



دانشگاه صنعتی شریف
دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

پایان‌نامه‌ی کارشناسی
مهندسی کامپیوتر

عنوان:

الگوریتم کوانتومی نقطه در چندضلعی

نگارش:

سید سجاد کاهانی

استاد راهنما:

دکتر آبام

تیر ۱۴۰۰



به نام خدا
دانشگاه صنعتی شریف
دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

پایان‌نامه‌ی کارشناسی

عنوان: الگوریتمِ کوانتومیِ نقطه در چندضلعی

نگارش: سید سجاد کاهانی

کمیته‌ی ممتحنین

امضاء:

استاد راهنما: دکتر آلام

امضاء:

استاد مشاور: ؟؟

امضاء:

استاد مدعو: ؟؟

تاریخ:

چکیده

از بدو پیدایش رایانشِ کوانتومی، بررسی‌های اندکی بر روی کاربردِ آن در هندسهٔ محاسباتی صورت گرفته که آن بررسی‌ها هم اکثراً معطوف به استفاده از الگوریتمِ جست‌وجوی کوانتومی بر روی مسائل بوده‌است. در این جا پس از مرورِ ادبیات، به معرفیِ الگوریتمی کوانتومی برای نقطه در چندضلعی می‌پردازیم که مبتنی بر تبدیلِ فوریهٔ کوانتومی ست و می‌تواند در شرایطی که تضمینِ فاصلهٔ نقطه از اضلاع وجود دارد تنها با یک پرسش می‌تواند به جوابِ مسئله دست پیدا کند، در غیر این صورت تسریعی ندارد و با همان n پرسش، مشابه حالت کلاسیک عمل می‌کند. **کلیدواژه‌ها:** پایان‌نامه، حروف چینی، قالب، زی‌پرشین

فهرست مطالب

۹	۱ نحوه‌ی نگارش
۹	۱-۱ پرونده‌ها
۹	۲-۱ عبارات ریاضی
۱۰	۳-۱ علائم ریاضی پرکاربرد
۱۱	۴-۱ لیست‌ها
۱۱	۵-۱ درج شکل
۱۲	۶-۱ درج جدول
۱۲	۷-۱ درج الگوریتم
۱۳	۸-۱ محیط‌های ویژه
۱۴	۲ برخی نکات نگارشی
۱۴	۱-۲ فاصله‌گذاری
۱۵	۲-۲ شکل حروف
۱۵	۳-۲ جدانویسی
۱۶	۴-۲ جدانویسی مرجع
۱۷	۳ مقدمه

۱۷	۱-۳ تعریف مسئله
۱۸	۲-۳ اهمیت موضوع
۱۹	۳-۳ ادبیات موضوع
۲۰	۴-۳ اهداف تحقیق
۲۰	۵-۳ ساختار پایان نامه
۲۱	۴ مفاهیم اولیه
۲۱	۱-۴ برنامه ریزی خطی
۲۳	۲-۴ الگوریتم های تقریبی
۲۵	۳-۴ پوشش رأسی
۲۷	۵ کارهای پیشین
۲۸	۶ نتایج جدید
۲۹	۷ نتیجه گیری
۳۰	آ مطالب تکمیلی

فهرست شکل‌ها

۱۱	۱-۱ یک گراف و پوشش رأسی آن
۱۲	۲-۱ یک گراف جهت‌دار بدون دور
۲۵	۱-۴ گراف G و یک پوشش رأسی برای آن

فهرست جدول‌ها

۱-۱	عملگرهای مقایسه‌ای	۱۲
۱-۴	نمونه‌هایی از ضرایب تقریب برای مسائل بهینه‌سازی	۲۴

فصل ۱

نحوه‌ی نگارش

در این فصل نکات کلی در مورد نگارش پایان‌نامه به اختصار توضیح داده می‌شود.

۱-۱ پرونده‌ها

پرونده‌ی اصلی پایان‌نامه‌ی شما `thesis.tex` نام دارد. به ازای هر فصل از پایان‌نامه، یک پرونده در شاخه‌ی `chapters` ایجاد نموده و نام آن را در پرونده‌ی `thesis.tex` (در قسمت فصل‌ها) درج نمایید. پیش از شروع به نگارش پایان‌نامه، بهتر است پرونده‌ی `front/info.tex` را باز نموده و مشخصات پایان‌نامه را در آن تغییر دهید.

۲-۱ عبارات ریاضی

برای درج عبارات ریاضی در داخل متن از `...` و برای درج عبارات ریاضی در یک خط مجزا از `...` استفاده کنید. برای مثال $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$ در داخل متن و عبارت زیر

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$$

در یک خط مجزا درج شده است. همان‌طور که در بالا می‌بینید، نمایش یک عبارت یکسان در دو حالت درون‌خط و بیرون‌خط می‌تواند متفاوت باشد. دقت کنید که تمامی عبارات ریاضی، از جمله متغیرهای

تک حرفی مانند x و y باید در محیط ریاضی یعنی محصور درون علامت $\$$ باشند.

۳-۱ علائم ریاضی پرکاربرد

برخی علائم ریاضی پرکاربرد در زیر فهرست شده‌اند.

- مجموعه‌های اعداد: $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}^+, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$
- مجموعه: $\{1, 2, 3\}$
- دنباله: $\langle 1, 2, 3 \rangle$
- سقف و کف: $\lceil x \rceil, \lfloor x \rfloor$
- اندازه و متمم: $|A|, \overline{A}$
- هم‌نهشتی: $a \equiv 1 \pmod{n}$ یا (پیمانه‌ی n) $a \equiv 1$
- ضرب و تقسیم: \times, \cdot, \div
- سه‌نقطه بین کاما: $1, 2, \dots, n$
- سه‌نقطه بین عملگر: $1 + 2 + \dots + n$
- کسر و ترکیب: $\frac{n}{k}, \binom{n}{k}$
- اجتماع و اشتراک: $A \cup (B \cap C)$
- عملگرهای منطقی: $\neg p \vee (q \wedge r)$
- پیکان‌ها: $\rightarrow, \Rightarrow, \leftarrow, \Leftarrow, \leftrightarrow, \Leftrightarrow$
- عملگرهای مقایسه‌ای: $\neq, \leq, \not\leq, \geq, \not\geq$
- عملگرهای مجموعه‌ای: $\in, \notin, \setminus, \subset, \subseteq, \subsetneq, \supset, \supseteq, \supsetneq$
- جمع و ضرب چندتایی: $\sum_{i=1}^n a_i, \prod_{i=1}^n a_i$

• اجتماع و اشتراک چندتایی: $\bigcup_{i=1}^n A_i, \bigcap_{i=1}^n A_i$

• برخی نمادها: $\infty, \emptyset, \forall, \exists, \Delta, \angle, \ell, \equiv, \therefore$

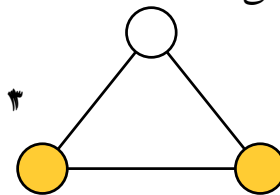
۴-۱ لیست‌ها

برای ایجاد یک لیست می‌توانید از محیط‌های «فقرات» و «شمارش» همانند زیر استفاده کنید.

- مورد اول
 - مورد دوم
 - مورد سوم
۱. مورد اول
۲. مورد دوم
۳. مورد سوم

۵-۱ درج شکل

یکی از روش‌های مناسب برای ایجاد شکل استفاده از نرم‌افزار LaTeX Draw و سپس درج خروجی آن به صورت یک فایل tex درون متن با استفاده از دستور fig یا centerfig است. شکل ۱-۱ نمونه‌ای از اشکال ایجادشده با این ابزار را نشان می‌دهد.



شکل ۱-۱: یک گراف و پوشش رأسی آن

همچنین می‌توانید با استفاده از نرم‌افزار Ipe شکل‌های خود را مستقیماً به صورت pdf ایجاد نموده و آن‌ها را با دستورات img یا centerimg درون متن درج کنید. برای نمونه، شکل ۲-۱ را ببینید.

عملیات	عملگر
کوچک‌تر	<
بزرگ‌تر	>
مساوی	==
نامساوی	<>

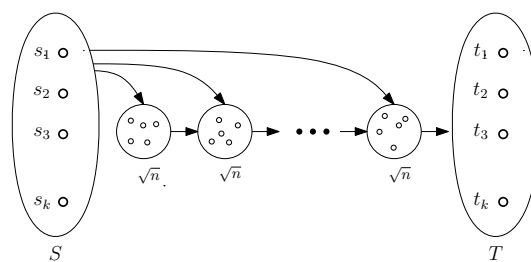
جدول ۱-۱: عملگرهای مقایسه‌ای

۱-۶ درج جدول

برای درج جدول می‌توانید با استفاده از دستور «جدول» جدول را ایجاد کرده و سپس با دستور «لوح» آن را درون متن درج کنید. برای نمونه جدول ۱-۱ را ببینید.

۱-۷ درج الگوریتم

برای درج الگوریتم می‌توانید از محیط «الگوریتم» همانند زیر استفاده کنید.



شکل ۱-۲: یک گراف جهت‌دار بدون دور

الگوریتم ۱ پوشش رأسی حریصانه

ورودی: گراف $G = (V, E)$

خروجی: یک پوشش رأسی از G

۱: قرار بده $C = \emptyset$

۲: تا وقتی E تهی نیست:

۳: یال دل‌خواه $uv \in E$ را انتخاب کن

۴: رأس‌های u و v را به C اضافه کن

۵: تمام یال‌های واقع بر u یا v را از E حذف کن

۶: C را برگردان

۸-۱ محیط‌های ویژه

برای درج مثال‌ها، قضیه‌ها، لم‌ها و نتیجه‌ها به ترتیب از محیط‌های «مثال»، «قضیه»، «لم» و «نتیجه» استفاده کنید. برای اثبات قضیه‌ها و لم‌ها از محیط «اثبات» استفاده کنید.

تعریف‌های داخل متن را با استفاده از دستور «مهم» به صورت تیره نشان دهید. تعریف‌های پایه‌ای‌تر را درون محیط «تعریف» قرار دهید.

تعریف ۱-۱ (اصل لانه‌کبوتری) اگر $n+1$ یا بیش‌تر کبوتر درون n لانه قرار گیرند، آن‌گاه لانه‌ای وجود دارد که شامل حداقل دو کبوتر است.

فصل ۲

برخی نکات نگارشی

این فصل حاوی برخی نکات ابتدایی ولی بسیار مهم در نگارش متون فارسی است. نکات گردآوری شده در این فصل به هیچ وجه کامل نیست، ولی دربردارنده‌ی حداقل مواردی است که رعایت آن‌ها در نگارش پایان‌نامه ضروری به نظر می‌رسد.

۱-۲ فاصله‌گذاری

۱. علائم سجاوندی مانند نقطه، ویرگول، دونقطه، نقطه‌ویرگول، علامت سؤال، و علامت تعجب (، :، ؛، ؟، !) بدون فاصله از کلمه‌ی پیشین خود نوشته می‌شوند، ولی بعد از آن‌ها باید یک فاصله قرار گیرد. مانند: من، تو، او.

۲. علامت‌های پرانتز، آکولاد، کروشه، نقل قول و نظایر آن‌ها بدون فاصله با عبارات داخل خود نوشته می‌شوند، ولی با عبارات اطراف خود یک فاصله دارند. مانند: (این عبارت) یا آن عبارت.

۳. دو کلمه‌ی متوالی در یک جمله همواره با یک فاصله از هم جدا می‌شوند، ولی اجزای یک کلمه‌ی مرکب باید با نیم‌فاصله^۱ از هم جدا شوند. مانند: کلاس درس، محبت‌آمیز، دوبخشی.

^۱ «نیم‌فاصله» فاصله‌ای مجازی است که در عین جدا کردن اجزای یک کلمه‌ی مرکب از یک‌دیگر، آن‌ها را نزدیک به هم نگه می‌دارد. معمولاً برای تولید این نوع فاصله در صفحه‌کلیدهای استاندارد از ترکیب Shift+Space استفاده می‌شود.

۲-۲ شکل حروف

۱. در متون فارسی به جای حروف «ك» و «ي» عربی باید از حروف «ک» و «ی» فارسی استفاده شود. همچنین به جای اعداد عربی مانند ۵ و ۶ باید از اعداد فارسی مانند ۵ و ۶ استفاده نمود. برای این کار، توصیه می‌شود صفحه کلید فارسی استاندارد^۲ را بر روی سیستم خود نصب کنید.
۲. عبارات نقل قول شده یا مؤکد باید درون علامت نقل قول «» قرار گیرند، نه «». مانند: «کشور ایران».
۳. کسره‌ی اضافه‌ی بعد از «ه» غیرملفوظ به صورت «هی» نوشته می‌شود، نه «ه»^۳. مانند: خانه‌ی علی، دنباله‌ی فیوناچی.
- تبصره: اگر «ه» ملفوظ باشد، نیاز به «ی» ندارد. مانند: فرمانده دلیر، پادشه خوبان.
۴. پایه‌های همزه در کلمات، همیشه «ث» است، مانند: مسئله و مسئول، مگر در مواردی که همزه ساکن است که در این صورت باید متناسب با اعراب حرف پیش از خود نوشته شود. مانند: رأس، مؤمن.

۳-۲ جدانویسی

۱. اجزای فعل‌های مرکب با فاصله از یک‌دیگر نوشته می‌شوند، مانند: تحریر کردن، به سر آمدن.
۲. علامت استمرار، «می»، توسط نیم‌فاصله از جزء بعدی فعل جدا می‌شود. مانند: می‌رود، می‌توانیم.
۳. شناسه‌های «ام»، «ای»، «ایم»، «اید» و «اند» توسط نیم‌فاصله، و شناسه‌ی «است» توسط فاصله از کلمه‌ی پیش از خود جدا می‌شوند. مانند: گفته‌ام، گفته‌ای، گفته است.
۴. علامت جمع «ها» توسط نیم‌فاصله از کلمه‌ی پیش از خود جدا می‌شود. مانند: این‌ها، کتاب‌ها.
۵. «به» همیشه جدا از کلمه‌ی بعد از خود نوشته می‌شود، مانند: به نام و به آن‌ها، مگر در مواردی که «ب» صفت یا فعل ساخته است. مانند: بسزا، بینم.

^۲ صفحه کلید فارسی استاندارد برای ویندوز، تهیه شده توسط بهنام اسفهبید

۶. «به» همواره با فاصله از کلمه‌ی بعد از خود نوشته می‌شود، مگر در مواردی که «به» جزئی از یک اسم یا صفت مرکب است. مانند: تناظر یک‌به‌یک، سفر به تاریخ.

۴-۲ جدانویسی مرجح

۱. اجزای اسم‌ها، صفت‌ها، و قیده‌های مرکب توسط نیم‌فاصله از یک‌دیگر جدا می‌شوند. مانند: دانش‌جو، کتاب‌خانه، گفت‌وگو، آنگاه، دل‌پذیر.

تبصره: اجزای منتهی به «ه‌اء ملفوظ» را می‌توان از این قانون مستثنی کرد. مانند: راهنما، رهبر.

۲. علامت صفت برتری، «تر»، و علامت صفت برترین، «ترین»، توسط نیم‌فاصله از کلمه‌ی پیش از خود جدا می‌شوند. مانند: بیش‌تر، کم‌ترین.

تبصره: کلمات «بهتر» و «بهترین» را می‌توان از این قاعده مستثنی نمود.

۳. پیشوندها و پسوندهای جامد، چسبیده به کلمه‌ی پیش یا پس از خود نوشته می‌شوند. مانند: همسر، دانشکده، دانشگاه.

تبصره: در مواردی که خواندن کلمه دچار اشکال می‌شود، می‌توان پسوند یا پیشوند را جدا کرد. مانند: هم‌میهن، هم‌ارزی.

۴. ضمیرهای متصل چسبیده به کلمه‌ی پیش از خود نوشته می‌شوند. مانند: کتابم، نامت، کلامشان.

فصل ۳

مقدمه

نخستین فصل یک پایان‌نامه به معرفی مسئله، بیان اهمیت موضوع، ادبیات موضوع، اهداف تحقیق و معرفی ساختار پایان‌نامه می‌پردازد. در این فصل نمونه‌ای از این مقدمه آورده شده است.^۱

۳-۱ تعریف مسئله

مسئله‌ی مسیریابی وسایل نقلیه حالت کلی‌تر مسئله‌ی فروشنده‌ی دوره‌گرد^۲ و یکی از مسائل جالب در حوزه‌ی بهینه‌سازی ترکیبیاتی است. در این مسئله، تعدادی وسیله‌ی نقلیه که هر کدام در انبار^۳ مشخصی قرار دارند به همراه تعدادی مشتری در قالب یک گراف داده شده است که گره‌های این گراف نشان‌دهنده‌ی مشتریان و انبارها است و وزن یال‌های گراف نشان‌دهنده‌ی هزینه‌ی حرکت بین گره‌های مختلف می‌باشد. هدف، یافتن دوره‌های مجزایی برای هر وسیله می‌باشد به نحوی که این دوره‌ها در برگیرنده‌ی تمام مشتریان بوده و مجموع هزینه‌ی دوره‌ها کمینه گردد.

گونه‌های مختلفی از مسئله‌ی مسیریابی وسایل نقلیه با محدودیت‌های متفاوت توسط پژوهشگران مورد مطالعه قرار گرفته است. از جمله در نظر گرفتن محدودیت‌هایی نظیر پنجره‌ی زمانی، به این مفهوم که هر مشتری در بازه‌ی زمانی خاصی باید ملاقات شود و یا در نظر گرفتن محدودیت برای ظرفیت وسایل که سبب می‌شود هر وسیله تنها تا زمانی بتواند به مشتریانی سرویس‌دهی کند که سطح تقاضای آن‌ها از

^۱ مطالب این فصل نمونه از پایان‌نامه‌ی آقای حسام‌الدین منفرد گرفته شده است.

^۲ Travelling Salesman Problem

^۳ Depot

ظرفیت وسیله تجاوز نکند.

از جمله گونه‌هایی که اخیراً مورد توجه قرار گرفته، و تا حد زیادی به مسائل دنیای واقعی شبیه‌تر است، مسئله‌ی مسیریابی وسایل نقلیه‌ی ناهمگن^۴ می‌باشد. در این گونه از مسئله، وسایل نقلیه ناهمگن در نظر گرفته می‌شوند، به این معنی که هزینه‌ی پیمایش یال‌ها برای هر وسیله‌ی نقلیه می‌تواند متفاوت باشد. تعریف دقیق‌تر این مسئله در زیر آمده است.

مسئله‌ی ۱-۳ گراف غیر جهت‌دار $G = (V, E)$ به همراه m رأس مشخص d_1, d_2, \dots, d_m از V به عنوان انبار و m تابع وزن $w_1, w_2, \dots, w_m : V \times V \rightarrow \mathbb{R}^+$ داده شده است. در هر یک از انبارها یک عامل (وسیله‌ی نقلیه) قرار دارد. هدف یافتن m دور است که از d_1, d_2, \dots, d_m شروع شده و اجتماع آن‌ها تمام رأس‌های گراف را بپوشاند طوری که مجموع هزینه‌ی این دورها کمینه شود. هزینه‌ی دور i ام با تابع w_i اندازه‌گیری می‌شود.

در صورت همگن مسئله، هزینه‌ی پیمایش یال‌ها برای همه‌ی عوامل یکسان است و در گونه‌ی ناهمگن، این هزینه برای عوامل مختلف می‌تواند متفاوت باشد. از آن جایی که صورت ناهمگن مسئله کم‌تر مورد توجه قرار گرفته است، در این تحقیق سعی شده است که تمرکز بر روی این گونه از مسئله باشد. همچنین علاوه بر دورهای ناهمگن، درخت‌ها و مسیرهای ناهمگن نیز در این پایان‌نامه مورد بررسی قرار خواهند گرفت.

۲-۳ اهمیت موضوع

مسئله‌ی مسیریابی وسایل نقلیه کاربردهای بسیار گسترده‌ای در حوزه‌ی حمل و نقل دارد. برای نخستین بار این مسئله برای مسیریابی تانکرهای سوخت‌رسان مطرح شد [۱]. اما امروزه با پیشرفت‌های گسترده‌ای که در زمینه‌ی تکنولوژی روی داده است از راه‌حل‌های این مسئله در امور روزمره از جمله سیستم توزیع محصولات، تحویل نامه، جمع‌آوری زباله‌های خانگی و غیره استفاده می‌شود. در نظر گرفتن فرض ناهمگن بودن هم با توجه به اینکه معمولاً عوامل توزیع در یک سیستم، یکسان نیستند و تفاوت‌هایی در میزان مصرف سوخت و غیره دارند، راه‌حل‌های مناسب‌تری برای مسائل این حوزه می‌تواند ارائه دهد. گونه‌های مختلفی از مسائل مسیریابی وسایل نقلیه در [۲، ۳، ۴] بیان شده است.

^۴Heterogeneous Vehicle Routing Problem

۳-۳ ادبیات موضوع

همان‌طور که ذکر شد مسئله‌ی مسیریابی وسایل نقلیه‌ی ناهمگن صورت عمومی مسئله‌ی فروشنده دوره‌گرد می‌باشد. مسئله‌ی فروشنده‌ی دوره‌گرد در حوزه‌ی مسائل ان‌پی-سخت^۵ قرار می‌گیرد و با فرض $P \neq NP$ الگوریتم دقیق با زمان چندجمله‌ای برای آن وجود ندارد. بنابراین برای حل کارای این مسائل از الگوریتم‌های تقریبی^۶ استفاده می‌شود.

مسئله‌ی فروشنده‌ی دوره‌گرد در حالتی که تنها یک فروشنده در گراف حضور داشته باشد، دو الگوریتم تقریبی معروف دارد. در الگوریتم اول با دو برابر کردن درخت پوشای کمینه^۷ و میانبر کردن^۸ دورهای بدست آمده، الگوریتمی با ضریب تقریب ۲ ارائه می‌شود. در الگوریتم دوم که متعلق به کریستوفایدز^۹ [۵] است، به کمک ساخت دور اویلری^{۱۰} بر روی اجتماع یال‌های درخت پوشای کمینه و یال‌های تطابق کامل کمینه^{۱۱} از گره‌های درجه‌ی فرد همان درخت، و میانبر کردن این دور، ضریب تقریب ۱/۵ ارائه می‌شود. با گذشت حدود ۴۰ سال از ارائه‌ی این الگوریتم، تا کنون ضریب تقریب بهتری برای این مسئله پیدا نشده است.

اخیراً با بهره‌گیری از روش کریستوفایدز و بسط آن برای مسئله‌ی فروشنده‌ی دوره‌گرد چندگانه‌ی همگن (در این حالت از مسئله تعداد فروشنده‌ها در گراف بیش از یکی است و هزینه‌ی پیمایش یال‌ها برای همه‌ی عوامل یکسان است) ضریب تقریب ۱/۵ ارائه شده است [۶]. در روش مطرح شده بعد از به دست آوردن درخت‌های پوشای کمینه برای هر انبار، به جای استفاده از روش دو برابر کردن یال‌ها، روش کریستوفایدز اعمال می‌شود. به راحتی می‌توان نشان داد که صرف اعمال الگوریتم کریستوفایدز به هر یک از درخت‌های بدست آمده، ضریب تقریب ۱/۵ را بدست نمی‌دهد. بنابراین در روش مذکور، الگوریتم کریستوفایدز روی کل جنگل بدست آمده اعمال می‌شود. نشان داده شده است که با استفاده از یک سیاست جایگزینی مناسب بین یال‌هایی که در جنگل کمینه، موجود هستند و آن‌هایی که در این مجموعه حضور ندارند و اعمال کریستوفایدز روی این جنگل‌ها، می‌توان جوابی تولید کرد که بدتر از ۱/۵ برابر جواب بهینه نباشد.

^۵ NP-hard

^۶ Approximation Algorithm

^۷ Minimum Spanning Tree

^۸ Shortcut

^۹ Christofides

^{۱۰} Eulerian Cycle

^{۱۱} Minimum Perfect Matching

همان‌طور که گفته شد نسخه‌ی ناهمگن این مسئله کمتر مورد توجه قرار گرفته است. در گونه‌ی ناهمگن، بیش از یک عامل (فروشنده) در اختیار داریم که در شروع، هر یک از آن‌ها در گره‌های مجزایی که با عنوان انبار معرفی می‌شوند قرار دارند و هزینه‌ی پیمایش یال‌ها برای هر یک از عوامل می‌تواند متفاوت از سایر عامل‌ها باشد. در صورتی که تعداد انبارها m فرض شود از جمله کارهای انجام شده در این مورد ارائه ضریب تقریب $4m$ به کمک حل برنامه‌ریزی خطی تعدیل شده^{۱۲} و ساخت درخت پوشای کمینه [۷]، ضریب تقریب $1/5m$ به کمک حل تعدیل برنامه‌ریزی خطی با روش بیضی^{۱۳} و اعمال الگوریتم کریستوفایدز [۸] و ضریب تقریب ۲ به کمک راه حل اولیه-دوگان^{۱۴} می‌باشد، روش اولیه-دوگان تنها برای حالتی که دو عامل وجود دارد و هزینه‌ی پیمایش یال‌ها برای یک عامل بیشتر از عامل دیگر باشد مطرح شده است [۹].

۴-۳ اهداف تحقیق

در این پایان‌نامه سعی می‌شود که مسئله‌ی مسیریابی وسایل نقلیه برای زیرگراف‌های ناهمگن مختلف مورد مطالعه قرار گیرد. از جمله زیرگراف‌های مورد نظر ما دور، درخت و مسیر می‌باشد. بعد از مطالعه‌ی کارهای انجام شده در این زمینه سعی می‌شود که مسئله به صورت دقیق‌تر مورد بررسی قرار گیرد.

۵-۳ ساختار پایان‌نامه

این پایان‌نامه شامل پنج فصل است. فصل دوم دربرگیرنده تعاریف اولیه‌ی مرتبط با پایان‌نامه است. در فصل سوم مسئله‌ی دوره‌های ناهمگن و کارهای مرتبطی که در این زمینه انجام شده به تفصیل بیان می‌گردد. در فصل چهارم نتایج جدیدی که در این پایان‌نامه به دست آمده ارائه می‌گردد. در این فصل، مسئله‌ی درخت‌های ناهمگن در چهار شکل مختلف مورد بررسی قرار می‌گیرد. سپس نگاهی کوتاه به مسئله‌ی مسیرهای ناهمگن خواهیم داشت. در انتها با تغییر تابع هدف، به حل مسئله‌ی کمینه کردن حداکثر اندازه‌ی درخت‌ها می‌پردازیم. فصل پنجم به نتیجه‌گیری و پیشنهادهایی برای کارهای آتی خواهد پرداخت.

^{۱۲} Linear Programming Relaxation

^{۱۳} Ellipsoid Method

^{۱۴} Primal-Dual

فصل ۴

مفاهیم اولیه

دومین فصل پایان‌نامه به طور معمول به معرفی مفاهیمی می‌پردازد که در پایان‌نامه مورد استفاده قرار می‌گیرند. در این فصل نمونه‌ای از مفاهیم اولیه آورده شده است.

۴-۱ برنامه‌ریزی خطی

در برنامه‌ریزی ریاضی سعی بر بهینه‌سازی (کمینه یا بیشینه کردن) یک تابع هدف با توجه به تعدادی محدودیت است. شکل خاصی از این برنامه‌ریزی که توجه ویژه‌ای به آن در علوم کامپیوتر شده است برنامه‌ریزی خطی می‌باشد. در برنامه‌ریزی خطی به دنبال بهینه کردن یک تابع هدف خطی با توجه به تعدادی محدودیت خطی می‌باشیم. شکل استاندارد یک برنامه‌ریزی خطی به صورت زیر است.

$$\text{minimize } c^T x \quad (4-1)$$

$$\text{s.t. } Ax \geq b$$

$$x \geq 0$$

در روابط فوق، x بردار متغیرها، b, c بردارهای ثابت و A ماتریس ضرایب می‌باشد. به سادگی قابل مشاهده است که رابطه‌ی (۴-۱) می‌تواند شکل‌های مختلفی از برنامه‌ریزی خطی را در بر بگیرد. به طور خاص اگر روابط قیدها به حالت $(A'x = b')$ یا در جهت برعکس $(A''x \leq b'')$ باشد یا تابع هدف به صورت بیشینه‌سازی باشد. همه‌ی این موارد با تغییر کمی در رابطه‌ی (۴-۱) یا اضافه کردن پارامتر و

متغیر جدید قابل مدل کردن می باشد. برای مطالعه‌ی بیشتر در مورد برنامه‌ریزی خطی می‌توانید به [۱۰] مراجعه کنید.

هر برنامه‌ریزی خطی مطرح شده به شکل بالا قابل حل در زمان چندجمله‌ای است [۱۱، ۱۲]. روش بیضی [۱۱] از این مزیت بهره می‌برد که نیازی به بررسی همه‌ی محدودیت‌ها ندارد. در حقیقت این روش با در اختیار داشتن یک دانای کل جداکننده^۱ می‌تواند جواب بهینه‌ی برنامه‌ریزی خطی را در زمان چندجمله‌ای بدست آورد. دانای کل جداکننده رویه‌ای است که با گرفتن بردار x به عنوان ورودی مشخص می‌کند که آیا x همه‌ی محدودیت‌های برنامه‌ریزی خطی را برآورده می‌سازد یا خیر، در حالت دوم دانای کل جداکننده حداقل یک محدودیت نقض شده را گزارش می‌دهد. این مسئله زمانی کمک کننده خواهد بود که برنامه‌ریزی خطی دارای تعداد نمایی محدودیت باشد اما ساختار ترکیبیاتی محدودیت‌ها امکان ارزیابی امکان‌پذیر بودن جواب مورد نظر را فراهم آورد.

برای هر برنامه‌ریزی خطی می‌توان شکل دوگان آن را نوشت. به برنامه‌ی اصلی، برنامه‌ی اولیه گفته می‌شود. دوگان رابطه‌ی (۴-۱) به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & b^T y \\ \text{s.t.} \quad & A^T y \leq c \\ & y \geq 0 \end{aligned} \quad (4-2)$$

برنامه‌های اولیه و دوگان به کمک قضایای دوگانی زیر با هم ارتباط دارند.

قضیه‌ی ۴-۱ (قضیه‌ی دوگانی ضعیف) یک برنامه‌ریزی خطی کمینه‌سازی با تابع هدف $c^T x$ و صورت دوگان آن با تابع هدف $b^T y$ را در نظر بگیرید. برای هر جواب ممکن x برای برنامه‌ی اولیه و جواب ممکن y برای برنامه‌ی دوگان، رابطه‌ی $b^T y \leq c^T x$ برقرار است.

درستی قضیه‌ی بالا به راحتی قابل تصدیق است زیرا $b^T y \leq (Ax)^T y = x^T A^T y \leq x^T c = c^T x$ ، برقراری نامساوی‌ها از نامساوی‌های برنامه‌ی اولیه و دوگان حاصل می‌شود. قضیه‌ی قوی دوگانی در [۱۳] به صورت زیر بیان شده است.

قضیه‌ی ۴-۲ (قضیه‌ی دوگانی قوی) یک برنامه‌ریزی خطی کمینه‌سازی با تابع هدف $c^T x$ و صورت دوگان آن با تابع هدف $b^T y$ را در نظر بگیرید. اگر برنامه‌ی اولیه یا دوگان دارای جواب بهینه‌ی نامحدود

^۱ Separation Oracle

باشد، برنامه‌ی متقابل فاقد جواب ممکن است. در غیر این صورت مقدار بهینه‌ی توابع هدف دو برنامه مساوی خواهد بود، به عبارت دیگر جواب x^* برای برنامه‌ی اولیه و جواب y^* برای برنامه‌ی دوگان وجود خواهد داشت که $c^T x^* = b^T y^*$.

در صورتی مقادیر متغیرها محدود به اعداد صحیح شود به عنوان مثال $x \in \{0, 1\}^n$ به این شکل از برنامه‌ریزی، برنامه‌ریزی صحیح می‌گوییم. این شکل از برنامه‌ریزی به سادگی قابل بهینه‌سازی نیستند. برداشتن محدودیت صحیح بودن متغیرها، برنامه‌ریزی خطی تعدیل‌شده را نتیجه می‌دهد. بهترین الگوریتم‌ها برای بسیاری از مسائل با گرد کردن جواب برنامه‌ریزی خطی تعدیل‌شده به مقادیر صحیح یا با بهره‌گیری از ویژگی‌های برنامه‌ریزی خطی (نظیر روش اولیه – دوگان [۱۴]) حاصل شده است. دقت کنید که جواب برنامه‌ریزی خطی تعدیل‌شده برای یک مسئله، به عنوان حد پایینی برای جواب بهینه‌ی آن مسئله محسوب می‌گردد.

زمانی که از برنامه‌ریزی خطی تعدیل‌شده برای حل یا تقریب زدن یک مسئله استفاده می‌شود، گپ صحیح^۲ برنامه‌ریزی خطی معمولاً بیانگر این است که جواب ما تا چه حد می‌تواند مناسب باشد. برای یک مسئله‌ی کمیته‌سازی، گپ صحیح به صورت کوچک‌ترین کران بالای مقدار برنامه‌ریزی خطی تعدیل‌شده برای نمونه‌ی I تقسیم بر مقدار بهینه برای نمونه‌ی I تعریف می‌شود. گپ صحیح برای مسئله‌ی بیشینه‌سازی به صورت معکوس تقسیم مطرح شده بیان می‌گردد.

۲-۴ الگوریتم‌های تقریبی

بسیاری از مسائل بهینه‌سازی مهم و پایه‌ای ان‌پی-سخت هستند. بنابراین، با فرض $P \neq NP$ نمی‌توان الگوریتم‌هایی با زمان چندجمله‌ای برای این مسائل ارائه کرد. روش‌های متداول برای برخورد با این مسائل عبارت‌اند از:

- مسئله را فقط برای حالات خاص حل نمود.
- با استفاده از روش‌های جست‌وجوی تمام حالات، مسئله را در زمان غیرچندجمله‌ای حل نمود.
- در زمان چندجمله‌ای، تقریبی از جواب بهینه را به دست آورد.

^۲Integrality Gap

ضریب تقریب	مسئله
$1 + \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$)	Euclidian TSP
$\text{const } c$	Vertex Cover
$\log n$	Set Cover
n^δ ($\delta < 1$)	Coloring
∞	TSP

جدول ۴-۱: نمونه‌هایی از ضرایب تقریب برای مسائل بهینه‌سازی

در این پایان‌نامه تمرکز بر روی روش سوم یعنی استفاده از الگوریتم‌های تقریبی است. الگوریتم‌های تقریبی قادرند جوابی نزدیک به جواب بهینه را در زمان چندجمله‌ای پیدا کنند.

مسئله‌ی بهینه‌سازی (کمینه‌سازی یا بیشینه‌سازی) P را در نظر بگیرید. فرض کنید هر نمونه از مسئله‌ی P دارای یک مجموعه‌ی ناتهی از جواب‌های ممکن^۳ است. به هر جواب ممکن، یک عدد مثبت به عنوان هزینه (یا وزن) آن نسبت داده شده است. مسئله‌ی P با شرایط فوق یک مسئله‌ی *ان‌پی-بهینه‌سازی* (NP-Optimization) است،

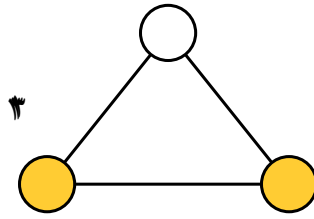
به ازای هر نمونه‌ی I از یک مسئله‌ی *ان‌پی-بهینه‌سازی* P ، هزینه‌ی جواب بهینه برای I را با $\text{OPT}(I)$ نشان می‌دهیم. همچنین، هزینه‌ی جواب تولیدشده توسط الگوریتم تقریبی بر روی I را با $\text{ALG}(I)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۴-۱ یک الگوریتم تقریبی برای مسئله‌ی P دارای ضریب تقریب α است اگر برای هر نمونه‌ی I از P :

$$\max \left\{ \frac{\text{ALG}(I)}{\text{OPT}(I)}, \frac{\text{OPT}(I)}{\text{ALG}(I)} \right\} \leq \alpha.$$

یک الگوریتم تقریبی با ضریب تقریب α ، یک الگوریتم α -تقریبی نامیده می‌شود. نمونه‌هایی از ضرایب تقریب متداول برای مسائل بهینه‌سازی در جدول ۴-۱ آمده است.

^۳feasible



شکل ۴-۱: گراف G و یک پوشش رأسی برای آن

۴-۳ پوشش رأسی

به عنوان اولین مسئله از مجموعه مسائل بهینه‌سازی، در این بخش به بررسی مسئله پوشش رأسی می‌پردازیم. این مسئله به صورت زیر تعریف می‌شود.

مسئله ۴-۱ (پوشش رأسی) گراف $G = (V, E)$ و تابع هزینه $w : V \rightarrow \mathbb{R}^+$ داده شده است. زیرمجموعه‌ای $C \subseteq V$ با حداقل هزینه را بیابید طوری که به ازای هر یال $uv \in E$ ، حداقل یکی از دو رأس u و v در مجموعه‌ای C باشد.

شکل ۴-۱ نمونه‌ای از یک پوشش رأسی را نشان می‌دهد. در زیر یک الگوریتم حریصانه برای مسئله پوشش رأسی غیروزن‌دار ارائه شده است.

الگوریتم ۲ پوشش رأسی حریصانه

- ۱: قرار بده $C = \emptyset$
- ۲: تا وقتی E تهی نیست:
- ۳: یال دل‌خواه $uv \in E$ را انتخاب کن
- ۴: $C \leftarrow C \cup \{u, v\}$
- ۵: تمام یال‌های واقع بر u یا v را از E حذف کن
- ۶: C را برگردان

به سادگی می‌توان مشاهده نمود که خروجی الگوریتم ۲ یک پوشش رأسی است. در ادامه نشان خواهیم داد که اندازه پوشش رأسی تولیدشده توسط الگوریتم حداکثر دو برابر اندازه پوشش رأسی کمینه است.

قضیه ۳-۴. $\text{OPT} \leq |C| \leq 2 \text{OPT}$.

اثبات. از آن جایی که C یک پوشش رأسی است، نامساوی سمت چپ بدیهی است. فرض کنید M مجموعه‌ی تمام یال‌هایی باشد که توسط الگوریتم انتخاب شده‌اند. از آن جایی که هیچ دو یالی در M دارای رأس مشترک نیستند، هر پوشش رأسی (از جمله پوشش رأسی بهینه) باید حداقل یک رأس از هر یال موجود در M را بپوشاند. بنابراین

$$|M| \leq \text{OPT}.$$

از طرفی می‌دانیم $|C| = 2|M|$. در نتیجه

$$|C| = 2|M| \leq 2 \text{OPT}.$$

□

بنا بر قضیه ۳-۴، الگوریتم ۲ یک الگوریتم ۲-تقریبی است. مثال زیر نشان می‌دهد که ضریب تقریب ۲ برای این الگوریتم محکم است. گراف دو بخشی کامل $K_{n,n}$ را در نظر بگیرید. پوشش رأسی تولیدشده توسط الگوریتم حریصانه بر روی این گراف شامل تمامی $2n$ رأس گراف خواهد بود، در صورتی که پوشش رأسی بهینه شامل نصف این تعداد، یعنی n رأس است.

فصل ۵

کارهای پیشین

در این فصل کارهای پیشین انجام شده روی مسئله به تفصیل توضیح داده می شود.

فصل ۶

نتایج جدید

در این فصل نتایج جدید به دست آمده در پایان نامه توضیح داده می شود. در صورت نیاز می توان نتایج جدید را در قالب چند فصل ارائه نمود. همچنین در صورت وجود پیاده سازی، بهتر است نتایج پیاده سازی را در فصل مستقلی پس از این فصل قرار داد.

فصل ۷

نتیجه گیری

در این فصل، ضمن جمع بندی نتایج جدید ارائه شده در پایان نامه، مسائل باز باقی مانده و همچنین پیش نهادهایی برای ادامه ی کار ارائه می شوند.

پیوست آ

مطالب تکمیلی

پیوست‌های خود را در صورت وجود می‌توانید در این قسمت قرار دهید.

مراجع

- [1] G. B. Dantzig and J. H. Ramser. The truck dispatching problem. *Management Science*, 6(1):80–91, 1959.
- [2] C. Miller, A. Tucker, and R. Zemlin. Integer programming formulation of traveling salesman problems. *Journal of the ACM*, 7:326–329, 1960.
- [3] B. Gavish. Integer programming formulation of traveling salesman problems. *Management Science*, 22(6):704–5, 1976.
- [4] I. Kara and T. Bektas. Integer programming formulations of multiple salesman problems and its variations. *European Journal of Operational Research*, 174(3):1449–1458, 2006.
- [5] N. Christofides. Worst-case analysis of a new heuristic for the travelling salesman problem. Technical Report 388, Graduate School of Industrial Administration, Carnegie Mellon University, 1976.
- [6] Z. Xu and B. Rodrigues. A $3/2$ -approximation algorithm for multiple depot multiple traveling salesman problem. In *Proceedings of the 12th Scandinavian Workshop on Algorithm Theory*, SWAT '10, pages 127–138, 2010.
- [7] S. Yadlapalli, S. Rathinam, and S. Darbha. An approximation algorithm for a 2-depot, heterogeneous vehicle routing problem. In *Proceedings of the 2009 Conference on American Control Conference*, ACC '09, pages 1730–1735, 2009.
- [8] S. Yadlapalli, S. Rathinam, and S. Darbha. 3-approximation algorithm for a two depot, heterogeneous traveling salesman problem. *Optimization Letters*, 6(1):141–152, 2012.
- [9] J. Bae and S. Rathinam. A primal-dual algorithm for a heterogeneous travelling salesman problem. *arXiv:1111.0567v2 [cs.DM]*, 2013.

-
- [10] A. Schrijver. *Theory of linear and integer programming*. John Wiley and Sons, Inc. New York, NY, USA, 1986.
 - [11] L. G. Khachiyan. A polynomial algorithm in linear programming. *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 244:1093–1096, 1979.
 - [12] N. Karmarkar. A new polynomial-time algorithm for linear programming. *Combinatorica*, 4:373–395, 1984.
 - [13] J. von Neumann. On a maximization problem. Manuscript, Institute for Advanced Studies, Princeton University, Princeton, NJ 08544, USA, 1947.
 - [14] S. Assadi, E. Emamjomeh-Zadeh, A. Norouzi-Fard, S. Yazdanbod, and H. Zarrabi-Zadeh. The minimum vulnerability problem. In *Proceedings of the 23rd International Symposium on Algorithms and Computation*, volume 7676 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 382–391, 2012.

واژه‌نامه

الف

ابتکاری heuristic
ارزش worth
ارضاپذیری satisfiability
استراتژی strategy
ائتلاف coalition

ب

بارگذاری loading
بازی game
برچسب label
برنامه‌ریزی خطی linear programming
برنامه‌ریزی صحیح integer programming
بسته‌بندی packing
بهترین پاسخ best response
بیشینه maximum

پ

پالت pallet
پایداری robustness
پشتیان support
پوسته‌ی محدب convex hull
پوش بالایی upper envelope
پوششی covering

ت

تبدیل تصویری projective transformation
تعادل equilibrium
تعدیل relaxation
تقاطع intersection
تقسیم‌بندی partition
تکاملی evolutionary
توزیع شده distributed

ز	ج
scheduling زمان‌بندی	brute-force جست‌وجوی جامع
biology زیست‌شناسی	Depth-First Search جست‌وجوی عمق‌اول
	bin جعبه
س	چ
constructive ساختی	sink چاله
pay off, utility سود	
ش	ح
quasi-polynomial شبه‌چندجمله‌ای	action حرکت
quasi-concave شبه‌مقعر	
ص	خ
formal صوری	selfish خودخواهانه
	clique خوشه
ع	د
rational عاقل	binary دودویی
agent-based عامل-محور	dual دوگان
action عمل	bimatrix دو ماتریسی
غ	ر
missing غائب	vertex رأس
decentralized غیرمتمرکز	behaviour رفتار
degenerate غیرمعمول	coloring رنگ‌آمیزی

ن

outcome نتیجه‌ی نهایی
 Nash نش
 fixed point نقطه‌ثابت
 art gallery نگارخانه‌ی هنر
 gaurd نگهبان
 profile نمایه
 round-robin نوبتی

و

facet وجه

ه

price of anarchy (POA) هزینه‌ی آشوب
 social cost هزینه‌ی اجتماعی
 price of stability (POS) هزینه‌ی پایداری

ی

edge یال
 isomorphism یکریمختی

ق

transferable قابل انتقال
 lexicographically قاموسی
 strong قوی

ک

minimum کمینه

م

subset sum مجموع زیرمجموعه‌ها
 set مجموعه
 pivot محور
 mixed مختلط
 hidden مخفی
 affine مستوی
 planar مسطح
 reasonable منطقی
 parallel موازی

Abstract

We present a standard template for typesetting theses in Persian. The template is based on the X_YPersian package for the L^AT_EX typesetting system. This write-up shows a sample usage of this template.

Keywords: Thesis, Typesetting, Template, X_YPersian



Sharif University of Technology

Department of Computer Engineering

B.Sc. Thesis

A Quantum Algorithm for Point in Polygon

By:

Seyed Sajad Kahani

Supervisor:

Dr. Abam

July 2021