ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 2, с. 169–178

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.925

О СУЩЕСТВОВАНИИ ДВУХТОЧЕЧНО-КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ ВОЗМУЩЁННОЙ РЕЛЕЙНОЙ СИСТЕМЫ С ГИСТЕРЕЗИСОМ

© 2021 г. В. В. Евстафьева

Рассматривается система обыкновенных дифференциальных уравнений n-го порядка, правая часть которой представляет собой сумму линейной с постоянной матрицей функции от решения, существенной нелинейности типа реле с гистерезисом и возмущающей непрерывной периодической функции. Матрица линейной функции имеет только вещественные простые ненулевые собственные числа, среди которых по крайней мере одно положительное. Изучается вопрос о существовании у таких систем непрерывных решений с двумя точками переключения в фазовом пространстве (двухточечно-колебательные решения), при этом возвращение решения в каждую из этих точек происходит за время, которое в целое число раз меньше периода возмущающей функции или равно ему. Установлено достаточное условие отсутствия таких решений и доказана теорема, дающая достаточные условия существования двухточечно-колебательного решения с временем возврата, равным периоду возмущающей функции. Приведён подтверждающий пример.

DOI: 10.31857/S0374064121020047

Введение. Постановка задачи. Системы с нелинейностями типа реле являются существенно нелинейными системами с разрывными правыми частями (относительно термина “существенная нелинейность” см. [1, с. 45]). Исследования таких систем, в частности систем с гистерезисом, представляют не только теоретический, но и прикладной интерес и проводятся, начиная с середины прошлого века. Из последних работ в данном направлении отметим работы [2–11].

В приложениях часто встречаются периодические внешние возмущения, которые в существенно нелинейных системах влияют на наличие у возмущённых систем периодических решений и их период. Известно [12], что в случае периодического внешнего возмущения в нелинейных системах могут существовать три типа периодических решений: во-первых, основные решения с периодом, равным периоду возмущения (гармонические колебания с основной частотой, совпадающей с частотой внешней силы); во-вторых, сопутствующие им решения с периодами, кратными периоду возмущения (субгармонические колебания с частотой, в целое число раз меньшей основной частоты); и, в-третьих, решения, период которых в целое число раз меньше периода возмущения (супергармонические колебания с частотой, кратной основной частоте).

Первые два типа решений (гармонические и субгармонические колебания) исследовались в работах [2, 3, 6–11]. В них в качестве возмущающей функции рассматривались функция синуса и укороченный ряд Фурье (сумма константы и двух функций синуса, периоды которых различны, но соизмеримы). В [2, 3] доказано существование периодических решений в случае, когда среди ненулевых вещественных собственных чисел матрицы системы по крайней мере одно является положительным. В [6] рассмотрена система с гурвицевой матрицей. В работе [7] исследован случай комплексных собственных чисел матрицы системы, а в [8, 9] – случай вещественных ненулевых кратных собственных чисел. Случай нулевого собственного числа матрицы системы изучен в работе [10]. В указанных работах исследовалось двухпозиционное реле. Трёхпозиционное реле, которое также часто используется на практике, рассматривалось в [11].

В данной работе в случае двухпозиционного реле рассматривается вопрос о существовании у возмущённой системы одного специального типа гармонических колебаний.

Исследуется n-мерная система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{Y} = AY + BF(\sigma) + Kf(t), \quad \sigma = (C, Y). \tag{1}$$

Здесь $n \times n$-матрица A и векторы $B = (b_1, \ldots, b_n)^{\text{т}}$, $K = (k_1, \ldots, k_n)^{\text{т}}$ являются вещественными и не зависят от времени (здесь и ниже символом т обозначается операция транспонирования), Y – вектор состояний системы. Вектор $C = (c_1, \ldots, c_n)^{\text{т}}$ определяет обратную связь в системе, является вещественным и постоянным. Функция $F(\sigma)$ представляет собой неидеальное двухпозиционное реле с двумя пороговыми числами ℓ_1, ℓ_2 $(\ell_1 \neq \ell_2)$, двумя выходными числами m_1, m_2 $(m_1 \neq m_2)$, где ℓ_1, ℓ_2, m_1, m_2 – вещественные числа. Для определённости считаем, что $\ell_1 < \ell_2$ и $m_1 < m_2$. Функция $F(\sigma(t))$ определена при непрерывном входе $\sigma(t)$ для $t \geqslant 0$ в классе кусочно-непрерывных функций и задаётся в соответствии с [13] следующим образом: из неравенства $\sigma(t) \leqslant \ell_1$ следует равенство $F(\sigma) = m_1$, из неравенства $\sigma(t) \geqslant \ell_2$ следует равенство $F(\sigma) = m_2$, а из неравенств $\ell_1 < \sigma(t) < \ell_2$ $(t_1 < t \leqslant t_2)$ – равенство $F(\sigma(t_1)) = F(\sigma(t_2))$. Другими словами, $F(\sigma(t))$ принимает постоянное значение на замкнутом промежутке $[t_1, t_2]$, если либо $F(\sigma(t_1)) = m_1$ и $\sigma(t) < \ell_2$ при $t \in [t_1, t_2]$, либо $F(\sigma(t_1)) = m_2$ и $\sigma(t) > \ell_1$ при $t \in [t_1, t_2]$. Петля гистерезиса на плоскости $(\sigma, F(\sigma(t)))$ обегается против хода часовой стрелки. Возмущающая функция $f(t)$ принадлежит классу непрерывных T-периодических функций и имеет вид

$$f(t) = f_0 + f_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + f_2 \sin(2\omega t + \varphi_2), \tag{2}$$

где f_0, f_1, f_2, φ_1, φ_2 – вещественные постоянные, причём f_0, f_1 и f_2 ненулевые. Период возмущающей функции равен $T = 2\pi/\omega$ $(\omega > 0)$.

В данной работе используем каноническое преобразование системы (1) и специальный подход к выбору её параметров, при которых существуют непрерывные решения $Y(t)$, $t \geqslant 0$, с двумя точками переключения в фазовом пространстве (двухточечно-колебательные решения), и при этом возвращение изображающей точки решения в каждую из точек переключения происходит за время T/k, где $k = \text{fix} \in \mathbb{N}$. Под *точкой переключения* понимается такое состояние системы, при котором аргумент $\sigma(t) = (C, Y(t))$ релейной функции $F(\sigma(t))$ достигает одного из пороговых чисел, а значит, релейная функция при этом меняет значение выходного числа. Точки переключения принадлежат гиперплоскостям вида $\sigma = \ell_\kappa$ $(\kappa = 1, 2)$, которые далее в работе называем *гиперплоскостями переключения*. В точках переключения происходит "сшивание" по непрерывности траекторий изображающей точки решения $Y(t)$ в фазовом пространстве в силу систем

$$\dot{Y} = AY + Bm_\mu + Kf(t), \quad \mu = 1, 2. \tag{3}$$

Для аналитического представления решения системы (1) используем форму Коши

$$Y(t) = e^{A(t-t_0)}Y(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} e^{-A(\tau - t)}(Bm_\mu + Kf(\tau))\, d\tau, \quad \mu = 1, 2, \tag{4}$$

где t_0 – начальный момент времени.

Далее через L_κ $(\kappa = 1, 2)$ обозначаем гиперплоскости переключения. Дадим

Определение 1. Если в некоторый момент времени t' изображающая точка принадлежит гиперплоскости L_κ $(\kappa = 1, 2)$, то наименьший момент времени $t'' > t'$, в который изображающая точка принадлежит гиперплоскости $L_{3-\kappa}$, назовём *моментом первой встречи* изображающей точки с гиперплоскостью $L_{3-\kappa}$.

Сформулируем теперь основное в работе

Определение 2. Решение $Y(\cdot)$ назовём *двухточечно-колебательным с временем возврата* Δ *на гиперплоскости*, если существуют точки $Y^\kappa \in L_\kappa$ $(\kappa = 1, 2)$ такие, что в моменты первой встречи изображающей точки решения с гиперплоскостью L_κ изображающая точка попадает в точку Y^κ, а сами моменты первой встречи с каждой из гиперплоскостей периодичны с периодом Δ.

В дальнейшем такое решение будем для краткости называть *двухточечно-колебательным с временем возврата* Δ.

Ставится задача о достаточных условиях, при выполнении которых система (1) имеет двухточечно-колебательное решение с временем возврата T/k. Согласно определению 2 искомое решение $Y(\cdot)$ удовлетворяет условию T/k-периодической возвращаемости в точки переключения Y^1 и Y^2 (где $(C,Y^\kappa)=\ell_\kappa,\ \kappa=1,2$), т.е. $Y^\kappa=Y(t_0+mT/k),\ \kappa=1,2,\ m\in\in\mathbb{Z}_+\equiv\mathbb{N}\bigcup\{0\}$. Несложно видеть, что для системы (1) двухточечно-колебательное решение с временем возврата T является T-периодическим.

Итак, предположим, что существует двухточечно-колебательное решение $Y(\cdot)$ с временем T/k возврата на гиперплоскости переключения, а его поведение удовлетворяет следующим условиям. Изображающая точка решения $Y(\cdot)$ системы (1) начинает своё движение в точке Y^1 на гиперплоскости L_1 в момент времени $t_0=0$, движется в силу системы (3) при $m_\mu=m_1$ и в момент $t=t_1$ $(t_1<T/k)$ первой встречи с гиперплоскостью L_2 попадает в точку Y^2. Затем она продолжает своё движение в силу системы (3) при $m_\mu=m_2$ и в момент её первой встречи (который равен T/k) с гиперплоскостью L_1 возвращается в точку Y^1, и т.д.: изображающая точка решения движется между точками Y^1 и Y^2, попадая попеременно в каждую из них через время T/k. При этом обе точки являются точками первой встречи изображающей точки с гиперплоскостями, и от точки Y^1 к точке Y^2 изображающая точка движется в силу системы (1) при $m_\mu=m_1$, а от точки Y^2 к точке Y^1 – в силу системы (1) при $m_\mu==m_2$. Таким образом, согласно предписанной последовательности движения изображающей точки решения системы (1) условие T/k-периодической возвращаемости на гиперплоскости переключения принимает вид $Y(mT/k)=Y^1$ и $Y(t_1+mT/k)=Y^2$, $m\in\mathbb{Z}_+$, при этом на полуинтервалах $[mT/k,t_1+mT/k)$ вектор-функция $Y(t)$ представляет собой решение системы (3) при $m_\mu=m_1$, а на полуинтервалах $[t_1+mT/k,t_1+(m+1)T/k)$ – системы (3) при $m_\mu=m_2$. Кроме того, как отмечалось, $(C,Y^1)=\ell_1$ и $(C,Y^2)=\ell_2$. В соответствии с этими условиями строим вспомогательную систему уравнений.

Пространство параметров системы (1) изучаем на основе исследования этой вспомогательной системы – системы трансцендентных уравнений, которая содержит параметры исходной системы и параметры решения. Под *параметрами решения* понимаем моменты времени и точки переключения.

В работе получены условия разрешимости указанной системы трансцендентных уравнений относительно первого и второго моментов времени переключения реле (теорема 1). Доказана теорема существования T-периодического решения системы (1) с двумя точками переключения за период (теорема 2). Кроме того, получены условия неразрешимости системы трансцендентных уравнений (теорема 3) и при $k\geqslant 1$ установлено достаточное условие, при выполнении которого исходная система не имеет двухточечно-колебательного с временем возврата T/k решения, изображающая точка которого движется в предписанной ей последовательности (следствие к теореме 3).

1. Построение системы трансцендентных уравнений. Предположим, что существует хотя бы одно двухточечно-колебательное с временем возврата T/k решение, изображающая точка которого движется, попадая на гиперплоскости в соответствии с заданной в постановке задачи последовательностью. Используя формулу (4), строим систему трансцендентных уравнений относительно точек переключения Y^1 и Y^2, момента времени первого переключения t_1 и времени возврата T/k. Имеем

$$\ell_1=(C,Y^1),\quad \ell_2=(C,Y^2), \tag{5}$$

где

$$Y^2=e^{At_1}Y^1+\int\limits_0^{t_1}e^{A(t_1-\tau)}(Bm_1+Kf(\tau))\,d\tau,$$

$$Y^1=e^{A(T/k-t_1)}Y^2+\int\limits_{t_1}^{T/k}e^{A(T/k-\tau)}(Bm_2+Kf(\tau))\,d\tau.$$

В общем виде система (5) является достаточно сложной для аналитического исследования, поэтому для возможности её изучения примем некоторые дополнительные предположения.

Пусть выполняются условия обратимости преобразования исходной системы в канонический вид: 1) $\det(B\ AB\ A^2B\ \ldots\ A^{n-1}B) \neq 0$; 2) матрица A имеет простые собственные числа λ_i $(i = \overline{1,n})$. Кроме того, для упрощения выкладок будем считать, что собственные числа являются ненулевыми и вещественными. При этих предположениях после неособого преобразования $Y = SX$ получаем следующий канонический вид системы (1):

$$\dot{X} = A_0X + B_0F(\sigma) + K_0f(t), \quad \sigma = (\Gamma, X), \tag{6}$$

где

$$A_0 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \ldots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad B_0 = S^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \quad K_0 = S^{-1}K = \begin{pmatrix} k_1^0 \\ \vdots \\ k_n^0 \end{pmatrix}, \quad \Gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix}.$$

Компоненты γ_i $(i = \overline{1,n})$ вектора Γ вычисляются по формуле

$$\gamma_i = \frac{-1}{D'(\lambda_i)} \sum_{h=1}^{n} c_h N_h(\lambda_i), \tag{7}$$

где

$$D'(\lambda_i) = \frac{dD(p)}{dp}\bigg|_{p=\lambda_i}, \quad D(p) = |A - pE|, \quad N_h(p) = \sum_{i=1}^{n} b_i D_{ih}(p).$$

Здесь λ_i – корни характеристического уравнения $D(p) = 0$, E – единичная матрица, $D_{ih}(p)$ – алгебраическое дополнение элемента a_{ih} в определителе $D(p)$, стоящего на пересечении i-й строки и h-го столбца, b_i – компоненты вектора B, c_h – компоненты вектора C, p – некоторый вещественный параметр. Матрица S имеет вид

$$S = -\begin{pmatrix} \dfrac{N_1(\lambda_1)}{D'(\lambda_1)} & \ldots & \dfrac{N_1(\lambda_n)}{D'(\lambda_n)} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{N_n(\lambda_1)}{D'(\lambda_1)} & \ldots & \dfrac{N_n(\lambda_n)}{D'(\lambda_n)} \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Далее полагаем $\gamma_s \neq 0$ и $\gamma_j = 0$, где $j \neq s$.

После канонического преобразования системы (1) при выбранных ограничениях на преобразованный вектор обратной связи Γ система (5) разбивается на подсистему относительно моментов времени переключения и формулы для нахождения точек переключения. Итак, система трансцендентных уравнений относительно t_1 и T/k принимает следующий вид:

$$\ell_2 = \left(\ell_1 + \frac{\gamma_s m_1}{\lambda_s}\right)e^{\lambda_s t_1} - \frac{\gamma_s m_1}{\lambda_s} + \gamma_s k_s^0 \int\limits_0^{t_1} e^{\lambda_s(t_1-\tau)} f(\tau)\, d\tau,$$

$$\ell_1 = \left(\ell_2 + \frac{\gamma_s m_2}{\lambda_s}\right)e^{\lambda_s(T/k-t_1)} - \frac{\gamma_s m_2}{\lambda_s} + \gamma_s k_s^0 \int\limits_{t_1}^{T/k} e^{\lambda_s(T/k-\tau)} f(\tau)\, d\tau. \tag{9}$$

Точки переключения $X^1 = (x_1^1, \ldots, x_n^1)^{\mathrm{т}}$, $X^2 = (x_1^2, \ldots, x_n^2)^{\mathrm{т}}$ преобразованной системы (6) принадлежат гиперплоскостям переключения $\sigma = \ell_\mu$ $(\mu = 1, 2)$ и определяются по следующим формулам:

$$x_s^1 = \ell_1/\gamma_s, \quad x_s^2 = \ell_2/\gamma_s, \tag{10}$$

$$
x_j^1 = \frac{e^{\lambda_j T/k}}{1 - e^{\lambda_j T/k}} \left(m_1 \int\limits_0^{t_1} e^{-\lambda_j \tau}\, d\tau + m_2 \int\limits_{t_1}^{T/k} e^{-\lambda_j \tau}\, d\tau + k_j^0 \int\limits_0^{T/k} e^{-\lambda_j \tau} f(\tau)\, d\tau \right),
$$

$$
x_j^2 = \frac{e^{\lambda_j t_1}}{1 - e^{\lambda_j T/k}} \left(\int\limits_{t_1}^{T/k} e^{-\lambda_j (T/k - \tau)} (m_2 + k_j^0 f(\tau))\, d\tau + \int\limits_0^{t_1} e^{-\lambda_j \tau} (m_1 + k_j^0 f(\tau))\, d\tau \right),
$$

$$
j = \overline{1, n}, \quad j \neq s. \tag{11}
$$

Равенства (11) получаются в результате решения линейной алгебраической системы

$$
x_j^2 = \left(x_j^1 + \frac{m_1}{\lambda_j} \right) e^{\lambda_j t_1} - \frac{m_1}{\lambda_j} + k_j^0 e^{\lambda_j t_1} \int\limits_0^{t_1} e^{-\lambda_j \tau} f(\tau)\, d\tau,
$$

$$
x_j^1 = \left(x_j^2 + \frac{m_2}{\lambda_j} \right) e^{\lambda_j (T/k - t_1)} - \frac{m_2}{\lambda_j} + k_j^0 e^{\lambda_j T/k} \int\limits_{t_1}^{T/k} e^{-\lambda_j \tau} f(\tau)\, d\tau
$$

относительно неизвестных $x_j^1 = x_j(T/k)$ и $x_j^2 = x_j(t_1)$, $j = \overline{1, n}$, $j \neq s$, поскольку определитель этой системы

$$
\begin{vmatrix} e^{\lambda_j t_1} & -1 \\ 1 & -e^{\lambda_j (T/k - t_1)} \end{vmatrix} = -e^{\lambda_j T/k} + 1
$$

отличен от нуля.

2. Основные результаты. Положим

$$
\delta_1 = \operatorname{arctg} \frac{\omega}{\lambda_s}, \quad \delta_2 = \operatorname{arctg} \frac{2\omega}{\lambda_s}, \quad H = \gamma_s k_s^0 \left(\frac{f_1 \sin(\varphi_1 + \delta_1)}{\sqrt{\lambda_s^2 + \omega^2}} + \frac{f_2 \sin(\varphi_2 + \delta_2)}{\sqrt{\lambda_s^2 + 4\omega^2}} \right).
$$

Для упрощения записи также обозначим

$$
H_s(t) = \gamma_s k_s^0 \left(\frac{f_1 \sin(t + \varphi_1 + \delta_1)}{\sqrt{\lambda_s^2 + \omega^2}} + \frac{f_2 \sin(2t + \varphi_2 + \delta_2)}{\sqrt{\lambda_s^2 + 4\omega^2}} \right), \quad t \in \mathbb{R},
$$

в частности, $H_s(0) = H$, и

$$
L = -\left(\frac{\lambda_s}{\gamma_s} \ell_1 + k_s^0 f_0 \right) + \frac{\lambda_s (H_s(\omega T/k) - H e^{\lambda_s T/k})}{\gamma_s (e^{\lambda_s T/k} - 1)}.
$$

Условия разрешимости системы (9) содержит

Теорема 1. *Пусть* $\gamma_s \neq 0$, $\lambda_s > 0$ *и выполняются следующие условия:*

1) при некотором $k \in \mathbb{N}$ *имеют место неравенства*

$$
m_2 - m_1 e^{\lambda_s T/k} + (e^{\lambda_s T/k} - 1) L > 0, \tag{12}
$$

$$
m_1 < L < m_2 \tag{13}
$$

и равенство

$$
t_1 = \frac{T}{k} + \frac{1}{\lambda_s} \ln \frac{m_2 - m_1}{(e^{\lambda_s T/k} - 1) L + m_2 - m_1 e^{\lambda_s T/k}}; \tag{14}
$$

2) определяемая равенством (14) величина t_1 *удовлетворяет первому уравнению системы (9).*

Тогда система трансцендентных уравнений (9) имеет решение $(t_1, T/k)$, *где* $t_1 \in (0, T/k)$.

Доказательство. Система уравнений (9) при условии $\lambda_s > 0$ принимает вид

$$\ell_2 = (\ell_1 + \lambda_s^{-1}\gamma_s(m_1 + k_s^0 f_0) + H)e^{\lambda_s t_1} - \lambda_s^{-1}\gamma_s(m_1 + k_s^0 f_0) - H_s(\omega t_1),$$

$$\ell_1 = (\ell_2 + \lambda_s^{-1}\gamma_s(m_2 + k_s^0 f_0) + H_s(\omega t_1))e^{\lambda_s(T/k - t_1)} - \lambda_s^{-1}\gamma_s(m_2 + k_s^0 f_0) - H_s(\omega T/k). \qquad (15)$$

Сложив уравнения системы (15), получим равенство

$$(m_2 - m_1)e^{\lambda_s(T/k - t_1)} = (e^{\lambda_s T/k} - 1)L + m_2 - m_1 e^{\lambda_s T/k}, \qquad (16)$$

из которого однозначно находим величину t_1, определяемую равенством (14). Следовательно, если при заданном k существует решение системы (9), то оно единственно. В (14) стоящее под логарифмом выражение должно быть положительным. Учитывая предположение $m_2 > m_1$, получаем неравенство (12). Величина t_1 должна принадлежать промежутку $(0, T/k)$. Согласно условию теоремы 1 имеем $\lambda_s > 0$. Поэтому следует потребовать выполнение неравенств

$$m_2 - m_1 < (e^{\lambda_s T/k} - 1)L + m_2 - m_1 e^{\lambda_s T/k},$$

$$m_2 - m_1 > (e^{\lambda_s T/k} - 1)e^{-\lambda_s T/k}L + m_2 e^{-\lambda_s T/k} - m_1,$$

откуда получаем двойное неравенство (13).

Теперь докажем обратное: если выполнены предположения 1) и 2) теоремы 1, то система (9) имеет решение $(t_1, T/k)$, где $t_1 \in (0, T/k)$. Действительно, t_1 удовлетворяет уравнению (16) и первому уравнению системы (9), а значит, и равносильной системе (15). Из неравенств (12), (13) условия 1) теоремы вытекает, что точка t_1 принадлежит промежутку $(0, T/k)$. Теорема доказана.

Докажем теорему, дающую достаточные условия существования двухточечно-колебательных с временем возврата T решений системы (1) (в частности, такие решения системы (1), как отмечено выше, являются T-периодическими).

Теорема 2. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) внешнее возмущение $f(t)$ системы (1) является T-периодической функцией вида (2);

2) система (1) полностью управляема по отношению ко входу $F(\sigma)$, и матрица A имеет простые ненулевые вещественные собственные числа, среди которых по крайней мере одно положительное, пусть $\lambda_s > 0$;

3) система (1) приведена неособым преобразованием $Y = SX$ с матрицей S вида (8) к каноническому виду (6), в котором

$$\sum_{h=1}^{n} c_h N_h(\lambda_s) \neq 0, \quad \sum_{h=1}^{n} c_h N_h(\lambda_j) = 0, \quad j = 1, \ldots, s-1, s+1, \ldots, n, \qquad (17)$$

где c_h – компоненты вектора обратной связи C, N_h – определитель матрицы A, в которой h-й столбец заменён вектором B, s – некоторый индекс, принимающий значение от единицы до n;

4) система уравнений (9), параметры которой удовлетворяют условиям теоремы 1, имеет решение $(t_1, T/k)$ при $k = 1$ (т.е. t_1 и T – первый и второй моменты времени переключения соответственно).

Тогда существует T-периодическое решение системы (1) с двумя точками Y^1, Y^2 переключения за период на гиперплоскостях $(C, Y^\kappa) = \ell_\kappa$ $(\kappa = 1, 2)$, где $Y^1 = SX^1$, $Y^2 = SX^2$, а координаты точек X^1, X^2 выражаются по формулам (10) и (11) при $k = 1$.

Доказательство. Рассматривается двухточечно-колебательное с временем возврата T/k решение системы (1) в классе непрерывных функций. По построению для обеспечения непрерывности решения $Y(t)$ (согласно методу припасовывания) точки переключения совпадают с точками "сшивания" траекторий, построенных в силу систем (3). Поскольку t_1 – момент времени первого переключения изображающей точки решения системы, то имеет место условие $0 < t_1 < T/k$. Исходя из необходимых условий существования двухточечно-колебательного решения с заданными параметрами и с учётом заданного в постановке задачи поведения изображающей точки искомого решения, строим систему (5) относительно точек переключения Y^1 и Y^2, момента времени первого переключения t_1 и времени возврата T/k. Для упрощения системы трансцендентных уравнений используем каноническое преобразование исходной системы в соответствии с условием 2) теоремы 2. Система (1) полностью управляема по отношению ко входу $F(\sigma)$, если

$$\det(B\ AB\ A^2B\ \ldots\ A^{n-1}B)\neq 0.$$

Далее предполагаем, что $n-1$ корней уравнения $D(p)=0$ совпадают с $n-1$ корнями уравнения $\sum_{h=1}^n c_hN_h(p)=0$, т.е. имеет место условие (17). Тогда $n-1$ величин γ_i, определяемых по формуле (7), обращаются в нуль, при этом γ_s отлично от нуля, что отражено в условии 3) теоремы 2.

При указанном выборе величин γ_i $(i=\overline{1,n})$ гиперплоскости переключения в фазовом пространстве канонической системы являются ортогональными оси x_s, а каноническая система n-го порядка распадается на системы более низкого порядка, которые могут быть последовательно проинтегрированы, а именно, функция $\sigma(t)=(\Gamma,X(t))=\gamma_sx_s$ определяется из уравнения первого порядка

$$\dot x_s=\lambda_sx_s+F(\sigma)+k_s^0f(t),$$

а решения x_j, где $j=\overline{1,n}$, $j\neq s$, определяются из уравнений

$$\dot x_j=\lambda_jx_j+F(\sigma)+k_j^0f(t).$$

Дифференциальное уравнение

$$\dot\sigma(t)=\lambda_s\sigma(t)+\gamma_s(F(\sigma(t))+k_s^0f(t))$$

относительно функции $\sigma(t)$ имеет общее решение

$$\sigma(t)=\sigma_0e^{\lambda_s(t-t_0)}+\gamma_se^{\lambda_st}\bigg(m_\mu\int\limits_{t_0}^{t}e^{-\lambda_s\tau}\,d\tau+k_s^0\int\limits_{t_0}^{t}e^{-\lambda_s\tau}f(\tau)\,d\tau\bigg),\quad \sigma_0=\sigma(t_0).$$

Начальные и граничные условия удобно записать в развёрнутом виде, в котором отражено поведение изображающей точки решения и условие T/k-периодической возвращаемости на гиперплоскости переключения, а именно, начальное условие $\ell_1=\sigma(\ell_1,0,m_1,0)$ и граничные условия $\ell_2=\sigma(\ell_1,0,m_1,t_1)$, $\ell_1=\sigma(\ell_2,t_1,m_2,T/k)$ (в двух последних равенствах правые части – обозначения для правых частей первого и второго уравнений системы (5)).

Система (5) после канонического преобразования упрощается и принимает вид (9)–(11) в новых переменных. Система трансцендентных уравнений в новых переменных разделяется на систему относительно t_1, T/k и формулы для нахождения точек переключения.

Пусть выполнены условия теоремы 1 для заданного $k\in\mathbb{N}$, тогда система (9) имеет единственное решение $(t_1,T/k)$. Это означает, что на промежутке $(0,T/k)$ нет других моментов времени попадания на гиперплоскость L_2, и изображающая точка решения движется между гиперплоскостями. Далее по формулам (10), (11) однозначно находятся соответствующие точки X^1, X^2. Система трансцендентных уравнений, из которой получены эти формулы, составлена с учётом предписанной последовательности движения изображающей точки решения. Поэтому полученные точки являются точками переключения и принадлежат траектории решения канонической системы на отрезке $[0,T/k]$ при первом обходе петли гистерезиса. Нетрудно заметить, что в силу T-периодичности функции $f(t)$ при последующих обходах петли на отрезках $[mT/k,(m+1)T/k]$, где $m\in\mathbb{N}$, изображающая точка решения достигает каждый раз гиперплоскости $(\Gamma,X)=\ell_\mu$ за один и тот же промежуток времени T/k и возвращается в одну и ту же точку X^μ по одной и той же траектории, если $k=1$. В этом случае $X(t+T)=X(t)$ для любого $t>0$, т.е. решение $X(t)$ является T-периодическим в положительном направлении. Значит, при выполнении условия 1) теоремы 2 двухточечно-колебательное с временем возврата T решение системы (6) является T-периодическим.

Системы (1) и (6) в силу неособого преобразования эквивалентны, поэтому полученные для канонической системы результаты верны и для исходной системы. Таким образом, существует одно T-периодическое решение системы (1) с двумя точками переключения Y^1 и Y^2 за период на гиперплоскостях вида $(C, Y) = \ell_\mu$ $(\mu = 1, 2)$, где $Y^1 = SX^1$, $Y^2 = SX^2$. Теорема доказана.

Отметим, что условия существования у системы (1) двухточечно-колебательных решений с временем возврата T/k при $k > 1$, $k \in \mathbb{N}$, требуют отдельного исследования и дополнительных ограничений на параметры.

Далее приведём условия неразрешимости системы (9).

Введём обозначение

$$\Phi_s(t) = [\ell_1 + \lambda_s^{-1}\gamma_s(m_1 + k_s^0 f_0) + H]e^{\lambda_s t} - [\ell_2 + \lambda_s^{-1}\gamma_s(m_1 + k_s^0 f_0)], \quad t \in \mathbb{R}.$$

Теорема 3. *Пусть* $\gamma_s \neq 0$, $\lambda_s > 0$ *и при некотором* $k \in \mathbb{N}$ *имеют место неравенства*

$$\ell_1 + \lambda_s{}^{-1}\gamma_s(m_1 + k_s^0 f_0) + H < 0, \tag{18}$$

$$H_s(\omega t_{\min}) \geqslant \ell_1 - \ell_2 + H, \tag{19}$$

где $t_{\min}$ – *точка, доставляющая функции* $H_s(\omega t)$ *на отрезке* $[0, T/k]$ *минимальное значение.*

Тогда система трансцендентных уравнений (9) не имеет решения $(t_1, T/k)$, *где* $t_1 \in \in (0, T/k)$.

Доказательство. Исследуем первое уравнение системы (15) относительно $t_1 > 0$. Запишем это уравнение в виде

$$\Phi_s(t_1) = H_s(\omega t_1). \tag{20}$$

Заметим, что в точке $t_1 = 0$ левая часть уравнения (20) меньше его правой части (поскольку $\Phi_s(0) = H + \ell_1 - \ell_2$, $H_s(0) = H$ и $\ell_2 > \ell_1$). Неравенство (18) означает, что коэффициент при экспоненте у функции $\Phi_s(t)$ отрицателен. Значит, функция $\Phi_s(t)$ убывает, а её наибольшее на отрезке $[0, T/k]$ значение равно $\Phi_s(0)$ – правой части неравенства (19). Поэтому при выполнении неравенства (19) уравнение (20) не может иметь положительного решения t_1. Это означает, что система (9) не имеет решения. Теорема доказана.

Из теоремы 3 очевидно вытекает следующее

Следствие. *Пусть выполнены условия 1)–3) теоремы 2. Пусть, кроме того, параметры системы трансцендентных уравнений (9) удовлетворяют условию теоремы 3.*

Тогда система (1) не имеет двухточечно-колебательного с временем возврата T/k *решения, изображающая точка которого начинает своё движение на гиперплоскости* L_1 *и движется согласно предписанной последовательности.*

3. Пример. Пусть внешнее воздействие описывает функция

$$f(t) = 1 + 2\sin(t + \pi/3) + 5\sin(2t)$$

с периодом $T = 2\pi$ (условие 1) теоремы 2).

Рассмотрим систему (1) третьего порядка с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} -13.5 & -12.5 & -43 \\ 5.2 & 4.2 & 17.8 \\ 2.1 & 2.1 & 6.4 \end{pmatrix}$$

и векторами $B = (1, 0, 0)^{\mathrm{т}}$, $K = (12.5, -4.5, -2.5)^{\mathrm{т}}$. Среди собственных чисел матрицы A есть положительное $\lambda_1 = 0.1$ (положим $\lambda_s = \lambda_1$), $\lambda_2 = -1$ и $\lambda_3 = -2$. Векторы B, AB, A^2B являются линейно независимыми, так как

$$\begin{vmatrix} 1 & -13.5 & 26.95 \\ 0 & 5.2 & -10.98 \\ 0 & 2.1 & -3.99 \end{vmatrix} = 2.31 \neq 0.$$

Матрица S преобразования, приводящего матрицу системы к диагональной матрице A_0, имеет вид

$$S = \begin{pmatrix} -5 & -1 & 7 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Здесь $\det S = -1 \neq 0$. Тогда $B_0 = (1,1,1)^{\mathrm{т}}$, $K_0 = (-2,1,0.5)^{\mathrm{т}}$. Условия 2) и 3) теоремы 2 выполнены.

Положим $\Gamma = (-0.14, 0, 0)^{\mathrm{т}}$. Согласно условию 3) теоремы 2 из неоднородной системы линейных алгебраических уравнений, построенной в соответствии с (7), имеем следующие значения параметров вектора обратной связи: $c_1 = -0.14$, $c_2 = -0.14$ и $c_3 = -0.56$.

Обратимся к условию 4) теоремы 2. Сначала проверим условие 1) теоремы 1 и найдём решение системы трансцендентных уравнений (9). Имеем $\delta_1 \approx 1.47$, $\delta_2 \approx 1.52$ и $H \approx 1.02$ (здесь и далее расчёты проведены с точностью 10^{-2}). Пусть $\ell_1 = 0.75$, тогда $L \approx 3.27$. Пусть $k = 1$, $m_1 = -1.11$ и $m_2 = 5.30$. Имеют место неравенства (12), (13), согласно которым $8.89 > 0$ и $-1.11 < 3.27 < 5.30$. Находим $t_1 \approx 1.60$ в соответствии с равенством (14). Условие 2) теоремы 1 имеет место, если $\ell_2 \approx 4.00$. Согласно теореме 1 система трансцендентных уравнений (9) имеет решение $(t_1, T) \approx (1.60, 2\pi)$ при выбранных значениях параметров ℓ_1, ℓ_2, m_1, m_2 и $\gamma_s = \gamma_1$.

Пусть $k = 2$ при тех же значениях параметров. Условие 1) теоремы 1 выполняется. Величина $t_1 \approx 0.33$ не удовлетворяет условию 2) теоремы 1. Однако при $m_2 = 11.39$ величина $t_1 \approx 1.60$ удовлетворяет этому условию, и, следовательно, система (9) имеет решение $(t_1, T/2) \approx (1.60, \pi)$ при значениях параметров, которые отличаются только значением параметра m_2.

В соответствии с условием 4) теоремы 2 для решения (t_1, T) системы (9) рассчитываем точки переключения X^1, X^2 решения канонической системы по формулам (10), (11). Имеем

$$X^1 \approx (-5.36, 4.62, 2.52)^{\mathrm{т}}, \quad X^2 \approx (-28.57, 4.46, 0.77)^{\mathrm{т}}.$$

Далее находим точки переключения Y^1, Y^2 решения исходной системы. Получаем

$$Y^1 \approx (39.82, -13.66, -7.88)^{\mathrm{т}}, \quad Y^2 \approx (-725.67, 265.65, 143.82)^{\mathrm{т}}.$$

Таким образом, в пространстве параметров исходной системы определены значения, которым соответствует T-периодическое решение с двумя точками переключения за период.

На рисунке представлена траектория этого 2π-периодического решения с двумя точками переключения в фазовом пространстве (x_1, x_2, x_3) канонической системы с параметрами $\ell_1 = 0.75$, $m_1 = -1.11$, $m_2 = 5.30$, $\ell_2 \approx 4.00$ и первым моментом времени переключения $t_1 \approx 1.60$. Для построения траектории решения в качестве начальной точки выбрана X^1. Отмечены точки переключения X^1 и X^2 на плоскостях переключения L_1 и L_2 соответственно; эти плоскости ортогональны оси x_1, поскольку первая компонента γ_1 вектора обратной связи Γ ненулевая, причём $-28.57 \leqslant x_1 \leqslant -5.36$.

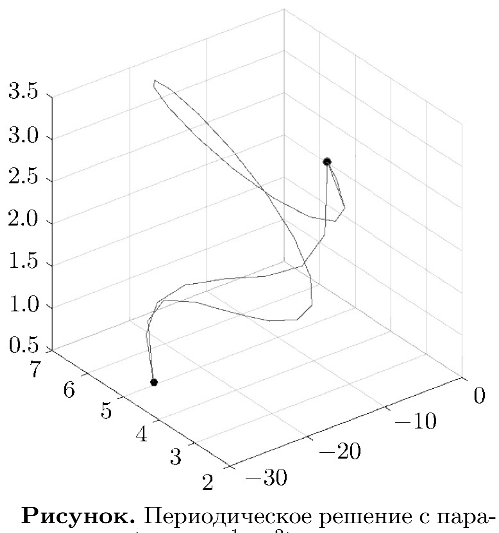

Рисунок. Периодическое решение с параметрами $(t_1, 2\pi, X^1, X^2)$.

Заключение. Для ненулевых простых вещественных собственных чисел матрицы системы (1) доказана теорема существования T-периодического решения с двумя точками переключения за период. Численный пример подтверждает конструктивность условий теоремы и демонстрирует её применение. Найдены условия, при которых система (1) не имеет двухточечно-колебательного с временем возврата T/k решения, изображающая точка которого начинает своё движение на гиперплоскости L_1 и движется по траектории согласно предписанной ей последовательности. Отметим, что предложенный в работе подход можно применить к более широкому, чем рассмотренный, классу систем – к системам, в которых нелинейность представляет собой монотонную функцию неидеального реле.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ким Д.П.* Теория автоматического управления. Т. 2. М., 2004.
2. *Евстафьева В.В.* О необходимых условиях существования периодических решений в динамической системе с разрывной нелинейностью и внешним периодическим воздействием // Уфимск. мат. журн. 2011. Т. 3. № 2. С. 20–27.
3. *Yevstafyeva V.V.* Existence of a unique kT-periodic solution for one class of nonlinear systems // J. Sib. Fed. Univ. Math. & Phys. 2013. V. 6. № 1. P. 136–142.
4. *Visintin A.* Ten issues about hysteresis // Acta Appl. Math. 2014. V. 132. № 1. P. 635–647.
5. *Fang L., Wang J., Zhang Q.* Identification of extended Hammerstein systems with hysteresis-type input nonlinearities described by Preisach model // Nonlin. Dyn. 2015. V. 79. № 2. P. 1257–1273.
6. *Евстафьева В.В.* Об условиях существования двухточечно-колебательного периодического решения в неавтономной релейной системе с гурвицевой матрицей // Автоматика и телемеханика. 2015. № 6. С. 42–56.
7. *Kamachkin A.M., Potapov D.K., Yevstafyeva V.V.* Existence of periodic solutions to automatic control system with relay nonlinearity and sinusoidal external influence // Int. J. Robust Nonlin. Contr. 2017. V. 27. № 2. P. 204–211.
8. *Kamachkin A.M., Potapov D.K., Yevstafyeva V.V.* Existence of subharmonic solutions to a hysteresis system with sinusoidal external influence // Electron. J. Differ. Equat. 2017. № 140. P. 1–10.
9. *Kamachkin A.M., Potapov D.K., Yevstafyeva V.V.* On uniqueness and properties of periodic solution of second-order nonautonomous system with discontinuous nonlinearity // J. Dyn. Contr. Syst. 2017. V. 23. № 4. P. 825–837.
10. *Евстафьева В.В.* Периодические решения системы дифференциальных уравнений с гистерезисной нелинейностью при наличии нулевого собственного числа // Укр. мат. журн. 2018. Т. 70. № 8. С. 1085–1096.
11. *Kamachkin A.M., Potapov D.K., Yevstafyeva V.V.* Existence of periodic modes in automatic control system with a three-position relay // Int. J. Contr. 2020. V. 93. № 4. P. 763–770.
12. *Пановко Я.Г.* Основы прикладной теории колебаний и удара. Л., 1976.
13. *Покровский А.В.* Существование и расчёт устойчивых режимов в релейных системах // Автоматика и телемеханика. 1986. № 4. С. 16–23.

Санкт-Петербургский государственный университет

Поступила в редакцию 06.02.2019 г.
После доработки 11.11.2019 г.
Принята к публикации 13.10.2020 г.