Implementação da Fase 2 do Método Simplex

Bruno Sesso 8536002
Gustavo Estrela de Matos 8536051

18 de Maio de 2015

1 Introdução

1.1 Apresentação do problema

Os problemas de Programação Linear (PL) são casos específicos de otimização combinatória em que a função objetivo e as restrições são ambos lineares. Portanto a função objetivo é da forma $c^T x$ e as restrições são da forma $a_i^T x \geq b_i$ ou $a_i^T x \leq b_i$, com $c, x, a_i \in \mathbb{R}^n$ e $b_i \in \mathbb{R}$.

Multiplicando por -1 todas as restrições da forma $a_i^T x \geq b_i$, podemos escrever qualquer PL como:

$$\text{minimizar } c^T x$$
$$\text{sujeito a } Ax \leq b,$$
$$A \in R^{m \times n} \text{ e } b \in \mathbb{R}^m.$$

Também é possível mostrar que qualquer PL pode ser escrito na forma:

$$\text{minimizar } c^T x$$
$$\text{sujeito a } Ax = b,\ x \geq 0 \text{ [1]}.$$

Se for escrito dessa maneira, dizemos que o problema está no formato padrão. Adotaremos esse formato durante todo o trabalho.

Se vale que $Ax^1 = b$ e $x^1 \geq 0$ dizemos que x^1 é um ponto viável. O conjunto $P = \{x | Ax = b, x \geq 0\}$ de todos os pontos viáveis é chamado conjunto viável.

Uma solução ótima do problema é um ponto $x^1 \in P$ que minimiza [1] a função objetivo c. Se x^1 existe, dizemos que o custo ótimo é $c^T x$. Se x^1 não existe, ou não existem pontos viáveis ($P = \emptyset$), ou podemos diminuir o custo o quanto quisermos e dizemos que o custo ótimo é $-\infty$.

1.2 Objetivos do trabalho

Neste trabalho, temos o objetivo de solucionar problemas de Programação Linear achando seu custo ótimo. Para isso, implementaremos a fase 2 do algoritmo simplex na linguagem Octave. Além disso, trabalharemos com condições iniciais que simplificarão o funcionamento do algoritmo, conforme explicado na seção X.

[1] Se o interesse for maximizar $c^T x$, podemos simplismente conseguir um problema equivalente em que o objetivo seja minimizar $-c^T x$.

2 Conceitos fundamentais

Antes de introduzirmos o código do nosso algoritmo, precisamos definir alguns conceitos que são fundamentais para garantir sua corretude.

Seja o nosso problema de Programação Linear o seguinte:

$$\text{minimizar } c^T x,$$
$$\text{sujeito a } Ax = b,\ x \geq 0.$$
$$\text{com } c, x \in \mathbb{R}^n,\ A \in \mathbb{R}^{m \times n} \text{ e } b \in \mathbb{R}^m.$$

Além disso, vamos usar a notação a_i para a i-ésima linha de A e A_i para a i-ésima coluna de A.

2.1 Restrições e degenerecência

Uma restrição $a_i^T x \geq b_i$ (ou $a_i^T x \leq b_i$), com $a_i \in \mathbb{R}^n$ e $b_i \in \mathbb{R}$, é uma *restrição ativa* em um ponto $x^1 \in \mathbb{R}^n$ se $a_i^T x^1$. Uma restrição de igualdade é sempre ativa. Um conjunto de restrições será dito LI se os vetores a_i correspondentes forem LI.

Diremos que x^1 uma solução viavel básica é *degenerada* se existem mais de n restrições ativas LI nesse ponto. Como as m restrições de igualdade são sempre cumpridas, temos que as soluções básicas degeneradas possuem mais do que $n - m$ componentes nulas, enquanto que as não degeneradas possuem exatamente $n - m$.

2.2 Soluções Viáveis Básicas

Dizemos que um ponto $x \in \mathbb{R}^n$ do conjunto viável P é uma *solução viável básica*, se existem n restrições ativas em x que são LI. Note que para problemas no formato padrão, existem sempre m restrições ativas LI vindas de $Ax = b$, e as outras $n - m$ vem, necessariamente de $x \geq 0$. Portanto, uma solução viável básica possui ao menos $n - m$ componentes nulas.

Se x^1 é uma solução básica não degenerada e seja $B(1), ..., B(m)$ os índices das componentes não nulas de x. A matriz $B = \left[A_{B(1)}, ..., A_{B(m)}\right]$ é chamada *matriz básica associada* a x^1.

Se o conjunto P tem uma solução viável básica, então ou o custo ótimo é $-\inf$ ou existe $x^1 \in P$ solução viável básica que é ótimo, ou seja, o custo de qualquer ponto do conjunto viável é maior ou igual do que o custo de

x^1. Portanto, na solução de um PL com ao menos uma solução viável básica, podemos limitar a esses elementos a nossa busca por um ponto de custo ótimo [1].

2.3 Custos reduzidos

Se x^1 é um ponto qualquer de P, com índices básicos $B(1), ..., B(m)$. Dizemos que $d \in \mathbb{R}^n$, tal que $d_j = 1$, $Ad = 0$ $(A(x + \theta d) = b)$ e $d_i = 0$ para todo $i \notin \{B(1), ..., B(m)\}$, é a j-ésima direção básica. Seja $d_B = \left[d_{B(1)}, ..., d_{B(m)}\right]$, como $A(x+\theta d) = b$, temos que $d_B = -B^{-1}A_j$. Usaremos $u = -d_B = B^{-1}A_j$ por facilidade de notação, durante o trabalho.

Seja x^1 uma solução viável básica, B a matriz básica associada e $c_B = \left[c_{B(1)}, ..., c_{B(m)}\right]$. Definimos, para cada $j \in \{1, ..., n\}$ o custo reduzido:

$$\overline{c}_j = c_j - c_B^T B^{-1} A_j.$$

Seja x^1 uma solução viável básica e $\overline{c}$ o vetor de custos reduzidos correspondente.Se $\overline{c} \geq 0$, então x^1 é ótimo. Além disso, se x^1 for ótimo e não degenerado, então $\overline{c} \geq 0$ [1]. Portanto, se estivermos em uma solução viável básica e $\overline{c} \geq 0$, então podemos parar o algoritmo, pois esse ponto é ótimo.

2.4 Soluções Viáveis Básicas adjacentes

Seja x^1 uma solução viável básica com índices básicos $B(1), ..., B(m)$. Uma solução viável básica é *adjacente* a x^1 se compartilha $m - 1$ índices com x^1. Para achar uma solução viável básica ajacente, podemos forçar o crescimento de uma variável j não-básica, mantendo $Ax = b$ e $x \geq 0$. Veremos que para um θ, o ponto $x^1 + \theta d_j$ é solução viável básica adjacente a x^1, com d_j como foi definido na última subseção.

Vamos tomar $\theta = \min_{i=1,...,m|u_i>0} \{x_{B(i)}/u_i\}$ e ver que $x^2 = x^1 + \theta d_j$ é de fato uma solução viável básica adjacente a x^1. Caso todas as componentes de u_i sejam menores ou igual a zero e o custo reduzido na direção j menor do que zero teremos que o problema tem custo ótimo $-\infty$, como será explicado a seguir.

Se θ definido acima não existe, temos que todas as componentes de u_i são menores ou igual a zero ($d \geq 0$), logo qualquer ponto $x^2 = x^1 + \theta d$ é viável com $\theta \geq 0$, pois a restrição $Ax^2 = b$ é verificada (por construção), e $x_j^2 = x_j^1 + \theta \geq x_j^1 \geq 0$, e para i básico $x_j^2 = x_j^1 + \theta d_j \geq x_j^1 \geq 0$. Se ainda estivermos que o custo diminui nessa direção, poderemos diminuir o custo o quanto quisermos e a solução do problema será $-\infty$.

Se $\theta \in \mathbb{R}$, como $d_i = 0 \; \forall i \in \{B(1), ..., B(m)\}, i \neq j$, temos que para essas mesmas componentes x^2 é nulo. Logo, temos $n-1$ restrições ativas LI em x^2. Suponha que para $l \in \{1, .., m\}$ vale que $\theta = x_{B(l)}/u_l$, então $x_{B(l)}^2 = x_{B(l)}^1 + (-x_B^1(l)/d_{B(l)}) * d_{B(l)} = 0$ (diremos que $B(l)$ sai da base), logo existem n restrições ativas LI em x^2. Além disso, por construção, vale que $Ax = b$ e $x \geq 0$ para variáveis não básicas e para $x_B(l)$. Para $B(k)$ básico diferente de $B(l)$, temos que $x_B^2(k) \geq x_{B(k)}^1 + (-x_B^1(k)/d_{B(k)}) * d_{B(k)} = 0$. Portanto x^2 é solução viável básica adjacente a x^1 e, como a base de x^2 é $\{B(1), ..., B(l-1), j, B(l+1), ..., B(m)\}$, x^2 é adjacente a x^1.

3 O algoritmo

3.1 Ideia do algoritmo

A ultima seção apresenta ideias essenciais para a construção da fase 2 do algoritmo simplex. Dentre elas, as mais importantes são: podemos reduzir nosso espaço de busca as soluções viaveis básicas; se $\bar{c} \geq 0$ e estamos em uma solução viável básica, então esse ponto é ótimo.

Portanto, utilizamos uma dinâmica que percorre as soluções viáveis básicas, com auxilio das direções básicas, sempre diminuindo a função custo, até que não seja mais possível sair de um ponto sem aumentar ou manter o custo, ou até encontrar uma direção que podemos diminuir o custo sem limitações.

3.2 Algoritmo

function $simplex$(A, b, c, m, n, x)
  calcula indices basicos (Ib) e não básicos (In)
  $B \leftarrow A_{Ib(i)}$, i = 1, ..., m
  $invB \leftarrow B^{-1}$
  $imin \leftarrow 0$
  if $\nexists j$ t.q. $\overline{c_j} < 0$ **then**
    $\overline{c_j} \leftarrow 0$

```
    else
        c̄_j ← c_j − c_B^T B^{-1} A_j, algum j ∈ In t.q. c̄_j < 0
        u ← invB ∗ A_j
    end if
    while c̄_j < 0 do
        if u_l < 0, l = 1, ..., m then
            return −1, d(u, j)
        end if
        θ ← min_{u_l>=0} { x_{Ib(l)} / u_l }, l = 1, ..., m
        x ← x + θ ∗ d(u, j)
        x_{Ib(l)} sai da base                          ▷ Atualiza In
        x_j entra na base                              ▷ Atualiza Ib
        Atualiza invB
        c̄_j ← c_j − c_B^T B^{-1} A_j, algum j ∈ In t.q. c̄_j < 0
        u ← invB ∗ A_j
    end while
    return 0, x
end function
```

4 Condições do problema

Durante a elaboração do algoritmo foram consideradas duas condições: existe ao menos uma solução viável básica e qualquer solução viável básica é não degenerada. Essas condições foram importantes para implementações de detalhes do código e sem elas o algoritmo não será correto.

A existência de ao menos uma solução viável básica implica, como discutido na subseção 2.2, que ou o custo ótimo é $-\infty$ ou existe uma solução viável básica com custo ótimo. Isso nos permite limitar nosso espaço de busca às soluções viáveis básicas, somente.

A condição de que todas as soluções viáveis básicas são não-degeneradas tem outras aplicações. Com essa condição, é possível determinar a base da solução inicial dada. Além disso, ela garante que em todo passo em que calculamos um novo θ, o mesmo será maior do que zero, póis a não degenerecência implica que $x_B(i) > 0$, evitando o problema de passar uma interação do algoritmo sem sair do ponto anterior, o que pode criar um ciclo sem fim no algoritmo. Além disso, houve uma condição não citada no enunciado que é importante para a solução do problema: o posto completo da matriz A. Se $posto(A) = k < n$ precisaríamos construir uma matriz A^1 com posto completo, para garantir sabemos escolher k colunas LI de A^1 que formam bases para soluções viáveis básicas.

5 Resultados

A seguir temos dois exemplos de soluções encontradas pelo algoritmo, para o caso em que há solução ótima e para o caso em que não há. No primeiro apresentamos de forma mais simples as idéias do algoritmo, nos voltando mais para o pseudo código apresentado acima. Já no segundo exemplo, damos ênfase em como o programa é de fato executado e nas saídas produzidas por esse.

5.1 Com solução ótima

Vamos apresentar um exemplo de como o algoritmo é aplicado ao seguinte PL:

$$\begin{gathered}\text{minimizar: } x+y+z \\ \text{SA: } x+y+z+s=1 \\ x,y,z,s \geq 0\end{gathered}$$

Dado a solução viável básica $x = [1,0,0,0]^T$. A partir das restrições, monta-se a matriz $A = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$ e os vetores $c = [1,1,1,0]^T$ e $b = [1]$. Calculamos n e m a partir das dimensões da matriz A: $m = 1$ e $n = 4$.

1. Primeiramente devemos calcular Ib e In. Os índices básicos são $i = 1, \ldots, n$ t.q. $x_i \neq 0$ e os não básicos $x_i = 0$. Logo: $Ib = [1]$ e $In = [2,3,4]$.

2. B é composto pelas colunas de indices básicos de A. Logo $B = [1]$ e portanto, $invB = [1]$.

3. Para calcular $\overline{c_j}$ iteramos entre todos os indices não básicos até achar um que faça $\overline{c_j} < 0$. Deixaremos calculado $c_b^T B^{-1} = [1] * [1] =$

$[1]$ que se mantém constante ao longo dos calculos.
Começando a partir de $j = 2$: $\overline{c_2} = c_2 - [1]A_2 = 1 - 1 = 0 \geq 0$. Portanto devemos continuar tentando o próximo índcie não básico.
Para $j = 3$, $\overline{c_3} = c_3 - [1]A_3 = 1 - 1 = 0 \geq 0$.
Para $j = 4$, $\overline{c_4} = c_4 - [1]A_4 = 0 - 1 = -1 < 0$, Portanto $j = 4$ é o j escolhido. Assim $\overline{c_j} = -1$ e $u = invB * A_4 = [1]$.

4. Como $\overline{c_j} < 0$ entramos dentro do $while$. E passamos pelo primeiro if, pois existem elementos de u que são positivos ou zero. Como u só tem um elemento, $\theta = \frac{x_{Ib(1)}}{u_1} = \frac{1}{1} = 1$ e $l = 1$.

5. Para atualizar θ precisamos de $d(u, j)$.
$d_{Ib(i)} = -u_i$ para $i = 1, \ldots, m$.
$d_j = d_4 = 1$.
$d_i = 0$ para os demais indices.
Portanto $d = [-1, 0, 0, 1]^T$ e x passa a ser $x + \theta d = [1, 0, 0, 0]^T + 1[-1, 0, 0, 1]^T = [0, 0, 0, 1]^T$.

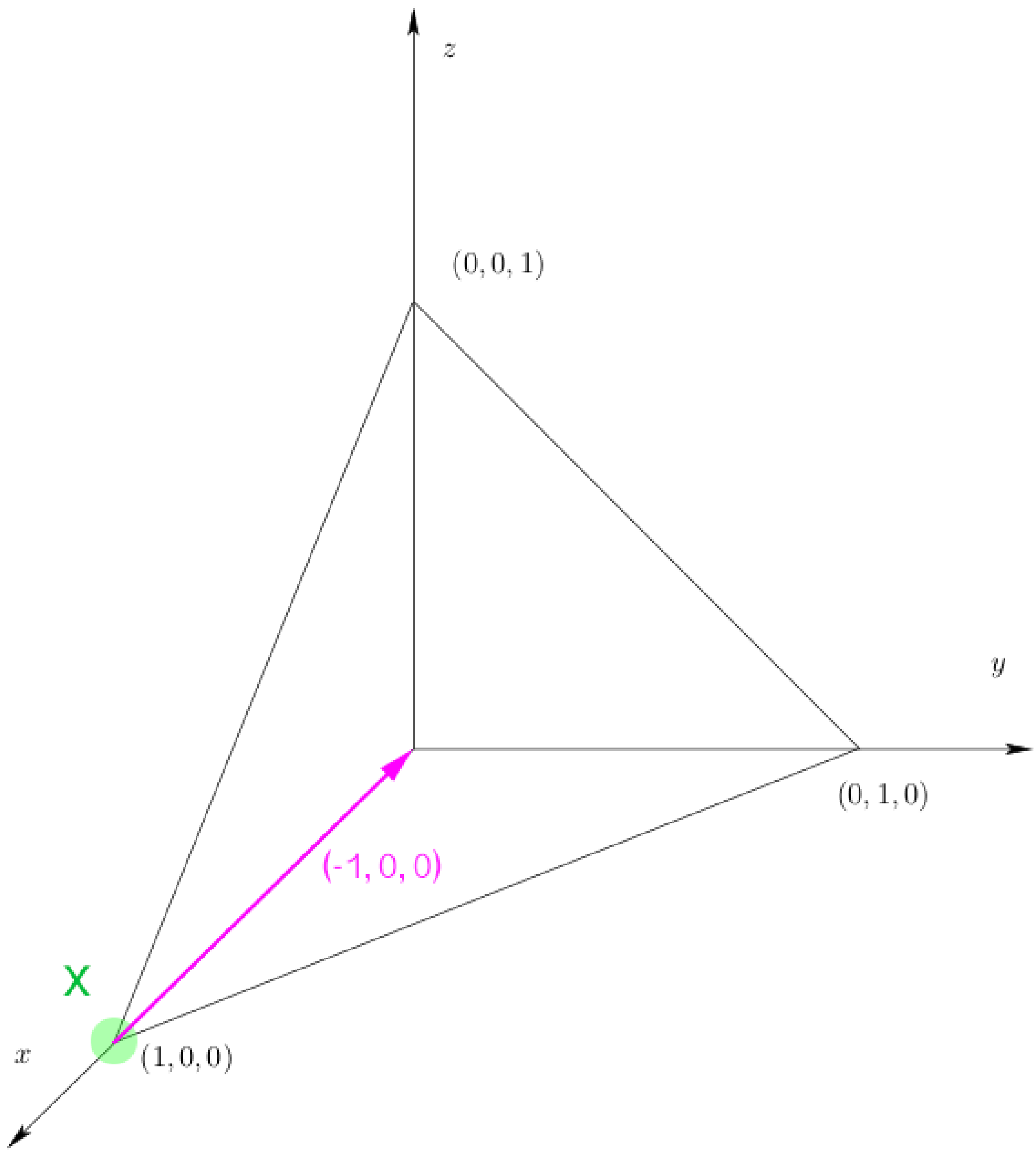
6. Para atualizar a base, basta atualizarmos os indices básicos e não básicos: $Ib_1 = 4$ e $In_4 = 1$.

7. $invB = [1]$.

8. Recalculamos $\overline{c_j}$ e u:
$j = 2$: $\overline{c_2} = c_2 - [1]A_2 = 1 - 1 = 0 >= 0$
$j = 3$: $\overline{c_3} = c_3 - [1]A_3 = 1 - 1 = 0 >= 0$.
$j = 1$: $\overline{c_1} = c_1 - [1]A_1 = 1 - 1 = 0 >= 0$
$\overline{c_j} = 0$, pois não existe nenhum índice não básico que o deixe negativo.

9. $u = invB * A_1 = [1]$

10. Como $\overline{c_j} = 0$, saímos do $while$ e retornamos $0, [0, 0, 0, 1]^T$ que é a resposta que queriamos, como podemos ver na seguinte imagem:



5.2 Custo ótimo = $-\infty$

Para esse problema temos como exemplo a entrada:

- $A = [1, 1, 0]$
- $b = 1$

- $c = [-1; 0; -1]$
- $x = [0; 1; 0]$

Que é representado graficamente pela figura abaixo:

Antes de iniciar as iterações, o algoritmo calcula os índices básicos de x, que é apenas $I.b(1) = 2$, e a inversa da matriz básica associada a x. A cada interação a base é atualizada assim como a inversa da matriz básica.

Na iteração 0, o custo de $x = [0; 1; 0]$ é 0, e a matriz básica é $B = A_2 = 1$, logo $B^{-1} = 1$. O custo reduzido na direção 1 é $c_1 - c_B^T B^{-1} A_1 = -1 - 0B^{-1}A_1 = -1$, e na direção 3 é $c_3 - c_B^T B^{-1} A_3 = -1 - 0B^{-1}A_1 = -1$. Toma-se a direção 1 para entrar na base. Temos que $u = B^{-1}A_1 = 1 * 1 = 1$, logo $d = [1; -1; 0]$ e $\theta = \min x_2 / -d_2 = 1$ e o índice 2 sai da base. O valor de x é atualizado para $x = [0; 1; 0] + 1[1; -1; 0] = [1; 0; 0]$. $B^{-1} = A_1^{-1} = 1$ também é atualizada.

Na iteração 1, o custo de $x = [1; 0; 0]$ é -1. O custo reduzido na direção 2 é $c_2 - c_B^T B^{-1} A_2 = 0 - (-1)(1)(1) = 1$, e na direção 3 é $c_3 - c_B^T B^{-1} A_3 = -1 - (-1)(1)(0) = -1$. Toma-se a direção 3 para entrar na base. Temos que $u = B^{-1}A_3 = 1 * 0 = 0$, logo $d = [0; 0; 1]$, portanto não é possível definir $\theta = \min_{i=1,\dots,m | d_B(i) < 0} \{x_{B(i)} / d_B(i)\}$, portanto o problema tem custo $-\infty$ na direção $d = [0; 0; 1]$.

Saída do programa:
Simplex: Fase 2
Iterando 0: 2 1.000000
Valor função objetivo: 0.000000
Custos Reduzidos 1 -1.000000 3 -1.000000
Entra na base: 1
Direção: 2 1.000000
Theta* 1.000000
Sai da base: 2
Iterando 1: 1 1.000000
Valor função objetivo: -1.000000
Custos Reduzidos 2 1.000000 3 -1.000000
Entra na base: 3
Direção: 1 0.000000
Theta* Inf
Solução é -inf na direção: v =

-0 0 1
ans = -1

Referências

[1] Dimitris Bertsimas, John N. Tsitsiklis. Introduction to Linear Optimization. 1997.