ترمودینامیک

سید سجاد کاهانی

۱ خلاصه

۱.۱ ترمودینامیک

ترمودینامیک به توصیف سیستم‌های بس‌ذره‌ای (یعنی تشکیل‌شده از تعداد زیادی ذره) می‌پردازد.

ترمودینامیک تنها پارامترهای ماکروسکوپیک را بررسی می‌کند، حال آن‌که مکانیک آماری به بررسی پارامترهای میکروسکوپیک می‌پردازد.

ما تعریفی کیفی از گرما می‌دانیم، که میزان گرمی و سردی هرچیز است. دیده‌ایم هرگاه جسم سردتر را کنار جسم گرم‌تر می‌گذاریم، جسم گرم سردتر می‌شود و جسم سرد گرم‌تر می‌شود تا جایی که این فرایند متوقف شود. به آن حالت تعادل ترمودینامیکی می‌گوییم.

قانونِ صفرم - بیانِ اول: تعدی تعادل ترمودینامیکی

قانونِ صفرم - بیانِ دوم: می‌توان پارامتری به شکل دما تعریف کرد که در دو جسمی که در تعادل ترمودینامیکی هستند برابر باشد.

انبساط: می‌توان انبساط را با تقریبی به شکل

$$x = x_0(1 + \alpha\Delta T)$$

قانون اول: بیانی از پایستگی انرژی به شکل زیر

$$\mathrm{d}E = \text{đ}Q + \text{đ}W$$

کمیتِ فزون‌ور: کمیتی که اگر دو سیستم را با هم یکی کنیم جمع می‌شود

کمیت نافزون‌ور: کمیتی که اگر دو سیستم را با هم یکی کنیم جمع نمی‌شود.

تابع حالت: پارامتری که فقط به آغاز و پایان فرایند وابسته است و مستقل از مسیر است. (دیفرانسیل آن کامل است)

تابع مسیر: پارامتری که فقط به آغاز و پایان فرایند وابسته نیست و به مسیر وابسته‌است. (دیفرانسیل آن کامل نیست)

قانون دوم - بیان اول: گرما به شکل خودبه‌خودی از جسم سرد به گرم نمی‌رود.

قانون دوم – بیان دوم: بازده هر ماشین برگشت‌پذیری که فقط بین دو دمای T_c و T_h کار می‌کند دقیقاً برابر $\eta = 1 - \frac{T_c}{T_h}$ است و بازده ماشین‌های برگشت‌ناپذیر حتماً کم‌تر هستند.

دیدیم که کمیت $\frac{đQ}{T}$ در هر چرخهٔ برگشت‌پذیری برابر صفر است. پس برای چرخه‌های برگشت‌پذیر می‌توان تابع حالتی به شکل S تعریف کرد که $\mathrm{d}S = \frac{đQ}{T}$ باشد. آن را آنتروپی می‌نامیم.

آنتروپی نیز کمیتی فزون‌ور است.

۲.۱ مکانیک آماری

کمیت ماکروسکوپیک: کمیتی که به شکل مستقیم قابل رویت و اندازه‌گیری‌ست. کمیت میکروسکوپیک: کمیتی که به شکل مستقیم قابل رویت و اندازه‌گیری نیست.

ماکروحالت: هر حالتی از سیستم که کمیت‌های ماکروسکوپیک آن مشخص شده. میکروحالت: هر حالتی از سیستم که کمیت‌های میکروسکوپیک در آن مقدار مختلفی دارند.

در آنسانبل میکروکانونیک فرض می‌کنیم همهٔ میکروحالت‌ها هم‌احتمال هستند.

به تعداد میکروحالت‌های یک ماکروحالت را با Ω نشان می‌دهیم.

$$\frac{\partial \ln \Omega}{\partial E} = \frac{1}{k_B T}$$

$$S = k_B \ln \Omega$$

۲ مسائل

۱.۲ گاز کامل

۱.۱.۲ سانتریفیوژ

(سخت) یک گاز کامل درون یک استوانه‌ای به شعاع R و ارتفاع h وجود دارد. جرم هر اتم این گاز M است. این استوانه با سرعت‌زاویه‌ای ω شروع به دوران می‌کند. چگالی و فشار گاز را برحسب شعاع بیابید. (فشار گاز در مرکز استوانه P_0 است)

۲.۱.۲ آنتروپیِ گاز کامل

(نسبتاً آسان) با استفاده از قانونِ اول ترمودینامیک ($\mathrm{d}U = T\mathrm{d}S + đW$) و با دانستنِ انرژی و کار برای گاز کامل، همچنین معادلهٔ حالت ($PV = Nk_bT$) آنتروپیِ گاز کامل را برحسبِ V و T به دست آورید.

(طبیعتاً از ثوابت N و k_B نیز می‌توانید استفاده کنید)

(درنظر بگیرید $S(T=T_0, V=V_0)=S_0$)

۳.۱.۲ چرخهٔ گرد

(کمی سخت) چرخه‌ای با گاز کامل ساخته‌ایم که در نمودارِ $P-V$ به شکل یک دایره به مرکز (P_0, V_0) و به شعاع r است. ابتدا بگویید در کدام‌یک از بخش‌های مسیر $đQ$مثبت و در کدام بخش‌ها منفی‌ست. (یعنی در کدام‌قسمت گرما می‌گیرد و در کدام قسمت گرما می‌دهد) می‌توانید بازده آن را حساب کنید؟

۲.۲ آمار و مکانیک آماری

۱.۲.۲ توزیع آماری

(آسان) این سؤال متغیرِ تصادفیِ پیوسته‌ای‌ست که به توزیعِ اکسپونانسیل معروف است. فرض کنید x یک متغیر تصادفی‌ست که $x \geq 0$. همچنین احتمالِ این‌که این عدد بینِ u و du باشد به شکل زیر است

$$P(u < x < u + \mathrm{d}u) = f(u)\mathrm{d}u$$

و

$$f(u) = Ae^{\frac{-u}{\lambda}}$$

که λ یک عددِ ثابت است.
با توجه به این‌که مجموع احتمال‌ها باید برابر یک باشد، A را به است آورید.
سپس $\langle x \rangle$ (امید ریاضی x) را به دست آورید.

۲.۲.۲ آهن‌رباها

(نسبتاً سخت) N آهن‌ربای کوچکِ یک‌سان با اندازهٔ دوقطبیِ مغناطیسی M (که همان اتم‌های ماده هستند) در فضا وجود دارند. کل سیستم در فضایی قرار دارد که میدان مغناطیسیِ ثابتِ B رو به بالا وجود دارد. هر کدام از آهن‌رباهای کوچک می‌توانند دقیقاً رو به بالا یا دقیقاً رو به پایین باشند، از الکترومغناطیس می‌دانیم که اگر آهن‌ربا در جهت بالا باشد، مقدار انرژی آن MB و اگر در جهت پایین باشند، انرژی آن برابر $-MB$ است.

فرض کنید MB انرژیِ خیلی کوچکی باشد، به ازای حالتی که در آن انرژی کل سیستم مقدار E است، (به سادگی فرض کنید $E = zMB$ که z عددی صحیح است). تابع Ω را به است آورید و آن را با تقریب‌زدن ساده کنید. سپس معادلهٔ انرژی سیستم برحسب دما را با استفاده از فرمول $\frac{\partial \ln \Omega}{\partial E} = \frac{1}{k_b T}$ بنویسید.