امتحانِ مکانیکِ آماری و اپتیک

۱ دوقطبیِ پیوسته

فرض کنید یک آهن‌ربای کوچک داریم که بردارِ دوقطبیِ آن (که اندازهٔ ثابتی دارد ولی جهتِ آن می‌تواند تغییر کند) را با بردار $\vec{m}$ نشان می‌دهیم.

این آهن‌ربا در میدانِ مغناطیسیِ ثابتِ $\vec{B}$ قرار گرفته‌است، می‌دانیم در این شرایط مقدارِ انرژیِ سیستم برابرِ

$$E = -\vec{m}\cdot\vec{B}$$

خواهد بود. همچنین فرض کنید دمای این آهن‌ربا برابرِ T است

همچنین می‌دانیم که با آنسانبلِ کانونیک به شکلِ پیوسته، تابعِ پارش

$$Z = \int_{\text{فضای حالت}} e^{-\frac{E(s)}{k_B T}}\mathrm{d}s$$

است که در آن s پارامتر یا پارامترهایی‌ست که حالتِ سیستم را مشخص می‌کند.

اول. تابع پارش را برای یک آهن‌ربا حساب کنید.
(توجه کنید که تابعِ پارش می‌تواند تابعِ $\vec{B}$ و k_B و T و «اندازهٔ» $\vec{m}$ یا به عبارتی $|\vec{m}|$ باشد.)
(همچنین توجه کنید که تابعِ پارش بی‌بعد است.)
پاسخ:

می‌دانیم که حالت‌های سیستم مربوط به جهت‌گیریِ فضاییِ $\vec{m}$ است، پس برای محاسبهٔ انتگرالِ تابعِ پارش، کافی‌ست روی سطحِ کره انتگرال بگیریم که به شکلِ زیر خواهد بود

$$Z = \int_0^{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} e^{-\frac{\vec{m}\cdot\vec{B}}{k_B T}}|\vec{m}|^2\sin\theta\mathrm{d}\phi\mathrm{d}\theta$$

$$Z = \int_0^{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} e^{-\frac{|\vec{m}||\vec{B}|\cos\theta}{k_B T}}|\vec{m}|^2\sin\theta\mathrm{d}\phi\mathrm{d}\theta$$

$$Z = \int_0^{\pi} e^{-\frac{|\vec{m}||\vec{B}|\cos\theta}{k_B T}}2\pi|\vec{m}|^2\sin\theta\mathrm{d}\theta$$

حالا با تغییر متغیر

$$u = e^{-\frac{|\vec{m}||\vec{B}|\cos\theta}{k_B T}} \to \mathrm{d}u = e^{-\frac{|\vec{m}||\vec{B}|\cos\theta}{k_B T}}\frac{|\vec{m}||\vec{B}|\sin\theta}{k_B T}\mathrm{d}\theta$$

$$Z = \int_{e^{-\frac{|\vec{m}||\vec{B}|}{k_B T}}}^{e^{\frac{|\vec{m}||\vec{B}|}{k_B T}}} \mathrm{d}u \frac{2\pi k_B T|\vec{m}|}{|\vec{B}|} = \frac{4\pi k_B T|\vec{m}|}{|\vec{B}|} \sinh\left(\frac{|\vec{m}||\vec{B}|}{k_B T}\right)$$

دوم. حالا فرض کنید که N آهن‌ربا داریم، با توجه به استقلالِ آهن‌رباها از هم، مقدارِ تابعِ پارش سیستمی با N آهن‌ربا چه مقدار خواهد بود؟

پاسخ:

می‌دانیم که برای چندپدیدهٔ مستقل، توابعِ پارش در هم ضرب می‌شوند، پس

$$Z = \left(\frac{4\pi k_B T|\vec{m}|}{|\vec{B}|} \sinh\left(\frac{|\vec{m}||\vec{B}|}{k_B T}\right)\right)^N$$

۲ آینهٔ کانونی

(این مسئله دوبعدی‌ست)

دسته‌ای پرتوی موازی با محورِ y به آینه‌ای می‌تابند که به شکلِ $f(x)$ می‌تابد. همهٔ پرتوها پس از برخورد به آینه دقیقاً از نقطهٔ $(0,a)$ می‌گذرند. (یا به عبارتی در آن نقطه جمع می‌شوند). تابعِ $f(x)$ را بیابید به طوری که

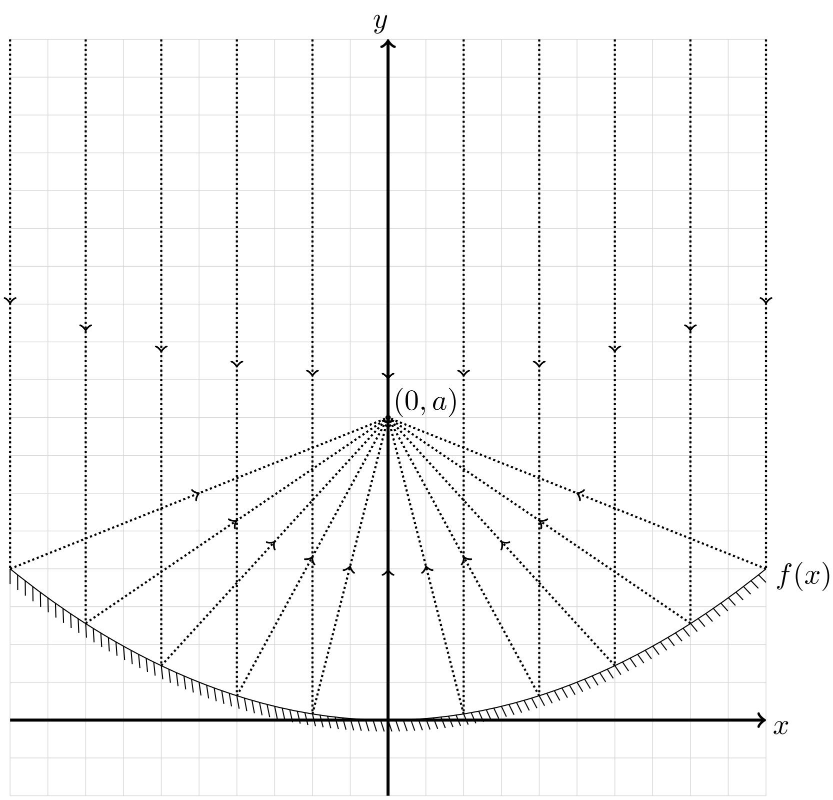
$$f(0) = 0$$

(توجه کنید که در این مسئله از هیچ تقریبی استفاده نکنید)

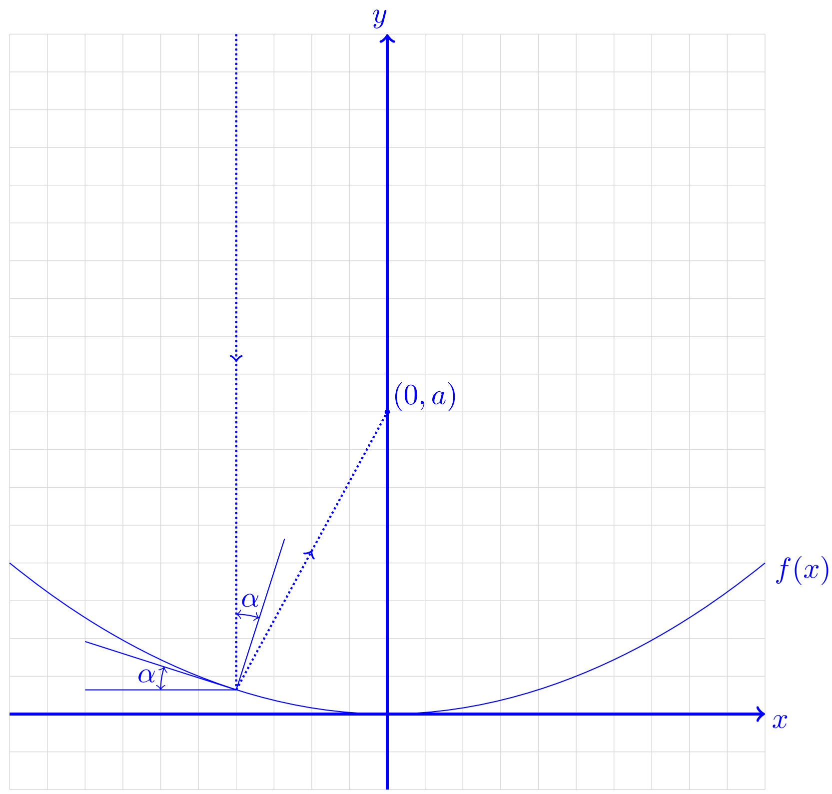
راهنماییِ اول:

$$\tan(2x) = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$$

راهنماییِ دوم: اگر به معادلهٔ دیفرانسیلی برخورد کردید احتمالاً می‌توانید جوابِ αx^p را در آن بیاندازید.



پاسخ:
برای پرتویی که در ابتدا طولی برابرِ x دارد داریم



$$\tan\alpha = f'(x)$$

و همچنین بازهم از روی شکل

$$\tan(2\alpha) = \frac{x}{a-f(x)}$$

با توجه به اتحادِ ذکر شده

$$\rightarrow tan(2\alpha) = \frac{2f'(x)}{1-f'(x)^2} = \frac{x}{a-f(x)}$$

$$\rightarrow 2af'(x) - 2f'(x)f(x) = x - xf'(x)^2$$

$$\rightarrow 2pa\alpha x^{p-1} - 2p\alpha^2 x^{2p-1} = x - p^2\alpha^2 x^{2p-1}$$

$$\rightarrow \begin{cases} p = 2 \\ \alpha = \frac{1}{4a} \end{cases}$$

$$\rightarrow f(x) = \frac{x^2}{4a}$$