



**UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID**  
**ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA**  
**AERONÁUTICA Y DEL ESPACIO**  
**GRADO EN INGENIERÍA AEROESPACIAL**

**TRABAJO FIN DE GRADO**

**Desarrollo de una Estrategia de Selección de Aglomerados  
para la Transferencia de Deformaciones entre mallas CFD**

**AUTOR: Sergio SIERRA GARRIDO**

**ESPECIALIDAD: Ciencias y Tecnologías Aeroespaciales**

**TUTOR PROFESIONAL: Marta CORDERO GRACIA**

**TUTOR DEL TRABAJO: Mariola GÓMEZ LÓPEZ**

**Junio de 2018**

# Índice general

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>Interpolación global</b>	<b>7</b>
2.1	Planteamiento del problema . . . . .	7
2.2	Resolución del problema . . . . .	9
2.2.1	Esquema de acoplamiento . . . . .	9
2.2.2	Funciones de base radial . . . . .	10
2.2.3	Interpolación . . . . .	10
2.2.4	Influencia de $\rho_f$ en la interpolación . . . . .	11
2.3	Implementación en Fortran . . . . .	13
2.4	Mallas utilizadas . . . . .	17
2.4.1	Perfil Boeing A4 . . . . .	17
2.4.2	Perfil C-09 . . . . .	18
2.4.3	Perfil C-15 . . . . .	19
2.4.4	Perfil C-16 . . . . .	20
2.5	Resultados . . . . .	20
2.5.1	Perfil Boeing A4 . . . . .	21
2.5.2	Perfil C-09 . . . . .	21
2.5.3	Perfil C-15 . . . . .	22
2.5.4	Perfil C-16 . . . . .	22

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	3
<b>3 Calidad de la malla</b>	<b>23</b>
3.1 Elementos triangulares . . . . .	23
3.2 Otros elementos . . . . .	25
3.3 Métricas de calidad . . . . .	26
3.4 Implementación en Fortran . . . . .	27
3.5 Resultados . . . . .	28
3.5.1 Efecto de $\rho_f$ en las funciones <i>Wendland</i> . . . . .	28
3.5.2 Comparación de las funciones <i>Wendland</i> . . . . .	28
3.5.3 Perfil Boeing A4 . . . . .	29
3.5.4 Perfil C-09 . . . . .	32
3.5.5 Perfil C-15 . . . . .	35
3.5.6 Perfil C-16 . . . . .	38
<b>4 Interpolación local</b>	<b>41</b>
4.1 Planteamiento del problema . . . . .	41
4.2 Resolución del problema . . . . .	41
4.2.1 Topología de la malla . . . . .	41
4.2.2 Proceso de deformación . . . . .	42
4.2.3 Funciones de base radial . . . . .	43
4.3 Implementación en Fortran . . . . .	43
4.4 Mallas utilizadas . . . . .	47
4.4.1 Perfil CV-09 . . . . .	47
4.4.2 Perfil CV-15 . . . . .	48
4.4.3 Perfil CV-16 . . . . .	49
4.5 Resultados . . . . .	49

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	<b>4</b>
4.5.1 Perfil CV-09 . . . . .	50
4.5.2 Perfil CV-15 . . . . .	51
4.5.3 Perfil CV-16 . . . . .	52
4.5.4 Tiempo de interpolación . . . . .	52
4.6 Calidad de las mallas obtenidas . . . . .	53
4.6.1 Perfil CV-09 . . . . .	54
4.6.2 Perfil CV-15 . . . . .	57
4.6.3 Perfil CV-16 . . . . .	60
<b>5 Conclusiones</b>	<b>63</b>

# Capítulo 1

## Introducción

La transferencia de deformaciones entre mallas CFD es un problema que aparece cuando se modifica la geometría del objeto estudiado. Para un objeto dado, se utilizan códigos de generación de mallas para crear una malla optimizada en función de la geometría<sup>[1]</sup>. Cuando se produce una modificación en la geometría original, lo ideal sería generar otra malla a partir de la nueva geometría para así poder mantener una buena calidad. Sin embargo, la generación de mallas conlleva un elevado coste computacional por lo que es necesario pensar en otras alternativas con las que se consigan resultados similares, en un tiempo aceptable y manteniendo una buena calidad de la malla.

Una de las opciones (y la que se va a desarrollar en este trabajo) consiste de modificar la malla original. Para ello se utiliza la deformación conocida de varios nodos y posteriormente se deforma el resto de la malla utilizando métodos de interpolación. A continuación se hace un breve resumen en el que se explica el contenido del trabajo:

- Casos de estudio. Se va a analizar la influencia que tiene la formación de pequeñas capas de hielo sobre el ala de los aviones. Para ello se utilizarán perfiles 2D a los que dada la malla inicial y la deformación que se produce en el perfil debido al hielo se deformará el resto de la malla utilizando diferentes procedimientos.
- Posibles formas de resolución del problema. En función de la deformación del perfil (que puede ser suave o abrupta) y del número de nodos que contiene la malla (en 2D del orden de  $10^4$ ) es necesario utilizar diferentes aproximaciones. Se van a estudiar dos procedimientos:
  1. Interpolación global: primero se deformará la malla en un solo paso, es decir, dada la deformación del perfil se deforman el resto de los nodos todos a la vez. Esto solo es posible cuando la malla tiene pocos nodos ya que como se verá más adelante es necesario invertir una matriz, que será mayor cuantos más nodos haya.

2. Interpolación local: posteriormente se utilizará otro procedimiento en el que en cada paso se deforma una capa formada por un número determinado de nodos. La primera capa estará formada por los nodos del perfil y la siguiente por los nodos inmediatamente después, de forma que la deformación avanza desde el perfil hasta el exterior de la malla. Este método es más difícil de implementar pero tiene la ventaja de poder trabajar con mallas con una gran cantidad de nodos.
- Calidad de la malla. Una vez se ha deformado la malla se analizará la calidad que tiene, calculando algunas propiedades de los elementos que la componen.
  - Plataformas utilizadas. Los códigos que se utilizarán están programados en Fortran 90 y se cargarán dos archivos en el programa: uno de ellos contiene la malla original sin deformaciones y el segundo contiene solo la deformación del perfil. Después de ejecutar el programa se generará otro archivo que contiene la malla original y la deformación de todos los nodos junto con la información de la calidad de la malla. Para visualizar los resultados se utilizará Tecplot.

## Capítulo 2

# Interpolación global

### 2.1 Planteamiento del problema

Una vez se han cargado y procesado los dos ficheros son conocidas las coordenadas y las deformaciones de los centros, mientras que de los nodos de evaluación solo se conocen sus coordenadas. El objetivo es determinar la deformación de los nodos evaluación a partir de los centros utilizando métodos de interpolación. En las Figuras 2.1, 2.2 y 2.3 se muestra el proceso gráficamente.

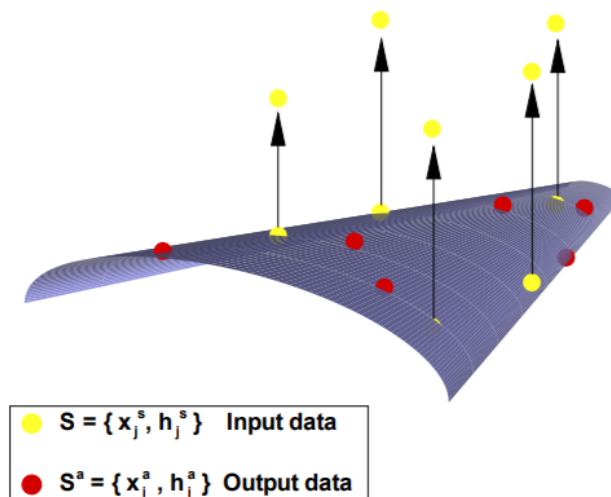


Figura 2.1: Datos de entrada en el programa. En rojo los nodos evaluación de los que no se conoce su deformación y en amarillo los centros.

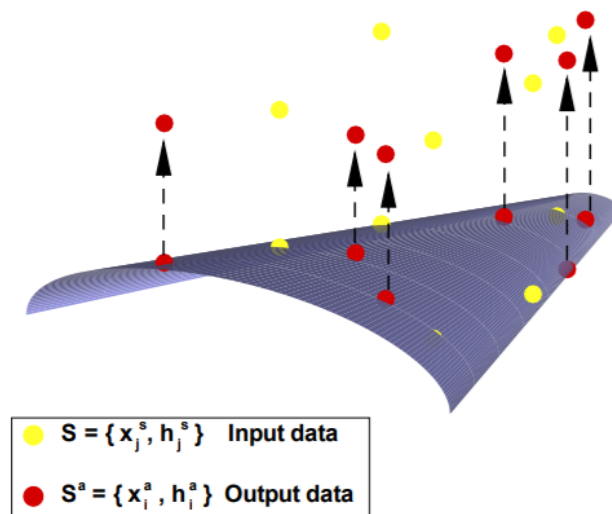


Figura 2.2: Datos de salida del programa. En rojo los nodos evaluación de los que se ha calculado su deformación y en amarillo los centros.

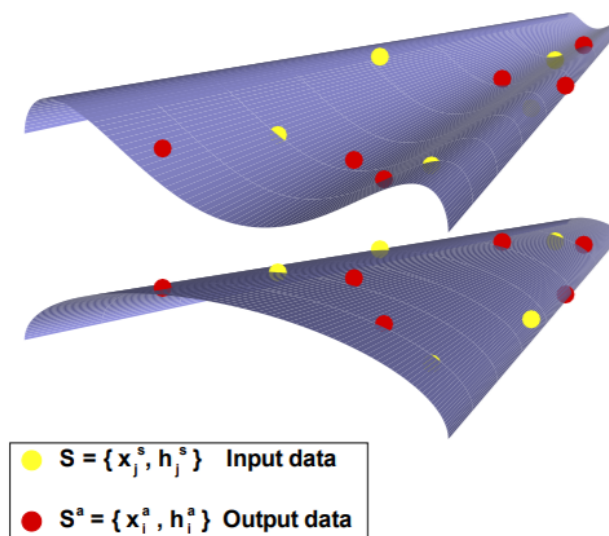


Figura 2.3: Comparación entre el perfil final (superior) y el original (inferior).



## 2.2 Resolución del problema

### 2.2.1 Esquema de acoplamiento

Dados las coordenadas de los centros y los nodos de evaluación se busca una función de interpolación<sup>[2-4]</sup> que acople las deformaciones de los nodos con los centros, por lo que el esquema comienza definiendo esta función de interpolación

$$h(\bar{x}) = \sum_{i=1}^N \omega_i \cdot \phi(\|\bar{x} - \bar{x}_i\|) + p(\bar{x}) \quad (2.1)$$

donde

- $h(\bar{x})$  son los desplazamientos.
- $\omega_i$  son coeficientes.
- $\phi$  es la función de interpolación que será una función de base radial (RBF por sus siglas en inglés),  $\bar{x}$  las coordenadas del nodo en el que se evalúa la función y  $\bar{x}_i$  el origen desde el que se evalúa la función.
- $p(\bar{x})$  es un polinomio de grado  $m$  que depende de la función  $\phi$ . Si se utilizan polinomios de primer grado,  $p$  se puede expresar en la forma

$$p(\bar{x}) = \gamma_0 + \gamma_x x + \gamma_y y \quad (2.2)$$

pero si no se consideran rotaciones del perfil la ecuación anterior se simplifica

$$p(\bar{x}) = \gamma_0 \quad (2.3)$$

Los coeficientes  $\omega_i$  que aparecen en la Ecuación 2.1 se calculan recuperando la función original, ya que inicialmente son conocidos los desplazamientos de los centros  $h(\bar{x})$  y  $\phi$ . Debido a que el polinomio añade otra incógnita (a parte de los coeficientes) es necesario añadir una condición más. La condición cero se aplica a cualquier polinomio  $q(\bar{x})$  que cumpla  $\deg(q) \leq \deg(p)$  y por tanto

$$\sum_{i=1}^N \omega_i q(\bar{x}_i) = 0 \quad (2.4)$$

De donde se obtiene la ecuación necesaria

$$\sum_{i=1}^N \omega_i \gamma_0 = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^N \omega_i = 0 \quad (2.5)$$

### 2.2.2 Funciones de base radial

Las RBF son funciones cuyo valor solo depende de la distancia al origen y son de la forma

$$\phi(\bar{x}) = \phi(\|\bar{x} - \bar{x}_0\|) \quad (2.6)$$

donde  $x$  es el punto de aplicación y  $x_0$  el origen. Se van a utilizar distintas RBF con el fin de estudiar los resultados que se obtienen

- *Volume Spline*

$$\phi(\bar{x}) = \|\bar{x}\|$$

- *Wendland  $C^0$*

$$\phi(\bar{x}) = (1 - \|\bar{x}_\rho\|)_+^2$$

- *Wendland  $C^2$*

$$\phi(\bar{x}) = (1 - \|\bar{x}_\rho\|)_+^4 (4\|\bar{x}\| + 1)$$

- *Wendland  $C^4$*

$$\phi(\bar{x}) = (1 - \|\bar{x}_\rho\|)_+^6 (35\|\bar{x}\|^2 + 18\|\bar{x}\| + 3)$$

- *Hardy's Multiquadratic*

$$\phi(\bar{x}) = \sqrt{a^2 + \|\bar{x}\|^2}$$

Debido a que en las funciones *Wendland*  $C^0$ ,  $C^2$  y  $C^4$  el valor de  $(1 - \|\bar{x}_\rho\|)_+$  está comprendido en el intervalo  $[0, 1]$  es necesario utilizar un coeficiente que haga que  $\|\bar{x}_\rho\| \leq 1$ , de forma que  $\|\bar{x}_\rho\| = \frac{\|\bar{x}\|}{\rho \cdot \rho_f}$ . El coeficiente  $\rho = cte$  debido a que se calcula a partir de la longitud máxima que puede tener la arista de un elemento y para poder modificarlo se utiliza un factor  $\rho_f \in [0, 1]$ . De esta forma cuanto mayor sea  $\rho \cdot \rho_f$  mayor será el valor de  $\phi$ .

### 2.2.3 Interpolación

Inicialmente se conocen las coordenadas de los centros y sus deformaciones por lo que aplicando la Ecuación 2.1 a cada centro se obtiene un sistema de ecuaciones que puede expresarse de forma matricial

$$\bar{h}_c = C_c \cdot \bar{\omega} \quad (2.7)$$

donde

- $\bar{h}_c$  son las deformaciones de los centros.
- $C_c$  es la matriz de interpolación de los centros.
- $\bar{\omega}$  son los coeficientes.

La matriz  $C_c$  es cuadrada de tamaño  $(k+1) \times (k+1)$  donde  $k$  es el número de centros. Los coeficientes se construyen a partir de las RBF de forma que  $\phi_{ij} = \phi_{ij}(\|\bar{x}_i^c - \bar{x}_j^c\|)$ . Resolviendo el sistema de ecuaciones 2.8 se obtiene  $\bar{\omega}$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ h_1^c \\ h_2^c \\ \vdots \\ h_k^c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \phi_{11} & \phi_{12} & \cdots & \phi_{1k} \\ 1 & \phi_{21} & \phi_{22} & \cdots & \phi_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \phi_{k1} & \phi_{k2} & \cdots & \phi_{kk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_0 \\ \omega_1 \\ \omega_2 \\ \vdots \\ \omega_k \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

Aplicando de nuevo el esquema se calcula la deformación de los nodos de evaluación  $\bar{h}_e$ . En este caso, la matriz de evaluación  $C_e$  es de tamaño  $m \times k$  donde  $m$  es el número de nodos de evaluación y los coeficientes son de la forma  $\phi_{ij} = \phi_{ij}(\|\bar{x}_i^e - \bar{x}_j^c\|)$

$$\begin{pmatrix} h_1^e \\ h_2^e \\ \vdots \\ h_n^e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \phi_{11} & \phi_{21} & \cdots & \phi_{1k} \\ 1 & \phi_{11} & \phi_{11} & \cdots & \phi_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \phi_{m1} & \phi_{m2} & \cdots & \phi_{mk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_0 \\ \omega_1 \\ \omega_2 \\ \vdots \\ \omega_k \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

#### 2.2.4 Influencia de $\rho_f$ en la interpolación

Debido a que hay que incorporar el factor  $\rho_f$  en las funciones *Wendland*, el resultado obtenido será diferente en función del valor asignado. Cuanto mayor es  $\rho_f$  mayor es  $\left(1 - \frac{\|\bar{x}\|}{\rho_f}\right)^n$  de forma que para un nodo dado de la capa límite la influencia de los nodos lejanos será mayor que si  $\rho_f$  es grande. Además el exponente  $n$  hace más acusado este efecto. Esto se puede visualizar en la Figura 2.4 en la que se incluye el valor de  $f(x) = \left(1 - \frac{x}{\rho_f}\right)^n$  para las funciones *Wendland* ( $C^0 \rightarrow n = 2$ ,  $C^2 \rightarrow n = 4$ ,  $C^4 \rightarrow n = 6$ ) y  $\rho_f = 1$ . La función superior corresponde a la *Wendland*  $C^0$ , la intermedia a  $C^2$  y la inferior a  $C^4$ .

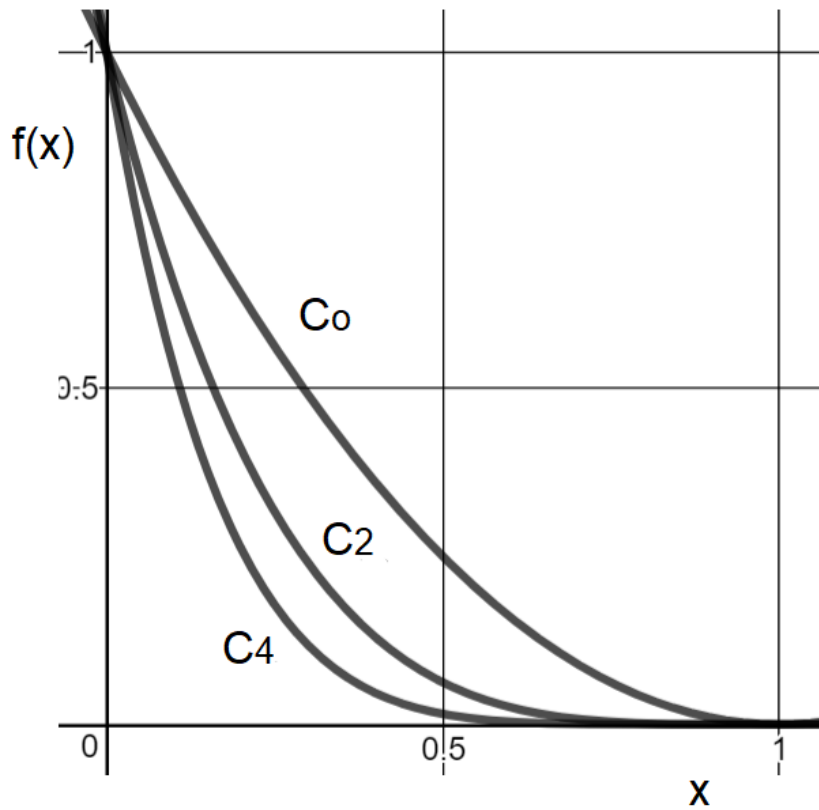


Figura 2.4: Efecto del exponente  $n$  en la función  $f(x) = \left(1 - \frac{\|x\|}{\rho_f}\right)^n$  para un factor  $\rho_f = 1$ .

Como se puede observar en la Figura 2.5, una vez establecido  $\rho_f$ , cuando  $\|\bar{x}\| \geq \rho_f$  el valor de la función  $\phi = 0$  y por tanto los nodos de evaluación que cumplan esa condición no se deforman. Como estos nodos están muy lejos de la capa límite y los elementos que forman son grandes no se producen cambios en la calidad de la malla. La función superior corresponde a  $\rho_f = 1$ , la intermedia a  $\rho_f = \frac{1}{2}$  y la inferior a  $\rho_f = \frac{1}{3}$ :

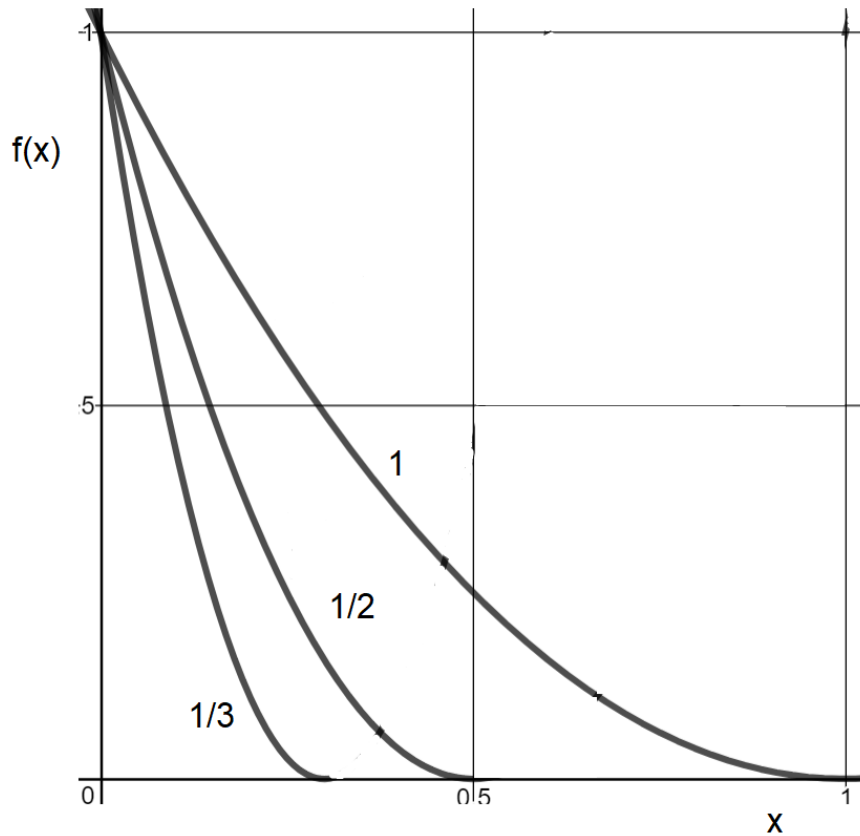


Figura 2.5: Efecto del factor  $\rho_f$  en la función  $f(x) = \left(1 - \frac{\|x\|}{\rho_f}\right)^n$  para  $n = 2$ .

## 2.3 Implementación en Fortran

El primer paso es cargar el fichero que contiene la malla (*meshFile*) y el que contiene la deformación (*deformationFile*) en el programa. Para ello se utilizan tipos derivados que incluyen *arrays* con toda la información como las coordenadas, las deformaciones o el identificador de cada nodo (*ID*) como puede verse en la Figura 2.6.

---

**MÓDULO DE DEFINICIÓN DE LOS TIPOS DERIVADOS**

---

```
type meshClass
  real :: points (:,:)
  real :: values (:,:)
  integer :: ID (:)
end type meshClass

type scatterClass
  real :: values (:,:)
  real :: ID (:)
end type scatterClass
```

---

Figura 2.6: Definición de los tipos derivados en los que se guarda la información de la malla y de la deformación.

Para poder operar con los nodos de forma simplificada se crean varios *arrays* en los que se separa la información guardada previamente en los tipos derivados (Figura 2.7):

- *Points\_in*: coordenadas de los centros.
- *Values\_in*: deformación de los centros.
- *Points\_out*: coordenadas de los nodos de evaluación.
- *Values\_out*: deformación de los nodos de evaluación.

---

**PROGRAMA PRINCIPAL**

Datos de entrada: meshFile, deformationFile

Datos de salida: output\_meshFile

---

**type**(meshClass) :: meshFile, output\_meshFile

**type**(scatterClass) :: deformationFile

**real** :: points\_in, values\_in

**real** :: points\_out, values\_out

---

**MÓDULO DE PROCESAMIENTO DE DATOS**

Datos de salida: points\_in, values\_in, points\_out

---

**do** i=1,numero de centros

points\_in(i,:) = meshFile(coordenadaa del centro)

values\_in(i,:) = scatterFile(deformacion del centro)

**end do**

**do** i=1,numero de nodos – numero de centros

points\_out(i,:) = meshFile(coordenada del nodo de evaluacion)

**end do**

---

Figura 2.7: Declaración de variables en la interpolación global y creación de los *arrays* que se utilizan en el proceso de deformación.

Posteriormente se realiza el proceso de interpolación (Figura 2.8)

---

MÓDULO DE INTERPOLACION

---

Datos de entrada: `points_in` , `values_in` , `points_out`

Datos de salida: `values_out`

---

**call** calcula la matriz  $C$  *!matriz de interpolacion* ( $C=C_c$ )

**call** calcula la matriz  $h$  *!matriz desplazamientos de los centros*

**call** resuelve el sistema  $h=Cw$  *!matriz de coeficientes*

**call** calcula la matriz  $A$  *!matriz de interpolacion* ( $A=Ce$ )

**call** calcula `values_out=A*w`

---

Figura 2.8: Proceso de deformación mediante interpolación.

Por último se guardan los datos obtenidos en el tipo derivado definido en la Figura 2.6 y se escribe en un fichero de salida de datos, como se muestra en la Figura 2.9:

---

MÓDULO DE SALVADO DE DATOS

---

Datos de entrada: `points_in` , `values_in` , `points_out` , `values_out`

Datos de salida: `output_meshFile`

---

**do** `i=1`, numero de nodos

**if** (nodo `i` es centro) **then**

`output_meshFile(coordenada del centro) = points_in`

`output_meshFile(deformacion del centro) = values_in`

**else**

`output_meshFile(coordenada del nodo de evaluacion) = points_out`

`output_meshFile(deformacion del nodo de evaluacion) = values_out`

**end if**

**end do**

**call** escribe fichero salida de datos

---

Figura 2.9: Proceso de salvado de datos y generación de un nuevo fichero con la deformación de todos los nodos.



## 2.4 Mallas utilizadas

### 2.4.1 Perfil Boeing A4

En las Figuras 2.10 y 2.11 se muestra la malla y las características de la malla.

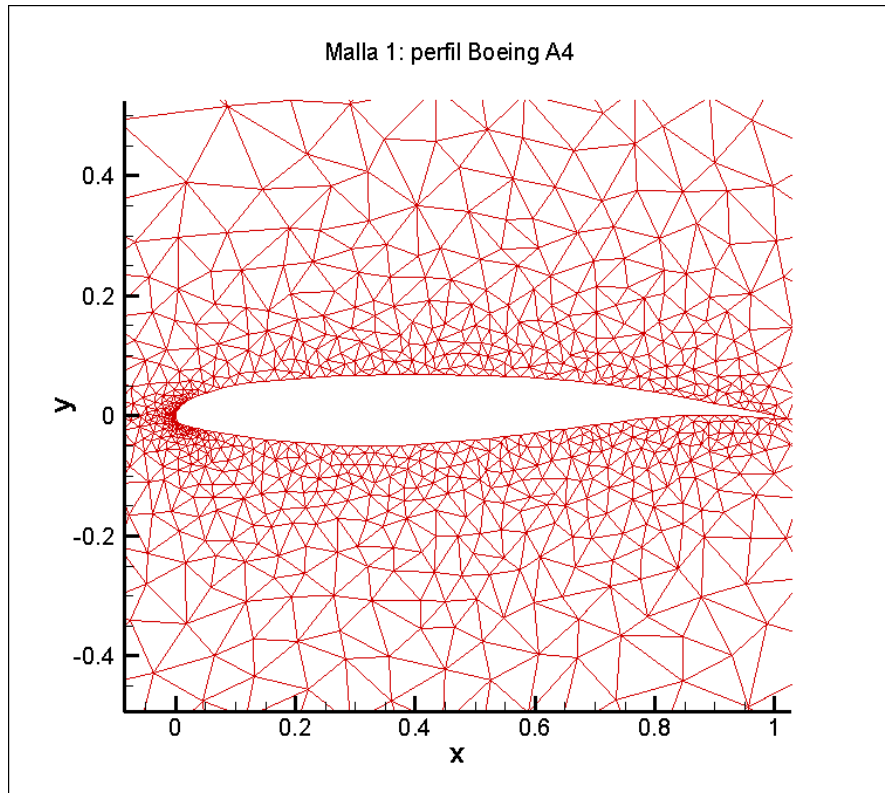


Figura 2.10: Malla del Perfil Boeing A4.

Número de nodos	1476
Número de centros	104
Número de nodos de evaluación	1372
Número de elementos (tipo)	2819 (triángulos)

Figura 2.11: Características de la Malla Perfil Boeing A4.

### 2.4.2 Perfil C-09

En las Figuras 2.12 y 2.13 se muestra la malla y las características de la malla.

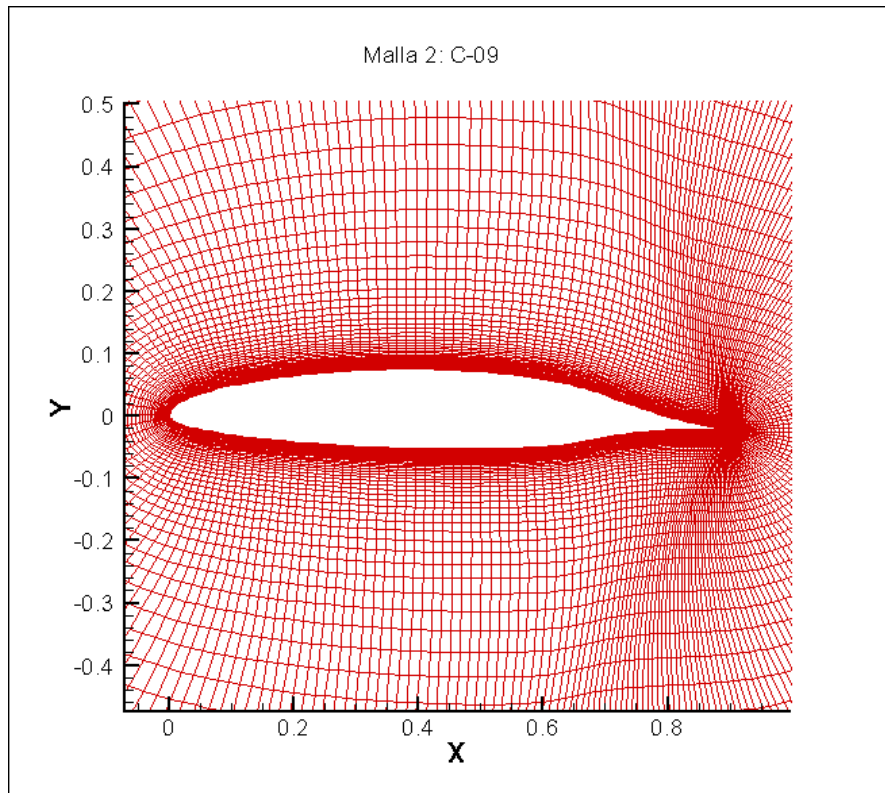


Figura 2.12: Malla del Perfil C-09.

Número de nodos	24900
Número de centros	249
Número de nodos de evaluación	24651
Número de elementos (tipo)	24651 (cuadriláteros)

Figura 2.13: Características de la Malla Perfil C-09.

### 2.4.3 Perfil C-15

En las Figuras 2.14 y 2.15 se muestra la malla y las características de la malla.

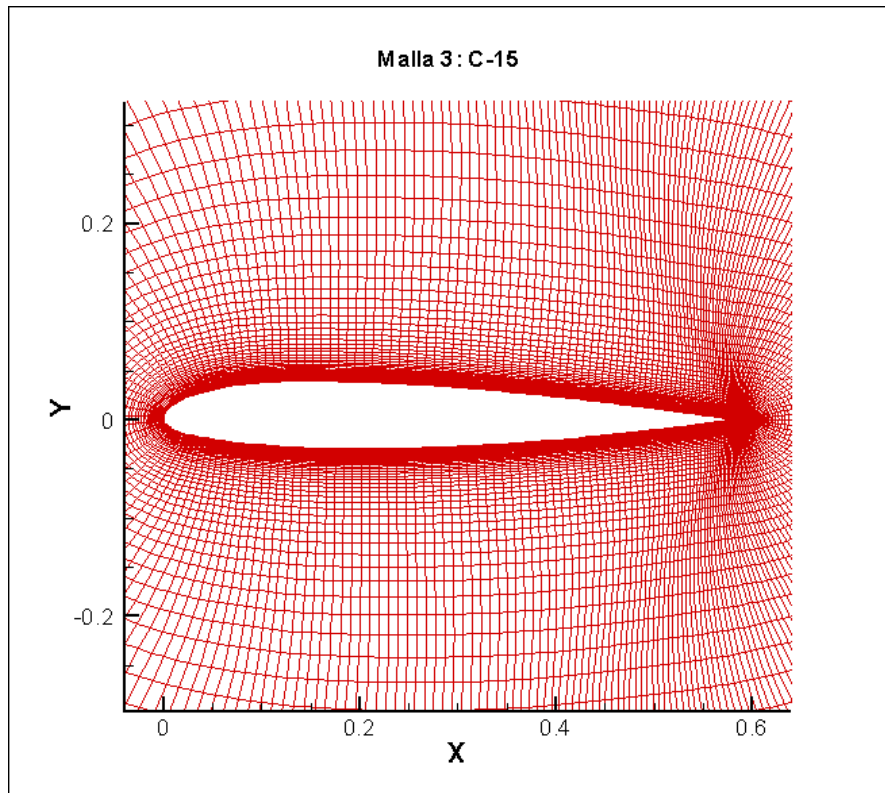


Figura 2.14: Malla del Perfil C-15.

Número de nodos	24900
Número de centros	249
Número de nodos de evaluación	24651
Número de elementos (tipo)	24651 (cuadriláteros)

Figura 2.15: Características de la Malla Perfil C-15.

### 2.4.4 Perfil C-16

En las Figuras 2.16 y 2.17 se muestra la malla las características de la malla.

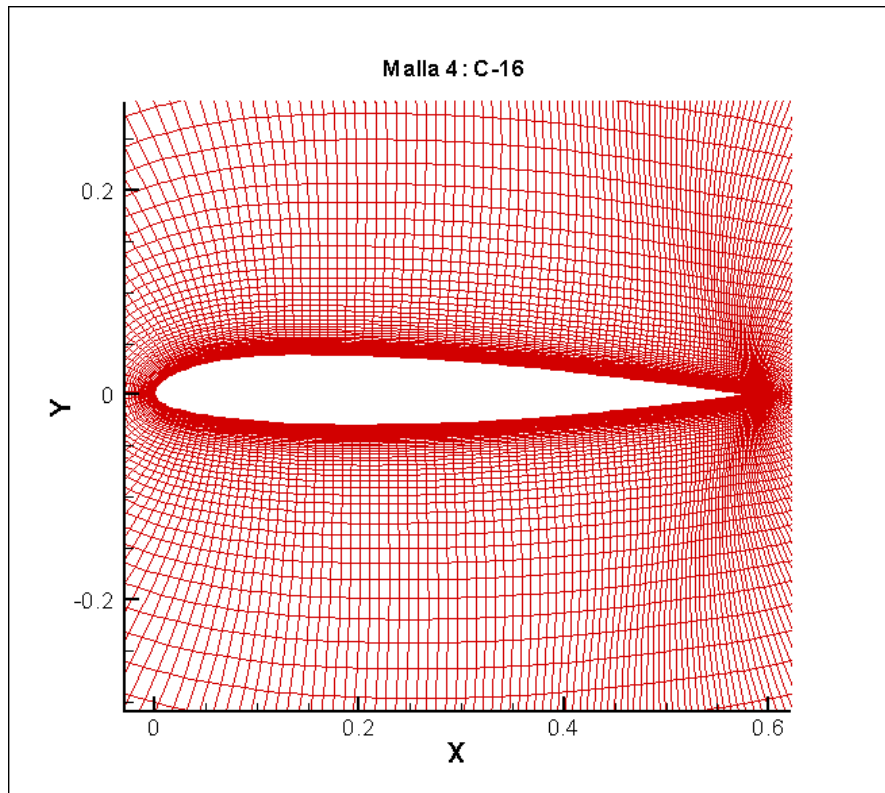


Figura 2.16: Malla del Perfil C-16.

Número de nodos	24900
Número de centros	249
Número de nodos de evaluación	24651
Número de elementos (tipo)	24651 (cuadriláteros)

Figura 2.17: Características de la Malla Perfil C-16.

## 2.5 Resultados

Se van a utilizar las mallas anteriores para calcular los resultados de la interpolación. En color rojo se muestra la malla original mientras que en azul la malla deformada.

### 2.5.1 Perfil Boeing A4

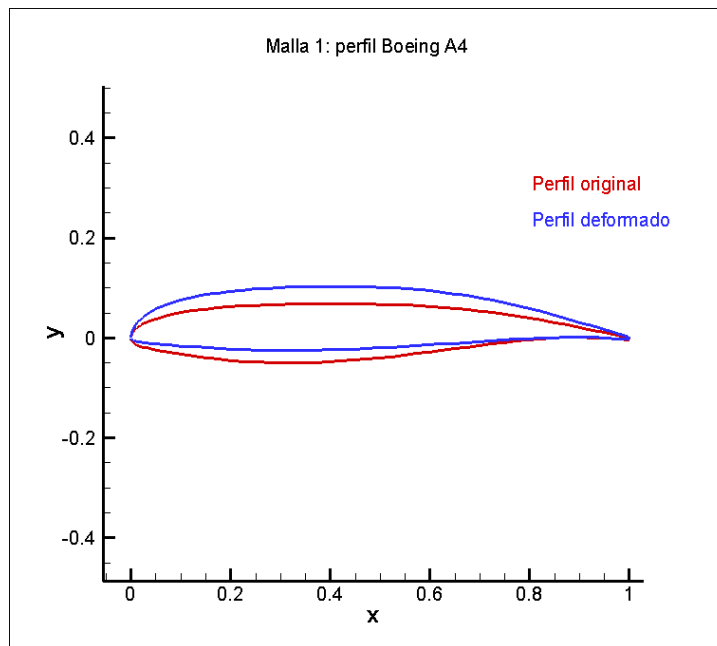


Figura 2.18: Deformación que se produce en el perfil. En rojo corresponde con el perfil original y el azul con el deformado.

### 2.5.2 Perfil C-09

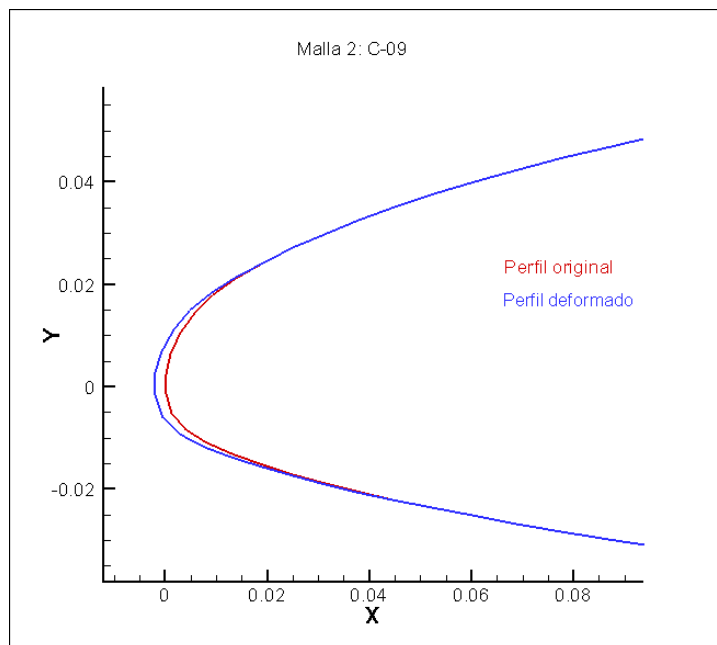


Figura 2.19: Deformación que se produce en el perfil. En rojo corresponde con el perfil original y el azul con el deformado.

### 2.5.3 Perfil C-15

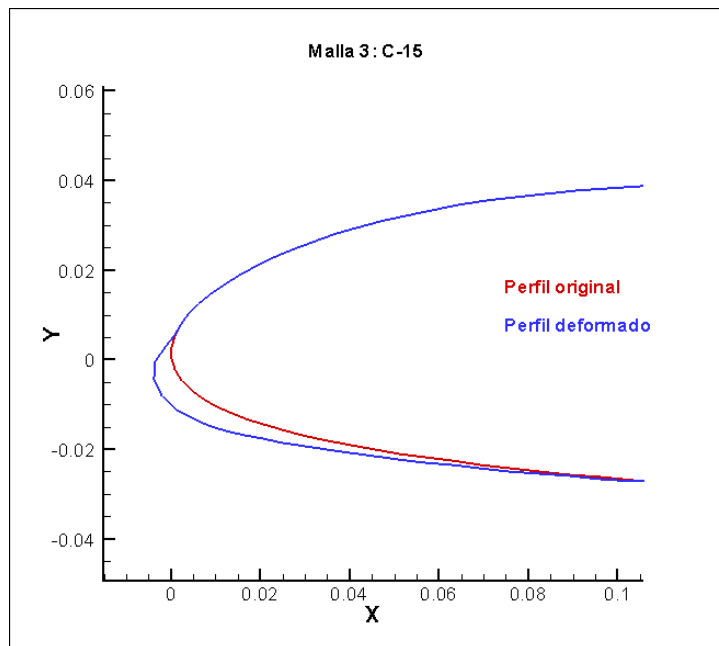


Figura 2.20: Deformación que se produce en el perfil. En rojo corresponde con el perfil original y el azul con el deformado.

### 2.5.4 Perfil C-16

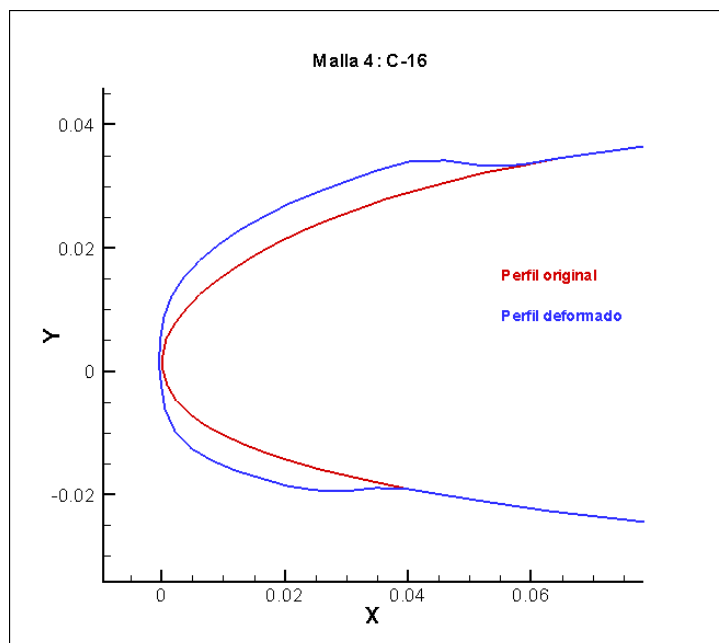


Figura 2.21: Deformación que se produce en el perfil. En rojo corresponde con el perfil original y el azul con el deformado.

## Capítulo 3

# Calidad de la malla

Una vez se han calculado las deformaciones de todos los nodos es útil estimar la calidad de la malla estudiando la geometría de los elementos que la forman<sup>[5]</sup>. La teoría de métricas de calidad de la malla se basa en la matriz Jacobiana y en las matrices que se derivan de esta. Una métrica de calidad es una función escalar cuyo valor depende de las coordenadas de los nodos que forman el elemento. A continuación se construye la matriz Jacobiana y las matrices en las que se descompone y posteriormente se definen las métricas que se van a utilizar.

### 3.1 Elementos triangulares

Para obtener la calidad de los elementos de la malla hay que conocer las coordenadas de los nodos que componen los elementos en el espacio físico. Además también se puede definir un espacio lógico en el que tras construir un triángulo se puede definir una transformación afín del espacio lógico al espacio físico (Figura 3.1). Denotando como  $\bar{x}_k \in \mathbb{R}^2$ ,  $k = 1, 2, 3$  las coordenadas de los nodos del elemento en el espacio físico y como  $\bar{\xi}_k \in [0, 1]$  las coordenadas en el espacio lógico que cumplen que  $\sum_{k=1}^3 \xi_k^x = 1$  y  $\sum_{k=1}^3 \xi_k^y = 1$ , la afinidad del espacio lógico al físico se puede expresar de la forma

$$\bar{x}(\bar{\xi}) = \sum \bar{\xi}_k \bar{x}_k \quad (3.1)$$

con  $\bar{x} \in \mathbb{R}^2$ . Las coordenadas de los nodos en el espacio lógico son

$$L_1(0, 0) ; L_2(0, 1) ; L_3(1, 0) \quad (3.2)$$

y sustituyendo la condición anterior en la Ecuación 3.1 se obtiene para las coordenadas  $x$  e  $y$  respectivamente

$$x = (1 - \xi_2^x - \xi_3^x) x_1 + \xi_2^x x_2 + \xi_3^x x_3 \quad (3.3)$$

$$y = (1 - \xi_2^y - \xi_3^y) y_1 + \xi_2^y y_2 + \xi_3^y y_3 \quad (3.4)$$

Escrito en forma matricial queda

$$\bar{x} = A_1 \bar{u}_1 + \bar{x}_1 \quad (3.5)$$

donde  $\bar{x}$  es el vector de coordenadas físicas,  $\bar{u}$  lógicas y  $A$  es la matriz Jacobiana de transformación entre el triángulo lógico y el físico.

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}; \quad \bar{x}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

$$\bar{u} = \begin{pmatrix} \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{pmatrix}; \quad \alpha = \det(A) \quad (3.8)$$

El vector  $\bar{x}_1$  controla el movimiento de traslación mientras que la matriz Jacobiana controla el volumen, la forma y la orientación del elemento. Esto se puede comprobar descomponiendo la matriz  $A$  en varias matrices con significado geométrico que después se utilizan en las métricas de calidad:

- Tensor métrico

$$\lambda = A^t A \quad (3.9)$$

- Matriz  $S$

$$S = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_{12}/\lambda_{11} \\ 0 & \alpha/\lambda_{11} \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

- Matriz  $Q$

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_{12}/\sqrt{\lambda_{11}\lambda_{22}} \\ 0 & \alpha/\sqrt{\lambda_{11}\lambda_{22}} \end{pmatrix} \quad (3.11)$$



Como se ha explicado antes, la matriz  $A$  se construye a partir de las coordenadas de los nodos originales. De igual forma se tiene un triángulo de referencia en el que los nodos ya están deformados, lo que permite crear una matriz de referencia  $W$  de transformación entre el triángulo lógico y el deformado, cuyo determinante es  $\omega = \det(W)$ . Esta matriz  $W$  también puede ser descompuesta en las matrices  $\lambda_w$ ,  $S_w$  y  $Q_w$ . Los tres triángulos (físico, deformado y lógico) que se muestran en la Figura 3.1 se pueden relacionar mediante la expresión 3.12 y es invariante ante nodo elegido para calcularla.

$$T_k = A_k W_k^{-1} = A_1 W_1^{-1} = T; \tau = \det(T) \quad (3.12)$$

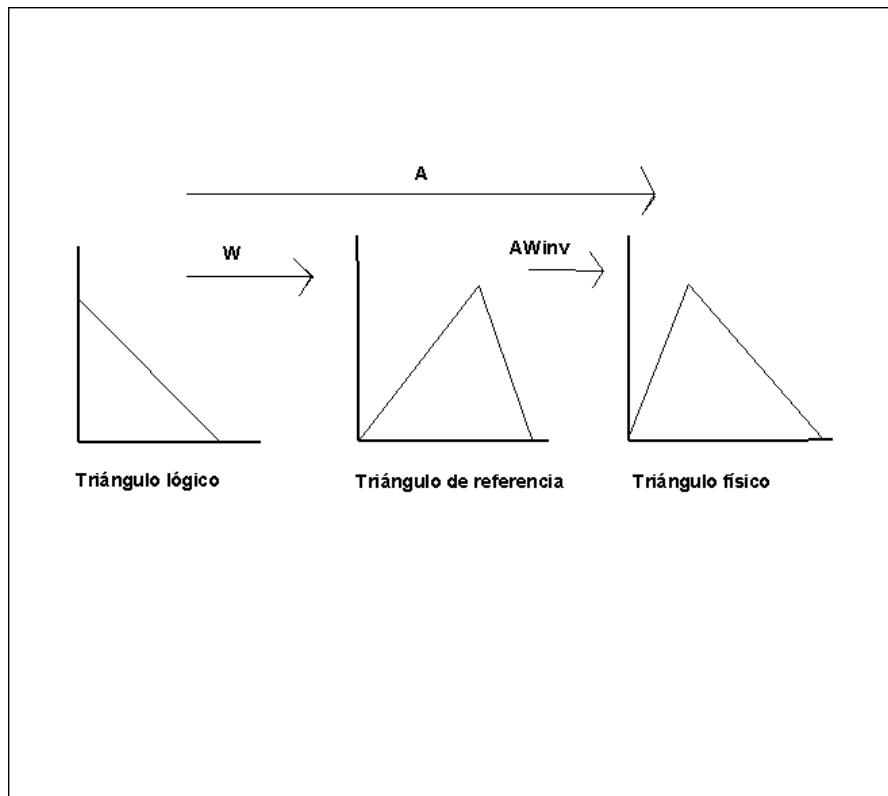


Figura 3.1: Descripción gráfica de la relación entre los triángulos lógico, físico y de referencia.

## 3.2 Otros elementos

Solo en el caso de elementos triangulares es posible construir la matriz invariante  $T$  por lo que para el resto de elementos es necesario calcular las matrices Jacobianas respecto a todos los nodos del elemento, y lo mismo sucede con el resto de matrices. En el caso de cuadriláteros  $k = 4$  y la matriz Jacobiana se construye así

$$A_k = \begin{pmatrix} x_{k+1} - x_k & x_{k+3} - x_k \\ y_{k+1} - y_k & y_{k+3} - y_k \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

de forma que cuando el subíndice  $k + 3 > 4$  se continúa por el primer nodo. El resto de matrices se calculan utilizando las Ecuaciones 3.9, 3.10 y 3.11.

### 3.3 Métricas de calidad

El número de condición de una matriz se utiliza para calcular distintas métricas. Se calcula utilizando la norma de Frobenius que no depende de rotaciones del elemento

$$\kappa(T) = \| T \| \| T^{-1} \| \quad (3.14)$$

$$\| T \| = \sqrt{\text{trace}(T^t T)} \quad (3.15)$$

El valor de las métricas está comprendido en el intervalo  $[0, 1]$  y se definen las siguientes:

- Shape: cuantifica la forma del elemento y es invariante ante rotaciones y cambios de tamaño. También es independiente del nodo que se elija ya que se define utilizando la matriz  $T$

$$f_{shape} = \frac{2}{\kappa(T)} \quad (3.16)$$

- Skew: cuantifica lo oblicuo y asimétrico que es el elemento y es invariante ante rotaciones y cambios de tamaño. Sin embargo, la métrica depende del nodo elegido por lo que es necesario introducir todos los nodos del elemento

$$f_{skew} = \prod_{k=1}^{N_{nodos}} \frac{2}{\kappa(Q_k Q_{W_k}^{-1})} \quad (3.17)$$

- Relative Size: cuantifica el tamaño relativo del elemento y solo depende del tamaño, por lo que es invariante ante rotaciones y nodo elegido

$$f_{rs} = \min\left(\tau, \frac{1}{\tau}\right) \quad (3.18)$$

En el caso de cuadriláteros  $f_{shape}$  y  $f_{rs}$  dependen del nodo elegido por lo que una opción es calcularlas para todos los nodos y elegir el menor valor, o hacer la media. Sin embargo  $f_{skew}$  se calcula de la misma forma que en el caso de elementos triangulares.

### 3.4 Implementación en Fortran

Para implementar esto en el programa se crean varios módulos:

- El primer módulo contiene la información de los tipos derivados que se va a utilizar (Figura 3.2).
- El módulo principal realiza las llamadas para generar las matrices Jacobianas y las sub-matrices y para calcular las métricas (Figura 3.3), que se guardan en un tipo derivado y posteriormente se escriben en el fichero de salida (*output\_meshFile*) junto con el resto de datos.

---

#### MÓDULO DE DEFINIÓN DE TIPOS DERIVADOS

---

```
type matrices calidad
  real :: matrices Jacobianas
  real :: sub-matrices
end type matrices calidad

type metricas
  real :: f_shape(numero de elementos)
  real :: f_skew(numero de elementos)
  real :: f_relative_size(numero de elementos)
end type metricas
```

---

Figura 3.2: Definición de los tipos derivados utilizados en los módulos de calidad. El tipo matrices contiene todas la matrices que se generan en el proceso mientras que el tipo métricas guarda los resultados.

## MÓDULO DE CALIDAD

---

 Datos de salida: calidad
 

---

```

type(metricas) :: calidad

do i=1,numero de elementos
  call crea matrices Jacobianas !utilizando los nodos del elemento

  call crea sub-matrices

  call calcula calidad
end do

```

---

Figura 3.3: Proceso de generación de las matrices y posterior cálculo de las métricas de calidad.

## 3.5 Resultados

### 3.5.1 Efecto de $\rho_f$ en las funciones *Wendland*

Cuando  $\rho_f$  es grande la calidad de la malla obtenida es buena (Figura 3.4) y comparable a la obtenida con la función *Spline*. Sin embargo, cuando se va haciendo más pequeño el factor aparecen geometrías irregulares (Figuras 3.6, 3.7 y 3.10) aunque la calidad obtenida sigue siendo buena. Cuando  $\rho_f$  es muy pequeño solo se deforman los nodos de evaluación que están en las proximidades de la capa límite pero la calidad obtenida es mala (Figuras 3.5, 3.13 y 3.14).

### 3.5.2 Comparación de las funciones *Wendland*

La función *Spline* es la más sencilla de implementar y en este caso en el que las deformaciones son suaves se obtienen resultados muy buenos, casi siempre mejores que con las funciones *Wendland*. En general, los resultados obtenidos con las funciones *Wendland*  $C^0$  y  $C^2$  son mejores que los obtenidos con la  $C^4$  (Figuras 3.6, 3.7 y 3.9) aunque en algunos casos puede no ser así (Figura 3.12).

## 3.5.3 Perfil Boeing A4

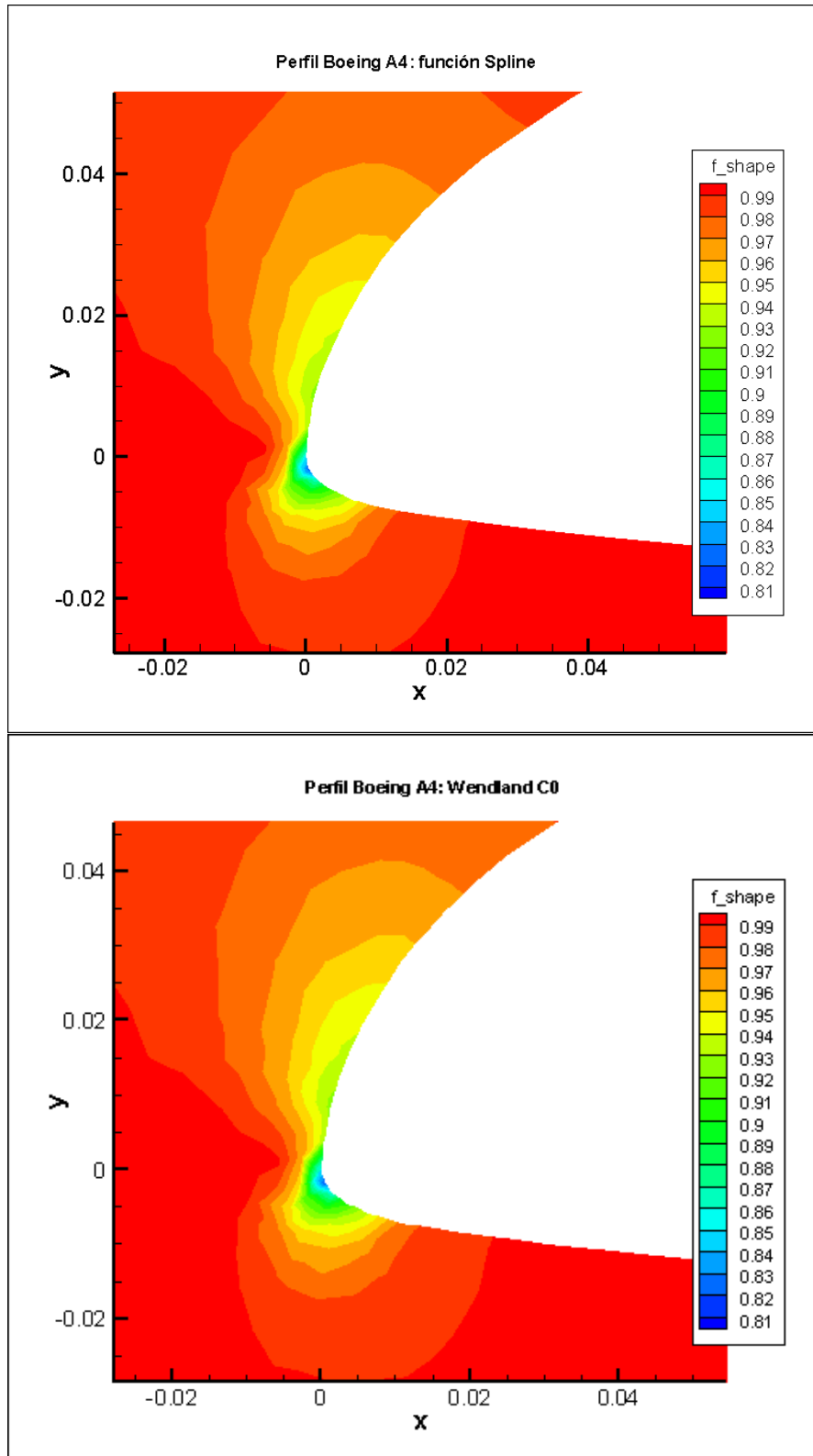


Figura 3.4: Comparación de  $f_{shape}$  para la función de interpolación *Spline* (arriba) y la función *Wendland C<sup>0</sup>* (abajo) en la que el factor  $\rho_f = 0.9$ .

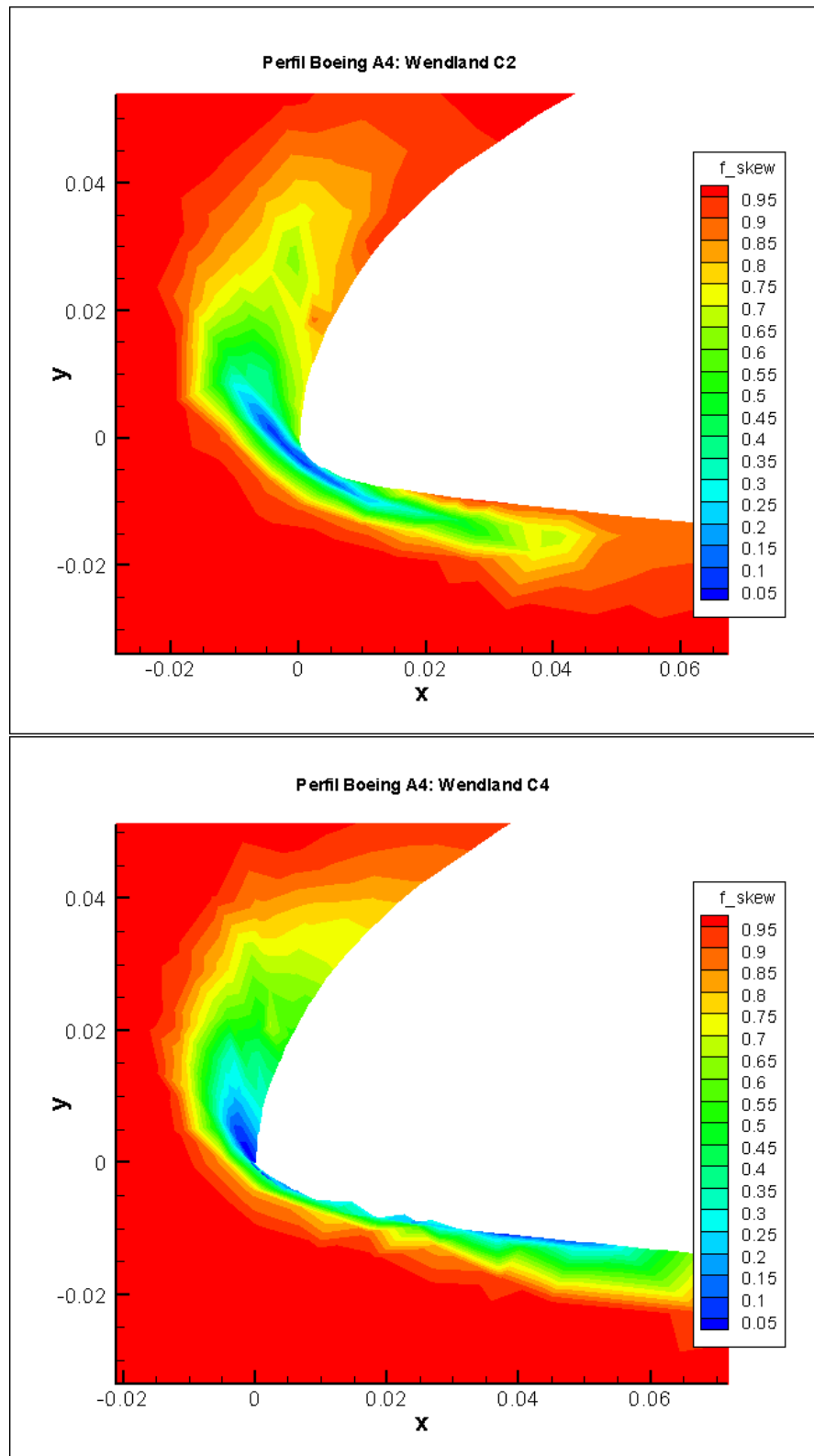


Figura 3.5: Comparación de  $f_{skew}$  para la función de interpolación *Wendland*  $C^2$  (arriba) y la función *Wendland*  $C^4$  (abajo) en las que el factor  $\rho_f = 0.001$ .

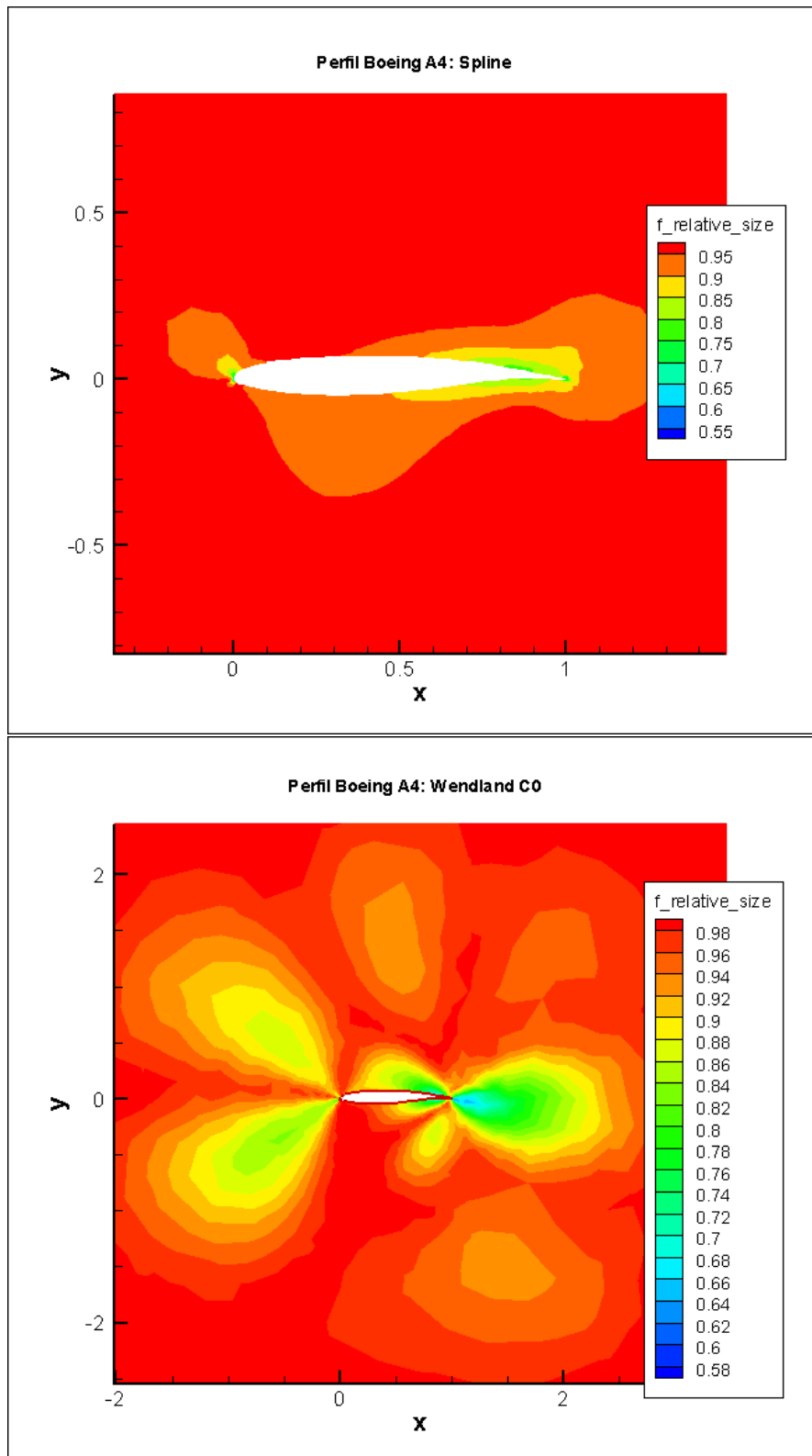


Figura 3.6: Comparación de  $f_{rs}$  para la función de interpolación *Spline* (arriba) y la función *Wendland C<sup>0</sup>* (abajo) en las que el factor  $\rho_f = 0.1$ .

## 3.5.4 Perfil C-09

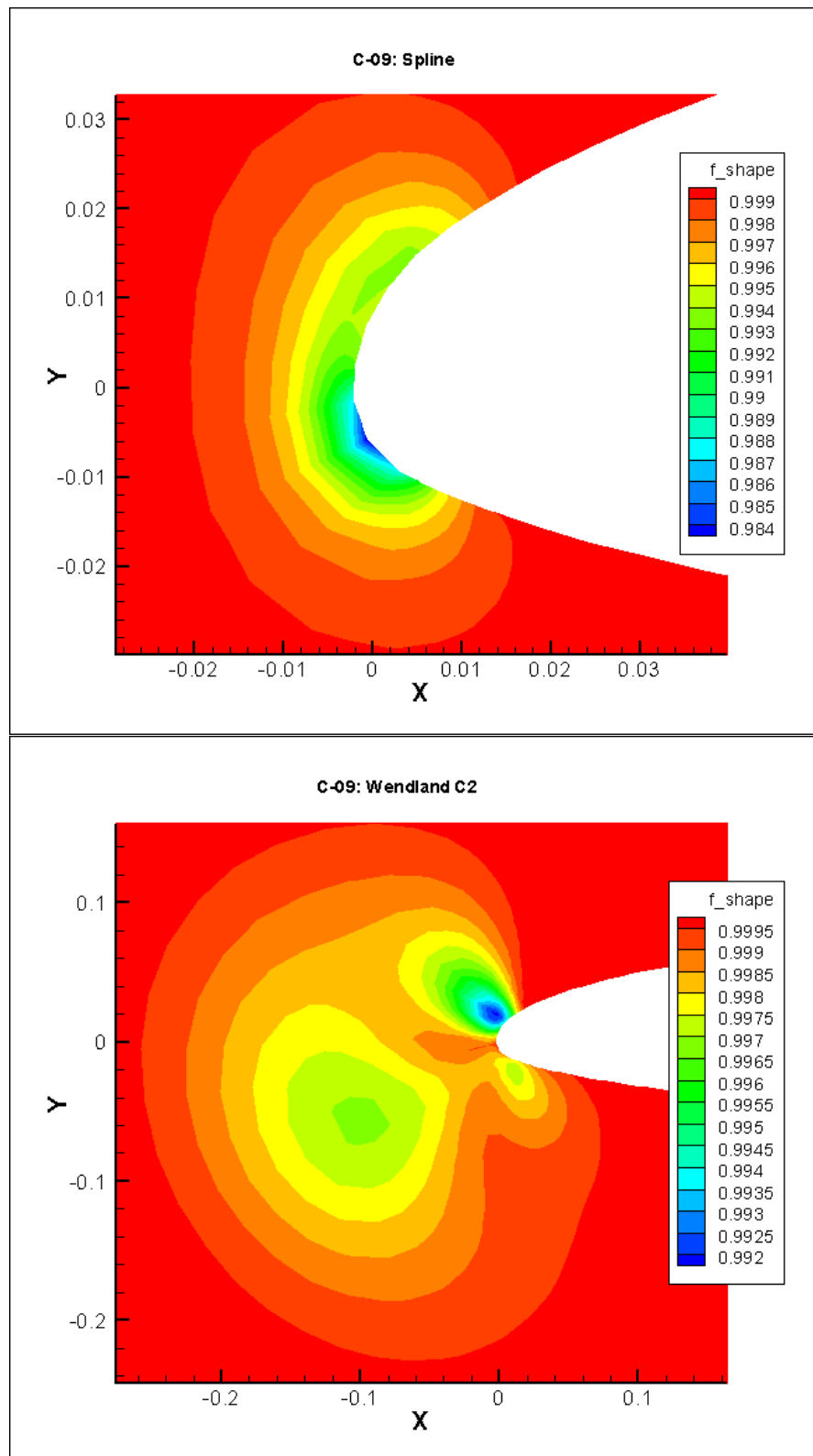


Figura 3.7: Comparación de  $f_{shape}$  para la función de interpolación *Spline* (arriba) y la función *Wendland*  $C^2$  (abajo) en las que el factor  $\rho_f = 0.01$ .



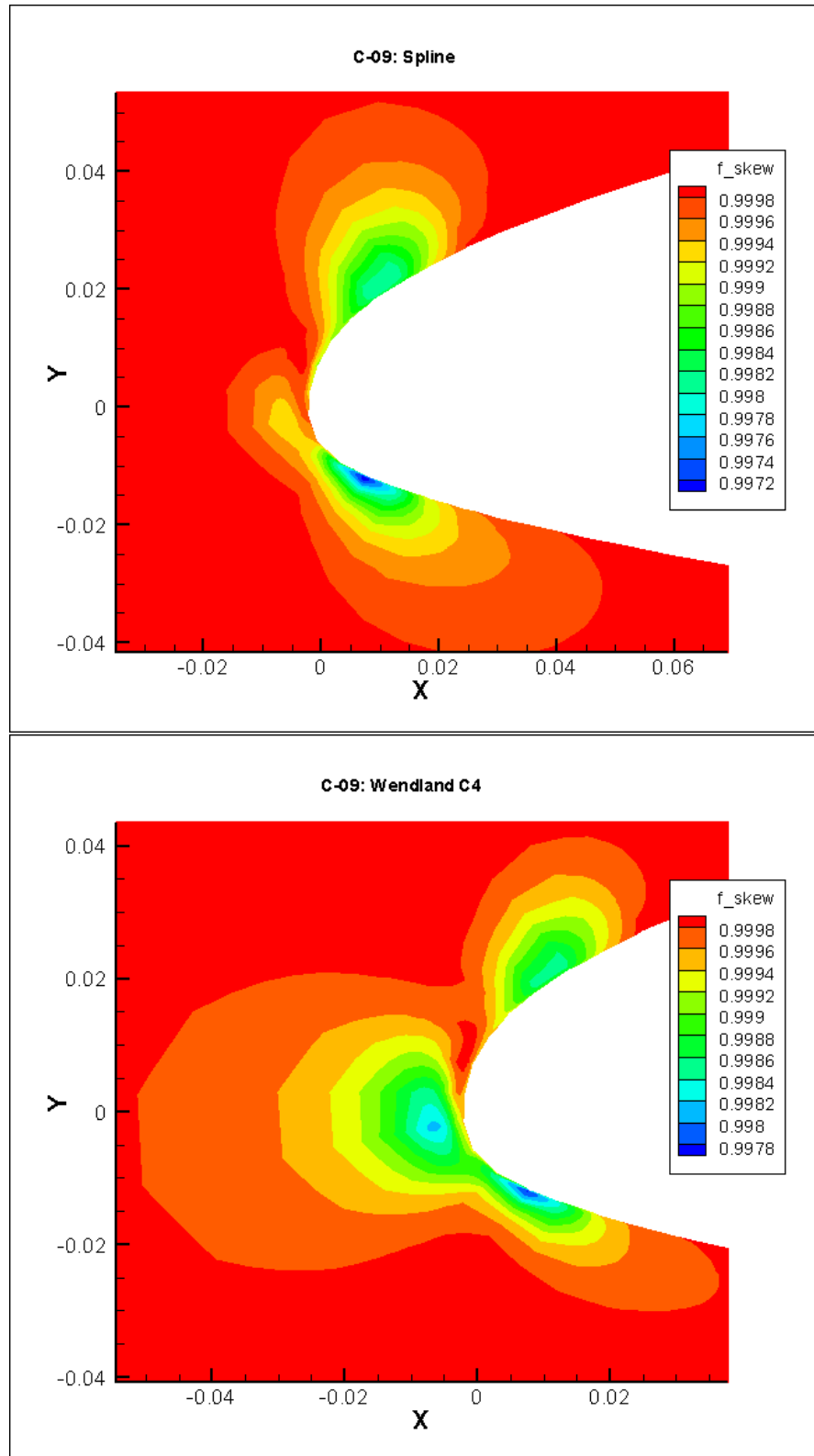


Figura 3.8: Comparación de  $f_{skew}$  para la función de interpolación *Spline* (arriba) y la función *Wendland  $C^4$*  (abajo) en las que el factor  $\rho_f = 0.01$ .

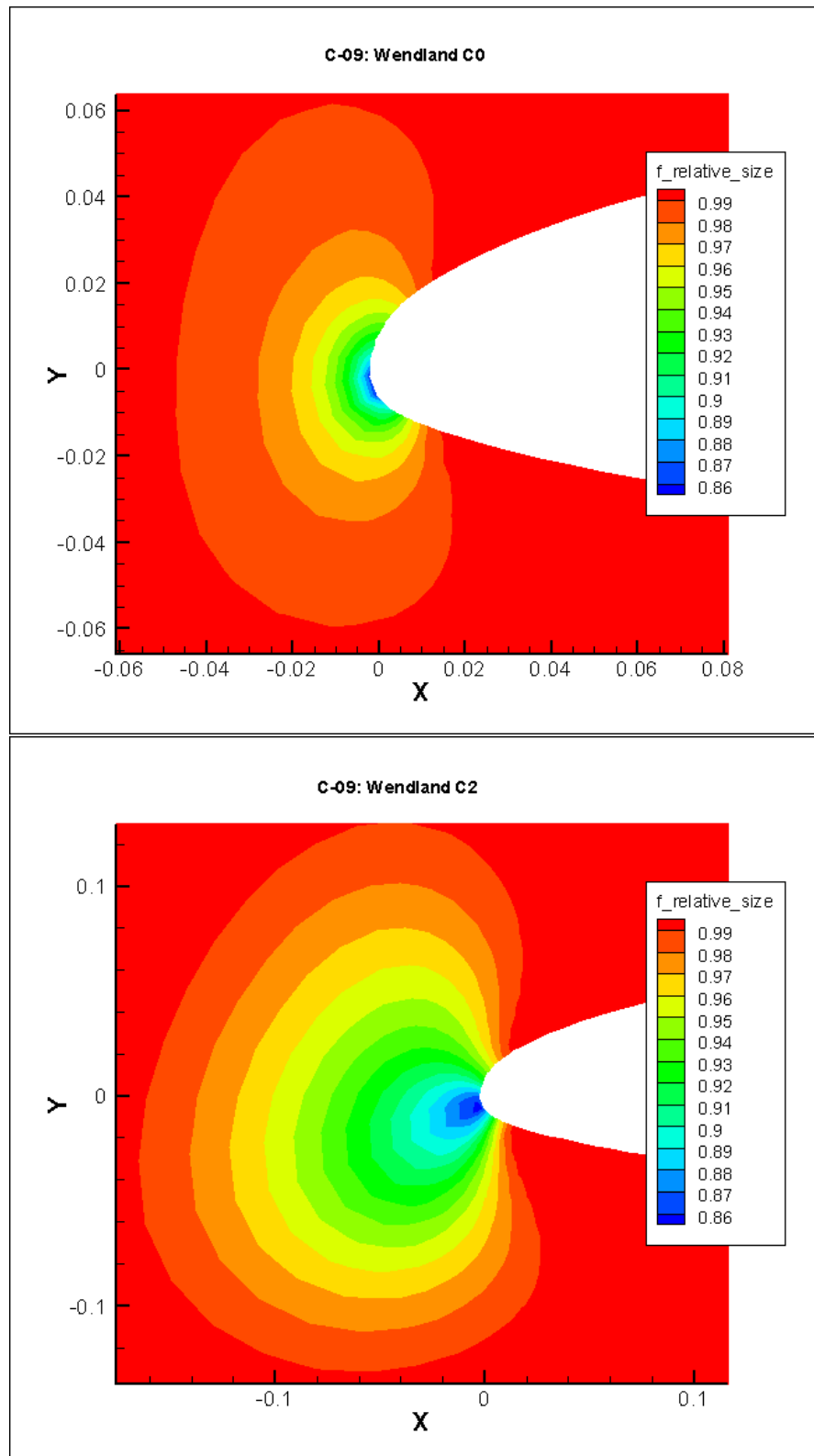


Figura 3.9: Comparación de  $f_{rs}$  para la función de interpolación *Wendland*  $C^0$  (arriba) y la función *Wendland*  $C^2$  (abajo) en las que el factor  $\rho_f = 0.01$ .

## 3.5.5 Perfil C-15

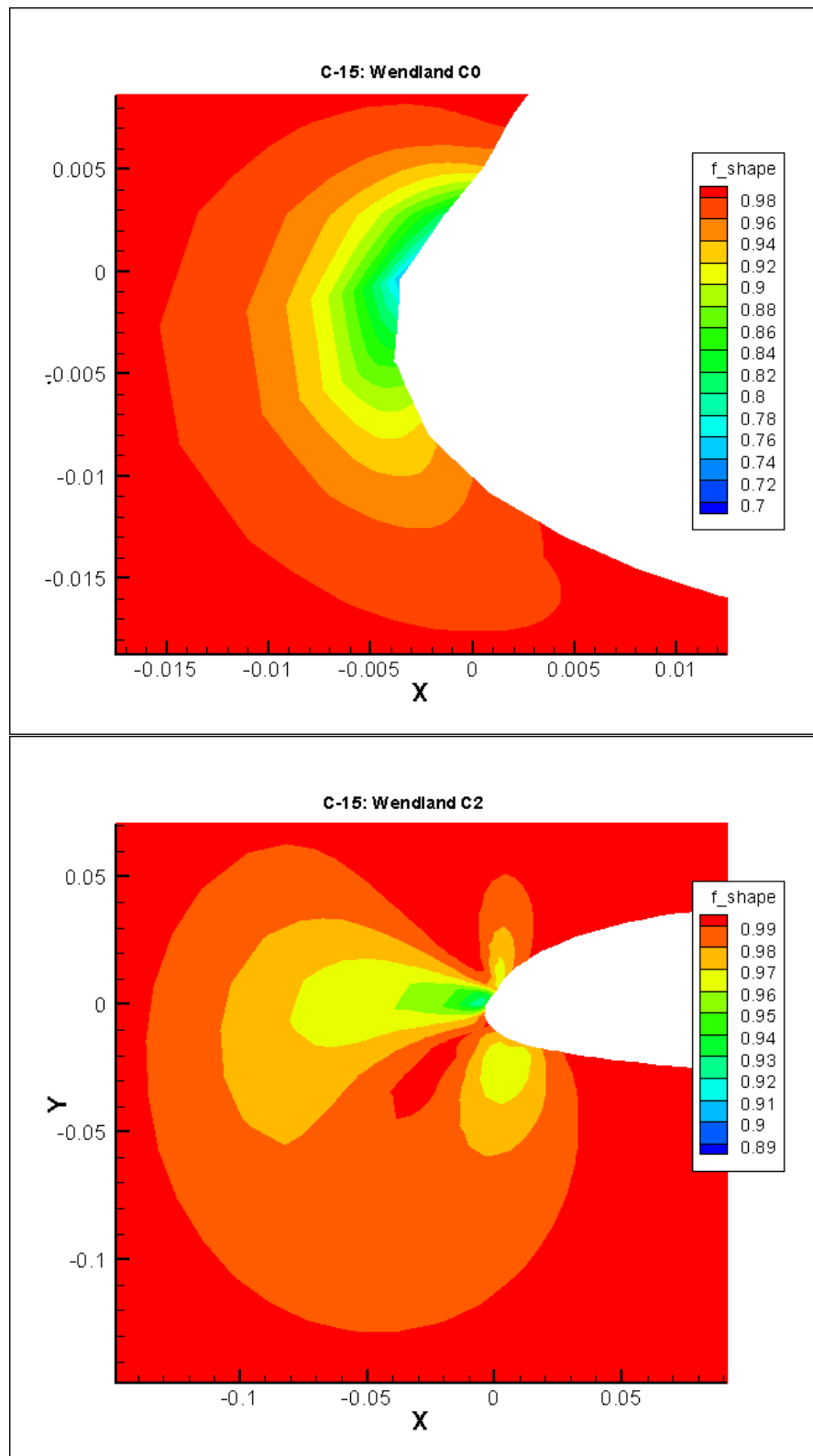


Figura 3.10: Comparación de  $f_{shape}$  para la función de interpolación *Wendland*  $C^0$  (arriba) y la función *Wendland*  $C^2$  (abajo) en las que el factor  $\rho_f = 0.01$ .

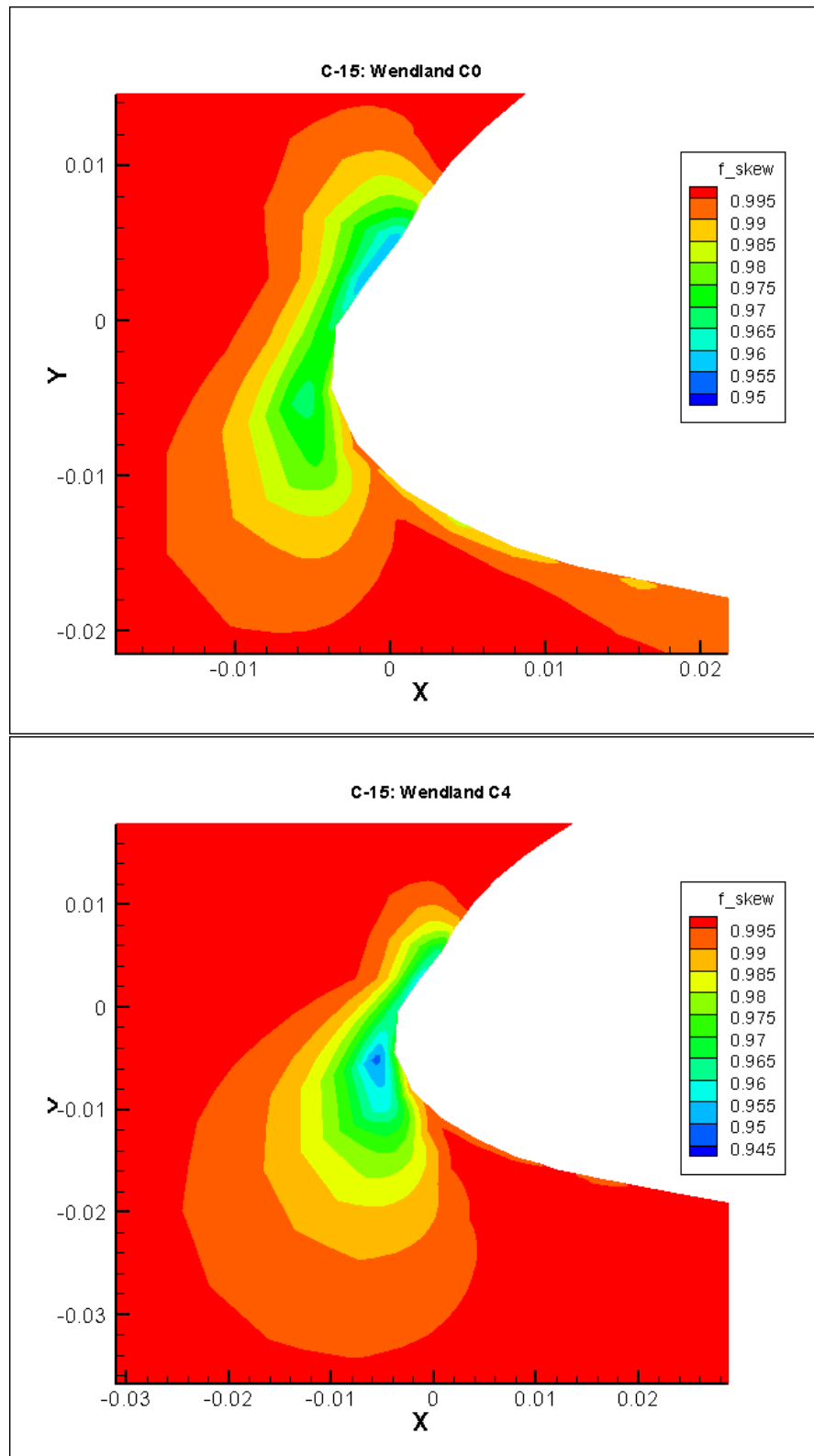


Figura 3.11: Comparación de  $f_{skew}$  para la función de interpolación *Wendland*  $C^0$  (arriba) y la función *Wendland*  $C^4$  (abajo) en las que el factor  $\rho_f = 0.01$ .

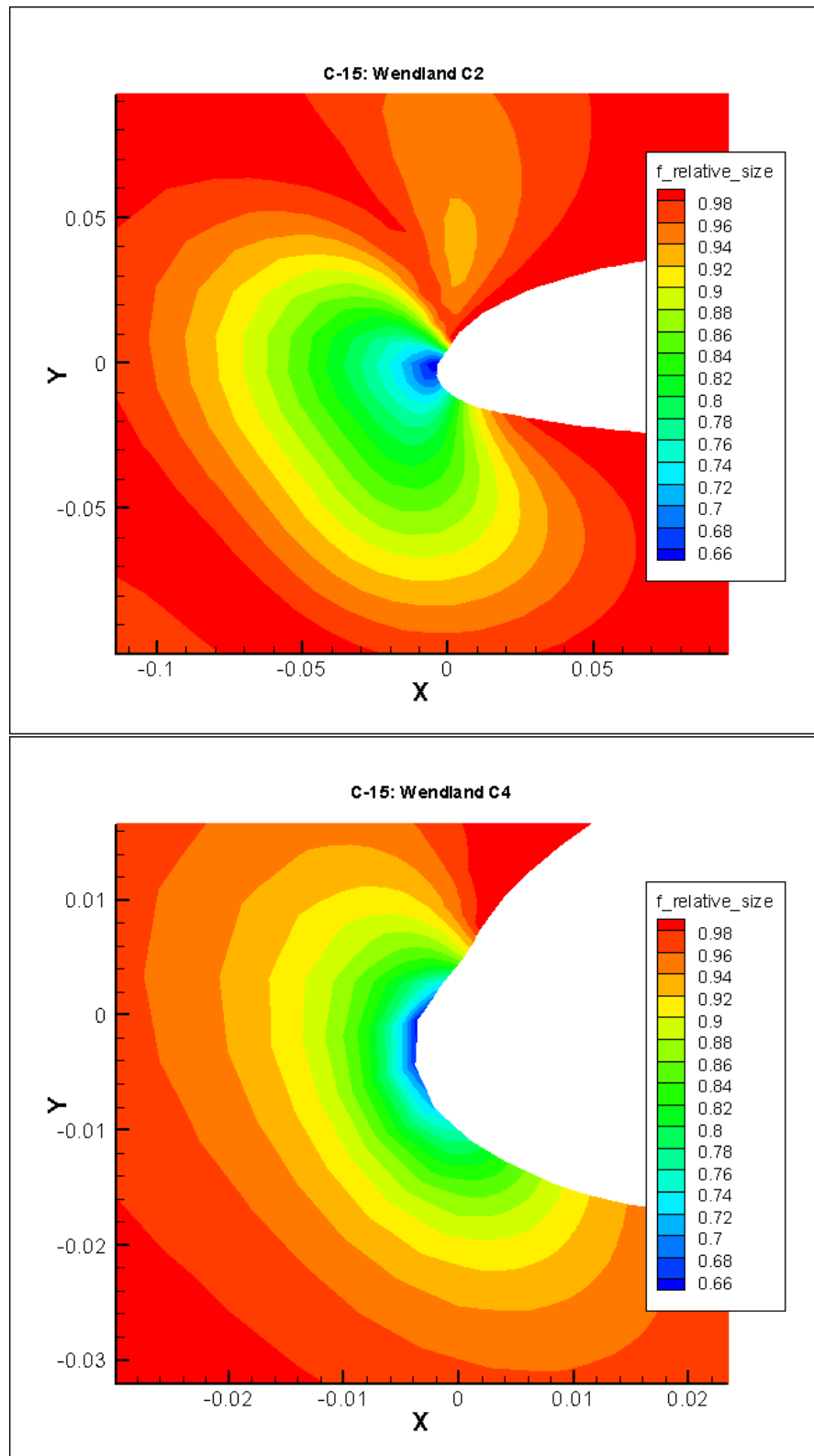


Figura 3.12: Comparación de  $f_{rs}$  para la función de interpolación *Wendland*  $C^2$  (arriba) y la función *Wendland*  $C^4$  (abajo) en las que el factor  $\rho_f = 0.01$ .

## 3.5.6 Perfil C-16

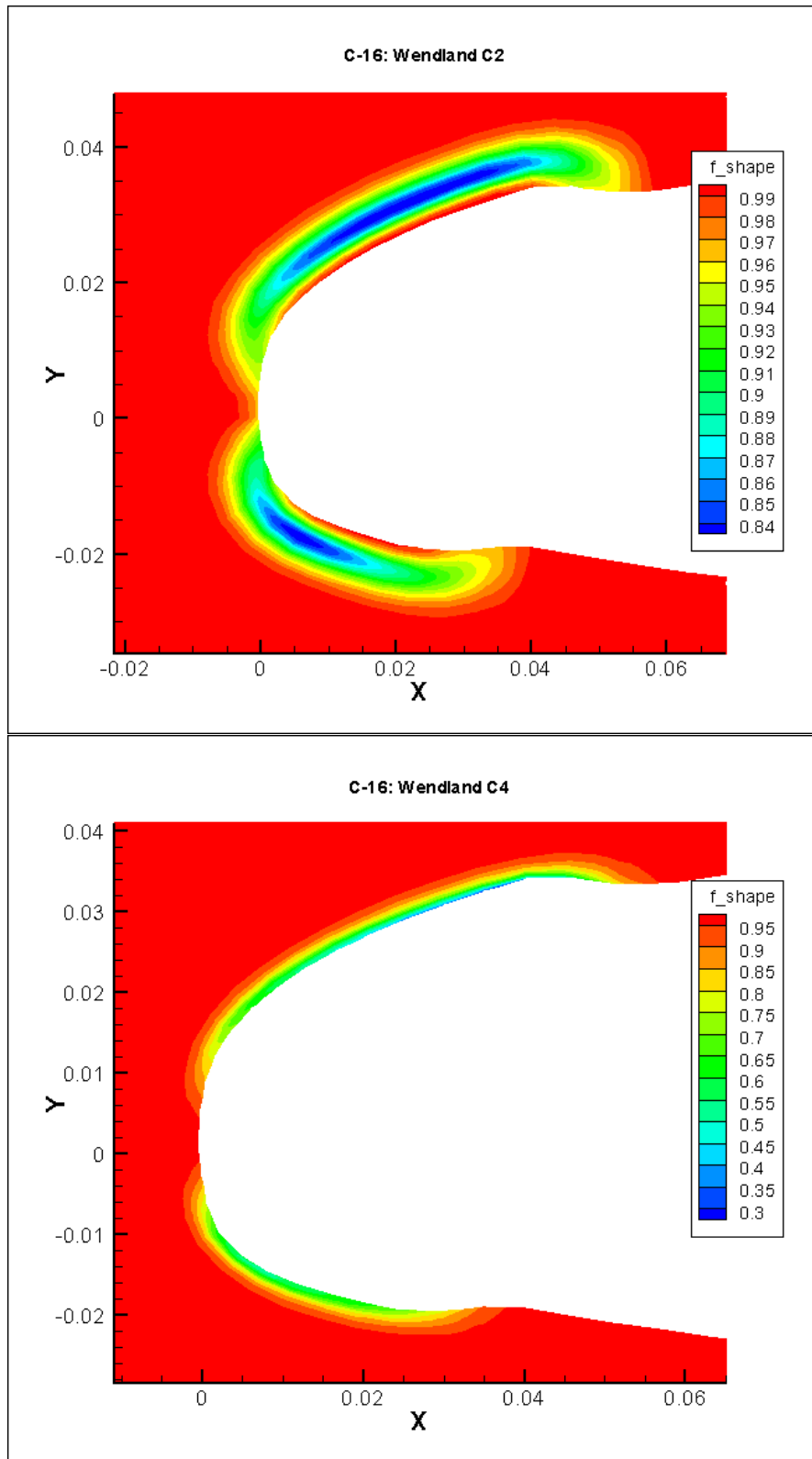


Figura 3.13: Comparación de  $f_{shape}$  para la función de interpolación *Spline* (arriba) y la función *Wendland C<sup>0</sup>* (abajo) en las que el factor  $\rho_f = 0.001$ .

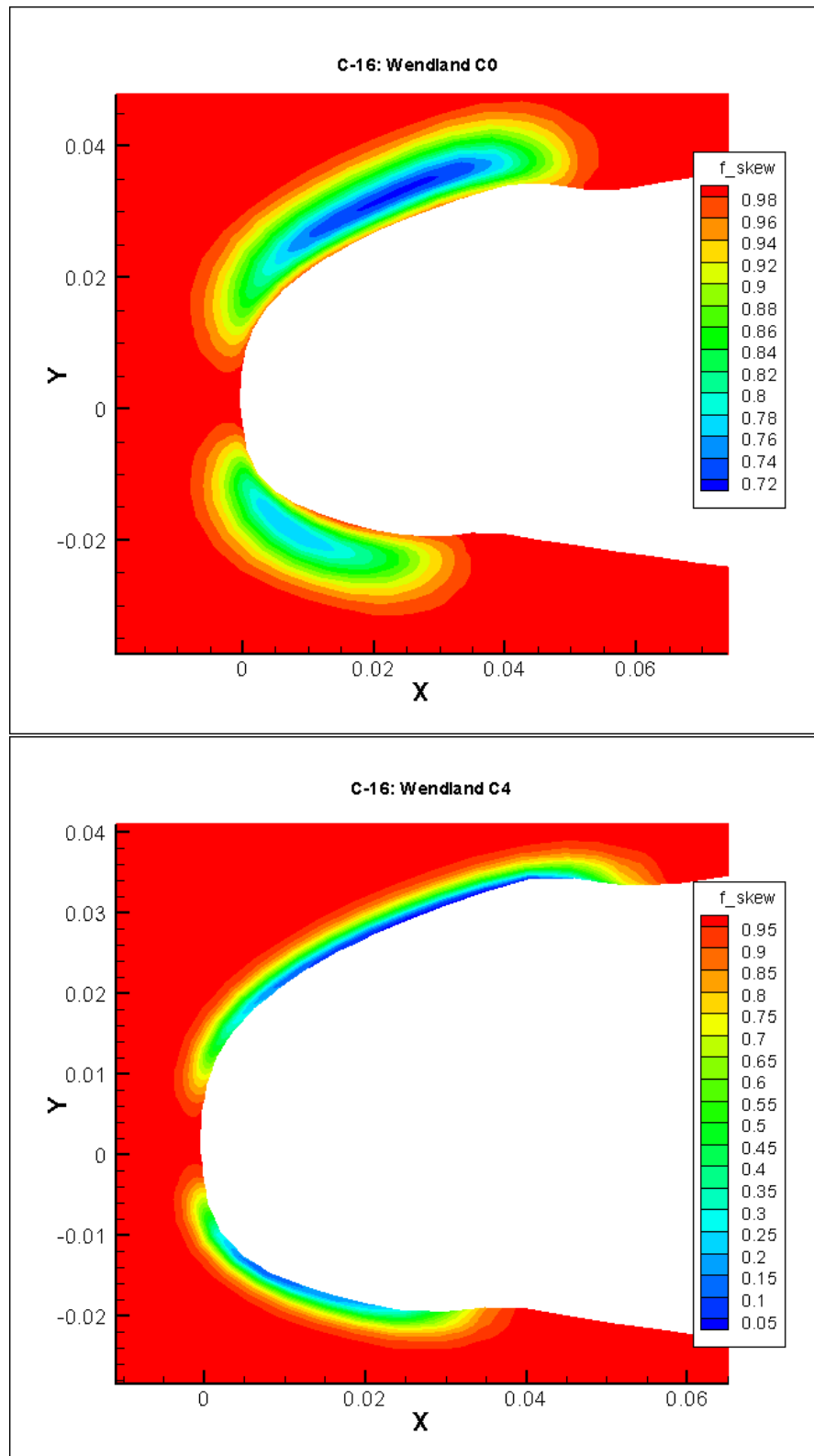


Figura 3.14: Comparación de  $f_{skew}$  para la función de interpolación *Wendland*  $C^0$  (arriba) y la función *Wendland*  $C^2$  (abajo) en las que el factor  $\rho_f = 0.001$ .

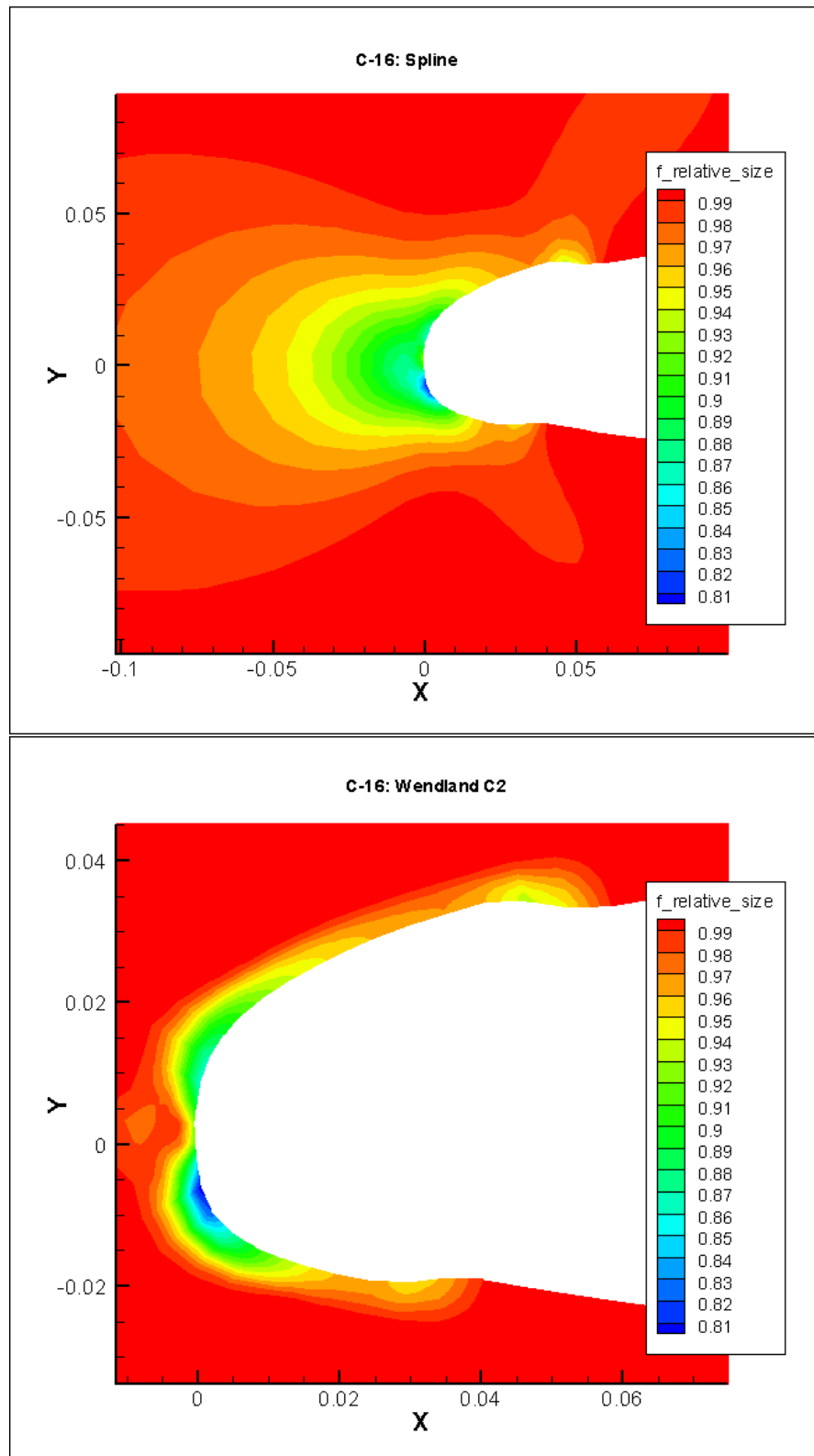


Figura 3.15: Comparación de  $f_{rs}$  para la función de interpolación *Wendland*  $C^0$  (arriba) y la función *Wendland*  $C^4$  (abajo) en las que el factor  $\rho_f = 0.001$ .



## Capítulo 4

# Interpolación local

### 4.1 Planteamiento del problema

Hasta ahora se han utilizado mallas con un número de nodos relativamente pequeño y la deformación de los perfiles ha sido suave. Cuando el número de nodos es grande, el método propuesto anteriormente de interpolación global no es eficiente debido a que es necesario resolver un sistema de ecuaciones en el que se cumple que  $n_{operaciones} \propto n_{nodos}^2$ . Además, cuando la deformación del perfil es abrupta los nodos de evaluación no pueden verse afectados por los centros que se encuentran lejos ya que entonces podrían saltar de su posición quedando los elementos con áreas negativas.

### 4.2 Resolución del problema

#### 4.2.1 Topología de la malla

Para solucionar estos problemas hay que modificar el método de interpolación utilizado. Como la deformación puede ser abrupta, los nodos de evaluación solo van a ser deformados por los centros más próximos. Para saber las posiciones relativas entre los nodos es necesario generar la topología de la malla, cuyo proceso se detalla a continuación:

1. Del fichero que contiene la malla se extrae el identificador de cada nodo (*ID*) y los elementos.
2. A partir de los elementos y los *ID* se crean las aristas que unen los nodos y forman los elementos.

3. Para cada elemento se guarda las aristas y nodos que contiene y viceversa para las aristas y nodos.

En la Figura 4.1 se muestra un ejemplo donde el elemento  $e1$  contiene las aristas  $a1$ ,  $a2$ ,  $a3$  y  $a4$  y los nodos  $n1$ ,  $n2$ ,  $n6$  y  $n5$

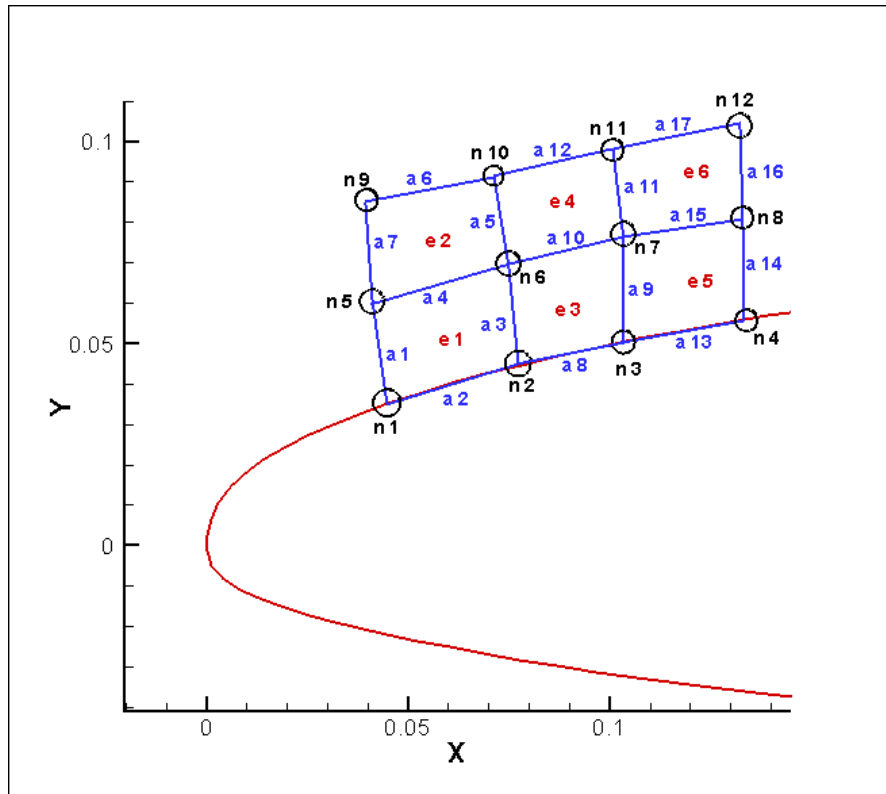


Figura 4.1: Ejemplo de la creación de la topología de la malla. En rojo se muestran los elementos, en azul las aristas y en negro los nodos.

#### 4.2.2 Proceso de deformación

Una vez obtenida la topología y como los nodos de evaluación se deforman a partir de los centros más próximos la deformación se va a realizar por capas, como se explica a continuación:

1. Inicialmente se tiene los centros del perfil deformados que en la Figura 4.1 son los nodos  $n1$ ,  $n2$ ,  $n3$  y  $n4$ . Por lo tanto los nodos de evaluación son los contiguos que todavía no han sido deformados,  $n5$ ,  $n6$ ,  $n7$  y  $n8$ . Estos nodos de evaluación forman una nueva capa de evaluación que rodea la capa de centros.
2. Se deforma cada nodo de forma individual seleccionando los centros más próximos. Para el nodo  $n6$  los centros son los nodos  $n1$ ,  $n2$  y  $n3$  y para el nodo  $n7$  los centros

son los nodos  $n2$ ,  $n3$  y  $n4$ . Para encontrar los centros de cada nodo de evaluación se utiliza la topología generada anteriormente. Siguiendo el caso anterior, se busca dentro de las aristas que forma el nodo  $n6$  (aristas  $a3$ ,  $a10$ ,  $a5$  y  $a4$ ) los nodos que hacen de centros (ya han sido deformados y están en la capa anterior) encontrando el nodo  $n2$ . También se busca dentro de los elementos a los que pertenece el nodo  $n6$  (elementos  $e1$ ,  $e3$ ,  $e4$  y  $e2$ ) el resto de nodos que forman parte de la capa de centros encontrando los nodos  $n1$  y  $n3$ .

3. Una vez se han seleccionado los centros se utiliza el proceso de interpolación global explicado anteriormente aunque solo hay un nodo de evaluación y varios centros, de forma que el sistema de ecuaciones a resolver es pequeño.
4. Se continúa con el resto de nodos de la capa de evaluación (nodos  $n7$  y  $n8$ ) hasta que se han deformado todos.
5. La capa de evaluación se convierte en la capa de centros y se selecciona los nuevos nodos de evaluación (nodos  $n9$ ,  $n10$ ,  $n11$  y  $n12$ ).
6. Se inicia de nuevo el proceso a partir del segundo paso hasta deformar todos los nodos de la malla.

### 4.2.3 Funciones de base radial

Debido a que la deformación puede ser abrupta las funciones utilizadas hasta ahora crean problemas al cruzar nodos y colocarlos en otras capas generando elementos de área negativa. Para evitar esto se utiliza en la capa límite la función *Hardy's Multiquadratic* donde el coeficiente  $a$  es la longitud de la arista más pequeña del perfil. Por lo tanto es necesario establecer donde termina la capa límite, que se calcula determinando la distancia entre capas. Una vez que esa distancia cumple  $d_{capas} \geq k \cdot d_{1^{a}capa}$  (donde  $d$  es la distancia entre capas y la constante  $k$  se puede variar) los elementos son suficientemente grandes y se utiliza la función *Spline*.

## 4.3 Implementación en Fortran

Al igual que se ha hecho anteriormente se utilizan tipos derivados para guardar la información generada de la topología de la malla y desde un módulo principal se realiza las llamadas para la interpolación. En las Figuras 4.2, 4.3 y 4.4 se detalla el proceso.

---

MÓDULO DE DEFINICIÓN DE LOS TIPOS DERIVADOS

---

```
type nodos
  real, pointer :: elementos(:)
  real, pointer :: aristas(:)
end type nodos
```

```
type aristas
  real, pointer :: elementos(:)
  real, pointer :: nodos(:)
end type aristas
```

```
type elementos
  real :: aristas(:)
  real :: nodos(:)
end type elementos
```

```
type topologia
  real, pointer :: nodos(:)
  real, pointer :: aristas(:)
  real, pointer :: elementos(:)
end type topologia
```

---

Figura 4.2: Definición de los tipos derivados para la topología de la malla. Dentro de cada tipo (nodos, aristas y elementos) se guarda la información relacionada con ese tipo mientras que el tipo *topología* es general y contiene todos los nodos, aristas y elementos.

---

MÓDULO DE GENERACIÓN DE LA TOPOLOGÍADatos de salida: meshTopology

---

```
type(topologia) :: meshTopology

do i=1 numero de elementos
  call genera aristas !meshTopology%aristas

  call guarda elementos !meshTopology%elementos

  call guarda nodos !meshTopology%nodos
end do
```

---

Figura 4.3: Generación de la topología de la malla. Se recorren todos los elementos y a partir de sus nodos se crean las aristas, a la vez que se guarda también la información en los nodos y elementos.

---

MÓDULO PRINCIPAL DE INTERPOLACIÓN LOCAL

Datos de entrada: meshTopology, points\_in, values\_in, point\_out

Datos de salida: value\_out

---

**real** :: value\_out**call** crea la capa a deformar *!a partir de la capa del perfil*  
**do**  **do** i=1, numero de nodos a deformar    **call** busca los centros      **call** calcula la matriz C *!matriz de interpolacion (C=Cce)*      **call** calcula la matriz h *!matriz desplazamientos de los centros*      **call** resuelve el sistema  $h=Cw$  *!matriz de coeficientes*      **call** calcula la matriz A *!matriz de interpolacion (A=Cev)*      **call** calcula value\_out=Aw  **end do**  **call** crea la capa a deformar *!a partir de la capa deformada en el bucle i*  **if**(no hay nodos a deformar)**then**    **exit**  **end if****end do**

---

Figura 4.4: Proceso de interpolación local en el que se avanza capa a capa. El bucle principal acaba cuando no hay más nodos por deformar mientras que el índice  $i$  recorre todos los nodos de la capa a deformar y escoge los centros de cada nodo utilizando la topología. Después se realiza la interpolación.

## 4.4 Mallas utilizadas

### 4.4.1 Perfil CV-09

En las Figuras 4.5 y 4.6 se muestra la malla y las características de la malla.

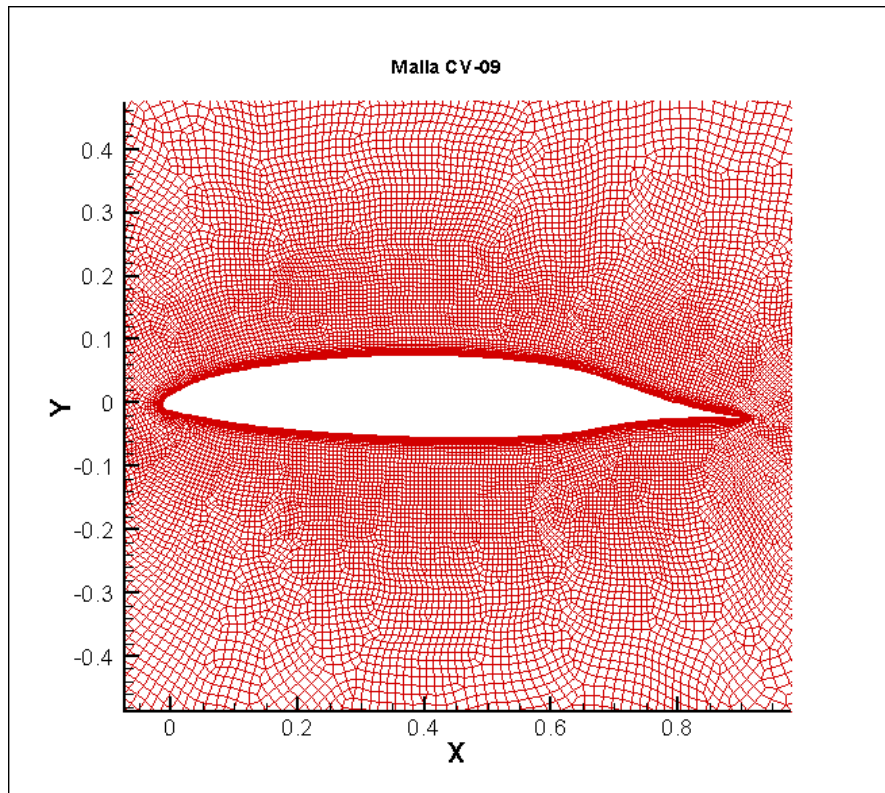


Figura 4.5: Malla del perfil CV-09.

Número de nodos	48244
Número de centros	387
Número de nodos de evaluación	47857
Número de elementos (tipo)	48007 (165 triángulos, 47842 cuadriláteros)

Figura 4.6: Características de la Malla Perfil CV-09.

#### 4.4.2 Perfil CV-15

En las Figuras 4.7 y 4.8 se muestra la malla y las características de la malla.

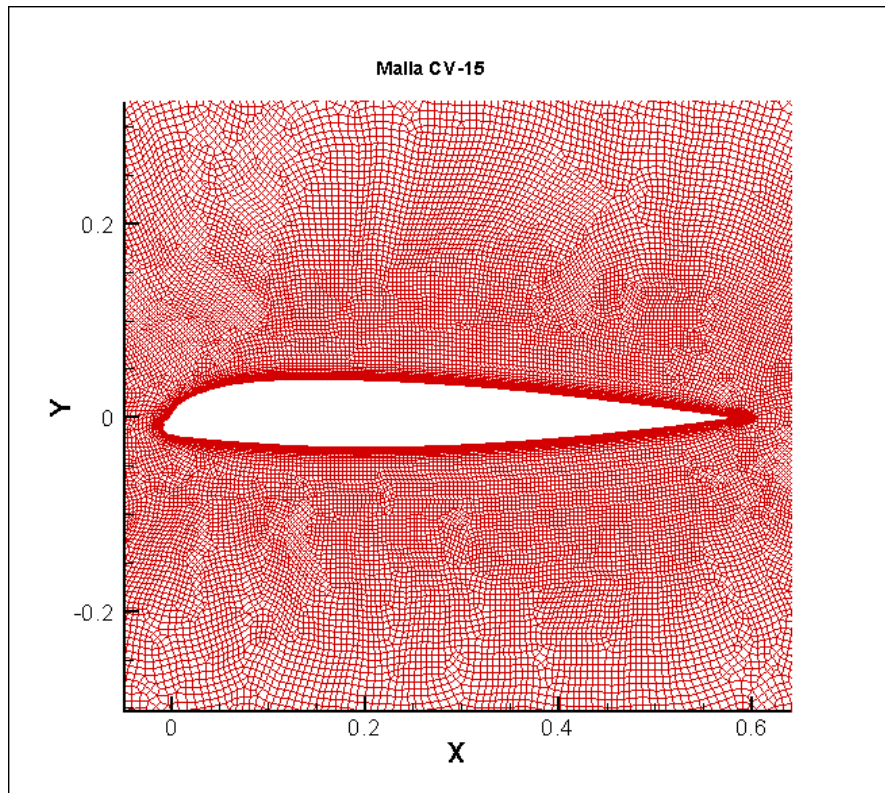


Figura 4.7: Malla del perfil CV-15.

Número de nodos	77726
Número de centros	425
Número de nodos de evaluación	77301
Número de elementos (tipo)	77504 (233 triángulos, 77271 cuadriláteros)

Figura 4.8: Características de la Malla Perfil CV-09.



### 4.4.3 Perfil CV-16

En las Figuras 4.9 y 4.10 se muestra la malla y las características de la malla.

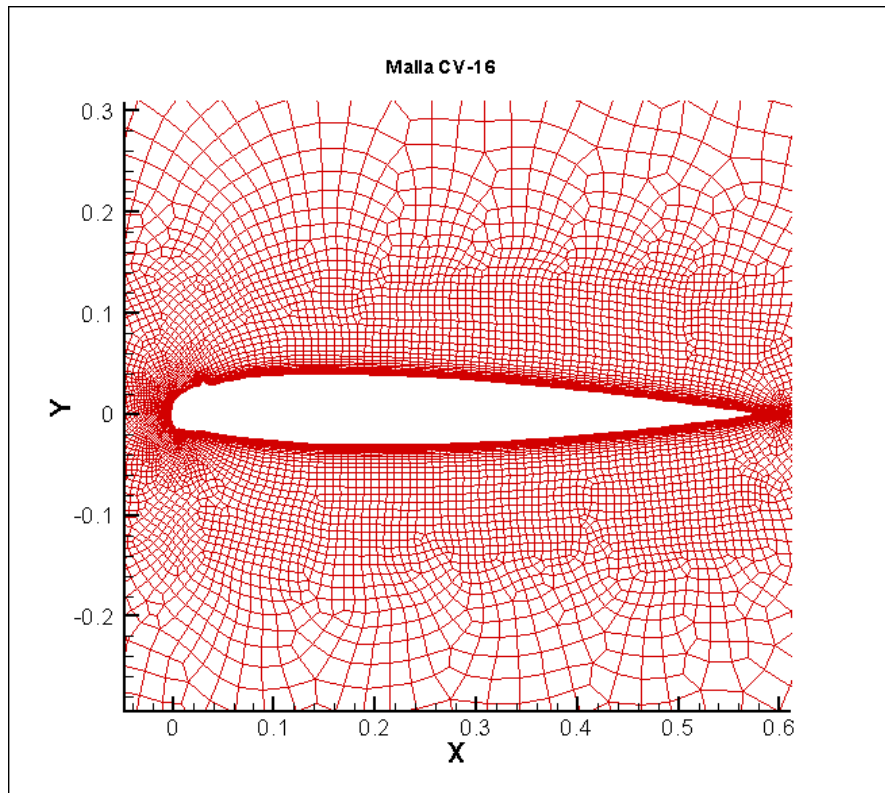


Figura 4.9: Malla del perfil CV-16.

Número de nodos	24952
Número de centros	280
Número de nodos de evaluación	24672
Número de elementos (tipo)	24765 (158 triángulos, 24607 cuadriláteros)

Figura 4.10: Características de la malla Perfil CV-16.

## 4.5 Resultados

Se van a utilizar las mallas presentadas anteriormente. En color rojo se muestra la malla original mientras que en azul la malla deformada.

#### 4.5.1 Perfil CV-09

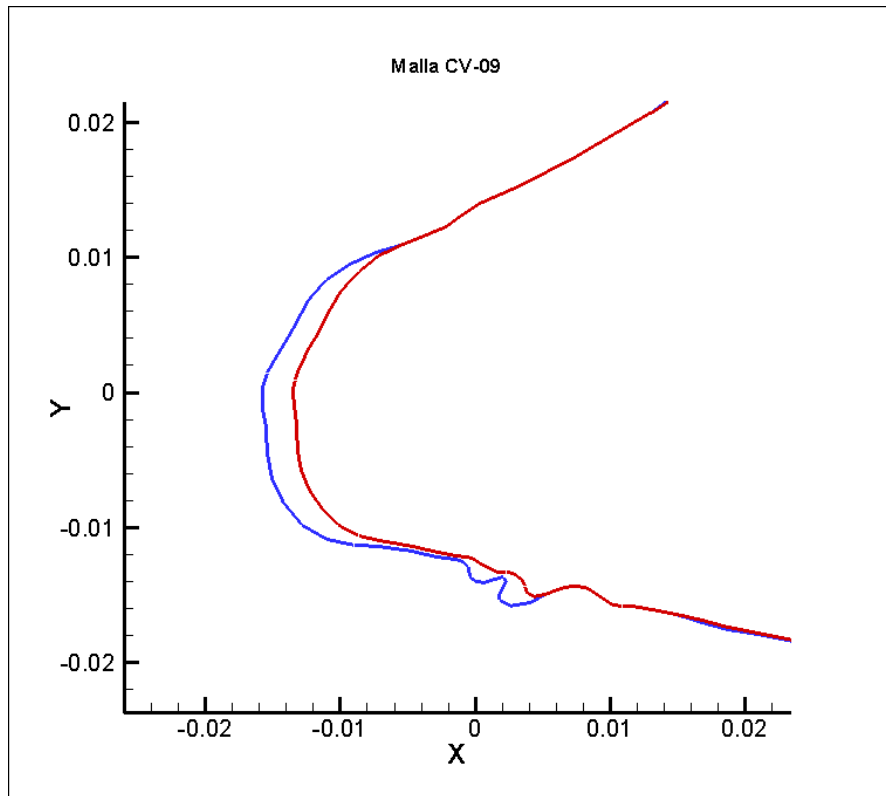


Figura 4.11: Deformación del perfil. El rojo corresponde al perfil original y en azul el deformado.

### 4.5.2 Perfil CV-15

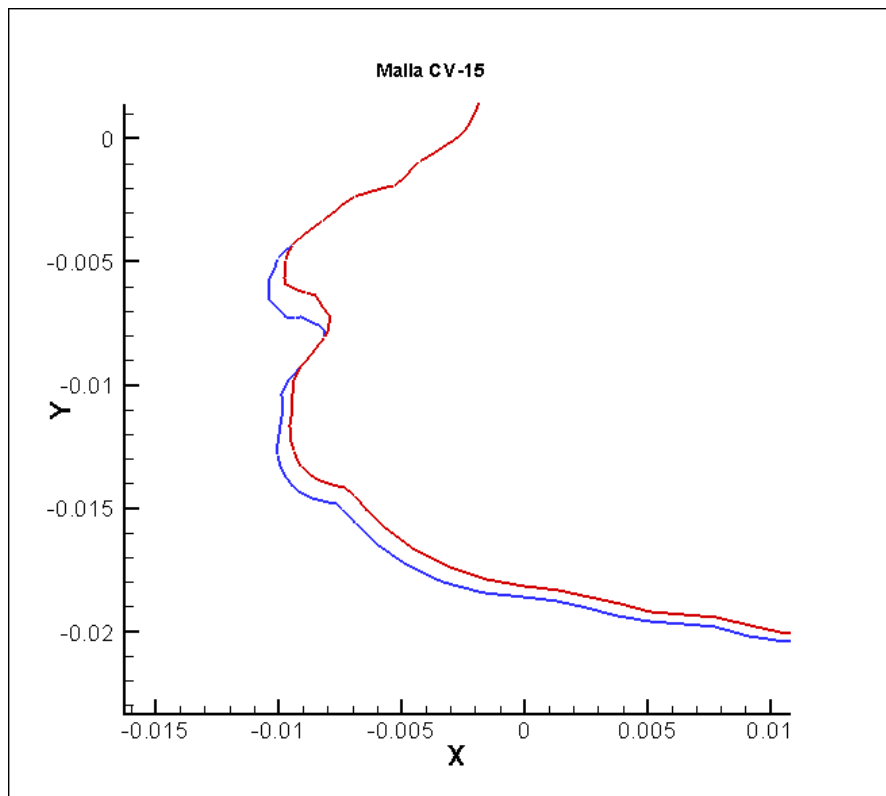


Figura 4.12: Deformación del perfil. El rojo corresponde al perfil original y en azul el deformado.

### 4.5.3 Perfil CV-16

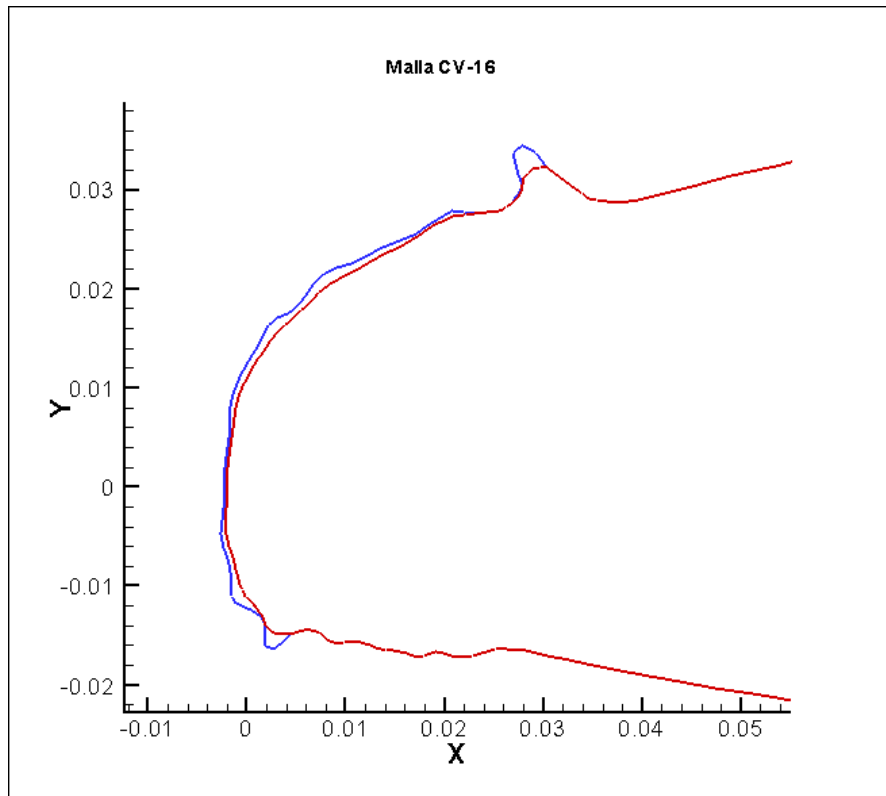


Figura 4.13: Deformación del perfil. El rojo corresponde al perfil original y en azul el deformado.

### 4.5.4 Tiempo de interpolación

Como se ha comentado al principio, una de las principales utilidades de la deformación de mallas mediante interpolación es el ahorro de tiempo respecto a la generación de nuevas mallas. En la Figura 4.14 se muestra el tiempo que dura el proceso de interpolación en función del número de nodos que contiene la malla, que se puede aproximar mediante el polinomio de segundo grado

$$t(n) = 10^{-9}n^2 + 10^{-5}n ; n = \text{número de nodos} \quad (4.1)$$

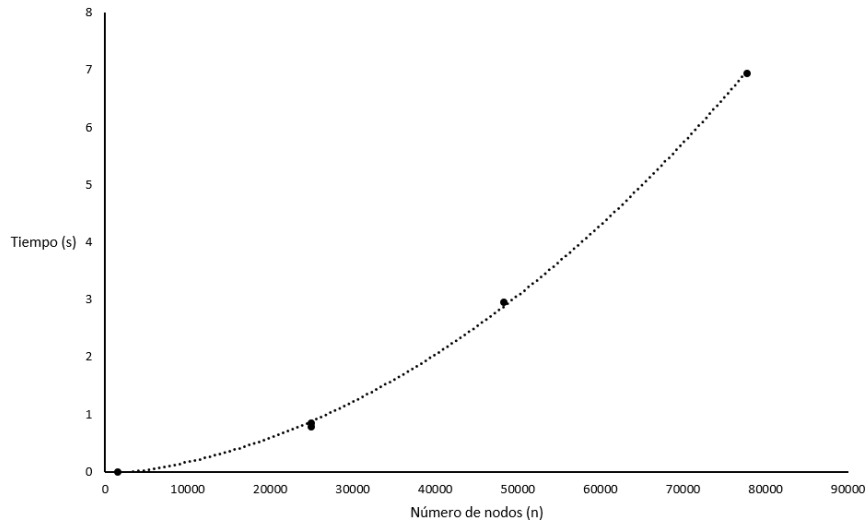


Figura 4.14: Tiempo en segundos que dura el proceso de interpolación en función del número de nodos de la malla.

## 4.6 Calidad de las mallas obtenidas

De la misma forma que para la interpolación global, se va a calcular la calidad de las mallas utilizando las mismas métricas. Debido a la gran deformación de estas mallas la calidad debe ser menor.

La calidad de los elementos más próximos al borde de ataque es menor que la obtenida en los casos anteriores. Sin embargo, fuera de la capa límite la calidad es buena al igual que sucedía utilizando la interpolación global como se puede observar en las Figuras 4.15, 4.17 y 4.22. Estos elementos son suficientemente grandes por lo que una pequeña deformación de sus nodos no afecta prácticamente a su geometría.

Los elementos con mala calidad son los que se encuentran cerca del perfil en las zonas de mayor deformación debido a que cambian su forma drásticamente como en las Figuras 4.16, 4.18, 4.20 y 4.21. Esto se puede ver también comparando los resultados obtenidos con y sin la malla en las Figuras 4.16, 4.18, 4.19 y 4.20 donde los elementos están distorsionados y “se retuercen” cuando se forman picos.

## 4.6.1 Perfil CV-09

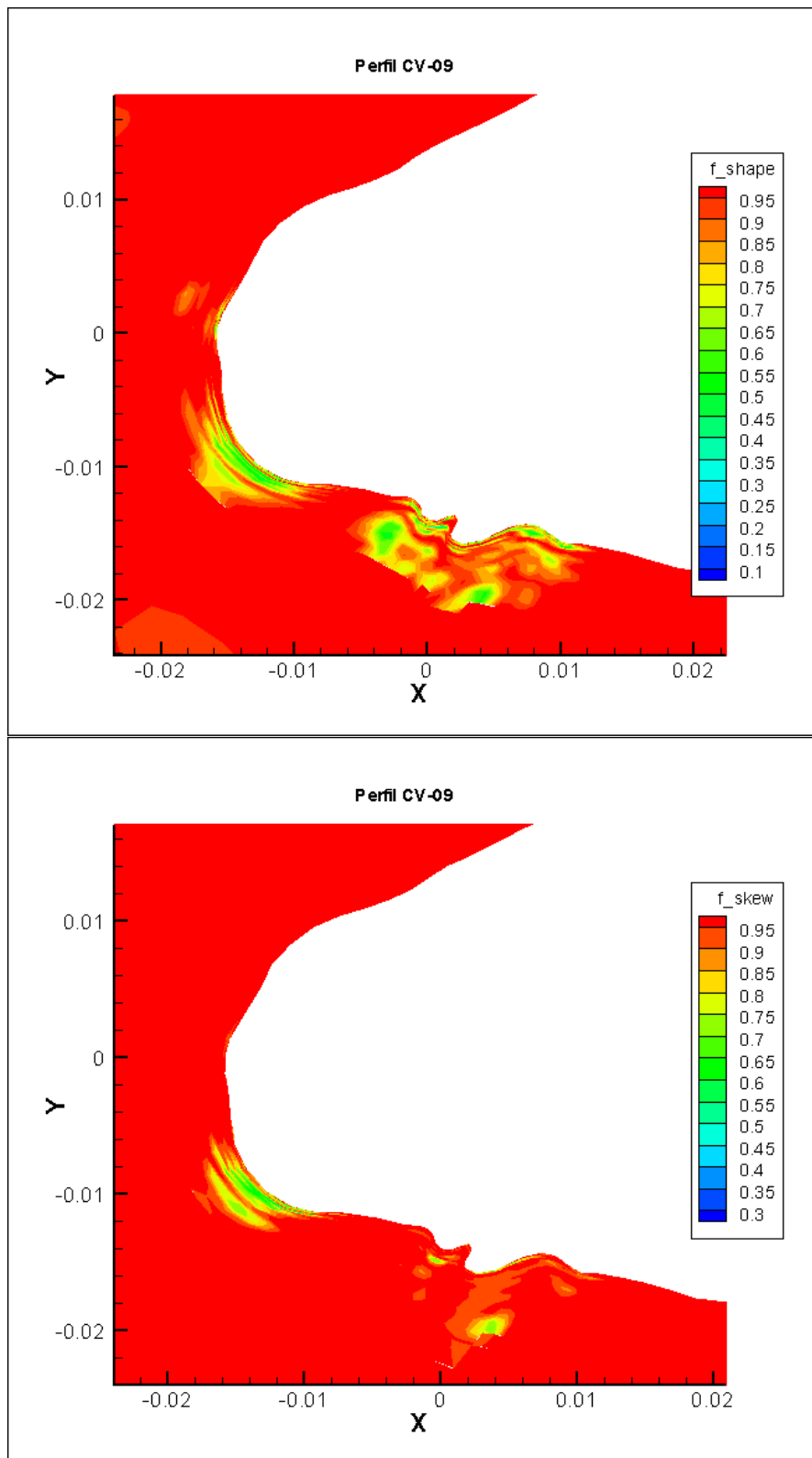


Figura 4.15: Resultados de  $f_{shape}$  (imagen superior) y de  $f_{skew}$  (imagen inferior) para el perfil CV-09.

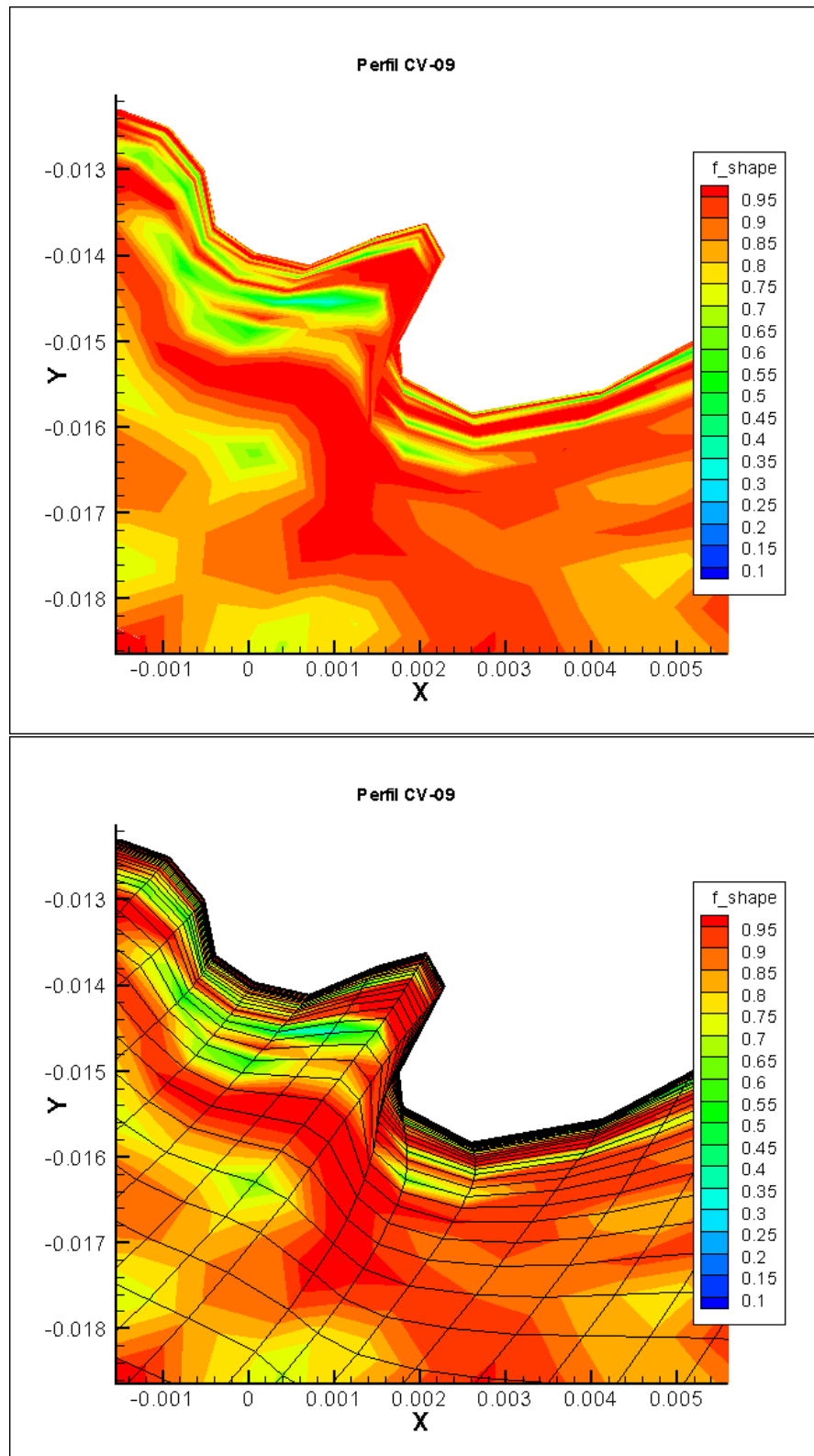


Figura 4.16: Resultado de  $f_{shape}$  en la zona con deformación más abrupta para el perfil CV-09. En la imagen inferior se incorpora la malla en la que se puede observar que los elementos son irregulares.

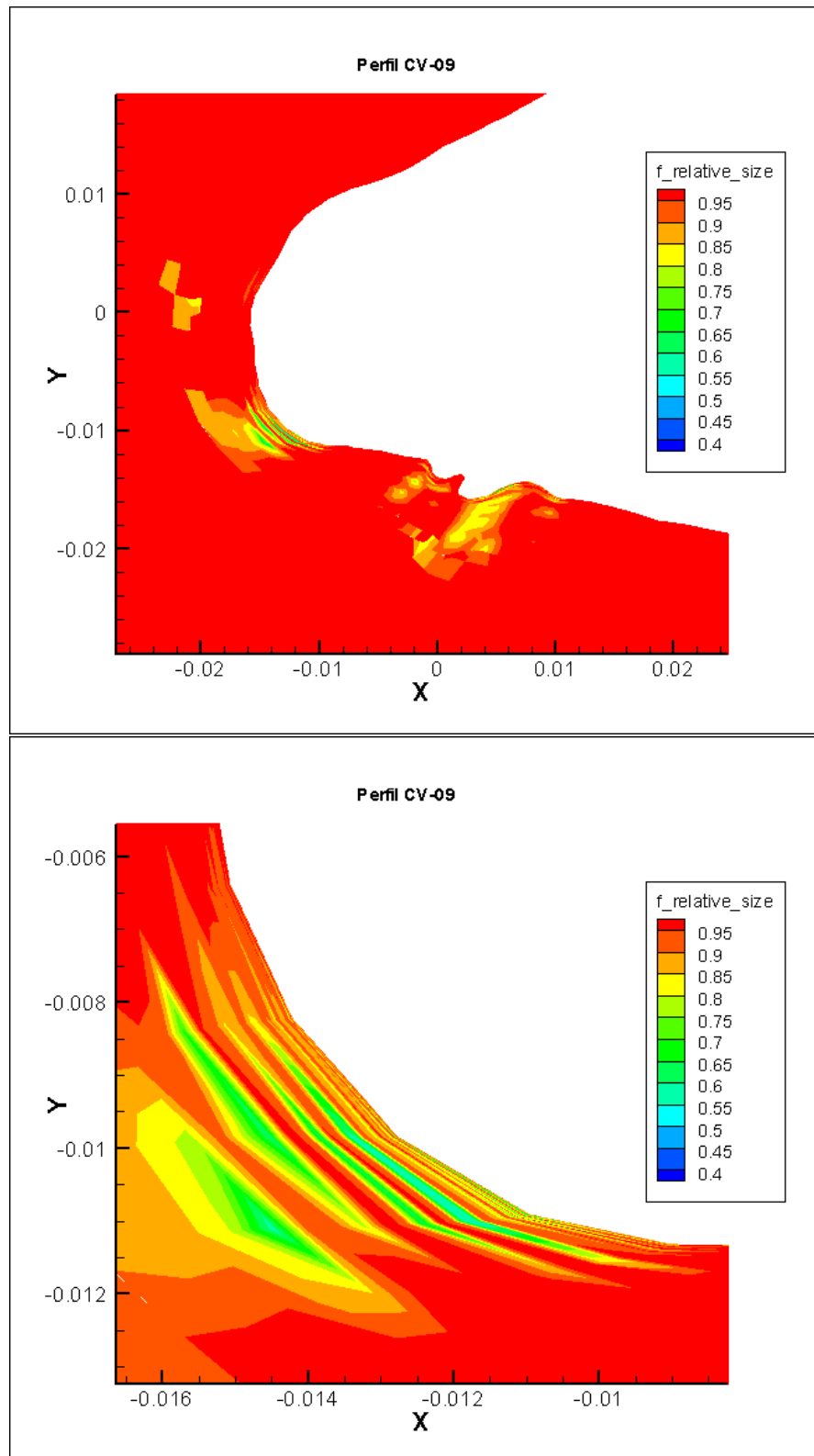


Figura 4.17: Resultados de  $f_{rs}$  para el perfil CV-09. En la imagen superior se muestra el borde de ataque mientras que en la inferior se muestra una pequeña zona con gran deformación.



## 4.6.2 Perfil CV-15

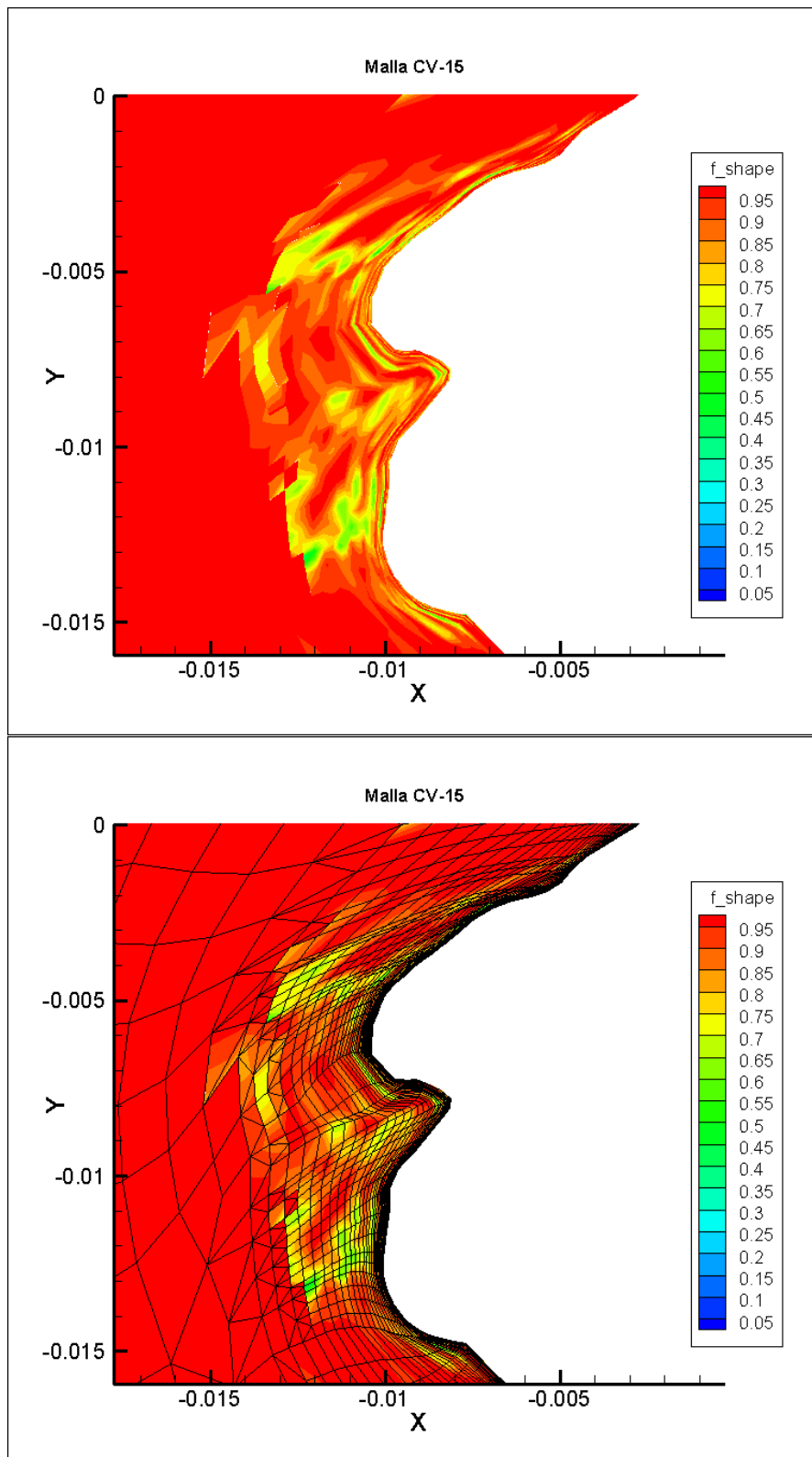


Figura 4.18: Resultados de  $f_{shape}$  para la malla CV-15. En la imagen inferior se añade la malla.

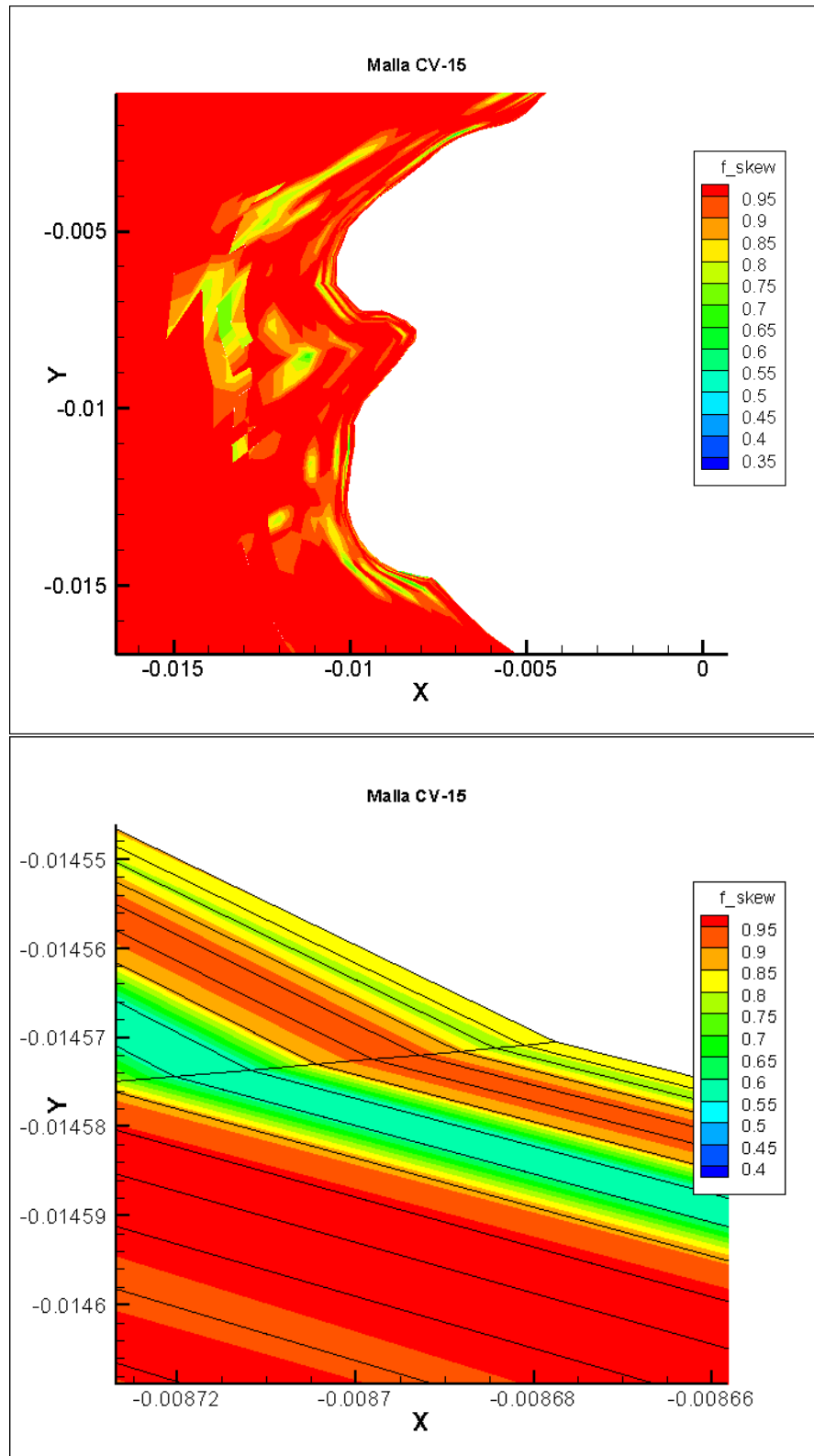


Figura 4.19: Resultados de  $f_{skew}$  para la malla CV-15. En la imagen superior se muestra el borde de ataque y en la inferior se incluye la malla en los elementos más próximos al perfil de la capa límite.

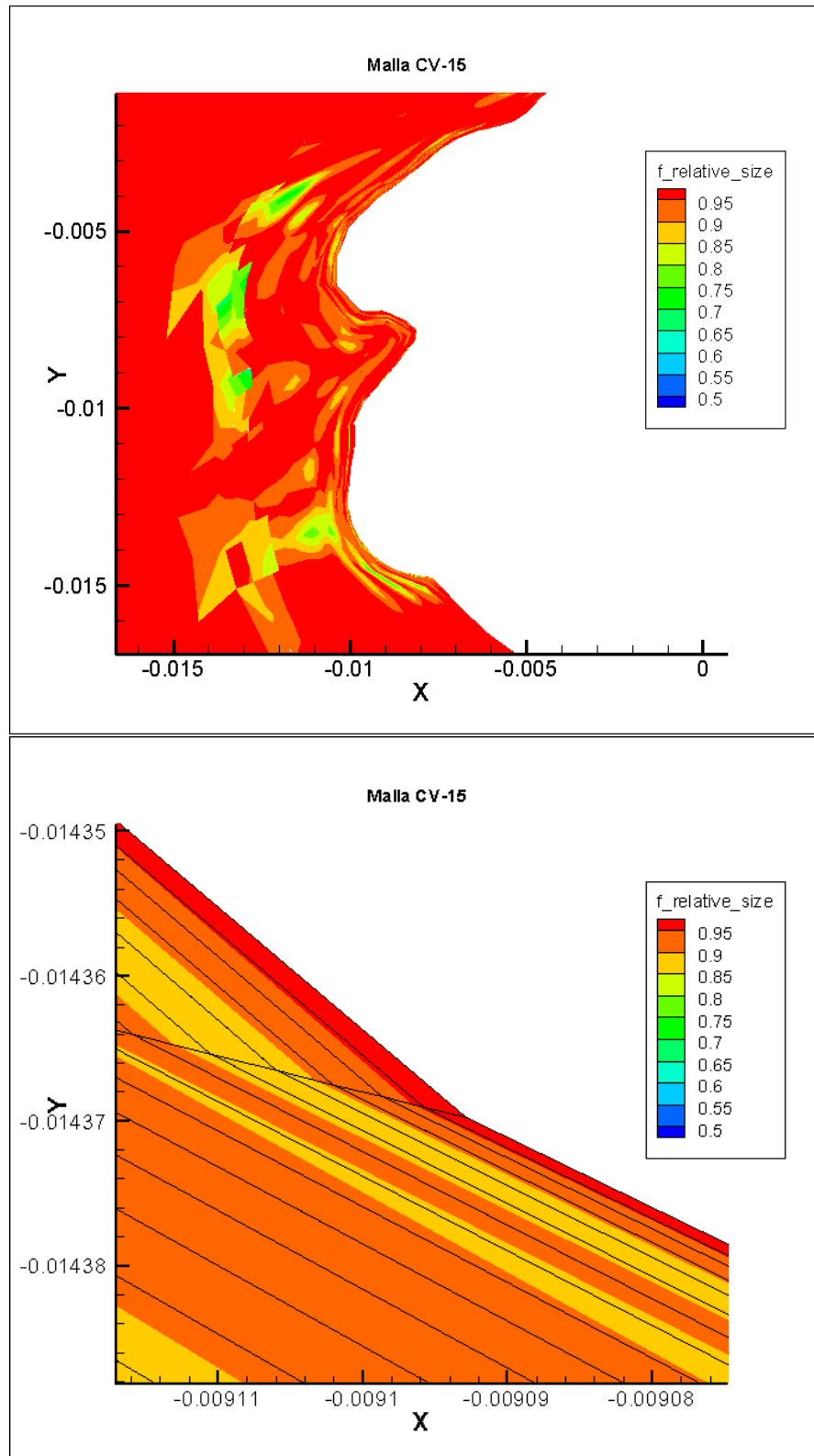


Figura 4.20: Resultados de  $f_{rs}$  para la malla CV-15. En la imagen superior se muestra el borde de ataque y en la inferior se incluye la malla en los elementos más próximos al perfil de la capa límite.

## 4.6.3 Perfil CV-16

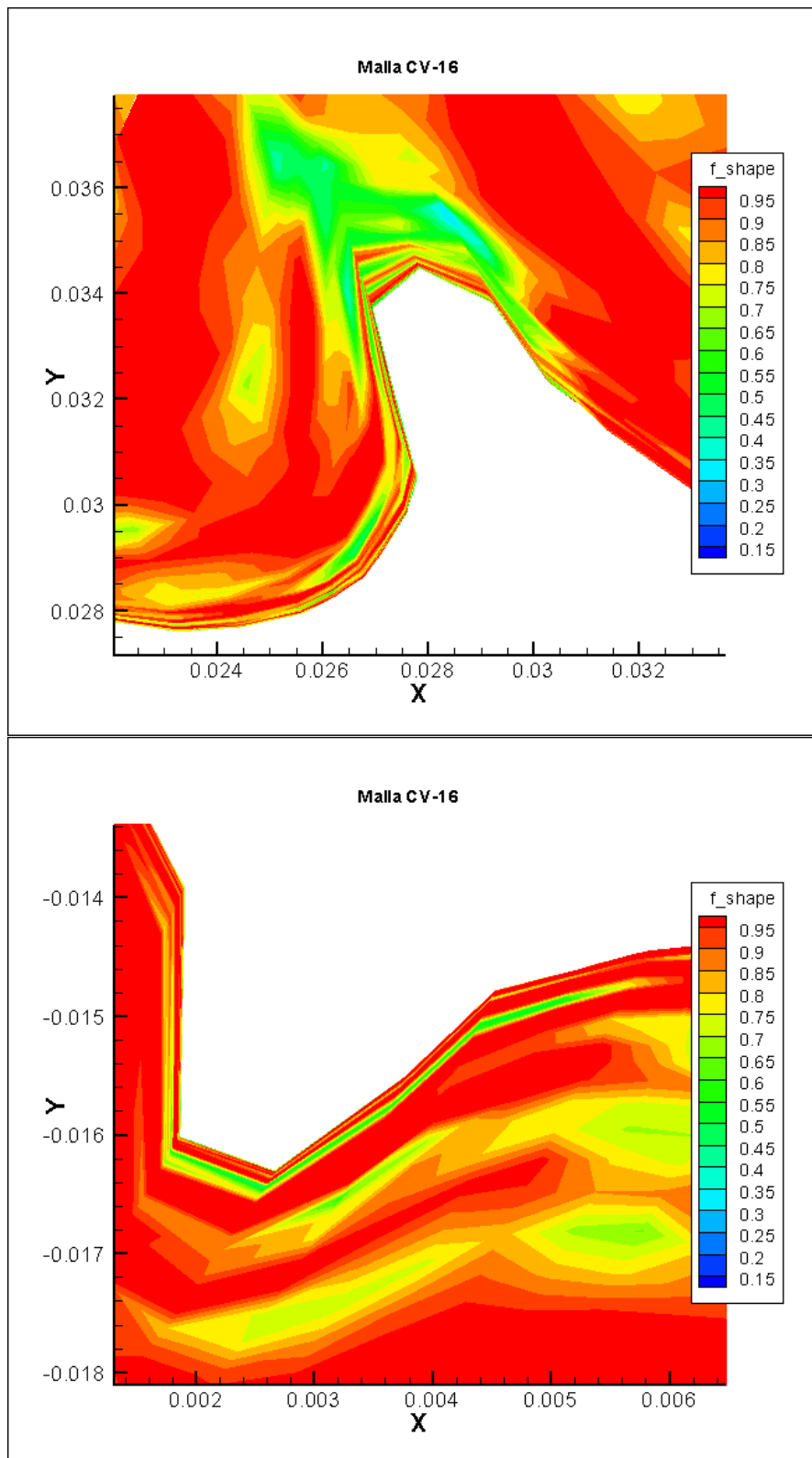


Figura 4.21: Resultados de  $f_{shape}$  para la malla CV-16. En la imagen superior se muestra el pico que sobresale en el extradós del perfil y en la inferior el del intradós.

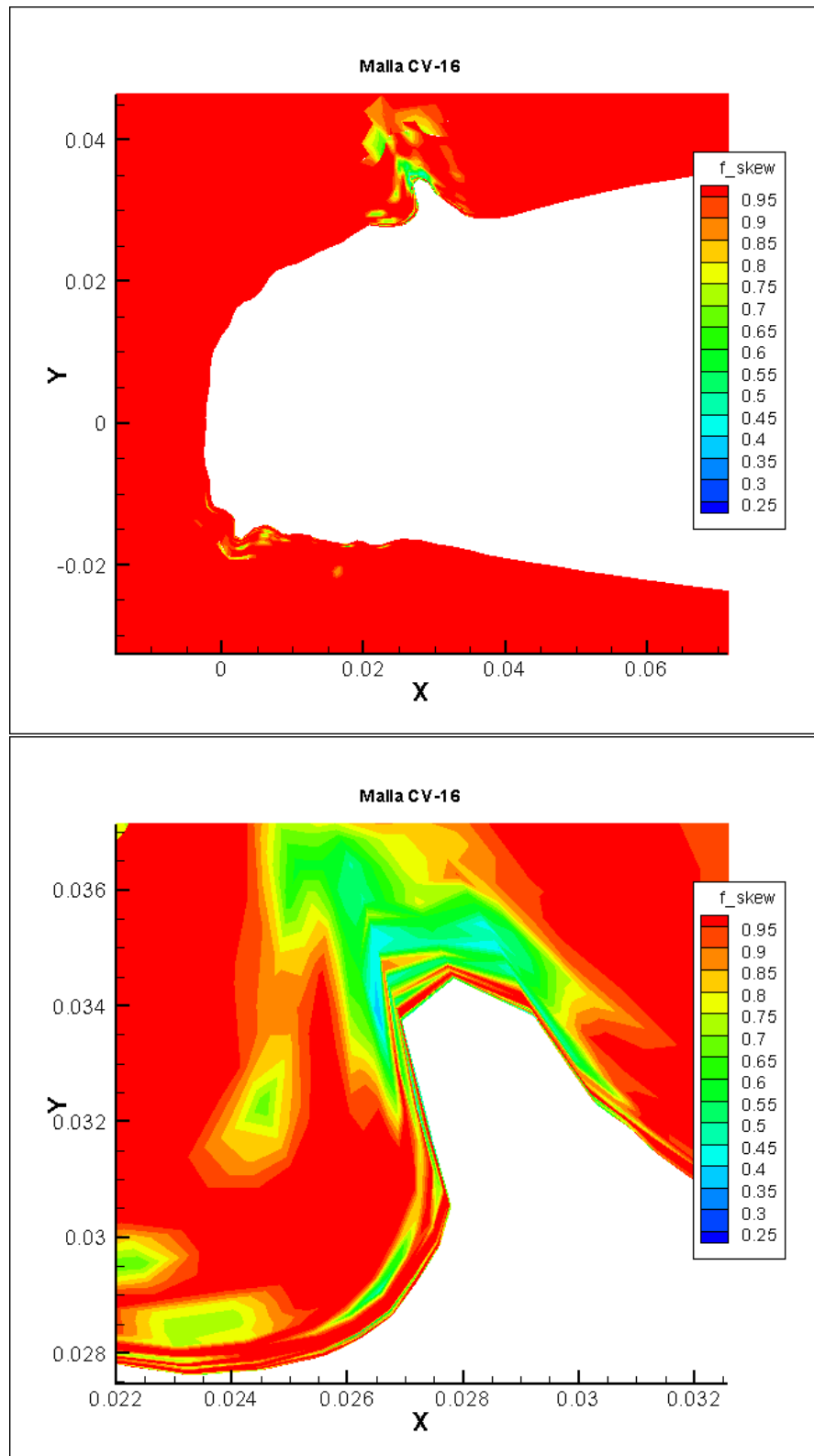


Figura 4.22: Resultados de  $f_{skew}$  para la malla CV-16. En la imagen superior se muestra el borde de ataque y en la inferior se detalla el pico que sobresale en el extradós.

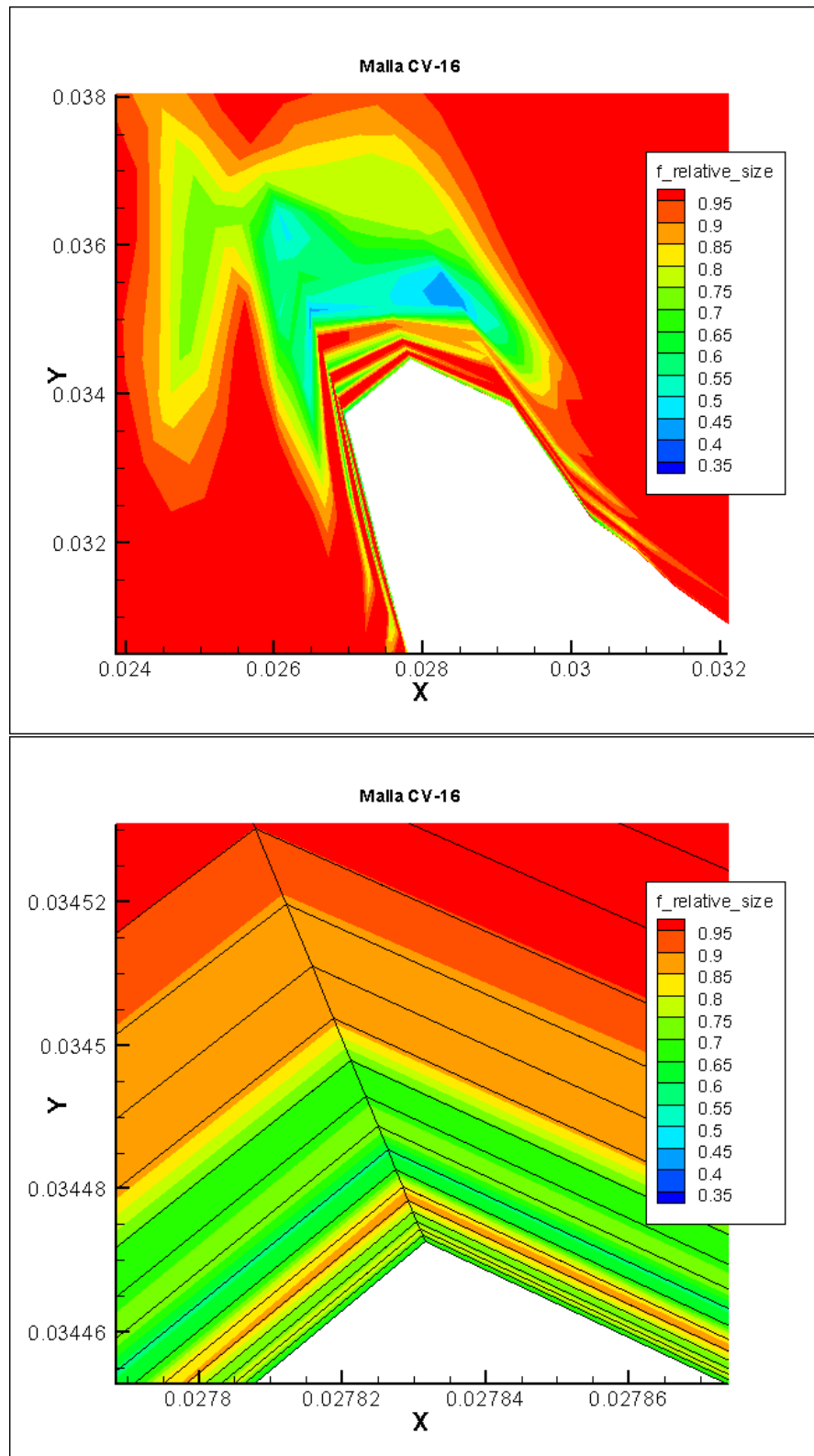


Figura 4.23: Resultados de  $f_{rs}$  para la malla CV-16. En la imagen superior se muestra el pico que sobresale en el extradós del perfil y en la inferior la capa límite incluyendo la malla.

## Capítulo 5

# Conclusiones

A la vista de los resultados obtenidos, la transferencia de deformaciones en mallas CFD resulta muy útil frente a la generación de nuevas mallas ya que disminuye considerablemente el tiempo de resolución del problema.

La interpolación global es fácil de implementar y proporciona buenos resultados en el caso de mallas con un número de nodos pequeño y con una deformación del perfil suave. Para ello es necesario resolver un sistema de ecuaciones por lo que cuando el número de nodos aumenta resulta inviable utilizar este método ( $N_{operaciones} \propto N_{nodos}^2$ ). En este caso y cuando la deformación es abrupta es necesario utilizar otros métodos. Mediante la interpolación local se obtienen buenos resultados con un coste computacional también bajo, aunque el método es más complicado de implementar.

Debido a que la malla se modifica se reduce la calidad que tenía originalmente. Para comprobar que los resultados obtenidos son suficientemente buenos se pueden utilizar métricas de calidad, que además dan información de las funciones con las que se obtienen mejores resultados en cada caso.

Cuando los elementos son grandes y la deformación pequeña los resultados son buenos con la función *Spline* y la familia *Wendland*, siendo la *Wendland*  $C^0$  y la  $C^2$  la que mejor resultados proporciona mientras que con la  $C^4$  la calidad de los elementos suele disminuir. A su vez, el factor  $\rho_f$  influye en estas funciones y para valores muy pequeños la calidad es muy baja por lo que se deben evitar.

# Bibliografía

- [1] HIRCH. *Structured and Unstructured Grid Properties*
- [2] T.C.S. RENDALL AND C.B. ALLEN. *Unified fluid–structure interpolation and mesh motion using radial basis functions.*
- [3] A. BECKERT, H. WENDLAND. *Multivariate interpolation for fluid-structure-interaction problems using radial basis functions.*
- [4] M. CORDERO-GRACIA, M. GÓMEZ, J. PONSIN, E. VALERO. *An interpolation tool for aerodynamic mesh deformation problems based on octree decomposition.*
- [5] PATRICK M. KNUPP. *Algebraic mesh quality metrics.*