

Implementação do Método Simplex

Bruno Sesso 8536002

Gustavo Estrela de Matos 8536051

19 de Junho de 2015

1 Introdução

1.1 Apresentação do problema

Os problemas de Programação Linear (PL) são casos específicos de otimização combinatória em que a função objetivo e as restrições são ambos lineares. Portanto a função objetivo é da forma $c^T x$ e as restrições são da forma $a_i^T x \geq b_i$ ou $a_i^T x \leq b_i$, com $c, x, a_i \in \mathbb{R}^n$ e $b_i \in \mathbb{R}$.

Multiplicando por -1 todas as restrições da forma $a_i^T x \geq b_i$, podemos escrever qualquer PL como:

$$\begin{array}{ll}\text{minimizar} & c^T x \\ \text{sujeito a} & Ax \leq b, \\ & A \in \mathbb{R}^{m \times n} \text{ e } b \in \mathbb{R}^m.\end{array}$$

Também é possível mostrar que qualquer PL pode ser escrito na forma:

$$\begin{array}{ll}\text{minimizar} & c^T x \\ \text{sujeito a} & Ax = b, \\ & x \geq 0 \text{ [1].}\end{array}$$

Se for escrito dessa maneira, dizemos que o problema está no formato padrão. Adotaremos esse formato durante todo o trabalho.

Se vale que $Ax^1 = b$ e $x^1 \geq 0$ dizemos que x^1 é um ponto viável. O conjunto $P = \{x | Ax = b, x \geq 0\}$ de todos os pontos viáveis é chamado conjunto viável.

Uma solução ótima do problema é um ponto $x^1 \in P$ que minimiza ¹ a função objetivo c . Se x^1 existe, dizemos que o custo ótimo é $c^T x$. Se x^1 não existe, ou não existem pontos viáveis ($P = \emptyset$), ou podemos diminuir o custo o quanto quisermos e dizemos que o custo ótimo é $-\infty$.

1.2 Objetivos do trabalho

Neste trabalho, temos o objetivo de desenvolver, na linguagem Octave, o algoritmo simplex para resolver problemas de Programação Linear.

¹Se o interesse for maximizar $c^T x$, podemos simplesmente conseguir um problema equivalente em que o objetivo seja minimizar $-c^T x$.

2 Conceitos fundamentais

Antes de introduzirmos o funcionamento do nosso algoritmo, precisamos definir alguns conceitos que são fundamentais para garantir sua correteza.

Seja o nosso problema de Programação Linear o seguinte:

$$\begin{array}{ll}\text{minimizar} & c^T x \\ \text{sujeito a} & Ax = b \\ & x \geq 0 \\ \text{com} & c, x \in \mathbb{R}^n, A \in \mathbb{R}^{m \times n} \text{ e } b \in \mathbb{R}^m.\end{array}$$

Além disso, vamos usar a notação a_i para a i -ésima linha de A e A_i para a i -ésima coluna de A .

2.1 Restrições e degenerescência

Uma restrição $a_i^T x \geq b_i$ (ou $a_i^T x \leq b_i$), com $a_i \in \mathbb{R}^n$ e $b_i \in \mathbb{R}$, é uma *restrição ativa* em um ponto $x^1 \in \mathbb{R}^n$ se $a_i^T x^1 = b_i$. Uma restrição de igualdade é sempre ativa. Um conjunto de restrições será dito LI se os vetores a_i correspondentes forem LI.

Diremos que x^1 uma solução viável básica é *degenerada* se existem mais de n restrições ativas LI nesse ponto. Como as m restrições de igualdade são sempre cumpridas, temos que as soluções básicas degeneradas possuem mais do que $n - m$ componentes nulas, enquanto que as não degeneradas possuem exatamente $n - m$.

2.2 Soluções Viáveis Básicas

Dizemos que um ponto $x \in \mathbb{R}^n$ do conjunto viável P é uma *solução viável básica*, se existem n restrições ativas em x que são LI. Note que para problemas no formato padrão, existem sempre m restrições ativas LI vindas de $Ax = b$, e as outras $n - m$ vem, necessariamente de $x \geq 0$. Portanto, uma solução viável básica possui ao menos $n - m$ componentes nulas.

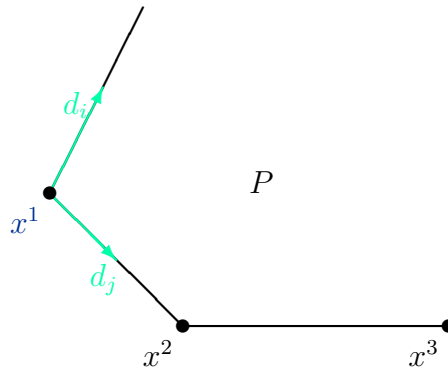
Se x^1 é uma solução básica não degenerada e seja $B(1), \dots, B(m)$ os índices das componentes não nulas de x . A matriz $B = [A_{B(1)}, \dots, A_{B(m)}]$ é chamada *matriz básica* associada a x^1 .

Se o conjunto P tem uma solução viável básica, então ou o custo ótimo é $-\infty$ ou existe $x^1 \in P$ solução viável básica que é ótimo, ou seja, o custo de qualquer ponto do conjunto viável é maior ou igual do que o custo de x^1 . Portanto, na solução de um PL com ao menos uma solução viável básica, podemos limitar a esses elementos a nossa busca por um ponto de custo ótimo [1].

2.3 Direções básicas

Se x^1 é um solução viável básica de P , com índices básicos $B(1), \dots, B(m)$. Dizemos que $d \in \mathbb{R}^n$, tal que $d_j = 1$, $Ad = 0$ ($A(x + \theta d) = b$) e $d_i = 0$ para todo $i \notin \{B(1), \dots, B(m)\}$, é a j -ésima direção básica partindo de x^1 . Seja $d_B = [d_{B(1)}, \dots, d_{B(m)}]$, como $A(x + \theta d) = b$, temos que $d_B = -B^{-1}A_j$. Usaremos $u = -d_B = B^{-1}A_j$ por facilidade de notação, durante o trabalho.

A figura 2.3 dá um exemplo de direções básicas, d_i e d_j a partir de uma solução viável básica x^1 . Note que o poliedro pode ou não limitar um θ tal que o ponto $y = x^1 + \theta * d$ (d direção básica) seja viável, e como veremos em 2.5 isso pode implicar em custo $-\infty$ se nessa direção o custo diminui.



2.4 Custos reduzidos

Seja x^1 uma solução viável básica, B a matriz básica associada e $c_B = [c_{B(1)}, \dots, c_{B(m)}]$. Definimos, para cada $j \in \{1, \dots, n\}$ o custo reduzido:

$$\bar{c}_j = c_j - c_B^T B^{-1} A_j.$$

Seja x^1 uma solução viável básica e \bar{c} o vetor de custos reduzidos correspondente. Sabemos que se $\bar{c} \geq 0$, então x^1 é ótimo. Além disso, se x^1 for ótimo e não degenerado, então $\bar{c} \geq 0$ [1]. Portanto, se estivermos em uma solução viável básica e $\bar{c} \geq 0$, então estamos em um ponto ótimo.

Note que ao escolhermos uma direção viável básica, o custo de um ponto $y = x^1 + \theta d_j$ é $c^T(x^1 + \theta d_j) = c^T x^1 + \theta(c_j - c_B^T B^{-1} A_j) = c^T x^1 + \theta \bar{c}$. Portanto, podemos dizer que o custo reduzido representa a variação do custo ao percorrer uma direção básica.

2.5 Soluções Viáveis Básicas adjacentes

Seja x^1 uma solução viável básica com índices básicos $B(1), \dots, B(m)$. Uma solução viável básica é *adjacente* a x^1 se compartilha $m - 1$ índices com x^1 . Para achar uma solução viável básica adjacente, vamos usar as direções básicas, pois elas forçam o crescimento de uma variável j não-básica, mantendo $Ax = b$ e $x \geq 0$. Veremos que para um $\theta \geq 0$, o ponto $x^1 + \theta d_j$ é solução viável básica adjacente a x^1 , com d_j como foi definido em 2.4.

Vamos tomar $\theta = \min_{i=1, \dots, m | u_i > 0} \{x_{B(i)}/u_i\}$ e ver que $x^2 = x^1 + \theta d_j$ é de fato uma solução viável básica adjacente a x^1 . Caso todas as componentes de u_i sejam menores ou igual a zero e o custo reduzido na direção j menor do que zero teremos que o problema tem custo ótimo $-\infty$, como será explicado a seguir.

Se θ definido acima não existe, temos que todas as componentes de u_i são menores ou igual a zero ($d \geq 0$), logo qualquer ponto $x^2 = x^1 + \theta d$ é viável com $\theta \geq 0$, pois a restrição $Ax^2 = b$ é verificada (por construção), e $x_j^2 = x_j^1 + \theta \geq x_j^1 \geq 0$, e para i básico $x_j^2 = x_j^1 + \theta d_j \geq x_j^1 \geq 0$. Se ainda tivermos que o custo diminui nessa direção, poderemos diminuir o custo o quanto quisermos e a solução do problema será $-\infty$.

Se $\theta \in \mathbb{R}$, como $d_i = 0 \ \forall i \in \{B(1), \dots, B(m)\}, i \neq j$, temos que para essas mesmas componentes x^2 é nulo. Logo, temos $n - 1$ restrições ativas LI em x^2 . Suponha que para $l \in \{1, \dots, m\}$ vale que $\theta = x_{B(l)}/u_l$, então $x_{B(l)}^2 = x_{B(l)}^1 + (-x_{B(l)}^1/d_{B(l)}) * d_{B(l)} = 0$ (diremos que $B(l)$ sai da base), logo existem n restrições ativas LI em x^2 . Além disso, por construção, vale que $Ax = b$ e $x \geq 0$ para variáveis não básicas e para $x_B(l)$. Para $B(k)$ básico diferente de $B(l)$, temos que $x_B^2(k) \geq x_B^1(k) + (-x_B^1(k)/d_{B(k)}) * d_{B(k)} = 0$.

Portanto x^2 é solução viável básica adjacente a x^1 e, como a base de x^2 é $\{B(1), \dots, B(l-1), j, B(l+1), \dots, B(m)\}$, x^2 é adjacente a x^1 .

3 Fase 1 do simplex

Para iniciar a fase 2 do algoritmo simplex precisamos de uma solução viável básica x^1 , a sua base associada e a inversa da matriz básica. Nesta seção explicaremos o funcionamento da fase 1 do método simplex, responsável por descobrir estes parâmetros.

Para descobrir esses parâmetros vamos criar um problema auxiliar de programação linear:

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} && \sum_{i=1}^m y_i \\ &\text{sujeito a} && [A \mid I] \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \leq b, \\ &\text{com} && A \in \mathbb{R}^{m \times n}; b, y \in \mathbb{R}^m; I \in \mathbb{R}^{m \times m} \\ &&& x, y \geq 0 \end{aligned}$$

Chamaremos as variáveis de y artificiais, e a matriz $[A \mid I]$ de \bar{A} .

Note que o ponto $\overbrace{[0, \dots, 0]}^n \mid b$ é uma solução viável básica do problema auxiliar, assumindo $b \geq 0$, com índices básicos $n+1, \dots, n+m$ e matriz básica $B = I$. Portanto, temos os parâmetros necessários para embalar a fase 2 do simplex para o problema auxiliar.

Assumimos no último parágrafo que $b \geq 0$. É fácil verificar que isso não implica em uma perda de generalidade, pois, se $b_i < 0$, basta multiplicar a i -ésima restrição por -1 .

3.1 Custo ótimo do problema auxiliar e viabilidade do problema original

Observe que qualquer ponto viável do problema tem custo maior ou igual a zero. Além disso, se existe uma solução viável x^1 do problema original, o ponto $[x^1 \mid 0, \dots, 0]$ é uma solução viável com custo zero, portanto com custo ótimo. Sendo assim, temos que se o problema original possui solução viável, então o problema auxiliar tem custo ótimo igual a zero. Na contra-positiva, se acharmos uma solução ótima para o problema auxiliar com custo diferente de zero, então o problema original é inviável.

3.2 Solução do problema auxiliar

Como o custo do problema auxiliar é sempre maior ou igual a zero, o custo ótimo nunca será $-\infty$, portanto a fase 2 sempre descobrirá alguma solução viável básica ótima. Se o custo dessa solução for maior que zero, o problema original é inviável, como explicado na seção 3.1. Se o custo for zero, a solução do problema auxiliar $[x|y] = [x|0, \dots, 0]$ também será uma solução do problema original.

Porém, mesmo que $[x|0, \dots, 0]$ seja uma solução viável básica do problema original, é possível que a base dada pela fase 2 do problema auxiliar tenha índices das variáveis artificiais, que serão eliminadas para iniciar a fase 2 para o problema original. Veremos na próxima seção como remover os índices artificiais da base.

3.3 Remoção de índices artificiais da base

Suponha que temos um índice $l > m$ artificial que esteja na base. Queremos tirá-lo da base e adicionar um índice $j \leq m$ na base. Veremos agora, como descobrir tal índice e como mudar a base.

Suponha, sem perda de generalidade, que apenas os $k < m$ primeiros índices básicos não são de variáveis artificiais. Para o índice j na base, devemos garantir que A_j é LI com $\{A_{B(1)}, \dots, A_{B(k)}\}$. Suponha que a matriz básica é B e que queremos remover a l -ésima variável da base, por ser artificial. Veja que $B^{-1}A_{B(i)} = e_i$ para $1 \leq i \leq k$, portanto, basta escolher j não artificial tal que $(B^{-1}A_j)_l = A_j \neq 0$ e teremos garantia de que estamos escolhendo uma coluna LI para formar a base.

Se não houver j como descrito acima, teremos que $(B^{-1}A_j)_l = 0$ para todo $1 \leq j \leq m$. Veja que se g^T é a l -ésima linha de B^{-1} , então $g^T A = 0$, ou seja, $g_1 a_1 + \dots + g_m a_m = 0$, portanto as linhas de A são LD e podemos então, eliminar a l -ésima linha de A do nosso problema [1].

Veja abaixo o pseudocódigo para remoção de índices artificiais da base:

```
function RemoveAritificiais( $A, I, B^{-1}, m, n$ )  
  for all  $\{l \in \{B(1), \dots, B(m)\} | l > n\}$  do  
     $candidates \leftarrow \{i \in I.n | i < n\}$   
     $x \leftarrow length(candidates)$   
     $k \leftarrow 1;$ 
```



```

while  $k \leq x$  and  $B_l^{-1}A_{I.n(candidates(k))}$  do
     $k \leftarrow k + 1$ 
end while
if  $k > x$  then
     $m \leftarrow m - 1$ 
    remova  $l$ -ésima linha e  $l$ -ésima coluna de  $B$ 
    remova  $l$ -ésima linha de  $A$ 
    remova a  $l$ -ésima entrada de  $I.b$ 
    remova a  $l$ -ésima entrada de  $b$ 
else
     $u \leftarrow B^{-1}A_k$ 
    atualizaBase( $I, invB, u, l, k, m$ )
end if
end for
end function

```

4 O algoritmo

4.1 Objetivo

Nossa motivação é solucionar um problema de programação linear (PL) que consiste em minimizar uma função linear (função de custos) sujeita a restrições lineares. Agora que temos os conceitos necessários, vamos desenvolver um algoritmo para solucionar tal problema.

4.2 O que temos a princípio

Dado o problema:

$$\begin{array}{ll}\text{minimizar} & c^T x \\ \text{sujeito a} & Ax = b \\ & x \geq 0\end{array}$$

Queremos achar o x que satisfaça todas as restrições e minimize $c^T x$. Portanto temos como informação inicial:

A : Matriz $m \times n$ de restrições

b : Vetor de dimensão m

c : Vetor de custos de dimensão n

m : Número de restrições de igualdade

n : Número de variáveis

Logo nossa função que calcula x terá a seguinte forma:

$$\text{simplex}(A, b, c, m, n)$$

4.3 O que recebemos no final

Como já vimos antes, temos três possíveis cenários de resultados da nossa função:

1. O problema é inviável, portanto não existe solução ótima

2. Existe solução ótima, logo o custo ótimo é um valor finito
3. O custo ótimo é $-\infty$, e não existe solução ótima

Logo, nossa função deve retornar informação suficiente para sabermos em qual dos três casos estamos e os valores relevantes para cada um. Com isso em mente, nossa função tem o seguinte esqueleto:

[ind x d] = simplex(A, b, c, m, n)

Onde:

Caso	ind	x	d
1	1	vetor vazio	vetor vazio
2	0	solução ótima	vetor vazio
3	-1	ultima svb computada	direção que vai a $-\infty$

4.4 A função simplex

Nos preocupando somente com o caso onde o problema tem solução, nosso algoritmo seria algo próximo do seguinte:

```

function simplex(A, b, c, m, n)
    multiplica restrições com  $b < 0$  por -1
     $A' \leftarrow [A \mid I]$ 
     $x' \leftarrow \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix}$ 
     $c' \leftarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 
     $B \leftarrow \begin{bmatrix} A_{B(1)} & A_{B(2)} & \dots & A_{B(m)} \end{bmatrix}$ 
     $x \leftarrow \text{fase2}(A', b, c', m, m+n, x')$ 

     $x \leftarrow \text{fase2}(A, b, c, m, n, x)$ 
    return x
end function

```

Nota-se que o algoritmo é dividido em 3 partes:

1. Modificar problema inicial, adicionando m variáveis artificiais

2. Encontrar solução inicial para o problema inicial resolvendo o modificado
3. Resolver o problema inicial

Podemos resolver os dois problemas, dado uma solução inicial, graças a função `fase2` que resolve problemas de programação linear a partir de uma solução viável básica inicial. Imaginando que já temos essa função, nosso algoritmo final em octave é:

```
1 function [ind, x, d] = simplex(A, b, c, m, n)
2     % Arruma restricoes para que b > 0
3     for i = 1 : m
4         if (b < 0)
5             b *= -1;
6             A(i, :) *= -1;
7         end
8     end
9
10    % Cria problema auxiliar para achar primeira solucao
11    % para o problema inicial
12    A = [A, eye(m)];
13    x = [zeros(n, 1); b];
14    c1 = [zeros(n, 1); ones(m, 1)];
15    I = struct('b', [n + 1 : n + m], 'n', [1 : n]);
16    invB = eye(m);
17
18    % Resolve problema auxiliar
19    [ind, x, d, I, invB] = fase2(A, b, c1, m, n + m, x, I, invB);
20
21    for artific = n + 1 : n + m
22        if abs(x(artific)) > 1e-10
23            % Problema Inviavel
24            ind = 1;
25            x = [];
26            d = [];
27            printf("\n\nO problema e inviavel\n");
28            return;
29        end
30    end
31
32    % Remove vaiaveis artificiais da base. (nao altera x)
33    [I, A, invB, m] = removeArtificiais(A, I, invB, m, n, b);
34    x = x(1 : n);
```

```

35
36
37 % Resolve problema inicial, com solucao encontrada
38 [ind, x, d, I, invB] = fase2(A, b, c, m, n, x, I, invB);

```

Utilizamos uma estrutura chamada de I que guarda os índices básicos e não básicos, representados respectivamente pelos vetores $I.b$ e $I.n$. Nessa implementação, é fácil ver a correspondência entre as principais etapas vistas quando apresentamos o pseudocódigo. Entre as linhas 3 e 16 modificamos o problema original, nas linhas de 19 a 31 encontramos uma solução inicial e na linha 35 resolvemos o problema.

Uma das melhorias feita para reduzir o espaço utilizado foi armazenar A' e x' (do pseudocódigo) em A e x respectivamente. Ainda assim, há certo desperdício de espaço utilizado em funções, pois o octave não envia argumentos por referência. Ou seja, quando enviamos $invB$ para `fase2`, por exemplo, ao modifica-la dentro da função, o octave cria uma cópia e então altera seus valores. Poderíamos ter feito alterações para que não haja esse tipo de desperdício, mas optamos por um código mais legível e modularizado.

Visando melhorar nosso desempenho, passamos e retornamos alguns argumentos extras nas funções `fase2` e `removeArtificiais`. Dessa forma, evitamos cálculos desnecessários de B^{-1} e dos índices básicos associados à solução x . Nos poupar o cálculo de B^{-1} é uma melhoria significativa, visto que isso tem complexidade $O(n^3)$.

4.5 fase2

A função `fase2` vista na seção anterior, é de grande importância para nosso algoritmo. Dada uma solução viável básica inicial, essa função "anda" pelas soluções adjacentes, buscando uma na qual o custo calculado seja menor que na atual. Tendo a nova solução, voltamos a situação inicial e o algoritmo é executado novamente. Fazemos isso, tomando o cuidado para não andarmos em ciclos, até encontrar uma solução viável básica na qual todas as soluções adjacentes tem custo maior. Assim concluímos que essa solução é ótima. Tendo os conceitos da seção 2, produzimos o seguinte pseudocódigo:

function $fase2(A, b, c, m, n, x)$
 $\bar{c}^T \leftarrow c^T - (c_B^T B^{-1})A_j$

```

while  $!(\bar{c} \geq 0)$  do
     $j \leftarrow j \notin B(1), \dots, B(m), t.q. \bar{c}_j < 0$   $\triangleright$  Usando regra anti-ciclagem
     $u \leftarrow B^{-1}A_j$ 
    if  $u \leq 0$  then
        return  $(-1, d)$   $\triangleright$  Custo ótimo é  $-\infty$ 
    end if
     $\theta \leftarrow \min_{u_l > 0} \frac{x_{B(l)}}{u_l}, l = 1, \dots, m$ 
     $x \leftarrow x + \theta d$ 
     $B(l) \leftarrow j$ 
    atualiza(invB)
     $\bar{c}^T \leftarrow c^T - (c_B^T B^{-1})A_j$ 
end while
return  $(0, x)$ 
end function

```

De forma muito similar, temos nosso algoritmo implementado em octave:

```

1 function [ind, x, d, I, invB] = fase2(A, b, c, m, n, x, I, invB)
2     [redc, u, ij] = custoDirecao(A, invB, c, n, m, I);
3     while redc < 0 % se essa condicao falha, x e otimo
4         [imin, teta] = calculaTeta(x, u, I);
5         if imin == -1 % custo otimo e -inf e u tem a direcao
6             ind = -1;
7             d = u2d(u, I.n(ij), I);
8             return;
9         end
10
11         % atualiza
12         x = atualizax(x, teta, u, I.n(ij), I);
13         [I, invB] = atualizaBase(I, invB, u, imin, ij, m);
14
15         [redc, u, ij] = custoDirecao(A, invB, c, n, m, I);
16     end
17
18     d = [];
19     ind = 0;
20 end

```

4.6 Complexidade

A complexidade da função `simplex` depende basicamente da complexidade de `removeArtificiais` e `fase2`. Primeiramente analisaremos a complexidade das funções auxiliares para então analisar as principais.

4.6.1 Função `custoDirecao`

A função `custoDirecao` é responsável por escolher uma direção básica j com custo reduzido menor do que zero.

```
function custoDirecao( $A, B^{-1}, c, n, m, I$ )  
   $j \leftarrow 1$   
  while  $j \leq n - m$  do  
     $redc = c(I.n(j)) - c_B^T A_{I.n(j)}$   
    if  $redc < 0$  then  
       $ij \leftarrow j$   
       $u \leftarrow B^{-1} A_{I.n(ij)}$   
      return ( $redc, u, ij$ )  
    end if  
     $j \leftarrow j + 1$   
  end while  
  return ( $0, -1, NIL$ )  
end function
```

Apesar de estar dentro do loop principal, $u \leftarrow B^{-1} A_{I.n(ij)}$ é executada somente uma vez, pois assim que executada, logo em seguida uma chamada de retorno também é. Portanto essa linha leva $O(m^2)$, pois é multiplicação de uma matrix $m \times m$ por um vetor de dimensão m . Já a primeira linha de dentro do loop, leva $O(m)$, pois é produto de dois vetores de tamanho m . No entanto, essa linha é executada, no pior caso, $(n - m)$ vezes, isto é $O((n - m)m) = O(nm)$. Como $n > m$, a função como um todo tem complexidade $O(nm)$.

4.6.2 Função `calculaTheta`

A função `calculaTheta` é responsável por calcular θ como foi explicado na seção 2.5.

```
function calculaTheta( $x, u, I$ )  
   $imin = -1$ 
```

```

    theta = ∞
    for i = 1 to m do
        if ui > 0 then
            t = xI.b(i)/ui
            if t < theta then
                theta = t
                imin = i
            end if
        end if
    end for
    return (imin, theta)
end function

```

O loop itera m vezes executando operações que levam $O(1)$, portanto `calculaTheta` tem complexidade $O(m)$.

4.6.3 Atualização da base

Atualizações nas bases ocorrem quando tiramos um índice da base e adicionamos outro. Esta operação ocorre tanto na fase 1 quanto na fase 2 do método simplex.

O cálculo da inversa de uma matriz é uma operação muito cara, portanto devemos investigar uma maneira de atualizar a inversa de B ao invés de recalculá-la a todo momento. Seja B uma base, e \bar{B} a base depois de uma atualização, tirando o l -ésimo índice básico e adicionando o índice j a base. Note que:

$$\begin{aligned}
 B^{-1}\bar{B} &= (B^{-1}A_{B(1)} \quad \cdots \quad B^{-1}A_{B(l-1)} \quad B^{-1}A_j \quad \cdots \quad B^{-1}A_{B(m)}) \\
 &= (e_1 \quad \cdots \quad e_{l-1} \quad u \quad \cdots \quad e_m)
 \end{aligned}$$

Portanto, se pré-multiplicarmos B^{-1} por matrizes fazendo com que, no lado direito da equação, u se torne e_l , teremos que B^{-1} pré-multiplicada pelas mesmas matrizes será igual a \bar{B}^{-1} .

O pseudo-código:

```

function atualizaBase(I, B-1, u, imin, ij, m)
    (I.b(imin), I.b(ij)) ← (I.n(ij), I.b(imin))
    for i = 1 to m do

```



```

    if  $i \neq i_{min}$  then
         $B_{i,j}^{-1} \leftarrow B_{i,j}^{-1} - (u_i/u_{imin}) * B_{imin,j}^{-1}$  for  $j = 1, \dots, n$ 
    end if
end for
 $B_{i,j}^{-1} \leftarrow B_{i,j}^{-1}/u(i_{min})$  for  $j = 1, \dots, n$ 
end function

```

Essa função executa o loop m vezes. A cada iteração, uma operação de soma de vetores de tamanho n é feita. Portanto a complexidade de `atualizaBase` é $O(nm)$.

4.6.4 Função `atualizaX`

Para atualizar x , temos que fazer $x + \theta d$. No entanto, não há a necessidade de calcular d a partir de u :

```

function atualizaX( $x, t, u, j, I$ )
     $x_{I,b} \leftarrow x_{I,b} - t * u$ 
     $x_j \leftarrow t$ 
    return  $x$ 
end function

```

Claramente, por ser uma subtração de vetores de tamanho m , a complexidade é $O(m)$.

4.6.5 A função `fase2`

Finalmente podemos analisar uma das funções que determinam a complexidade da função `simplex`. A cada iteração do loop principal dessa função, temos chamadas às seguintes funções: `calculaTeta`, `atualizaX`, `atualizaBase` e `custoDirecao`. As duas primeiras são lineares, $O(m)$. Já as duas últimas, são $O(nm)$. Portanto cada iteração da `fase2`, temos uma complexidade $O(mn)$.

4.6.6 A função `removeArtificiais`

Para a função `removeArtificiais`, a cada iteração do loop principal, temos uma possível chamada de `atuzliaBase`, que é $O(nm)$. Logo no pior caso, ela é chamada em todas as iterações e no melhor ela nunca é chamada. O loop principal depende de quantas variáveis artificiais existem na base. Podem haver no máximo m dessas variáveis. Logo o pior

dos cenários é quando temos m variáveis artificiais e atualizamos a base para todas elas. Nesse caso o algoritmo leva $O(nm^2)$. No melhor dos casos, não há variáveis artificiais dentro da base e isso leva $O(1)$.

4.6.7 Conclusão da complexidade

Seja α o número de iterações da primeira chamada de fase2 em simplex e β o da segunda chamada. Então na primeira delas, temos complexidade $O(\alpha nm)$ e na outra $O(\beta nm)$. Se $\alpha + \beta > m$, então as duas juntas são $\Omega(nm^2)$ e nesse caso essa é a complexidade do simplex. Caso contrário, `removeArtificiais` continuará sendo $O(nm^2)$ e a função simplex também será.

5 Exemplos

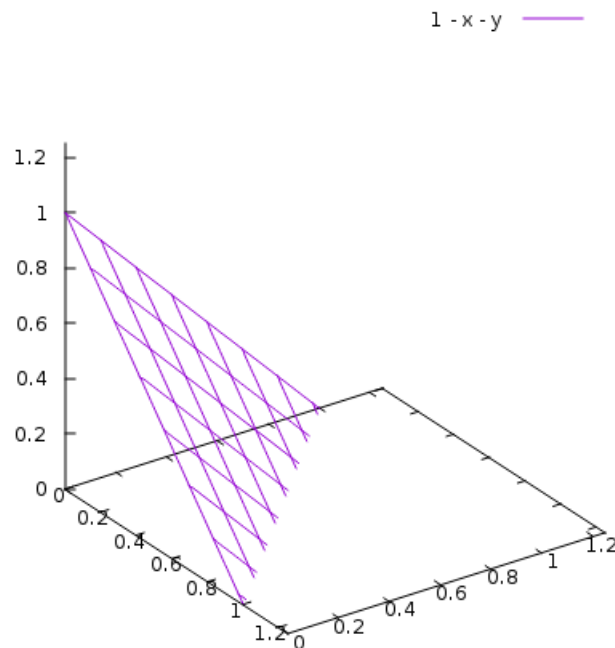
Nessa seção apresentaremos 3 exemplos do algoritmo implementado em octave sendo executado.

5.1 Solução Ótima

Consideremos o seguinte problema:

$$\begin{array}{ll}\text{minimizar} & x_1 + x_2 + x_3 \\ \text{sujeito a} & x_1 + x_2 + x_3 \leq 1 \\ & x \geq 0\end{array}$$

Podemos visualizar o problema com a seguinte imagem, onde a região viável está representada abaixo do plano desenhado e acima dos eixos:



Como esse problema não está no formato padrão, temos que reformulá-lo adicionando uma variável de folga:

$$\begin{array}{ll}\text{minimizar} & x_1 + x_2 + x_3 \\ \text{sujeito a} & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ & x \geq 0\end{array}$$

Para esse problema, temos:

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
- $b = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}$
- $c = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
- $m = 1$
- $n = 4$

Portanto, podemos aplicar nosso algoritmo:

```

1 octave:1> simplex(A,b,c,m,n)
2
3 ***** Fase1 *****
4
5
6 Iteracao 0:
7 | Var Basicas      Valor
8 | =====
9 |              x5    1.000000
10 |
11 | Custo em x
12 | =====
13 |           1.000
14 |
15
16 Iteracao 1:
17 | Var Basicas      Valor
18 | =====
19 |              x1    1.000000
20 |
21 | Indice var basicas  Componente da direcao
22 | =====
23 |                   1             -1.000000
24 |
25 | Custo em x      Teta      Entra na Base      Sai da Base
26 | =====

```

27		0.000	1.000	x1	x5
28					

A fase 1 consiste em achar uma solução para o problema principal através de um problema auxiliar. Nesse caso o problema auxiliar tem somente uma variável a mais (x_5), pois $m = 1$. Por esse motivo, na Iteração 0, x_5 está na base e vale $b = 1$. Nessa situação, $c^T x = x_5 = 1$. Como essa não é uma solução ótima, foi encontrada uma direção em que o custo reduzido é menor que 0. Vemos na Iteração 1: que essa direção é onde $j = 1$. Verificamos que $\bar{c}_j = c_j - c_B^T B^{-1} A_j = 0 - 1 * 1 * 1 = -1$. $x + \theta d$ é calculado resultando em $x_5 = 0$ e $x_1 = 1$. Nesse novo ponto, o custo vale 0. Nesse ponto, todos os custos reduzidos são maiores ou iguais a 0, e essa é a solução ótima. Como x_1 não é uma variável artificial, essa já é a solução inicial para o problema inicial.

```

29
30 ***** Fase2 *****
31
32
33 Iteracao 0:
34 | Var Basicas      Valor
35 | =====
36 |          x1      1.000000
37 |
38 | Custo em x
39 | =====
40 |          1.000
41 |
42
43 Iteracao 1:
44 | Var Basicas      Valor
45 | =====
46 |          x4      1.000000
47 |
48 | Indice var basicas  Componente da direcao
49 | =====
50 |          4          -1.000000
51 |
52 | Custo em x      Teta      Entra na Base      Sai da Base
53 | =====
54 |          0.000      1.000          x4          x1
55 |

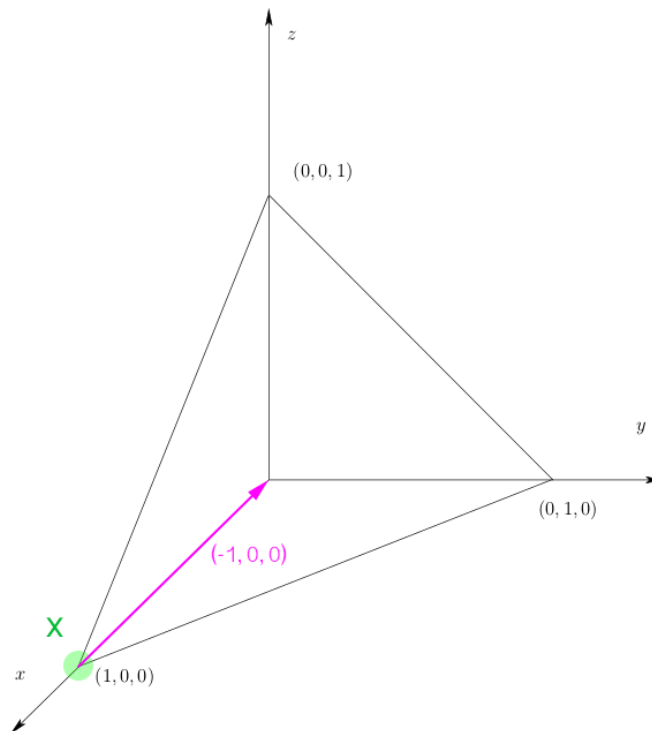
```

```

56
57
58 Solucao encontrada:
59 x =
60
61 0
62 0
63 0
64 1

```

A Iteração 0 da fase 2 começa com $x_1 = 1$, pois foi a solução inicial encontrada na Fase 1. A figura a seguir ilustra a situação:



Na Iteração 1, a direção $j = 4$ é escolhida por ter custo reduzido menor que 0. Assim, x_4 entra na base e x_1 a deixa. No novo ponto onde $x_4 = 1$ e as demais componentes de x são 0, não há custo reduzido menor que 0, portanto essa é a solução ótima para nosso problema.

5.2 Custo ótimo $-\infty$

Suponha o problema:

$$\begin{array}{ll}\text{minimizar} & -x_1 - x_3 \\ \text{sujeito a} & x_1 + x_2 = 1 \\ & x \geq 0\end{array}$$

Para esse problema, temos:

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
- $b = (1)$
- $c = (-1 \ 0 \ -1)$
- $m = 1$
- $n = 3$

É fácil ver que como a única restrição em x_3 é $x_3 > 0$, e temos que minimizar $-x_1 - x_3$, x_3 pode ser tão grande quanto queiramos e portanto o custo ótimo será $-\infty$.

```

1 octave:1> simplex(A,b,c,m,n)
2
3 ***** Fase1 *****
4
5
6 Iteracao 0:
7 | Var Basicas      Valor
8 | =====
9 |              x4    1.000000
10 |
11 | Custo em x
12 | =====
13 |          1.000
14 |
15
16 Iteracao 1:
17 | Var Basicas      Valor
18 | =====
19 |              x1    1.000000
20 |
21 | Indice var basicas  Componente da direcao
22 | =====
23 |                  1          -1.000000

```

24					
25		Custo em x	Teta	Entra na Base	Sai da Base
26		=====	=====	=====	=====
27		0.000	1.000	x1	x4
28					

Como $m = 1$, a única variável artificial será x_4 , por isso na iteração 0 da Fase 1, ela é a única variável na base. No entanto na direção $j = 1$, o custo reduzido é menor que 0, portanto a variável x_4 sai da base e x_1 entra. Nesse novo ponto, os custos reduzidos são maiores ou iguais a zero e não há variáveis artificiais na base. Assim, $x = (1, 0, 0, 0)^T$ é solução inicial do problema.

```

29
30 ***** Fase2 *****
31
32
33 Iteracao 0:
34 | Var Basicas      Valor
35 | =====
36 |          x1      1.000000
37 |
38 | Custo em x
39 | =====
40 |        -1.000
41 |
42
43
44 O custo otimo e -infinito, com direcao:
45 d =
46
47   -0
48    0
49    1
50 A partir de:
51 x =
52
53    1
54    0
55    0

```

O problema começa com o x que calculamos na fase anterior. O j escolhido é 3, pois $\bar{c}_3 = -1 + 0 = -1$. No entanto, $u = B^{-1} * A_j = A_1^{-1} * A_3 =$

$1 * 0 = 0$. Portanto não existe $u > 0$, logo podemos escolher θ tão grande quanto queiramos e nosso custo será cada vez menor. A direção que leva a $-\infty$ é tal que $d_3 = 1$, e como já vimos, $u = 0$. Portanto $d = (0, 0, 1)^T$.

5.3 Inviável

Suponha o problema:

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & -x_1 - x_2 - x_3 \\ \text{sujeito a} & x_1 = 1 \\ & 2x_1 = 1 \\ & x \geq 0 \end{array}$$

Para esse problema, temos:

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
- $c = (-1 \quad -1 \quad -1)$
- $m = 2$
- $n = 3$

Esse problema é obviamente inviável, pois x_1 não pode ser ao mesmo tempo 1 e 0.5.

```

1 octave:1> simplex(A,b,c,m,n)
2
3 ***** Fase1 *****
4
5
6 Iteracao 0:
7 | Var Basicas      Valor
8 | =====
9 |                x4    1.000000
10 |                x5    1.000000
11 |
12 | Custo em x

```

```

13 | =====
14 |      2.000
15 |
16 |
17 | Iteracao 1:
18 | Var Basicas      Valor
19 | =====
20 |      x4      0.500000
21 |      x1      0.500000
22 |
23 | Indice var basicas  Componente da direcao
24 | =====
25 |      4      -1.000000
26 |      1      -2.000000
27 |
28 | Custo em x      Teta      Entra na Base      Sai da Base
29 | =====
30 |      0.500      0.500      x1      x5
31 |
32 |
33 |
34 | O problema e inviavel

```

Vemos que o problema começa com as duas variáveis artificiais x_4 e x_5 na base, pois $m = 2$. Em 1 iteração achamos a solução ótima para o problema auxiliar. No entanto como pode-se ver, x_4 está entre as variáveis básicas, portanto o problema principal é inviável.

Referências

- [1] Dimitris Bertsimas, John N. Tsitsiklis. Introduction to Linear Optimization. 1997.