

Čip v sudu s radonovou atmosférou

Michal Šesták

17. května 2019

Obsah

1 Úvod	1
2 Úlohy	2
3 Difúze radonu do čipu skrze pouzdro	2
3.1 Popis difúzního šíření	2
3.2 Součinitel difúze a rozměry pouzdra	2
3.3 Numerické řešení difúzní rovnice	2
3.3.1 Počáteční a okrajové podmínky	3
3.3.2 Použitá metoda	4
3.4 Výsledek	4
3.5 Diskuze	4
3.6 Závěr	5
4 Výpočet dávky absorbované v čipu	6
4.1 Příspěvek od α	6
4.1.1 Energetický příspěvek od α , které vznikly mimo čip a pouzdro	6
4.1.2 Energetický příspěvek od α , které vznikly uvnitř čipu a pouzdra	8
4.1.3 Celkový příspěvek k dávce	8
4.2 Příspěvek od β	9
4.3 Příspěvek of γ	9
4.3.1 Vzduch v sudu	10
4.3.2 Vnitřní povrch sudu	10
4.3.3 Povrch pouzdra	10
4.4 Konkrétní hodnoty	11

1 Úvod

Účelem tohoto experimentu je zkoumání vlivu kosmického záření na chybovost integrovaného obvodu. Kosmické záření je simulováno radonovou atmosférou v plechovém uzemněném sudu válcové geometrie, v jehož středu je čip umístěn. Radonová atmosféra je vytvořena injekcí definované koncentrace radonu do sudu v daný počáteční čas. Kolem čipu jsou umístěny TLD detektory, kterými měříme dávku absorbovanou v čipu. Dále se měří počet chyb zaznamenaných v různých segmentech čipu, např. v ADC nebo v paměti. Snahou je zjistit, zdali existuje nějaká závislost počtu chyb v čipu na velikosti absorbované dávky.

Problémem je, že zatímco β a γ záření je TLD detektory měřeno spolehlivě, u α tomu tak není. Proto se přistoupilo k pokusu o výpočet dávky z jednotlivých složek záření (α, β, γ) pomocí teoretických poznatků.

Ještě předtím však bylo potřeba ověřit, že radon difunduje do zkoumaného čipu přes vrstvičku materiálu, která ho obklopuje, dostatečně rychle vzhledem k jeho radioaktivní přeměně. Pokud by difundoval mnohem pomaleji než se přeměňuje, pak by dávka (hlavně její část pocházející od α) byla nižší než v případě, kdy bychom uvažovali stejnou koncentraci radonu v čipu jako v okolním prostředí sudu. Proto byl výpočet dávky rozdělen do dvou úloh.

2 Úlohy

1. Ověření, zdali radon difunduje k čipu přes vrstvičku materiálu pouzdra dostatečně rychle vzhledem k radioaktivní přeměně radonu v sudu.
2. Výpočet dávky absorbované v čipu. Určují se jednotlivé příspěvky od záření α, β, γ .

3 Difúze radonu do čipu skrze pouzdro

3.1 Popis difúzního šíření

Průběh šíření radonu difúzí v čase v daném materiálu popsaném difúzním součinitelem D se řídí druhým Fickovým zákonem

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \cdot \operatorname{div}(c) - \lambda c, \quad (1)$$

kde $c = c(t; x, y, z)$ je koncentrace radonu v bodě (x, y, z) v čase t , λ je přeměnová konstanta radonu; $[c] = \text{Bq/m}^3$; $[D] = \text{m}^2\text{s}^{-1}$.

3.2 Součinitel difúze a rozměry pouzdra

Vzhledem k tomu, že známe pouze prvkové složení pouzdra a nevíme, z jakého materiálu je vyrobeno, tak byl uvažován difúzní součinitel o hodnotě

$$D = 3 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2\text{s}^{-1}, \quad (2)$$

což by měla být hodnota obvyklá pro pevné látky (zdroj?¹). Čip je rozměrově kvádr o šířce a délce cca 7 mm a tloušťce 0,15 mm. Pouzdro ho obepíná, na bočních stranách čipu je 6,5 až 7 mm materiálu pouzdra, na horní a dolní ploše čipu je ho 0,69 mm.

3.3 Numerické řešení difúzní rovnice

Řešení rovnice (1) v kartézských souřadnicích při daných rozměrech pouzdra by bylo zbytečně náročné, a proto se přistoupilo k aproximaci čipu koulí o poloměru R_1 a pouzdra kulovou

¹zkusit najít a doplnit

slupkou o poloměru R_2 a tloušťce d . Pak lze rovnici (1) převést do sférických souřadnic (r, φ, ϕ) s počátkem ve středu aproximujících útvarů:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \left(\frac{\partial^2 c}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial c}{\partial r} \right) - \lambda c, \quad (3)$$

kde navíc díky homogenosti koncentrace radonu v okolí pouzdra uvažujeme izotropní šíření, tj. nezávislé na souřadnicích φ a ϕ , a proto $c = c(t, r)$. V prvním přiblížení byly aproximující parametry položeny hodnotám

$$R_1 = 5 \text{ cm}, \quad (4)$$

$$R_2 = 10 \text{ cm}, \quad (5)$$

$$d = R_2 - R_1 = 5 \text{ cm}, \quad (6)$$

v případě potřeby by byly zmenšeny. Rovnice (3) byla řešena jen uvnitř pouzdra.

3.3.1 Počáteční a okrajové podmínky

Byly řešeny dva případy:

1. **Injektáž radonu:** v okolí čipu je konstantní koncentrace radonu c_0 a uvnitř čipu a pouzdra je v počátečním čase nulová koncentrace, tj.:

- počáteční podmínka je $c(0, r) = c_u(0) = 0$ pro $r \in (R_1, R_2)$, kde $c_u(t)$ je koncentrace radonu v kouli aproximující čip v blízkosti pouzdra,
- okrajová podmínka na rozhraní pouzdra a okolního prostředí (dále jen vnější okrajová podmínka) je $c(t, R_2) = c_0$ pro $t \in [0, T]$, kde T čas, do kterého chceme rovnici řešit,
- okrajová podmínka na rozhraní pouzdra a čipu (dále jen vnitřní okrajová podmínka) bude uvedena později.

2. **Vypumpování radonu:** v okolí čipu je nulová koncentrace radonu a uvnitř čipu a pouzdra je koncentrace tentokrát v počátečním čase c_0 , tedy:

- počáteční podmínka je $c(0, r) = c_u(0) = c_0$ pro $r \in [R_1, R_2]$,
- vnější okrajová podmínka je $c(t, R_2) = 0$ pro $t \in [0, T]$,
- vnitřní okrajová podmínka bude uvedena později.

První případ představuje injektáž radonu do sudu s čipem, druhý pak vypumpování radonu ven ze sudu. Vnitřní okrajová podmínka vypadá následovně:

$$D \frac{\partial c(t, R_1)}{\partial r} = h \cdot (c(t, R_1) - c_u(t)), \quad (7)$$

kde h je tzv. přestupní koeficient vyjadřující schopnost přestupu radonu z pouzdra do čipu (nebo naopak), $[h] = \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$. Jeho určení je velmi problematické a v podstatě nebyla provedena žádná systematická měření jeho hodnot pro rozhraní různých materiálů. Autoři článku [1] odhadují jeho hodnotu pro nezměřená rozhraní na

$$h = 0,1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}, \quad (8)$$

tato hodnota byla uvažována i v našich výpočtech.

Koncentrace uvnitř čipu $c_u(t + \Delta t)$ se určí ze známé koncentrace v předchozím bodě časové sítě $c_u(t)$ pomocí vztahů

$$E(t) = h \cdot (c(t, R_1) - c_u(t)), \quad (9)$$

$$\begin{aligned} c_u(t + \Delta t) &= c_u(t) \cdot e^{-\lambda \Delta t} + \frac{E(t) \cdot A}{V \cdot \lambda} \cdot (1 - e^{-\lambda \Delta t}), \\ &= c_u(t) \cdot e^{-\lambda \Delta t} + \frac{3 \cdot E(t)}{R_1 \cdot \lambda} \cdot (1 - e^{-\lambda \Delta t}), \end{aligned} \quad (10)$$

kde $E(t)$ exhalační rychlost z pouzdra do čipu (či naopak) v čase t , $[E] = \text{Bq} \cdot \text{m}^{-2} \text{s}^{-1}$, dále Δt je časový krok, λ je přeměnová konstanta radonu, $A = 4\pi R_1^2$ je vnější plocha koule reprezentující čip a $V = \frac{4}{3}\pi R_1^3$ je objem této koule. Vztahy (7), (9) a (10) byly převzaty z [1].

Vnější okrajová podmínka představuje Dirichletovu okrajovou podmínku, vnitřní pak Neumannovu okrajovou podmínku.

3.3.2 Použitá metoda

Pro určení prostorového a časového vývoje koncentrace v pouzdře $c(t, r)$ pro $t \in [0, T]$, $r \in [R_1, R_2]$ a časového vývoje koncentrace uvnitř čipu v blízkosti pouzdra $c_u(t)$ pro $t \in [0, T]$ z rovnic (3), (7) a (10) byla použita Crank-Nicolsonova metoda [2, 3].

Z takto určeného vývoje je možné stanovit dobu T_1 , resp. T_2 (pro první a druhý případ), po níž bude radon difundovat přes pouzdro do čipu, dokud nebude v čipu s určitou tolerancí ε stejná koncentrace radonu jako ve vnějším prostředí. Při výpočtu byla použita tolerance

$$\varepsilon = 0,01. \quad (11)$$

3.4 Výsledek

Časový vývoj c_u je pro oba dva případy k nahlédnutí v obr. 1. T_1 a T_2 vychází pro všechna testovaná c_0 stejně:

$$T_1 = 5,98 \text{ hod}, \quad (12)$$

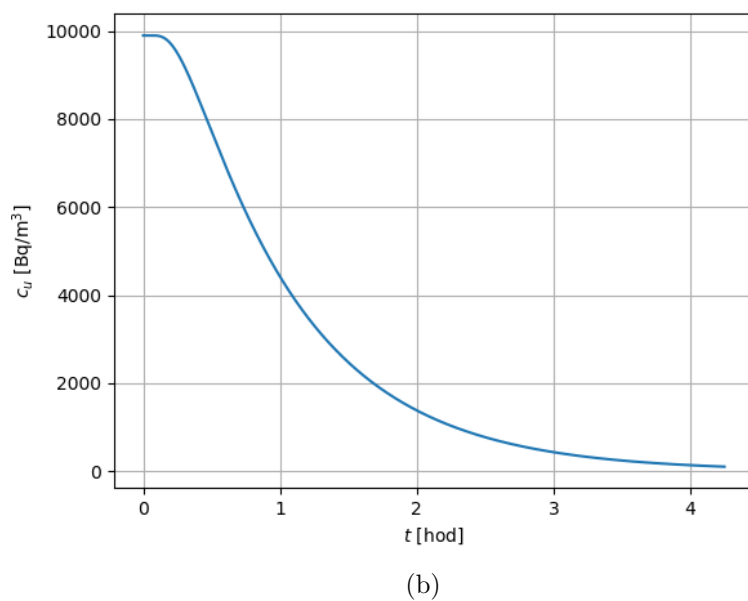
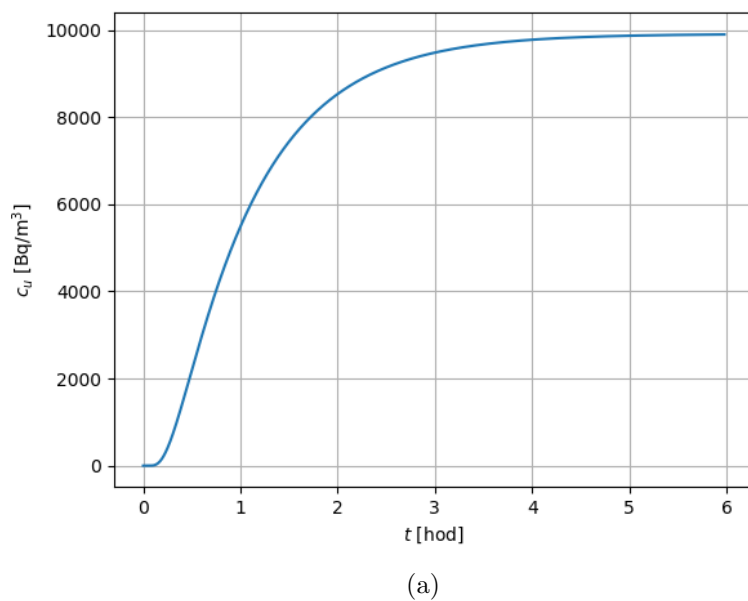
$$T_2 = 4,25 \text{ hod}, \quad (13)$$

$$T_1 + T_2 = 10,23 \text{ hod}, \quad (14)$$

doba $T_1 + T_2$ představuje celkovou dobu trvání obou případů. Byly testovány následující hodnoty c_0 : 1 kBq/m^3 , 10 kBq/m^3 , 100 kBq/m^3 , 1 MBq/m^3

3.5 Diskuze

Doby T_1 , T_2 a $T_1 + T_2$ jsou v porovnání s $T_{1/2}({}^{222}\text{Rn}) = 3,82$ dne krátké. Vzhledem k tomu že výpočet proběhl pro mnohem větší rozměry pouzdra než jaké ve skutečnosti jsou, tak můžeme říct, že v čipu je stejná koncentrace radonu jako v sudu po většinu času experimentu. Toto tvrzení ovšem platí pouze za předpokladu, že uvažovaný součinitel difúze skrze pouzdro D není hodně nadhodnocený.



Obr. 1: V (a) je vidět časový vývoj koncentrace radonu v čipu v bezprostřední blízkosti pouzdra v prvním uvažovaném případě (injektáž radonu). V (b) je vidět vývoj c_u pro druhý případ (vypumpování radonu ze sudu ven). V obou případech uvažujeme $c_0 = 10 \text{ kBq/m}^3$.

3.6 Závěr

Bylo ověřeno, že radon difunduje skrze pouzdro do čipu dostatečně rychle vzhledem k radioaktivní přeměně radonu.

Reference

- [1] Jiránek M., Fronka A.: New technique for the determination of radon diffusion coefficient in radon-proof membranes. Radiat Prot Dosimetry. 2008;130(1):22-5. doi: 10.1093/rpd/ncn121.
- [2] Hellevik, L. R.: Numerical Methods for Engineers. Department of Structural Engineering, NTNU. 2018. Citováno 10. 5. 2019. Dostupné z http://folk.ntnu.no/leifh/teaching/tkt4140/_main068.html#ch5:sec6 a http://folk.ntnu.no/leifh/teaching/tkt4140/_main069.html#ex:52
- [3] Wikipedia, The Free Encyclopedia: Crank–Nicolson method. Citováno 10. 5. 2019. Dostupné z https://en.wikipedia.org/wiki/Crank%E2%80%93Nicolson_method

4 Výpočet dávky absorbované v čipu

I v této úloze aproximuje čip a pouzdro koulemi se středy ve stejném bodě, zde však s poloměry R_1 , resp. R_2 :

$$R_1 = 3,0 \text{ mm} , \quad (15)$$

$$R_2 = 3,1 \text{ mm} , \quad (16)$$

které odpovídající více reálným rozměrům čipu a pouzdra. Objem a hmotnost čipu jsou označeny jako V_{cip} a m_{cip} :

$$V_{cip} = 0,0073 \text{ cm}^3 , \quad (17)$$

$$m_{cip} = 1,7 \times 10^{-5} \text{ kg} . \quad (18)$$

Při výpočtu m_{cip} bylo uvažováno, že celý čip je z křemíku. Objem sudu je:

$$V_{sud} = 0,19 \text{ m}^3 . \quad (19)$$

Uvažujeme faktor nerovnováhy $F = 0,1$. Objemová aktivita radonu je označena a . Do sudu je na začátku experimentu jednorázově injektována počáteční koncentrace radonu a_0 , průběh a v sudu se pak řídí exponenciálním rozpadem.

4.1 Příspěvek od α

V následujících dvou podkapitolách budou určeny energetické příspěvky od α částic vzniklých mimo a uvnitř čipu, resp. pouzdra, při dané aktivitě a_0 za jednotkový časový interval (tj. 1 s). V následující podkapitole proběhne časová integrace těchto příspěvků přes zadanou dobu expozice a následné podělení hmotností pro určení dávky od α částic.

4.1.1 Energetický příspěvek od α , které vznikly mimo čip a pouzdro

Částice α o dané počáteční energii T_0 má v daném prostředí známý maximální dosah R_{max} [1]. Proto lze okolo čipu uvažovat kouli o poloměru

$$R_3 = R_{max} + R_2 ,$$

v jejímž objemu vzniklé alfa částice mohou dolétnout k pouzdru. Alfa částice emitované mimo tuto kouli budou zastaveny dříve než doletí k pouzdru čipu. Ztrátu energie částice alfa, která vznikla ve vzdálenosti $r \in [R_2, R_3]$ od pouzdra, po projití vrstvy vzduchu o tloušťce r je možné zjistit z tabelovaných hodnot brzdných schopností [1] a pomocí následujícího jednoduchého algoritmu:

1. *Inicializace:*

$$\begin{aligned}x &= 0, \\dE &= 0, \\dx &= 0, 1.\end{aligned}$$

x je doposud ušlá dráha alfa částice; dE je ztráta energie, která je vypočítávána v každé iteraci; dx je krok, my jej bereme roven jednomu milimetru.

2. *Iterace:*

$$x = x + dx, \quad (20)$$

kontrola $x < r$,

$$\begin{aligned}dE &= \frac{dE}{dx}(T_i) \cdot dx, \\T_{i+1} &= T_i - dE,\end{aligned}$$

kontrola $dE > 0$ a $T_{i+1} > 0$.

$\frac{dE}{dx}(T_i)$ je brzdná schopnost alfa částice o energii T_i ve vzduchu. Spojitá závislost $\frac{dE}{dx}$ na T byla získána interpolováním tabelovaných hodnot z [1] kubickým splinem.

3. *Ukončení cyklu:*

pokud byla porušena jakákoliv kontrola v předchozím bodě, pak je cyklus ukončen a momentální T je energie, která alfa částici zbyla při příchodu k pouzdru.

Předchozí algoritmus je vlastně funkcí vzdálenosti vzniku alfa částice od pouzdra, tj. r , označme ji $f_0(r)$. Po přenásobením korekcí na prostorový úhel

$$k_1 = \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{r}{\sqrt{r^2 + R_1^2}} \right),$$

a faktorem zohledňujícím skutečnost, že nás zajímají alfy z celé slupky s vnitřním poloměrem r a vnějším poloměrem $r + dr$

$$k_2 = 4\pi r^2,$$

získáváme funkci $f(r)$, kterou lze zintegrovat od R_2 do R_3 , tj.

$$I = \int_{R_2}^{R_3} f(r) = \int_{R_2}^{R_3} k_1(r) \cdot k_2(r) \cdot f_0(r) dr. \quad (21)$$

Tato veličina představuje střední hodnotu zbylé energie alfa částice s danou počáteční energií T_0 po dojití k pouzdru, která je přenásobená objemem kulové slupky s poloměry R_2 a R_3 a její rozměr je tedy

$$[I] = \text{MeV} \cdot \text{cm}^3. \quad (22)$$

Po vydělení I integrovaným objemem $V = \frac{4}{3}\pi(R_3^3 - R_2^3)$ získáváme střední energii alfa částice u vstupu do pouzdra:

$$\bar{E} = \frac{I}{V}. \quad (23)$$

Vypočítané hodnoty I , \bar{E} a počáteční kinetické energie T_0 alfa částic emitovaných radonem a jeho krátkodobě žijících dceřinných produktů jsou v tabulce 1.

Tab. 1: Počáteční energie, I a $\bar{E}_{pouzdro}$ alfa částic emitovaných radonem a jeho krátkodobě žijícími dceřinnými produkty (RN=radionuklid).

RN	T_0 [MeV]	I [MeV · cm ³]	\bar{E} [MeV]
²²² Rn	5,489	3,164	0,008
²¹⁸ Po	6,002	4,105	0,007
²¹⁴ Po	7,689	8,363	0,005

Energetický příspěvek: Energetický příspěvek od α částic vzniklých mimo objem pouzdra a čipu je možné vypočítat z

$$E_{vne} = (\bar{E}_{222}V_{222} + \bar{E}_{218}V_{218}F + \bar{E}_{214}V_{214}F)a_0, \quad (24)$$

$$= (I_{222} + I_{218}F + I_{214}F)a_0 \quad [\text{MeV}], \quad (25)$$

kde F je faktor nerovnováhy.

Nadhodnocení: Bohužel tento postup nezahrnuje ztrátu energie v pouzdru, jelikož v databázi [1] nelze definovat vlastní materiály. Pro tyto účely je vhodný program SRIM [2], avšak ten mi nebyl doposud nainstalován. Důsledkem je, že je dávka od tohoto příspěvku nadhodnocena.

4.1.2 Energetický příspěvek od α , které vznikly uvnitř čipu a pouzdra

Energetický příspěvek těchto α jsem odhadl jako jednu polovinu počátečních energií všech α částic vzniklých v objemu čipu, tj.:

$$E_{vnitrek} = \frac{1}{2} \cdot (5,489 + 6,002 + 7,689) \cdot a_0 \cdot V_{cip} \quad [\text{MeV}]. \quad (26)$$

Tento odhad lze odůvodnit tím, že α částice mají malý dosah, a proto pokud nejsou emitovány blízko povrchu čipu směrem ven, tak jsou absorbovány uvnitř čipu.

4.1.3 Celkový příspěvek k dávce

Příspěvek od α k dávce je roven:

$$D_\alpha = \frac{1}{m_{cip}}(E_{vne} + E_{vnitr}) \cdot 1,6 \times 10^{-13} \frac{1 - \exp(-\lambda T)}{\lambda}, \quad (27)$$

kde $1,6 \times 10^{-13}$ je převodní faktor z MeV na Jouly, λ je přeměnová konstanta radonu a T je doba expozice.

4.2 Příspěvek od β

Tento příspěvek stále nebyl určen. Vzhledem k charakteru β záření je potřeba použít metody Monte Carlo.

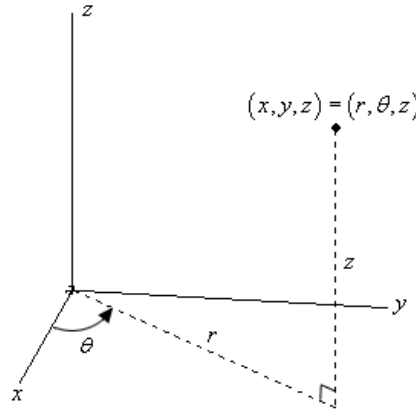
4.3 Příspěvek of γ

U γ záření postupujeme podobným způsobem jako u α s tím rozdílem, že se zde nepočítá s brzdnými schopnostmi, ale s exponenciálním zeslabováním svazku

$$N(d) = N_0 e^{-\left(\frac{\mu}{\rho}\right) \cdot \rho \cdot d}, \quad (28)$$

kde N_0 je počet fotonů o dané energii E před vstupem materiálu o hustotě ρ , $N(d)$ je počet nerozptýlených fotonů po projití materiálu o tloušťce d a $\left(\frac{\mu}{\rho}\right)$ je hmotnostní součinitel zeslabení γ záření v uvažovaném materiálu.

V dalším postupu předpokládáme, že pokud se kvantum γ záření rozptýlí, pak již nemůže přispět k dávce absorbované v čipu, tj. uvažujeme úzký svazek. Tento předpoklad je ospravedlněn velikou pronikavostí γ záření ve vzduchu.



Obr. 2: Význam cylindrických souřadnic. [3]

Vzhledem k tomu, že sud je rozměrově válec, tak s výhodou využijeme cylindrických souřadnic (r, θ, z) , jejichž význam je znázorněn v obr. 2. Definujme následující funkci:

$$f(r, z) = \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \sqrt{\frac{r^2 + z^2}{r^2 + z^2 + R_1^2}} \right) \cdot e^{-\mu \sqrt{r^2 + z^2}}, \quad (29)$$

kde μ lineární součinitel zeslabení vzduchu. Tato funkce vyjadřuje, jaký zlomek fotonů vznikající v bodě o daných souřadnicích r a z a libovolné souřadnici $\theta \in [0, 2\pi)$ dojde bez rozptýlení ke středu čipu (tím se dopouštíme určité nepřesnosti, jelikož správně bychom měli uvažovat pouze dráhu od místa vzniku k povrchu pouzdra a pak počítat zeslabování v pouzdru). Faktor

$$\frac{1}{2} \cdot \left(1 - \sqrt{\frac{r^2 + z^2}{r^2 + z^2 + R_1^2}} \right) \quad (30)$$

zohledňuje korekci na prostorový úhel a exponenciála $e^{-\mu\sqrt{r^2+z^2}}$ představuje zeslabování svazku. Funkce $f(r, z)$ je nezávislá na souřadnici θ , jelikož předpokládáme homogenní rozložení koncentrace radonu uvnitř sudu.

Uvažujeme několik zdrojů γ záření:

1. *vzduch v sudu*, ve kterém je radon o dané koncentrace a a část vznikajících dceřinných produktů, jejichž koncentrace je dána vztahem $a \cdot F$.
2. *Vnitřní povrch sudu*, na který se deponují dceřinné produkty. Jejich koncentrace na stěně:

$$a \cdot \frac{V_{sud}}{S_{sud}} \cdot (1 - F), \quad (31)$$

kde S_{sud} je povrch vnitřního povrchu sudu.

3. *Povrch pouzdra*, na který se též deponují dceřinné produkty, jejich koncentrace:

$$\frac{S_{pouzdro}}{S_{pouzdro} + S_{sud}} \cdot a \cdot \frac{V_{sud}}{S_{pouzdro}} \cdot (1 - F), \quad (32)$$

kde $S_{pouzdro}$ je povrch pouzdra. Faktor tvaru $S_i/(S_i + S_j)$ by měl vystupovat i v (31), avšak tam může být zanedbán díky jeho blízkosti jedničce.

Zanedbání: Zanedbáváme γ záření vznikající uvnitř čipu a pouzdra. Dále neuvažujeme zeslabení svazku uvnitř pouzdra s přihlédnutím k jeho tloušťce.

4.3.1 Vzduch v sudu

4.3.2 Vnitřní povrch sudu

4.3.3 Povrch pouzdra

Tab. 2: Energie E , výtěžek Y a hmotnostní součinitel zeslabení $\frac{\mu}{\rho}$, resp. absorpce $\left(\frac{\mu}{\rho}\right)_{en}$ daného γ záření od uvedeného radionuklidu (RN). Řádek s hvězdičkou u RN značí, že u daného radionuklidu bylo z důvodu zjednodušení sloučeno několik blízkých energetických linek dohromady a jejich výtěžky byly sečteny.

RN	E [keV]	Y [%]	$\left(\frac{\mu}{\rho}\right)$	$\left(\frac{\mu}{\rho}\right)_{en}$
222Rn	511.0	7.6	0.08712	0.02971
214Pb	352.0	37.4	0.09800	0.02968
214Pb*	300.0	27.0	0.10670	0.02932
214Bi	609.0	46.0	0.08055	0.02951
214Bi*	1180.0	21.0	0.05687	0.02700
214Bi	1764.0	15.0	0.04800	0.02445
214Bi	2204.0	5.0	0.04447	0.02300

4.4 Konkrétní hodnoty

Vypočítal jsem D_α pro $T = 1$ den a pro injektovanou koncentraci $a_0 = 1 \text{ kBq} \cdot \text{m}^{-3}$:

$$D_\alpha = 5,7 \mu\text{Gy} \quad (33)$$

Reference

- [1] National Institute of Standards and Technology: aStar, Stopping-power and Range Tables for Helium Ions. 14. 5. 2019. Dostupné z <https://physics.nist.gov/PhysRefData/Star/Text/ASTAR.html>
- [2] Ziegler, J. F.: SRIM - The Stopping and Range of Ions in Matter. 14. 5. 2019. Dostupné z <http://srim.org/>
- [3] Dawkins, P.: Section 1-12 : Cylindrical Coordinates. Citováno 17. 5. 2019. <http://tutorial.math.lamar.edu/Classes/CalcIII/CylindricalCoords.aspx>