Resumen de Álgebra I

Sergio Rodríguez

Agosto 2020

1 Clase 1.1

1.1 Números Complejos

Son de la forma $z = a + bi$ con $a, b \in \mathbb{R}$. La parte real de z corresponde a $Re(z) = a$ y la parte imaginaria es $Im(z) = b$. Cuando $Im(z) = 0$ decimos que el número es un **complejo real**, por otro lado, si $Re(z) = 0$ decimos que se trata de un **imaginario puro**. Supongamos que tenemos $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, entonces

$$z_1 = z_2 \iff Re(z_1) = Re(z_2) \wedge Im(z_1) = Im(z_2)$$

1.1.1 Formas de representar números complejos

Existen 4 formas de expresar un número complejo

- Binomial ($a + bi$ con $a, b \in \mathbb{R}$)
- Como par ordenado ((a, b) es representado como vector en el plano de Argant)
- Polar; de la forma $|z|cis(Arg(z))$
- Exponencial (Agregar más adelante)

1.2 Suma y producto de $\mathbb{C}$

Tenemos $z = x + yi \in \mathbb{C}$ y $w = a + bi \in \mathbb{C}$, si $x, y, a, b \in \mathbb{R}$

1. $z + w = (x + yi) + (a + bi) = (x + a) + (y + b)i$
2. $z \cdot w = (x + yi)(a + bi) = xa + xbi + yai + ybi^2 = (xa - yb) + (xb + ya)i$

2 Clase 1.2

2.1 Propiedades de la suma de complejos

1. $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ se cumple que $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ (**Conmutativa**)

2. $\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ se cumple que $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$ (**Asociativa**)

3. Existe el complejo real 0 tal que $\forall z \in \mathbb{C} : z + 0 = z$. Notemos que el 0 es el **único** elemento neutro para la suma. (**Existencia de un elemento neutro**)

4. Para todo $z \in \mathbb{C}$ existe el $-z$ tal que $z + (-z) = 0$. Para cada $z \in \mathbb{C}$, $-z$ es el **único** inverso aditivo de z. (**Inverso aditivo**)

2.2 Propiedades del producto de complejos

1. $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} : z_1 z_2 = z_2 z_1$. (**Conmutativa**)

2. $\forall z_1, z_2, z_3 \in \ : z_1(z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3$. (**Asociativa**)

3. El complejo real 1 es tal que $\forall z \in \mathbb{C} : z \cdot 1 = z$. El 1 es el **único** neutro para el producto. (**Existencia de un neutro para el producto**)

4. $\forall z \in \mathbb{C} : 0 \cdot z = 0$. Es por esto que **el 0 no tiene inverso multiplicativo**

5. Sea $z = x + yi, z \neq 0$. Un número $u = a + bi$ es inverso multiplicativo de z si y sólo si $z \cdot u = u \cdot z = 1$. (**Inverso multiplicativo**)

6. $\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ se cumple que $z1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$. (**Distributividad de la suma con respecto al producto**)

2.3 Conjugado de números complejos

Si $z = a + bi \in$, entonces si conjugado se denota $\overline{z} = a - bi$.

2.4 Producto de z por su conjugado

Si $z = a + bi$ con $a, b \in \mathbb{R}$, $\overline{z} = a - bi$ entonces $z\overline{z} = a^2 + b^2$. Esto vendría siendo el cuadrado de la distancia de $(0, 0)$ a (a, b). Notemos que esta distancia se denomina el **módulo de** z y se denota $|z|$, en donde

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \Rightarrow z\overline{z} = |z|^2$$

2.5 Inverso multiplicativo de z

Para cada $z \in \mathbb{C} - \{0\}$ el número $\frac{1}{|z|^2}\overline{z}$ es su **único** inverso multiplicativo (demostración trivial).

2.6 Diferencia y cociente de de números complejos

Dados $z, w \in \mathbb{C}$, la **diferencia** $z - w$ es: $z - w = z + (-w)$. Si $w \neq 0$ el **cociente** $\frac{z}{w}$ es: $\frac{z}{w} = zw^{-1} = w^{-1}z$.

2.7 Propiedades de $\overline{z}$

Para todo $z, w \in \mathbb{C}$ se cumple que

1. $\overline{\overline{z}} = z$.
2. $z = \overline{z}$ si y sólo si z es complejo real.
3. $z = -\overline{z}$ si y solo si z es imaginario puro.
4. $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$. En particular, $\overline{-z} = -\overline{z}$.
5. $\overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}$. En particular, $\overline{z^{-1}} = (\overline{z})^{-1}$
6. $\overline{(\frac{z}{w})} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}$.

2.8 Propiedades del módulo de z

Para todo $z, w \in \mathbb{C}$ se cumple que

1. $|z| \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$.
2. $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$.
3. Si z es un complejo real, $|z|$ es su valor absoluto (ocurre lo mismo con los imaginarios puros).
4. $\forall z \in \mathbb{C}$ se cumple que
   - $z\overline{z} = |z|^2$
   - $|\overline{z}^2| = \overline{z} \cdot \overline{\overline{z}} = \overline{\overline{z}} \cdot \overline{z}$
5. $\forall z, w \in \mathbb{C} : |zw| = |z||w|$. En particular, si $z \neq 0, |z^{-1}| = \frac{1}{|z|}$.
6. $\forall z, w \in \mathbb{C} : |z+w| \leq |z| + |w|$

3 Clase 2.1

3.1 Más propiedades de suma y producto de complejos

1. El producto de números complejos es cero si y sólo si uno de los dos es cero, $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} : z_1 z_2 = 0 \Leftrightarrow z_1 = o$ o $z_2 = 0$.
2. el inverso aditivo de $z + w$ es $-z - w$.
3. El inverso aditivo del inverso aditivo de z es z, $\forall z \in \mathbb{C} : -(-z) = z$.
4. Si $z, w \neq o$, entonces $(zw)^{-1} = z^{-1} w^{-1}$.
5. $(w^{-1})^{-1} = w$.

3.2 Potencias con exponente natural de un número complejo

Sean $z, w \in \mathbb{C}, n, m \in \mathbb{N}$. Entonces z^n es el producto de z por sí mismo n veces.

$$z^n z^m = z^{n+m}, (z^n)^m = z^{nm}, z^n w^m = (zw)^n, \frac{z^n}{z^m} = z^{n-m}.$$

3.3 Forma polar de números complejos

Se basa en la relación entre **coordenadas polares** y **coordenadas cartesianas** de puntos en el plano cartesiano

- Coordenadas cartesianas: $(x, y), x, y \in \mathbb{R}$
- Coordenadas polares: $(\rho, \theta) : \rho \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}, \in \mathbb{R}$

3.4 Forma polar de un número complejo

Si $z = w + yi$ con $x, y \in \mathbb{R}$, podemos ubicar a z en el plano de Argand del mismo modo que ubicamos el punto con coordenadas cartesianas (x, y) en el plano cartesiano. Las coordenadas polares de (x, y) son (ρ, θ) con

$$\rho = |z| \wedge \theta \text{ satisface } \cos\theta = \frac{x}{|z|}, \sin\theta = \frac{y}{|z|}z.$$

Por lo tanto,

$$z = x + yi = |z|\cos\theta + i|z|\sin\theta = |z|(\cos\theta + i\sin\theta) = |z| \operatorname{cis}\theta$$

Si $\theta \in]-\pi, \pi], |z| \operatorname{cis}\theta$ es la **representación polar** de z y θ recibe el nombre de **argumento principal de** z

4 Clase 2.2

4.1 Transformar números complejos de forma polar a binomial y viceversa

Trivial

4.2 Inverso aditivo de un número complejo en forma polar

Si $z = |z| \operatorname{cis}\theta$, entonces

$$-z = |z|(-\cos\theta - i\sin\theta) = |z|(\cos(\pi + \theta) + i\sin(\pi + \theta))$$

4.3 Conjugado e inverso multiplicativo de números complejos en forma polar

Si $z = |z| \operatorname{cis}\theta$, entonces

- $\overline{z} = |z|(\cos\theta - i\sin\theta) = |z|(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)) = |z| \operatorname{cis}(-\theta)$
- $z^{-1} = \frac{1}{|z|} \operatorname{cis}(-\theta)$

5 Clase 3.1

5.1 Operaciones con números complejos en forma polar

Sean $z_1 = |z_1| \operatorname{cis} \theta_1, z_2 = |z_2| \operatorname{cis} \theta_2$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces

- $z_1 + z_2 = |z_1| \cos \theta_1 + |z_2| \cos \theta_2 + i(|z_1| \sin \theta_1 + |z_2| \sin \theta_2)$
- $\overline{z_1} = |z_1| \operatorname{cis} (-\theta_1)$
- $-z_1 = |z_1| \operatorname{cis} (\pi + \theta_1)$
- si $z_1 \neq 0, z_1^{-1} = \frac{1}{|z_1|} \operatorname{cis} (-\theta_1)$
- $z_1 z_2 = |z_1||z_2| \operatorname{cis} (\theta_1 + \theta_2)$
- $z_1^n = |z_1|^n \operatorname{cis} (n\theta_1)$
- si $z_1 \neq 0, \frac{z_2}{z_1} = \frac{|z_2|}{|z_1|} \operatorname{cis} (\theta_2 - \theta_1)$

5.2 Raíces de números complejos

Sea $z \in \mathbb{C}, w \in \mathbb{C}$ es raíz $n-$ésima de z $(n \in \mathbb{N}))$ si y sólo si $w^n = z$

6 Clase 3.2

6.1 Fórmula de Moivre

Si $z \in \mathbb{C}, z = \operatorname{cis} (\theta), n \in \mathbb{N}$, entonces

$$z^n = |z|^n \operatorname{cis} (n\theta)$$

Es decir,

$$\begin{gathered} |z|^n(\cos \theta + i \sin \theta)^n = |z|^n(\cos (n\theta) + i \sin (n\theta)) \Longrightarrow \\ (\cos \theta + i \sin \theta)^n = (\cos (n\theta) + i \sin (n\theta)) \end{gathered}$$

6.2 Ejemplo de cómo sacar raíz de un número complejo

Calculemos la raíz cuadrada de $1 - i$, tenemos 2 formas para hacerlo:

- **Forma polar:** primero escribimos $1 - i$ en forma polar, osea $\sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{-\pi}{4}$. Ahora tenemos que encontrar $w \in \mathbb{C}$ tal que $w^2 = \sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{-\pi}{4}$. Tenemos que

$$\begin{gathered} |w|^2 \operatorname{cis} (2\alpha) = \sqrt{2} \operatorname{cis} \tfrac{-\pi}{4} \\ |w|^2 = \sqrt{2} \wedge \operatorname{cis} (2\alpha) = \operatorname{cis} \tfrac{-\pi}{4} \\ |w| = \sqrt[4]{2} \wedge 2\alpha = \tfrac{-\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ w = \sqrt[4]{2} \wedge \alpha = -\tfrac{\pi}{8} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \end{gathered}$$

Ahora veamos que valores puede tomar α sabiendo que el conjunto solución del mismo es $\alpha = \{k \in \mathbb{Z} : -\frac{\pi}{8} + \pi k\}$. Para $k = 0, \alpha = -\frac{\pi}{8}$, para $k = 1, \alpha = \frac{7\pi}{8}$ y para los demás valores de k $\operatorname{cis}\alpha$ va tomando los mismos valores ya que la función es periódica. Entonces podemos concluir que $\sqrt{1-i} = \{\sqrt{2}\operatorname{cis}(-\frac{\pi}{8}), \sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{7\pi}{8}\}$

- **Forma binomial:** (pendiente)

6.3 Raíces n-ésimas de $z \in \mathbb{C}$

Sea $z \in \mathbb{C}, w \in \mathbb{C}$ es raíz n-ésima de z ($n \in \mathbb{N}$) si y solo si $w^n = z$. Si $z = |z|\operatorname{cis}\theta$, entonces

$$\sqrt[n]{z} = \{|z|^{\frac{1}{n}} \operatorname{cis}(\tfrac{\theta}{n} + \tfrac{2\pi}{n}k) : k = 0, 1, \cdots, n-1\}$$

6.4 Algunas propiedades

Si $z = |z|\operatorname{cis}\theta$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces

- las raíces n-ésimas de z están en la circunferencia de centro en el origen y radio $|z|^{\frac{1}{n}}$ (las raíces n-ésimas de z tienen el módulo igual a $|z|^{\frac{1}{n}}$).
- Si n es par, por cada w que es raíz n-ésima de z, $-w$ también lo es.
- Si n es par, la suma de las raíces n-ésimas de z es cero.

6.5 Raíces n-ésimas de 1 y raíces n-ésimas de cualquier $z \in \mathbb{C}$

Si $\widetilde{w}$ es una de las raíces n-ésimas de z, entonces

$$\sqrt[n]{z} = \{\widetilde{w}u_0, \widetilde{w}u_1, \cdots, \widetilde{w}u_{n-1}\}$$

Siendo $u_0, u_1, \cdots, u_{n-1}$ las raíces n-ésimas de 1,

$$\sqrt[n]{(1)} = \{\operatorname{cis}(\tfrac{2\pi}{n}k) : k = 0, 0, \cdots, n-1\}$$

Entonces cuando $\widetilde{w}$ es un de las raíces n-ésimas de z y u_j es una de las raíces n-ésimas de 1, tenemos $(\widetilde{w}u_j)^n = (\widetilde{w})^n(u_j)^n = z \cdot 1 = z$. Ademas $\widetilde{w}u_0, \widetilde{w}u_1, \cdots, \widetilde{w}u_{n-1}$ son n valores distintos entre sí. Por tanto,

$$\sqrt[n]{z} = \{\widetilde{w}u_0, \widetilde{w}u_1, \cdots, \widetilde{w}u_{n-1}\}$$

También podemos ver que la suma de las raíces de z es:

$$\widetilde{w}u_0 + \widetilde{w}u_1 + \cdots + \widetilde{w}u_{n-1} = \widetilde{w}(u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1}) = \widetilde{w} \cdot (0) = 0$$

6.6 Forma exponencial de números complejos

Sea $z \in \mathbb{C}$

- existen $x, y \in \mathbb{R}$ de modo que $z = x + iy$.
- existe $\theta \in]-\pi, \pi]$ de modo que $z = |z| \operatorname{cis} \theta$.
- existe $\theta \in]-\pi, \pi]$ de modo que $z = |z| e^{i\theta}$.

Es cierto por que para cada $\theta \in \mathbb{R}$ se cumple que $\cos\theta + i \sin\theta = e^{i\theta}$

6.7 Operaciones con números complejos en forma exponencial

Si $z_1 = |z_1|e^{i\theta_1}, z_2 = |z_2|e^{i\theta_2}$, entonces

- $z_1 + z_2 = |z_1|e^{i\theta_1} + |z_2|e^{i\theta_2}$
- $\overline{z} = |z_1|e^{-i\theta_1}$
- $-z_1 = |z_1|e^{i(\pi+\theta_1)}$
- si $z_1 \neq 0, z_1^{-1} = \frac{1}{|z_1|}e^{-i\theta_1}$
- $z_1 z_2 = |z_1||z_2|e^{i(\theta_1+\theta_2)}$
- $z_1^n = |z_1|^n e^{i(n\theta_1)}$
- si $z - 1 \neq 0, \frac{z_2}{z_1} = \frac{|z_2|}{|z_1|}e^{i(\theta_2-\theta_1)}$

6.8 Representación exponencial de raíces n-ésimas de 1

$\sqrt[n]{(1)} = \{e^{i0}, e^{i(\frac{2\pi}{n})}, e^{i(\frac{4\pi}{n})}, \cdots, e^{i(\frac{2(n-1)\pi}{n})}\}$