de los vectores de Killing  $k_a, k_b$ , que llevan el punto  $p$  a puntos infinitesimalmente cercanos  $q_a$  y  $q_b$ , de manera que ambos son métricamente equivalentes. Si se vuelve a actuar ahora sobre  $q_a$  con  $k_b$  y sobre  $q_b$  con  $k_a$ , se obtienen respectivamente los puntos  $q_{ab}$  y  $q_{ba}$ , como se observa en la figura 2.2. El conmutador de ambas operaciones será la diferencia entre los puntos  $q_{ab}$  y  $q_{ba}$ . Puesto que están unidos por curvas isométricas generadas por los vectores de Killing, tanto  $q_{ab}$  como  $q_{ba}$  son equivalentes a  $p$  (en el sentido de que están relacionados a través de una cierta simetría), y por tanto el uno al otro. Por lo tanto, ha de existir una combinación lineal de vectores de Killing  $f_{ab}^c k_c$  que relacione estos dos puntos. Así, se tendrá que el conmutador de  $k_a$  y  $k_b$  vale

$$[k_a, k_b]^\mu = f_{ab}^c k_c^\mu, \quad (2.1.11)$$

donde los  $f_{ab}^c$  son las constantes de estructura del grupo de simetrías. Esto confirma que el álgebra de vectores de Killing genera el grupo de Lie de simetrías, como se pretendía.  $\square$

En resumen, resolver la ecuación de Killing (2.1.8) permite, de manera independiente de coordenadas, encontrar las direcciones de simetría de la variedad  $\mathcal{M}^4$ . Además, por el Teorema 2, las relaciones de conmutación del grupo de simetrías de la variedad son exactamente las de los conmutadores  $[k, l]^\mu$  de sus vectores de Killing, o dicho de otra

manera, satisfacen el mismo álgebra. Esto es un resultado muy potente porque ahora podemos calcular el grupo de simetrías de una variedad diferenciable solo a partir de la forma de su métrica en un sistema de coordenadas.

En la próxima sección 2.1.3 se ahondará más en el número de soluciones linealmente independientes de la ecuación de Killing, y cómo estas dan lugar a los conceptos de homogeneidad e isotropía, que están muy relacionados con la simetría.

### 2.1.3 Condiciones de simetría máxima

En esta sección se definirá qué entendemos por un espacio *máximamente simétrico*, y cómo se caracteriza este concepto en términos de su métrica, la forma de sus tensores de curvatura y el número de vectores de Killing que poseen.

Puesto que el campo de vectores de Killing es el que tiene por líneas integrales a las traslaciones isométricas, y da las direcciones de *simetría*, las ideas intuitivas de homogeneidad e isotropía en un punto se traducen en condiciones sobre los vectores de Killing.

**Definición 9.** Una variedad diferenciable  $\mathcal{M}^4$  se dice **homogénea** si,  $\forall p \in \mathcal{M}^4$ , existe un entorno  $O_p$  y existen isometrías infinitesimales dadas por curvas integrales de vectores de Killing  $k_\mu$  que llevan a  $p$  en cada punto de  $O_p$ .

La definición 9 equivale a la idea intuitiva de que todos los puntos sean *equivalentes* a ojos de la métrica.

**Definición 10.** Una variedad diferenciable  $\mathcal{M}^4$  se dice que es **isótropa en un punto**  $p$  si existen isometrías infinitesimales que dejen a  $p$  fijo (esto es, vectores de Killing  $k$  con  $k_\mu(p) = 0$ ), pero de manera que sus derivadas  $\nabla_\mu k_\nu(p)$  toman todos los valores posibles, con la única restricción de tener que satisfacer la ecuación de Killing.

Esto significa intuitivamente que todas las direcciones desde  $p$  son equivalentes. Obsérvese que verificar la ecuación de Killing (2.1.8) equivale a que  $\nabla_\mu k_\nu(p)$  sea un tensor antisimétrico.

Los conceptos de homogeneidad e isotropía no equivalen. Un cilindro es un ejemplo de una 2-variedad homogénea (pues es localmente homeomorfo al plano en todos los puntos) pero no isótropa en ningún punto (la dirección "vertical" no equivale a la azimutal), mientras que un cono es un ejemplo de una variedad isótropa en un punto (el vértice) que no es homogénea (pues el vértice no equivale a ningún otro punto). Combinar la homogeneidad y la isotropía en todos los puntos da lugar a la noción de *simetría máxima* (ver [10], páginas 378, 379).

**Definición 11.** Se dirá que una variedad diferenciable  $\mathcal{M}^4$  es **máximamente simétrica** si es homogénea e isótropa en todos los puntos.

Como tenemos caracterizadas la homogeneidad y la isotropía en términos de vectores de Killing, tratemos ahora de caracterizar también la simetría máxima utilizándolos.

**Proposición 5.** Sea una variedad diferenciable  $\mathcal{M}^4$ , y denotemos por  $k_\mu$  al campo global de todos los vectores de Killing. Entonces,  $\mathcal{M}^4$  será máximamente simétrica si, y solo si,  $\nabla_\mu k_\nu$  puede tomar todos los valores posibles en todos los puntos.



*Demostración.* Puesto que una variedad homogénea e isótropa en un punto es necesariamente isótropa en todos los puntos, y una variedad isótropa en todos los puntos es necesariamente homogénea, una variedad será máximamente simétrica si, y solo si, es isótropa en todos los puntos, lo cual equivale según la definición 10 a que  $\nabla_\mu k_\nu$  pueda tomar todos los valores posibles en todos los puntos, esto es, que sea un campo vectorial globalmente definido sin ninguna restricción, salvo la condición de ser un campo tensorial globalmente antisimétrico por obedecer (2.1.8).  $\square$

La lección importante de haber realizado este análisis es que, si se encuentra alguna condición *de consistencia* (aparte de tener que verificar (2.1.8)) sobre los valores de las derivadas  $\nabla_\mu k_\nu$  de los vectores de Killing que además los relacione con sus tensores de curvatura, una variedad  $N$ -dimensional  $\mathcal{M}^N$  será máximamente simétrica si, y solo si, dicha condición queda trivialmente satisfecha, y entonces tendremos caracterizadas las variedades máximamente simétricas en términos de la forma de su tensor de curvatura.

La condición buscada resulta ser precisamente la definición (1.0.4) del tensor de Riemann, aplicada al campo tensorial  $\nabla_\rho k_\lambda$ .<sup>2</sup>

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] \nabla_\rho k_\lambda = -\mathcal{R}_{\mu\nu\rho}^\sigma \nabla_\sigma k_\lambda - \mathcal{R}_{\mu\nu\lambda}^\sigma \nabla_\rho k_\sigma, \quad (2.1.12)$$

Si se toma derivada covariante  $\nabla_\rho$  en la ecuación de Killing (2.1.8), se obtiene

$$\nabla_\rho \nabla_\mu k_\nu + \nabla_\rho \nabla_\nu k_\mu = 0. \quad (2.1.13)$$

Además, de la definición (1.0.4) del tensor de Riemann con la conexión de Levi-Civita, se tendrá

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] k_\rho = -\mathcal{R}_{\mu\nu\rho}^\lambda k_\lambda, \quad (2.1.14)$$

donde el signo menos delante del tensor de Riemann proviene de que  $k_\rho$  es un vector covariante y no contravariante. Sumando ahora las tres permutaciones cíclicas del conjunto de índices  $\{\mu, \nu, \rho\}$  de (2.1.14), se llega a la ecuación

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] k_\rho + [\nabla_\nu, \nabla_\rho] k_\mu + [\nabla_\rho, \nabla_\mu] k_\nu = -(\mathcal{R}_{\mu\nu\rho}^\lambda + \mathcal{R}_{\nu\rho\mu}^\lambda + \mathcal{R}_{\rho\mu\nu}^\lambda) k_\lambda. \quad (2.1.15)$$

El término derecho de la ecuación (2.1.15) es nulo por la *Identidad de Bianchi*  $\mathcal{R}_{\mu\nu\rho\lambda} + \mathcal{R}_{\nu\rho\mu\lambda} + \mathcal{R}_{\rho\mu\nu\lambda} = 0$ , que es una simetría del tensor de Riemann con conexión Levi-Civita, con lo cual la ecuación (2.1.15) queda

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] k_\rho + [\nabla_\nu, \nabla_\rho] k_\mu + [\nabla_\rho, \nabla_\mu] k_\nu = 0. \quad (2.1.16)$$

Tras expandir los conmutadores de las derivadas covariantes de (2.1.16) y tener en cuenta que se satisface la ecuación (2.1.13), se llega a que  $[\nabla_\mu, \nabla_\nu] k_\rho = \nabla_\rho \nabla_\nu k_\mu$ , y sustituyendo esta igualdad en (2.1.14), tras renombramiento de índices se obtiene que

$$\nabla_\mu \nabla_\nu k_\rho = -\mathcal{R}_{\rho\nu\mu}^\lambda k_\lambda. \quad (2.1.17)$$

Esta ecuación es relevante por dos motivos. El primero es que, junto con (2.1.8), impone una cota superior a la dimensión del espacio vectorial de vectores de Killing, y el segundo es que permitirá simplificar la ecuación de consistencia (2.1.12).

<sup>2</sup>Véase que esta definición es la condición más *natural* posible que relaciona los tensores de curvatura con los valores  $\nabla_\rho k_\lambda$ .

Efectivamente, en cuanto al primer motivo, véase que si  $\gamma(t)$  es una curva integral con condición inicial  $p$  que une  $p$  y  $q$ , y con vector tangente  $u^\mu(x)$ , entonces la ecuación diferencial  $u^\mu \nabla_\mu \nabla_\nu k_\rho = -u^\mu \mathcal{R}_{\rho\nu\mu}^\lambda k_\lambda$  que resulta de contraer (2.1.17) con  $u^\mu$  es unisolvente cuando se proporcionan las condiciones iniciales  $k_\mu(p)$ ,  $\nabla_\mu k_\nu(p)$  y permite integrar el campo vectorial  $k_\mu$  ([1], sección 23.5). Alternativamente, se puede argumentar ([10], página 377) que si se conoce el valor de  $k_\mu$  y de su primera derivada covariante  $\nabla_\mu k_\nu$  en un punto  $p$ , junto con la expresión del tensor de Riemann  $\mathcal{R}_{\rho\nu\mu}^\lambda$ , entonces la ecuación (2.1.17) y sus sucesivas derivadas covariantes proporcionan los valores de cualquier derivada parcial de orden arbitrario de  $k_\mu$  en  $p$ , con lo cual el campo  $k_\mu(x)$  puede ser expandido en serie de Taylor en un entorno del punto  $p$ , y se tiene el valor de  $k_\mu(q)$  para cualquier punto  $q$  cercano a  $p$  en función de los valores iniciales  $k_\mu(p)$ ,  $\nabla_\mu k_\nu(p)$ .

En cualquier caso, se tiene que los vectores de Killing quedan determinados por  $N$  condiciones iniciales que provienen de  $k_\mu(p)$  más  $\frac{1}{2}N(N-1)$  condiciones iniciales que provienen de  $\nabla_\mu k_\nu(p)$ , ya que  $\nabla_\mu k_\nu(p)$  ha de cumplir la condición de ser un tensor antisimétrico que le impone la Ecuación de Killing (2.1.8). En total, se tiene que un campo vectorial de Killing está determinado por  $\frac{1}{2}N(N+1)$  condiciones iniciales. Puesto que cualquier vector de Killing se puede escribir como ([10], ecuación 13.1.10)

$$k_\mu(x) = A_\mu^\lambda(x; p) k_\lambda(p) + B_\mu^{\lambda\nu}(x; p) \nabla_\lambda k_\nu(p),$$

donde  $A_\mu^\lambda(x; p)$  y  $B_\mu^{\lambda\nu}(x; p)$  son funciones globales que solo dependen de la métrica y del punto donde se dan las condiciones iniciales, habrá como máximo tantos vectores de Killing linealmente independientes como condiciones iniciales linealmente independientes, es decir, que como máximo el espacio vectorial de los vectores de Killing tiene dimensión  $\frac{1}{2}N(N+1)$ , aunque posiblemente tendrá menos. Esto depende de la métrica, que determina las funciones  $A_\mu^\lambda(x; p)$  y  $B_\mu^{\lambda\nu}(x; p)$ . Para variedades de distinta dimensión  $N$ , el número máximo de vectores de Killing, que es la dimensión del espacio vectorial conformado por los vectores de Killing, será:

- En 2 dimensiones ( $N = 2$ ), hay como máximo 3 vectores de Killing.
- En 3 dimensiones ( $N = 3$ ), hay como máximo 6 vectores de Killing.
- En 4 dimensiones ( $N = 4$ ), hay como máximo 10 vectores de Killing.

Puesto que los vectores de Killing son direcciones de simetría, se tiene la siguiente definición alternativa.

**Definición 12.** Una variedad  $N$ -dimensional  $\mathcal{M}^N$  es máximamente simétrica si, y solo si, tiene  $\frac{1}{2}N(N+1)$  vectores de Killing.

Además, los  $\frac{1}{2}N(N+1)$  vectores de Killing de un espacio máximamente simétrico con métrica lorentziana verificarán el álgebra de Poincaré.

En cuanto al segundo motivo de importancia de la ecuación (2.1.17), vamos a ver que permite caracterizar los espacios máximamente simétricos en términos de la métrica  $g_{\mu\nu}$  y de los tensores de curvatura asociados a ella.

**Teorema 3.** Sea  $\mathcal{M}^N$  una variedad diferenciable con métrica  $g_{\mu\nu}$ . Entonces,  $\mathcal{M}^N$  es máximamente simétrica si, y solo si, su tensor de Riemann y su escalar de Ricci verifican

$$\mathcal{R}_{\mu\nu\rho\lambda} = \frac{\mathcal{R}}{N(N-1)} (g_{\mu\rho} g_{\nu\lambda} - g_{\mu\lambda} g_{\nu\rho}). \quad (2.1.18)$$

*Demostración.* Como ya se adelantó al inicio de esta sección, que una variedad sea máximamente simétrica equivale a que la condición (2.1.12) de consistencia sobre los vectores de Killing  $k_\mu$  sea trivialmente satisfecha, y esta se transformará en una condición sobre el tensor de Riemann  $\mathcal{R}_{\mu\nu\rho}^\lambda$  gracias a (2.1.17). Expandiendo el conmutador de (2.1.12) y sustituyendo (2.1.17), además de tener en cuenta la antisimetría de  $\nabla_\mu k_\nu$  que proporciona la ecuación de Killing y la regla de Leibniz de la derivada covariante, se llega tras reorganizar términos a

$$(\nabla_\mu \mathcal{R}_{\lambda\rho\nu}^\sigma - \nabla_\nu \mathcal{R}_{\lambda\rho\mu}^\sigma)k_\sigma + (\mathcal{R}_{\lambda\rho\nu}^\sigma \delta_\mu^\tau - \mathcal{R}_{\lambda\rho\mu}^\sigma \delta_\nu^\tau + \mathcal{R}_{\mu\nu\rho}^\sigma \delta_\lambda^\tau - \mathcal{R}_{\mu\nu\lambda}^\sigma \delta_\rho^\tau) \nabla_\tau k_\sigma = 0. \quad (2.1.19)$$

Como esta ecuación ha de estar satisfecha incondicionalmente, y en particular para cualquier vector de Killing  $k_\sigma$  y cualquier valor de su derivada covariante  $\nabla_\tau k_\sigma$  (que recuérdese que es antisimétrica por (2.1.8)), ambos sumandos han de ser nulos si la variedad es de simetría máxima. Sobre el primer sumando, esto indica que el término entre paréntesis ha de ser nulo, pero sobre el segundo sumando, la manera menos restrictiva de hacer que sea nulo es que el término entre paréntesis sea simétrico en los índices  $\{\tau, \sigma\}$ , puesto que de  $\nabla_\tau k_\sigma$  solamente se sabe que es antisimétrico, y es conocido que la contracción de un  $(2,0)$ -tensor simétrico con un  $(0,2)$ -tensor antisimétrico es cero. Lo descrito equivale a reescribir (2.1.19) como las ecuaciones

$$\nabla_\mu \mathcal{R}_{\lambda\rho\nu}^\sigma - \nabla_\nu \mathcal{R}_{\lambda\rho\mu}^\sigma = 0, \quad (2.1.20)$$

$$\begin{aligned} & (\mathcal{R}_{\lambda\rho\nu}^\sigma \delta_\mu^\tau - \mathcal{R}_{\lambda\rho\mu}^\sigma \delta_\nu^\tau + \mathcal{R}_{\mu\nu\rho}^\sigma \delta_\lambda^\tau - \mathcal{R}_{\mu\nu\lambda}^\sigma \delta_\rho^\tau) \\ & - (\mathcal{R}_{\lambda\rho\nu}^\tau \delta_\mu^\sigma - \mathcal{R}_{\lambda\rho\mu}^\tau \delta_\nu^\sigma + \mathcal{R}_{\mu\nu\rho}^\tau \delta_\lambda^\sigma - \mathcal{R}_{\mu\nu\lambda}^\tau \delta_\rho^\sigma) = 0. \end{aligned} \quad (2.1.21)$$

Si se multiplica la ecuación (2.1.20) por  $g_\sigma^\rho$  para que aparezca el tensor de Ricci, y después por  $g^{\lambda\nu}$  para encontrar información sobre el escalar de Ricci, esta se transforma en  $\nabla_\mu \mathcal{R} = \partial_\mu \mathcal{R} = 0$  (donde se ha usado que la derivada covariante de un campo escalar es su derivada parcial), de donde el escalar de Ricci es constante en toda la variedad. Luego si la variedad es máximamente simétrica  $\Rightarrow \mathcal{R} = cte$ . Esto tiene sentido desde el punto de vista físico, pues una variedad con un escalar de curvatura que depende del punto es claramente no homogénea. Asimismo, contrayendo en 2.1.21 los índices  $\mu$  y  $\tau$ , y después bajando el índice  $\sigma$  con la métrica se llega a la siguiente condición sobre el tensor de Riemann y el tensor de Ricci:

$$(N-1)\mathcal{R}_{\lambda\rho\nu\sigma} = \mathcal{R}_{\nu\lambda} g_{\rho\sigma} - \mathcal{R}_{\nu\rho} g_{\lambda\sigma}. \quad (2.1.22)$$

Multiplicando (2.1.22) por  $g^{\nu\rho}$  para que aparezca una relación entre el tensor y el escalar de Ricci se llega a

$$\mathcal{R}_{\lambda\sigma} = \frac{1}{N} \mathcal{R} g_{\lambda\sigma}. \quad (2.1.23)$$

Sustituyendo por último (2.1.23) en (2.1.22), se obtiene la ecuación

$$\mathcal{R}_{\mu\nu\rho\lambda} = \frac{\mathcal{R}}{N(N-1)} (g_{\mu\rho} g_{\nu\lambda} - g_{\mu\lambda} g_{\nu\rho}).$$

□

Por lo tanto, se tienen tres definiciones alternativas (pero equivalentes) de variedades lorentzianas de simetría máxima: las definiciones 11 y 12 y el Teorema 3.

### 2.1.4 Aplicaciones físicas de los vectores de Killing

En la sección 2.1.2 se ha visto que cada vector de Killing representa una dirección isométrica de  $g_{\mu\nu}$  y está asociado a una simetría continua de una variedad diferenciable. El Teorema de Noether establece que cada simetría continua de un sistema físico está asociada a una ley de conservación de alguna cantidad, y viceversa. Pues bien, el formalismo de vectores de Killing en el contexto de la Relatividad General permite poner de manifiesto una de esas implicaciones: que si una variedad  $\mathcal{M}^4$  tiene una simetría continua, se le puede asociar una cantidad globalmente conservada, y además permite definir cuál es esta cantidad.

Efectivamente, supóngase una variedad diferenciable con la conexión de Levi-Civita que representa un universo que posee un campo vectorial de Killing  $k_\mu(x)$ , y sea una partícula libre cualquiera en dicho universo. Es conocido que la trayectoria  $x(\tau)$  de dicha partícula será descrita por una geodésica que verifica la ecuación

$$\dot{x}^\rho \nabla_\rho \dot{x}^\mu = 0, \quad (2.1.24)$$

donde el punto indica la derivación respecto del tiempo propio  $\tau$ . Si la variedad tiene definido un vector de Killing  $k_\mu$ , es posible contraer la ecuación (2.1.24) con  $k_\mu(x(\tau))$  a lo largo de la geodésica para obtener la ecuación

$$0 = k_\mu \dot{x}^\rho \nabla_\rho \dot{x}^\mu = \dot{x}^\rho \nabla_\rho (k_\mu \dot{x}^\mu(\tau)) - (\nabla_\rho k_\mu) \dot{x}^\rho \dot{x}^\mu = \dot{x}^\rho \nabla_\rho (k_\mu \dot{x}^\mu(\tau)), \quad (2.1.25)$$

donde se ha utilizado la regla de Leibniz de la derivada covariante en la primera igualdad, y en la segunda que el término  $\nabla_\rho k_\mu$  es antisimétrico por la ecuación de Killing (2.1.8), por lo tanto al contraerlo con el término simétrico  $\dot{x}^\rho \dot{x}^\mu$  el resultado es cero. La ecuación (2.1.25) implica que  $\nabla_\rho (k_\mu \dot{x}^\mu(\tau)) = 0$ . Esto significa que, a lo largo de la geodésica (y en particular en todo el dominio  $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$  de la geodésica  $x(\tau)$ ), se tiene que

$$k_\mu(x(\tau)) \dot{x}^\mu(\tau) = cte, \forall \tau \in \mathcal{I}. \quad (2.1.26)$$

Si se llama  $p^\mu = m_0 \dot{x}^\mu$  a la componente  $\mu$  del cuadrimomento, entonces la ecuación (2.1.26) equivale a que la proyección de  $p^\mu$  en la dirección del vector de Killing  $k$  (que no es más que el producto escalar de  $p$  y  $k$ ) es constante a lo largo de toda la trayectoria, y por lo tanto la cantidad  $k_\mu p^\mu$  queda globalmente conservada para la partícula libre. Esto es una ley global de conservación, como establece el Teorema de Noether.

Para las componentes espaciales  $p^i$  del cuadrimomento, la ley de conservación equivale a la conservación de la proyección del trimomento en la dirección del vector de Killing.<sup>3</sup> Esto significa que los espacios donde haya 3 vectores de Killing en las direcciones espaciales que conmuten entre ellos tendrán simetría por traslación en el espacio, y se podrá definir el momento lineal como una magnitud conservada globalmente, como la proyección del cuadrimomento en la dirección de dichos vectores de Killing.

Análogamente, si se tienen tres vectores de Killing que verifican el álgebra de  $SO(3)$ , el espacio tiene simetría esférica y se puede definir el *momento angular* de la Física Clásica como una cantidad globalmente conservada, que es la proyección del cuadrimomento en la dirección de cada uno de esos tres vectores de Killing.

<sup>3</sup>Se llama *trimomento* y se denota  $p^i$  al vector de tres dimensiones que en Física Clásica corresponde al momento lineal, para diferenciarlo del cuadrimomento  $p^\mu$  (de 4 dimensiones) de la Relatividad Especial.

Una consecuencia muy importante del formalismo de vectores de Killing es que la energía solo se conserva en espacios estáticos, con simetría por traslación temporal. Efectivamente, tomamos la componente  $p^0$  del cuadrimomento, que es la energía en Relatividad Especial (que es válida localmente). Lo que se acaba de probar es que solamente se podrá definir la energía como una cantidad conservada *globalmente* en Relatividad General para una variedad diferenciable si existe un vector de Killing  $k_\mu$  temporal, es decir, tal que  $k_\mu k^\mu > 0$ . Esto equivale a una simetría por traslación temporal, o sea, a un universo estático. Esto es un resultado muy potente y poco conocido: solo las variedades que tengan vectores de Killing temporales describen universos *estáticos* en los que se puede definir una magnitud llamada *energía* que se conserva por traslación temporal, entendiendo la coordenada temporal como la que tiene signo distinto a las demás en el sistema de coordenadas que diagonaliza puntualmente la métrica lorentziana  $g_{\mu\nu}$  a la de Minkowski  $\eta_{\mu\nu}$ . En universos que no tengan un vector de Killing temporal, no se puede ni siquiera definir la energía, y mucho menos decir que se conserva.

## 2.2 Transformaciones conformes de coordenadas en $\mathbb{R}^{1,N-1}$ y transformaciones de Weyl en variedades diferenciables

En la sección 2.1 se han definido los vectores de Killing como las direcciones de invariancia de  $g_{\mu\nu}$ . Ahora, nos preguntamos cuáles son las direcciones a lo largo de las cuales la métrica es constante módulo un factor conforme  $\Lambda$ . Esto llevará a la definición de las llamadas *transformaciones de Weyl* de la métrica y a solucionar la llamada *ecuación de Killing conforme*, que es una generalización de la ecuación de Killing (2.1.8). Esta ecuación es importante porque aparecerá en el cálculo de los vectores de Killing de las métricas FLRW del capítulo 4, y se resuelve para el espacio de Minkowski  $N$ -dimensional  $\mathbb{R}^{1,N-1}$ . Las transformaciones de Weyl se introducen porque permitirán resolver *de un plumazo* la ecuación de Killing conforme en todos los espacios cuyas métricas se relacionen a través de una transformación de Weyl, como veremos en el Teorema 4.

En la sección 2.1.2 se habló de cambios de coordenadas  $x \rightarrow x'$  (donde  $x$  denota las coordenadas cartesianas) que preservaban la métrica, es decir, tales que  $g_{\mu\nu}(x) = \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\nu} g_{\rho\sigma}(x')$ , donde  $\frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu}$  es la matriz de cambio de base del cambio de coordenadas. Ahora se estudiarán transformaciones de coordenadas  $x \rightarrow y$  en el espacio de Minkowski  $N$ -dimensional  $\mathbb{R}^{1,N-1}$  que se denominan *conformes*. Estas transformaciones son las que preservan la métrica de Minkowski  $\eta_{\mu\nu}$  salvo un factor de escala  $\Lambda(y)$  (o *factor conforme*). Todo este análisis se realiza para coordenadas cartesianas  $x$ , pero para coordenadas arbitrarias bastará con multiplicar la ecuación (2.2.1) por la matriz de cambio de base correspondiente.

**Definición 13.** Un cambio de parámetros  $x \rightarrow y$  en  $\mathbb{R}^{1,N-1}$  recibe el nombre de *transformación conforme* si verifica

$$\Lambda(y)\eta_{\alpha\beta}(y) = \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial y^\beta} \eta_{\mu\nu}(x). \quad (2.2.1)$$

Se puede ver este cambio de coordenadas en su versión infinitesimal, de manera que  $y^\mu = x^\mu - \xi^\mu(x) \Rightarrow \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\alpha} = \delta_\alpha^\mu + \partial_\alpha \xi^\mu$ . Utilizando esto, la ecuación (2.2.1) se reescribe hasta orden lineal en  $\xi^\mu(x)$  como  $\Lambda(y)\eta_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu$ . Llamando  $\Omega(x) \equiv \Lambda(y) - 1$ , y contrayendo con  $\eta^{\mu\nu}$ , se llega a que  $2\partial_\mu \xi^\mu = N\Omega(x)$ , donde  $N$  es la dimensión de la

variedad, y sustituyendo esta última ecuación en la anterior, se tiene que si  $\xi^\mu$  es un vector que da el cambio de coordenadas infinitesimal  $x \rightarrow y$  de una transformación conforme (donde  $x$  son las coordenadas cartesianas), entonces verifica

$$\partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu = \frac{2}{N} \partial_\rho \xi^\rho \eta_{\mu\nu}. \quad (2.2.2)$$

Esta es la *ecuación de Killing conforme* del espacio de Minkowski, cuyas soluciones  $\xi_\mu$  se llaman *vectores de Killing conformes* de  $\mathbb{R}^{1,N-1}$ . Su interpretación física es que los  $\xi_\mu$  son campos vectoriales cuyas curvas integrales indican direcciones en las que la métrica es constante módulo un factor conforme  $\Lambda(y)$ . El uso de una transformación de coordenadas infinitesimal se justifica en que estamos buscando simplemente las *direcciones* isométricas conformes, y no las curvas isométricas conformes completas. Se pasa entonces a solucionar (2.2.2).<sup>4</sup>

**Proposición 6.** *Los vectores de Killing conformes en el espacio de Minkowski  $N$ -dimensional  $\mathbb{R}^{1,N-1}$  son de la forma*

$$\xi_\mu = a_\mu + \alpha \eta_{\mu\nu} x^\nu + \theta_{\mu\nu} x^\nu + (\eta_{\mu\nu} V_\rho + \eta_{\mu\rho} V_\nu - \eta_{\nu\rho} V_\mu) x^\nu x^\rho, \quad (2.2.3)$$

donde  $a_\mu$ ,  $V_\mu$  son vectores covariantes arbitrarios,  $\alpha$  es un escalar, y  $\theta_{\mu\nu}$  es un tensor antisimétrico de rango  $(0,2)$  cualquiera.

*Demostración.* Si se contrae (2.2.2) tomando derivada parcial  $\partial^\mu \equiv \eta^{\mu\sigma} \partial_\sigma$ , se tiene que  $\partial_\mu \partial^\mu \xi_\nu = \frac{2-N}{N} \partial_\nu (\partial_\mu \xi^\mu)$ , donde se ha usado que  $\partial_\sigma \eta_{\mu\nu} = 0$  por la conexión de Levi-Civita y que  $\eta^{\mu\sigma} \eta_{\mu\nu} = \delta_\nu^\sigma$  por la definición de la métrica inversa  $g^{\mu\sigma}$ . Se reconoce en  $\partial_\mu \xi^\mu$  la *divergencia* del campo vectorial  $\xi^\mu$ . Tomando en esta última expresión derivada parcial  $\partial_\rho$ , se llega a

$$\partial_\rho \partial_\mu \partial^\mu \xi_\nu = \frac{2-N}{N} \partial_\rho \partial_\nu (\partial_\mu \xi^\mu),$$

donde ahora hay dos índices libres  $\rho, \nu$ . Intercambiándolos y sumando las respectivas expresiones (teniendo en cuenta la conmutación de las derivadas parciales y que se cumple (2.2.2)) se llega a  $[\eta_{\nu\rho} \partial_\lambda \partial^\lambda + (N-2) \partial_\nu \partial_\rho] \partial_\mu \xi^\mu = 0$ , y contrayendo con  $\eta^{\nu\rho}$  se llega a

$$\partial_\lambda \partial^\lambda (\partial_\mu \xi^\mu) = 0. \quad (2.2.4)$$

La ecuación (2.2.4) dice que el campo escalar  $\partial_\mu \xi^\mu$  verifica la ecuación de Laplace en el espacio de Minkowski.<sup>5</sup> Por lo tanto,  $\xi_\mu$  necesariamente es de la forma ([1], ecuación 24.12)

$$\xi_\mu(x) = a_\mu + b_{\mu\nu} x^\nu + c_{\mu\nu\rho} x^\nu x^\rho, \quad (2.2.5)$$

con  $a_\mu$ ,  $b_{\mu\nu}$  y  $c_{\mu\nu\rho}$  de manera que  $\xi_\mu$  verifique (2.2.2). Como la ecuación de Killing conforme es lineal, cada sumando de (2.2.5) ha de verificar (2.2.2). Todo  $(0,2)$ -tensor se puede descomponer como la suma de su parte antisimétrica, su parte simétrica sin traza y su traza. Si  $\xi_\mu(x) = a_\mu$ , (2.2.2) no impone condiciones sobre  $a_\mu$ . Si  $\xi_\mu(x) = b_{\mu\nu} x^\nu$ , entonces la simetría en los índices  $\mu, \nu$  de la ecuación de Killing conforme obliga a que la *parte antisimétrica* de  $b_{\mu\nu}$  sea nula, y por lo tanto será

$$b_{\mu\nu} = \alpha \eta_{\mu\nu} + \theta_{\mu\nu}, \quad (2.2.6)$$

<sup>4</sup>Con la ventaja de que se trabaja en coordenadas cartesianas en un espacio plano y, por lo tanto, sin curvatura.

<sup>5</sup>Si estamos en el espacio de Minkowski 3-dimensional, la ecuación de Laplace equivale a la ecuación de D'Alembert, cuya solución es conocida (ver [11], sección 2.4).



donde  $\alpha$  es la traza de  $b_{\mu\nu}$  y  $\theta_{\mu\nu}$  es antisimétrico. Como no se impone ninguna restricción más sobre  $b_{\mu\nu}$ ,  $\alpha$  puede tomar cualquier valor real. Si se deriva (2.2.2) respecto de  $\partial_\rho$  y se permutan los tres índices libres  $\mu, \nu, \rho$ , se tiene que la combinación lineal adecuada ([1], ecuaciones 24.15 y 24.16) de estas ecuaciones con índices permutados lleva a la siguiente condición sobre  $c_{\mu\nu\rho}$

$$c_{\mu\nu\rho} = \eta_{\mu\nu}V_\rho + \eta_{\mu\rho}V_\nu - \eta_{\nu\rho}V_\mu, \quad (2.2.7)$$

donde  $V_\rho = \frac{1}{N}\eta^{\mu\nu}c_{\mu\nu\rho}$ . La falta de ligaduras adicionales sobre  $c_{\mu\nu\rho}$  indica que  $V_\rho$  es un campo vectorial cualquiera. Las ecuaciones (2.2.5), (2.2.6) y (2.2.7), unidas a las observaciones sobre  $a_\mu$  y  $V_\rho$  demuestran la proposición.  $\square$

Un cálculo totalmente análogo revela que los vectores de Killing conformes  $\tilde{\xi}_i$  de  $\mathbb{R}^N$  son los que da la ecuación (2.2.3), pero cambiando  $\eta_{\mu\nu}$  por  $\delta_{ij}$ . Así, los vectores de Killing conformes de  $\mathbb{R}^N$  son

$$\tilde{\xi}_\mu = \frac{4}{(1 + Kx^2)^2} [a_\mu + \alpha\delta_{\mu\nu}x^\nu + \theta_{\mu\nu}x^\nu + (\delta_{\mu\nu}V_\rho + \delta_{\mu\rho}V_\nu - \delta_{\nu\rho}V_\mu)x^\nu x^\rho]. \quad (2.2.8)$$

Generalizamos ahora la ecuación (2.2.2) para espacios y métricas cualesquiera. Véase que, en el espacio de Minkowski, las derivadas parciales coinciden con las derivadas covariantes, lo que invita a definir la ecuación de Killing conforme en espacios arbitrarios sustituyendo las derivadas parciales por derivadas covariantes.

**Definición 14.** Sea  $\mathcal{M}^4$  una variedad diferenciable con métrica  $g_{\mu\nu}$ . Se definen los **vectores de Killing conformes** de  $g_{\mu\nu}$  como los campos vectoriales  $k_\mu(x)$  que solucionan la ecuación

$$\nabla_\mu k_\nu + \nabla_\nu k_\mu = \frac{2}{N} \nabla_\rho k^\rho g_{\mu\nu}, \quad (2.2.9)$$

que es la llamada **ecuación de Killing conforme** de  $g_{\mu\nu}$ .

A partir de la definición 14 de vector de Killing conforme y la definición 5 de vector de Killing, es evidente cuál es la relación entre los vectores de Killing y los vectores de Killing conformes. Los vectores de Killing de una métrica son vectores de Killing conformes, porque si  $\nabla_\mu k_\nu + \nabla_\nu k_\mu = 0$ , contrayendo con  $g^{\mu\nu}$  se tiene que también  $\frac{2}{N} \nabla_\rho k^\rho g_{\mu\nu} = 0$ , verificando (2.2.9). Por otra parte, los vectores de Killing conformes que además son vectores de Killing son exactamente los que satisfacen  $\nabla_\rho k^\rho = 0$ .

Veremos ahora una familia de transformaciones de la métrica, las *transformaciones de Weyl*, que en cierto sentido *preserva* la ecuación de Killing conforme. Ahora no se tendrán transformaciones de coordenadas de una métrica fija, sino que es *la propia métrica* la que cambia.

**Definición 15.** Sea una variedad diferenciable  $N$ -dimensional  $\mathcal{M}^N$ . Dos métricas  $\tilde{g}_{\mu\nu}$  y  $g_{\mu\nu}$  sobre  $\mathcal{M}^N$  están relacionadas por una **transformación de Weyl** si  $\exists \Omega : \mathcal{M}^N \rightarrow \mathcal{M}^N$  tal que

$$\tilde{g}_{\mu\nu}(x) = e^{2\Omega(x)} g_{\mu\nu}(x). \quad (2.2.10)$$

La función  $\Omega(x)$  es una función arbitraria (que nada tiene que ver con la que aparecía antes para las transformaciones conformes). La presencia de la exponencial en (2.2.10) se debe a que hace que el factor  $e^{2\Omega(x)}$  sea positivo, y esto significa que el signo de la norma de los vectores es el mismo con  $g_{\mu\nu}$  que con  $\tilde{g}_{\mu\nu}$ . Ello implica que ambas métricas tienen

la misma *estructura causal*. El análisis de la estructura causal de variedades relacionadas a través de una transformación de Weyl escapa a los objetivos de esta memoria, pero se puede consultar en las secciones 23.3, 23.4 y 23.5 de [1].

Se pueden caracterizar las métricas relacionadas por una transformación de Weyl a través del llamado *tensor de Weyl*.

**Definición 16.** Dada una métrica  $g_{\mu\nu}$  sobre una variedad diferenciable  $\mathcal{M}^N$ , se define el **tensor de Weyl**  $C_{\mu\nu\rho\lambda}$  como

$$C_{\mu\nu\rho\lambda} = \mathcal{R}_{\mu\nu\rho\lambda} + \frac{1}{N-2} [g_{\mu\lambda}\mathcal{R}_{\nu\rho} - g_{\nu\lambda}\mathcal{R}_{\mu\rho} - g_{\mu\rho}\mathcal{R}_{\nu\lambda} + g_{\nu\rho}\mathcal{R}_{\mu\lambda}] - \frac{1}{(N-1)(N-2)} \mathcal{R} [g_{\mu\lambda}g_{\nu\rho} - g_{\mu\rho}g_{\nu\lambda}], \quad (2.2.11)$$

donde  $\mathcal{R}_{\mu\nu\rho\lambda}$ ,  $\mathcal{R}_{\mu\nu}$  y  $\mathcal{R}$  son el tensor de Riemann de  $g_{\mu\nu}$  y sus contracciones.

Un cálculo sencillo muestra que la única contracción posible no trivial de los índices del tensor de Weyl, que es  $g^{\nu\lambda}C_{\mu\nu\rho\lambda}$ ,<sup>6</sup> es idénticamente nula, por lo que se puede ver el tensor de Weyl como la parte *sin traza* del tensor de Riemann, despejando  $\mathcal{R}_{\mu\nu\rho\lambda}$  de (2.2.11). De la definición 16 es inmediato que, en el espacio de Minkowski (donde  $\mathcal{R}_{\mu\nu\rho\lambda} = 0$ ) se tiene que  $C_{\mu\nu\rho\lambda} = 0$ .

Tener el mismo tensor de Weyl caracteriza a las métricas relacionadas a través de una transformación de Weyl.

**Proposición 7.** Dos métricas  $\tilde{g}_{\mu\nu}$  y  $g_{\mu\nu}$  están relacionadas a través de una transformación de Weyl (2.2.10) si, y solo si, tienen el mismo tensor de Weyl.

*Demostración.* Se puede encontrar en [1], ecuación (24.38). Excede el propósito de esta memoria.  $\square$

La proposición 7 se usará para probar que las métricas FLRW del capítulo 3 son *conformemente planas*, es decir, que existe una transformación de Weyl que las relaciona con el espacio de Minkowski. Más rigurosamente, una métrica  $g_{\mu\nu}$  se dice *conformemente plana* si  $\exists \Omega : \mathcal{M}^N \rightarrow \mathcal{M}^N$  tal que

$$g_{\mu\nu}(x) = e^{2\Omega(x)} \eta_{\mu\nu}(x). \quad (2.2.12)$$

Por último, se tendrá que los vectores de Killing conformes de  $g_{\mu\nu}$  estarán relacionados con los de  $\tilde{g}_{\mu\nu}$  de la manera siguiente.

**Teorema 4.** Sean dos métricas  $g_{\mu\nu}$  y  $\tilde{g}_{\mu\nu}$  relacionadas a través de una transformación de Weyl, de manera que  $g_{\mu\nu}(x) = e^{2\Omega(x)} \tilde{g}_{\mu\nu}(x)$ . Entonces, los vectores de Killing conformes  $\xi_\mu$  de  $\tilde{g}_{\mu\nu}$  y los vectores de Killing conformes  $k_\mu$  de  $g_{\mu\nu}$  están biyectivamente relacionados a través de

$$k_\mu = e^{2\Omega} \xi_\mu. \quad (2.2.13)$$

*Demostración.* Se puede encontrar en [1], páginas 480, 481. Se omite porque requiere un cálculo tedioso que relaciona los símbolos de Christoffel de  $\tilde{g}_{\mu\nu}$  con los de  $g_{\mu\nu}$  a través de  $\Omega(x)$ .  $\square$

---

<sup>6</sup>Esta es la única contracción independiente, puesto que se puede comprobar que el tensor de Weyl tiene las mismas simetrías en sus índices que el tensor de Riemann, que solo tiene esa contracción independiente.



Gracias al teorema 4, resolver la ecuación de Killing conforme para una métrica  $g_{\mu\nu}$  dada equivale a resolverla para una métrica  $\tilde{g}_{\mu\nu}$  relacionada con ella a través de una transformación de Weyl. Si se tiene explícitamente el factor  $e^{2\Omega(x)}$ , entonces los vectores de Killing conformes de  $g_{\mu\nu}$  se pueden calcular a partir de los de  $\tilde{g}_{\mu\nu}$  utilizando (2.2.13).

### 2.3 Cálculo de vectores de Killing conformes y vectores de Killing en las variedades $\mathbb{K}^N$

Resolver la ecuación de Killing conforme (2.2.9) y la ecuación de Killing (2.1.8) en general no es una tarea sencilla. Sin embargo, el trabajo se simplifica considerando variedades lo más sencillas posible. En concreto, se puede pensar en variedades diferenciables con curvatura constante y métrica riemanniana. En esta sección se calculan explícitamente en unas coordenadas concretas los vectores de Killing conformes y los vectores de Killing de estos espacios, que llamaremos conjuntamente *espacios*  $\mathbb{K}^N$ . Las variedades de signatura riemanniana y curvatura  $K$  constante son 3 en cada dimensión  $N$ .

**Definición 17.** El *espacio*  $\mathbb{K}^N$  es una variedad diferenciable de  $N$  dimensiones, equipada con una métrica de signatura riemanniana  $\tilde{g}_{ij}$  de manera que, en un cierto sistema de coordenadas, el elemento de línea dado por  $\tilde{g}_{ij}$  tiene la expresión

$$d\tilde{s}^2 = \frac{4}{(1 + Kx^2)^2} \delta_{ij} dx^i dx^j, \quad (2.3.1)$$

donde  $x^2 \equiv \delta_{ij} x^i x^j$  y  $K$  es una constante real.

Los índices  $i, j$  se denotan como índices latinos en esta ocasión porque las variedades  $\mathbb{K}^N$  se utilizarán como modelos de secciones *espaciales* de simetría máxima para las métricas FLRW, que veremos en el capítulo 3.

Si  $K = 0$ , entonces se tiene el espacio plano  $\mathbb{R}^N$ . En coordenadas cartesianas (con un factor de escala 4), su métrica se puede escribir como

$$d\tilde{s}^2 = 4\delta_{ij} dx^i dx^j. \quad (2.3.2)$$

Tomando  $K > 0$ , tenemos la  $N$ -esfera  $S^N$  de radio  $R_0$ , que se escribe como

$$d\tilde{s}^2 = R_0^2 [d\theta^2 + \sin^2\theta d\Omega_{N-1}]. \quad (2.3.3)$$

Se puede ver que esto describe una  $N$ -esfera. Por ejemplo, en dimensión 3, se tienen las coordenadas azimutales  $(\chi, \theta, \varphi)$ , y el cambio de coordenadas  $X^1 = k^{-\frac{1}{2}} \sin\chi \sin\theta \cos\varphi$ ,  $X^2 = k^{-\frac{1}{2}} \sin\chi \sin\theta \sin\varphi$ ,  $X^3 = k^{-\frac{1}{2}} \sin\chi \cos\theta$ ,  $X^4 = k^{-\frac{1}{2}} \cos\chi$  satisface la ligadura  $(X^1)^2 + (X^2)^2 + (X^3)^2 + (X^4)^2 = K^{-1}$ , con lo cual se tiene una esfera embebida en  $\mathbb{R}^4$ . En dimensión general, con el cambio a coordenadas estereográficas  $r = \frac{R_0 \sin\theta}{1 - \cos\theta}$ , su métrica se escribe

$$d\tilde{s}^2 = \frac{4R_0^4}{(r^2 + R_0^2 x^2)^2} [dr^2 + d\Omega_{N-1}], \quad (2.3.4)$$

donde  $K = R_0^{-2}$ . El grupo de simetrías de  $S^N$  verifica el álgebra de  $SO(N)$ .

Por último, si  $K < 0$ , estamos hablando del  $N$ -hiperboloide  $\mathbb{H}^N$ , que se escribe como

$$d\tilde{s}^2 = R_0^2 [d\theta^2 + \sinh^2\theta d\Omega_{N-1}]. \quad (2.3.5)$$

De nuevo en dimensión 3, se tienen las coordenadas azimutales  $(\chi, \theta, \varphi)$ , y el cambio de coordenadas  $X^1 = k^{-\frac{1}{2}} \sinh \chi \sinh \theta \cosh \varphi$ ,  $X^2 = k^{-\frac{1}{2}} \sinh \chi \sinh \theta \sinh \varphi$ ,  $X^3 = k^{-\frac{1}{2}} \sinh \chi \cosh \theta$ ,  $X^0 = k^{-\frac{1}{2}} \cosh \chi$  satisface la ligadura  $(X^4)^2 - (X^1)^2 - (X^2)^2 - (X^3)^2 = K^{-1}$ , con lo cual se tiene un hiperboloide embebido en el espacio de Minkowski  $\mathbb{R}^{1,3}$  (no es posible embeberlo en  $\mathbb{R}^4$ ). En dimensión  $N$ , el cambio a coordenadas  $r = \frac{R_0 \sinh \theta}{1 - \cosh \theta}$  permite escribir la métrica como

$$d\tilde{s}^2 = \frac{4R_0^4}{(r^2 - R_0^2 x^2)^2} [dr^2 + d\Omega_{N-1}], \quad (2.3.6)$$

donde  $K = -R_0^{-2}$ . El grupo de simetrías de  $\mathbb{H}^N$  verifica el álgebra de  $SO(1, N-1)$ .

Estos son todos los espacios  $\mathbb{K}^N$  posibles, pues de la constante  $K$  solamente importa su signo, salvo reparametrización.

Utilizando la definición de  $\tilde{g}_{ij}$ , se puede calcular el tensor de Riemann de los espacios  $\mathbb{K}^N$  a partir de sus símbolos de Christoffel. Según la definición (1.0.3), un cálculo sencillo muestra que los símbolos de Christoffel de  $\tilde{g}_{ij}$  son

$$\tilde{\Gamma}_{ij}^k = 2K(1 + Kx^2)^{-1} [x^k \delta_{ij} - x_i \delta_j^k - x_j \delta_i^k]. \quad (2.3.7)$$

A partir de ellos, se tiene que el tensor de Riemann de los espacios  $\mathbb{K}^N$  vale

$$\tilde{\mathcal{R}}_{ijkl} = K [\tilde{g}_{il} \tilde{g}_{jk} - \tilde{g}_{ik} \tilde{g}_{jl}]. \quad (2.3.8)$$

Vemos que se cumple la definición (2.1.18), con lo que los espacios  $\mathbb{K}^N$  son máximamente simétricos. Esto no es de extrañar, pues ya sabíamos que estos espacios se reducen a  $\mathbb{R}^N$ ,  $\mathbb{S}^N$  o  $\mathbb{H}^N$ , las  $N$ -variedades riemannianas de curvatura constante, que son las de simetría máxima.

De la definición 17 se tiene que

$$\tilde{g}_{ij} = \frac{4}{(1 + Kx^2)^2} \delta_{ij}, \quad (2.3.9)$$

y por lo tanto un espacio  $\mathbb{K}^N$  está relacionado con  $\mathbb{R}^N$  (cuya métrica en cartesianas es precisamente  $\delta_{ij}$ ) a través de una transformación de Weyl con parámetro  $\frac{4}{(1+Kx^2)^2}$ . Por lo tanto, el Teorema 4 y la ecuación (2.2.8) establecen que los vectores de Killing conformes  $\tilde{\xi}_i$  de  $\mathbb{K}^N$  son

$$\tilde{\xi}_i = \frac{4}{(1 + Kx^2)^2} [a_i + \alpha \delta_{ij} x^j + \theta_{ij} x^j + (\delta_{ij} V_m + \delta_{im} V_j - \delta_{jm} V_i) x^j x^m], \quad (2.3.10)$$

con  $a_i$ ,  $V_i$  campos vectoriales arbitrarios,  $\alpha$  un escalar y  $\theta_{ij}$  un tensor antisimétrico.

Por otra parte, a partir de (2.3.9), es inmediato que  $\sqrt{|\tilde{g}|} = 2^N (1 + Kx^2)^{-N}$ .<sup>7</sup> Recuérdese que los vectores de Killing de  $\mathbb{K}^N$  son los vectores de Killing conformes de divergencia cero, y que la divergencia de cualquier vector  $V_\mu$  se puede calcular como  $\nabla_\mu V^\mu = \frac{1}{\sqrt{|\tilde{g}|}} \partial_\mu (\sqrt{|\tilde{g}|} V^\mu)$  con la conexión de Levi-Civita ([1], ecuación 8.38). Por lo tanto, tras subir con la métrica inversa  $g^{ij}$  el índice  $i$  de los vectores de Killing conformes de (2.3.10), se tendrá que un vector de Killing conforme de  $\mathbb{K}^N$  es además de Killing si,

<sup>7</sup> $|\tilde{g}|$  denota el valor absoluto del determinante de  $\tilde{g}$ , que es invariante bajo cambios de coordenadas.

y solo si

$$\begin{aligned} 0 = \nabla_i \tilde{\xi}^i &= \frac{1}{\sqrt{|\tilde{g}|}} \partial_i \left( \sqrt{|\tilde{g}|} \tilde{\xi}^i \right) \\ &= 2N (1 + Kx^2)^{-1} \left[ (V_k - Ka_k) x^k + \frac{1}{2} \alpha (1 - Kx^2) \right], \end{aligned}$$

tras hacer cálculos y reordenar términos. Por lo tanto, un vector de Killing conforme  $\tilde{\xi}_i$  del espacio  $\mathbb{K}^N$  dado por (2.3.10) será de Killing si, y solo si  $\alpha = 0$  y  $V_k = Ka_k$ . Tras sustituir estas igualdades en (2.3.10), los vectores de Killing  $\tilde{k}_i$  de los espacios  $\mathbb{K}^N$  son

$$\tilde{k}_i = 4 (1 + Kx^2)^{-2} \left[ \theta_j^i x^j + (1 - Kx^2) a_i + 2Kx_i (a_m x^m) \right]. \quad (2.3.11)$$

Véase que el número de vectores de Killing de  $\mathbb{K}^N$  es igual a las  $N$  componentes independientes posibles de  $a_i$  más las  $\frac{1}{2}N(N-1)$  componentes independientes posibles del tensor antisimétrico  $\theta_{ij}$ , lo que hace un total de  $\frac{1}{2}N(N+1)$  vectores de Killing totales. Esto vuelve a confirmar a través de la definición 12 que los espacios  $\mathbb{K}^N$  son máximamente simétricos.



## Capítulo 3

# Métricas Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker

En esta memoria se pretenden encontrar las simetrías de universos homogéneos a gran escala. En este capítulo se introducen las métricas que describen estos universos, llamadas *métricas de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker*, o, de forma abreviada, *métricas FLRW*. En particular, se realiza el estudio de sus tensores de curvatura y se comenta su relevancia como modelos cosmológicos, y se ilustra cómo dan lugar a partir de las ecuaciones de Einstein a las ecuaciones de Friedmann, que son la descripción fundamental del Universo en Cosmología. Se describen asimismo los principales ejemplos históricos de métricas de este tipo, así como el modelo cosmológico más aceptado actualmente. Por último, se demuestra que las métricas FLRW son *conformemente planas*, y se caracterizan las métricas FLRW máximamente simétricas en términos de sus parámetros. Esto preparará el camino para estudiar, en el capítulo 4, las simetrías que tienen los principales modelos de universos a gran escala como variedades descritas por métricas FLRW.

### 3.1 Métricas FLRW: forma y tensores de curvatura

Las métricas FLRW nacieron en el primer tercio del siglo XX como un intento de construir un modelo sencillo del Universo a gran escala que fuera coherente con la recién propuesta teoría de la Relatividad General de Einstein. En 1922, Alexander Friedmann propuso las métricas FLRW como un Ansatz para el universo, y obtuvo sus famosas ecuaciones de Friedmann sustituyéndolo en las ecuaciones de Einstein. En 1927, George Lemaître derivó independientemente las ecuaciones de Friedmann, y en 1935 y 1936, Howard Robertson y Arthur Walker demostraron independientemente que la métrica propuesta por Friedmann es el Ansatz más general que describe un universo homogéneo e isótropo. Estos dos últimos adjetivos dejan entrever los dos principios simplificadores en que se basan estas métricas.

El primero de ellos es puramente geométrico, el llamado *Principio Cosmológico*, que dictamina que *en cualquier momento, el universo es homogéneo e isótropo a muy grandes escalas*. Esta suposición es el análogo moderno al *principio Copernicano*, y significa que no hay ningún punto especial en el Universo, sino que todos son equivalentes. Originalmente se utilizó por su simplicidad, pero además, está ampliamente respaldado en la actualidad. La evidencia observacional que apoya el Principio Cosmológico es extensa, incluso con

los métodos de observación más avanzados (ver [12], [13], [14]). Este Principio implica que las secciones espaciales del Universo tienen que tener una métrica euclídea tridimensional máximamente simétrica, es decir, un espacio  $\mathbb{K}^3$  como los descritos en la sección 2.3.

El segundo principio alude al comportamiento de la materia a grandes escalas, el *Principio de Weyl*, que establece que *a escalas cosmológicas, la materia se comporta como un fluido perfecto, cuyas componentes se mueven a lo largo de geodésicas temporales que no se intersecan, salvo (posiblemente) en un punto singular en el pasado.*

Toda esta noción tiene como traducción geométrica que el universo está descrito por una variedad diferenciable  $\mathcal{M}^4$  que es una *foliación* en la dirección de una coordenada  $t$  (llamada *tiempo comóvil*, o *tiempo cosmológico*) de secciones espaciales  $\mathbb{K}^3$  máximamente simétricas y de curvatura constante. Una foliación 4-dimensional en la coordenada  $t$  se define como una variedad diferenciable de dimensión  $N$  en la que cada punto está situado exactamente en una hipersuperficie de dimensión 3, caracterizada por un vector ortogonal en la dirección de  $t$ . Observamos entonces que  $t$  es por definición una coordenada *privilegiada*, que está especialmente adaptada a las simetrías de la variedad. Cabe destacar que una misma variedad diferenciable  $\mathcal{M}^4$  puede admitir más de una foliación diferente, y en general esto va a depender de su número de simetrías.

Por lo tanto, un Ansatz general para el elemento de línea de una métrica FLRW es

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2 \tilde{g}_{ij} dx^i dx^j, \quad (3.1.1)$$

donde  $\tilde{g}_{ij}$  es una métrica riemanniana tridimensional que da lugar a secciones espaciales máximamente simétricas, y el factor  $a(t)$  se denomina *factor de escala*, que se puede interpretar como la *expansión* o *contracción* de las secciones espaciales, y que es por definición no nulo. La métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker en forma tensorial se escribe por tanto como

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -a^2(t) \tilde{g}_{ij} \end{pmatrix} \Leftrightarrow g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -a^{-2}(t) \tilde{g}^{ij} \end{pmatrix}. \quad (3.1.2)$$

Observamos que la matriz de  $g_{\mu\nu}$  (4.0.2) descompone por cajas. Esto hace que los vectores cuatrimensionales transformen según la llamada *descomposición 3+1*. Efectivamente, la foliación separa la coordenada temporal de las espaciales, pero no las espaciales entre sí. Por lo tanto, podemos seguir tratando la parte espacial como explícitamente covariante bajo difeomorfismos de dimensión 3. Esto hace que los índices tomen valores  $t$  e  $i$  bien distinguidos. Los vectores cuatrimensionales descomponen en una componente temporal, que se comporta como un escalar y tres componentes espaciales que se comportan como un vector bajo cambios tridimensionales de coordenadas.<sup>1</sup>

Véase que, tomando  $a(t) = 1$  y  $\tilde{g}_{ij} = \delta_{ij}$ , (3.1.1) y (3.1.2) particularizan a la métrica de Minkowski  $\eta_{\mu\nu}$ , por lo que *el espacio de Minkowski  $\mathbb{R}^{1,3}$  es una métrica FLRW.*

Puesto que la métrica  $\tilde{g}_{ij}$  es de simetría máxima, es la métrica de un espacio  $\mathbb{K}^N$  de los de la sección 2.3 particularizados para  $N = 3$ . A partir de la ecuación (2.3.8) se tiene que el tensor de Riemann de las secciones espaciales vale

$$\tilde{\mathcal{R}}_{ijkl} = k [\tilde{g}_{il} \tilde{g}_{jk} - \tilde{g}_{ik} \tilde{g}_{jl}], \quad (3.1.3)$$

<sup>1</sup>En adelante, se utilizarán índices griegos  $\mu, \nu, \rho, \lambda, \sigma$ , etc. para las coordenadas cuatrimensionales de la variedad diferenciable, e índices latinos  $i, j, k, l$ , etc. para las coordenadas tridimensionales en las que se folia la variedad. Asimismo, se escribirán con una tilde superior las magnitudes referidas a la métrica espacial  $\tilde{g}_{ij}$ , y sin tilde las referidas a  $g_{\mu\nu}$ .

donde se ha definido la constante  $k$ , que se denominará en lo sucesivo *curvatura*. La diferencia de  $k$  con la  $K$  de la sección 2.3 es que, mientras que  $K$  podía tomar cualquier valor,  $k$  está normalizada, de manera que  $k = K/|K|$  (salvo si  $K = 0$ , en cuyo caso  $k = 0$ ), y entonces  $k = 0, \pm 1$ . Además, su valor dependerá de las coordenadas utilizadas. Contrayendo (3.1.3) con  $\tilde{g}^{ij}$  se tienen el tensor de Ricci y el escalar de Ricci de las secciones espaciales

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{R}}_{ij} &= -2k\tilde{g}_{ij} \\ \tilde{\mathcal{R}} &= -6k = cte.\end{aligned}\tag{3.1.4}$$

Procedamos ahora a calcular los símbolos de Christoffel de una métrica FLRW. La conexión de Levi-Civita (1.0.3) establece entonces que los símbolos de Christoffel para la métrica (3.1.1) están dados por la expresión

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} = \frac{1}{2}g^{\rho\lambda}[\partial_{\mu}g_{\lambda\nu} + \partial_{\nu}g_{\mu\lambda} - \partial_{\lambda}g_{\mu\nu}].\tag{3.1.5}$$

Puesto que por la conexión Levi-Civita se tiene que  $\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} = \Gamma_{\nu\mu}^{\rho}$ , los posibles símbolos de Christoffel independientes son 6, a saber  $\Gamma_{tt}^t, \Gamma_{ti}^t, \Gamma_{tt}^i, \Gamma_{ij}^t, \Gamma_{tj}^i, \Gamma_{ij}^k$ , que son todas las posibles maneras en que la coordenada temporal se puede mezclar con las coordenadas espaciales de la foliación (que son todas equivalentes al haber simetría máxima en las secciones espaciales). Sin embargo, la descomposición por cajas de  $g_{\mu\nu}$  indica que los tres símbolos de Christoffel independientes no nulos son

$$\begin{aligned}\Gamma_{ij}^t &= a\dot{a}\tilde{g}_{ij} \\ \Gamma_{tj}^i &= \frac{\dot{a}}{a}\delta_j^i \\ \Gamma_{ij}^k &= \tilde{\Gamma}_{ij}^k,\end{aligned}\tag{3.1.6}$$

donde se ha obviado la dependencia  $a(t)$ . Recuérdese que  $a(t)$  es una función conocida de variable real que no se anula. Los  $\tilde{\Gamma}_{ij}^m$  son los símbolos de Christoffel de las secciones espaciales. Puesto que estas son espacios  $\mathbb{K}^3$ , están dados por (2.3.7) como

$$\tilde{\Gamma}_{ij}^m = 2k(1 + kx^2)^{-1} [x^m\delta_{ij} - x_i\delta_j^m - x_j\delta_i^m].\tag{3.1.7}$$

Gracias al cálculo de los símbolos de Christoffel (3.1.6) es posible computar de manera rutinaria la expresión del tensor de Riemann y de sus contracciones para las métricas FLRW utilizando la definición

$$\mathcal{R}_{\mu\nu\rho}^{\lambda} = \partial_{\mu}\Gamma_{\nu\rho}^{\lambda} - \partial_{\nu}\Gamma_{\mu\rho}^{\lambda} + \Gamma_{\mu\sigma}^{\lambda}\Gamma_{\nu\rho}^{\sigma} - \Gamma_{\nu\sigma}^{\lambda}\Gamma_{\mu\rho}^{\sigma},\tag{3.1.8}$$

y bajando el índice  $\lambda$  con la métrica a través de  $\mathcal{R}_{\mu\nu\rho\lambda} = g_{\lambda\sigma}\mathcal{R}_{\mu\nu\rho}^{\sigma}$ . Efectivamente, se tiene que las dos componentes no nulas de  $\mathcal{R}_{\mu\nu\rho\lambda}$  son

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_{titt} &= -a\ddot{a}\tilde{g}_{ij} \\ \mathcal{R}_{ijkl} &= -a^2(\dot{a}^2 + k) [\tilde{g}_{il}\tilde{g}_{jk} - \tilde{g}_{ik}\tilde{g}_{jl}].\end{aligned}\tag{3.1.9}$$

Las contracciones de la ecuación (3.1.9) con la métrica inversa  $g^{\mu\nu}$  llevan a las siguientes componentes no nulas del tensor de Ricci

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_{tt} &= 3\frac{\ddot{a}}{a} \\ \mathcal{R}_{ij} &= -\tilde{g}_{ij}(2k + a\ddot{a} + 2\dot{a}^2),\end{aligned}\tag{3.1.10}$$

y contrayendo de nuevo con la métrica se tiene que el escalar de Ricci de las métricas FLRW es

$$\mathcal{R} = 6 \left[ \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{\ddot{a}}{a} + ka^{-2} \right]. \quad (3.1.11)$$

### 3.2 Modelos cosmológicos de métricas FLRW

En Cosmología, la principal herramienta disponible son las *ecuaciones de Einstein*

$$G_{\mu\nu} = -\kappa \mathcal{T}_{\mu\nu}, \quad (3.2.1)$$

donde  $\kappa = 8\pi G_N$  y  $G_N \approx 6.67430 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$  es la Constante de Gravitación Universal de la Física Clásica. Estas ecuaciones (3.2.1) relacionan el contenido de materia y energía del universo codificado en el *tensor de energía-momento*  $\mathcal{T}_{\mu\nu}$  con su geometría, expresada a través del *tensor de Einstein*  $G_{\mu\nu}$ , que se define como

$$G_{\mu\nu} = \mathcal{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \mathcal{R}, \quad (3.2.2)$$

donde  $\mathcal{R}_{\mu\nu}$  y  $\mathcal{R}$  son, respectivamente, el tensor y el escalar de Ricci. Por lo tanto, sustituyendo las ecuaciones (3.1.10) y (3.1.11) en (3.2.2), se tiene que las componentes no nulas del tensor de Einstein de las métricas FLRW son

$$\begin{aligned} G_{tt} &= -3 \left[ a^{-2}k + \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 \right] \\ G_{ij} &= \tilde{g}_{ij} [k + 2a\ddot{a} + \dot{a}^2]. \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

En cuanto al cálculo de  $\mathcal{T}_{\mu\nu}$ , se recurre al ya mencionado Principio de Weyl. Se toma el tensor de energía-momento como el de un fluido perfecto, y entonces sus únicas componentes no nulas serán (bajando con la métrica  $g_{\mu\nu}$  los superíndices de la ecuación (10.10) de [1])

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{tt} &= \rho \\ \mathcal{T}_{ij} &= -g_{ij}P = a^2 \tilde{g}_{ij}P, \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

donde  $\rho = \sum_{\alpha} \rho_{\alpha}$  y  $P = \sum_{\alpha} P_{\alpha}$  determinan la densidad y la presión total resultantes de la contribución de cada tipo de materia del universo. Estos tipos de materia se caracterizan por su distinto parámetro  $\omega_{\alpha}$  en la *ecuación de estado*

$$P_{\alpha} = \omega_{\alpha} \rho_{\alpha}. \quad (3.2.5)$$

En concreto,  $\omega_M = 0$  para la materia fría  $\rho_M$ ,  $\omega_{rad} = \frac{1}{3}$  para la radiación  $\rho_{rad}$ , y  $\omega_{\Lambda} = -1$  para una constante cosmológica  $\rho_{\Lambda}$ . Se toma este parámetro como una densidad porque se puede interpretar como la presión originada por el vacío, ya que genera una fuerza de repulsión que no se diluye con la expansión del universo, sino que se mantiene constante.

Si se sustituyen las ecuaciones (3.2.4) y (3.2.3) en (3.2.1), se obtienen las llamadas *ecuaciones de Friedmann*

$$\left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{1}{3} \kappa \rho - \frac{k}{a^2} \quad (3.2.6)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{1}{2} \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = -\frac{1}{2} \kappa P - \frac{k}{2a^2}. \quad (3.2.7)$$



Obsérvese que estas ecuaciones implican que  $\rho = \rho(t)$  y  $P = P(t)$  ahora son variables que evolucionan con el tiempo; sin embargo,  $k = 0, \pm 1$  es por definición constante. Combinar las dos ecuaciones de Friedmann de (3.2.6) y (3.2.7) da lugar a la *ecuación de aceleración*

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{6}\kappa(\rho + 3P). \quad (3.2.8)$$

En resumen, los modelos cosmológicos FLRW se caracterizan por el factor de escala  $a(t)$ , la curvatura  $k$  y los tipos de materia presentes (caracterizados por el valor de  $\omega_\alpha$ ) y sus respectivas densidades  $\rho_\alpha$ . Estos parámetros están relacionados a través de las 3 ecuaciones independientes (3.2.6), (3.2.8) y (3.2.5), de manera que si se fija alguno de los parámetros citados, dichas ecuaciones imponen ligaduras sobre los demás (e incluso los determinan).

Obsérvese que el parámetro de escala  $a(t)$  aparece en (3.2.7) y en (3.2.8) como una derivada de segundo orden del tiempo comóvil  $t$  en que se folia la variedad, y por lo tanto es un parámetro *dinámico*. Puesto que en la definición (3.1.2) de las métricas FLRW,  $a(t)$  multiplica a la parte de la métrica  $\tilde{g}_{ij}$  de las secciones espaciales, se puede interpretar como el *radio* del universo, que, al depender de  $t$ , evidencia que los modelos cosmológicos basados en métricas FLRW representan universos en expansión/contracción, posiblemente con una singularidad en el pasado o en el futuro (que se traducirá en una restricción del dominio de definición de la función  $a(t)$ ), como se verá en más detalle en la próxima sección 3.3 para universos FLRW concretos.

Como se ha comentado, las métricas FLRW se utilizan para modelar nuestro universo, y por lo tanto nuestra habilidad para realizar predicciones cosmológicas utilizando modelos FLRW depende de si somos o no capaces de medir los parámetros que los caracterizan. En Cosmología, se suele dar el contenido en los distintos tipos de materia como un parámetro adimensional  $\Omega_\alpha = \frac{\rho}{\rho_c}$  llamado *densidad relativa*, donde  $\rho_c = \frac{3}{\kappa} \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2$  representa la *densidad crítica*. Esta es la densidad que ha de tener el universo para tener secciones espaciales planas, y se obtiene imponiendo  $k = 0$  en la ecuación de Friedmann (3.2.6) y despejando  $\rho$ .

Actualmente, el modelo cosmológico más generalmente aceptado es el *Modelo  $\Lambda$ CDM* (ver [15], [16] para una exploración exhaustiva de la Historia completa del Universo), en el que la densidad relativa de los fluidos del universo es ([1], sección 16.4)

$$\begin{aligned} \Omega_\Lambda &= 0.6889 \pm 0.0056 \\ \Omega_M &= 0.311 \pm 0.0056 \\ \Omega_{mo} &\approx 0.264 \\ \Omega_{bar} &\approx 0.048, \end{aligned} \quad (3.2.9)$$

donde  $\Omega_M = \Omega_{bar} + \Omega_{mo}$  es la suma de las contribuciones a la densidad de materia total  $\Omega_M$  de la materia visible o bariónica  $\Omega_{bar}$  más la *materia oscura*  $\Omega_{mo}$ . Como se observa, el universo actualmente está dominado por la contribución de la *energía oscura*  $\Omega_\Lambda$ ,<sup>2</sup> lo que genera una expansión acelerada. Consúltense [19] o [20] para una recopilación detallada de los últimos avances en la medición de los parámetros cosmológicos.

<sup>2</sup>Poco se sabe de la naturaleza de la materia oscura y de la energía oscura. Se puede encontrar más información en [17] y [18].

### 3.3 Modelos sencillos de métricas FLRW

A continuación se describe la fenomenología de diferentes soluciones FLRW de las ecuaciones de Friedmann (3.2.6) y (3.2.7), para las cuales se realizará un análisis con el formalismo de vectores de Killing en el próximo capítulo 4. Recordemos que una solución de estas ecuaciones (3.2.6) y (3.2.7) puede estar dada por la fijación de algunos de sus parámetros como  $a(t)$ ,  $\rho_\alpha$  o  $k$ .

#### 3.3.1 Universo estático de Einstein

Esta solución fue propuesta en 1917 por el propio Einstein, dos años después de publicar su teoría de la Relatividad General. Einstein pretendía obtener un universo *estático* y *de materia fría* de sus propias ecuaciones, pues a principios del siglo XX no se concebía un universo en evolución.

Por lo tanto, el universo estático de Einstein se obtiene imponiendo  $\dot{a} = 0 \Rightarrow a(t) = \text{cte} \equiv a$  y tomando dos fluidos diferentes: materia fría  $\rho_M$  y una constante cosmológica  $\Lambda > 0$ . El parámetro  $\Lambda$  es una constante cosmológica que modifica el tensor de Einstein (3.2.2), de manera que ahora se tiene  $G_{\mu\nu} = \mathcal{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathcal{R} + \kappa\Lambda g_{\mu\nu}$ , y esto corresponde por analogía con la ecuación de Einstein (3.2.1) con un tensor de energía-momento  $\mathcal{T}_{\mu\nu}^{(\Lambda)} = \Lambda g_{\mu\nu}$  y, por lo tanto, la ecuación de estado  $\rho_\Lambda = -P_\Lambda$  proporciona  $\Lambda = \rho = -P$  en el sistema de coordenadas comóviles ([1], ecuación 10.30). La constante cosmológica se puede interpretar por tanto como la *presión del vacío*, y provoca una expansión del universo, que en el universo Estático de Einstein está contrarrestada por la atracción gravitatoria de la materia fría.

Ahora bien, sustituir estos parámetros en la ecuación de aceleración (3.2.8) e imponer  $\dot{a} = 0$  proporciona necesariamente  $\rho_M = 2\rho_\Lambda$ , que es una condición tremendamente restrictiva y *ad hoc*. Por su parte, la ecuación de Friedmann (3.2.6) dictamina que

$$k = \frac{1}{2}a^2\kappa\rho_M, \quad (3.3.1)$$

lo cual implica que  $k$  ha de ser positiva, pues  $\rho_M$  lo es (ya que es una densidad de materia *propriadamente dicha*), así que el universo estático de Einstein admite una única foliación con curvatura positiva  $k = 1$ . La métrica de este universo viene dada por

$$ds^2 = dt^2 - \frac{2}{\kappa\rho_M} [d\chi^2 + \sin^2\chi d\Omega_2^2], \quad (3.3.2)$$

y se tiene que no hay ninguna singularidad temporal (lo cual era esperable de un universo estático).

#### 3.3.2 Espacio de De Sitter

En 1918, De Sitter utilizó la constante cosmológica  $\Lambda$  introducida por Einstein para demostrar que un universo en expansión es matemáticamente posible, obteniendo una solución de las Ecuaciones de Einstein llamada *universo de De Sitter*. De Sitter buscó una solución estática y con simetría esférica. La forma que nosotros vamos a presentar de obtener el universo de De Sitter es la que siguió Lemaître en 1925. Se toma un universo que contiene únicamente una constante cosmológica  $\Lambda > 0$ , sin materia ni radiación

( $\rho_M = \rho_{rad} = 0$ ). Integrando entonces la ecuación (3.2.6) para  $\rho_\Lambda = -P_\Lambda$  y  $k = 0$ , se tiene que el parámetro de escala ha de valer

$$a(t) = e^{\frac{t}{R_0}}, \quad (3.3.3)$$

donde  $R_0 = \sqrt{\frac{3}{\kappa\Lambda}}$  es el *radio de De Sitter*. Obsérvese que el parámetro de escala  $a(t)$  crece exponencialmente, lo que indica que el universo de De Sitter está en expansión acelerada. En cuanto a la métrica, toma la forma

$$ds^2 = dt^2 - e^{\frac{2t}{R_0}} \delta_{ij} dx^i dx^j. \quad (3.3.4)$$

No es difícil a partir de (3.1.9) calcular el tensor de Riemann del espacio de De Sitter y ver que cumple la condición (2.1.18). Por lo tanto, *el espacio de De Sitter es máximamente simétrico*.

Si nos hubiésemos preguntado (usando la ecuación (3.2.6)) por los universos con  $k = \pm 1$  que verifican  $\rho_\Lambda > 0$  y  $\rho_M = \rho_{rad} = 0$ , habríamos encontrado las siguientes métricas

$$ds^2 = d\tilde{t}^2 - R_0^2 \cosh^2\left(\frac{\tilde{t}}{R_0}\right) [d\chi^2 + \sin^2\chi d\Omega_2^2] \quad (k = +1) \quad (3.3.5)$$

$$ds^2 = d\tilde{t}^2 - R_0^2 \sinh^2\left(\frac{\tilde{t}}{R_0}\right) [d\chi^2 + \sinh^2\chi d\Omega_2^2] \quad (k = -1), \quad (3.3.6)$$

con  $d\Omega_2^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2$ ,  $r = \sinh\chi$  para  $k = -1$ , y  $r = \sin\chi$  para  $k = +1$ . Las coordenadas  $r, \theta, \varphi$  son las coordenadas esféricas de  $\mathbb{R}^3$ . En estas ecuaciones se reconocen entre corchetes las parametrizaciones de la 3-esfera  $S^3$  (caso  $k = +1$ ) y el hiperboloide tridimensional  $\mathbb{H}^3$ . Los nuevos factores de escala son  $a(\tilde{t}) = \cosh^2(\frac{\tilde{t}}{R_0})$  y  $a(\tilde{t}) = \sinh^2(\frac{\tilde{t}}{R_0})$ , respectivamente, con  $\tilde{t}$  y  $\tilde{t}$  coordenadas distintas al tiempo comóvil  $t$ .

Aunque puede parecer que (3.3.6) y (3.3.5) son métricas muy distintas entre sí y a la métrica (3.3.4) del espacio de De Sitter, ambas satisfacen (2.1.18) para una métrica lorentziana con curvatura positiva y radio  $R_0$ , y esto significa que en realidad son foliaciones diferentes del mismo espacio de De Sitter. Es decir, debido a tener el máximo número de simetrías, el espacio de De Sitter admite tres foliaciones distintas, cada una con un valor de  $k$ , y todas verificando  $\rho_\Lambda > 0$  y  $\rho_M = \rho_{rad} = 0$ . Estas 3 foliaciones diferentes del espacio de De Sitter se pueden observar de manera esquemática en la figura 3.1. Véase que no existe ninguna restricción sobre  $t, \tilde{t}$  o  $\tilde{t}$ , y por lo tanto el universo de De Sitter no tiene singularidades temporales.

### 3.3.3 Espacio de Einstein-De Sitter

En 1932, tras conocer de la solución a sus ecuaciones dada por De Sitter que describía un universo en expansión y abandonar por fin el estigma de la estaticidad, Einstein se interesó en obtener de sus propias ecuaciones una solución *realista* que describiese un universo en posible evolución conteniendo únicamente materia fría, y trabajó en ello junto con De Sitter. Su solución conjunta, el *universo de Einstein-De Sitter*, se ha tomado como un modelo realista de nuestro Universo hasta bien entrados los años 80. Hoy en día se interpreta como una descripción realista del Universo en la época de dominación de materia. Este modelo surge de las ecuaciones de Friedmann cuando se toma  $\Omega_M = 1$  y

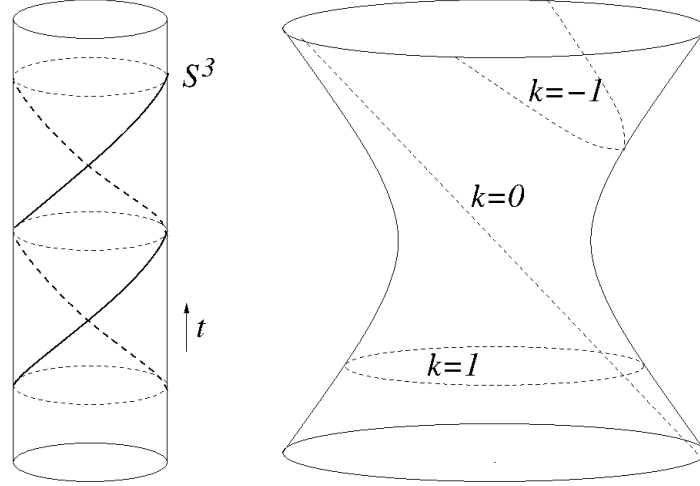


Figura 3.1: Esquema de la forma del Universo Estático de Einstein y el espacio de De Sitter con sus foliaciones ([1], figura 15.5).

$\Omega_{rad} = \Omega_{\Lambda} = 0$ . Por la definición de densidad crítica, se tendrá que  $k = 0$ . En particular, el espacio de Einstein-De Sitter admite una única foliación posible. Como en el espacio de De Sitter, se puede integrar la ecuación de Friedmann (3.2.6) para estos parámetros y obtener el factor de escala como

$$a(t) = \left( \frac{3t}{2R_0} \right)^{\frac{2}{3}}, \quad (3.3.7)$$

con  $R_0 = \sqrt{\frac{3}{\kappa\rho_0 a_0^3}}$ . Puesto que la función  $a(t)$  crece cada vez más despacio, el universo de Einstein-De Sitter es un universo en expansión decelerada. La métrica toma la forma

$$ds^2 = dt^2 - \left( \frac{3t}{2R_0} \right)^{\frac{4}{3}} \delta_{ij} dx^i dx^j, \quad (3.3.8)$$

y presenta una singularidad. En particular, el escalar de Ricci  $\mathcal{R}$  para esta métrica vale  $\mathcal{R} = \frac{4}{3}t^{-2}$ , luego el universo de Einstein-De Sitter tiene una singularidad física en  $t = 0$ ,<sup>3</sup> y por lo tanto representa un modelo de universo con un inicio o *Big Bang*.

### 3.4 Transformaciones conformes y métricas FLRW máximamente simétricas

En esta sección se demostrarán dos resultados cruciales. Por un lado, se probará que las métricas FLRW son *conformemente planas*, esto es, que admiten una transformación de Weyl (2.2.10) que las relaciona con la métrica de Minkowski  $\eta_{\mu\nu}$ . Por otro lado, se caracterizarán las métricas FLRW que son máximamente simétricas en términos del factor de escala  $a(t)$ . Pasamos a exponer el primero de los resultados.

<sup>3</sup>Una singularidad *física* (en oposición a una singularidad *de coordenadas*) no se puede eliminar por cambios de coordenadas.

**Teorema 5.** Si  $\tilde{g}_{\mu\nu}(x)$  es una métrica FLRW en una variedad diferenciable  $\mathcal{M}^4$ , entonces existe una función  $\Omega : \mathcal{M}^4 \rightarrow \mathcal{M}^4$  de manera que

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = e^{2\Omega(x)} \eta_{\mu\nu}. \quad (3.4.1)$$

Es decir, las métricas Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker son conformemente planas.

*Demostración.* Como se sabe de la propoición 7, que dos métricas estén relacionadas por una transformación de Weyl equivale a que compartan el mismo tensor de Weyl  $C_{\mu\nu\rho\lambda}$ , cuya expresión es (2.2.11). Puesto que la métrica de Minkowski tiene tensor de Weyl nulo (pues tiene tensor de Riemann nulo), basta ver que las métricas FLRW cumplen  $C_{\mu\nu\rho\lambda} = 0$ .

Sustituyendo las componentes no nulas de las expresiones (3.1.9), (3.1.10), (3.1.11) y (3.1.2) de los tensores de curvatura de las métricas FLRW en (2.2.11), y teniendo en cuenta que  $N = 4$ , se tiene que las dos componentes no nulas del tensor de Weyl de una métrica FLRW son  $C_{titj}$  y  $C_{ijkl}$ . Veamos que ambas se anulan.

$$C_{titj} = \mathcal{R}_{titj} + \frac{1}{2} [-g_{ij}\mathcal{R}_{tt} - g_{tt}\mathcal{R}_{ij}] - \frac{1}{6}\mathcal{R} [-g_{tt}g_{ij}] = 0,$$

donde simplemente se han sustituido en la segunda igualdad los valores de cada tensor dados por (3.1.9), (3.1.10), (3.1.11) y (3.1.2) y se ha operado.

En cuanto a la otra componente:

$$C_{ijkl} = \mathcal{R}_{ijkl} + \frac{1}{2} [g_{il}\mathcal{R}_{jk} - g_{jl}\mathcal{R}_{ik} - g_{ik}\mathcal{R}_{jl} + g_{jk}\mathcal{R}_{il}] - \frac{1}{6}\mathcal{R} [g_{il}g_{jk} - g_{ik}g_{jl}] = 0.$$

Como todas las componentes no nulas del tensor de Weyl son cero, efectivamente se tiene que  $C_{\mu\nu\rho\lambda} = 0$  y por lo tanto la proposición 7 nos dice que las métricas FLRW son conformemente planas.  $\square$

Este resultado será muy útil en el capítulo 4.

El segundo resultado es el siguiente.

**Teorema 6.** Sea  $g_{\mu\nu}$  una métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker definida sobre una variedad diferenciable  $\mathcal{M}^4$ , con elemento de longitud  $ds^2 = dt^2 - a(t)^2 \tilde{g}_{ij} dx^i dx^j$ . Entonces  $g_{\mu\nu}$  es máximamente simétrica si, y solo si, el factor de escala  $a(t)$  verifica la ecuación diferencial

$$a\ddot{a} - (\dot{a})^2 = k, \quad (3.4.2)$$

donde  $k$  es la curvatura de las secciones espaciales.

*Demostración.* La demostración utilizará el Teorema 3 de caracterización de simetría máxima. Sustituyendo por el valor del tensor de Ricci y la métrica para métricas FLRW que dan las ecuaciones (3.1.11) y (3.1.2) en (2.1.18), se tiene que  $g_{\mu\nu}$  es de simetría máxima si, y solo si

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{titj} &= -\frac{1}{2} (\ddot{a}a + (\dot{a})^2 + k) \tilde{g}_{ij} \\ \mathcal{R}_{ijkl} &= -\frac{1}{2} a^2 (\ddot{a}a + (\dot{a})^2 + k) [\tilde{g}_{il}\tilde{g}_{jk} - \tilde{g}_{ik}\tilde{g}_{jl}]. \end{aligned}$$

Pero además sabemos por (3.1.9) que las dos componentes no nulas de  $\mathcal{R}_{\mu\nu\rho\lambda}$  son

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_{titj} &= -a\ddot{a}\tilde{g}_{ij} \\ \mathcal{R}_{ijkl} &= -a^2(\dot{a}^2 + k) [\tilde{g}_{il}\tilde{g}_{jk} - \tilde{g}_{ik}\tilde{g}_{jl}].\end{aligned}$$

Igualando estas dos expresiones para cada componente no trivial de  $\mathcal{R}_{\mu\nu\rho\lambda}$ , contrayendo con la métrica inversa hasta tener expresiones escalares y multiplicando por  $-1$ , se tiene que una métrica FLRW es de simetría máxima si, y solo si, se verifican las dos ecuaciones siguientes.

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(\ddot{a}a + (\dot{a})^2 + k) &= a\ddot{a} \\ \frac{1}{2}a^2(\ddot{a}a + (\dot{a})^2 + k) &= a^2(\dot{a}^2 + k).\end{aligned}$$

La manipulación sencilla de estas dos ecuaciones revela que son la misma, y su expresión es

$$\ddot{a}a - (\dot{a})^2 = k.$$

Por tanto una métrica FLRW es máximamente simétrica si, y solo si, verifica esta última ecuación.  $\square$

Este último Teorema 6 es tremendamente potente por varios motivos:

- En primer lugar, el Teorema 6 permite conocer *a priori* y solamente por un argumento *geométrico* si una métrica FLRW será de simetría máxima, únicamente a partir de su factor de escala  $a(t)$ , pues en particular solamente habrá que comprobar si  $\ddot{a}a - (\dot{a})^2$  es constante. Si  $\ddot{a}a - (\dot{a})^2$  es una constante real cualquiera, siempre se pueden reparametrizar las secciones espaciales de manera que sea igual a  $k = 0, \pm 1$ .
- Invirtiendo el argumento anterior, podemos tomar todas las métrica FLRW máximamente simétricas y confirmar que verifican  $\ddot{a}a - (\dot{a})^2 = k$ . Esta es una ligadura entre el parámetro de escala y la curvatura de las secciones espaciales. Puesto que el valor de  $k$  depende de la foliación que se tome, (3.4.2) limita las posibles foliaciones que se pueden hacer a un espacio FLRW máximamente simétrico. Las métricas FLRW de simetría máxima son conocidas y son 6, si bien solo dan lugar a 3 variedades diferenciables lorentzianas de simetría máxima diferentes.

El primero es el espacio de De Sitter de la sección 3.3.2, donde se comprueba fácilmente que para sus distintas foliaciones (3.3.4), (3.3.5) y (3.3.6), las funciones  $a(t)$  y las curvaturas  $k$  verifican (3.4.2) en cada uno de los tres casos.

El segundo es el espacio de Minkowski. Es elemental comprobar que (3.4.2) se verifica en coordenadas cartesianas, donde se tiene que

$$ds^2 = dt^2 - \delta_{ij}x^i x^j, \quad (3.4.3)$$

$a(t) = cte \Rightarrow \dot{a}, \ddot{a} = 0$  y  $k = 0$ . Existe solamente otra foliación del espacio de Minkowski con secciones espaciales de curvatura negativa  $k = -1$ , el *universo de Milne* (aunque solamente es una foliación de una parte del espacio de Minkowski), cuya métrica se escribe en coordenadas  $(t, \chi, \theta, \varphi)$  como

$$ds^2 = dt^2 - t^2 [d\chi^2 + \sinh^2 \chi d\Omega_2^2], \quad (3.4.4)$$

donde  $d\Omega_2^2 = \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$ . Como  $a(t) = t$ , es muy sencillo comprobar que se verifica (3.4.2).

El último es el *espacio de anti-De Sitter*, que únicamente admite una foliación con coordenadas  $(t, \chi, \theta, \varphi)$  y curvatura de las secciones espaciales  $k = -1$ . Para este universo, la métrica se escribe

$$ds^2 = dt^2 - R_0^2 \sin^2 \left( \frac{t}{R_0} \right) [d\chi^2 + \sinh^2 \chi d\Omega_2^2], \quad (3.4.5)$$

de donde  $a(t) = \sin(t/R_0)$ , y de nuevo se verifica (3.4.2).

Por lo tanto, la no existencia de más foliaciones por métricas de tipo FRW de los espacios de Minkowski, De Sitter y anti-De Sitter se puede explicar por la ligadura (3.4.2) a la que están sometidos estos espacios por ser de simetría máxima.





## Capítulo 4

# Cálculo de vectores de Killing en métricas FLRW

Como se explicó en el capítulo 2, los vectores de Killing de una métrica FLRW  $g_{\mu\nu}$  son sus direcciones de simetría, y dan las curvas isométricas a lo largo de las cuales  $g_{\mu\nu}$  es constante. Los vectores de Killing son las soluciones de la ecuación de Killing (2.1.8)

$$\nabla_\mu k_\nu + \nabla_\nu k_\mu = 0. \quad (4.0.1)$$

Calcular cuántos vectores de Killing linealmente independientes tiene  $g_{\mu\nu}$  significa calcular cuántas simetrías tiene el modelo cosmológico FLRW con esta métrica. Pero, además, el álgebra de los vectores de Killing, esto es, las relaciones de conmutación del tipo  $[k^\mu, k^\nu]$  (donde se calcula el conmutador usando el corchete de Lie definido en (2.1.3)), son *las mismas* que las relaciones de conmutación del grupo de simetrías del modelo cosmológico. Esto es tremendamente útil, porque permite, de manera independiente de coordenadas, y sin saber nada acerca de cómo se *concibió* el modelo FLRW concreto (es decir, de su contenido en materia, radiación o constante cosmológica), calcular cuántas simetrías tiene el modelo, y, con un poco de intuición, *cuáles son* (es decir, qué vectores de Killing representan qué simetrías concretas en unas coordenadas, como traslaciones, rotaciones, boosts, etc.) y qué relaciones de conmutación cumplen unas con otras. El objetivo de este capítulo es aplicar todo el aparato matemático del capítulo 2, y en particular el formalismo de vectores de Killing de la sección 2.1.2, para calcular el número de simetrías de las métricas Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker, e ilustrar cómo, para espacios FLRW máximamente simétricos (que son los que cumplen  $\ddot{a}a - (\dot{a})^2 = k$ , por el teorema 6) aparecen nuevas soluciones linealmente independientes de la ecuación de Killing (2.1.8) con respecto a los espacios que no son de simetría máxima.

Recordemos del capítulo 3 que una métrica FLRW  $g_{\mu\nu}$  tiene la forma

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2 \tilde{g}_{ij} dx^i dx^j$$
$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -a^2(t) \tilde{g}_{ij} \end{pmatrix} \Leftrightarrow g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -a^{-2}(t) \tilde{g}^{ij} \end{pmatrix}, \quad (4.0.2)$$

y que la variedad  $\mathcal{M}^4$  descrita por la métrica lorentziana  $g_{\mu\nu}$  es una foliación en el tiempo comóvil  $t$  de secciones espaciales tridimensionales  $\mathbb{K}^3$  (ver sección 2.3) descritas por una métrica riemanniana  $\tilde{g}_{ij}$  máximamente simétrica. Estas secciones espaciales tienen una

curvatura constante  $k$  dada en coordenadas arbitrarias por el escalar de Ricci de  $\tilde{g}_{ij}$  a través de  $\tilde{\mathcal{R}} = -6k$ , y que por lo tanto dependerá de la foliación específica de  $\mathcal{M}^4$ .

Puesto que la ecuación (4.0.1) es en derivadas covariantes, será necesaria la expresión explícita de los símbolos de Christoffel de las métricas FLRW, que ya se tiene de la ecuación (3.1.6). Efectivamente,

$$\begin{aligned}\Gamma_{ij}^t &= a\dot{a}\tilde{g}_{ij} \\ \Gamma_{tj}^i &= \frac{\dot{a}}{a}\delta_j^i \\ \Gamma_{ij}^k &= \tilde{\Gamma}_{ij}^k = 2k(1+kx^2)^{-1} \left[ x^i\delta_{jm} - x_j\delta_m^i - x_m\delta_j^i \right].\end{aligned}\tag{4.0.3}$$

Recuérdese que  $\tilde{\Gamma}_{ij}^k$  denota los símbolos de Christoffel de  $\tilde{g}_{ij}$ . Puesto que solamente hay 3 símbolos de Christoffel no nulos, (4.0.1) se transforma en 3 ecuaciones diferentes según lo que valga el par  $(\mu, \nu)$ , que puede tomar los valores  $(t, t)$ ,  $(t, i)$ ,  $(i, j)$ . Sustituyendo los símbolos de Christoffel de (4.0.3) en (4.0.1), las 3 componentes de la ecuación de Killing para la métrica Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker forman el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 0 = \partial_t k_t & (4.0.4a) \\ 0 = \partial_t k_i + \partial_i k_t - 2\frac{\dot{a}}{a}k_i & (4.0.4b) \\ 0 = \tilde{\nabla}_i k_j + \tilde{\nabla}_j k_i - 2a\dot{a}\tilde{g}_{ij}k_t, & (4.0.4c) \end{cases}$$

donde  $\tilde{\nabla}_i$  denota la derivada covariante que utiliza los símbolos de Christoffel  $\tilde{\Gamma}_{ij}^k$  de la parte espacial de la métrica  $\tilde{g}_{ij}$ .

Recalquemos que  $k_\mu(t, x)$  es un campo cuadrimensional de vectores de Killing.<sup>1</sup> Por ello,  $k_t(t, x)$  es un campo escalar que representa la componente *temporal* de  $k_\mu(t, x)$ , y  $k_i(t, x)$  es un campo vectorial de tres dimensiones que representa la componente *espacial* de  $k_\mu(t, x)$ . Debido a la foliación temporal de secciones espaciales de la métrica, la matriz de  $g_{\mu\nu}$  (4.0.2) descompone por cajas, y se da lo que se conoce como *descomposición 3+1*: bajo cambios generales de coordenadas de las secciones espaciales tridimensionales,  $k_t$  se comporta como un escalar, y  $k_i$  como un vector.

A partir de (4.0.4a) se tiene que  $k_t$  no puede ser función de  $t$ , con lo cual  $k_t$  es una función solamente de la variable  $x$ , y el sistema (4.0.4) se puede simplificar como

$$\begin{cases} k_t = f(x) & (4.0.5a) \\ \partial_i f(x) + \partial_t k_i(t, x) - 2\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}k_i(t, x) = 0 & (4.0.5b) \\ \tilde{\nabla}_i k_j(t, x) + \tilde{\nabla}_j k_i(t, x) = 2a(t)\dot{a}(t)\tilde{g}_{ij}f(x), & (4.0.5c) \end{cases}$$

donde se ha explicitado la dependencia de cada variable  $t, x$ . Para resolver el sistema de ecuaciones (4.0.5), se seguirán dos estrategias diferentes:

- Por una parte, recordemos que el sistema (4.0.5) es otra forma de escribir la ecuación de Killing (4.0.1) para métricas FLRW. Según la definición 14 de los vectores de Killing conformes, la ecuación de Killing (4.0.1) no es más que la ecuación de

<sup>1</sup>Las 3 coordenadas espaciales se denotarán conjuntamente como  $x$ . Recuérdese que  $t$  denota el tiempo comóvil.

Killing conforme (2.2.9) con miembro derecho nulo, por lo que las soluciones de la ecuación de Killing son los vectores de Killing conformes  $k_\mu$  que cumplen  $\nabla_\rho k^\rho = 0$ . Por lo tanto, una estrategia para resolver (4.0.5) consiste en resolver la ecuación de Killing conforme (2.2.9) e imponer  $\nabla_\rho k^\rho = 0$  a sus soluciones. Puesto que las métricas FLRW son conformemente planas (ver Teorema 5), si se conoce explícitamente el factor conforme  $e^{2\Omega(x)}$  de la transformación de Weyl  $\tilde{g}_{\mu\nu}(x) = e^{2\Omega(x)}\eta_{\mu\nu}(x)$ , entonces, por el Teorema 4, las soluciones  $k_\mu$  de la ecuación de Killing conforme (2.2.9) para métricas FLRW son exactamente

$$k_\mu = e^{2\Omega(x)}\xi_\mu = e^{2\Omega(x)} [a_\mu + \alpha\eta_{\mu\nu}x^\nu + \theta_{\mu\nu}x^\nu + (\eta_{\mu\nu}V_\rho + \eta_{\mu\rho}V_\nu - \eta_{\nu\rho}V_\mu)x^\nu x^\rho], \quad (4.0.6)$$

donde se reconoce en la expresión de  $\xi_\mu$  la de un vector de Killing conforme del espacio de Minkowski, dado por la proposición 6, y por tanto se tiene, como en aquel caso, que  $a_\mu$ ,  $V_\mu$  son vectores covariantes arbitrarios,  $\alpha$  es un escalar, y  $\theta_{\mu\nu}$  es un tensor antisimétrico de rango (0,2) cualquiera. En general, encontrar el factor conforme no será fácil, excepto en el caso de que las secciones espaciales sean planas ( $k = 0$ ).

- Por otra parte, podemos probar un Ansatz para  $k_\mu(t, x)$  que se adapte a la forma de las ecuaciones del sistema (4.0.5). Esta estrategia tiene el inconveniente de que no sabremos a priori si un Ansatz concreto puede dar lugar a todas las soluciones de (4.0.5) o si nos estamos dejando soluciones por el camino.

Antes de pasar a su resolución, haremos un comentario importante sobre el número de soluciones linealmente independientes de (4.0.5) que cabe esperar. Por un lado, como ya sabemos de la sección 3.1, una variedad equipada con una métrica FLRW tiene al menos 6 simetrías *espaciales* provenientes de la métrica  $\tilde{g}_{ij}$ , y por lo tanto (4.0.5) ha de tener al menos 6 soluciones correspondientes a vectores de Killing que den cuenta de estas simetrías, independientemente del tipo concreto de métrica FLRW que sea. Esto supone una cota inferior de 6 al número de soluciones linealmente independientes de (4.0.5). En las secciones 4.3 y 4.5 calcularemos explícitamente estas 6 soluciones que tiene una métrica FLRW cualquiera.

Por otro lado, la caracterización 12 de variedades máximamente simétricas proporciona una cota superior de 10 al número de soluciones linealmente independientes de (4.0.5), y se sabe que las métricas FLRW máximamente simétricas son las que satisfacen  $\ddot{a}a - (\dot{a})^2 = k$  (ver sección 3.4). Se analizará cuándo el sistema (4.0.5) tiene más de las 6 soluciones *intrínsecas*, y se verá que, en cada caso, el número de vectores de Killing concuerda con el número de simetrías de los modelos FLRW *concretos* presentados en la sección 3.3.

## 4.1 Vectores de Killing del universo de De Sitter

Vamos a calcular los vectores de Killing del espacio de De Sitter presentado en la sección 3.3.2. Realizaremos el cálculo en coordenadas cartesianas, esto es, con  $k = 0$ . La foliación con curvatura  $k = 0$  se elige sobre las foliaciones con curvatura  $k = \pm 1$  por simplicidad.

Efectivamente, de la ecuación (3.3.4) se tiene que, en coordenadas cartesianas, la

métrica del espacio de De Sitter se escribe como

$$ds^2 = dt^2 - e^{\frac{2t}{R_0}} \delta_{ij} dx^i dx^j.$$

El factor de escala vale  $a(t) = e^{\frac{t}{R_0}}$ . A partir del cálculo de  $\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}$  y de  $\dot{a}(t)a(t)$ , se reescribe el sistema (4.0.5) como

$$\begin{cases} k_t = f(x) & (4.1.1a) \\ \partial_i f(x) + \partial_t k_i(t, x) - 2R_0^{-1} k_i(t, x) = 0 & (4.1.1b) \\ \partial_i k_j(t, x) + \partial_j k_i(t, x) = 2R_0^{-1} e^{\frac{2t}{R_0}} \delta_{ij} f(x), & (4.1.1c) \end{cases}$$

donde se ha tenido en cuenta que, al tomar coordenadas cartesianas,  $\tilde{g}_{ij} = \delta_{ij}$  y  $\tilde{\nabla}_i = \partial_i$ . La ecuación (4.1.1c) invita a calcular un Ansatz para  $k_i(t, x)$  por separación de variables, con lo que se toma

$$k_i(t, x) = e^{\frac{2t}{R_0}} \xi_i(x) + G_i(t), \quad (4.1.2)$$

donde  $\xi_i(x)$  y  $G_i(t)$  son campos vectoriales de tres dimensiones. Este Ansatz (4.1.2) permite reescribir (4.1.1) como

$$\begin{cases} k_t = f(x) & (4.1.3a) \\ \partial_t G_i(t) - 2R_0^{-1} G_i(t) + \partial_i f(x) = 0 & (4.1.3b) \\ \partial_i \xi_j(x) + \partial_j \xi_i(x) = 2R_0^{-1} \delta_{ij} f(x), & (4.1.3c) \end{cases}$$

donde se ha dividido por  $e^{\frac{2t}{R_0}} \neq 0$  en la tercera ecuación, y el factor exponencial con la dependencia de  $t$  desaparece para la segunda ecuación. Esto solo es posible gracias a la forma concreta de  $a(t)$  del espacio de De Sitter en esta foliación y estas coordenadas, y es muy conveniente porque ahora, contrayendo (4.1.3c) con  $\delta^{ij}$ , se tiene que

$$f(x) = \frac{1}{3} R_0 \partial_m \xi^m. \quad (4.1.4)$$

Sustituyendo (4.1.4) en (4.1.3) se tiene que (4.1.3c) se reescribe como

$$\partial_i \xi_j(x) + \partial_j \xi_i(x) = \frac{2}{3} \delta_{ij} \partial_m \xi^m. \quad (4.1.5)$$

Pero (4.1.5) es precisamente la ecuación de Killing conforme (2.2.9) de  $\mathbb{R}^3$  en cartesianas. Como  $\mathbb{R}^3$  en cartesianas es uno de los espacios que en la sección 2.3 llamamos  $\mathbb{K}^N$ , conocemos explícitamente la solución de (4.1.5), que es la particularización a  $\mathbb{R}^3$  de la expresión (2.3.10) de los vectores de Killing conformes de  $\mathbb{K}^N$ , donde hay que tomar  $N = 3$  y curvatura nula  $k = 0$ . Por lo tanto

$$\xi_i = a_i + \alpha \delta_{ij} x^j + \theta_{ij} x^j + (\delta_{ij} V_m + \delta_{im} V_j - \delta_{jm} V_i) x^j x^m. \quad (4.1.6)$$

El cálculo de la divergencia de los vectores de Killing conformes  $\xi_i$  es

$$\partial_k \xi^k = \partial_k \left[ a^k + \alpha \delta_j^k x^j + \theta_j^k x^j + (\delta_j^k V_m + \delta_m^k V_j - \delta_{jm} V^k) x^j x^m \right] = 3\alpha + 6V_k x^k, \quad (4.1.7)$$

con lo cual

$$f(x) = R_0 \left( \alpha + 2V_k x^k \right). \quad (4.1.8)$$

Además, un cálculo sencillo muestra que  $\partial_i (\partial_k \zeta^k) = 6V_i$ , y se tiene que

$$\partial_i f(x) = 2R_0 V_i, \quad (4.1.9)$$

con lo cual sustituyendo (4.1.9) en (4.1.3b) se tiene la ecuación diferencial para  $G_i(t)$

$$\partial_t G_i(t) - 2R_0^{-1} G_i(t) + 2R_0 V_i = 0, \quad (4.1.10)$$

cuya solución general es

$$G_i(t) = c_i e^{\frac{2t}{R_0}} + R_0^2 V_i. \quad (4.1.11)$$

Finalmente, sustituir las expresiones (4.1.11) y (4.1.8) en (4.1.2) y (4.1.3a) lleva a que los vectores de Killing covariantes del espacio de De Sitter en cartesianas con  $k = 0$  son

$$\begin{aligned} k_t &= 3\alpha + 6V_k x^k \\ k_i &= R_0^2 V_i + e^{\frac{2t}{R_0}} \left[ (a_i + c_i) + \alpha \delta_{ij} x^j + \theta_{ij} x^j + (\delta_{ij} V_m + \delta_{im} V_j - \delta_{jm} V_i) x^j x^m \right]. \end{aligned} \quad (4.1.12)$$

A partir de (3.3.4) se calcula fácilmente que  $g^{tt} = 1$  y que  $g^{ij} = -e^{\frac{2t}{R_0}} \delta^{ij}$ . Por lo tanto, subiendo los índices de  $k_t$  y  $k_i$  se calculan los vectores de Killing en forma contravariante como

$$k^\mu = \begin{pmatrix} k^t \\ k^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\alpha + 6V_k x^k \\ e^{\frac{2t}{R_0}} R_0^2 V^i + a^i + c^i + \alpha \delta_j^i x^j + \theta_j^i x^j + (\delta_j^i V_m + \delta_m^i V_j - \delta_{jm} V^i) x^j x^m \end{pmatrix}. \quad (4.1.13)$$

El conjunto de parámetros  $\{\alpha, V^i, a^i, \theta_j^i\}$  tiene 10 grados de libertad, pues  $\alpha$  es una constante arbitraria,  $V^i$  y  $a^i$  son vectores tridimensionales cualesquiera, y  $\theta_j^i$  es un tensor antisimétrico de tres dimensiones, que tiene 3 grados de libertad que coinciden con sus valores fuera de la diagonal. Por lo tanto, **el espacio de De Sitter tiene 10 vectores de Killing**. Como dijimos en la definición 12, este es exactamente el número máximo de vectores de Killing que admite una variedad de dimensión 4. Esto significa que **el espacio de De Sitter es máximamente simétrico**.

## 4.2 Vectores de Killing del universo de Einstein - De Sitter

Pasamos a calcular los vectores de Killing del universo de Einstein-De Sitter presentado en la sección 3.3.3, que se folia con coordenadas cartesianas y curvatura espacial  $k = 0$  como

$$ds^2 = dt^2 - \left( \frac{3t}{2R_0} \right)^{\frac{4}{3}} \delta_{ij} dx^i dx^j, \quad (4.2.1)$$

de donde se deduce que el factor de escala vale

$$a(t) = \beta t^{\frac{2}{3}}, \forall t > 0, \quad (4.2.2)$$

donde se ha definido la constante  $\beta$  como  $\beta = \left( \frac{3}{2R_0} \right)^{\frac{2}{3}}$ . Exigimos  $t > 0$  porque el escalar de Ricci era  $\mathcal{R} = \frac{4}{3}t^{-2}$ , con lo que hay una singularidad física de tipo *Big Bang* para estas

coordenadas en  $t = 0$  (ver sección 3.3.3). A partir del cálculo de  $\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}$  y de  $\dot{a}(t)a(t)$ , se reescribe el sistema (4.0.5) como

$$\begin{cases} k_t = f(x) \end{cases} \quad (4.2.3a)$$

$$\begin{cases} \partial_i f(x) + \partial_t k_i(t, x) - \frac{4}{3} t^{-1} k_i(t, x) = 0 \end{cases} \quad (4.2.3b)$$

$$\begin{cases} \partial_i k_j(t, x) + \partial_j k_i(t, x) = \frac{4}{3} \beta^2 t^{\frac{1}{3}} \delta_{ij} f(x), \end{cases} \quad (4.2.3c)$$

donde se ha tenido en cuenta que, al tomar coordenadas cartesianas,  $\tilde{g}_{ij} = \delta_{ij}$  y  $\tilde{\nabla}_i = \partial_i$ . La ecuación (4.2.3c) invita a tomar el Ansatz siguiente para  $k_i(t, x)$

$$k_i(t, x) = \frac{4}{3} \beta^2 t^{\frac{1}{3}} F(t) B_i(x), \quad (4.2.4)$$

donde  $F(t)$  es una función escalar, y  $B_i(x)$  es un campo vectorial de tres dimensiones. Sustituir el Ansatz (4.2.4) en el sistema (4.2.3) lleva al sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} k_t = f(x) \end{cases} \quad (4.2.5a)$$

$$\begin{cases} \partial_i f(x) + B_i(x) \left[ t^{\frac{1}{3}} \partial_t F(t) + \frac{1}{3} t^{-\frac{2}{3}} F(t) \right] - \frac{4}{3} t^{-\frac{2}{3}} F(t) B_i(x) = 0 \end{cases} \quad (4.2.5b)$$

$$\begin{cases} F(t) [\partial_i B_j(x) + \partial_j B_i(x)] = \delta_{ij} f(x), \end{cases} \quad (4.2.5c)$$

donde en (4.2.5b) se ha dividido por  $\frac{4}{3} \beta^2 \neq 0$ , y en (4.2.5c) por  $\frac{4}{3} \beta^2 t^{\frac{1}{3}}$ , pues  $t > 0$ . Contrayendo (4.2.5c) con  $\delta^{ij}$  se tiene que

$$f(x) = \frac{2}{3} F(t) \partial_m B^m(x). \quad (4.2.6)$$

Como  $f(x)$  no puede depender de  $t$ , esto deja dos opciones:

- $F(t) = \text{cte} \equiv F$ . Entonces  $f(x) = \frac{2}{3} \partial_m B^m(x) F$  y (4.2.5b) queda

$$\partial_i \partial_m B^m(x) = t^{-\frac{2}{3}} F B_i(x). \quad (4.2.7)$$

Como  $\partial_i \partial_m B^m(x)$  es una función que solamente puede depender de  $x$ , (4.3.4) es una contradicción, luego la opción  $F(t) = \text{cte} \equiv F$  no es posible.

- $\partial_m B^m(x) = 0$ . En este caso,  $k_t = f(x) = 0$ . Véase que ni  $F(t)$  ni  $B_i(x)$  se pueden anular, porque esto implicaría a través de (4.2.4) que  $k_i = 0$ , y por lo tanto se tendría que  $k_\mu = 0$ . Como solo estamos interesados en los vectores linealmente independientes, podemos desechar los casos en que  $F(t) = 0$  y en que  $B_i(x) = 0$ , ya que el vector  $k_\mu = 0$  no puede formar un conjunto de vectores linealmente independientes. El sistema (4.2.8) toma la forma

$$\begin{cases} k_t = 0 \end{cases} \quad (4.2.8a)$$

$$\begin{cases} t^{\frac{1}{3}} \partial_t F(t) - t^{-\frac{2}{3}} F(t) = 0 \end{cases} \quad (4.2.8b)$$

$$\begin{cases} \partial_i B_j(x) + \partial_j B_i(x) = 0, \end{cases} \quad (4.2.8c)$$

donde en (4.2.8b) se ha tenido en cuenta que  $B_i(x) \neq 0$ , y en (4.2.8c) se ha dividido por  $F(t) \neq 0$ . Como el sistema (4.2.8) sí es posible, supondremos  $\partial_m B^m(x) = 0$ .

En suma, se tiene que un Ansatz posible para el sistema (4.2.3) es

$$\begin{aligned} k_t &= 0 \\ k_i(t, x) &= \frac{4}{3}\beta^2 t^{\frac{1}{3}} F(t) B_i(x), \end{aligned} \quad (4.2.9)$$

lo cual lo transforma en el sistema (4.2.8). Pero ahora (4.2.8) se puede resolver completamente. En particular, (4.2.8c) es la ecuación de Killing de  $\mathbb{R}^N$  en cartesianas, cuya solución conocemos a partir de (2.3.11) porque  $\mathbb{R}^3$  es un espacio de los que bautizamos como  $\mathbb{K}^N$  en la sección 2.3. Por lo tanto

$$B_i(x) = \theta_{ij}x^j + a_i, \quad (4.2.10)$$

donde  $\theta_{ij}$  es un  $(0,2)$ -tensor antisimétrico y  $a_i$  es un vector de tres dimensiones.

Por su parte, la ecuación (4.2.8b) es una ecuación diferencial de primer orden para  $F(t)$ , y sabemos que  $t > 0$ . Su solución es

$$F(t) = F(t_0) \left( \frac{t}{t_0} \right), \quad (4.2.11)$$

donde  $t_0 > 0$ , y  $F(t_0)$  es una condición inicial de  $F(t)$ . Por lo tanto, el Ansatz (4.2.4) lleva a que los vectores de Killing covariantes son

$$k_\mu = (k_t \ k_i) = \left( 0 \quad \frac{4}{3}\beta^2 t^{\frac{4}{3}} F(t_0) t_0^{-1} (\theta_{ij}x^j + a_i) \right). \quad (4.2.12)$$

Como se pueden redefinir las componentes del vector  $a_i$  y el tensor  $\theta_{ij}$  para que incorporen el factor  $\frac{4}{3}F(t_0)t_0^{-1}$ , se puede prescindir de esta constante al calcular los vectores de Killing. Haciendo justamente esto y subiendo el índice  $\mu$  de la ecuación (4.2.12) con la métrica inversa  $g^{tt} = 1$ ,  $g^{ij} = \beta^{-2}t^{-\frac{4}{3}}\delta^{ij}$ , los vectores de Killing contravariantes del universo de Einstein-De Sitter son

$$k^\mu = \begin{pmatrix} k^t \\ k^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \theta_j^i x^j + a^i \end{pmatrix}. \quad (4.2.13)$$

Esto es un conjunto de 6 vectores de Killing linealmente independienmtes, pues hay 3 grados de libertad provenientes del vector  $a^i$  y otros 3 provenientes de que  $\theta_j^i$  sea un tensor antisimétrico de tres dimensiones. Estos son justamente los 6 vectores de Killing que se espera que toda métrica FLRW tenga, y representan las 6 simetrías de las secciones espaciales, que son de simetría máxima. De hecho, es muy fácil comprobar que el álgebra de los vectores de Killing contravariantes (4.2.13) es precisamente  $ISO(3)$ , donde se encuentran las tres traslaciones espaciales  $l^i$  como

$$l^i = \begin{pmatrix} 0 \\ a^i \end{pmatrix}, \quad (4.2.14)$$

y las tres rotaciones espaciales como

$$r^i = \begin{pmatrix} 0 \\ \theta_j^i x^j \end{pmatrix}, \quad (4.2.15)$$

donde no olvidemos que  $\theta_j^i$  es antisimétrico. En resumen, **el universo de Einstein-De Sitter tiene 6 vectores de Killing que, en coordenadas cartesianas, verifican el álgebra de  $ISO(3)$** , por lo que tiene 6 simetrías espaciales y ninguna *adicional*.



### 4.3 Vectores de Killing intrínsecos de métricas FLRW generales con $\dot{a}(t) \neq 0$

El cálculo de la sección anterior de los vectores de Killing del universo de Einstein-De Sitter, que solo tiene el número mínimo de 6 vectores de Killing, suscita la cuestión de si se podrán calcular los vectores de Killing *mínimos* para métricas FLRW generales, con un factor de escala  $a(t)$  cualquiera y curvatura espacial arbitraria  $k = 0, \pm 1$ . Consideraremos  $\dot{a}(t) \neq 0, \forall t \in \mathbb{R}$ , y el caso  $\dot{a} = 0$  se resolverá completamente en la sección 4.5. En esta sección se pretende por tanto encontrar las soluciones *intrínsecas* del sistema (4.0.5), es decir, las soluciones que tienen todas las métricas FLRW con  $\dot{a} \neq 0$ . Nuestro objetivo será encontrar un Ansatz que no imponga ninguna restricción adicional a la métrica (además de la condición  $\dot{a} \neq 0$ ), y ver qué soluciones linealmente independientes de (4.0.5) obtenemos. Recordemos que este sistema de ecuaciones es

$$\begin{cases} k_t = f(x) & (4.3.1a) \\ \partial_i f(x) + \partial_t k_i(t, x) - 2 \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} k_i(t, x) = 0 & (4.3.1b) \\ \tilde{\nabla}_i k_j(t, x) + \tilde{\nabla}_j k_i(t, x) = 2a(t)\dot{a}(t)\tilde{g}_{ij}f(x), & (4.3.1c) \end{cases}$$

Tomando la ecuación (4.3.1c), se observa que  $k_i$  es una función de  $(t, x)$ , pero sus derivadas covariantes espaciales dependen de  $x$  y de  $t$  de manera separada, es decir, como producto de  $2a(t)\dot{a}(t)$  (que es una función de  $t$  no trivial si  $\dot{a}(t) \neq 0$ ), y  $\tilde{g}_{ij}f(x)$  (que es una función de  $x$  no trivial en general). Por lo tanto, se toma para la forma de  $k_i(t, x)$  el Ansatz siguiente

$$k_i(t, x) = 2a(t)\dot{a}(t)F(t)B_i(x), \quad (4.3.2)$$

donde  $F(t)$  es una función escalar del tiempo comóvil  $t$ , y  $B_i(x)$  es una función vectorial tridimensional de las coordenadas espaciales  $x$ , ambas funciones que pretendemos calcular. En efecto, sustituir el Ansatz (4.3.2) en el sistema de ecuaciones (4.3.1) transforma este sistema de ecuaciones en

$$\begin{cases} k_t = f(x) & (4.3.3a) \\ \frac{1}{2}\partial_i f(x) + B_i(x) \left[ \ddot{a}F(t) - (\dot{a})^2 F(t) + \dot{a}a\partial_t F(t) \right] = 0 & (4.3.3b) \\ F(t) \left[ \tilde{\nabla}_j B_i(x) + \tilde{\nabla}_i B_j(x) \right] - \tilde{g}_{ij}f(x) = 0. & (4.3.3c) \end{cases}$$

Además, contraer (4.3.3c) con la métrica inversa  $\tilde{g}^{ij}$  de las secciones espaciales lleva a la condición de consistencia

$$f(x) = F(t) \frac{2}{3} \tilde{\nabla}_m B^m(x), \quad (4.3.4)$$

donde se ha tenido en cuenta que  $\tilde{g}^{ij}\tilde{g}_{ij} = \text{tr}(\tilde{g}_{ij}) = 3$ . Como  $f(x)$  es una función que solamente puede depender de  $x$  y no de  $t$ , la ecuación (4.3.4) es una contradicción en la dependencia funcional, a menos que se de una de las condiciones siguientes:



- $F(t) = \text{cte} \equiv F$ . Esto llevaría a la modificación del Ansatz (4.3.2) como

$$k_i(t, x) = 2\dot{a}(t)a(t)B_i(x), \quad (4.3.5)$$

pues la constante  $F$  se puede reabsorber en la función  $B_i(x)$ . La ecuación (4.3.3b) se transformaría en  $\partial_i f(x) = -2B_i(x) [\ddot{a}a - (\dot{a})^2]$ , lo cual implica necesariamente que  $\ddot{a}a - (\dot{a})^2$  ha de ser constante porque  $\partial_i f(x)$  solamente puede ser función de  $x$  y no de  $t$ . Esta condición necesaria hace que desechemos el Ansatz  $k_i(t, x) = 2\dot{a}(t)a(t)B_i(x)$  para el cálculo de los 6 vectores de Killing *intrínsecos* (comunes a todas las métricas FLRW), porque habrá métricas FLRW (de hecho, la mayoría) que no la cumplan.

De todas maneras, este resultado es prometedor porque la ecuación anterior es la condición de simetría máxima (3.4.2), lo cual significa que si se puede probar que la constante a la que es igual  $\ddot{a}a - (\dot{a})^2$  es efectivamente la curvatura  $k$ , y que el Ansatz  $k_i(t, x) = 2\dot{a}(t)a(t)B_i(x)$  da lugar a nuevas soluciones linealmente independientes, se ilustraría cómo la condición de simetría máxima (2.1.18) da lugar *en la práctica* a nuevos vectores de Killing. Desgraciadamente, el Ansatz  $k_i(t, x) = 2\dot{a}(t)a(t)B_i(x)$  se ha probado (y varios otros, ver Conclusiones) pero no se ha obtenido el resultado esperado.

- $\tilde{\nabla}_m B^m(x) = 0$ , y se tendrá por (4.3.4) que  $f(x) = 0$ . Sustituir estas condiciones de consistencia en el sistema (4.3.3) lleva a

$$\begin{cases} k_t = 0 & (4.3.6a) \\ B_i(x) [\ddot{a}aF(t) - (\dot{a})^2 F(t) + \dot{a}a\partial_t F(t)] = 0 & (4.3.6b) \\ F(t) [\tilde{\nabla}_j B_i(x) + \tilde{\nabla}_i B_j(x)] = 0. & (4.3.6c) \end{cases}$$

Esta segunda condición  $\tilde{\nabla}_m B^m(x) = 0$  no impone restricciones a la métrica y por tanto, se tomará para el cálculo de los vectores de Killing intrínsecos el Ansatz

$$\begin{aligned} k_t &= 0 \\ k_i(t, x) &= 2\dot{a}(t)a(t)F(t)B_i(x), \end{aligned} \quad (4.3.7)$$

lo cual lleva al sistema de ecuaciones (4.3.6). Pero (4.3.6) se puede resolver directamente observando que no puede ser  $F(t) = 0$ , ni tampoco puede ser  $B_i(x) = 0$ , pues ello daría lugar al vector nulo  $k_\mu = (0 \ 0 \ 0 \ 0)$ , que no puede formar un conjunto de vectores linealmente independientes, y por ello queda descartado como solución. Por lo tanto (4.3.6) se transforma en

$$\begin{cases} k_t = 0 & (4.3.8a) \\ \dot{F}(t) = \left( \frac{\dot{a}}{a} - \frac{\ddot{a}}{\dot{a}} \right) F(t) & (4.3.8b) \\ \tilde{\nabla}_j B_i(x) + \tilde{\nabla}_i B_j(x) = 0, & (4.3.8c) \end{cases}$$

donde además se ha dividido (4.3.6b) por  $\dot{a}a$  (pues recuérdese que  $\dot{a}, a \neq 0$ ) y se ha denotado  $\partial_t F(t) \equiv \dot{F}(t)$  porque  $F$  es una función que solo depende de  $t$ . En la ecuación (4.3.8c) se reconoce la ecuación de Killing de la métrica  $\tilde{g}_{ij}$ , y por lo tanto  $B_i(x)$  son los

vectores de Killing de las secciones espaciales  $\mathbb{K}^3$ , cuya expresión conocemos de (2.3.11), y es

$$B_i(x) = 4(1 + Kx^2)^{-2} \left[ \theta_{ij}x^j + (1 - Kx^2)a_i + 2Kx_i(a_mx^m) \right],$$

donde  $\theta_j^i$  es un  $(0,2)$ -tensor antisimétrico y  $a_i$  es un vector tridimensional.

Por su parte, la ecuación (4.3.8b) es una ecuación diferencial de primer orden cuya solución es

$$F(t) = \frac{a(t)}{\dot{a}(t)}, \quad (4.3.9)$$

luego  $F(t)$  está completamente determinado y no aporta grados de libertad al conjunto de vectores de Killing, esto es, no da lugar a nuevos vectores de Killing linealmente independientes.

En resumen, el Ansatz (4.3.7) no impone restricciones a la métrica y da lugar a los vectores de Killing covariantes

$$k_\mu = \left( 0 \quad \frac{8a^2(t)}{(1+Kx^2)^2} \left[ \theta_{ij}x^j + (1 - Kx^2)a_i + 2Kx_i(a_mx^m) \right] \right), \quad (4.3.10)$$

o bien, subiéndolo con la métrica  $g^{\mu\nu}$  de (3.1.2), a los vectores de Killing contravariantes

$$k^\mu = \begin{pmatrix} 0 \\ -8(1 + Kx^2)^{-2} \left[ \theta_j^i x^j + (1 - Kx^2)a^i + 2Kx^i(a_mx^m) \right] \end{pmatrix}. \quad (4.3.11)$$

El conjunto de 6 parámetros independientes (recordemos que  $\theta_j^i$  está sujeto a la condición de antisimetricidad)  $\{a^i, \theta_j^i\}$  nos dice que **todas las métricas FLRW con  $\dot{a} \neq 0$  tienen al menos los 6 vectores de Killing  $k^\mu$  dados por (4.3.11)**. Estos son justamente los vectores de Killing que esperábamos para métricas FLRW generales: toda métrica FLRW tiene que tener al menos las 6 simetrías de sus secciones espaciales máximamente simétricas. Además, sabemos que estas simetrías tienen que *provenir* de alguna manera de las simetrías de  $\tilde{g}_{ij}$ , es decir, de sus vectores de Killing  $\tilde{k}_{ij}$ . Esto se cumple a través del Ansatz (4.3.7), puesto que ya hemos visto que debido a la ecuación (4.3.8c), los  $B_i(x)$  son los vectores de Killing de las secciones espaciales.

#### 4.4 Vectores de Killing de métricas FLRW con $k = 0$

En la sección 4.3 se han calculado los vectores de Killing que tienen, *como mínimo*, todas las métricas FLRW con factor de escala no constante. Ahora, pretendemos precisar más, y calcular cuántos vectores de Killing tienen *exactamente* las métricas FLRW. Esto no es una tarea sencilla, por lo que nos centraremos en el caso en que las secciones espaciales tienen curvatura  $k = 0$ , que será más fácil de resolver.

Por lo tanto, vamos a estudiar ahora el grupo de simetrías de las soluciones cosmológicas correspondientes a universos espacialmente planos en expansión, es decir de métricas FLRW con  $k = 0$ . Este tipo de universos son relevantes porque las secciones espaciales planas se corresponden con espacios tridimensionales con la geometría euclídea a la que estamos acostumbrados. Es más, las mediciones más recientes de los parámetros cosmológicos ([19] [20]) indican que el Universo (el *nuestro*, el que observamos) es espacialmente plano a grandes escalas.

Sea entonces una métrica FLRW con curvatura de las secciones espaciales  $k = 0$ . Recordemos que las secciones espaciales son de simetría máxima. Como el único espacio riemanniano plano de simetría máxima en tres dimensiones es  $\mathbb{R}^3$ , la métrica de las secciones espaciales es  $\delta_{ij}$ . Alternativamente, se puede sustituir  $K = 0$  en la ecuación (2.3.9) y reparametrizar las coordenadas espaciales dividiendo por un factor 2, obteniendo de nuevo que  $\tilde{g}_{ij} = \delta_{ij}$ . La forma de la métrica será

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2 \delta_{ij} dx^i dx^j. \quad (4.4.1)$$

Ya sabíamos por el teorema 5 que las métricas FLRW admiten una transformación de Weyl que las relaciona con el espacio plano de Minkowski a través de un factor conforme  $e^{2\Omega(x)}$ , de manera que  $\tilde{g}_{\mu\nu} = e^{2\Omega(x)} \eta_{\mu\nu}$ , pero si además estas tienen secciones espaciales planas, la ecuación (4.4.1) permite encontrar explícitamente este factor conforme, definiendo una nueva coordenada  $T$  a partir del tiempo comóvil a través de su diferencial como  $dT = a^{-1}(t)dt$ . Esto permite que  $a^2(T)$  salga como factor común en (4.4.1), y se tiene

$$ds^2 = a^2(T) \left[ dT^2 - \delta_{ij} dx^i dx^j \right] = a^2(T) \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (4.4.2)$$

ahora en función de las coordenadas  $(T, x_i)$ . Escrito en estas nuevas coordenadas, se comprueba que el determinante de la métrica cumple  $\sqrt{|\tilde{g}|} = a^4(T)$ . Tener explícitamente el factor conforme  $a^2(T)$  que relaciona a  $g_{\mu\nu}$  con el espacio de Minkowski es muy útil porque entonces los vectores de Killing conformes  $\bar{k}_\mu$  de  $g_{\mu\nu}$  se pueden calcular de forma sencilla a partir de los vectores de Killing conformes  $\xi_\mu$  del espacio de Minkowski utilizando la ecuación  $\bar{k}_\mu = a^2(T) \xi_\mu$  que da el Teorema 4, y estos últimos ya los tenemos explícitamente calculados en (2.2.3). Por lo tanto, subiendo el índice  $\mu$  de  $\bar{k}_\mu$  con la métrica  $\tilde{g}^{ij} = a^{-2}(T) \eta^{ij}$ , se tendrá que los vectores de Killing conformes contravariantes de una métrica FLRW que describe un universo con secciones espaciales planas son

$$\bar{k}^\mu = a^\mu + \alpha \eta^\mu_\nu x^\nu + \theta^\mu_\nu x^\nu + (\eta_{\mu\nu} V_\rho + \eta_\rho^\mu V_\nu - \eta_{\nu\rho} V^\mu) x^\nu x^\rho, \quad (4.4.3)$$

donde  $\alpha$  es una constante real,  $a^\mu$  y  $V^\mu$  son vectores cuatrimensionales, y  $\theta^\mu_\nu$  es un  $(0,2)$ -tensor antisimétrico de dimensión 4. De entre los vectores de Killing conformes  $\bar{k}^\mu$ , sabemos que los vectores de Killing  $k^\mu$  son exactamente los  $\bar{k}^\mu$  que tienen divergencia cero, por lo que se calcula

$$\begin{aligned} 0 = \nabla_\mu \bar{k}^\mu &= \frac{1}{\sqrt{|\tilde{g}|}} \partial_\mu \left[ \sqrt{|\tilde{g}|} \bar{k}^\mu \right] = \partial_T \bar{k}^T + 4 \frac{\dot{a}}{a} \bar{k}^T + \partial_i \bar{k}^i \\ &= 4\alpha + 8V_T T + 12V_k x^k + 4 \frac{\dot{a}}{a} \left[ c^T + \theta_k^T x^k + \alpha T + V_T (T^2 - \delta_{ij} x^i x^j) + 2V_k x^k T \right]. \end{aligned} \quad (4.4.4)$$

Imponer divergencia cero obligará a que los parámetros de definición  $\alpha$ ,  $a^\mu$ ,  $V^\mu$  y  $\theta^\mu_\nu$  de los vectores de Killing conformes tomen ciertos valores. Se tiene la siguiente disyuntiva:

- Si  $\dot{a} \neq 0$ , entonces la condición (4.4.4) implica que  $\alpha = V_T = V_i = c^T = \theta_i^T = 0$ , con lo cual los vectores de Killing contravariantes son de la forma

$$k^\mu = \begin{pmatrix} k^T \\ k^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ c^i + \theta_k^i x^k \end{pmatrix}. \quad (4.4.5)$$

Como  $c^i$  es un vector tridimensional y  $\theta_k^i$  es un  $(0,2)$ -tensor tridimensional antisimétrico, se tienen **6 vectores de Killing linealmente independientes**, que es el

número mínimo que ya conocíamos por la sección 4.3, pues estamos tomando  $\dot{a} \neq 0$  y por lo tanto se está en las hipótesis de esa sección. En particular, vemos que la ecuación (4.4.5) no es más que (4.3.11) para  $k = 0$ , salvo un factor  $-8$ . Esto dará lugar a 6 simetrías diferentes para estos universos.

- Si  $\dot{\mathbf{a}} = \mathbf{0}$ , entonces (4.4.4) es menos restrictiva y solo implica que  $\alpha = V_T = V_k = 0$ , con lo cual los vectores de Killing contravariantes ahora toman la forma

$$k^\mu = \begin{pmatrix} k^T \\ k^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c^T + \theta_k^T x^k \\ c^i + \theta_T^i T + \theta_k^i x^k \end{pmatrix}. \quad (4.4.6)$$

Ahora,  $c^\mu$  es un vector cuadrimensional y  $\theta_\nu^\mu$  es un  $(0,2)$ -tensor antisimétrico de cuatro dimensiones, con lo cual en total se tienen  $4 + 6 = 10$  **vectores de Killing linealmente independientes**, lo que significa por la caracterización 12 que **una métrica FLRW con  $\dot{\mathbf{a}} = \mathbf{0}$  y  $\mathbf{k} = \mathbf{0}$  es máximamente simétrica**. Esto es consistente con la caracterización dada por el Teorema 6 para métricas FLRW máximamente simétricas. Pero es más, una métrica FLRW con  $a = cte$  y  $k = 0$  describe el **espacio de Minkowski** en cartesianas, por lo que en realidad hemos calculado los vectores de Killing del espacio de Minkowski, que son los siguientes.

Si denotamos por  $P^\mu$  a los vectores de Killing correspondientes a tomar en (4.4.6) cada componente del vector  $c^\mu$  como 1 y el resto de parámetros nulos, encontramos las *traslaciones*, de manera que  $P^0$  representa la traslación temporal que da la estaticidad, y  $P^i$  son 3 vectores de Killing que representan las traslaciones espaciales. Por su parte, tomar en (4.4.6) cada una de las 3 componentes independientes de  $\theta_j^i$  como 1 y el resto de parámetros nulos da lugar a los vectores de Killing que representan las *rotaciones tridimensionales*, que denotaremos como  $J^i$ . Por último, tomar en (4.4.6) cada una de las 3 componentes independientes de  $\theta_T^i$  como 1 y el resto cero da lugar a los *boosts* de la Relatividad Especial, que representan una invariancia del sistema para pares de observadores en movimiento rectilíneo uniforme mutuo en el eje  $x^i$ , y denotaremos estos vectores como  $K^i$ .

Se comprueba que estos 10 vectores de Killing cumplen el **álgebra de Poincaré**, que es el álgebra del grupo de simetrías de  $\mathbb{R}^{1,3}$ , lo cual confirma lo predicho por el Teorema 2. Las relaciones de conmutación correspondientes son

$$\begin{aligned} [J_m, P_n] &= \varepsilon_{mnk} P_k \\ [J_i, P_0] &= 0 \\ [K_i, P_k] &= \eta_{ik} P_0 \\ [K_i, P_0] &= -P_i \\ [J_m, J_n] &= \varepsilon_{mnk} J_k \\ [J_m, K_n] &= \varepsilon_{mnk} K_k \\ [K_m, K_n] &= -\varepsilon_{mnk} J_k. \end{aligned} \quad (4.4.7)$$

Cabe destacar que en este análisis falta un caso, que es el de  $\ddot{a}(t)a(t) - (\dot{a}(t))^2 = k = 0$  que predice el Teorema 6. Este caso es el del universo de De Sitter, cuyos vectores de Killing se calcularon en la sección 4.1. Para este universo, se tiene que  $\frac{\dot{a}(T)}{a(T)} = -\frac{1}{T}$  con el cambio de variable  $dT = a^{-1}dt$ , y esta condición en la ecuación (4.4.4) debería dar lugar

a menos restricciones sobre los parámetros de los vectores de Killing conformes que permitieran la existencia de 10 vectores de Killing. Sin embargo, esto no se ha podido demostrar con éxito.

## 4.5 Vectores de Killing de métricas FLRW con $\dot{a}(t) = 0$

Calculemos ahora los vectores de Killing para una métrica FLRW general con  $\dot{a}(t) = 0$ . Este tipo de métricas FLRW dan lugar a universos con secciones espaciales que no se expanden, es decir, son universos *estáticos*, como el universo Estático de Einstein de la sección 3.3.1.

Para estas métricas con  $\dot{a}(t) = 0$ , el sistema (4.0.5) se escribe como

$$\begin{cases} 0 = \partial_t k_t & (4.5.1a) \\ 0 = \partial_t k_i + \partial_i k_t & (4.5.1b) \\ 0 = \tilde{\nabla}_i k_j + \tilde{\nabla}_j k_i. & (4.5.1c) \end{cases}$$

Atendiendo a (4.5.1a), de nuevo se tiene que  $k_t = f(x)$ . Ahora bien, la ecuación (4.5.1c) sobre la parte *espacial*  $k_i(t, x)$  del campo de vectores de Killing es muy parecida a la ecuación de Killing para las secciones espaciales de la variedad con métrica  $\tilde{g}_{ij}$ , que es  $\tilde{\nabla}_i \tilde{k}_j + \tilde{\nabla}_j \tilde{k}_i = 0$ . Sus vectores de Killing  $\tilde{k}_i(x)$  son solamente función de  $x$ , y no dependen de  $t$ . Sin embargo, la parte espacial de los vectores de Killing de  $g_{\mu\nu}$ , que es  $k_i(t, x)$ , sí depende de  $t$ , además de  $x$ . Esto sugiere tomar el siguiente Ansatz para el sistema de ecuaciones (4.5.1):

$$k_i(t, x) = F(t)\tilde{k}_i(x) + G_i(t), \quad (4.5.2)$$

donde  $F(t)$  y  $G_i(t)$  son, respectivamente, una función escalar y una función vectorial de 3 dimensiones del tiempo comóvil  $t$ , y  $\tilde{k}_i(x)$  son los ya mencionados vectores de Killing de  $\tilde{g}_{ij}$ , cuya expresión ya fue derivada en (2.3.11).

El Ansatz (4.5.2) tiene dos sumandos diferentes. La linealidad de la ecuación de Killing invita a probar cada sumando por separado, dando lugar a dos Ansätze distintos

$$k_i(t, x) = G_i(t) \quad (4.5.3)$$

$$k_i(t, x) = F(t)\tilde{k}_i(t, x), \quad (4.5.4)$$

que analizamos por separado.

- Si  $k_i(t, x) = F(t)\tilde{k}_i(x)$ , entonces el sistema (4.5.1) se convierte en

$$\begin{cases} k_t(x) = f(x) & (4.5.5a) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tilde{k}_i(x)\partial_t F(t) + \partial_i f(x) = 0 & (4.5.5b) \end{cases}$$

$$\begin{cases} F(t) [\tilde{\nabla}_i \tilde{k}_j + \tilde{\nabla}_j \tilde{k}_i] = 0. & (4.5.5c) \end{cases}$$

Como los  $\tilde{k}_i$  son vectores de Killing de  $\tilde{g}_{ij}$ , por definición se tiene que  $\tilde{\nabla}_i \tilde{k}_j + \tilde{\nabla}_j \tilde{k}_i = 0$ , luego (4.5.5c) se transforma en  $0 = 0$  y no aporta información.

Recordemos que en (2.3.11) se tiene la forma de los  $\tilde{k}_i(x)$  como

$$\tilde{k}_i = 4(1 + kx^2)^{-2} \left[ \theta_j^i x^j + (1 - kx^2) a_i + 2kx_i(a_m x^m) \right]. \quad (4.5.6)$$

Reordenando (4.5.5b), se tiene que  $\partial_i f(x) = -\tilde{k}_i(x)\partial_t F(t)$ , lo cual obliga a que sea  $\partial_t F(t) = \Lambda$  con  $\Lambda \in \mathbb{R}$  pues  $\partial_i f(x)$  solamente puede ser función de  $x$  y no de  $t$ . Por lo tanto,  $F(t)$  se puede integrar directamente como

$$F(t) = \Lambda t + D, \quad (4.5.7)$$

con  $D \in \mathbb{R}$ . Pero entonces también se tiene que  $\partial_i f(x) = -\Lambda \tilde{k}_i(x)$ , y por tanto también se puede integrar  $f(x)$  como

$$f(x) = -\Lambda \tilde{k}_m(x) x^m + \bar{a}. \quad (4.5.8)$$

Finalmente, sustituyendo la ecuación (4.5.6) para la forma de  $\tilde{k}_i(x)$ , se tiene que

$$\begin{aligned} k_\mu &= (f(x) \quad F(t) \tilde{k}_i(x)) \\ f(x) &= -\frac{4\Lambda}{(1+kx^2)} a_m x^m + \bar{a} \\ \tilde{k}_i(x) F(t) &= \frac{4(\Lambda t + D)}{(1+kx^2)^2} \left[ \theta_{ij} x^j + (1-kx^2) a_i + 2kx_i (a_m x^m) \right]. \end{aligned} \quad (4.5.9)$$

Tomar  $\bar{a} = 1$ ,  $a_i = \Lambda = D = 0$  en (4.5.9) y subir el índice  $\mu$  con la métrica  $g^{\mu\nu}$  resulta en que

$$k^\mu = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.5.10)$$

es un vector de Killing contravariante con  $||k^\mu|| = g_{\mu\nu} k^\mu k^\nu = 1 > 0$ , y por lo tanto un universo descrito por una métrica FLRW con  $\dot{a}(t) = 0$  tiene un vector de Killing temporal (de norma positiva), lo que da lugar a una simetría por traslación temporal. Entonces, según lo comentado en la sección 2.1.4, se puede definir la energía como una cantidad globalmente conservada. Esto no es de extrañar, porque estos universos son *estáticos* por tener  $\dot{a}(t) = 0$ .

Aparentemente, la dependencia de los escalares  $\{\bar{a}, \Lambda, D\}$ , del vector tridimensional  $a_i$  y del (0,2)-tensor tridimensional  $\theta_{ij}$  en (4.5.9) dice que hay 9 vectores de Killing  $k_\mu$ , pero esto no es así. Por ejemplo, tomar  $D = 1$  y todo el resto de parámetros nulos da lugar a  $k_\mu = (0 \ 0 \ 0 \ 0)$ , que no forma un conjunto linealmente independiente. Lo mismo ocurre cuando se toma  $\Lambda = 1$  y el resto de parámetros como 0. En suma, esto significa que  $\Lambda$  y  $D$  no son grados de libertad independientes, por lo que **el Ansatz  $k_i(t, x) = F(t) \tilde{k}_i(x)$  proporciona 7 vectores de Killing independientes** (7 soluciones de (2.1.8) linealmente independientes). Además, **el Ansatz  $k_i(t, x) = F(t) \tilde{k}_i(x)$  no impone restricciones adicionales a la métrica**, por lo que **es un Ansatz válido para todas las métricas FLRW con  $\dot{a}(t) = 0$ , independientemente del valor  $k = 0, \pm 1$ .**

- Si  $k_i(t, x) = G_i(t)$ , entonces el sistema (4.5.1) se transforma en

$$\begin{cases} k_t = f(x) & (4.5.11a) \\ \partial_t G_i(t) + \partial_i f(x) = 0 & (4.5.11b) \\ \tilde{\nabla}_i G_j(t) + \tilde{\nabla}_j G_i(t) = 0. & (4.5.11c) \end{cases}$$

La ecuación (4.5.11c) se reescribe como una condición de consistencia expandiendo las derivadas covariantes  $\tilde{\nabla}_i$  utilizando los símbolos de Christoffel de la métrica  $\tilde{g}_{ij}$ , que son los dados por (3.1.7). Efectivamente, se tendrá

$$\begin{aligned} 0 &= \tilde{\nabla}_i G_j(t) + \tilde{\nabla}_j G_i(t) = -2\tilde{\Gamma}_{ij}^m G_m(t) \\ &= \frac{-4k}{(1+kx^2)} [x^m G_m(t) \delta_{ij} - x_i G_j(t) - x_j G_i(t)]. \end{aligned} \quad (4.5.12)$$

Como esto ha de cumplirse para valores arbitrarios de  $(t, x)$ , (4.5.12) implica que necesariamente  $k = 0$ . En otras palabras, **el Ansatz  $k_i(t, x) = G_i(t)$  solo es posible si  $k = 0$** . Por otra parte, analizando la ecuación (4.5.11b), como  $\partial_t G_i(t)$  es función únicamente de  $t$  y  $\partial_i f(x)$  es función únicamente de  $x$ , la única posibilidad es que ambos sean campos vectoriales constantes con  $\partial_t G_i(t) = \partial_i f(x) = c_i$ , para  $c_i$  un vector tridimensional. Esto permite integrar tanto  $G_i(t)$  como  $f(x)$ , obteniendo

$$\begin{aligned} f(x) &= c_m x^m + \alpha \\ G_i(t) &= -c_i t + d_i, \end{aligned} \quad (4.5.13)$$

donde  $\alpha$  es un escalar, y  $c_i, d_i$  son vectores tridimensionales. Esto nos dice que los vectores de Killing covariantes que proporciona el Ansatz  $k_i(t, x) = G_i(t)$  son

$$k_\mu = (c_m x^m + \alpha \quad -c_i t + d_i). \quad (4.5.14)$$

Tomando cada uno de los 7 parámetros reales  $\{\alpha, c_i, d_i\}$  como 1 y haciendo 0 los demás, se tiene que **el Ansatz  $k_i(t, x) = G_i(t)$  da lugar a 7 vectores de Killing linealmente independientes**. De nuevo, tomar  $\alpha = 1, c_i = d_i = 0$  en (4.5.14) y subir el índice  $\mu$  con la métrica  $g^{\mu\nu}$  resulta en que

$$k_{(\alpha)}^\mu = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

es un vector de Killing temporal, que representa una simetría por traslación temporal y permite definir la energía como una cantidad globalmente conservada (ver sección 2.1.4).

Por la linealidad de la ecuación de Killing (2.1.8), las métricas que admitan ambos Ansätze (4.5.3) y (4.5.4), que hemos visto que son las que cumplen  $k = 0$  porque son las únicas que admiten (4.5.4), admitirán el Ansatz suma (4.5.2). Esto lleva a la siguiente disyuntiva:

- Si  $k = \pm 1$ , entonces el único Ansatz posible es (4.5.4), y se tiene que **una métrica FLRW con  $\dot{a} = 0$  y  $k = \pm 1$  tiene 7 vectores de Killing independientes** dados por (4.5.9) para  $k = \pm 1$ , entre los cuales hay uno temporal  $k_\mu = (1 \ 0 \ 0 \ 0)$ , y los otros 6 provienen de las simetrías de las secciones espaciales. Por lo tanto, se tienen **6 simetrías espaciales y una por traslación temporal**. Este es el caso del universo estático de Einstein que se presentó en la sección 3.3.1 para  $k = 1$ . Que una métrica FLRW tenga 7 simetrías es bastante raro. El hecho de que el universo estático de Einstein las tenga proviene de imponer la condición *de ajuste fino*  $\rho_M = 2\rho_\Lambda$  de la



sección 3.3.1. El caso  $k = -1$  corresponde a una solución *no física* de (4.5.1), puesto que una métrica FLRW con  $a = cte$  y  $k = -1$  no es solución de las ecuaciones de Einstein, pero sí describe una variedad diferenciable.

- Si  $\mathbf{k} = \mathbf{0}$ , entonces ambos Ansätze (4.5.3) y (4.5.4) son posibles. Sustituyendo  $k = 0$  en (4.5.14) y (4.5.9) proporciona, respectivamente, los vectores de Killing

$$k_\mu = ((-a_m x^m + \bar{\alpha}) \quad [\theta_{ij} x^j + a_i] t) \quad (4.5.15)$$

$$k_\mu = ((c_m x^m + \alpha) \quad (c_i t + d_i) t). \quad (4.5.16)$$

Estos son, aparentemente, 14 vectores de Killing diferentes. Sin embargo, véase que el vector de Killing de (4.5.15) cuando  $\alpha = 1$  (y todos los demás parámetros son cero) es el mismo que el de 4.5.16 cuando  $\tilde{\alpha} = 1$ , y que los 3 vectores de Killing de (4.5.15) cuando  $c_i = 1$  son iguales salvo un signo a los 3 vectores de Killing de (4.5.16) cuando  $a_i = 1$ , por lo que en realidad **una métrica FLRW con  $\dot{a} = 0$  y  $\mathbf{k} = \mathbf{0}$  tiene 10 vectores de Killing independientes y es máximamente simétrica**. Este es precisamente el resultado esperado, ya que las métricas FLRW con  $\dot{a} = 0$  y  $k = 0$  además cumplen  $\ddot{a} = 0$  y por lo tanto verifican la caracterización (3.4.2) de simetría máxima, luego han de tener el número máximo de vectores de Killing posible, que para variedades de dimensión 4 es 10. De hecho, este es de nuevo el **espacio de Minkowski** en coordenadas cartesianas, pues tiene factor de escala constante y secciones espaciales planas. Por lo tanto sus 10 vectores de Killing (y su grupo de simetrías, por el Teorema 2) verificarán el **álgebra de Poincaré** expuesta en (4.4.7).



# Conclusiones

El objetivo que se ha perseguido a lo largo de este Trabajo de Fin de Grado ha consistido en calcular geoméricamente en casos particulares el número de simetrías de los modelos cosmológicos más realistas a muy grandes escalas: los modelos Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker.

Las herramientas matemáticas del capítulo 2 y, en especial, el Teorema 1, han permitido crear un marco adecuado de trabajo para calcular mediante métodos geométricos las simetrías de una variedad diferenciable.

En concreto, en la sección 2.1 se define la derivada de Lie a lo largo de un campo vectorial en una variedad diferenciable, y posteriormente los vectores de Killing, a partir de la aplicación de la derivada de Lie a la métrica. En particular, se ha concluido por el Teorema 2 que el conjunto de vectores de Killing es un álgebra de Lie real que genera el grupo de simetrías de la variedad diferenciable equipada con la métrica, lo cual permite conocer su grupo de simetrías a través del número de vectores de Killing linealmente independientes y sus relaciones de conmutación. En la subsección 2.1.3, el formalismo de vectores de Killing ha permitido definir las variedades máximamente simétricas en términos de sus tensores de curvatura y también del número de vectores de Killing linealmente independientes que admite, todo ello a partir de los conceptos intuitivos de homogeneidad e isotropía. Asimismo, en la subsección 2.1.4 se ha conseguido demostrar de manera sencilla una de las implicaciones del Teorema de Noether gracias a los vectores de Killing.

En la sección 2.2 se ha generalizado la ecuación de Killing (2.1.8) a la ecuación de Killing conforme, a partir de cuyas soluciones se pueden calcular fácilmente los vectores de Killing. La ecuación de Killing conforme se ha resuelto completamente en coordenadas cartesianas para el espacio de Minkowski  $N$ -dimensional  $\mathbb{R}^{1,N-1}$ . Asimismo, se han definido las transformaciones de Weyl de la métrica y se ha encontrado por el Teorema 4 la relación entre los vectores de Killing conformes de las métricas relacionadas a través de una transformación de Weyl, que se ha aprovechado en la sección 2.3 para calcular explícitamente en unas coordenadas concretas los vectores de Killing conformes y los vectores de Killing de las variedades máximamente simétricas de signatura riemanniana, o espacios  $\mathbb{K}^N$ .

En el capítulo 3 se introducen las mencionadas métricas FLRW como aquellas que cumplen el Principio Cosmológico de homogeneidad y que describen fluidos perfectos. Estas métricas son realistas a muy grandes escalas.

A lo largo de dicho capítulo, se presentan las ecuaciones cosmológicas que rigen el comportamiento de universos FLRW y se hace una breve reseña sobre el modelo cosmológico más aceptado actualmente como descripción del Universo a gran escala:

el modelo  $\Lambda$ CDM. Asimismo, se presentan algunos modelos sencillos e históricamente relevantes de modelos basados en métricas FLRW, como son el Universo Estático de Einstein, el espacio de De Sitter o el universo de Einstein-De Sitter.

En la sección 3.4, el Teorema 5 demuestra que las métricas FLRW son conformemente planas, esto es, que admiten una transformación de Weyl que las relaciona con la métrica de Minkowski  $\eta_{\mu\nu}$ . Asimismo, se consigue caracterizar a través del Teorema 6 cuáles son las métricas FLRW de simetría máxima en términos de su factor de escala  $a(t)$  y de la curvatura  $k$  de sus secciones espaciales. Se comprueba que todas las foliaciones por métricas FLRW de variedades lorentzianas máximamente simétricas de dimensión 4 cumplen la ecuación (3.4.2). Esta ecuación constituye una condición de ligadura sobre las posibles foliaciones de estas variedades que explica por qué no hay más.

Por último, en el capítulo 4 se aborda el cálculo del número de vectores de Killing de los modelos FLRW, lo cual permite calcular su número de simetrías. Ello se consigue combinando la información sobre la forma de estas métricas del capítulo 3 con las herramientas y resultados matemáticos del capítulo 2. Los cálculos se realizan en coordenadas comóviles y de lo particular a lo general, comenzando por modelos sencillos y terminando por afirmaciones más generales acerca de las métricas FLRW. En la mayoría de ocasiones, la estrategia seguida ha sido probar un Ansatz adecuado para la ecuación de Killing y aprovechar los resultados matemáticos expuestos a lo largo de esta memoria. En concreto, se ha encontrado que:

- El espacio de De Sitter tiene 10 vectores de Killing. Este es el número máximo de vectores de Killing que admite una variedad de dimensión 4, con lo que esta solución es máximamente simétrica.
- El universo de Einstein-De Sitter tiene 6 vectores de Killing que verifican el álgebra de  $ISO(3)$ , por lo que tiene 6 simetrías espaciales: 3 rotaciones y 3 traslaciones, y ninguna simetría adicional. Estas son exactamente las simetrías de sus secciones espaciales planas.
- Todas las métricas FLRW con  $\dot{a} \neq 0$  tienen al menos los 6 vectores de Killing  $k^\mu$  dados por la ecuación (4.3.11), lo que se traduce en 6 simetrías. Este es el resultado esperado, pues las secciones espaciales de las métricas FLRW son máximamente simétricas y, en dimensión 3, esto se traduce en 6 simetrías.
- Para métricas FLRW generales con  $k = 0$ , se encuentra explícitamente la transformación conforme al espacio de Minkowski predicha por el Teorema 5. Esto permite calcular explícitamente los vectores de Killing conformes e imponer divergencia cero para calcular los vectores de Killing. Se encuentra que, si  $\dot{a} \neq 0$ , se tienen en general 6 vectores de Killing, que coinciden salvo un factor con los dados por (4.3.11) para  $k = 0$ . Esto da lugar a 6 simetrías, que serán las de las secciones espaciales planas. Si  $\dot{a} = 0$ , se encuentra el espacio de Minkowski y sus 10 vectores de Killing independientes verificando el álgebra de Poincaré, lo cual es consistente con la caracterización de simetría máxima del Teorema 6. Sin embargo, no se han conseguido calcular por este método los 10 vectores de Killing que tiene el espacio de De Sitter, que cumple  $k = 0$ .
- En las métricas FLRW con  $\dot{a} = 0$ , se ha resuelto completamente la ecuación de Killing, encontrando la siguiente disyuntiva: si  $\dot{a} = 0$  y  $k = \pm 1$ , se encuentran 7

vectores de Killing independientes que dan lugar a 7 simetrías: 6 de las secciones espaciales y una más por traslación temporal, que proviene de la estaticidad. Este es el caso del Universo Estático de Einstein. Por otro lado, si  $\mathbf{k} = \mathbf{0}$ , se encuentra de nuevo el espacio de Minkowski con sus 10 vectores de Killing, y esto es consistente con la caracterización de simetría máxima del Teorema 6.

- El Teorema 5 establece que toda métrica FLRW es conformemente plana. Sin embargo, el cálculo explícito de la transformación de Weyl asociada no se ha conseguido realizar para métricas con  $k = \pm 1$ . Esto implica que el cálculo completamente general de los vectores de Killing de métricas FLRW no se ha podido realizar.

Por todo lo expuesto, damos por alcanzados los objetivos de este Trabajo de Fin de Grado. Cabe destacar que, adicionalmente, y en consonancia con el Teorema 6, se ha tratado de demostrar que las métricas FLRW con  $\dot{a} \neq 0$  y  $\ddot{a}a - (\dot{a})^2 = k$  tienen 10 vectores de Killing. Para ello, se ha abordado la resolución completa en coordenadas comóviles del sistema de ecuaciones (4.3.3) proveniente de la ecuación de Killing mediante los Ansätze  $k_i(t, x) = B_i(x)$ ,  $k_i(t, x) = F_i(t)$  y  $k_i(t, x) = B(x)F_i(t)$ , pero, desgraciadamente, no se han conseguido obtener los 10 vectores de Killing esperados.



# Bibliografía

- [1] Bert Janssen. *Gravitación y Geometría. Una introducción moderna a la Teoría de la Relatividad General*. Editorial Universidad de Granada, 2022.
- [2] John M. Lee. *Introduction to Smooth Manifolds*. 2nd. Springer, 2013.
- [3] Brian Hall. *Lie Groups, Lie Algebras and Representations. An Elementary Introduction*. 2nd. Springer, 2015.
- [4] Nicolai Copernici Torinensis. *De revolutionibus orbium coelestium 1473*. Gyan Books Pvt. Ltd., 2019.
- [5] Luca Amendola. *Lecture notes: Cosmology*. Recuperado de [<https://www.thphys.uni-heidelberg.de/~amendola/teaching/cosmology.pdf>]. 2023.
- [6] Michael Way y Harry Nussbaumer. «Lemaître’s Hubble relationship». En: *Physics Today* 64.8 (ago. de 2011), págs. 8-8. DOI: [10.1063/pt.3.1194](https://doi.org/10.1063/pt.3.1194). URL: <https://doi.org/10.1063/pt.3.1194>.
- [7] Werner Greub. *Linear Algebra*. 4th. Springer-Verlag, 1975.
- [8] Robert Gilmore. *Lie Groups, Physics and Geometry. An Introduction for Physicists, Engineers and Chemists*. Cambridge University Press, 2008.
- [9] Wi Ki Tung. *Group Theory in Physics*. World Scientific Publishing Co Pte Ltd., 1985.
- [10] Steven Weinberg. *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*. John Wiley & Sons, Inc., 1972.
- [11] Peter J. Olver. *Introduction to Partial Differential Equations*. Springer, 2014.
- [12] Jaan Einasto. *Regularity of the large-scale structure of the Universe*. 1998. arXiv: [astro-ph/9811432](https://arxiv.org/abs/astro-ph/9811432) [[astro-ph](https://arxiv.org/abs/astro-ph/9811432)].
- [13] P. J. E. Peebles. *The Large-Scale Structure of the Universe*. Princeton University Press, 1980.
- [14] Pierros Ntelis y et al. «Exploring cosmic homogeneity with the BOSS DR12 galaxy sample». En: *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* 2017.06 (jun. de 2017), págs. 019-019. DOI: [10.1088/1475-7516/2017/06/019](https://arxiv.org/abs/1702.02159). URL: <https://arxiv.org/abs/1702.02159>.
- [15] Edward W. Kolb y Michael S. Turner. *The Early Universe*. CRC Press, 1994.
- [16] Steven Weinberg. *The First Three Minutes*. 2nd. Basic Books, 1993.
- [17] Pilar Ruiz-Lapuente y Raúl Jiménez, eds. *Dark Energy: Observational and Theoretical Approaches*. Cambridge University Press, 2010.
- [18] Richard Cyburt y col. *The Physics of the Dark Universe*. Springer, 2019.

- 
- [19] Planck Collaboration. «Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters». En: *Astronomy & Astrophysics* 641 (sep. de 2020), A6. DOI: [10.1051/0004-6361/201833910](https://doi.org/10.1051/0004-6361/201833910). URL: <https://arxiv.org/abs/1807.06209>.
- [20] Andrew R. Liddle. *The Lambda-CDM Model of Cosmology*. Cambridge University Press, 2015.