امتحانِ ترمودینامیک و مکانیکِ آماری

۱ مسائل

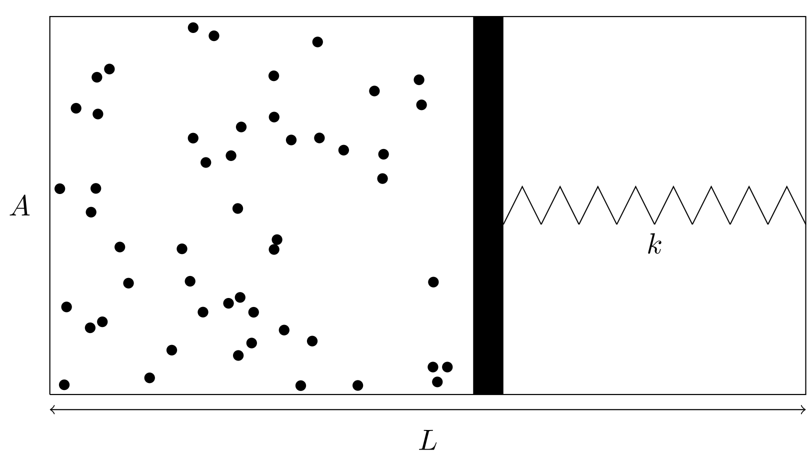
۱.۱ گاز کامل

۱.۱.۱ گاز و فنر

یک سیستم بسته متشکل از دوبخش وجود دارد، در سمت راست یک فنر و در سمت چپ گاز تک‌اتمیِ ایده‌آلی (N ذره) وجود دارد. بینِ این دوبخش پیستونی قرار گرفته که آزادانه چپ و راست می‌شود.

سطحِ مقطع جانبیِ جعبه، A و طولِ جعبه L است. از ضخامت پیستون صرف‌نظر کنید. همچنین ضریب سختیِ فنر برابر K خواهد بود. طولِ آزادِ این‌فنر نیز برابر همان L است.

انرژیِ سیستم را برحسب A، k، N، L و T بنویسید. سپس ظرفیت گرمایی ویژهٔ سیستم را به دست آورید.



پاسخ:
می‌دانیم که فشار دوطرف برابر است پس اگر فنر طولی برابر x دارد

$$PA = (L - x)k$$

و از طرفی

$$PA(L - x) = Nk_BT$$
$$\rightarrow Nk_BT = (L - x)^2 k$$

حالا برای انرژی داریم که

$$E_{\text{total}} = E_{\text{فنر}} + E_{\text{گاز}}$$

$$E_{\text{total}} = \frac{1}{2}k(L - x)^2 + \frac{3}{2}Nk_BT = 2Nk_BT$$

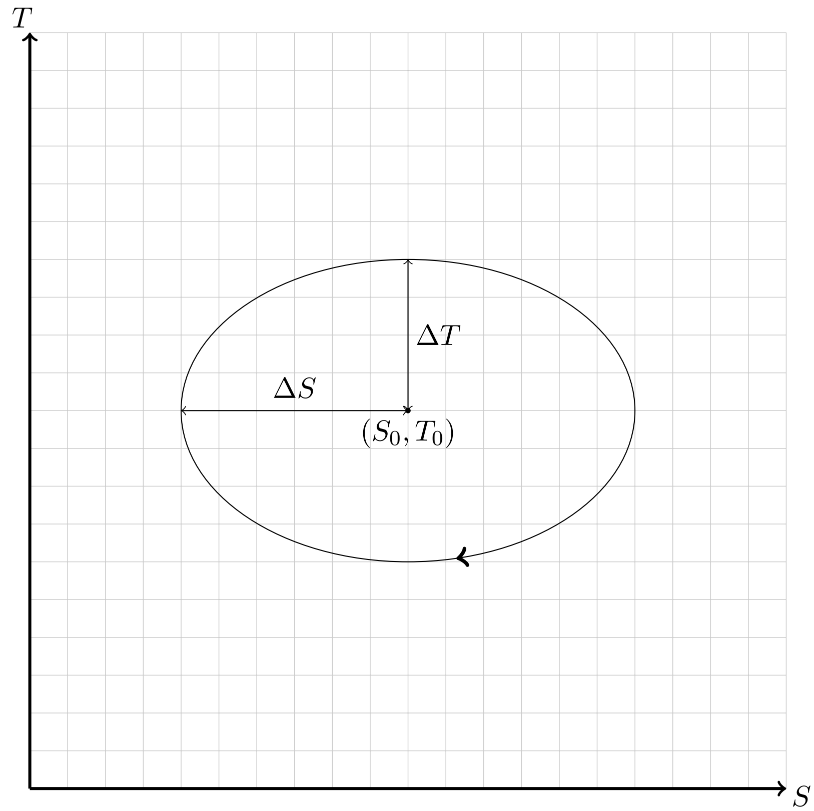
و در ادامه

$$C = \frac{\partial E}{\partial T} = 2Nk_B$$

۲.۱.۱ بازهم چرخهٔ گرد

(حواستان باشد این سؤال با سؤال تمرین متفاوت است) چرخه‌ای ساخته‌ایم که در نمودارِ $\underline{T-S}$ به شکل یک بیضی‌ای به مرکز (S_0, T_0) و به شعاع‌های ΔS و ΔT است.

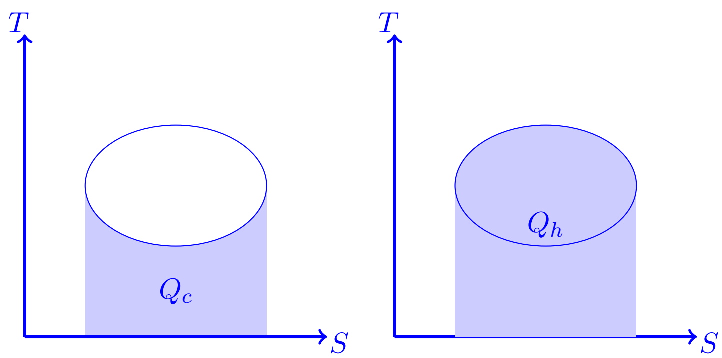
ابتدا بگویید در کدام‌یک از بخش‌های مسیر $đQ$مثبت و در کدام بخش‌ها منفی‌ست. سپس بازده آن را حساب کنید.



پاسخ:
می‌دانیم که $đQ$برابر است با $T\mathrm{d}S$ و ازآن‌جا که $T > 0$ پس، در نیمهٔ پایینیِ بیضی که جهت حرکت به سمتِ کاهشِ S یعنی $\mathrm{d}S$ منفی‌ست است، فرایندِ سرد شدن (گرماده) و در نیمهٔ بالایی گرماگیر است.
می‌دانیم که

$$\int đQ = \int T\mathrm{d}S = T - S \text{ سطح زیر نمودار}$$

برروی نمودار می‌بینیم که



پس، کار که برابرِ $Q_h - Q_c$ است، اندازهٔ آن برابرِ مساحتِ بیضی و برابرِ $\Delta S \Delta T \pi$ است و همچنین Q_h نیز برابرِ مجموعِ مساحتِ یک نیم‌بیضی و یک مستطیل است که می‌شود

$$Q_h = \frac{\Delta S \Delta T \pi}{2} + 2\Delta S T_0$$

حالا بازدهِ چرخه برابر می‌شود با

$$\eta = \frac{W}{Q_h} = \frac{\Delta S \Delta T \pi}{\frac{\Delta S \Delta T \pi}{2} + 2\Delta S T_0} = \frac{\Delta T \pi}{\frac{\Delta T \pi}{2} + 2T_0}$$

۳.۱.۱ نوسان‌گرها

قسمت اول: فرض کنید یک سیستم متشکل از N نوسان‌گرِ کوچک داریم که برای هرکدام انرژی مقدار گسسته‌ای دارد. این مقدار می‌تواند $h\nu$ یا $2h\nu$ یا $3h\nu$ ... همین‌طور تا بی‌نهایت باشد. اگر انرژیِ سیستم E باشد (که ضریبی از $h\nu$ است)، $\ln\Omega$ را حساب کنید.

(راهنمایی: جواب معادلهٔ سیاله $x_1 + x_2 + \ldots x_k = n \mid x_i \in \mathbb{N}$ به شکل $\binom{n-1}{k-1}$ است)

(حتماً تقریب بزنید و درنظر بگیرید که $N \gg 1$ و $E \gg h\nu$ و حتی $\frac{E}{h\nu} \gg N$. ولی حواستان باشد خیلی تقریب نزنید که پارامترها حذف نشوند.)

قسمت دوم: یکی از این نوسان‌گرها را مشخص کرده‌ایم، می‌خواهیم انرژیِ نوسان‌گرِ موردنظر برابرِ $mh\nu$ باشد. مقدارِ $\ln\Omega$ با این شرط چقدر خواهد شد؟

(راهنمایی اول: این مشابهِ حالتی‌ست که انگار یک نوسان‌گر کم‌تر داریم و مقدار $mh\nu$ کم‌تر انرژی برای تقسیم داریم، یعنی اگر جواب قسمت قبل را داشته‌باشیم $\Omega(E - mh\nu, N-1)$ پاسخ این قسمت است)

(راهنمایی دوم: این پاسخ را با تقریب به دست آورید و توجه کنید که $\frac{1}{N} \ll \frac{mh\nu}{E} \ll 1$)

قسمت سوم: احتمالِ این‌که انرژی نوسان‌گر مذکور برابر $mh\nu$ باشد را به دست آورید.

پاسخ:
می‌دانیم انرژی کل سیستم برابر E است. این انرژی $\frac{E}{h\nu}$ واحد است که این‌تعداد واحد را می‌خواهیم بینِ N نوسان‌گر تقسیم کنیم و به هر نوسان‌گر حداقل یک واحد برسد.
پس خواهیم داشت

$$\Omega = \binom{\frac{E}{h\nu}}{N} = \frac{(\frac{E}{h\nu})!}{N!(\frac{E}{h\nu} - N)!}$$

$$\ln \Omega = \ln\left(\frac{E}{h\nu}\right)! - \ln N! - \ln\left(\frac{E}{h\nu} - N\right)!$$

با تقریب استرلینگ

$$\ln \Omega \simeq \frac{E}{h\nu} \ln\left(\frac{E}{h\nu}\right) - \frac{E}{h\nu} - N \ln N + N - (\frac{E}{h\nu} - N) \ln\left(\frac{E}{h\nu} - N\right) + (\frac{E}{h\nu} - N)$$

$$\ln \Omega \simeq \frac{E}{h\nu} \ln\left(\frac{E}{h\nu}\right) - N \ln N - (\frac{E}{h\nu} - N) \ln\left(\frac{E}{h\nu} - N\right)$$

$$\ln \Omega \simeq \frac{E}{h\nu} \ln\left(\frac{E}{h\nu}\right) - N \ln N - (\frac{E}{h\nu} - N) \left(\ln \frac{E}{h\nu} + \ln\left(1 - \frac{h\nu N}{E}\right)\right)$$

$$\ln \Omega \simeq -N \ln N + N \ln \frac{E}{h\nu} + N = N(\ln \frac{E}{h\nu} - \ln N + 1)$$

قسمت دوم:
اگر فرض بگیریم انرژی یکی از نوسان‌گرها مشخص و برابر $mh\nu$ است

$$\ln \Omega' \simeq (N-1)(\ln \frac{E - mh\nu}{h\nu} - \ln (N-1) + 1)$$

با ساده‌سازی با توجه به تقریب

$$\ln \Omega' \simeq N(\ln \frac{E}{h\nu} - \frac{mh\nu}{E} - \ln N + 1)$$

قسمت سوم:

$$P = \frac{\Omega'}{\Omega} = e^{\ln \Omega' - \ln \Omega} = e^{-\frac{Nmh\nu}{E}}$$