سؤالِ اون‌شب

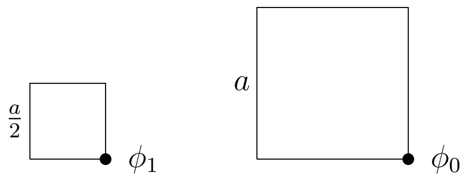
سید سجاد کاهانی

بامدادِ دوازدهمِ اسفندِ ۱۳۹۸

در ادامهٔ داستانِ تقارن، این سؤال را حل کنید. (این‌یکی واقعاً درست است)

۱. یک مربع را در نظر بگیرید که با بارِ سطحیِ σ پر شده و طولِ ضلعش a است.

۲. فرض کنید پتانسیل در هر گوشهٔ این مربع ϕ_0 است. اگر این مربع را به شکلی معجزه‌آسا به مربعی با ضلعِ $\frac{a}{2}$ تبدیل کنیم، پتانسیل در هر گوشه از این مربع ϕ_1 برحسبِ ϕ_0 چقدر می‌شود؟ اثبات کنید. حرفِ روی هوا نزنید. حالا اگر اضلاعِ مربع تبدیل به $\frac{a}{k}$ بشوند چه؟

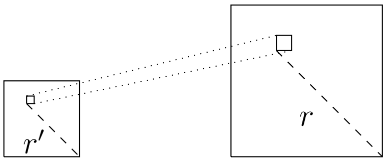


پاسخ: برای پتانسیلِ یک مربع با ضلع a داریم که اگر آن را به اجزای کوچکی هرکدام به مساحتِ $\mathrm{d}S$ تقسیم کنیم، با اصلِ برهم‌نهی داریم که

$$\phi_0 = \int_{\text{روی مربع بزرگ}} \frac{\sigma \mathrm{d}S}{4\pi\epsilon_0 r}$$

حالا برای مربعِ k برابر کوچک‌شده هم انتگرال به این شکل عوض می‌شود

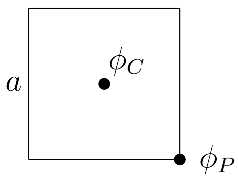
$$\phi_1 = \int_{\text{روی مربع کوچک}} \frac{\sigma \mathrm{d}S'}{4\pi\epsilon_0 r'}$$



می‌توان یک تناظرِ یک‌به‌یک بینِ نقطه‌های این دو مربع ایجاد کرد، آن‌وقت یک جزء دیفرانسیلی به اندازهٔ $\mathrm{d}S$ برروی مربعِ کوچک‌تر یک دیفرانسیل به اندازهٔ $\mathrm{d}S' = \frac{\mathrm{d}S}{k^2}$ داریم و از طرفی برای هر جزء، $r' = \frac{r}{k}$ پس در کل برای مربعِ کوچک می‌توان نوشت

$$\begin{aligned}
\phi_1 &= \int_{\text{به شکلِ متناظر روی مربع بزرگ}} \frac{\sigma \mathrm{d}S'}{4\pi\epsilon_0 r'} \\
&= \int_{\text{به شکلِ متناظر روی مربع بزرگ}} \frac{\sigma \frac{\mathrm{d}S}{k^2}}{4\pi\epsilon_0 \frac{r}{k}} \\
&= \frac{1}{k} \int_{\text{به شکلِ متناظر روی مربع بزرگ}} \frac{\sigma \mathrm{d}S}{4\pi\epsilon_0 r} \\
&= \frac{1}{k}\phi_0
\end{aligned}$$

۳. حالا با اصلِ برهم‌نهی و شکستن بگویید پتانسیلِ وسطِ یک مربع ϕ_C چه رابطه‌ای با پتانسیلِ گوشه‌های آن ϕ_P دارد؟



اگر مربع را به چهار قسمت تقسیم کنیم، طبق اصل برهم‌نهی میدان ϕ_c برابرِ با جمعِ چهار میدانِ گوشهٔ مربع‌های نصف‌شده می‌باشد.
برای هر مربعِ نصف‌شده، میدانِ گوشه برابرِ $\frac{\phi_P}{2}$ است (با توجه به نتایجِ قسمتِ قبل) پس داریم که

$$\phi_C = 4\phi_{P\ \text{مربع کوچک}} = 4\frac{\phi_P}{2} = 2\phi_P$$