

Speciální numerické metody

**Numerické metody řešení
okrajových úloh
pro diferenciální rovnice**

Stanislav Míka

Petr Přikryl

Marek Brandner

Jazyková korektura nebyla provedena, za jazykovou správnost odpovídají autoři.

Rozmnožování a šíření jen se svolením Vydavatelského servisu.

1. vydání

© Stanislav Míka, Petr Přikryl, Marek Brandner, 2006

ISBN 80-86843-13-0

Obsah

Předmluva	7
Kapitola I	
Numerické řešení okrajových úloh pro obyčejné diferenciální rovnice	11
1. Okrajové úlohy pro obyčejné diferenciální rovnice	12
1.1 Příklady okrajových úloh	12
1.2 Formulace okrajových úloh	14
1.3 Cvičení	21
2. Řešení okrajových úloh převodem na úlohy počáteční	22
2.1 Numerické metody řešení diferenciálních rovnic	22
2.2 Metoda střelby	23
2.3 Metoda přesunu okrajové podmínky	40
2.4 Cvičení	46
3. Diskretizace okrajových úloh diferenčními metodami	49
3.1 Principy diskretizace okrajových úloh	49
3.2 Metoda konečných diferencí pro Dirichletovu úlohu	50
3.3 Metoda konečných diferencí pro obecnou okrajovou úlohu	57
3.4 Metoda integrálních identit	67
3.5 Soustavy síťových rovnic	73
3.6 Cvičení	79
4. Diskretizace okrajových úloh metodami Galerkinova typu	81
4.1 Předběžné úvahy	81
4.2 Slabá formulace okrajových úloh	87
4.3 Galerkinova metoda	95
4.4 Ritzova metoda	103
4.5 Cvičení	107
5. Metoda konečných prvků	109
5.1 Bázové funkce	109
5.2 Výklad metody konečných prvků	118
5.3 Algoritmizace metody konečných prvků	123
5.4 Cvičení	129
Kapitola II	
Numerické řešení okrajových úloh pro parciální diferenciální rovnice eliptického typu (stacionární rovnice)	131
6. Okrajové úlohy pro parciální diferenciální rovnice eliptického typu	132
6.1 Příklady okrajových úloh	132
6.2 Klasické a slabé řešení okrajových úloh	134

6.3	Variační úlohy	144
6.4	Cvičení	145
7.	Diskretizace eliptických úloh diferenčními metodami	147
7.1	Úvod	147
7.2	Metoda konečných diferencí	147
7.3	Principy aproximace úloh v \mathbb{R}^2	156
7.4	Metoda integrálních identit	166
7.5	Sestavování síťových rovnic	174
7.6	Cvičení	175
8.	Diskretizace eliptických úloh metodami Galerkinova typu	177
8.1	Ritzova metoda	177
8.2	Problém ohybu pružné desky	181
8.3	Metoda vážených reziduí	183
8.4	Galerkinova metoda	184
8.5	Cvičení	185
9.	Metoda konečných prvků pro eliptické úlohy	187
9.1	Úvod	187
9.2	Triangulace	187
9.3	Po částech lineární báze funkce	189
9.4	Konstrukce báze funkce z V_1^h	190
9.5	Věta o aproximaci	193
9.6	Trojúhelníkové prvky vyšších stupňů	193
9.7	Diskretizace standardní úlohy	194
9.8	Algoritmizace MKP	195
9.9	Stručné shrnutí algoritmu MKP	201
9.10	Cvičení	203
10.	Iterační metody řešení síťových rovnic	205
10.1	Úvod	205
10.2	Metoda superrelaxace	206
10.3	Metoda střídavých směrů	206
10.4	Metoda sdružených gradientů s předpokládáním	207
10.5	Zhodnocení iteračních metod	208
10.6	Metoda více sítí	210
11.	Otázky konvergence a stability. Výběr metody	212
11.1	Úvod	212
11.2	Aproximace diferenciální úlohy diferenční metodou	212
11.3	Konvergence a chyba diferenční metody	214
11.4	Stabilita diferenčních metod	215
11.5	Laxova věta	216
11.6	Příklad	217

11.7	Odhad chyby Galerkinovy metody	217
11.8	Věta (Céaovo lemma)	218
11.9	Konvergence Galerkinovy a Ritzovy metody	219
11.10	Diferenční metody a metoda konečných prvků	219
Kapitola III		
Numerické řešení počátečně-okrajových úloh pro parciální diferenciální rovnice parabolického a hyperbolického typu (evoluční rovnice)		221
12.	Úlohy pro parciální diferenciální rovnice parabolického typu	222
12.1	Parciální diferenciální rovnice parabolického typu	222
12.2	Rovnice pro vedení tepla	222
12.3	Obecná lineární rovnice parabolického typu	223
12.4	Příklady	223
12.5	Počátečně-okrajové úlohy pro parabolické rovnice	224
12.6	Příklad	225
12.7	Vlastnosti řešení rovnice pro vedení tepla	226
12.8	Klasické řešení počátečně-okrajové úlohy	228
12.9	Zobecněná řešení počátečně-okrajové úlohy	229
12.10	Cvičení	230
13.	Diferenční metody pro parabolické rovnice	231
13.1	Explicitní metoda	231
13.2	Algoritmus explicitní metody	234
13.3	Příklad	234
13.4	Konvergence a oblast závislosti	234
13.5	Příklad	235
13.6	Stabilita explicitní metody	236
13.7	Věta o konvergenci	236
13.8	Vyšetřování stability explicitních schémat	238
13.9	Implicitní metoda	240
13.10	Algoritmus implicitní metody	242
13.11	Crankova-Nicolsonova metoda	243
13.12	Příklad	245
13.13	Monotónnost přibližného řešení	245
13.14	Okrajové podmínky obsahující derivace	246
13.15	Počátečně-okrajové úlohy pro obecné parabolické rovnice	247
13.16	Počátečně-okrajové úlohy ve více prostorových proměnných	248
13.17	Cvičení	250
14.	Semidiskrétní metody pro parabolické rovnice	252
14.1	Metoda přímek	252
14.2	Semidiskrétní Galerkinova metoda	253
14.3	Numerické řešení vzniklých počátečních úloh	254
14.4	Metoda časové diskretizace	255

14.5	Numerické řešení vzniklých okrajových úloh	256
14.6	Cvičení	257
15.	Úlohy pro parciální diferenciální rovnice hyperbolického typu	258
15.1	Rovnice zákonů zachování v mechanice	258
15.2	Lineární hyperbolická rovnice prvního řádu	260
15.3	Kvazilineární hyperbolická rovnice prvního řádu	264
15.4	Příklad	265
15.5	Počátečně-okrajová úloha	267
15.6	Soustavy rovnic prvního řádu hyperbolického typu	269
15.7	Úlohy pro hyperbolické soustavy	270
15.8	Oblast vlivu a oblast závislosti	272
15.9	Cvičení	273
16.	Metoda charakteristik	275
16.1	Úvodní informace	275
16.2	Massauova metoda pro řešení lineární počátečně-okrajové úlohy	275
16.3	Příklad	277
16.4	Massauova metoda pro kvazilineární rovnici	277
16.5	Massauova metoda pro kvazilineární soustavu rovnic	278
16.6	Příklad	280
16.7	Cvičení	281
17.	Diferenční metody pro hyperbolické rovnice prvního řádu	282
17.1	Principy diferenčních metod pro hyperbolické rovnice	282
17.2	Explicitní metody	282
17.3	Konvergence explicitní metody	286
17.4	Implicitní metody	287
17.5	Rovnice s proměnnými koeficienty	290
17.6	Metody druhého řádu	290
17.7	Diferenční metoda pro řešení hyperbolické soustavy	294
17.8	Problematika diferenčních metod	299
17.9	Cvičení	301
	Literatura	303

Předmluva

Kniha, kterou dostává čtenář do ruky, vznikla na základě tří svazků skript S. Míky a P. Příkryla [58]–[60], které vyšly na Západočeské univerzitě v Plzni před více než deseti lety a byly věnovány numerickému řešení diferenciálních rovnic. Je určena především těm, kteří se chtějí hlouběji seznámit s numerickými metodami řešení okrajových a okrajově-počátečních úloh pro diferenciální rovnice. Jde tedy především o studenty magisterských a doktorských oborů orientovaných na matematiku a její aplikace.

Celý text knihy je rozdělen do tří kapitol, kapitoly jsou rozděleny na celkem 17 článků, tyto články se dále dělí na odstavce. Vzorce jsou v každém odstavci číslovány samostatně. Na konci každého článku jsou zařazena cvičení (s výsledky nebo návody k řešení). Jejich cílem není pouze poskytnout čtenáři materiál k procvičení vyložené problematiky, ale také mu umožnit rozšiřující pohled na ty otázky, které především z rozsahových důvodů vyloženy být nemohly nebo musely být vyloženy velmi stručně. Poznamenáváme ještě, že v souladu s předchozími publikacemi S. Míky, P. Příkryla a M. Brandnera [24] a [37] věnovanými numerické matematice označujeme v příkladech písmenem D počet desetinných míst, na která je výpočet prováděn, symbolem \doteq označujeme rovnost po zaokrouhlení a symbolem \approx označujeme jakoukoli jinou přibližnou rovnost.

Kapitola I (čl. 1 až 5) pojednává o numerickém řešení okrajových úloh pro obyčejné diferenciální rovnice. (Numerickými metodami řešení *počátečních* úloh pro obyčejné diferenciální rovnice a jejich soustavy se zabývá kapitola III v publikaci [37].) Kapitola je poměrně rozsáhlá a skutečnost, že problematice numerického řešení okrajových úloh pro obyčejné diferenciální rovnice se věnujeme dosti podrobně, je dána tím, že právě na těchto úlohách vykládáme principy numerických metod pro řešení okrajových úloh vůbec. Metody pro numerické řešení parciálních diferenciálních rovnic mají s numerickými metodami pro řešení rovnic obyčejných velmi mnoho společného a zdá se nám, že obecná problematika diskretizace okrajových (a počátečně-okrajových) úloh se dá snáze a názorněji vysvětlit (a také pochopit) právě na okrajových úlohách pro obyčejné diferenciální rovnice. Studium této kapitoly tak tvoří s výjimkou článku 2, který je zaměřen výhradně na obyčejné diferenciální rovnice, nezbytnou průpravu pro studium zbývajících dvou kapitol. Poznamenáváme ještě, že teoretické úvahy o konvergenci numerických metod pro obyčejné diferenciální rovnice a pro parciální diferenciální rovnice eliptického typu jsou souhrnně zařazeny do článku 11 na konci kapitoly II věnované numerickým metodám pro řešení parciálních diferenciálních rovnic eliptického typu.

První článek kapitoly I (a podobně je tomu i v ostatních kapitolách) shrnuje přehledně základní teoretické výsledky týkající se okrajových úloh pro obyčejné diferenciální rovnice, jejichž znalost je pro porozumění výkladu numerických metod žádoucí. Podrobnější informace čtenář nalezne například v [25]. Článek 2 je poněkud speciální, zabývá se totiž možností převést numerické řešení okrajové úlohy na numerické řešení počátečních úloh pro obyčejné diferenciální rovnice či jejich soustavy. Motivací pro zařazení

této tematiky byla skutečnost, že kvalitní matematický software pro řešení takových počátečních úloh je dnes běžně k dispozici. (Numerickému řešení počátečních úloh pro obyčejné diferenciální rovnice je věnována celá řada publikací. Pro porozumění výkladu v předkládané knize je plně postačující znalost příslušné části skript P. Příkryla a M. Brandnera [37].) Článek 3 obsahuje výklad metody konečných diferencí a metody integrálních identit a pojednává také o metodách řešení soustav síťových rovnic, které při použití těchto dvou typů diskretizačních metod vznikají. Zbylé dva články kapitoly jsou věnovány metodám Galerkinova typu, zejména pak metodě konečných prvků. Metodu konečných prvků jsme do kapitoly o obyčejných diferenciálních rovnicích zařadili ne proto, že by zde patřila k často používaným metodám, ale proto, že na obyčejných diferenciálních rovnicích se nejlépe vyloží její principy (včetně pojmu slabého řešení okrajové úlohy).

Kapitola II (čl. 6 až 11) je věnována numerickým metodám řešení okrajových úloh pro parciální diferenciální rovnice eliptického typu. S eliptickými parciálními diferenciálními rovnicemi se setkáváme především při popisu stacionárních, tj. na čase nezávislých, jevů. Okrajové úlohy pro obyčejné diferenciální rovnice, jimž byla věnována první kapitola, lze velmi často chápat jako speciální případy úloh pro eliptické rovnice. Proto představují výsledky první kapitoly velmi užitečnou motivaci pro výklad v této druhé části. Podobnost problematiky zdůrazňujeme celkovým pojetím výkladu, včetně názvů jednotlivých článků a odstavců.

Šestý, úvodní článek této kapitoly má opět shrnující charakter. Uvádíme v něm formulaci základních úloh pro stacionární (eliptické) rovnice a stručně pojednáváme o jejich řešitelnosti. Opíráme se při tom o poznatky uvedené v [26]. Články 7 až 9 jsou věnovány konkrétním diskretizačním metodám. Jsou zde vyloženy principy metody konečných diferencí, metody integrálních identit a metod Galerkinova typu pro uvedené parciální diferenciální rovnice. U metod Galerkinova typu je důraz položen opět na metodu konečných prvků. Nekladli jsme si za cíl vyložit všechny varianty těchto metod, ale soustředili jsme se na jejich klíčové momenty. Čtenář zde například nenažde výklad metody konečných prvků s kvadratickými, kubickými či nekonformními prvky, najde zde však upozornění, kde podrobnější informace hledat. Článek 10 doplňuje odstavec 3.5 a pojednává o iteračních metodách pro řešení soustav síťových rovnic. Poslední, jedenáctý článek je věnován otázkám konvergence a stability numerických metod pro řešení obyčejných a eliptických diferenciálních rovnic.

V poslední, třetí kapitole (čl. 12 až 17) se věnujeme numerickým metodám pro řešení evolučních rovnic, tedy parciálních diferenciálních rovnic parabolického a hyperbolického typu, které popisují vývoj určitých jevů v závislosti na čase. Protože problematika numerického řešení rovnic parabolického a hyperbolického typu je výrazně odlišná, studujeme ji odděleně. Parabolickým rovnicím jsou věnovány články 12 až 14, hyperbolickým rovnicím a soustavám pak články 15 až 17.

Výklad stejně jako v předchozích dvou kapitolách vždy začíná krátkým přehledem teoretických výsledků (články 12 a 15). Pokud jde o řešení počátečně-okrajových úloh pro evoluční rovnice, věnujeme pozornost především diferenčním metodám. O metodách Galerkinova typu pro řešení parabolických rovnic se krátce zmiňujeme v článku

14, kde popisujeme přibližné řešení počátečně-okrajových úloh pro parabolické rovnice převodem na počáteční nebo okrajové úlohy pro obyčejné diferenciální rovnice či jejich soustavy. Pokud jde o parciální diferenciální rovnice hyperbolického typu, zaměřujeme zde pozornost především na numerické řešení úloh pro rovnice prvního řádu. Kromě diferenčních metod vykládáme také specifickou numerickou metodu vhodnou právě pro hyperbolické rovnice, metodu charakteristik (článek 16). Na závěr poznamenáváme, že problematiku úloh pro evoluční (a zejména hyperbolické) rovnice a jejich numerického řešení nelze dost dobře studovat bez znalosti příslušného fyzikálního základu. V této souvislosti upozorňujeme čtenáře například na publikace [12], [13], [41], [43], [47].

Numerické řešení složitějších okrajových a počátečně-okrajových úloh pro diferenciální rovnice je dnes nemyslitelné bez použití počítačů. Velmi užitečným cvičením pro čtenáře proto bude, pokusí-li se vlastním nebo získaným programem vyřešit na počítači některé úlohy, jejichž přesné řešení zná. Takové úlohy se dají vždy snadno sestavit. Čtenář pak může sám sledovat vliv volby konkrétní metody či změn jejích parametrů na získané výsledky.

Přestože jsme se snažili v této knize odstranit chyby, které se vyskytovaly v textech, z nichž vznikla, nemůžeme vyloučit, že se při našich úpravách mohly vloudit chyby nové a že některé staré chyby jsme přehlédli. Budeme proto čtenářům vděční za upozornění na jakékoli nedostatky v tomto textu.

Plzeň–Praha 2006

Stanislav Míka
Petr Příkryl
Marek Brandner

P. Příkryl byl při práci na této publikaci částečně podpořen z prostředků výzkumného záměru Akademie věd ČR č. AV0Z10190503. M. Brandner byl částečně podpořen z prostředků výzkumného záměru Západočeské univerzity v Plzni č. MSM 4977751301.

Kapitola I

Numerické řešení okrajových úloh pro obyčejné diferenciální rovnice

1. Okrajové úlohy pro obyčejné diferenciální rovnice

1.1. Příklady okrajových úloh V knize [25] je uvedena řada příkladů, z nichž je patrná odlišnost problematiky počátečních a okrajových úloh. Některé typické skutečnosti zde připomeneme.

1.1.1. Obecný tvar řešení diferenciální rovnice druhého řádu pro reálnou funkci u reálné proměnné x

$$(1.1.1) \quad u'' + \pi^2 u = 0$$

je dán vzorcem $u(x) = C_1 \cos \pi x + C_2 \sin \pi x$ (C_1, C_2 jsou libovolné konstanty). Počáteční úloha

$$(1.1.2) \quad u'' + \pi^2 u = 0, \quad u(0) = \eta_1, \quad u'(0) = \eta_2$$

má pro libovolné hodnoty η_1, η_2 právě jedno řešení $u(x) = \eta_1 \cos \pi x + \pi^{-1} \eta_2 \sin \pi x$ (ověřte). Naproti tomu okrajová úloha

$$(1.1.3) \quad u'' + \pi^2 u = 0, \quad u(0) = 0, \quad u(1) = 1$$

řešení nemá (tj. žádnou volbou C_1, C_2 nelze docílit splnění obou okrajových podmínek), kdežto úloha

$$(1.1.4) \quad u'' + \pi^2 u = 0, \quad u(0) = 0, \quad u(1) = 0$$

má nekonečně mnoho řešení tvaru $u(x) = C_2 \sin \pi x$, kde C_2 je libovolná konstanta. Konečně úloha

$$(1.1.5) \quad u'' + \pi^2 u = 0, \quad u(0) = 0, \quad u\left(\frac{1}{2}\right) = 1$$

má právě jedno řešení $u(x) = \sin \pi x$. V této souvislosti hovoříme o *řešitelných* a *neřešitelných okrajových úlohách*. Vyjasnění otázek řešitelnosti je jedním z předpokladů úspěšného užití numerické metody.

1.1.2. Řešitelnost okrajové úlohy

$$(1.1.6) \quad -u'' - \left(\frac{1}{2}\pi\right)^2 u = f(x), \quad u'(0) = 0, \quad u(1) = 0,$$

kde f je daná funkce, závisí také na vlastnostech funkce f . Pro $f(x) = \cos \frac{3}{2}\pi x$ je úloha (1.1.6) řešitelná a jejím řešením jsou všechny funkce tvaru $u(x) = C \cos \frac{1}{2}\pi x + \frac{1}{2}\pi^{-2} \cdot \cos \frac{3}{2}\pi x$ s libovolnou konstantou C . Naproti tomu pro $f(x) = x$ úloha (1.1.6) řešitelná není.

Z teoretických rozborů okrajových úloh vyplývá [25], že podmínkou řešitelnosti úlohy (1.1.6) je platnost vztahu

$$(1.1.7) \quad \int_0^1 f(x)y(x) dx = 0,$$

kde funkce y je nenulovým řešením příslušné homogenní úlohy $-y'' - \left(\frac{1}{2}\pi\right)^2 y = 0$, $y'(0) = 0$, $y(1) = 0$. Čtenář snadno ověří, že funkce $f(x) = \cos \frac{3}{2}\pi x$ podmínku (1.1.7) splňuje, kdežto funkce $f(x) = x$ nikoliv. Je totiž $y(x) = C \cos \frac{1}{2}\pi x$, kde C je libovolná nenulová konstanta.

1.1.3. Ve všech výše uvedených příkladech jsme řešením úlohy rozuměli funkci u , která byla spojitá v uvažovaném intervalu $\langle a, b \rangle$, měla spojitou první a druhou derivaci, splňovala okrajové podmínky a v každém bodě $x \in (a, b)$ splňovala příslušnou diferenciální rovnici. Uvažujme nyní okrajovou úlohu

$$(1.1.8) \quad -u'' = f(x), \quad u(0) = 0, \quad u(1) = 0,$$

kde

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \langle 0, \frac{1}{2} \rangle, \\ 0, & x = \frac{1}{2}, \\ -1, & x \in (\frac{1}{2}, 1). \end{cases}$$

Dá se ukázat, že neexistuje funkce u , která by rovnici (1.1.8) splnila v každém bodě intervalu $(0, 1)$. Úlohy typu (1.1.8) s nespojitými pravými stranami mohou však přesto být rozumným modelem problémů z praxe. Má proto smysl zabývat se i takovými úlohami, musíme ale snížit požadavky na kvalitu jejich řešení. Tak např. úloha (1.1.8) přejde v jednoznačně řešitelnou úlohu tehdy, jestliže nebudeme žádat splnění rovnice v bodě $x = \frac{1}{2}$, ale zachováme požadavek spojitosti u a u' na celém uvažovaném intervalu.

Skutečně, funkce

$$u(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x, & x \in \langle 0, \frac{1}{2} \rangle, \\ \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}, & x \in \langle \frac{1}{2}, 1 \rangle, \end{cases}$$

je spojitá a má spojitou derivaci u' pro $x \in \langle 0, 1 \rangle$. Druhá derivace u'' je spojitá všude v $x \in \langle 0, 1 \rangle$ kromě bodu $x = \frac{1}{2}$. Rovnici (1.1.8) funkce u splňuje pro každé $x \neq \frac{1}{2}$ a vyhovuje také okrajovým podmínkám. Tuto funkci budeme proto považovat za řešení úlohy (1.1.8), i když v bodě $x = \frac{1}{2}$ nemůžeme o splnění rovnice hovořit. S obdobnými problémy se můžeme setkat také u rovnic tvaru

$$(1.1.9) \quad -(p(x)u')' = f(x)$$

s nespojitou funkcí p .

Je tedy nutné předem se rozhodnout, jaké funkce u budeme (ještě) za řešení považovat, tj. jaký obsah dáme termínu *řešitelnost úlohy* z hlediska kvality funkce u . V této souvislosti se můžeme setkat s termíny klasické (hladké), silné a slabé řešení. Jejich přesnou definici uvedeme později.

Je třeba si uvědomit, že požadavky na funkci u má smysl zeslabovat jen u těch úloh, u nichž rovnice a okrajové podmínky nejsou ve vzájemném rozporu. Tak např. řešitelnost úlohy (1.1.3) nezachráníme snížením požadavků na hladkost funkce u . Příčinou neřešitelnosti jsou zde zadané okrajové podmínky.

1.2. Formulace okrajových úloh Přejdeme nyní k obecným formulacím okrajových úloh, jejichž numerickým řešením se v této kapitole budeme zabývat.

1.2.1. Některá označení. V následujících odstavcích budeme často pracovat s funkcemi jedné reálné proměnné definovanými na nějakém intervalu $\langle a, b \rangle$. Proměnnou značíme obvykle písmenem x . Pokud hovoříme o *skalární funkci* u , máme na mysli funkci $u: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$; pokud hovoříme o *vektorové funkci* \mathbf{u} , máme na mysli $\mathbf{u}: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, a zapisujeme

$$\mathbf{u}(x) = \begin{bmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \\ \vdots \\ u_n(x) \end{bmatrix} = [u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)]^T;$$

$$u_i: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Symbolem $\mathbf{f}(x, \mathbf{z})$ označujeme zobrazení $\mathbf{f}: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Říkáme, že \mathbf{f} je vektorová funkce o n skalárních složkách f_i , $i = 1, 2, \dots, n$, a každá z těchto složek je funkcí $n+1$ reálných proměnných x, z_1, z_2, \dots, z_n . Vektorově pak píšeme

$$\mathbf{f}(x, \mathbf{z}) = \begin{bmatrix} f_1(x, z_1, z_2, \dots, z_n) \\ f_2(x, z_1, z_2, \dots, z_n) \\ \vdots \\ f_n(x, z_1, z_2, \dots, z_n) \end{bmatrix},$$

$$x \in \langle a, b \rangle, \quad z_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

nebo také

$$\mathbf{f}(x, \mathbf{z}) = [f_1(x, z_1, z_2, \dots, z_n), f_2(x, z_1, z_2, \dots, z_n), \dots, f_n(x, z_1, z_2, \dots, z_n)]^T.$$

1.2.2. Počáteční úloha. *Počáteční úlohou* pro soustavu n obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu (ve vektorovém zápisu)

$$(1.2.1) \quad \mathbf{u}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{u}), \quad x \in \langle a, b \rangle,$$

s počáteční podmínkou

$$(1.2.2) \quad \mathbf{u}(\xi) = \boldsymbol{\eta}, \quad \xi \in \langle a, b \rangle, \quad \boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^n,$$

rozumíme úlohu najít reálnou vektorovou funkci

$$\mathbf{u}(x) = [u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)]^T,$$

která splňuje (1.2.1) v každém bodě $x \in (a, b)$ a v bodě $x = \xi$ vyhovuje podmínce (1.2.2) (viz též cvičení 1.3.1). O numerickém řešení počátečních úloh se lze poučit v knize [37].

Čtenář se patrně již setkal s počátečními úlohami, v nichž bod ξ je počátečním bodem intervalu $\langle a, b \rangle$, na kterém danou úlohu studujeme, tj. $\xi = a$ (odtud také název počáteční úloha). Počáteční podmínka (1.2.2) pak má tvar $\mathbf{u}(a) = \boldsymbol{\eta}$. Teorie a praxe počátečních úloh v naší obecnější formulaci je zcela podobná teorii a praxi počátečních úloh s $\xi = a$ a není samoučelná. V této knize se setkáme např. s počátečními úlohami, v nichž jsou dodatečné podmínky pro řešení zadány v koncovém bodě intervalu $\langle a, b \rangle$, na němž hledáme řešení, tj. v bodě $\xi = b$. Terminologie je tu poněkud nedůsledná, ale čtenář by se tím neměl nechat zmást.

V čl. 2 budeme popisovat metody pro řešení okrajových úloh převodem na úlohy počáteční. Budeme přitom předpokládat, že vzniklé počáteční úlohy jsou jednoznačně řešitelné. Je známo [32], že existenci a jednoznačnost řešení počáteční úlohy (1.2.1), (1.2.2) na celém intervalu $\langle a, b \rangle$ lze dokázat např. za předpokladu, že vektorová funkce $\mathbf{f}(x, \mathbf{u})$ je spojitá na množině $S = \langle a, b \rangle \times \mathbb{R}^n$ a splňuje na S Lipschitzovu podmínku v proměnné \mathbf{u} . To znamená, že existuje konstanta L nezávislá na $x, \mathbf{u}, \mathbf{v}$ taková, že pro všechna $x \in \langle a, b \rangle, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ platí

$$(1.2.3) \quad \|\mathbf{f}(x, \mathbf{u}) - \mathbf{f}(x, \mathbf{v})\| \leq L\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|,$$

kde $\|\cdot\|$ značí některou vektorovou normu v \mathbb{R}^n .

Diferenciální rovnice vyšších řádů můžeme přepsat jako soustavy rovnic prvního řádu. Tak např. rovnici (1.1.1) lze při označení $u = u_1, u' = u_2$ přepsat na soustavu $u'_1 = u_2, u'_2 = -\pi^2 u_1$, resp.

$$\mathbf{u}' = \mathbf{A}\mathbf{u}, \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\pi^2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Funkce $\mathbf{f}(x, \mathbf{u}) = \mathbf{A}\mathbf{u}$ je zřejmě spojitá pro všechna $x \in \mathbb{R}$ a splňuje v $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ podmínku (1.2.3) s konstantou $L = \|\mathbf{A}\|$, neboť $\|\mathbf{A}(\mathbf{u} - \mathbf{v})\| \leq \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$. Odtud plyne, že počáteční úloha (1.1.2) má právě jedno řešení na libovolném intervalu $\langle a, b \rangle$ obsahujícím bod $\xi = 0$.

1.2.3. Obecná dvoubodová okrajová úloha. V řadě fyzikálních nebo technických problémů docházíme k úloze hledat takovou funkci \mathbf{u} , která je řešením soustavy (1.2.1) a která splňuje podmínky zadané pro dvě hodnoty proměnné x , jež jsou krajními body intervalu, na němž se řešení hledá. Dospíváme tak k obecné *dvoubodové okrajové úloze pro soustavu rovnic 1. řádu*

$$(1.2.4) \quad \begin{aligned} \mathbf{u}' &= \mathbf{f}(x, \mathbf{u}), \quad x \in (a, b), \\ \mathbf{r}(\mathbf{u}(a), \mathbf{u}(b)) &= \mathbf{0}, \end{aligned}$$

kde zobrazení $\mathbf{r}: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ vyjadřuje n okrajových podmínek pro $2n$ hraničních hodnot $\mathbf{u}(a) = [u_1(a), u_2(a), \dots, u_n(a)]^T$ a $\mathbf{u}(b) = [u_1(b), u_2(b), \dots, u_n(b)]^T$ řešení \mathbf{u} dané soustavy diferenciálních rovnic (viz cvičení 1.3.2 a 1.3.3).

Speciálním případem okrajových podmínek v (1.2.4) jsou *lineární okrajové podmínky*

$$(1.2.5) \quad \mathbf{C}\mathbf{u}(a) + \mathbf{D}\mathbf{u}(b) = \mathbf{c},$$

kde \mathbf{C} a \mathbf{D} jsou dané čtvercové matice řádu n a \mathbf{c} je daný n -složkový vektor. Je-li $\mathbf{c} = \mathbf{0}$, říkáme že (1.2.5) jsou *homogenní okrajové podmínky*.

Lineární okrajovou úlohou rozumíme okrajovou úlohu pro soustavu

$$(1.2.6) \quad \mathbf{u}' = \mathbf{A}(x)\mathbf{u} + \mathbf{g}(x)$$

s okrajovými podmínkami tvaru (1.2.5). Máme zde $\mathbf{f}(x, \mathbf{u}) = \mathbf{A}(x)\mathbf{u} + \mathbf{g}(x)$, kde $\mathbf{A}(x)$ je pro každé $x \in \langle a, b \rangle$ čtvercová matice řádu n a $\mathbf{g}(x)$ je n -složková vektorová funkce. Je-li v soustavě (1.2.6) $\mathbf{g}(x) = \mathbf{0}$, říkáme, že soustava je *homogenní*. *Homogenní okrajovou úlohou* nazýváme okrajovou úlohu pro homogenní soustavu (1.2.6) s homogenními podmínkami (1.2.5).

Dají-li se okrajové podmínky v (1.2.4) psát ve tvaru

$$(1.2.7) \quad \mathbf{r}_1(\mathbf{u}(a)) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{r}_2(\mathbf{u}(b)) = \mathbf{0},$$

kde \mathbf{r}_1 je n_1 -složková, \mathbf{r}_2 je n_2 -složková vektorová funkce n proměnných ($\mathbf{r}_1: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n_1}$, $\mathbf{r}_2: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n_2}$), $n_1 + n_2 = n$, říkáme, že okrajové podmínky jsou *separované*.

V lineárním případě mají separované okrajové podmínky tvar

$$\mathbf{C}_1\mathbf{u}(a) = \mathbf{c}_1, \quad \mathbf{C}_2\mathbf{u}(b) = \mathbf{c}_2,$$

přičemž \mathbf{C}_1 je matice typu $n_1 \times n$, \mathbf{C}_2 matice typu $n_2 \times n$, $n_1 + n_2 = n$ a \mathbf{c}_i , $i = 1, 2$ jsou n_i -složkové vektory.

Pokud jde o diferenciální rovnice vyšších řádů, je známo, že je lze zavedením nových funkcí převést na soustavy rovnic prvního řádu. Protože však především rovnice druhého řádu se v praxi často vyskytují, věnujeme jim zvláštní pozornost.

Obecná dvoubodová okrajová úloha pro rovnici druhého řádu má tvar

$$(1.2.8) \quad \begin{aligned} u'' &= f(x, u, u'), \quad x \in (a, b), \\ \mathbf{r}(u(a), u'(a), u(b), u'(b)) &= \mathbf{0}, \end{aligned}$$

kde $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbf{r}: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. V rovnici (1.2.8) je explicitně vyjádřena druhá derivace u'' .

Často se setkáme také s lineárními diferenciálními rovnicemi druhého řádu tvaru

$$a_1(x)u'' + a_2(x)u' + a_3(x)u = g(x),$$

kde a_1, a_2, a_3 a g jsou dané reálné funkce. Tyto rovnice nejsou rozřešeny vzhledem k u'' . Značnou pozornost budeme v tomto sešitě věnovat numerickému řešení okrajových úloh pro lineární diferenciální rovnice druhého řádu v tzv. *samoadjustovaném tvaru*

$$-(p(x)u')' + q(x)u = f(x),$$

kde p, q, f jsou dané reálné funkce. Důvodem pro to je skutečnost, že v tomto tvaru je přirozené matematicky zapisovat některé základní fyzikální principy (zákony zachování, podmínky rovnováhy atd.) nebo jejich důsledky.

Důležitým speciálním případem okrajové úlohy (1.2.8) je úloha

$$(1.2.9) \quad \begin{aligned} u'' &= f(x, u), \quad x \in (a, b), \\ u(a) &= c_1, \quad u(b) = c_2 \end{aligned}$$

s pravou stranou rovnice nezávislou na u' a se separovanými lineárními okrajovými podmínkami.

1.2.4. Standardní okrajová úloha. V této kapitole budeme *standardní okrajovou úlohou* nazývat lineární okrajovou úlohu pro diferenciální rovnici

$$(1.2.10) \quad -(p(x)u')' + q(x)u = f(x), \quad x \in (0, 1),$$

s okrajovými podmínkami

$$(1.2.11) \quad \begin{aligned} \alpha_0 u(0) - \beta_0 p(0)u'(0) &= g_0, \\ \alpha_1 u(1) + \beta_1 p(1)u'(1) &= g_1, \end{aligned}$$

kde $p \not\equiv 0^*)$, q, f jsou dané funkce, g_0, g_1 dané konstanty a $\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1$ jsou dané konstanty takové, že platí $|\alpha_0| + |\beta_0| \neq 0$, $|\alpha_1| + |\beta_1| \neq 0$.

*) Označením $p \not\equiv 0$ zde i v dalším myslíme funkci, která není na uvažovaném intervalu (zde $(0, 1)$) identicky rovna nule.

Speciálními případy podmínek (1.2.11) jsou okrajové podmínky

$$(1.2.12) \quad \begin{aligned} \text{a)} \quad & u(0) = g_0, \quad u(1) = g_1, \\ \text{b)} \quad & -p(0)u'(0) = g_0, \quad p(1)u'(1) = g_1, \\ \text{c)} \quad & \sigma_0 u(0) - p(0)u'(0) = g_0, \\ & \sigma_1 u(1) + p(1)u'(1) = g_1, \quad \sigma_0 \neq 0, \quad \sigma_1 \neq 0. \end{aligned}$$

Okrajovým podmínkám (1.2.12a) se říká *Dirichletovy podmínky*; (1.2.12b) jsou *Neumannovy*, (1.2.12c) *Newtonovy podmínky*. Mezi standardní okrajové úlohy zahrnujeme i takové, v nichž na jednom konci intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ je kladena podmínka jednoho z uvedených tří typů a na druhém konci podmínka jiného typu. To, že standardní okrajové úlohy vyšetřujeme na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$, není jisté na újmu obecnosti, neboť obecný interval $\langle a, b \rangle$ lze lineární substitucí $x = (\xi - a)/(b - a)$, $\xi \in \langle a, b \rangle$, na interval $\langle 0, 1 \rangle$ převést.

1.2.5. Klasické řešení okrajové úlohy. Funkci $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x)$, $x \in \langle a, b \rangle$, nazýváme *klasickým řešením obecné dvoubodové okrajové úlohy* (1.2.4), má-li tyto vlastnosti:

(i) je spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$ a vyhovuje rovnici $\mathbf{u}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{u})$ v každém bodě $x \in (a, b)$, tj. pro všechna $x \in (a, b)$ existuje konečná derivace $\mathbf{u}'(x)$ a platí

$$\mathbf{u}'(x) = \mathbf{f}(x, \mathbf{u}(x));$$

(ii) splňuje okrajové podmínky, tj. $\mathbf{r}(\mathbf{u}(a), \mathbf{u}(b)) = \mathbf{0}$.

Hladkost klasického řešení \mathbf{u} závisí na hladkosti pravé strany \mathbf{f} . Má-li \mathbf{f} spojitě parciální derivace až do řádu $k \geq 0$ (podle všech $n + 1$ proměnných), pak \mathbf{u} má na (a, b) spojitě derivace až do řádu $k + 1$. Termín *klasické řešení* se zde užívá proto, aby se definovaný pojem odlišil od pojmu řešení okrajových úloh v obecnějším smyslu, o kterém jsme se již zmínili v odst. 1.1.3. Nebude-li hrozit nedorozumění, budeme slovo „klasické“ vynechávat.

U standardní okrajové úlohy (1.2.10), (1.2.11) definujeme *klasické řešení* jako funkci $u = u(x)$, $x \in \langle 0, 1 \rangle$, která má tyto vlastnosti:

- (i) u a pu' jsou spojitě na $\langle 0, 1 \rangle$,
- (ii) u vyhovuje rovnici (1.2.10) v každém bodě $x \in (0, 1)$,
- (iii) u splňuje okrajové podmínky (1.2.11).

Hladkost klasického řešení standardní úlohy závisí na hladkosti funkcí p , q a f vystupujících v rovnici (1.2.10). Postačující podmínky existence klasického řešení standardní okrajové úlohy uvádí následující věta, která plyne z výsledků obsažených v [25].

1.2.6. Věta. Budiž dána okrajová úloha (1.2.10), (1.2.11) a předpokládejme, že funkce p je na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ spojitě diferencovatelná, funkce q a f jsou na $\langle 0, 1 \rangle$ spojitě a že pro všechna $x \in \langle 0, 1 \rangle$ platí

$$(1.2.13) \quad p(x) > 0, \quad q(x) \geq 0.$$

Okrajové podmínky (1.2.11) nechť jsou takové, že

$$(1.2.14) \quad \begin{aligned} \alpha_0 \geq 0, \quad \alpha_1 \geq 0, \quad \beta_0 \geq 0, \quad \beta_1 \geq 0, \\ \alpha_0 + \beta_0 > 0, \quad \alpha_1 + \beta_1 > 0. \end{aligned}$$

- a) Nechť $q(x) \not\equiv 0$. Pak existuje právě jedno řešení okrajové úlohy (1.2.10), (1.2.11).
b) Nechť $q(x) \equiv 0$ a nechť alespoň jedna z konstant α_0, α_1 je nenulová. Pak existuje právě jedno řešení okrajové úlohy (1.2.10), (1.2.11).
c) Nechť $q(x) \equiv 0, \alpha_0 = \alpha_1 = 0$. Pak k tomu, aby existovalo řešení okrajové úlohy

$$-(p(x)u')' = f(x), \quad -\beta_0 p(0)u'(0) = g_0, \quad \beta_1 p(1)u'(1) = g_1,$$

je nutné a stačí, aby platilo

$$(1.2.15) \quad \int_0^1 f(x) dx + \frac{g_0}{\beta_0} + \frac{g_1}{\beta_1} = 0.$$

Každá dvě taková řešení se přitom od sebe liší aditivní konstantou.

1.2.7. Poznámka. K tomu, aby standardní okrajová úloha byla jednoznačně řešitelná, není nutné, aby splňovala předpoklady věty 1.2.6. Klasické řešení okrajové úlohy (1.2.10), (1.2.11) ve smyslu odst. 1.2.5 může existovat např. i tehdy, je-li funkce p v některých bodech intervalu $(0, 1)$ nespojitá. Fyzikálně to zpravidla odpovídá situaci, kdy prostředí charakterizované funkcí p se skládá z různých materiálů. Body nespojitosti funkce p pak odpovídají rozhraním mezi jednotlivými materiály. Podmínkám spojitosti funkcí u a pu' (z definice klasického řešení) v bodech těchto rozhraní se říká *přechodové podmínky*.

Jestliže $x_P \in (0, 1)$ je takovým bodem rozhraní, mají tedy uvažované přechodové podmínky tvar

$$(1.2.16) \quad u(x_P-) = u(x_P+),$$

$$(1.2.17) \quad p(x_P-)u'(x_P-) = p(x_P+)u'(x_P+),$$

kde symboly $F(x_P-)$ a $F(x_P+)$ označují jednostranné limity funkce F v bodě x_P zleva a zprava.

1.2.8. Příklad. Uvažujme standardní okrajovou úlohu

$$(1.2.18) \quad -(p(x)u')' = 1, \quad u(0) = u(1) = 0,$$

kde

$$p(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \in \langle 0, \frac{1}{2} \rangle, \\ 2 & \text{pro } x \in \langle \frac{1}{2}, 1 \rangle. \end{cases}$$

Integrací rovnice (1.2.18) dostaneme postupně

$$u'(x) = \begin{cases} -x + A & \text{pro } x \in \langle 0, \frac{1}{2} \rangle, \\ -\frac{1}{2}x + C & \text{pro } x \in \langle \frac{1}{2}, 1 \rangle, \end{cases}$$

$$u(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x^2 + Ax + B & \text{pro } x \in \langle 0, \frac{1}{2} \rangle, \\ -\frac{1}{4}x^2 + Cx + D & \text{pro } x \in \langle \frac{1}{2}, 1 \rangle, \end{cases}$$

kde A, B, C, D jsou integrační konstanty.

Z okrajových podmínek dostáváme pro A, B, C, D dvě rovnice

$$B = 0, \quad -\frac{1}{4} + C + D = 0.$$

Aby byly splněny přechodové podmínky v bodě $x = \frac{1}{2}$, musí dále platit

$$-\frac{1}{8} + \frac{1}{2}A + B = -\frac{1}{16} + \frac{1}{2}C + D,$$

$$-\frac{1}{2} + A = -\frac{1}{2} + 2C.$$

Odtud nakonec dostaneme

$$(1.2.19) \quad u(x) = \begin{cases} \frac{1}{12}(5x - 6x^2) & \text{pro } x \in \langle 0, \frac{1}{2} \rangle, \\ \frac{1}{24}(1 + 5x - 6x^2) & \text{pro } x \in \langle \frac{1}{2}, 1 \rangle. \end{cases}$$

Je vidět, že pro $x \in \langle 0, 1 \rangle$ platí $p(x)u'(x) = -x + \frac{5}{12}$ a rovnice (1.2.18) je tedy skutečně splněna v každém bodě $x \in (0, 1)$.

1.2.9. Jiné okrajové úlohy. V odst. 1.2.4 jsme zavedli termín „standardní okrajová úloha“ pro úlohy s jistým speciálním tvarem diferenciální rovnice druhého řádu a jemu odpovídajícím speciálním tvarem okrajových podmínek. V dalším textu se ale budeme zabývat také numerickým řešením okrajových úloh pro rovnice druhého řádu, které ke standardním úlohám nepatří. Půjde tu např. o okrajové úlohy pro diferenciální rovnici

$$(1.2.20) \quad -(p(x)u')' + \gamma(x)u' + q(x)u = f(x),$$

kde γ je nenulová omezená funkce. S touto rovnicí se setkáme např. v odst. 3.4.

1.3. Cvičení

1.3.1 Rozepište úlohu (1.2.1), (1.2.2) pro $n = 3$ do složek. [Návod: Položte $\mathbf{u} = [u_1, u_2, u_3]^T$, $\boldsymbol{\eta} = [\eta_1, \eta_2, \eta_3]^T$ a užíjte označení z odst. 1.2.1.]

1.3.2. Rozepište okrajovou úlohu (1.2.4) pro $n = 2$ do složek. [Návod: Položte $\mathbf{u} = [u_1, u_2]^T$, $\mathbf{r}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = [r_1(v_1, v_2, w_1, w_2), r_2(v_1, v_2, w_1, w_2)]^T$. Výsledek: $u'_1 = f_1(x, u_1, u_2)$, $u'_2 = f_2(x, u_1, u_2)$. Okrajové podmínky jsou $r_2(u_1(a), u_2(a), u_1(b), u_2(b)) = 0$, $r_2(u_1(a), u_2(a), u_1(b), u_2(b)) = 0$.]

1.3.3. Zapište okrajovou úlohu $u'_1 = \sin u_1 + \sin u_2 + x^2$, $u'_2 = u_1 u_2$, $u_1(0)u_2(1) = 1$, $\cos u_2(1) = 0$ ve vektorovém tvaru (1.2.4). [Je $n = 2$, $\mathbf{u} = [u_1, u_2]^T$, $\mathbf{f}(x, \mathbf{u}) = [\sin u_1 + \sin u_2 + x^2, u_1 u_2]^T$, $\mathbf{r}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = [v_1 w_2 - 1, \cos w_2]^T$.]

1.3.4. Okrajovou úlohu $-(p(x)u')' + q(x)u = f(x)$, $p(0)u'(0) = g_0$, $\sigma_1 u(1) + p(1)u'(1) = g_1$ přepište jako okrajovou úlohu pro soustavu rovnic 1. řádu a vyjádřete maticovým zápisem. Co musíte předpokládat o funkci p ? [Návod: Volte $u_1 = u$, $u_2 = pu'$. Je třeba předpokládat, že $p(x) \neq 0$, $x \in \langle 0, 1 \rangle$.]

1.3.5. Okrajovou úlohu $u'' = f(x, u, u')$, $r(u(a), u'(a), u(b), u'(b)) = 0$ převedte na okrajovou úlohu pro soustavu rovnic 1. řádu. [Návod: Položte $u_1 = u$, $u_2 = u'$. Výsledek: $u'_1 = u_2$, $u'_2 = f(x, u_1, u_2)$, $r(u_1(a), u_2(a), u_1(b), u_2(b)) = 0$.]

1.3.6. Obdobně jako v příkl. 1.2.8 se pokuste stanovit klasické řešení okrajové úlohy $-u'' = f(x)$, $u(0) = u(1) = 0$, kde

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{pro } x \in \langle 0, \frac{1}{2} \rangle, \\ -2 & \text{pro } x \in \langle \frac{1}{2}, 1 \rangle. \end{cases}$$

[Návod: Použijte přechodové podmínky $u(\frac{1}{2}-) = u(\frac{1}{2}+)$, $u'(\frac{1}{2}-) = u'(\frac{1}{2}+)$. Výsledek: Úloha nemá klasické řešení. Zobecněné řešení, které nesplňuje diferenciální rovnici v bodě $x = \frac{1}{2}$, je dáno vzorci $u(x) = -x^2 + \frac{1}{2}x$, $x \in \langle 0, \frac{1}{2} \rangle$, $u(x) = x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$, $x \in \langle \frac{1}{2}, 1 \rangle$. V bodě $x = \frac{1}{2}$ nemá u druhou derivaci].

1.3.7. Formulujte obdobu standardní okrajové úlohy (1.2.10), (1.2.11) na obecném intervalu $\langle a, b \rangle$ a proveďte její převod na interval $\langle 0, 1 \rangle$.

2. Řešení okrajových úloh převodem na úlohy počáteční

2.1. Numerické metody řešení okrajových úloh Jak jsme již naznačili v čl. 1, je teorie okrajových úloh pro obyčejné diferenciální rovnice komplikovanější a méně ucelená než teorie počátečních úloh. Tato situace se odráží i v numerických metodách pro řešení okrajových úloh, kde se nedaří vytvářet tak univerzální metody a algoritmy jako u úloh s počátečními podmínkami.

Řešením počátečních úloh pro obyčejné diferenciální rovnice se dosti detailně zabývá kniha [37]. Jak lze studiem příslušné kapitoly této knihy zjistit, existuje celá řada osvědčených metod pro numerické řešení počátečních úloh a jejich teorie i výpočetní praxe jsou v současné době ve velmi uspokojivém stavu (viz např. [2], [16], [49], [55]). Běžně používané numerické metody pro řešení počátečních úloh mají společné to, že se postupně hledají hodnoty přibližného řešení pro posloupnost hodnot nezávisle proměnné x_0, x_1, x_2, \dots , přičemž x_0 je bod, v němž jsou zadány počáteční podmínky ($x_0 = \xi$ pro úlohu (1.2.1), (1.2.2)). Numerické řešení počátečních úloh pak vlastně spočívá v opakovaném výpočtu hodnot přibližného řešení z více či méně komplikovaných rekurentních vztahů.

U okrajových úloh je situace zcela jiná. Podívejme se např. na poměrně jednoduchou úlohu (1.2.9). Je zřejmé, že samotnou okrajovou podmínkou v bodě $x = a$ (či $x = b$) není ještě řešení úlohy jednoznačně určeno. Informace, kterou na základě formulace úlohy máme v bodě $x = a$ k dispozici, proto také nestačí k tomu, abychom hodnoty přibližného řešení mohli počítat postupně krok po kroku tak, jak je to možné při numerickém řešení úloh počátečních. Abychom mohli numericky řešit okrajové úlohy, je tudíž třeba buď najít způsob, jak určit chybějící počáteční podmínky v některém z koncových bodů intervalu $\langle a, b \rangle$ (a úlohu tak převést na úlohu počáteční), nebo použít metody jiného typu než u počátečních úloh. Tyto metody ve své konečné fázi vedou zpravidla na řešení soustav lineárních či nelineárních algebraických rovnic.

Numerické metody pro řešení okrajových úloh pro obyčejné diferenciální rovnice lze v zásadě rozdělit do čtyř skupin:

1. Metody převádějící okrajové úlohy na úlohy počáteční.
2. Diferenční metody.
3. Variační metody neboli metody Galerkinova typu.
4. Jiné metody, jako je např. kolokační metoda, metoda kvazilinearizace atd.

V tomto článku se nadále budeme zabývat metodami převodu okrajových úloh na úlohy počáteční. Předpokládáme přitom, že čtenář je alespoň rámcově obeznámen s problematikou numerického řešení počátečních úloh a řešení úlohy s počátečními podmínkami pokládáme za elementární operaci. Nebudeme zde proto konkrétně popisovat numerické metody, jimiž se řeší počáteční úlohy tvořící části algoritmů pro řešení úloh okrajových.

Metodám druhé a třetí skupiny jsou věnovány čl. 3 až 5 této kapitoly. O dalších numerických metodách pro řešení okrajových úloh pro obyčejné diferenciální rovnice se lze poučit rovněž v [11], [30], [55].

2.2. Metoda střelby Klasickou metodou založenou na převodu řešení okrajové úlohy na posloupnost úloh počátečních je metoda střelby. Její základní myšlenka je velice jednoduchá a popíšeme ji nejprve na příkladě okrajové úlohy pro jednu diferenciální rovnici druhého řádu se separovanými okrajovými podmínkami.

2.2.1. Princip metody střelby. Mějme okrajovou úlohu

$$(2.2.1) \quad u'' = f(x, u, u'), \quad x \in (a, b),$$

$$(2.2.2) \quad \begin{aligned} r_1(u(a), u'(a)) &= 0, \\ r_2(u(b), u'(b)) &= 0, \end{aligned}$$

kde $f = f(x, y, z)$, $r_1 = r_1(y, z)$, $r_2 = r_2(y, z)$ jsou dané spojité funkce. Předpokládejme, že úloha (2.2.1), (2.2.2) má řešení a že funkce f je dostatečně hladká, takže jsou na $\langle a, b \rangle$ jednoznačně řešitelné počáteční úlohy pro rovnici (2.2.1) s libovolně zadanými počátečními podmínkami v bodě $x = a$, tj. úlohy s podmínkami

$$(2.2.3) \quad u(a) = \eta, \quad u'(a) = \mu,$$

pro libovolně zadané hodnoty η a μ .

Naším cílem je stanovit hodnoty η a μ tak, aby řešení počáteční úlohy (2.2.1), (2.2.3) bylo zároveň hledaným řešením okrajové úlohy (2.2.1), (2.2.2). Jakmile taková η a μ určíme, můžeme pak přibližné řešení dané okrajové úlohy vypočítat pomocí některé numerické metody pro řešení počátečních úloh.

Hledané hodnoty η a μ musí v první řadě splňovat okrajovou podmínku (2.2.2) pro $x = a$, tj. musí pro ně platit

$$(2.2.4) \quad r_1(\eta, \mu) = 0.$$

Abychom toho dosáhli, zvolíme pevně jednu z nich a druhou z rovnice (2.2.4) vypočítáme, a to buď exaktně (je-li to proveditelné) nebo některou numerickou metodou pro řešení algebraických rovnic (viz např. [24], [35]).

Je-li tedy levá okrajová podmínka např. tvaru $u(a) - u'(a) = 5$ (tj. $r_1(y, z) = y - z - 5$), zvolíme třeba nějakou hodnotu η v podmínce $u(a) = \eta$ a pak již z okrajové podmínky vypočítáme $u'(a) = u(a) - 5 = \eta - 5$ a položíme $\mu = \eta - 5$. Tím zaručíme, že η a μ splňují okrajovou podmínku v bodě $x = a$. Je-li v bodě $x = a$ zadána např.

okrajová podmínka $u(a) = 1$ ($r_1(y, z) = y - 1$ a nezávisí tedy na druhé proměnné z), je přirozené volit $u'(a) = \mu$ libovolně a klást $\eta = 1$, takže opět platí (2.2.4).

Protože v obecném zápisu vystupují v (2.2.4) obě hodnoty η a μ , budeme v dalším výkladu pro konkrétnost předpokládat, že splnění levé okrajové podmínky zajistíme tak, že hodnotu μ volíme libovolně a η stanovíme pro každé zvolené μ vyřešením rovnice (2.2.4).

Řešme nyní počáteční úlohu (2.2.1), (2.2.3) s takto získanými hodnotami η a μ v počátečních podmínkách, kde tedy η závisí na μ prostřednictvím (2.2.4). Podle našich předpokladů má tato počáteční úloha pro každou hodnotu μ , kterou zvolíme, na $\langle a, b \rangle$ řešení, a to jediné. Protože toto řešení závisí na tom, jakou hodnotu μ jsme zvolili, označíme je $u(x; \mu)$. Funkce $u(x; \mu)$ tedy splňuje diferenciální rovnici (2.2.1) a okrajovou podmínku (2.2.2) pro $x = a$. Splňuje ovšem také počáteční podmínky (2.2.3), kde η a μ jsou vázány vztahem (2.2.4), a její hodnoty na $\langle a, b \rangle$ lze proto (přibližně) stanovit některou numerickou metodou pro řešení počátečních úloh.

Pokud při naší volbě hodnoty μ splňuje funkce $u(x; \mu)$ také druhou z okrajových podmínek (2.2.2), tj. pokud platí

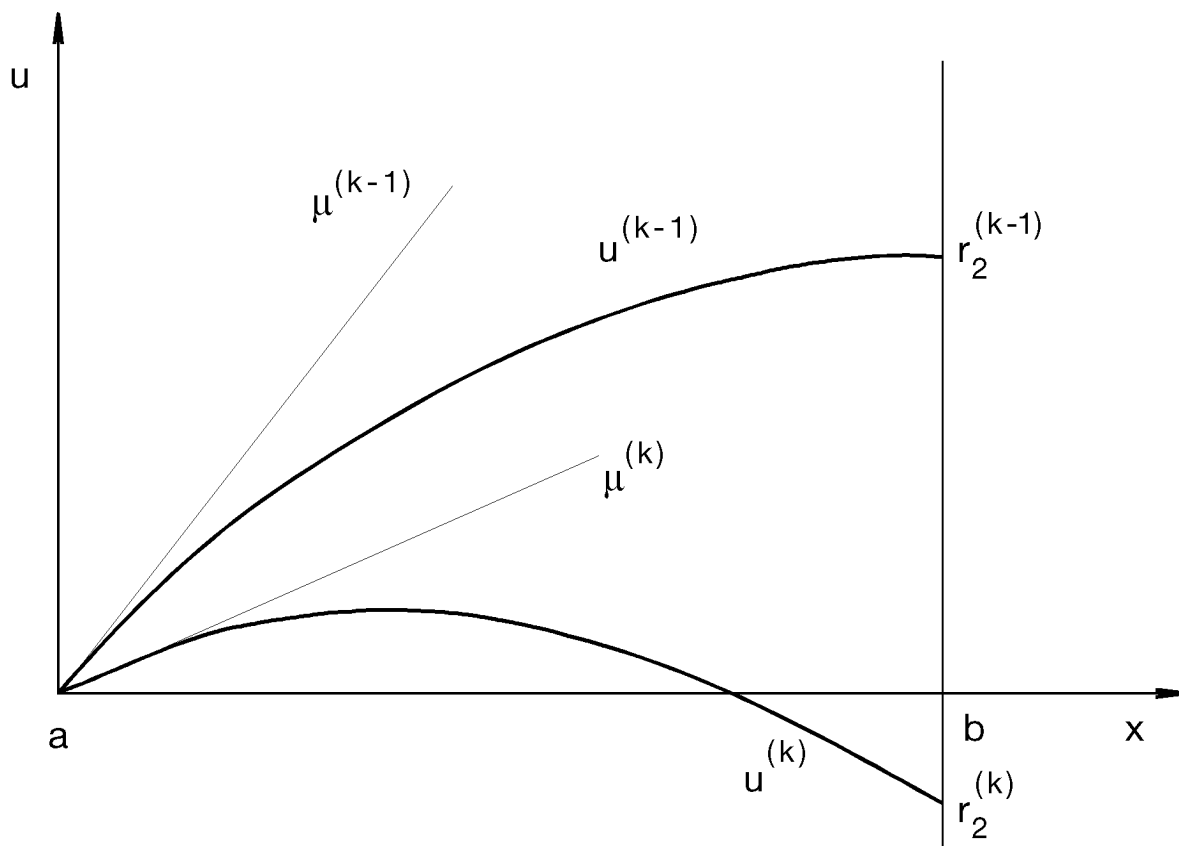
$$(2.2.5) \quad r_2(u(b; \mu), u'(b; \mu)) = 0,$$

je $u(x; \mu)$ zřejmě hledaným řešením dané okrajové úlohy. Při náhodné volbě hodnoty μ však funkce $u(x; \mu)$ obecně okrajovou podmínku v bodě $x = b$ splňovat nebude.

Budeme-li systematicky měnit μ a popsany postup opakovat, získáme tak jednoparametrický soubor $\{u(x; \mu)\}$ řešení počátečních úloh pro rovnici (2.2.1) takový, že tato řešení vesměs splňují levou okrajovou podmínku (2.2.2). Naším cílem vlastně je vybrat z tohoto souboru funkci tu, která splňuje rovněž pravou okrajovou podmínku. To se dá provést různými způsoby.

Jedna z možností spočívá v tom, že buďto náhodně, nebo podle určitého systému volíme hodnoty μ tak dlouho, až pro nějaké dvě hodnoty $\mu^{(k-1)}$ a $\mu^{(k)}$ budou odpovídající funkční hodnoty funkce r_2 na levé straně (2.2.5) mít opačná znaménka. Použijeme-li nyní pro názornost dělostřeleckou terminologii a díváme se na μ jako na směrnici „výstřelu“ směřujícího od bodu $x = a$ k bodu $x = b$, znamená to, že jsme cíl, tj. hodnotu $r_2 = 0$, „zarámovali“ a můžeme ve „střelbě“ pokračovat a snažit se jej „zasáhnout“, tj. splnit podmínku (2.2.5). Protože z teorie diferenciálních rovnic plyne ([32]), že za našich předpokladů jsou $u(x; \mu)$ a $u'(x; \mu)$ spojité funkce μ , závisí levá strana (2.2.5) na μ rovněž spojitě a hledaná hodnota μ tudíž nutně leží mezi $\mu^{(k-1)}$ a $\mu^{(k)}$. Název *metoda střelby* získal popsany postup právě díky uvedené názorné představě.

Pro případ Dirichletových okrajových podmínek $u(a) = 0$, $u(b) = 0$ (kdy tedy $r_1(y, z) = y$, $r_2(y, z) = y$) je celá situace znázorněna na obr. 1. Na obrázku je označeno $u^{(k)} = u(x; \mu^{(k)})$, $r_2^{(k)} = r_2(u(b; \mu^{(k)}), u'(b; \mu^{(k)}))$ a podobně pro $k - 1$.



Obr. 1. Metoda střelby pro Dirichletovu úlohu s okrajovými podmínkami $u(a) = 0, u(b) = 0$.

Z toho, co jsme dosud řekli, je zřejmé, že metoda střelby vlastně převádí úkol řešit okrajovou úlohu (2.2.1), (2.2.2) na řešení (obecně nelineární) rovnice

$$(2.2.6) \quad F(\mu) = 0,$$

kde funkce F je dána vztahem

$$(2.2.7) \quad F(\mu) = r_2(u(b; \mu), u'(b; \mu)).$$

Každou hodnotu $F(\mu)$ funkce F přitom můžeme vypočítat vyřešením jedné počáteční úlohy tvaru (2.2.1), (2.2.3). Po vyřešení rovnice (2.2.6) (výjimečně analyticky, zpravidla vhodnou numerickou metodou) získáme funkci $u(x; \mu)$, která je řešením okrajové úlohy (2.2.1), (2.2.2).

K numerickému řešení rovnice (2.2.6) lze použít různé metody iteračního charakteru určené k řešení nelineárních algebraických rovnic (viz [24], [35]). Tak např. pro $\mu^{(k-1)}$ a $\mu^{(k)}$ takové, že $F(\mu^{(k-1)})$ a $F(\mu^{(k)})$ mají opačná znaménka, získáme metodu uplnění intervalu (bisekce) jako novou aproximaci kořene μ rovnice (2.2.6) číslo

$$(2.2.8) \quad \mu^{(k+1)} = \frac{1}{2}(\mu^{(k)} + \mu^{(k-1)}).$$

Metoda regula falsi nám dá

$$(2.2.9) \quad \mu^{(k+1)} = \mu^{(k)} - \frac{F(\mu^{(k)})}{F(\mu^{(k)}) - F(\mu^{(k-1)})}(\mu^{(k)} - \mu^{(k-1)}).$$

Jak plyne z vět o závislosti řešení počátečních úloh na parametru ([32]), bude při dostatečné hladkosti funkcí f , r_1 , r_2 mít funkce F spojitou derivaci podle μ . K řešení rovnice $F(\mu) = 0$ lze tudíž použít i Newtonovu metodu, tj. počítat $\mu^{(k+1)}$ iteračně podle vzorce

$$(2.2.10) \quad \mu^{(k+1)} = \mu^{(k)} - \frac{F(\mu^{(k)})}{F'(\mu^{(k)})}.$$

Hodnota $F(\mu^{(k)})$ se zde určí stejně jako v předchozích dvou případech, navíc je ale třeba stanovit $F'(\mu^{(k)})$.

Hodnotu derivace $F'(\mu^{(k)})$ lze získat vyřešením další pomocné počáteční úlohy, která má však poměrně složitý tvar, což vede ke zvýšení pracnosti celého algoritmu (podrobnosti viz [14], [49], [55]). Obvykle se proto $F'(\mu^{(k)})$ ve vzorci (2.2.10) aproximuje diferenčním podílem

$$(2.2.11) \quad F'(\mu^{(k)}) \approx \frac{F(\mu^{(k)} + h_k) - F(\mu^{(k)})}{h_k}.$$

Vzniká zde tak navíc problém volby vhodného h_k ([30], [49]). Volíme-li totiž přírůstek h_k příliš velký, dostáváme špatnou aproximaci derivace $F'(\mu^{(k)})$ a konvergence iteračního procesu (2.2.10) se výrazně zpomalí. Zvolíme-li naopak h_k příliš malé (vzhledem k počtu desetinných míst v hodnotách funkce F), budou v čitateli vzorce (2.2.11) vystupovat skoro stejná čísla a při výpočtu diferenčního podílu dojde k velké ztrátě platných číslic, a tudíž opět ke špatné aproximaci $F'(\mu^{(k)})$ (viz též [37]). Je tedy možné učinit především ten závěr, že pro uvažovanou modifikaci Newtonovy metody je nezbytně třeba počítat hodnoty funkce F (tj. řešit příslušné počáteční úlohy) s co největší přesností. Dlužno poznamenat, že existující programy pro řešení počátečních úloh to za únosnou cenu dovolují. Jako hrubé orientační vodítko pro volbu h_k lze (při $\mu^{(k)} \neq 0$) brát $h_k \approx 10^{-t/2} \mu^{(k)}$, kde t je počet dekadických číslic, na něž provádíme výpočet hodnot funkce F . Pro metodu bisekce či regula falsi naproti tomu alespoň na začátku iteračního procesu není přesnost výpočtu hodnot funkce F tak kritická.

Dalším problémem je volba počátečního přiblížení $\mu^{(0)}$ (příp. $\mu^{(0)}$ a $\mu^{(1)}$ pro iterační metody typu (2.2.8) a (2.2.9)) a otázka konvergence použité iterační metody. Je známo [24], že pokud počáteční přiblížení $\mu^{(0)}$ není dostatečně blízko hledaného kořene funkce F , může Newtonova metoda divergovat. Konvergence metody regula falsi či metody bisekce je zaručena pouze při počátečních přiblíženích $\mu^{(0)}$ a $\mu^{(1)}$ takových, že $F(\mu^{(0)})F(\mu^{(1)}) < 0$. Tyto problémy vedly ke zkoumání variant Newtonovy metody, jež mají jisté globální konvergenční vlastnosti (viz odst. 2.2.5 a [35]). Podrobný rozbor problematiky metody střelby s řadou praktických pokynů pro její realizaci lze nalézt v [30], [42] a [49].

U lineárních okrajových úloh ztrácí metoda střelby iterační charakter. Metodou střelby pro lineární úlohy se budeme zabývat v odst. 2.2.7.

2.2.2. Algoritmus metody střelby. Shrňeme výsledky odst. 2.2.1. a stručně popíšeme algoritmus metody střelby pro řešení okrajové úlohy (2.2.1), (2.2.2). K řešení rovnice (2.2.6) použijeme modifikovanou Newtonovu metodu (2.2.10) s aproximací derivace podle (2.2.11). Volíme $h_k = 10^{-t/2} \mu^{(k)}$, kde t je počet dekadických číslic, na něž provádíme výpočet hodnot funkce F z (2.2.6), případně jiné číslo zadané uživatelem algoritmu. Hodnoty funkce F získáváme řešením počátečních úloh pro rovnici druhého řádu (2.2.1). Tyto úlohy můžeme řešit např. tak, že rovnici přepíšeme na soustavu dvou rovnic prvního řádu a použijeme některou z metod popsanych v [37]. I zde předpokládáme, že v bodě $x = a$ volíme $u'(a) (= \mu)$ a hodnotu η v počáteční podmínce $u(a) = \eta$ stanovíme tak, že pro zvolené μ vyřešíme algebraickou rovnici (2.2.4). Pokud by to nebylo možné (např. je-li v bodě $x = a$ zadána okrajová podmínka $u'(a) = c$, kde c je nějaké dané číslo), je třeba algoritmus vhodným způsobem modifikovat (cvičení 2.4.2).

Krok 1. Zvolíme počáteční přiblížení $\mu^{(0)}$ a stanovíme $\eta^{(0)}$ z rovnice $r_1(\eta^{(0)}, \mu^{(0)}) = 0$. Položíme $k = 0$.

Krok 2. Na intervalu $\langle a, b \rangle$ vyřešíme počáteční úlohu

$$(2.2.12) \quad \begin{aligned} u'' &= f(x, u, u'), \quad x \in (a, b), \\ u(a) &= \eta^{(k)}, \quad u'(a) = \mu^{(k)}. \end{aligned}$$

Položíme $F(\mu^{(k)}) = r_2(u(b; \mu^{(k)}), u'(b; \mu^{(k)}))$. Pokud $|F(\mu^{(k)})| < \epsilon$ (tolerance zadaná uživatelem), považujeme $u(x; \mu^{(k)})$ za přibližné řešení úlohy (2.2.1), (2.2.2) na $\langle a, b \rangle$ a algoritmus končí. V opačném případě pokračujeme dalším krokem.

Krok 3. Položíme $\tilde{\mu}^{(k)} = \mu^{(k)} + 10^{-t/2} \mu^{(k)}$ (při $\mu^{(k)} = 0$ je nutná jiná volba!) a z rovnice $r_1(\tilde{\eta}^{(k)}, \tilde{\mu}^{(k)}) = 0$ stanovíme $\tilde{\eta}^{(k)}$. Na intervalu $\langle a, b \rangle$ vyřešíme počáteční úlohu

$$(2.2.13) \quad \begin{aligned} u'' &= f(x, u, u'), \quad x \in (a, b), \\ u(a) &= \tilde{\eta}^{(k)}, \quad u'(a) = \tilde{\mu}^{(k)}. \end{aligned}$$

Položíme $F(\tilde{\mu}^{(k)}) = r_2(u(b; \tilde{\mu}^{(k)}), u'(b; \tilde{\mu}^{(k)}))$. Pokud $|F(\tilde{\mu}^{(k)})| < \epsilon$, algoritmus končí a hledaným přibližným řešením úlohy (2.2.1), (2.2.2) je $u(x; \tilde{\mu}^{(k)})$. V opačném případě pokračujeme dále.

Krok 4. Vypočítáme

$$(2.2.14) \quad \mu^{(k+1)} = \mu^{(k)} - \frac{F(\mu^{(k)})}{F(\tilde{\mu}^{(k)}) - F(\mu^{(k)})} 10^{-t/2} \mu^{(k)}.$$

Z rovnice $r_1(\eta^{(k+1)}, \mu^{(k+1)}) = 0$ stanovíme $\eta^{(k+1)}$. Dosadíme $k + 1$ za k a pokračujeme od kroku 2.

2.2.3. Příklad. Řešme metodou střelby okrajovou úlohu

$$(2.2.15) \quad u'' = \frac{3}{2}u^2, \quad x \in (0, 1),$$

$$(2.2.16) \quad u(0) = 4, \quad u(1) = 1.$$

V označení odst. 2.2.1 tedy máme $f(x, y, z) = \frac{3}{2}y^2$, $r_1(y, z) = y - 4$, $r_2(y, z) = y - 1$.

Budeme postupovat stejně jako v odst. 2.2.2 až na to, že jako iterační metodu užijeme metodu regula falsi (2.2.9). Okrajová podmínka v bodě $x = 0$ nám dává první počáteční podmínku $u(0) = 4$, druhou počáteční podmínku volíme libovolně jako $u'(0) = \mu$. Chceme dosáhnout toho, aby řešení počáteční úlohy s těmito počátečními podmínkami $u(x; \mu)$ splňovalo okrajovou podmínku v bodě $x = 1$. Funkce F z (2.2.7) má v uvažovaném případě tvar

$$(2.2.17) \quad F(\mu) = u(1; \mu) - 1.$$

Integraci počátečních úloh pro rovnici (2.2.15) provedeme Eulerovou metodou s konstantním krokem h ([37]). Nejprve položíme $v = u'$ a počáteční úlohu pro rovnici (2.2.15) převedeme na úlohu pro soustavu rovnic prvního řádu

$$(2.2.18) \quad u' = v, \quad v' = \frac{3}{2}u^2, \quad x \in (0, 1),$$

s počátečními podmínkami

$$(2.2.19) \quad u(0) = 4, \quad v(0) = \mu.$$

Vzorce Eulerovy metody mají v případě úlohy (2.2.18), (2.2.19) tvar

$$(2.2.20) \quad \begin{aligned} U_{m+1} &= U_m + hV_m, \\ V_{m+1} &= V_m + \frac{3}{2}hU_m^2, \quad m = 0, 1, \dots, M-1, \end{aligned}$$

kde $h = 1/M$, $U_m \approx u(x_m)$, $V_m \approx v(x_m)$ a $x_m = mh$. Počáteční podmínky pro výpočet podle (2.2.20) jsou $U_0 = 4$, $V_0 = \mu$ (viz (2.2.19)). Přibližnou hodnotu $u(1; \mu)$ potřebnou v (2.2.17) vypočítáme jako U_M .

μ	n	0	1	2	3	4	5
0	U_n	4	4	4,96	6,88	10,3	16,5
	V_n	0	4,8	9,6	17,0	31,2	
-10	U_n	4	2	0,96	0,16	-0,584	-1,33
	V_n	-10	-5,2	-4	-3,72	-3,71	

Tab. 1. Řešení počátečních úloh z příkladu 2.2.3 Eulerovou metodou.

Protože jde pouze o instruktivní příklad, volíme hrubý krok $h = 0,2$ ($M = 5$) a výpočet provádíme na tři platné cifry. Výsledky jsou sestaveny do tab. 1. Nejprve jsme zvolili $\mu = 0$ a v bodě $x = 1$ vypočítali $u(1; 0) \approx 16,5$, takže $F(0) \approx 15,5$. Protože $u(0; 1) \gg 1$ („přestřelili jsme“), volíme jako druhý pokus menší μ , konkrétně $\mu = -10$. V bodě $x = 1$ obdržíme $u(1; 10) \approx -1,33$, $F(-10) \approx -2,33$, takže můžeme použít metodu regula falsi. Podle vzorce (2.2.9) jako novou aproximaci počáteční hodnoty $v(0)$ ($= u'(0)$) obdržíme číslo

$$\mu = -10 - \frac{-2,33}{-2,33 - 15,5} \cdot (-10) \doteq -8,69.$$

Další iterační krok by tedy spočíval v přibližném řešení počáteční úlohy (2.2.18), (2.2.19) s $\mu = -8,69$.

Snadno se ověří, že funkce $u(x) = 4/(1+x)^2$ je přesným řešením úlohy (2.2.15), (2.2.16). Hledaná počáteční podmínka pro přesné řešení je tedy $v(0) = u'(0) = -8$. Přibližné řešení s počáteční podmínkou $V_0 = -8$ vypočítané Eulerovou metodou (nebo jinou numerickou metodou) nemusí ovšem pravou okrajovou podmínku splňovat přesně. V našem případě pro $V_0 = -8$ dostaneme $U_5 \doteq 1,38$ (cvičení 2.4.3). Přitom pro $V_0 = -8,27$ dostáváme $U_5 \doteq 1,00$. Je tedy vidět, že požadavek na přesnost splnění pravé okrajové podmínky je nutno sladit s přesností použité numerické metody pro integraci počátečních úloh.

Poznamenejme na závěr, že okrajová úloha (2.2.15), (2.2.16) má ještě jedno řešení ([49]). Skutečně, volíme-li $V_0 = -40$, dostaneme $U_5 \doteq 2,82$, takže na intervalu $\langle -40, -10 \rangle$ má funkce F ještě jeden kořen (cvičení 2.4.4). Přesné řešení v tomto případě splňuje počáteční podmínku $u'(0) \doteq -35,85855$. Metodou střelby tedy můžeme řešit i úlohy, které mají více řešení.

2.2.4. Metoda střelby pro obecnou okrajovou úlohu. Při řešení obecné dvoubodové okrajové úlohy pro soustavu n rovnic prvního řádu

$$(2.2.21) \quad \mathbf{u}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{u}), \quad x \in (a, b),$$

$$(2.2.22) \quad \mathbf{r}(\mathbf{u}(a), \mathbf{u}(b)) = \mathbf{0},$$

kde $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)^T$, $\mathbf{f}: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\mathbf{r}: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, lze postupovat obdobně jako v odst. 2.2.2 (v příkl. 2.2.3 jsme vlastně řešenou úlohu stejně upravili na tvar (2.2.21), (2.2.22)). Zvolíme libovolný n -dimenzionální vektor $\boldsymbol{\eta} = [\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n]^T$ a řešíme počáteční úlohu pro soustavu (2.2.21) s počáteční podmínkou

$$(2.2.23) \quad \mathbf{u}(a) = \boldsymbol{\eta}.$$

Tato úloha má za známých předpokladů právě jedno řešení ([37]), které je funkcí (vektorového) parametru $\boldsymbol{\eta}$. Označíme je $\mathbf{u}(x; \boldsymbol{\eta})$ (takže $\mathbf{u}(a; \boldsymbol{\eta}) = \boldsymbol{\eta}$). Princip metody střelby spočívá v tom, že hledáme takové $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}^*$, že vektorová funkce $\mathbf{u}(x; \boldsymbol{\eta}^*)$ splňuje okrajové podmínky, tj.

$$\mathbf{r}(\mathbf{u}(a; \boldsymbol{\eta}^*), \mathbf{u}(b; \boldsymbol{\eta}^*)) = \mathbf{0}.$$

Hledáme tedy vlastně řešení $\boldsymbol{\eta}^*$ soustavy n obecně nelineárních rovnic pro n neznámých $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$

$$(2.2.24) \quad \mathbf{F}(\boldsymbol{\eta}) = \mathbf{0},$$

kde (viz(2.2.23))

$$(2.2.25) \quad \mathbf{F}(\boldsymbol{\eta}) \equiv \mathbf{r}(\boldsymbol{\eta}, \mathbf{u}(b; \boldsymbol{\eta})).$$

Hodnoty funkce \mathbf{F} počítáme jako v odst. 2.2.2 řešením počátečních úloh pro soustavu (2.2.21).

Jsou-li okrajové podmínky separované, tj. tvaru (viz (1.2.7))

$$\mathbf{r}_1(\mathbf{u}(a)) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{r}_2(\mathbf{u}(b)) = \mathbf{0},$$

kde \mathbf{r}_1 je n_1 -složková, \mathbf{r}_2 je n_2 -složková funkce n proměnných a $n_1 + n_2 = n$, volíme vektor počátečních podmínek $\boldsymbol{\eta}$ v (2.2.23) speciálním způsobem, totiž tak, aby pro něj platilo $\mathbf{r}_1(\boldsymbol{\eta}) = \mathbf{0}$ a byly tak splněny okrajové podmínky v bodě $x = a$. Funkce \mathbf{F} v (2.2.24) bude nyní tvaru $\mathbf{F}(\boldsymbol{\eta}) = \mathbf{r}_2(\mathbf{u}(b; \boldsymbol{\eta}))$, bude mít pouze n_2 složek a soustava $\mathbf{F}(\boldsymbol{\eta}) = \mathbf{0}$, kterou je třeba řešit, bude mít méně (totiž $n_2 = n - n_1$) rovnic než v obecném případě. Takovým způsobem jsme také postupovali v odst. 2.2.2 a 2.2.3.

Řešení soustavy algebraických rovnic (2.2.24) se provádí některou iterační metodou, nejčastěji Newtonovou. Vzniká zde tudíž opět otázka volby počátečního přiblížení a konvergence použité metody. Tato problematika je poměrně komplikovaná (viz např. [30], [35], [49]).

Newtonova iterační metoda pro řešení soustavy rovnic (2.2.24) je dána předpisem ([24])

$$(2.2.26) \quad \boldsymbol{\eta}^{(k+1)} = \boldsymbol{\eta}^{(k)} - [\mathbf{F}'(\boldsymbol{\eta}^{(k)})]^{-1} \mathbf{F}(\boldsymbol{\eta}^{(k)}),$$

kde $\mathbf{F}'(\boldsymbol{\eta})$ je Jacobiova matice $[\partial F_i / \partial \eta_j]$, $i, j = 1, 2, \dots, n$. Prakticky se (2.2.26) realizuje ve tvaru

$$(2.2.27) \quad [\mathbf{F}'(\boldsymbol{\eta}^{(k)})](\boldsymbol{\eta}^{(k+1)} - \boldsymbol{\eta}^{(k)}) = -\mathbf{F}(\boldsymbol{\eta}^{(k)}),$$

což je soustava lineárních algebraických rovnic pro korekci $\mathbf{w} = \boldsymbol{\eta}^{(k+1)} - \boldsymbol{\eta}^{(k)}$. Matice soustavy je $\mathbf{F}'(\boldsymbol{\eta}^{(k)})$. Po výpočtu \mathbf{w} z (2.2.27) získáme nové iterační přiblížení $\boldsymbol{\eta}^{(k+1)}$ jako $\boldsymbol{\eta}^{(k)} + \mathbf{w}$.

V jednom kroku Newtonovy metody je tedy zapotřebí vypočítat hodnotu $\mathbf{F}(\boldsymbol{\eta}^{(k)})$ (vyřešit jednu počáteční úlohu (2.2.21), (2.2.23)) a stanovit matici $\mathbf{F}'(\boldsymbol{\eta}^{(k)})$. Jacobiovu matici je sice možné získat opět na základě vyřešení n pomocných počátečních úloh ([49], [55]), ale celá procedura je do té míry komplikovaná, že se matice $\mathbf{F}'(\boldsymbol{\eta})$ většinou aproximuje pomocí diferenčních podílů maticí

$$(2.2.28) \quad \Delta \mathbf{F}(\boldsymbol{\eta}) = [\Delta_1 \mathbf{F}(\boldsymbol{\eta}), \dots, \Delta_n \mathbf{F}(\boldsymbol{\eta})],$$

kde vektor $\Delta_j \mathbf{F}(\boldsymbol{\eta})$ tvořící j -tý sloupec matice $\Delta \mathbf{F}(\boldsymbol{\eta})$ je dán rovnicí

$$(2.2.29) \quad \Delta_j \mathbf{F}(\boldsymbol{\eta}) = \frac{\mathbf{F}(\eta_1, \dots, \eta_{j-1}, \eta_j + \Delta \eta_j, \eta_{j+1}, \dots, \eta_n) - \mathbf{F}(\boldsymbol{\eta})}{\Delta \eta_j}.$$

K určení matice $\Delta \mathbf{F}(\boldsymbol{\eta}^{(k)})$ je tak třeba vyřešit n počátečních úloh pro soustavu (2.2.21). Problematika volby přírůstků $\Delta \eta_j$, $j = 1, 2, \dots, n$, je stejná jako v odst. 2.2.1.

Snaha zdokonalit popsanou metodu tím, že se zmenší její citlivost na volbu počátečního přiblížení $\boldsymbol{\eta}^{(0)}$, vedla ke studiu celé řady různých variant Newtonovy metody ([30], [35], [49]). Jedna dosti úspěšná modifikace spočívá v zavedení relaxačního parametru λ_k voleného tak, aby se norma vektoru $\mathbf{F}(\boldsymbol{\eta})$ na každém kroku iteračního procesu zmenšovala. Předpis (2.2.26) se tak změní na

$$(2.2.30) \quad \boldsymbol{\eta}^{(k+1)} = \boldsymbol{\eta}^{(k)} - \lambda_k [\mathbf{F}'(\boldsymbol{\eta}^{(k)})]^{-1} \mathbf{F}(\boldsymbol{\eta}^{(k)})$$

a λ (zpravidla ≤ 1) se snažíme volit tak, aby platilo $\|\mathbf{F}(\boldsymbol{\eta}^{(k+1)})\| \leq \|\mathbf{F}(\boldsymbol{\eta}^{(k)})\|$. Protože podstatnou část práce potřebné k výpočtu $\boldsymbol{\eta}^{(k+1)}$ představuje určení Jacobiovy matice (či její aproximace), postupuje se velmi často také tak, že se při dostatečné rychlosti konvergence hodnota $\mathbf{F}'(\boldsymbol{\eta}^{(k)})$ používá beze změny v několika po sobě jdoucích iteračních krocích, tj. namísto hodnot $\mathbf{F}'(\boldsymbol{\eta}^{(k+1)})$, $\mathbf{F}'(\boldsymbol{\eta}^{(k+2)})$ atd.

2.2.5. Algoritmus metody střelby pro obecnou okrajovou úlohu.

V knihovně standardních matematických programů NAG se používá při řešení okrajových úloh metodou střelby následující varianta Newtonovy metody [30]:

Krok 1. Zadá se počáteční přiblížení $\boldsymbol{\eta}^{(0)}$ a položí se $k = 0$.

Krok 2. Vypočítá se (řešením příslušných počátečních úloh) matice $\mathbf{F}'(\boldsymbol{\eta}^{(k)})$ nebo její aproximace a Gaussovou eliminační metodou s částečným výběrem hlavního prvku se provede LU-rozklad této matice [24]. Získáme tak trojúhelníkové matice \mathbf{L}_k , \mathbf{U}_k a permutační matici \mathbf{P}_k , pro něž platí

$$\mathbf{P}_k \mathbf{F}'(\boldsymbol{\eta}^{(k)}) = \mathbf{L}_k \mathbf{U}_k.$$

Krok 3. Určíme vektory \mathbf{z} a \mathbf{w} jako řešení rovnic

$$\mathbf{L}_k \mathbf{z} = -\mathbf{P}_k \mathbf{F}(\boldsymbol{\eta}^{(k)}), \quad \mathbf{U}_k \mathbf{w} = \mathbf{z}.$$

(Jde v podstatě o zpětný chod Gaussovy eliminace pro řešení soustavy (2.2.27)).

Krok 4. Pro $i = 1, 2, \dots$ se vypočítá

$$\boldsymbol{\eta}_i = \boldsymbol{\eta}^{(k)} + \lambda_i \mathbf{w}, \quad \lambda_i = \frac{1}{2^{i-1}}.$$

Jakmile $\|\mathbf{F}(\boldsymbol{\eta}_i)\| < \|\mathbf{F}(\boldsymbol{\eta}^{(k)})\|$, kde $\|\cdot\|$ značí euklidovskou normu vektoru, položí se $\boldsymbol{\eta}^{(k+1)} = \boldsymbol{\eta}_i$ a přejde se ke kroku 5.

Krok 5. Pokud $\|\boldsymbol{\eta}^{(k)} - \boldsymbol{\eta}^{(k+1)}\|_{\max} < \epsilon_1$ a zároveň $\|\mathbf{F}(\boldsymbol{\eta}^{(k+1)})\| < \epsilon_2$, výpočet končí a za hledanou počáteční podmínku se bere $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}^{(k+1)}$. (Přitom $\|\cdot\|_{\max}$ označuje v absolutní hodnotě maximální složku vektoru a ϵ_1, ϵ_2 jsou tolerance zadané uživatelem algoritmu.) Pokud tomu tak není a $\|\mathbf{F}(\boldsymbol{\eta}_1)\|^2 < 0,1 \cdot \|\mathbf{F}(\boldsymbol{\eta}^{(k)})\|^2$, položí se $\mathbf{P}_{k+1} = \mathbf{P}_k$, $\mathbf{L}_{k+1} = \mathbf{L}_k$, $\mathbf{U}_{k+1} = \mathbf{U}_k$, k se zvětší o 1 a přejde se opět ke kroku 3 (další krok Newtonovy metody s nezměněnou Jacobiovou maticí). V ostatních případech se dosadí $k+1$ za k a pokračuje se od kroku 2.

V kroku 4 se mohou projevit problémy s konvergencí. Při nevhodně vybraném počátečním přiblížení $\boldsymbol{\eta}^{(0)}$ se také nemusí podařit vypočítat vektor \mathbf{w} .

2.2.6. Poznámka. Není obecně žádný důvod k tomu, abychom počáteční podmínky pro úlohy řešené v metodě střelby zadávali v bodě $x = a$ a počáteční úlohy řešili „zleva doprava“. Zcela stejně můžeme počáteční podmínky zadat v bodě $x = b$ ve tvaru $\mathbf{u}(b) = \boldsymbol{\eta}$ a počáteční úlohy na intervalu $\langle a, b \rangle$ řešit „zprava doleva“. Funkce \mathbf{F} v rovnici (2.2.24) pak ovšem bude

$$(2.2.31) \quad \mathbf{F}(\boldsymbol{\eta}) = \mathbf{r}(\mathbf{u}(a; \boldsymbol{\eta}), \boldsymbol{\eta})$$

(viz cvičení 2.4.5). Jsou-li okrajové podmínky separované, můžeme postupovat také následujícím způsobem. Zvolíme uvnitř intervalu $\langle a, b \rangle$ bod $x = X$ a vybereme n -dimenzionální vektory $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2$ libovolně, ale tak, aby (viz (1.2.7))

$$\mathbf{r}_1(\boldsymbol{\eta}_1) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{r}_2(\boldsymbol{\eta}_2) = \mathbf{0}.$$

Pak na intervalu $\langle a, X \rangle$ řešíme „zleva doprava“ počáteční úlohu s podmínkou $\mathbf{u}(a) = \boldsymbol{\eta}_1$ a na intervalu $\langle X, b \rangle$ řešíme „zprava doleva“ úlohu s počáteční podmínkou $\mathbf{u}(b) = \boldsymbol{\eta}_2$. Dostáváme tak řešení $\mathbf{u}(x; \boldsymbol{\eta}_1)$, $x \in \langle a, X \rangle$ a $\mathbf{u}(x; \boldsymbol{\eta}_2)$, $x \in \langle X, b \rangle$. Naším cílem nyní je dosáhnout toho, aby

$$(2.2.32) \quad \mathbf{F}(\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2) \equiv \mathbf{u}(X; \boldsymbol{\eta}_1) - \mathbf{u}(X; \boldsymbol{\eta}_2) = \mathbf{0}.$$

Volba bodu X , v němž se formuluje rovnice typu (2.2.24) či (2.2.32), může být pro úspěch metody střelby významná.

2.2.7. Metoda střelby pro lineární okrajové úlohy. V případě lineární okrajové úlohy pro soustavu n rovnic prvního řádu

$$(2.2.33) \quad \mathbf{u}' = \mathbf{A}(x)\mathbf{u} + \mathbf{f}(x), \quad x \in (a, b),$$

$$(2.2.34) \quad \mathbf{C}\mathbf{u}(a) + \mathbf{D}\mathbf{u}(b) = \mathbf{c},$$

se obecný algoritmus popsáný v odst. 2.2.5 výrazně zjednoduší a ztrácí iterační charakter. Předpokládáme, že $\mathbf{A}(x)$ je čtvercová matice řádu n , jejíž prvky jsou funkce spojitě na $\langle a, b \rangle$, a že $\mathbf{f}(x)$ je n -dimenzionální vektor se spojitými složkami. O maticích \mathbf{C} a \mathbf{D} předpokládáme, že to jsou čtvercové matice řádu n , \mathbf{c} je n -složkový vektor.

Připomeňme nejprve některé pojmy z teorie obyčejných diferenciálních rovnic. Nechť $\Phi(x)$ je čtvercová matice řádu n , jejíž prvky jsou funkce spojitě a diferencovatelné na $\langle a, b \rangle$. *Derivace matice* $\Phi(x)$ je pak čtvercová matice $\Phi'(x)$, jejíž prvky vzniknou derivováním odpovídajících prvků matice $\Phi(x)$. *Maticová diferenciální rovnice*

$$(2.2.35) \quad \Phi' = \mathbf{A}(x)\Phi + \mathbf{F}(x),$$

kde $\mathbf{A}(x)$ a $\mathbf{F}(x)$ jsou čtvercové matice řádu n , pak vlastně představuje soustavu n^2 diferenciálních rovnic pro prvky matice Φ (srov. vektorový zápis soustavy diferenciálních rovnic (2.2.33)). Označíme-li sloupce matice Φ jako $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ a sloupce matice $\mathbf{F}(x)$ jako $\mathbf{f}_1(x), \mathbf{f}_2(x), \dots, \mathbf{f}_n(x)$, můžeme se na (2.2.35) dívat po sloupcích jako na n soustav n obyčejných diferenciálních rovnic

$$(2.2.36) \quad \varphi'_i = \mathbf{A}(x)\varphi_i + \mathbf{f}_i(x), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Podle vět známých z teorie obyčejných diferenciálních rovnic ([32]) lze řešení $\mathbf{u}(x; \eta)$ soustavy (2.2.33) splňující počáteční podmínku (2.2.23) neboli $\mathbf{u}(a; \eta) = \eta$ vyjádřit ve tvaru

$$(2.2.37) \quad \mathbf{u}(x; \eta) = \Phi(x)\eta + \mathbf{u}(x; \mathbf{0}),$$

kde $\mathbf{u}(x; \mathbf{0})$ je řešení nehomogenní soustavy (2.2.33) splňující homogenní počáteční podmínku $\mathbf{u}(a; \mathbf{0}) = \mathbf{0}$ a $\Phi(x)$ je tzv. *fundamentální matice* soustavy diferenciálních rovnic (2.2.33). Je to taková matice, která je řešením homogenní maticové diferenciální rovnice

$$(2.2.38) \quad \Phi' = \mathbf{A}(x)\Phi$$

a splňuje přitom (maticovou) počáteční podmínku

$$(2.2.39) \quad \Phi(a) = \mathbf{I},$$

kde \mathbf{I} značí jednotkovou matici. Vztahy (2.2.38), (2.2.39) reprezentují n lineárních počátečních úloh pro jednotlivé sloupce matice Φ a vyřešením těchto úloh na $\langle a, b \rangle$ lze také matici Φ stanovit. Sloupce matice Φ jsou tedy tvořeny lineárně nezávislými řešeními příslušné homogenní soustavy diferenciálních rovnic; přitom i -tý sloupec φ_i splňuje počáteční podmínku $\varphi_i(a) = \mathbf{e}_i$, kde \mathbf{e}_i je i -tý sloupec jednotkové matice.

Z (2.2.37) vidíme, že funkce $\mathbf{u}(x; \eta)$ závisí nyní na parametru η lineárně. Protože i okrajové podmínky (2.2.34) jsou lineární, má v tomto speciálním případě také závislost funkce \mathbf{F} z (2.2.25) na η lineární charakter. Skutečně, podle (2.2.25), (2.2.34) a (2.2.37) máme

$$(2.2.40) \quad \begin{aligned} \mathbf{F}(\eta) &\equiv \mathbf{C}\mathbf{u}(a; \eta) + \mathbf{D}\mathbf{u}(b; \eta) - \mathbf{c} \\ &= \mathbf{C}\eta + \mathbf{D}[\Phi(b)\eta + \mathbf{u}(b; \mathbf{0})] - \mathbf{c} \\ &= [\mathbf{C} + \mathbf{D}\Phi(b)]\eta + \mathbf{D}\mathbf{u}(b; \mathbf{0}) - \mathbf{c}. \end{aligned}$$

Soustava rovnic $\mathbf{F}(\boldsymbol{\eta}) = \mathbf{0}$ je proto nyní soustavou n lineárních algebraických rovnic

$$(2.2.41) \quad [\mathbf{C} + \mathbf{D}\Phi(b)]\boldsymbol{\eta} = \mathbf{c} - \mathbf{D}\mathbf{u}(b; \mathbf{0}),$$

z níž můžeme — pokud je matice na levé straně regulární — např. Gaussovou eliminační metodou stanovit počáteční podmínky $\boldsymbol{\eta}$ pro hledané řešení okrajové úlohy (2.2.33), (2.2.34). Abychom získali matici a pravou stranu soustavy lineárních algebraických rovnic (2.2.41), musíme vyřešit $n + 1$ počátečních úloh pro soustavu lineárních diferenciálních rovnic (2.2.33) (a získat tak matici $\Phi(b)$ a vektor $\mathbf{u}(b; \mathbf{0})$). Uchováme-li hodnoty $\Phi(x)$ a $\mathbf{u}(x; \mathbf{0})$ získané během řešení těchto počátečních úloh v paměti počítače, lze pak hodnoty řešení okrajové úlohy (2.2.33), (2.2.34) počítat ze vzorce (2.2.37).

Lineární okrajové úlohy však můžeme řešit také přímo postupem popsáním v odst. 2.2.4. Dá se totiž ukázat [49], že v lineárním případě je $\mathbf{F}'(\boldsymbol{\eta}) = \Delta\mathbf{F}(\boldsymbol{\eta}) = \mathbf{C} + \mathbf{D}\Phi(b)$ a že hledané počáteční podmínky dostaneme — alespoň teoreticky — přesně po provedení jednoho kroku Newtonovy metody či metody regula falsi.

Pokud jsou okrajové podmínky (2.2.34) separované, lze algoritmus metody dále zjednodušit (viz [14], [30], [42]).

2.2.8. Příklad. Na dvou jednoduchých, ale poměrně typických příkladech osvětlíme v odst. 2.2.8 a 2.2.9 algoritmus metody střelby v lineárním případě a naznačíme některé problémy spojené s numerickou realizací metody. Tyto problémy mají obecný charakter a setkáváme se s nimi i při řešení nelineárních úloh. Numerickými problémy vznikajícími při realizaci metody střelby se budeme zabývat systematictěji v odst. 2.2.10.

Postupem popsáním v odst. 2.2.7 budeme nejprve řešit úlohu

$$(2.2.42) \quad u'' = -25u, \quad x \in (0, 5),$$

$$(2.2.43) \quad u(0) = 1, \quad u(5) = 1.$$

Danou úlohu přeformulujeme na úlohu tvaru (2.2.33), (2.2.34). Položíme $\mathbf{u} = (u, v)^T$, kde $v = u'$. Rovnici (2.2.42) tak převedeme na soustavu rovnic

$$(2.2.44) \quad \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -25 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}, \quad x \in (0, 5),$$

a okrajové podmínky (2.2.43) zapíšeme jako

$$(2.2.45) \quad \mathbf{C} \begin{bmatrix} u(0) \\ v(0) \end{bmatrix} + \mathbf{D} \begin{bmatrix} u(5) \\ v(5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

kde

$$(2.2.46) \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Protože je rovnice (2.2.42) (a soustava (2.2.44)) homogenní, je $\mathbf{u}(x; 0) \equiv \mathbf{0}$ a vztah (2.2.37) pro řešení soustavy (2.2.44) splňující počáteční podmínku $\mathbf{u}(0) = \boldsymbol{\eta}$, kde $\boldsymbol{\eta} = (\eta, \mu)^T$, má tvar

$$(2.2.47) \quad \begin{bmatrix} u(x; \eta, \mu) \\ v(x; \eta, \mu) \end{bmatrix} = \boldsymbol{\Phi}(x) \begin{bmatrix} \eta \\ \mu \end{bmatrix}.$$

Sloupce fundamentální matice $\boldsymbol{\Phi}(x)$ dostaneme řešením počátečních úloh pro soustavu diferenciálních rovnic (2.2.44) s počátečními podmínkami $u(0) = 1, v(0) = 0$ ($= u'(0)$) a $u(0) = 0, v(0) = 1$ ($= u'(0)$). Díky speciálnímu tvaru soustavy (2.2.44) (lineární rovnice s konstantními koeficienty) lze v tomto jednoduchém příkladu $\boldsymbol{\Phi}(x)$ stanovit přesně. Snadno lze ověřit, že

$$(2.2.48) \quad \boldsymbol{\Phi}(x) = \begin{bmatrix} \cos 5x & \frac{1}{5} \sin 5x \\ -5 \sin 5x & \cos 5x \end{bmatrix}.$$

Soustava lineárních algebraických rovnic (2.2.41) pro hledané počáteční podmínky η, μ řešené okrajové úlohy má vzhledem k (2.2.46) tvar

$$(2.2.49) \quad \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{\Phi}(5) \right) \begin{bmatrix} \eta \\ \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

neboli

$$(2.2.50) \quad \begin{aligned} \eta &= 1, \\ (\cos 25)\eta + \frac{1}{5}(\sin 25)\mu &= 1. \end{aligned}$$

Předpokládejme nyní, že jsme k určení $\boldsymbol{\Phi}(x)$ museli použít některou numerickou metodu a že prvky této matice známe pouze na 3 platné číslice. V prvním řádku takto stanovené matice $\boldsymbol{\Phi}(5)$ pak mohou místo přesných hodnot $\cos 25 \doteq 0,99120$ a $\frac{1}{5} \sin 25 \doteq -0,026470$ vystupovat např. čísla 0,991 a $-0,0265$, takže místo soustavy (2.2.50) budeme řešit soustavu lineárních rovnic

$$(2.2.51) \quad \begin{aligned} \eta &= 1, \\ 0,991\eta - 0,0265\mu &= 1. \end{aligned}$$

Řešení soustavy (2.2.51) je $\eta = 1, \mu \doteq -0,340$.

Přibližné řešení okrajové úlohy (2.2.42), (2.2.43) nyní stanovíme buď tak, že numericky vyřešíme počáteční úlohu pro soustavu diferenciálních rovnic (2.2.44) s počátečními podmínkami $u(0) = 1, v(0) = -0,340$, nebo (pokud jsme hodnoty $\boldsymbol{\Phi}(x)$ na intervalu $\langle 0, 5 \rangle$ použité při numerickém výpočtu matice $\boldsymbol{\Phi}(5)$ uchovali v paměti) dosazením $\eta = 1, \mu = -0,340$ do vztahu (2.2.47). Za našich předpokladů o vypočítané matici $\boldsymbol{\Phi}(5)$ nám tak pro $x = 5$ vyjde

$$u(5; 1; -0,340) \doteq 1,00.$$

Daná okrajová úloha byla záměrně volena tak, abychom elementárními metodami mohli stanovit její přesné řešení. Tímto řešením je funkce (ověřte!)

$$(2.2.52) \quad u(x) = \cos 5x + \frac{1 - \cos 25}{\sin 25} \sin 5x.$$

Přesné řešení (2.2.52) splňuje v bodě $x = 0$ počáteční podmínky

$$u(0) = 1, \quad v(0) = u'(0) \doteq -0,33234$$

a v bodě $x = 5$ ovšem okrajovou podmínku $u(5) = 1$. Námi získané přibližné řešení je s těmito hodnotami v rámci dané přesnosti ve velmi dobré shodě. U této okrajové úlohy tedy při numerické realizaci metody střelby k žádným podstatným problémům nedochází.

2.2.9. Příklad. Řešme metodou střelby podobnou okrajovou úlohu

$$(2.2.53) \quad u'' = 25u, \quad x \in (0, 5),$$

$$(2.2.54) \quad u(0) = 1, \quad u(5) = 1.$$

Náš postup bude zcela stejný jako v příkl. 2.2.8. Nejprve převedeme úlohu (2.2.53), (2.2.54) na okrajovou úlohu pro soustavu dvou rovnic prvního řádu, která bude opět tvaru (2.2.44) s tím rozdílem, že matice soustavy bude nyní

$$(2.2.55) \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 25 & 0 \end{bmatrix}$$

(místo -25 je 25). Okrajové podmínky budou zapsány stejně jako v příkl. 2.2.8 pomocí vztahů (2.2.45), (2.2.46). Připomínáme ještě, že klademe $v = u'$.

Hledáme parametry η, μ v počátečních podmínkách $u(0) = \eta, v(0) = \mu$ takové, že řešení počáteční úlohy s těmito podmínkami je zároveň řešením dané okrajové úlohy. I zde je rovnice (2.2.53) homogenní, takže vztah (2.2.47) zůstává v platnosti, změní se ovšem (díky změně matice \mathbf{A}) fundamentální matice $\Phi(x)$. Protože jde v tomto případě opět o lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty, lze $\Phi(x)$ stanovit přesně a je (ověřte!)

$$(2.2.56) \quad \Phi(x) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(e^{-5x} + e^{5x}) & \frac{1}{10}(-e^{-5x} + e^{5x}) \\ \frac{5}{2}(-e^{-5x} + e^{5x}) & \frac{1}{2}(e^{-5x} + e^{5x}) \end{bmatrix}.$$

Soustava lineárních algebraických rovnic pro hledané počáteční podmínky η, μ řešení dané okrajové úlohy má i tentokrát tvar (2.2.49). Dosadíme-li sem za $\Phi(5)$ z (2.2.56), máme

$$(2.2.57) \quad \begin{aligned} \eta &= 1 \\ \frac{1}{2}(e^{-25} + e^{25})\eta + \frac{1}{10}(-e^{-25} + e^{25})\mu &= 0. \end{aligned}$$

Za stejných předpokladů jako v příkl. 2.2.8 nám ale použitá numerická metoda dá místo (2.2.57) soustavu

$$(2.2.58) \quad \begin{aligned} \eta &= 1, \\ 3, 60 \cdot 10^{10} \eta + 7, 20 \cdot 10^9 \mu &= 1, \end{aligned}$$

jejíž řešení v rámci uvažované přesnosti (tj. na 3 platné číslice) je $\eta = 1$, $\mu \doteq -5,00$.

Podle (2.2.47), kam jsme dosadili vypočítané hodnoty η , μ a na 3 platné číslice stanovenou hodnotu $\Phi(5)$, nyní máme pro $x = 5$

$$u(5; 1; -5, 00) \doteq 3, 60 \cdot 10^{10} - 5, 7, 20 \cdot 10^9 = 0,$$

což vůbec nesouhlasí s okrajovou podmínkou $u(5) = 1$ z (2.2.54). Kdybychom se získanými počátečními podmínkami $\eta = 1$, $\mu = -5$ řešili počáteční úlohu $u'' = 25u$, $u(0) = \eta$, $u'(0) = \mu$ přesně, bez použití nějaké numerické metody, dostaneme řešení ve tvaru

$$(2.2.59) \quad u(x) = e^{-5x},$$

takže $u(5) = e^{-25} \doteq 1, 39 \cdot 10^{-11}$ a okrajová podmínka v bodě $x = 5$ opět nebude splněna.

Přitom ale přesné řešení okrajové úlohy (2.2.53), (2.2.54) je (ověřte!)

$$(2.2.60) \quad u(x) = \frac{e^{25} - 1}{e^{25} - e^{-25}} e^{-5x} + \frac{1 - e^{-25}}{e^{25} - e^{-25}} e^{5x}$$

a splňuje prakticky tytéž počáteční podmínky, jako jsou ty, které jsme stanovili metodou střelby. Skutečně, z (2.2.60) plyne

$$(2.2.61) \quad \begin{aligned} u(0) &= 1, \\ u'(0) &= -5 + \frac{10(1 - e^{-25})}{e^{25} - e^{-25}} \approx -5 + 1, 4 \cdot 10^{-10}. \end{aligned}$$

V bodě $x = 5$ pro funkci u z (2.2.60) zřejmě platí $u(5) = 1$.

Porovnáme-li přesné řešení okrajové úlohy s (2.2.59), zjistíme, že funkce u z (2.2.60) a (2.2.59) se v počátečních hodnotách prakticky neliší, kdežto v hodnotách v bodě $x = 5$ ano. Přibližné řešení okrajové úlohy (2.2.53), (2.2.54) získané metodou střelby nemá v daném případě s přesným řešením na větší části intervalu $\langle 0, 5 \rangle$ nic společného.

I když tedy z teoretického hlediska není v algoritmu metody střelby mezi úlohami z příkl. 2.2.8 a 2.2.9 žádný rozdíl, je praktická realizace metody střelby pro druhou z těchto úloh značně komplikovaná a vyžaduje možnost provádět výpočty na velký počet desetinných míst. Pokud bychom např. byli schopni vypočítat počáteční podmínku μ na 11 míst přesně, tj. $\mu = -5 + 1, 4 \cdot 10^{-10}$, bylo by přesné řešení počáteční úlohy $u'' = 25u$, $u(0) = \eta$, $u'(0) = \mu$ tvaru $u(x) = (1 - 1, 4 \cdot 10^{-11})e^{-5x} + 1, 4 \cdot 10^{-11}e^{5x}$. V bodě $x = 5$ bychom pak obdrželi $u(5) \doteq 1, 008$, což je již přijatelnější výsledek.

Situace, kterou jsme na příkl. 2.2.9 předvedli, není při řešení okrajových úloh metodou střelby nijak zvlášť výjimečná. Metoda střelby je sice jednoduchá a v řadě případů užitečná, četné okrajové úlohy se však soudobou výpočetní technikou takto řešit nedají (viz též [49], [55] a cvičení 2.4.8).

2.2.10. Numerické problémy při realizaci metody střelby. Příčinou jevu, demonstrovaného v příkl. 2.2.9, je skutečnost, že počáteční úlohy pro rovnici (2.2.53) jsou mnohem hůře podmíněné (tj. více citlivé na změny dat [24]) než úlohy okrajové.

Vraťme se k příkl. 2.2.9. Okrajová úloha (2.2.53), (2.2.54) je dobře podmíněná v tom smyslu, že její řešení není citlivé na malé změny v zadaných okrajových podmínkách. Skutečně, uvažme okrajovou úlohu

$$(2.2.62) \quad w'' = 25w, \quad x \in (0, 5),$$

$$(2.2.63) \quad w(0) = 1 + \delta_1, \quad w(5) = 1 + \delta_2.$$

Rozdíl $y = w - u$ řešení úlohy (2.2.62), (2.2.63) a řešení úlohy (2.2.53), (2.2.54) řeší okrajovou úlohu

$$(2.2.64) \quad y'' = 25y, \quad x \in (0, 5),$$

$$(2.2.65) \quad y(0) = \delta_1, \quad y(5) = \delta_2.$$

Obecný tvar řešení rovnice (2.2.64) je $y(x) = Ae^{-5x} + Be^{5x}$ a řešením okrajové úlohy (2.2.64), (2.2.65) je funkce

$$(2.2.66) \quad y(x) = \frac{\delta_1 e^{25} - \delta_2}{e^{25} - e^{-25}} e^{-5x} + \frac{\delta_2 - \delta_1 e^{-25}}{e^{25} - e^{-25}} e^{5x}.$$

Odtud snadno odhadneme, že pro $0 \leq x \leq 5$ platí

$$(2.2.67) \quad |y(x)| = |w(x) - u(x)| \leq \left| \frac{\delta_1 - \delta_2 e^{-25}}{1 - e^{-50}} \right| + \left| \frac{\delta_2 - \delta_1 e^{-25}}{1 - e^{-50}} \right| \approx |\delta_1| + |\delta_2|$$

(viz cvičení 2.4.9). Poruchy δ_1, δ_2 v okrajových podmínkách (2.2.63) tedy vyvolají v řešení dané okrajové úlohy změnu, jejíž velikost nepřevyší zhruba číslo $|\delta_1| + |\delta_2|$.

U počátečních úloh pro rovnici (2.2.53) je situace zcela jiná. Uvažujme úlohu

$$(2.2.68) \quad u' = 25u, \quad x \in (0, 5),$$

$$(2.2.69) \quad u(0) = \eta, \quad u'(0) = \mu,$$

a porušme pouze druhou z počátečních podmínek o δ , takže místo (2.2.68), (2.2.69) dostaneme počáteční úlohu

$$(2.2.70) \quad w'' = 25w, \quad x \in (0, 5),$$

$$(2.2.71) \quad w(0) = \eta, \quad w'(0) = \mu + \delta.$$

Pro rozdíl $y = w - u$ řešení úloh (2.2.68), (2.2.69) a (2.2.70), (2.2.71) nyní máme počáteční úlohu

$$(2.2.72) \quad y' = 25y, \quad x \in (0, 5),$$

$$(2.2.73) \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = \delta,$$

jejíž řešení je (viz cvičení 2.4.10)

$$(2.2.74) \quad y(x) = \frac{1}{10} \delta(e^{5x} - e^{-5x}).$$

Pro $x = 5$ odtud máme $y(5) = w(5) - u(5) \doteq 7,2 \cdot 10^9 \delta$; je vidět, že vliv poruchy v počáteční podmínce se na konci intervalu $\langle 0, 5 \rangle$ pronikavě zesiluje.

Všimněme si navíc toho, že při výpočtech s konečnou přesností bude fundamentální matice (2.2.56) mít pro $x = 5$ tvar

$$(2.2.75) \quad \Phi(5) \approx \begin{bmatrix} \frac{1}{2}e^{25} & \frac{1}{10}e^{25} \\ \frac{5}{2}e^{25} & \frac{1}{2}e^{25} \end{bmatrix}$$

a díky zaokrouhlovacím chybám bude (téměř) singulární, i když teorie diferenciálních rovnic takovou situaci vylučuje [32]. Navíc může u podobných okrajových úloh při výpočtu $\Phi(x)$ docházet k překročení číselného rozsahu počítače (přeplnění). Tato situace je pro některé lineární úlohy charakteristická (viz [30], [42]).

Celkově se pro lineární úlohy tvaru (2.2.33), (2.2.34) dá říci [30], že pokud má matice $\mathbf{A}(x)$ pro všechna $x \in \langle a, b \rangle$ alespoň jedno kladné vlastní číslo a počáteční úlohy se integrují ve směru rostoucího x , může docházet při metodě střelby k nestabilitě, která znemožní její numerickou realizaci. V některých případech může problémy vyřešit výpočet na vyšší počet platných číslic (užití dvojnásobné aritmetiky, srov. poznámku na konci příkl. 2.2.9), popřípadě změna směru integrace počátečních úloh (od bodu $x = b$ k bodu $x = a$, viz též cvičení 2.4.5 a 2.4.11). V řadě případů se však vyskytnou u řešení soustavy diferenciálních rovnic řešení exponenciálního typu rostoucí jak ve směru vpřed od $x = a$, tak ve směru vzad od $x = b$ (srov. příkl. 2.2.9). Problémy pak někdy zmírní postup založený na (2.2.32).

U nelineárních úloh bývá často přesnost výpočtu faktorem rozhodujícím o proveditelnosti algoritmu metody střelby. V praxi se navíc vyskytují okrajové úlohy (2.2.21), (2.2.22) s funkcí $\mathbf{f}(x, \mathbf{u})$ takovou, že řešení $\mathbf{u}(x; \boldsymbol{\eta})$ počáteční úlohy $\mathbf{u}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{u})$, $\mathbf{u}(a) = \boldsymbol{\eta}$, je definováno jen v určitém okolí bodu $x = a$, jehož velikost závisí na konkrétní volbě $\boldsymbol{\eta}$. Hodnotu $\mathbf{u}(b; \boldsymbol{\eta})$ vystupující ve (2.2.25) je pak možno stanovit jen při hodnotách $\boldsymbol{\eta}$ z jisté množiny M , která zpravidla není předem známa. Při volbě $\boldsymbol{\eta} \notin M$ je však algoritmus metody střelby neproveditelný (projeví se to přeplněním při výpočtu).

Citlivost řešení na poruchy ve vypočítaných počátečních podmínkách lze také posuzovat metodou experimentálních perturbací [37], tj. analýzou vlivu náhodně volených poruch o charakteristické velikosti, prováděnou opakovaným řešením počátečních úloh s porušenými podmínkami na počítači.

2.2.11. Metoda střelby na více cílů. Ve snaze odstranit obtíže spojené s numerickou realizací metody střelby byla vyvinuta řada jejích variant [42]. Jednou z nich je *metoda střelby na více cílů* zvaná též *metoda paralelní střelby* (Mehrzielmethode, multipoint shooting method). Základní myšlenkou tu je snaha zkrátit délku intervalů, na

nichž se integrují počáteční úlohy, a tím snížit vliv případné nestability těchto úloh (viz též [33] a [37]).

Interval $\langle a, b \rangle$ se při metodě paralelní střelby rozdělí na $N - 1$ subintervalů pomocí bodů $a = x_1 < x_2 < \dots < x_N = b$ a důmyslnou iterační procedurou se s o u č a s n ě stanoví vektory $\boldsymbol{\eta}_k$, $k = 1, 2, \dots, N$, hodnot řešení okrajové úlohy (2.2.21), (2.2.22) ve v š e c h těchto bodech.

Princip celého postupu je vcelku prostý. Označíme $\mathbf{u}(x; x_k, \boldsymbol{\eta}_k)$ řešení počáteční úlohy ($k = 1, 2, \dots, N - 1$)

$$(2.2.76) \quad \mathbf{u}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{u}), \quad \mathbf{u}(x_k) = \boldsymbol{\eta}_k.$$

Naši úlohou je stanovit vektory $\boldsymbol{\eta}_k$ tak, by funkce

$$(2.2.77) \quad \mathbf{u}(x) = \begin{cases} \mathbf{u}(x; x_k, \boldsymbol{\eta}_k) & \text{pro } x_k \leq x < x_{k+1}, \quad k = 1, 2, \dots, N - 1, \\ \boldsymbol{\eta}_N & \text{pro } x = x_N = b, \end{cases}$$

sestavená z řešení úloh (2.2.76) pro $k = 1, 2, \dots, N - 1$, byla spojitá (a řešila tudíž rovnici $\mathbf{u}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{u})$) a splňovala okrajové podmínky (2.2.22). To vede k soustavě algebraických rovnic

$$(2.2.78) \quad \begin{aligned} \mathbf{u}(x_{k+1}; x_k, \boldsymbol{\eta}_k) - \boldsymbol{\eta}_{k+1} &= \mathbf{0}, \quad k = 1, 2, \dots, N - 1, \\ \mathbf{r}(\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_N) &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

pro neznámé vektory $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \dots, \boldsymbol{\eta}_N$, která se řeší iteračně, přičemž se využívá její speciální tvar. Zpravidla se používají jisté modifikace Newtonovy metody. Hodnoty levé strany soustavy (2.2.78) se opět získávají integrací příslušných počátečních úloh, tentokrát se ovšem každá úloha integruje pouze na odpovídajícím dílčím intervalu. Součástí algoritmů bývá také procedura pro vhodnou volbu dělicích bodů x_k , $k = 2, 3, \dots, N - 1$ (tak, aby nevznikaly problémy se stabilitou), a stanovení dobrého počátečního přiblížení pro použitou iterační metodu. Podrobný popis metody střelby na více cílů a její algoritmické realizace lze nalézt v [30], [49], a [55].

Metoda střelby na více cílů je typická metoda pro řešení n e l i n e á r n í c h úloh. Pro lineární okrajové úlohy bychom (pokud nechceme či nemůžeme užít metodu střelby) dali spíše přednost jiným metodám popsaným v této knize, např. metodě přesunu (odst. 2.3) nebo metodě konečných diferencí (čl. 3).

2.3. Metoda přesunu okrajové podmínky Tato metoda převodu okrajových úloh na úlohy s počátečními podmínkami je určena především pro řešení l i n e á r n í c h okrajových úloh se s e p a r o v a n ý m i podmínkami. Z technických důvodů popíšeme metodu přesunu pro poněkud speciálnější úlohu než je obecná úloha tvaru (2.2.33), (2.2.34) se separovanými podmínkami. Budeme totiž předpokládat, že složky řešení dané úlohy lze rozdělit do dvou skupin takovým způsobem, že řešená úloha nabude tvaru

$$(2.3.1) \quad \begin{aligned} \mathbf{u}' &= \mathbf{A}_1(x)\mathbf{u} + \mathbf{A}_2(x)\mathbf{v} + \mathbf{f}_1(x), \\ \mathbf{v}' &= \mathbf{A}_3(x)\mathbf{u} + \mathbf{A}_4(x)\mathbf{v} + \mathbf{f}_2(x), \quad x \in (a, b), \end{aligned}$$

$$(2.3.2) \quad \begin{aligned} \mathbf{u}(a) + \mathbf{C}_1\mathbf{v}(a) &= \mathbf{c}_1, \\ \mathbf{C}_2\mathbf{u}(b) + \mathbf{C}_3\mathbf{v}(b) &= \mathbf{c}_2. \end{aligned}$$

Přitom \mathbf{u} , \mathbf{f}_1 a \mathbf{c}_1 jsou vektory o n_1 složkách, \mathbf{v} , \mathbf{f}_2 a \mathbf{c}_2 jsou vektory o n_2 složkách, $n_1 + n_2 = n$, a \mathbf{A}_1 , \mathbf{A}_2 , \mathbf{A}_3 , \mathbf{A}_4 , \mathbf{C}_1 , \mathbf{C}_2 , \mathbf{C}_3 jsou matice odpovídajících typů.

Metoda přesunu okrajové podmínky vychází z následující věty dokázané J. Taufferem [51].

2.3.1. Věta. *Nechť jsou všechny prvky matic $\mathbf{A}_i(x)$, $i = 1, 2, 3, 4$, a složky vektorů $\mathbf{f}_1(x)$, $\mathbf{f}_2(x)$ lebesgueovsky integrovatelné na intervalu $\langle a, b \rangle$. Nechť existuje absolutně spojitá matice $\mathbf{G}(x)$, která skoro všude na intervalu $\langle a, b \rangle$ vyhovuje maticové diferenciální rovnici*

$$(2.3.3) \quad \mathbf{G}' = \mathbf{A}_1\mathbf{G} - \mathbf{G}\mathbf{A}_4 + \mathbf{G}\mathbf{A}_3\mathbf{G} - \mathbf{A}_2$$

a splňuje počáteční podmínku

$$(2.3.4) \quad \mathbf{G}(a) = \mathbf{C}_1.$$

Nechť dále absolutně spojitý vektor $\mathbf{g}(x)$ vyhovuje skoro všude na $\langle a, b \rangle$ diferenciální rovnici

$$(2.3.5) \quad \mathbf{g}' = (\mathbf{A}_1 + \mathbf{G}\mathbf{A}_3)\mathbf{g} + \mathbf{f}_1 + \mathbf{G}\mathbf{f}_2$$

a splňuje počáteční podmínku

$$(2.3.6) \quad \mathbf{g}(a) = \mathbf{c}_1.$$

Pak každé absolutně spojitě řešení $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ soustavy (2.3.1), které splňuje levou okrajovou podmínku (2.3.2) (pro $x = a$), splňuje v každém bodě $x \in \langle a, b \rangle$ podmínku

$$(2.3.7) \quad \mathbf{u}(x) + \mathbf{G}(x)\mathbf{v}(x) = \mathbf{g}(x)$$

a skoro všude na $\langle a, b \rangle$ vyhovuje soustavě diferenciálních rovnic

$$(2.3.8) \quad \mathbf{v}' = (\mathbf{A}_4 - \mathbf{A}_3\mathbf{G})\mathbf{v} + \mathbf{f}_2 + \mathbf{A}_3\mathbf{g}.$$

Důkaz z věty provádět nebudeme; lze jej pro mnohem obecnější případ okrajové úlohy nalézt v [51]. Ověříme pouze platnost následujícího tvrzení.

2.3.2. Věta. *Nechť na intervalu $\langle a, b \rangle$ existují funkce \mathbf{G} a \mathbf{g} popsané ve větě 2.3.1. Nechť vektory $\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}}$ tvoří řešení soustavy lineárních algebraických rovnic*

$$(2.3.9) \quad \begin{aligned} \hat{\mathbf{u}} + \mathbf{G}(b)\hat{\mathbf{v}} &= \mathbf{g}(b), \\ \mathbf{C}_2\hat{\mathbf{u}} + \mathbf{C}_3\hat{\mathbf{v}} &= \mathbf{c}_2. \end{aligned}$$

Nechť \mathbf{v} je na intervalu $\langle a, b \rangle$ řešením rovnice (2.3.8) s počáteční podmínkou $\mathbf{v}(b) = \hat{\mathbf{v}}$ zadanou v bodě $x = b$. Pak je dvojice funkcí

$$(2.3.10) \quad \{\mathbf{u}(x) = \mathbf{g}(x) - \mathbf{G}(x)\mathbf{v}(x), \mathbf{v}(x)\}$$

řešením okrajové úlohy (2.3.1), (2.3.2).

D ů k a z. Skutečně, pro $x = a$ podle (2.3.7), (2.3.4) a (2.3.6) platí $\mathbf{u}(a) + \mathbf{C}_1\mathbf{v}(a) = \mathbf{c}_1$. Splnění okrajové podmínky v bodě $x = b$ plyne ihned z toho, že vektory $\mathbf{u}(b) = \hat{\mathbf{u}}$ a $\mathbf{v}(b) = \hat{\mathbf{v}}$ jsou řešením soustavy (2.3.9). Dosadíme-li do (2.3.8) z (2.3.10) za $\mathbf{g} - \mathbf{G}\mathbf{v} = \mathbf{u}$, obdržíme

$$\mathbf{v}' = \mathbf{A}_3(\mathbf{g} - \mathbf{G}\mathbf{v}) + \mathbf{A}_4\mathbf{v} + \mathbf{f}_2 = \mathbf{A}_3\mathbf{u} + \mathbf{A}_4\mathbf{v} + \mathbf{f}_2,$$

což je druhá z rovnic (2.3.1). Konečně máme podle (2.3.10), (2.3.3) a (2.3.5)^{*)}

$$\begin{aligned} \mathbf{u}' &= \mathbf{g}' - \mathbf{G}'\mathbf{v} - \mathbf{G}\mathbf{v}' = (\mathbf{A}_1 + \mathbf{G}\mathbf{A}_3)\mathbf{g} + \mathbf{f}_1 + \mathbf{G}\mathbf{f}_2 - (\mathbf{A}_1\mathbf{G} - \mathbf{G}\mathbf{A}_4 + \\ &\quad + \mathbf{G}\mathbf{A}_3\mathbf{G} - \mathbf{A}_2)\mathbf{v} - \mathbf{G}(\mathbf{A}_4 - \mathbf{A}_3\mathbf{G})\mathbf{v} - \mathbf{G}\mathbf{f}_2 - \mathbf{G}\mathbf{A}_3\mathbf{g} = \\ &= \mathbf{A}_1(\mathbf{g} - \mathbf{G}\mathbf{v}) + \mathbf{A}_2\mathbf{v} + \mathbf{f}_1 = \mathbf{A}_1\mathbf{u} + \mathbf{A}_2\mathbf{v} + \mathbf{f}_1, \end{aligned}$$

což je první z rovnic (2.3.1).

2.3.3. Přesun okrajových podmínek. Smysl věty 2.3.1 spočívá tedy v tom, že nám dovoluje tvrdit, že splňuje-li daná dvojice vektorových funkcí $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ soustavu diferenciálních rovnic (2.3.1) a první z okrajových podmínek (2.3.2), pak \mathbf{u} a \mathbf{v} splňují podmínku téhož typu, totiž (2.3.7), v každém bodě $x \in \langle a, b \rangle$. Na podmínku (2.3.7) se tudíž lze dívat jako na první okrajovou podmínku (2.3.2) p ř e s u n u t o u do bodu x .

To je důvod, proč se metoda řešení okrajových úloh založená na větě 2.3.2 nazývá *metoda přesunu okrajové podmínky*. Poznamenejme, že koeficienty v přesunuté podmínce dostáváme řešením úloh s počátečními podmínkami.

Všimněme si ještě toho, že přenásobíme-li podmínku (2.3.7) v každém bodě $x \in \langle a, b \rangle$ regulární maticí $\mathbf{K}(x)$, dostaneme ekvivalentní podmínku tvaru $\mathbf{K}\mathbf{u} + \mathbf{G}_1\mathbf{v} = \mathbf{g}_1$. Není proto nutné hledat koeficienty v přesunuté podmínce právě tak, aby $\mathbf{K} = \mathbf{I}$, má to však význam z hlediska dobrých numerických vlastností výsledného algoritmu. Přesunu okrajové podmínky podle věty 2.3.1 se proto také přesněji říká *metoda normalizovaného přesunu* (volbou $\mathbf{K} = \mathbf{I}$, viz též [55]).

^{*)} Pro derivaci součinu $\mathbf{A}\mathbf{x}$, kde \mathbf{A} je matice a \mathbf{x} vektor, platí $(\mathbf{A}\mathbf{x})' = \mathbf{A}'\mathbf{x} + \mathbf{A}\mathbf{x}'$ (plyne to ihned z definice součinu matice a vektoru).

2.3.4. Algoritmus metody přesunu. Lineární okrajovou úlohu (2.3.1), (2.3.2) se separovanými okrajovými podmínkami můžeme s přihlédnutím k výsledkům odst. 2.3.1 a 2.3.2 řešit algoritmem sestávajícím z následujících čtyř kroků.

Krok 1. Na intervalu $\langle a, b \rangle$ vyřešíme počáteční úlohu pro maticovou diferenciální rovnici (2.3.3) s počáteční podmínkou (2.3.4) zadanou v bodě $x = a$.

Krok 2. Na intervalu $\langle a, b \rangle$ vyřešíme počáteční úlohu pro soustavu lineárních diferenciálních rovnic (2.3.5) s počáteční podmínkou (2.3.6) zadanou v bodě $x = a$.

Krok 3. Stanovíme řešení $\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}}$ soustavy lineárních algebraických rovnic (2.3.9).

Krok 4. Na intervalu $\langle a, b \rangle$ vyřešíme ve směru od $x = b$ k $x = a$ počáteční úlohu pro soustavu lineárních diferenciálních rovnic (2.3.8) s počáteční podmínkou $\mathbf{v}(b) = \hat{\mathbf{v}}$ zadanou v bodě $x = b$.

Hledaným řešením úlohy (2.3.1), (2.3.2) jsou pak funkce $\mathbf{u}(x) = \mathbf{g}(x) - \mathbf{G}(x)\mathbf{v}(x)$ a $\mathbf{v}(x)$.

2.3.5. Poznámky. Ze soustavy lineárních algebraických rovnic (2.3.9) řešené v kroku 3 lze vyloučit $\hat{\mathbf{u}}$ a hledat pouze $\hat{\mathbf{v}}$ jako řešení soustavy.

$$(2.3.11) \quad [\mathbf{C}_3 - \mathbf{C}_2\mathbf{G}(b)]\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{c}_2 - \mathbf{C}_2\mathbf{G}(b).$$

Z teorie metody přesunu plyne [51], že existence a jednoznačnost řešení soustavy (2.3.9) je ekvivalentní s existencí a jednoznačností řešení okrajové úlohy (2.3.1), (2.3.2) (za předpokladů věty 2.3.1). Metoda přesunu tak vlastně dává i odpověď na otázku o řešitelnosti dané okrajové úlohy.

Nebude-li splněn předpoklad věty 2.3.1 o tom, že řešení maticové diferenciální rovnice (2.3.3) existuje na celém intervalu $\langle a, b \rangle$, projeví se to prakticky tak, že uvnitř intervalu $\langle a, b \rangle$ bude existovat bod, v němž některé prvky matice $\mathbf{G}(x)$ budou mít pól a při výpočtu dojde k překročení číselného rozsahu počítače. Algoritmus metody přesunu lze upravit i pro tento případ (viz [51], [55]), vede to ovšem k jeho větší složitosti. Pro řadu okrajových úloh lze existenci řešení rovnice (2.3.3) v metodě přesunu zaručit předem.

Numerická realizace metody normalizovaného přesunu se chová velmi stabilně a nedochází při ní k problémům, s nimiž jsme se setkali u metody střelby. Je však třeba vidět, že metoda přesunu je poměrně pracná a hlavně náročná na paměť počítače, protože hodnoty funkcí \mathbf{G} a \mathbf{g} v dostatečném počtu bodů z intervalu $\langle a, b \rangle$ je třeba po celý výpočet uchovávat v paměti. Tyto funkce totiž vystupují jako koeficienty v diferenciální rovnici (2.3.8) řešené v posledním kroku algoritmu.

Nároky na paměť se dají v zásadě snížit tím, že spojíme kroky 1 a 2 algoritmu metody přesunu a soustavu diferenciálních rovnic (2.3.3), (2.3.5) řešíme jako jediný systém a že krok 4 nahradíme následujícím krokem:

Krok 4'. Na intervalu $\langle a, b \rangle$ vyřešíme ve směru od $x = b$ k $x = a$ počáteční úlohu pro p ů v o d n í soustavu diferenciálních rovnic (2.3.1) s počátečními podmínkami $\mathbf{u}(b) = \hat{\mathbf{u}}, \mathbf{v}(b) = \hat{\mathbf{v}}$ zadanými v bodě $x = b$.

Smyslem metody přesunu bylo však vyhnout se integraci počátečních úloh pro soustavu (2.3.1) a s tím spojeným numerickým obtížím. Krok 4' je v tomto směru opět

krokem zpět k metodě střelby. Podrobnější rozbor metody přesunu i její algoritmické realizace najde čtenář v [23], [30], [51] či [55]. Upozorňujeme ještě na to, že v zahraniční literatuře se zcela stejný algoritmus odvozuje tzv. *metodou invariantního vnoření* (invariant imbedding).

2.3.6. Metoda přesunu pro rovnici druhého řádu. Popíšeme použití metody přesunu k řešení okrajové úlohy pro lineární diferenciální rovnici druhého řádu v samoadjungovaném tvaru

$$(2.3.12) \quad -(p(x)u')' + q(x)u = f(x), \quad x \in (a, b),$$

s okrajovými podmínkami

$$(2.3.13) \quad \begin{aligned} \alpha_0 u(a) - \beta_0 p(a)u'(a) &= g_0, \\ \alpha_1 u(b) + \beta_1 p(b)u'(b) &= g_1. \end{aligned}$$

Jde tu vlastně o standardní okrajovou úlohu z odst. 1.2.4, kterou uvažujeme na obecném intervalu $\langle a, b \rangle$. O konstantách α_i , β_i předpokládáme, že $\alpha_i \geq 0$, $\beta_i \geq 0$, $\alpha_i + \beta_i > 0$, $i = 0, 1$.

Předpokládáme, že funkce p , q , f a p' jsou na $\langle a, b \rangle$ spojité a že na $\langle a, b \rangle$ platí $p(x) > 0$, $q(x) \geq 0$. Jsou-li tyto předpoklady splněny a vyloučíme-li případ, že $\alpha_0 = \alpha_1 = 0$ a $q(x) \equiv 0$, má úloha (2.3.12), (2.3.13) právě jedno klasické řešení (viz též odst. 1.2.5 a větu 1.2.6).

Rovnici (2.3.12) převedeme na soustavu rovnic prvního řádu substitucí $v = p(x)u'$. Substitute $v = u'$, která se snad může zdát přirozenější, by se dala použít také, ale výsledný algoritmus metody přesunu by byl složitější a neměl by některé výhodné vlastnosti. Od rovnice (2.3.12) tedy přejdeme k soustavě

$$(2.3.14) \quad \begin{aligned} u' &= \frac{1}{p(x)}v, \\ v' &= q(x)u - f(x) \end{aligned}$$

a okrajové podmínky (2.3.13) pro funkce u , v přepíšeme jako

$$(2.3.15) \quad \begin{aligned} \alpha_0 u(a) - \beta_0 v(a) &= g_0, \\ \alpha_1 u(b) + \beta_1 v(b) &= g_1. \end{aligned}$$

Další výklad provedeme za předpokladu $\alpha_0 > 0$. Postup při $\beta_0 > 0$ by byl zcela obdobný (viz cvičení 2.4.12). První z podmínek (2.3.15) upravíme na tvar

$$(2.3.16) \quad u(a) - \frac{\beta_0}{\alpha_0}v(a) = \frac{g_0}{\alpha_0}$$

a použijeme větu 2.3.1. Přihlédneme-li k (2.3.1), (2.3.2), vidíme, že nyní (všechny veličiny jsou ovšem skalární) $A_1(x) \equiv 0$, $A_2(x) = 1/p(x)$, $f_1(x) \equiv 0$, $A_3(x) = q(x)$, $A_4(x) \equiv 0$,

$f_2(x) = -f(x)$. Dále máme $C_1 = -\beta_0/\alpha_0$, $c_1 = g_0/\alpha_0$, $C_2 = \alpha_1$, $C_3 = \beta_1$, $c_2 = g_1$. Algoritmus metody přesunu pro řešení úlohy (2.3.12), (2.3.13) s $\alpha_0 > 0$ je tudíž následující:

Krok 1. Na intervalu $\langle a, b \rangle$ vyřešíme počáteční úlohu pro Riccatiovu rovnici

$$(2.3.17) \quad G' = q(x)G^2 - \frac{1}{p(x)}$$

s počáteční podmínkou

$$(2.3.18) \quad G(a) = -\frac{\beta_0}{\alpha_0}.$$

Krok 2. Na intervalu $\langle a, b \rangle$ vyřešíme počáteční úlohu pro lineární diferenciální rovnici

$$(2.3.19) \quad g' = q(x)G(x)g - G(x)f(x)$$

s počáteční podmínkou

$$(2.3.20) \quad g(a) = \frac{g_0}{\alpha_0}.$$

Krok 3. Ze soustavy lineárních algebraických rovnic

$$(2.3.21) \quad \begin{aligned} \hat{u} + G(b)\hat{v} &= g(b), \\ \alpha_1\hat{u} + \beta_1\hat{v} &= g_1 \end{aligned}$$

stanovíme \hat{u} a \hat{v} .

Krok 4. Na intervalu $\langle a, b \rangle$ řešíme zprava doleva počáteční úlohu pro lineární diferenciální rovnici

$$(2.3.22) \quad v' = -q(x)G(x)v - f(x) + q(x)g(x)$$

s počáteční podmínkou

$$(2.3.23) \quad v(b) = \hat{v}.$$

Hodnoty řešení u okrajové úlohy (2.3.12), (2.3.13) se pak stanoví ze vztahu $u(x) = g(x) - G(x)v(x)$. Dá se ukázat [51], že za předpokladů, které jsme o řešené okrajové úloze učinili, je popsán přesun okrajové podmínky vždy p r o v e d i t e l n ý, tj. počáteční úloha (2.3.17), (2.3.18) má řešení na celém intervalu $\langle a, b \rangle$ a matice soustavy (2.3.21) je regulární. Poznamenejme ještě, že zde popsáný algoritmus lze nalézt (spolu s dalšími jeho modifikacemi) také v [2] pod názvem *metoda faktorizace*.

Skalární Riccatiové rovnice (2.3.17) vznikající při řešení okrajových úloh (2.3.12), (2.3.13) lze v některých případech vyřešit analyticky. Obecné pokyny pro analytické řešení Riccatiových rovnic a řadu konkrétních výsledků nalezne čtenář např. v [15]. K numerickému řešení rovnic metody přesunu doporučuje G. H. Meyer [23] lichoběžníkové pravidlo, které jak pro skalární Riccatiovu rovnici, tak pro lineární diferenciální rovnice má obzvlášť jednoduchou strukturu (viz [37]). Kombinace analytického řešení Riccatiové rovnice s lichoběžníkovým pravidlem pro řešení rovnic (2.3.19) a (2.3.22) často vede na velmi efektivní algoritmy pro řešení okrajových úloh.

2.3.7. Příklad. Řešme metodou přesunu okrajovou úlohu (2.2.53), (2.2.54), kterou se nám metodou střelby nepodařilo vyřešit. Příčinou byla — zhruba řečeno — skutečnost, že obecný tvar řešení rovnice (2.2.53) $Ae^{-5x} + Be^{5x}$ v sobě obsahuje jak člen, který exponenciálně roste při integraci počátečních úloh pro (2.2.53) zleva doprava (s počátečními podmínkami zadanými v bodě $x = a$), tak člen, který exponenciálně roste při integraci počátečních úloh s podmínkami v bodě $x = b$ zprava doleva.

Porovnáním (2.2.53), (2.2.54) s (2.3.12), (2.3.13) vidíme, že je $p(x) \equiv 1$, $q(x) \equiv 25$, $f(x) \equiv 0$, $\alpha_0 = 1$, $\beta_0 = 0$, $g_0 = 1$, $\alpha_1 = 1$, $\beta_1 = 0$, $g_1 = 1$. Riccatiova rovnice (2.3.17) má tedy tvar

$$(2.3.24) \quad G' = 25G^2 - 1$$

a řešení vyhovující počáteční podmínce (viz (2.3.18)) $G(0) = 0$ je ([15]) $G(x) = -\frac{1}{5} \tanh 5x$ a na intervalu $\langle 0, 5 \rangle$ pro něj platí $-\frac{1}{5} \leq G(x) \leq 0$. Rovnice (2.3.19) má nyní tvar

$$(2.3.25) \quad g' = 25G(x)g$$

a její řešení s rostoucím x exponenciálně klesají (viz např. [37], odst. 16.5). Totéž platí pro integraci rovnice (2.3.22), tj.

$$(2.3.26) \quad v' = -25G(x)v + 25g(x),$$

zprava od bodu $x = 5$ doleva k bodu $x = 0$.

Metodou přesunu se tudíž zcela vyloučí vliv exponenciálně rostoucích řešení, zneumožňujících numerickou realizaci metody střelby. Pro úplnost dodejme přece jen jedno varování. Při řešení Riccatiových rovnic typu (2.3.24) s velkými koeficienty v členu s G^2 numerickými metodami mohou vznikat problémy dané tím, že v okolí bodu $x = a$ má hledané řešení velmi strmý průběh, což vyžaduje jemný krok (viz [37]). Počáteční úlohy pro řešení diferenciální rovnice se mohou také chovat jako úlohy s velkým tlumením ([37]) a vyžadovat při numerickém řešení zvláštní péči. (Je známo, že lichoběžníkové pravidlo je jednou z vhodných numerických metod pro řešení takových úloh.)

2.4. Cvičení

2.4.1. [7] Při řešení okrajové úlohy

$$u'' = \frac{1}{2}u - \frac{2(u')^2}{u}, \quad x \in (0, 1),$$

$$u(0) = 1, \quad u(1) = 1, 5,$$

byly metodou střelby získány tyto výsledky: Pro $u'(0) = \mu = 0$ vyšlo $u(1) \doteq 1,543\,081$ a pro $\mu = -0,05$ bylo $u(1) \doteq 1,425\,560$. Jakou hodnotu μ zvolíte pro další „výstřel“? [Metoda bisekce: $\mu = -0,025$. Metoda regula falsi: $\mu \doteq -0,018\,33$. Newtonova metoda podle (2.2.11) s $h_k = 0,05$ dá stejný výsledek (jde vlastně o metodu sečen).]

2.4.2. Popište modifikaci metody střelby z odst. 2.2.1 a její algoritmus pro případ, kdy za libovolně volenou počáteční podmínku v bodě $x = a$ bereme $\eta (= u(a))$. [Návod: Místo (2.2.6) nyní řešíme rovnici $F(\eta) = 0$ a je $F(\eta) \equiv r_2(u(b; \eta), u'(b; \eta))$.]

2.4.3. Řešte metodou střelby okrajovou úlohu z příkl. 2.2.3. K řešení počátečních úloh užíjte Eulerovu metodu s konstantním krokem $h = 0, 2$. Volte $\mu = V_0 = -8$ a $\mu = -8, 27$. Výpočet proveďte na 3 platné číslice. [Pro $\mu = -8$ je $U_5 \doteq 1, 38$. Pro $\mu = -8, 27$ je $U_5 \doteq 1, 00$.]

2.4.4. Jako cvičení 2.4.2, ale volte $\mu = V_0 = -40$. [$U_5 \doteq 2, 82$.]

2.4.5. Řešte metodou střelby okrajovou úlohu z příkl. 2.2.3. Postupujte tak, že zadáte počáteční podmínky v bodě $x = 1$ a počáteční úlohy řešíte zprava doleva od bodu $x = 1$ k bodu $x = 0$ Eulerovou metodou s konstantním krokem $h = -0, 2$. Volte $\mu = V_0 = 0$ a $\mu = -2$. Výpočet proveďte na 3 platné číslice. [Návod: Užíjte vzorce (2.2.20) s $h = -0, 2$. Pro $\mu = 0$ je $U_5 \doteq 1, 64 (\approx u(0))$. Pro $\mu = -2$ je $U_5 \doteq 4, 37$. Metodou regula falsi jako další přiblížení pro μ dostaneme $\mu \doteq -1, 7$. Pro toto μ je $U_5 \doteq 3, 93$.]

2.4.6. Popište metodu střelby pro řešení lineární okrajové úlohy pro rovnici druhého řádu (2.3.12), (2.3.13). Předpokládejte $\alpha_0 > 0$ a využijte toho, že podmínky jsou separované. [Návod: Řešte počáteční úlohu pro rovnici (2.3.12), jejíž řešení u_1 splňuje podmínky $u_1(a) = g_0/\alpha_0$, $u_1'(a) = 0$. Dále stanovte řešení u_0 počáteční úlohy pro příslušnou homogenní rovnici s podmínkami $u_0(a) = \beta_0 p(a)$, $u_0'(a) = \alpha_0$. Řešení okrajové úlohy hledejte jako lineární kombinaci $u = C u_0 + u_1$.]

2.4.7. Řešte metodou střelby okrajovou úlohu pro rovnici (2.2.42) z příkl. 2.2.8, ale s okrajovými podmínkami $u(0) = 1$, $u(2\pi + \varepsilon) = 1$. Vysvětlete, proč pro malá ε bude při výpočtu docházet k numerickým potížím. [Matice $\mathbf{C} + \mathbf{D}\Phi(b)$ bude blízká singulární matici. Soustava (2.2.49) bude mít řešení $\eta = 1$, μ libovolné. (Pro $\varepsilon = 0$ má řešená úloha nekonečně mnoho řešení.)]

2.4.8. Řešte metodou střelby okrajovou úlohu z příkl. 2.2.9, kde koeficient 25 v rovnici změňte na 100. Posuďte řešitelnost úlohy na počítači pracujícím s 15 dekadickými číslicemi mantisy. [Návod: Vyšetřete vliv poruchy v počáteční podmínce pro u' na řešení (viz též odst. 2.2.10).]

2.4.9. Odvoďte odhad (2.2.67). [Návod: Užíjte trojúhelníkovou nerovnost a to, že pro $0 \leq x \leq 5$ je $e^{-5x} \leq 1$, $e^{5x} \leq e^{25}$.]

2.4.10. Odvoďte vztah (2.2.74). [Návod: Obecný tvar řešení rovnice (2.2.72) je $Ae^{-5x} + Be^{5x}$.]

2.4.11. Ukažte, že změnou směru integrace počátečních úloh (od $x = 5$ k $x = 0$) se problémy s numerickým řešením úlohy (2.2.53), (2.2.54) neodstraní. [Návod: Stanovte řešení počáteční úlohy s podmínkami $u(5) = \eta$, $u'(5) = \mu$ a ukažte, že citlivost na μ má i nadále stejný charakter jako v příkl. 2.2.9.]

2.4.12. Odvoďte metodu přesunu pro řešení úlohy (2.3.12), (2.3.13) za předpokladu, že $\beta_0 > 0$. [Návod: První z podmínek (2.3.15) upravte na tvar $v(a) - (\alpha_0/\beta_0)u(a) = -g_0/\beta_0$, zaměňte roli u a v a použijte větu 2.3.1.]

3. Diskretizace okrajových úloh diferenčními metodami

3.1. Principy diskretizace okrajových úloh

Diferenciální rovnice vyjadřuje požadavek rovnosti mezi jistými funkcemi a jejich derivacemi na intervalech (u obyčejných diferenciálních rovnic) nebo oblastech (u parciálních diferenciálních rovnic). Taková rovnice tudíž vlastně představuje nekonečně mnoho rovnic pro nekonečně mnoho neznámých funkčních hodnot. Na počítači můžeme však modelovat (naprogramovat) pouze řešení takových úloh, u nichž je soubor vstupních a výstupních dat konečný. Proto i při řešení okrajových úloh pro diferenciální rovnice postupujeme jako při modelování jiných úloh matematické analýzy na počítači [37], a na základě původní diferenciální úlohy konstruuje konečný systém rovnic pro konečný počet neznámých, jehož vyřešením pak dospíváme k hledanému přibližnému řešení dané okrajové úlohy. Procesu takové konstrukce říkáme *diskretizace* diferenciální úlohy.

Metody diskretizace představují celou škálu navzájem podobných postupů, které lze zhruba rozdělit do dvou tříd:

A. *Diferenční metody*. Jde o metody, které *a p r o x i m u j í p ů v o d n í d i f e r e n c i á l n í ú l o h u s a m o t n o u*. Výsledkem diskretizace je tu soustava algebraických rovnic pro hodnoty přibližného řešení v konečné *síti* bodů x_0, x_1, \dots, x_N . Této soustavě algebraických rovnic se proto často říká *soustava síťových rovnic*. Pro diferenční metodu se také užívá termín *metoda sítě*. Konstrukci síťových rovnic můžeme v zásadě provádět dvěma postupy:

a) *metodou konečných diferencí*, kdy derivace v diferenciální rovnici a okrajových podmínkách přímo nahrazujeme vhodnými poměrnými diferencemi (síťovým rovnicím se pak říká *diferenční rovnice*);

b) *metodou integrálních identit*, kdy aproximujeme jisté integrální vztahy, které platí pro řešení dané diferenciální rovnice.

B. *Metody Galerkinova typu*. Jde o metody, které *a p r o x i m u j í p ř í m o ř e š e n í* dané okrajové úlohy pomocí konečných lineárních kombinací vhodně zvolených lineárně nezávislých funkcí. Výsledkem diskretizace je tu soustava algebraických rovnic pro koeficienty lineární kombinace určující hledané přibližné řešení.

Výsledné soustavy algebraických rovnic jsou pro obě třídy metod lineární, pokud je daná diferenciální úloha lineární, a nelineární, pokud tomu tak není.

Ať už k diskretizaci okrajové úlohy použijeme diferenční metodu nebo metodu Galerkinova typu, sestavením soustavy algebraických rovnic pro hodnoty přibližného řešení nebo koeficienty hledané lineární kombinace není problematika diskretizačních metod zdaleka vyčerpána. Abychom získali numerickou metodu, která se dá k řešení dané okrajové úlohy skutečně použít, musíme nejprve zodpovědět tři otázky:

1. Má soustava algebraických rovnic získaná diskretizací okrajové úlohy řešení a je toto řešení jediné?

2. Jaká numerická metoda algebry je vhodná k řešení získané soustavy rovnic a jaké jsou vlastnosti této soustavy? (Sem patří např. otázka konvergence u iteračních metod apod.). Numerickými metodami pro řešení soustav algebraických rovnic se — zejména pokud jde o lineární soustavy — dosti podrobně zabývá [24]. Vzhledem k tomu, že soustavy vzniklé diskretizací okrajových úloh mají řadu speciálních vlastností, užívají se často pro jejich řešení speciální metody. V odst. 3.5 stručně popíšeme nejužívanější přímé metody a v čl. 10 další části naší série se budeme zabývat iteračními metodami (viz též [2], [46], [6], [55], [18] aj.).

Zde je třeba upozornit na to, že nehledáme pouze vhodnou metodu pro řešení odvozené soustavy síťových rovnic, ale snažíme se také danou diferenciální úlohu aproximovat takovým způsobem, aby získaná soustava algebraických rovnic měla vhodnou strukturu a dala se existujícími metodami efektivně řešit.

3. S jakou přesností aproximuje získané přibližné řešení přesné řešení dané okrajové úlohy? Konverguje přibližné řešení v nějaké vhodné normě k řešení přesnému, zjemňujeme-li síť či zvětšujeme-li počet členů v uvažovaných lineárních kombinacích?

V tomto článku se budeme zabývat diskretizací okrajových úloh diferenčními metodami. Metodám Galerkinova typu je věnován čl. 4.

3.2. Metoda konečných diferencí pro Dirichletovu úlohu

Principy metody konečných diferencí vyložíme nejprve na jednoduché modelové úloze pro lineární diferenciální rovnici druhého řádu s Dirichletovými okrajovými podmínkami.

3.2.1. Diskretizace metodou konečných diferencí. Mějme řešit okrajovou úlohu

$$(3.2.1) \quad \begin{aligned} -u'' + q(x)u &= f(x), \quad x \in (0, 1), \\ u(0) &= g_0, \quad u(1) = g_1, \end{aligned}$$

kde q a f jsou dané funkce definované a spojitě na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$, $q(x) \geq 0$ a g_0, g_1 jsou daná čísla. Za těchto předpokladů má úloha (3.2.1) právě jedno (klasické) řešení (věta 1.2.6).

Interval $\langle 0, 1 \rangle$ rozdělíme na N částí pomocí zvolených bodů x_i , $i = 0, 1, \dots, N$, takových, že

$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_i < x_{i+1} < \dots < x_{N-1} < x_N = 1.$$

Množina

$$\mathcal{S} = \{x_i, i = 0, 1, \dots, N, x_0 = 0, x_N = 1\}$$

se nazývá *síť*, čísla $h_i = x_{i+1} - x_i$ *kroky sítě* a bodům x_i říkáme *uzly sítě*. Body x_0, x_N jsou *hraniční uzly*, body x_1, x_2, \dots, x_{N-1} *vnitřní uzly*. Volíme-li $h_i \equiv h = 1/N$, hovoříme o *rovnoměrné* nebo *ekvidistantní síti* a značíme

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_h &= \{x_i = ih, i = 1, 2, \dots, N-1\}, \\ \bar{\mathcal{S}}_h &= \{x_i = ih, i = 0, 1, \dots, N\}. \end{aligned}$$

Přibližné řešení okrajové úlohy (3.2.1) budeme konstruovat jako funkci diskrétního argumentu x_i . Takové funkci se říká *síťová funkce*. Přibližné řešení tedy určujeme vektorem $\mathbf{U} = (U_0, U_1, \dots, U_{N-1}, U_N)$. Složky U_i , $i = 0, 1, \dots, N-1, N$, aproximují hodnoty $u(x_i)$ přesného řešení v uzlech sítě.

Klasické řešení u splňuje rovnici (3.2.1) v každém bodě $x \in (0, 1)$, tj. pro všechna $x \in (0, 1)$ platí rovnost

$$(3.2.2) \quad -u''(x) + q(x)u(x) = f(x).$$

Na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ zvolíme rovnoměrnou síť $\bar{\mathcal{S}}_h$. V každém vnitřním uzlu $x_i \in \mathcal{S}_h$ tedy platí

$$(3.2.3) \quad -u''(x_i) + q(x_i)u(x_i) = f(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, N-1.$$

Druhou derivaci nahradíme (aproximujeme) druhou poměrnou diferencí podle vztahu ([37])

$$u''(x_i) \approx \frac{1}{h} \left[\frac{u(x_i + h) - u(x_i)}{h} - \frac{u(x_i) - u(x_i - h)}{h} \right] = \frac{1}{h^2} [u(x_i - h) - 2u(x_i) + u(x_i + h)].$$

Soustavu rovností (3.2.3) nahradíme soustavou přibližných rovností

$$-\frac{1}{h^2} [u(x_i - h) - 2u(x_i) + u(x_i + h)] + q(x_i)u(x_i) \approx f(x_i),$$

která je východiskem k sestavení soustavy *síťových* rovnic.

Přibližné řešení úlohy (3.2.1) je síťová funkce, jejíž hodnoty $U_i [\approx u(x_i)]$ splňují rovnice

$$(3.2.4) \quad -\frac{1}{h^2} (U_{i-1} - 2U_i + U_{i+1}) + q(x_i)U_i = f(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, N-1,$$

$$U_0 = g_0, \quad U_N = g_1.$$

Rovnice (3.2.4) tvoří soustavu $N-1$ lineárních algebraických rovnic pro $N-1$ neznámých U_1, U_2, \dots, U_{N-1} (hodnoty U_0, U_N jsou určeny okrajovými hodnotami g_0, g_1 přesně). Této soustavě se také říká soustava *diferenčních rovnic*. Někdy se pro soustavu (3.2.4) užívá termín *síťová úloha* nebo *diferenční úloha* (pokud je užitečné zdůraznit, že byla získána diferenční metodou).

Do síťové rovnice pro $i = 1$ dosadíme $U_0 = g_0$, do síťové rovnice pro $i = N-1$ dosadíme $U_N = g_1$ a převedeme členy obsahující g_0 a g_1 (známé konstanty) na pravou stranu. Dostaneme tak soustavu rovnic

$$\begin{aligned} h^{-2}(2 + h^2 q(x_1))U_1 - h^{-2}U_2 &= f(x_1) + h^{-2}g_0, \\ -h^{-2}U_1 + h^{-2}(2 + h^2 q(x_2))U_2 - h^{-2}U_3 &= f(x_2), \\ &\vdots \\ -h^{-2}U_{N-3} + h^{-2}(2 + h^2 q(x_{N-2}))U_{N-2} - h^{-2}U_{N-1} &= f(x_{N-2}), \\ -h^{-2}U_{N-2} + h^{-2}(2 + h^2 q(x_{N-1}))U_{N-1} &= f(x_{N-1}) + h^{-2}g_1. \end{aligned}$$

Označíme-li

$$(3.2.5) \quad \mathbf{U}_h = [U_1, U_2, \dots, U_{N-1}]^T, \\ \mathbf{F}_h = [f_1 + h^{-2}g_0, f_2, \dots, f_{N-2}, f_{N-1} + h^{-2}g_1]^T, \\ \mathbf{A}_h = h^{-2} \begin{bmatrix} 2 + h^2 q_1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 + h^2 q_2 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 + h^2 q_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 + h^2 q_{N-1} \end{bmatrix},$$

kde $q_i = q(x_i)$, $f_i = f(x_i)$, můžeme soustavu diferenčních rovnic (3.2.4) zapsat ve tvaru

$$(3.2.6) \quad \mathbf{A}_h \mathbf{U}_h = \mathbf{F}_h.$$

První otázkou, kterou si po sestavení diferenční aproximace (3.2.6) okrajové úlohy (3.2.1) klademe, je otázka řešitelnosti získané soustavy lineárních algebraických rovnic. Zabývejme se tedy nejprve algebraickými vlastnostmi matice \mathbf{A}_h . Z (3.2.5) ihned vidíme, že matice \mathbf{A}_h je třídiagonální a s y m e t r i c k á. Symetrie matice \mathbf{A}_h odráží podstatnou vlastnost řešené okrajové úlohy, totiž skutečnost, že úloha (3.2.1) je v samoadjungovaném tvaru. Je jistě přirozené snažit se o to, aby soustava síťových rovnic (3.2.6) a okrajová úloha (3.2.1) měly co nejvíce společných vlastností. Při řešení soustav síťových rovnic se symetrickými maticemi se kromě toho snižuje počet potřebných aritmetických operací a klesají nároky na paměť počítače. Symetrie matice \mathbf{A}_h je v našem případě důsledkem symetrie použité diferenční aproximace druhých derivací a významnou roli tu hraje i očíslování uzlů sítě. Pokud bychom totiž rovnice (3.2.4) sestavili do soustavy (3.2.6) v jiném pořadí, nemusela by výsledná matice být symetrická. Použité pořadí $i = 1, 2, \dots, N - 1$ je ovšem v případě okrajových úloh pro obyčejné diferenciální rovnice zcela přirozené. Problematika očíslování uzlů sítě hraje významnou roli teprve při řešení parciálních diferenciálních rovnic.

Matice \mathbf{A}_h je navíc p o z i t i v n ě d e f i n i t n í. Opět tak odráží vlastnosti úlohy (3.2.1) (viz [26], odst. 13.8). Pokud $q_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, N - 1$, dokáže se pozitivní definitnost snadno podle Geršgorinovy věty o lokalizaci vlastních čísel [24]. Protože vlastní čísla matice \mathbf{A}_h jsou reálná (plyne ze symetrie), leží tato vlastní čísla ve sjednocení intervalů $\langle q_i, q_i + 4h^{-2} \rangle$, $i = 1, 2, \dots, N - 1$, a jsou proto všechna kladná. To zaručuje, že matice \mathbf{A}_h je pozitivně definitní. Důkaz pozitivní definitnosti matice \mathbf{A}_h pro $q_i \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, N - 1$, lze najít např. v [49]. Z pozitivní definitnosti vyplývá, že matice \mathbf{A}_h je r e g u l á r n í, a soustava (3.2.6) proto má právě jedno řešení. Efektivní numerickou metodu pro výpočet řešení soustavy (3.2.6) popíšeme v odst. 3.5 (metoda faktorizace).

V odst. 3.1 jsme si dále položili otázku, s jakou přesností získané přibližné řešení aproximuje přesné řešení a zda se chyba přibližného řešení zmenšuje, zjemňujeme-li síť, tj. když $h \rightarrow 0$. Odpověď na tuto otázku v souvislosti s úlohou (3.2.1) dáme v odst. 3.2.3. Obecné problematice konvergence numerických metod pro řešení diferenciálních rovnic věnujeme čl. 11 druhé části naší série.

3.2.2. Příklad. U jednoduché okrajové úlohy

$$(3.2.7) \quad \begin{aligned} -u'' &= x^2, \quad x \in (0, 1), \\ u(0) &= u(1) = 0, \end{aligned}$$

chceme porovnat hodnoty přesného řešení $u(x) = \frac{1}{12}x(1-x^3)$ s hodnotami přibližného řešení získanými diferenční metodou. Abychom získali podrobnější představu o závislosti chyby řešení na velikosti kroku sítě, budeme diskretizaci provádět na dvou sítích. Pro hrubší síť zvolíme $N = 4$ a pro jemnější síť $N = 8$. Hrubší síť sestává z uzlů $x_0 = 0; x_1 = 0,25; x_2 = 0,5; x_3 = 0,75; x_4 = 1$ a jemnější síť z uzlů $x_0 = 0; x_1 = 0,125; x_2 = 0,25; x_3 = 0,375; x_4 = 0,5; x_5 = 0,625; x_6 = 0,75; x_7 = 0,875; x_8 = 1$. Hodnotu přibližného řešení v uzlu x_i získanou metodou konečných diferencí s krokem h budeme označovat $U(x_i, h) = U_i$. V porovnání s odst. 3.2.1 je v úloze (3.2.7) $q(x) \equiv 0$, $f(x) = x^2$, $g_0 = g_1 = 0$ a odpovídající diferenční úloha má tvar

$$(3.2.8) \quad \begin{aligned} -\frac{1}{h^2}(U_{i-1} - 2U_i + U_{i+1}) &= x_i^2, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \\ U_0 &= U_N = 0. \end{aligned}$$

Pro $N = 4$, tj. $h = 0,25$, představuje (3.2.8) (po dosazení za U_0, U_N) soustavu 3 lineárních rovnic (pro neznámé $U_1 = U(0,25; 0,25)$, $U_2 = U(0,5; 0,25)$, $U_3 = U(0,75; 0,25)$) tvaru

$$(3.2.9) \quad 16 \times \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,062500 \\ 0,250000 \\ 0,562500 \end{bmatrix}.$$

Pro $N = 8$, tj. $h = 0,125$, představuje (3.2.8) soustavu 7 lineárních rovnic (pro neznámé $U_1 = U(0,125; 0,125)$, $U_2 = U(0,25; 0,125)$, $U_3 = U(0,375; 0,125)$, $U_4 = U(0,5; 0,125)$, $U_5 = U(0,625; 0,125)$, $U_6 = U(0,75; 0,125)$, $U_7 = U(0,875; 0,125)$) tvaru

$$(3.2.10) \quad 64 \times \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & & 0 \\ & -1 & 2 & -1 & & & \\ & & -1 & 2 & -1 & & \\ & & & -1 & 2 & -1 & \\ & & & & -1 & 2 & -1 \\ 0 & & & & & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \\ U_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,015625 \\ 0,062500 \\ 0,140625 \\ 0,250000 \\ 0,390625 \\ 0,562500 \\ 0,765625 \end{bmatrix}.$$

Výsledky (na 6 D) získané řešením obou soustav (3.2.9) a (3.2.10), včetně hodnot přesného řešení u ve vnitřních uzlech užitých sítí, jsou uvedeny v tab. 2. Snadno zjistíme, že v uzlech hrubší sítě platí

$$\max_i |u(x_i) - U_i| \doteq 1,3 \cdot 10^{-3}$$

x_i	$u(x_i)$	$U_i = U(x_i; 0, 25)$	$U_i = U(x_i; 0, 125)$
0,125	0,010 396		0,010 254
0,25	0,020 508	0,019 531	0,020 263
0,375	0,029 602		0,029 297
0,5	0,036 458	0,035 156	0,036 133
0,625	0,039 368		0,039 062
0,75	0,036 133	0,035 156	0,035 889
0,875	0,024 068		0,023 926

Tab. 2. Hodnoty přesného a přibližného řešení úlohy (3.2.7).

a v uzlech jemnější síť platí

$$\max_i |u(x_i) - U_i| \doteq 3,25 \cdot 10^{-4}.$$

3.2.3. Chyba metody. Zůstaňme u úlohy (3.2.1). Metodou konečných diferencí jsme tuto úlohu nahradili soustavou diferenčních rovnic (3.2.4). Sloupcový vektor neznámých hodnot přesného řešení u ve vnitřních uzlech sítě označíme

$$\mathbf{u}_h = [u(x_1), u(x_2), \dots, u(x_{N-1})]^T.$$

Dále označíme

$$\mathbf{d}_h = [d(x_1, h), d(x_2, h), \dots, d(x_{N-1}, h)]^T$$

sloupcový vektor, jehož složky jsou *chyby aproximace* diferenciální rovnice v každém vnitřním uzlu. Jsou to nepřesnosti, s nimiž přesné řešení u splňuje diferenční rovnice (3.2.4). Pro \mathbf{d}_h se také užívá termín *vektor diskretizační chyby*. Soustavu podmínek (3.2.3) můžeme zapsat ve tvaru (neboť $u''(x_i) = h^{-2}[u(x_i - h) - 2u(x_i) + u(x_i + h)] + d(x_i, h)$)

$$(3.2.11) \quad \mathbf{A}_h \mathbf{u}_h = \mathbf{F}_h + \mathbf{d}_h,$$

kde matice \mathbf{A}_h a vektor \mathbf{F}_h jsou dány v (3.2.5).

Chybou metody nebo též *chybou přibližného řešení* v uzlu x_i je číslo $e_{h,i} = u(x_i) - U_i$. Vektor

$$\mathbf{e}_h = \mathbf{u}_h - \mathbf{U}_h$$

pak nazýváme *vektorem chyby metody* nebo *vektorem chyby přibližného řešení*. U každé přibližné metody je přirozený požadavek, aby bylo možné chybu metody libovolně zmenšovat. Proto nás zde zajímají podmínky, kdy pro $h \rightarrow 0$ bude $\mathbf{e}_h \rightarrow \mathbf{0}$.

Odečtením (3.2.11) a (3.2.6) dostaneme

$$(3.2.12) \quad \mathbf{A}_h \mathbf{e}_h = \mathbf{d}_h,$$

a tedy

$$(3.2.13) \quad \mathbf{e}_h = \mathbf{A}_h^{-1} \mathbf{d}_h.$$

Označíme-li

$$\|\mathbf{e}_h\| = \max_{1 \leq i \leq N-1} |e_{h,i}|$$

a $\|\mathbf{A}_h^{-1}\|$ je odpovídající řádková norma matice \mathbf{A}_h^{-1} ([24]), potom z (3.2.13) plyne nerovnost

$$\|\mathbf{e}_h\| \leq \|\mathbf{A}_h^{-1}\| \|\mathbf{d}_h\|.$$

Pokud je $\|\mathbf{A}_h^{-1}\| \leq K$ s konstantou K nezávislou na h , dostáváme *odhad vektoru chyby* ve tvaru

$$(3.2.14) \quad \|\mathbf{e}_h\| \leq K \|\mathbf{d}_h\|.$$

Určit konstantu K , resp. prokázat její existenci, nemusí být vždy jednoduchá záležitost. V naší konkrétní situaci lze nerovnost (3.2.14) jednoduše odvodit, když $q(x) > 0$ pro $x \in \langle 0, 1 \rangle$. Uvažujme tu složku vektoru chyby přibližného řešení $\mathbf{e}_h = [e_{h,1}, e_{h,2}, \dots, e_{h,N-1}]^T$, která má největší absolutní hodnotu. Nechť je to k -tá složka. Platí tedy

$$(3.2.15) \quad M = \max_{1 \leq i \leq N-1} |e_{h,i}| = |e_{h,k}| = \|\mathbf{e}_h\|.$$

Položíme-li pro účely této úvahy formálně $e_{h,0} = e_{h,N} = 0$, můžeme zřejmě i -tou rovnicí soustavy (3.2.12) zapsat jako

$$(3.2.16) \quad \begin{aligned} -e_{h,i-1} + (2 + h^2 q_i) e_{h,i} - e_{h,i+1} &= h^2 d(x_i, h), \\ i &= 0, 1, \dots, N. \end{aligned}$$

Odtud ihned máme

$$(3.2.17) \quad \begin{aligned} (2 + h^2 q_i) e_{h,i} &= e_{h,i-1} + e_{h,i+1} + h^2 d(x_i, h), \\ i &= 0, 1, \dots, N. \end{aligned}$$

Uvážíme-li, že pro všechny složky vektoru \mathbf{e}_h platí $|e_{h,i}| \leq M$, dostáváme

$$(3.2.18) \quad (2 + h^2 q_k) |e_{h,k}| \leq M + M + h^2 |d(x_k, h)|.$$

S přihlédnutím ke (3.2.15) odtud plyne (když $q_k > 0$)

$$(3.2.19) \quad \|\mathbf{e}_h\| = M \leq \frac{|d(x_k, h)|}{q_k} \leq \left(\max_{x \in \langle 0, 1 \rangle} \frac{1}{q(x)} \right) \|\mathbf{d}_h\|,$$

což je konkrétní podoba nerovnosti (3.2.14).

Pokud má přesné řešení u v intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ spojitou čtvrtou derivaci, platí (viz [37])

$$(3.2.20) \quad \left| u''(x_k) - \frac{u(x_k - h) - 2u(x_k) + u(x_k + h))}{h^2} \right| = |d(x_k, h)| \leq \frac{1}{12} h^2 \max_{x \in \langle 0, 1 \rangle} |u^{(4)}(x)|.$$

Z (3.2.19) a (3.2.20) tedy pro chybu metody dostáváme odhad

$$(3.2.21) \quad \|\mathbf{e}_h\| = \max_{1 \leq i \leq N-1} |u(x_i) - U_i| \leq \frac{1}{2} h^2 \max_{x \in \langle 0, 1 \rangle} \left| \frac{u^{(4)}(x)}{q(x)} \right|.$$

Protože pravá strana nerovnosti (3.2.20) je typu $O(h^2)^*$, říkáme, že *řád chyby aproximace* (resp. diskretizační chyby) je roven dvěma. Vzhledem k platnosti nerovnosti (3.2.21) je *řád chyby metody* (resp. chyby přibližného řešení) také 2. Dá se ukázat, že řád chyby metody zůstává roven dvěma i za poněkud obecnějšího předpokladu $q(x) \geq 0$ ([49]). Poznamenejme ještě, že ke spojitosti $u^{(4)}$ stačí, aby byly spojitě druhé derivace funkcí q a f z (3.2.1). Pro méně hladké koeficienty v rovnici (3.2.1) se řád chyby snižuje.

Hlavní výsledek tohoto odstavce je dán platností nerovnosti (3.2.14) resp. (3.2.19), kterou můžeme interpretovat takto: Je-li aproximace okrajové úlohy diferenční úlohou taková, že $\mathbf{d}_h \rightarrow \mathbf{0}$ pro $h \rightarrow 0$ (v našem případě zaručeno nerovností (3.2.20)) a je-li $\|\mathbf{A}_h^{-1}\| \leq K$, kde K nezávisí na h (v našem případě zaručeno tvarem matice \mathbf{A}_h a vlastnostmi funkce q), potom $\mathbf{e}_h \rightarrow \mathbf{0}$ a přibližné řešení \mathbf{U}_h konverguje k přesnému řešení u dané úlohy. Navíc jsme v našem případě ukázali, že pro úlohu s dostatečně hladkými koeficienty q a f konverguje $\|\mathbf{e}_h\|$ k nule (při $h \rightarrow 0$) alespoň tak rychle jako h^2 .

Za dodatečných předpokladů o hladkosti přesného řešení u lze v případě úlohy (3.2.1) odvodit *asymptotické vyjádření chyby metody* (pro $h \rightarrow 0$) ve tvaru

$$(3.2.22) \quad e_{h,i} = c_i h^2 + O(h^3),$$

kde c_i je konstanta nezávislá na h (viz např. [20], [30]). Existence asymptotického vyjádření chyby umožňuje zpřesňovat přibližné řešení Richardsonovou extrapolací či odhadnout jeho chybu metodou polovičního kroku ([37], [20], [21]).

*) Říkáme, že funkce $g(h)$ je pro $h \rightarrow 0$ typu $O(h^\alpha)$ nebo velikosti $O(h^\alpha)$, a píšeme $g(h) = O(h^\alpha)$, když pro dostatečně malá h platí $|g(h)| \leq Ch^\alpha$, kde C je konstanta nezávislá na h .

3.3. Metoda konečných diferencí pro obecnou okrajovou úlohu V odst. 3.2 jsme na modelové úloze vyložili princip metody konečných diferencí. Diskretizace měla tři fáze:

1. Oblast (interval) spojitě změny argumentu byla nahrazena diskrétní množinou — sítí uzlů.

2. Funkce v diferenciální rovnici byly nahrazeny funkcemi diskrétního argumentu — síťovými funkcemi.

3. Derivace v uzlech sítě byly nahrazeny poměrnými diferencemi a byla sestavena soustava diferenčních rovnic pro neznámé hodnoty přibližného řešení. Počet rovnic byl dán počtem uzlů sítě, v nichž jsme aproximovali derivaci.

3.3.1. Aproximace derivací diferenčními podíly. Má-li funkce $u = u(x)$ definovaná na intervalu (a, b) v bodě $x \in (a, b)$ derivaci a leží-li $x + h$, $h > 0$, v (a, b) , platí

$$(3.3.1) \quad u'(x) = \frac{u(x+h) - u(x)}{h} + d(x, h),$$

kde $d(x, h) \rightarrow 0$ při $h \rightarrow 0$. Jsou-li tudíž $x_i = x$, $x_{i+1} = x + h$ dva uzly sítě na (a, b) a označíme-li ještě $u_i = u(x_i)$, $u_{i+1} = u(x_{i+1})$, můžeme derivaci $u'(x_i)$ aproximovat pomocí vztahu

$$(3.3.2) \quad u'(x_i) \approx \frac{1}{h}(u_{i+1} - u_i).$$

Chyba aproximace je přitom $u'(x_i) - (1/h)(u_{i+1} - u_i) = d(x_i, h)$.

Máme-li o funkci u podrobnější informace, můžeme $d(x, h)$ charakterizovat přesněji. Víme-li např., že na (a, b) je u' spojitá a že pro všechna $x \in (a, b)$ existuje derivace $u''(x)$, pak se pomocí Taylorovy věty dá ukázat [37], že existuje číslo $\xi \in (x, x+h)$ takové, že

$$(3.3.3) \quad d(x, h) = -\frac{1}{2}hu''(\xi).$$

Je-li tedy u'' na (a, b) omezená, pak $d(x, h) = O(h)$ a řád chyby aproximace je roven jedné.

Má-li funkce u spojitě derivace až do čtvrtého řádu, můžeme opět pomocí Taylorova rozvoje odvodit, že

$$(3.3.4) \quad u''(x) - \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2} = -\frac{1}{12}h^2u^{(4)}(\xi),$$

$$\xi \in (x-h, x+h).$$

Chyba diferenční aproximace druhé derivace, kterou jsme použili v odst. 3.2, je proto

$$(3.3.5) \quad d(x, h) = -\frac{1}{12}h^2 u^{(4)}(\xi), \quad \xi = \xi(x),$$

a jde o aproximaci druhého řádu.

Aproximacemi derivací jsme se dosti podrobně zabývali v [37]. Ukázali jsme tam, že pomocí hodnot funkce u ve více bodech můžeme získat aproximace vyššího řádu přesnosti. Upozornili jsme také čtenáře na skutečnost, že numerický výpočet derivace z funkčních hodnot je špatně podmíněná úloha. V souvislosti s tím je třeba si uvědomit, že v metodě konečných diferencí se aproximace derivací používají ve zcela jiné situaci. Zde totiž nepočítáme přibližné hodnoty derivací ze zadaných funkčních hodnot. Aproximace derivací diferenčními podíly tu používáme naopak k sestavení rovnic, z nichž chceme přibližné funkční hodnoty stanovit. Obecně proto nejde o špatně podmíněné úlohy.

V tab. 3 uvádíme přehled některých často používaných vztahů pro aproximaci první a druhé derivace na ekvidistantní síti. U každé aproximace udáváme odhad chyby aproximace a uvádíme předpoklad, za něhož lze takový odhad odvodit. Zápisem $u \in C^n$ přitom máme na mysli, že n -tá derivace funkce u je spojitá v jistém uzavřeném intervalu, který obsahuje všechny uzly sítě vystupující v použitém vzorci. Není-li tento předpoklad splněn, řád aproximace se obecně snižuje. Uvádíme také schematický zápis aproximací pomocí tzv. *výpočetní šablony* znázorňující uzly sítě použité v daném vzorci a koeficienty u funkčních hodnot v těchto uzlech. V tabulce užíváme označení $u_i = u(x_i)$, $u_{i+1} = u(x_i + h)$ atd.

3.3.2. Diskretizace úlohy s derivací v okrajové podmínce. Je-li na některém z konců intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ zadána Neumannova nebo Newtonova okrajová podmínka, musíme postup z odst. 3.2.1 poněkud modifikovat, neboť neznáme hodnotu $u(0)$ nebo $u(1)$. V takovém případě musíme sestavit také diferenční aproximaci příslušné okrajové podmínky a připojit ji k soustavě diferenčních rovnic, jež ve vnitřních uzlech aproximují diferenciální rovnici. Ukážeme tři takové možné aproximace; pro konkrétnost budeme předpokládat, že máme při $q(x) \geq 0$ řešit úlohu

$$(3.3.6) \quad \begin{aligned} -u'' + q(x)u &= f(x), \quad x \in (0, 1), \\ \alpha_0 u(0) - \beta_0 u'(0) &= g_0, \quad u(1) = g_1, \quad \beta_0 > 0, \end{aligned}$$

jejíž řešitelnost (v klasickém smyslu) je zaručena (věta 1.2.6).

Stejně jako v odst. 3.2.1 zvolíme rovnoměrnou síť

$$\bar{S}_h = \{x_i = ih, i = 0, 1, \dots, N\}, Nh = 1.$$

Ve vnitřních uzlech sítě aproximujeme diferenciální rovnici (3.3.6) diferenčními rovnicemi

$$(3.3.7) \quad -\frac{1}{h^2}(U_{i-1} - 2U_i + U_{i+1}) + q(x_i)U_i = f(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, N-1.$$

	Derivace	Aproximace	Odhad chyby	Schematický zápis
1	$u'(x_i)$	$\frac{1}{h}(u_{i+1} - u_i)$	$\frac{1}{2}h \max_{\langle x_i, x_{i+1} \rangle} u''(x) , u \in C^2$	$\frac{1}{h} \left\{ \begin{array}{c} (-1) \\ i \end{array} \text{---} \begin{array}{c} 1 \\ i+1 \end{array} \right\}$
2	$u'(x_i)$	$\frac{1}{h}(u_i - u_{i-1})$	$\frac{1}{2}h \max_{\langle x_{i-1}, x_i \rangle} u''(x) , u \in C^2$	$\frac{1}{h} \left\{ \begin{array}{c} (-1) \\ i-1 \end{array} \text{---} \begin{array}{c} 1 \\ i \end{array} \right\}$
3	$u'(x_i)$	$\frac{1}{2h}(u_{i+1} - u_{i-1})$	$\frac{1}{6}h^2 \max_{\langle x_{i-1}, x_{i+1} \rangle} u^{(3)}(x) , u \in C^3$	$\frac{1}{2h} \left\{ \begin{array}{c} (-1) \\ i-1 \end{array} \text{---} \bullet \text{---} \begin{array}{c} 1 \\ i+1 \end{array} \right\}$
4	$u'(x_i)$	$\frac{1}{2h}(-u_{i+2} + 4u_{i+1} - 3u_i)$	$\frac{1}{3}h^2 \max_{\langle x_i, x_{i+2} \rangle} u^{(3)}(x) , u \in C^3$	$\frac{1}{2h} \left\{ \begin{array}{c} (-3) \\ i \end{array} \text{---} \begin{array}{c} 4 \\ i+1 \end{array} \text{---} \begin{array}{c} (-1) \\ i+2 \end{array} \right\}$
5	$u'(x_i)$	$\frac{1}{2h}(3u_i - 4u_{i-1} + u_{i-2})$	$\frac{1}{3}h^2 \max_{\langle x_{i-2}, x_i \rangle} u^{(3)}(x) , u \in C^3$	$\frac{1}{2h} \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ i-2 \end{array} \text{---} \begin{array}{c} -4 \\ i-1 \end{array} \text{---} \begin{array}{c} 3 \\ i \end{array} \right\}$
6	$u''(x_i)$	$\frac{1}{h^2}(u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1})$	$\frac{1}{12}h^2 \max_{\langle x_{i-1}, x_{i+1} \rangle} u^{(4)}(x) , u \in C^4$	$\frac{1}{h^2} \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ i-1 \end{array} \text{---} \begin{array}{c} -2 \\ i \end{array} \text{---} \begin{array}{c} 1 \\ i+1 \end{array} \right\}$
7	$u''(x_i)$	$\frac{1}{12h^2}(-u_{i-2} + 16u_{i-1} - 30u_i + 16u_{i+1} - u_{i+2})$	$0(h^4), u \in C^6$	$\frac{1}{12h^2} \left\{ \begin{array}{c} (-1) \\ i-2 \end{array} \text{---} \begin{array}{c} 16 \\ i-1 \end{array} \text{---} \begin{array}{c} -30 \\ i \end{array} \text{---} \begin{array}{c} 16 \\ i+1 \end{array} \text{---} \begin{array}{c} (-1) \\ i+2 \end{array} \right\}$

Tab. 3. Aproximace derivací v uzlech rovnoměrné sítě.

V těchto rovnicích vystupují neznámé $U_0, U_1, \dots, U_{N-1}, U_N$. Abychom dostali stejný počet rovnic jako neznámých, musíme tedy (na základě okrajových podmínek) k získaným $N - 1$ rovnicím ještě 2 rovnice připojit. Jednu z nich dostaneme z Dirichletovy okrajové podmínky v bodě $x = 1$ tak, že položíme $U_N = g_1$. Levou okrajovou podmínku (v bodě $x = 0$) můžeme zužítkovat různými způsoby.

Aproximujeme-li $u'(0)$ podle (3.3.2), dojdeme k diferenční rovnici

$$(3.3.8) \quad \alpha_0 U_0 - \beta_0 \frac{U_1 - U_0}{h} = g_0 \quad (\beta_0 \neq 0),$$

kteřou klasické řešení splňuje s chybou velikosti $O(h)$. Rovnici (3.3.8) vynásobíme číslem $1/(h\beta_0)$ a upravíme na tvar

$$(3.3.9) \quad \frac{1}{h^2} \left[\left(1 + \frac{\alpha_0}{\beta_0} h \right) U_0 - U_1 \right] = \frac{g_0}{h\beta_0};$$

tuto úpravu děláme proto, aby výsledná matice soustavy síťových rovnic byla symetrická. Přidáme-li nyní rovnici (3.3.9) k již získaným diferenčním rovnicím (3.3.7) a dosadíme-li g_1 za U_N , dostaneme opět soustavu lineárních algebraických rovnic $\mathbf{A}_h \mathbf{U}_h = \mathbf{F}_h$ se symetrickou třídiagonální maticí, která se od soustavy (3.2.6) liší, neboť nyní máme

$$(3.3.10) \quad \mathbf{U}_h = [U_0, U_1, \dots, U_{N-1}]^T,$$

$$\mathbf{F}_h = [(h\beta_0)^{-1}g_0, f_1, f_2, \dots, f_{N-2}, f_{N-1} + h^{-2}g_1]^T,$$

$$\mathbf{A}_h = h^{-2} \begin{bmatrix} 1 + \beta_0^{-1}\alpha_0 h & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 + h^2 q_1 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 + h^2 q_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 + h^2 q_{N-1} \end{bmatrix}.$$

Matice \mathbf{A}_h je řádu N a lze dokázat, že za předpokladů věty 1.2.6 je regulární. Přibližné řešení lze proto jednoznačně stanovit a dá se ukázat ([2], [55]), že jeho chyba je velikosti $O(h)$.

Tato skutečnost, tj. snížení řádu chyby metody oproti odst. 3.2.3, čtenáře možná překvapí, neboť síťová rovnice pro všechny uzly s výjimkou x_0 aproximuje diferenciální rovnici s diskretizační chybou $O(h^2)$. Přesto však okolnost, že jsme se v jediné rovnici (3.3.8) dopustili diskretizační chyby velikosti $O(h)$, ovlivní velikost chyby metody nejen v blízkosti bodu x_0 , ale ve všech bodech sítě. Jde tu o jev, který je pro užití diferenční metody typický a ukazuje, že chceme-li využít přesnosti, s níž jsme aproximovali diferenciální rovnici samotnou, musíme stejně přesně aproximovat i okrajové podmínky.

Bezprostřední možnost přesnější náhrady hodnoty derivace v okrajové podmínce spočívá v užití aproximací uvedených ve čtvrtém a pátém řádku tab. 3. Tyto aproximace mají pro $u \in C^3$ diskretizační chybu $O(h^2)$. Vzniklá soustava diferenčních rovnic však

již není třídiagonální, není symetrická a navíc se při jejím řešení standardními metodami z odst. 3.5 mohou vyskytnout numerické problémy. Proto tento postup nedoporučujeme.

Třetí možností aproximace $u'(0)$ v okrajové podmínce úlohy (3.3.6) je využití vzorce ve třetím řádku tab. 3. Volíme

$$u'(0) \approx \frac{1}{2h} [u(x_1) - u(x_{-1})],$$

kde $x_{-1} = -h$. Chyba aproximace je druhého řádu. Okrajovou podmínku $\alpha_0 u(0) - \beta_0 u'(0) = g_0$ tak nahradíme diferenční rovnicí

$$(3.3.11) \quad \alpha_0 U_0 - \beta_0 \frac{U_1 - U_{-1}}{2h} = g_0 \quad (\beta_0 \neq 0).$$

Máme zde však oproti (3.3.8) navíc další neznámou U_{-1} a potřebujeme proto připojit ještě jednu rovnici. Nejjednodušeji to provedeme tak, že žádáme platnost rovnice (3.3.7) i pro hraniční uzel x_0 , tj. platnost rovnice

$$(3.3.12) \quad -\frac{1}{h^2}(U_{-1} - 2U_0 + U_1) + q_0 U_0 = f_0.$$

(Jde vlastně o aproximaci diferenciální rovnice v bodě $x_0 = 0$). Fiktivní hodnotu U_{-1} , která nemá význam aproximace přesného řešení naší okrajové úlohy (neboť toto řešení uvažujeme pouze na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$), nyní z rovnic (3.3.11) a (3.3.12) vyloučíme. Nakonec dospějeme k diferenční rovnici

$$(3.3.13) \quad (\alpha_0 + \frac{1}{2}\beta_0 h q_0) U_0 - \beta_0 \frac{U_1 - U_0}{h} = g_0 + \frac{1}{2}\beta_0 h f_0,$$

která aproximuje okrajovou podmínku v bodě $x_0 = 0$ a kterou dostatečně hladké přesné řešení naší okrajové úlohy splňuje s chybou řádové velikosti $O(h^2)$. Další postup je podobný jako u aproximace (3.3.8). Upravíme rovnici (3.3.13) na tvar

$$(3.3.14) \quad \frac{1}{h^2} \left[\left(1 + \frac{\alpha_0 h}{\beta_0} + \frac{1}{2} h^2 q_0 \right) U_0 - U_1 \right] = \frac{g_0}{h\beta_0} + \frac{1}{2} f_0$$

a připojíme ji k diferenčním rovnicím (3.3.7). Výsledná soustava $\mathbf{A}_h \mathbf{U}_h = \mathbf{F}_h$ se od soustavy určené vztahy (3.3.10) liší pouze tím, že v první složce vektoru \mathbf{F}_h je nyní navíc člen $\frac{1}{2}f_0$ a v prvku matice \mathbf{A}_h v pozici $(1, 1)$ je navíc člen $\frac{1}{2}h^2 q_0$. Dá se ukázat ([2], [55]), že chyba přibližného řešení je v tomto případě velikosti $O(h^2)$.

3.3.3. Příklad. Ukážeme, že aproximace okrajové podmínky podle (3.3.8) skutečně může způsobit, že chyba přibližného řešení je řádu h , přestože diferenciální rovnici samotnou aproximujeme dokonce přesně.

Mějme okrajovou úlohu

$$\begin{aligned} u'' &= 2, & x \in (0, 1), \\ u(0) - u'(0) &= 0, & u(1) = 1, \end{aligned}$$

jejímž řešením je zřejmě funkce $u(x) = x^2$. Aproximujme tuto úlohu na rovnoměrné síti o kroku $h = 1/N$ postupem z odst. 3.3.2 a jako aproximaci okrajové podmínky volme (3.3.8). Dostaneme tak soustavu diferenčních rovnic pro přibližné řešení

$$\begin{aligned} (3.3.15) \quad U_0 - \frac{U_1 - U_0}{h} &= 0, \\ \frac{1}{h^2}(U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1}) &= 2, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \\ U_N &= 1. \end{aligned}$$

Chyba přibližného řešení je $e_i = u_i - U_i = x_i^2 - U_i$, $i = 0, 1, \dots, N$; přitom $x_i = ih$, $i = 0, 1, \dots, N$. Snadno se ověří, že přesné řešení $u_i = x_i^2$ splňuje rovnice

$$\begin{aligned} (3.3.16) \quad u_0 - \frac{u_1 - u_0}{h} &= -h, \\ \frac{1}{h^2}(u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}) &= 2, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \\ u_N &= 1. \end{aligned}$$

Odečtením rovnic (3.3.16) a odpovídajících rovnic (3.3.15) dostaneme pro chybu e_i rovnice (po drobné úpravě)

$$\begin{aligned} (3.3.17) \quad (1+h)e_0 - e_1 &= -h^2, \\ e_{i+1} - 2e_i + e_{i-1} &= 0, \quad i = 0, 1, \dots, N-1, \\ e_N &= 0. \end{aligned}$$

Lze se snadno přesvědčit (uvažte, že $N = 1/h$; viz též [24]), že řešením této diferenční okrajové úlohy je $e_i = \frac{1}{2}h(ih - 1) = \frac{1}{2}h(x_i - 1)$. V libovolném pevném bodě $x (= x_i)$ intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ je tedy chyba přibližného řešení veličina řádové velikosti $O(h)$.

3.3.4. Diskretizace Neumannovy úlohy. Metodou konečných diferencí budeme aproximovat Neumannovu úlohu

$$\begin{aligned} (3.3.18) \quad -u'' &= f(x), & x \in (0, 1), \\ -u'(0) &= g_0, & u'(1) = g_1. \end{aligned}$$

Již ve větě 1.2.6 jsme uvedli, že tato úloha je řešitelná pouze tehdy, je-li splněna podmínka (1.2.15). Jednoznačnost řešení však již zaručit nelze. Zajímá nás, jak se tyto skutečnosti projeví v odpovídající síťové úloze.

Diferenciální rovnici v úloze (3.3.18) aproximujeme stejně jako v odst. 3.2.1 a okrajové podmínky aproximujeme postupem používajícím fiktivní hodnoty U_{-1} a U_{N+1} . Výsledkem diskretizace je (ověřte!) soustava rovnic, z nichž první má tvar (3.3.14) s $\alpha_0 = 0$, $\beta_0 = 1$, $q_0 = 0$, dalších $N - 1$ rovnic má tvar (3.3.7) s $q_i = 0$, a konečně poslední rovnici získáme tak, že z diferenční rovnice

$$-\frac{1}{h^2}(U_{N-1} - 2U_N + U_{N+1}) = f(x_N)$$

vyločíme pomocí aproximace okrajové podmínky

$$\frac{U_{N+1} - U_{N-1}}{2h} = g_1$$

fiktivní hodnotu U_{N+1} a výsledný vztah upravíme podobně jako v odst. 3.3.2.

Dostaneme tak soustavu lineárních algebraických rovnic (jejíž matice je symetrická, ale není pozitivně definitní)

$$(3.3.19) \quad h^{-2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_0 \\ U_1 \\ \vdots \\ U_{N-1} \\ U_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}f_0 + h^{-1}g_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_{N-1} \\ \frac{1}{2}f_N + h^{-1}g_1 \end{bmatrix}.$$

Označíme-li \mathbf{r}_i , $i = 0, 1, \dots, N$, řádkové vektory matice soustavy (3.3.19), snadno zjistíme, že platí

$$\mathbf{r}_0 + \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \dots + \mathbf{r}_{N-1} + \mathbf{r}_N = \mathbf{0},$$

tj. řádky jsou lineárně závislé a matice soustavy je tedy singulární.

Aby soustava (3.3.19) byla řešitelná (byť nejednoznačně), musí se anulovat stejná lineární kombinace pravých stran. To vede k podmínce

$$(3.3.20) \quad \frac{1}{2}f_0 + f_1 + f_2 + \dots + f_{N-1} + \frac{1}{2}f_N + h^{-1}g_0 + h^{-1}g_1 = 0.$$

Podmínka (3.3.20) není ale nic jiného než diskrétní obdoba podmínky řešitelnosti (1.2.15) z věty 1.2.6

$$(3.3.21) \quad \int_0^1 f(x) dx + g_0 + g_1 = 0,$$

kterou dostaneme integrováním rovnice (3.3.18) přes interval $\langle 0, 1 \rangle$. Podmínku (3.3.20) můžeme totiž také dostat aproximováním integrálu v (3.3.21) lichoběžníkovým vzorcem (který je aproximací stejného řádu jako sestavená diskrétní úloha (3.3.19), viz [37]).

Hodnost matice soustavy (3.3.19) je rovna N . Plyne to z toho, že např. prvních N řádků $\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{N-1}$ je již lineárně nezávislých. Řešení soustavy (3.3.19) proto hledáme např. tak, že zvolíme pevně hodnotu jedné neznámé, třeba U_0 , dosadíme a řešíme upravenou soustavu pro neznámé U_1, U_2, \dots, U_N .

3.3.5. Diskretizace standardní okrajové úlohy. Uvažujme nyní standardní okrajovou úloh z odst. 1.2.4

$$(3.3.22) \quad \begin{aligned} &-(p(x)u')' + q(x)u = f(x), \quad x \in (0, 1), \\ &\alpha_0 u(0) - \beta_0 p(0)u'(0) = g_0, \\ &\alpha_1 u(1) + \beta_1 p(1)u'(1) = g_1. \end{aligned}$$

Předpokládáme, že jsou splněny předpoklady věty 1.2.6 a chceme provést diskretizaci úlohy (3.3.22) na rovnoměrné síti s krokem $h = 1/N$ postupem popsáním v odst. 3.3.2 či v odst. 3.2.1 (když $\beta_0 = 0$ a $\beta_1 = 0$).

Diskretizaci diferenciální rovnice (3.3.22) se zdá nejpřirozenější provést tak, že provedeme v rovnici naznačené derivování, čímž dostaneme

$$(3.3.23) \quad -p(x)u'' - p'(x)u' + q(x)u = f(x), \quad x \in (0, 1),$$

a pak aproximujeme u'' (již tradičně) podle (3.3.4) (6. řádek v tab. 3) a u' nahradíme centrální diferencí (3. řádek v tab. 3). Diskretizační chyba tak bude velikosti $O(h^2)$.

Tímto postupem přejdeme od diferenciální rovnice (3.3.23) k diferenční rovnici (značíme $p_i = p(x_i)$, $p'_i = p'(x_i)$, $q_i = q(x_i)$, $f_i = f(x_i)$)

$$(3.3.24) \quad p_i \frac{U_{i-1} - 2U_i + U_{i+1}}{h^2} - p'_i \frac{U_{i+1} - U_{i-1}}{2h} + q_i U_i = f_i,$$

kterou upravíme na tvar

$$(3.3.25) \quad -(p_i - \frac{1}{2}hp'_i)U_{i-1} + (2p_i + h^2q_i)U_i - (p_i + \frac{1}{2}hp'_i)U_{i+1} = h^2f_i.$$

Připojením diferenčních rovnic získaných aproximací okrajových podmínek (odst. 3.3.2) obdržíme soustavu síťových rovnic, o níž se pro dostatečně malá h dá dokázat (s výjimkou případu $\alpha_0 = \alpha_1 = 0$, $q(x) \equiv 0$), že má právě jedno řešení. Matice soustavy bude třídiagonální, ale obecně nebude symetrická. K tomu by totiž muselo pro $i = 1, 2, \dots, N-1$ platit

$$p_i + \frac{1}{2}hp'_i = p_{i+1} - \frac{1}{2}hp'_{i+1},$$

což nemusí být (a většinou také nebude) splněno. Získaná diferenční úloha tak neodráží podstatnou vlastnost diskretizované diferenciální úlohy, totiž samoadjungovanost. Uvedený postup proto nelze doporučit.

Symetrickou diskretizaci s chybou řádové velikosti $O(h^2)$ lze metodou konečných diferencí získat tak, že položíme $pu' = v$ a užijeme aproximaci $v'(x_i) \approx [v(x_i + \frac{1}{2}h) - v(x_i - \frac{1}{2}h)]/h$ ([55]). Podrobnosti tohoto postupu neuvádíme, protože ke stejnému výsledku lze dospět užitím metody integrálních identit (odst. 3.4), která navíc do diskretizace zcela přirozeným způsobem zahrne i okrajové podmínky a umožňuje uspokojivě diskretizovat i úlohy s nespojitými koeficienty.

3.3.6. Nelineární úloha s Dirichletovými podmínkami. Popíšeme diskretizaci okrajové úlohy pro jednoduchou nelineární diferenciální rovnici

$$(3.3.26) \quad \begin{aligned} u'' &= f(x, u), \quad x \in (a, b), \\ u(a) &= g_0, \quad u(b) = g_1. \end{aligned}$$

(Úloha má při dostatečně hladké pravé straně $f = f(x, y)$ a za předpokladu, že platí $f_y(x, y) \geq 0$, právě jedno řešení [49].)

Zvolíme rovnoměrnou síť s krokem $h = (b - a)/N$

$$\mathcal{S}_h = \{x_i = a + ih, i = 1, 2, \dots, N-1\}, \quad x_0 = a, \quad x_N = b.$$

Aproximujeme-li druhou derivaci funkce u obvyklým způsobem, dostaneme (obecně nelineární) diferenční rovnice

$$(3.3.27) \quad \frac{1}{h^2}(U_{i-1} - 2U_i + U_{i+1}) = f(x_i, U_i), \quad i = 1, 2, \dots, N-1,$$

$$U_0 = g_0, \quad U_N = g_1,$$

jejichž diskretizační chyba je pro dostatečně hladké funkce velikosti $O(h^2)$ stejně jako v lineárním případě. Dirichletovy okrajové podmínky zužitkujeme obvyklým způsobem. Po jednoduché úpravě pak dospějeme k nelineární soustavě $N-1$ rovnic

$$(3.3.28) \quad \mathbf{B}\mathbf{U}_h = -h^2\mathbf{F}_h(\mathbf{U}_h),$$

kde

$$(3.3.29) \quad \mathbf{U}_h = [U_1, U_2, \dots, U_{N-1}]^T,$$

$$\mathbf{F}_h(\mathbf{U}_h) = [f(x_1, U_1) - h^{-2}g_0, f(x_2, U_2), \dots, f(x_{N-2}, U_{N-2}), f(x_{N-1}, U_{N-1}) - h^{-2}g_1]^T,$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Soustavu (3.3.28) budeme řešit Newtonovou metodou [24]. Upravíme ji proto nejprve na tvar

$$(3.3.30) \quad \Phi(\mathbf{U}_h) \equiv \mathbf{B}\mathbf{U}_h + h^2\mathbf{F}_h(\mathbf{U}_h) = \mathbf{0}.$$

Iterace Newtonovy metody jsou pak dány předpisem

$$(3.3.31) \quad \mathbf{U}_h^{(k+1)} = \mathbf{U}_h^{(k)} - [\Phi'(\mathbf{U}_h^{(k)})]^{-1}\Phi(\mathbf{U}_h^{(k)}), \quad k = 0, 1, \dots,$$

přičemž $\mathbf{U}_h^{(0)}$ je vhodně zvolené počáteční přiblížení. Pro Jacobiovu matici $\Phi'(\mathbf{U}_h)$ platí jednoduchý vzorec

$$(3.3.32) \quad \Phi'(\mathbf{U}_h) = \mathbf{B} + h^2\mathbf{F}'_h(\mathbf{U}_h),$$

kde $\mathbf{F}'_h(\mathbf{U}_h)$ je diagonální matice,

$$\mathbf{F}'_h(\mathbf{U}_h) = \text{diag}[f_u(x_1, U_1), f_u(x_2, U_2), \dots, f_u(x_{N-1}, U_{N-1})].$$

Zde

$$f_u(x_i, U_i) = \left. \frac{\partial f(x_i, u)}{\partial u} \right|_{u=U_i}.$$

Jeden krok Newtonovy metody (3.3.31) tedy spočívá v řešení soustavy $N - 1$ rovnic pro $N - 1$ neznámých

$$(3.3.33) \quad \Phi'(\mathbf{U}_h^{(k)})[\mathbf{U}_h^{(k+1)} - \mathbf{U}_h^{(k)}] = -\Phi(\mathbf{U}_h^{(k)})$$

se symetrickou třídiagonální maticí $\Phi'(\mathbf{U}_h^{(k)})$. Přičtením získané korekce $\mathbf{U}_h^{(k+1)} - \mathbf{U}_h^{(k)}$ k stávající aproximaci $\mathbf{U}_h^{(k)}$ obdržíme novou aproximaci $\mathbf{U}_h^{(k+1)}$ přibližného řešení a postup opakujeme. Podmínky jednoznačné řešitelnosti úlohy (3.3.26) zaručují, že soustava (3.3.33) má právě jedno řešení. Matice Φ' je totiž pozitivně definitní.

K diskretizaci okrajové úlohy (3.3.26) se místo (3.3.27) často užívají diferenční rovnice

$$(3.3.34) \quad \frac{1}{h^2}(U_{i-1} - 2U_i + U_{i+1}) = \frac{1}{12}[f(x_{i-1}, U_{i-1}) + 10f(x_i, U_i) + f(x_{i+1}, U_{i+1})],$$

kteřé pro dostatečně hladkou funkci f dávají podstatně přesnější výsledky (diskretizační chyba je velikosti $O(h^4)$). Komplikuje se ovšem poněkud struktura Jacobiovy matice $\Phi'(\mathbf{U}_h)$ ve (3.3.32) ($\mathbf{F}'_h(\mathbf{U}_h)$ zde již není diagonální). Diferenční metodě založené na (3.3.34) se říká *Numerovova metoda*.

Numerické řešení Dirichletovy okrajové úlohy pro obecnou nelineární rovnici druhého řádu $u'' = f(x, u, u')$ je popsáno v [55]. Řešením nelineárních okrajových úloh se zabývá rovněž monografie [30].

3.3.7. Volba počátečního přiblížení. V mnoha numerických metodách pro řešení okrajových úloh může volba dobré počáteční aproximace pro nějaký iterační proces podstatně ovlivnit celkovou efektivitu použitého algoritmu. Týká se to také diferenčních metod pro řešení nelineárních okrajových úloh. Za „dobrou“ počáteční aproximaci tu považujeme takovou funkci, která „má alespoň zhruba stejný průběh jako přesné řešení“.

Jednou z možností, jak takovou aproximaci získat, je použít diferenční metodu na několika postupně stále jemnějších sítích; přibližné řešení vypočítané na hrubé síti slouží ke stanovení počátečního přiblížení pro iterační proces na jemnější síti. Tato myšlenka se užívá v tzv. *metodách více sítí* pro řešení eliptických okrajových úloh.

Můžeme také použít *metodu homotopie*, v níž se rovnice $u'' = f(x, u)$ v úloze (3.3.26) nahradí rovnicí $u'' = f(x, u, \lambda)$ takovou, že hodnotě parametru $\lambda = 1$ odpovídá původní rovnice, kdežto pro $\lambda = 0$ umíme vzniklou okrajovou úlohu snadno řešit (je např. lineární). Danou numerickou metodou pak postupně řešíme posloupnost okrajových úloh pro rovnice $u_m'' = f(x, u_m, \lambda_m)$, kde $0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_M = 1$, a přitom přibližné řešení aproximující u_m užíváme jako počáteční přiblížení v numerické metodě pro přibližný výpočet u_{m+1} .

Je-li např. diferenciální rovnice (3.3.26) tvaru $u'' = Au + f(u)$, zavedeme parametr λ vztahem $u'' = Au + \lambda f(u)$. Pak zvolíme dostatečně velké M , položíme např. $\lambda_m = m/M$, $m = 0, 1, \dots, M$, a postupně řešíme okrajové úlohy pro rovnice $u'' = Au$, $u'' = Au + (1/M)f(u), \dots, u'' = Au + f(u)$.

3.4. Metoda integrálních identit V tomto odstavci popíšeme obecný a efektivní postup, kterým lze diskretizovat standardní okrajové úlohy pro lineární diferenciální rovnici druhého řádu v samoadjungovaném tvaru. Protože však se zmíněný postup diskretizace dá bez zásadních problémů aplikovat i na poněkud obecnější úlohy, budeme se rovnou zabývat okrajovou úlohou pro rovnici

$$(3.4.1) \quad -(p(x)u')' + \gamma(x)u' + q(x)u = f(x), \quad x \in (a, b),$$

s okrajovými podmínkami tvaru

$$(3.4.2) \quad \begin{aligned} \alpha_0 u(a) - \beta_0 p(a)u'(a) &= g_0, \\ \alpha_1 u(b) - \beta_1 p(b)u'(b) &= g_1. \end{aligned}$$

Budeme předpokládat, že funkce p , q , γ a f jsou omezené a po částech spojitě. Dále předpokládáme, že

$$(3.4.3) \quad p(x) > 0, \quad q(x) \geq 0, \quad x \in \langle a, b \rangle,$$

a že platí (1.2.14) (srov. s předpoklady věty 1.2.6; pro celý postup nejsou všechny předpoklady nezbytně nutné). V řadě úloh technické praxe koeficienty nebo pravá strana rovnice (3.4.1) skutečně mají na intervalu $\langle a, b \rangle$ konečný počet skoků. Na úlohy s nespojitostmi v koeficientu funkce p jsme čtenáře upozornili v odst. 1.2.7. a 1.2.8. Stejně jako tam budeme i zde požadovat, aby v bodech nespojitosti byly splněny přechodové podmínky (1.2.16), (1.2.17).

3.4.1. Princip metody. Diskretizaci úlohy (3.4.1), (3.4.2) provedeme postupem, který popisuje R.S. Varga v [53], a který budeme nazývat *metoda integrálních identit*. Na intervalu $\langle a, b \rangle$ nejprve zvolíme síť \mathcal{S} o $N + 1$ uzlech

$$(3.4.4) \quad a = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = b.$$

Síť \mathcal{S} může být zcela libovolná (nikoliv nutně rovnoměrná), požadujeme pouze, aby veškeré body nespojitosti funkcí p, q, γ a f (pokud existují) byly v uzlech sítě. Označíme $h_i = x_{i+1} - x_i, i = 0, 1, \dots, N - 1$; v případě ekvidistantní sítě se ovšem všechny tyto veličiny rovnají kroku sítě $h = (b - a)/N$. Středy intervalů $\langle x_i, x_{i+1} \rangle$ označíme $x_{i+1/2} = x_i + \frac{1}{2}h_i, i = 0, 1, \dots, N - 1$. Je-li y nějaká po částech spojitá funkce definovaná na $\langle a, b \rangle$, pak v těch bodech, ve kterých je y spojitá, používáme označení $y_i = y(x_i), y_{i+1/2} = y(x_i + \frac{1}{2}h_i)$. Označení $y(x_i+)$ a $y(x_i-)$ znamená limitu funkce y v bodě x_i zprava a zleva; je-li y v bodě x_i spojitá, je ovšem $y(x_i+) = y(x_i-) = y_i$.

Základní myšlenka metody integrálních identit spočívá v tom, že se nediskretizuje přímo rovnice (3.4.1), ale vychází se ze vztahů, které vzniknou integrováním této rovnice na jednotlivých podintervalech, na něž uzly sítě \mathcal{S} a středy intervalů $\langle x_i, x_{i+1} \rangle$ rozdělují interval $\langle a, b \rangle$. Uvažujme nejprve interval $\langle x_i, x_{i+1/2} \rangle$, kde $0 \leq i \leq N - 1$. Integrací rovnice (3.4.1) na tomto intervalu dostaneme rovnici

$$(3.4.5) \quad \begin{aligned} & -p_{i+1/2}u'_{i+1/2} + p(x_i+)u'(x_i+) + \int_{x_i}^{x_{i+1/2}} \gamma(x)u'(x) dx + \\ & + \int_{x_i}^{x_{i+1/2}} q(x)u(x) dx = \int_{x_i}^{x_{i+1/2}} f(x) dx. \end{aligned}$$

Na intervalu $\langle x_{i-1/2}, x_i \rangle$, kde $1 \leq i \leq N$, obdobně dostáváme

$$(3.4.6) \quad \begin{aligned} & -p(x_i-)u'(x_i-) + p_{i-1/2}u'_{i-1/2} + \int_{x_{i-1/2}}^{x_i} \gamma(x)u'(x) dx + \\ & + \int_{x_{i-1/2}}^{x_i} q(x)u(x) dx = \int_{x_{i-1/2}}^{x_i} f(x) dx \end{aligned}.$$

Je-li x_i vnitřní uzel sítě, $1 \leq i \leq N - 1$, pak pro něj můžeme psát jak rovnici (3.4.5), tak (3.4.6). Sečteme-li oba tyto vztahy a uvážíme-li, že v bodě x_i musí být splněna přechodová podmínka $p(x_i+)u'(x_i+) = p(x_i-)u'(x_i-)$ (odst. 1.2.7), dospějeme k rovnici

$$(3.4.7) \quad \begin{aligned} & -p_{i+1/2}u'_{i+1/2} + p_{i-1/2}u'_{i-1/2} + \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \gamma(x)u'(x) dx + \\ & + \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} q(x)u(x) dx = \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} f(x) dx. \end{aligned}$$

Tento integrální vztah bude pro nás východiskem k odvození síťové rovnice pro vnitřní uzel $x_i, 1 \leq i \leq N - 1$, síť \mathcal{S} .

Derivace $u'_{i+1/2}$ a $u'_{i-1/2}$ budeme aproximovat centrálními diferencemi (viz 3. řádek v tab. 3, odst. 3.3.1). Integrální členy lze aproximovat různými způsoby (viz [53]), pro jednoduchost se omezíme na obdélníkové pravidlo ([37], odst. 11.1). Protože integrované funkce mohou být v uzlu x_i nespojitě, rozdělíme nejprve integrální členy na dva sčítance a klademe tedy

$$\begin{aligned}
(3.4.8) \quad & \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} f(x) dx = \int_{x_{i-1/2}}^{x_i} f(x) dx + \int_{x_i}^{x_{i+1/2}} f(x) dx \approx \frac{1}{2} h_{i-1} f(x_{i-}) + \frac{1}{2} h_i f(x_{i+}), \\
& \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \gamma(x) u'(x) dx \approx \frac{1}{2} h_{i-1} \gamma(x_{i-}) u'(x_{i-}) + \frac{1}{2} h_i \gamma(x_{i+}) u'(x_{i+}), \\
& \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} q(x) u(x) dx \approx \left[\frac{1}{2} h_{i-1} q(x_{i-}) + \frac{1}{2} h_i q(x_{i+}) \right] u(x_i), \\
& u'(x_{i+}) \approx \frac{u(x_{i+1}) - u(x_i)}{h_i}, \quad u'(x_{i-}) \approx \frac{u(x_i) - u(x_{i-1})}{h_{i-1}}.
\end{aligned}$$

Pro síťovou funkci s hodnotami $U_i \approx u(x_i)$ dostaneme ve vnitřním uzlu sítě z integrální identity (3.4.7) po aproximaci jednotlivých členů pomocí (3.4.8) síťovou rovnici

$$\begin{aligned}
(3.4.9) \quad & -p_{i+1/2} \frac{U_{i+1} - U_i}{h_i} + p_{i-1/2} \frac{U_i - U_{i-1}}{h_{i-1}} + \gamma_i^- \frac{U_i - U_{i-1}}{2} + \\
& + \gamma_i^+ \frac{U_{i+1} - U_i}{2} + U_i \frac{h_{i-1} q_i^- + h_i q_i^+}{2} = \frac{h_{i-1} f_i^- + h_i f_i^+}{2},
\end{aligned}$$

v níž jsme označili $\gamma_i^- = \gamma(x_{i-})$, $\gamma_i^+ = \gamma(x_{i+})$, $q_i^- = q(x_{i-})$, $q_i^+ = q(x_{i+})$, $f_i^- = f(x_{i-})$, $f_i^+ = f(x_{i+})$. V této rovnici tedy stejně jako v síťové rovnici (3.3.24) získané metodou konečných diferencí vystupují 3 hodnoty přibližného řešení: U_{i-1} , U_i , U_{i+1} . Celkově (ve všech vnitřních uzlech) vztahy (3.4.9) představují $N-1$ podmínek pro $N+1$ neznámých $U_0, U_1, \dots, U_{N-1}, U_N$. Upravíme je ještě na tvar

$$\begin{aligned}
(3.4.10) \quad & -\left(\frac{p_{i-1/2}}{h_{i-1}} + \frac{\gamma_i^-}{2}\right) U_{i-1} + \left(\frac{p_{i+1/2}}{h_i} + \frac{p_{i-1/2}}{h_{i-1}} + \frac{\gamma_i^- - \gamma_i^+}{2} + \frac{h_{i-1} q_i^- + h_i q_i^+}{2}\right) U_i - \\
& -\left(\frac{p_{i+1/2}}{h_i} - \frac{\gamma_i^+}{2}\right) U_{i+1} = \frac{h_{i-1} f_i^- + h_i f_i^+}{2}, \quad i = 1, 2, \dots, N-1.
\end{aligned}$$

Chybějící dvě podmínky dostaneme využitím okrajových podmínek.

3.4.2. Aproximace okrajových podmínek. Popíšeme způsob, jak se v metodě integrálních identit vypořádáme s okrajovými podmínkami. Pro konkrétnost budeme podrobněji uvažovat pouze podmínku v bodě $a = x_0$, podmínka v bodě $b = x_N$ se využije obdobně. Je-li tedy v bodě $x = a$ předepsána Dirichletova okrajová podmínka, tj. je-li v (3.4.2) $\beta_0 = 0$, je $u(a) = U_0 = g_0/\alpha$ a postupujeme stejně jako v odst. 3.2.1. Do síťové

rovnice (3.4.10) pro $i = 1$ dosadíme za U_0 a členy obsahující g_0 převedeme na pravou stranu. Je-li ve (3.4.2) $\beta_0 > 0$, pak U_0 neznáme a musíme postupovat jinak. Použijeme integrální identitu (3.4.5) pro interval $\langle x_0, x_0 + h_0/2 \rangle$, kde provedeme podobnou diskretizaci jako v případě vnitřních uzlů a za $p(x_0+)u'(x_0+)$ dosadíme z okrajové podmínky (3.4.2) psané ve tvaru $\alpha_0 U_0 - \beta_0 p_0(x_0+)u'(x_0+) = g_0$. Výsledkem bude síťová rovnice

$$(3.4.11) \quad -p_{1/2} \frac{U_1 - U_0}{h_0} + \frac{\alpha_0 U_0 - g_0}{\beta_0} + \gamma_0^+ \frac{U_1 - U_0}{2} + U_0 \frac{h_0 q_0^+}{2} = \frac{h_0 f_0^+}{2},$$

kteřou po úpravě na tvar

$$(3.4.12) \quad \frac{1}{h_0} \left[\left(p_{1/2} + \frac{\alpha_0 h_0}{\beta_0} - \frac{h_0 \gamma_0^+}{2} + \frac{h_0^2 q_0^+}{2} \right) U_0 + \left(\frac{h_0 \gamma_0^+}{2} - p_{1/2} \right) U_1 \right] = \frac{h_0}{2} f_0^+ + \frac{g_0}{\beta_0}$$

připojíme k rovnicím získaným pro $i = 1, 2, \dots, N-1$. Všimněme si, jak se v metodě integrálních identit okrajové podmínky s derivací zcela přirozeně využijí ve spojení s danou diferenciální rovnicí, aniž by bylo třeba zavádět fiktivní hodnoty přibližného řešení jako v odst. 3.3.2 (srov. (3.3.14) a (3.4.12)). Na pravém konci intervalu $\langle a, b \rangle$ bychom při $\beta_1 > 0$ obdobným způsobem dospěli k síťové rovnici

$$(3.4.13) \quad \frac{1}{h_{N-1}} \left[\left(p_{N-1/2} + \frac{\alpha_1 h_{N-1}}{\beta_1} + \frac{\gamma_N^- h_{N-1}}{2} + \frac{h_{N-1}^2 q_N^-}{2} \right) U_N + \left(\frac{h_{N-1} \gamma_N^-}{2} - p_{N-1/2} \right) U_{N-1} \right] = \frac{h_{N-1}}{2} f_N^- + \frac{g_1}{\beta_1}.$$

3.4.3. Sestavení soustavy síťových rovnic. Z podmínek (3.4.12), (3.4.10), (3.4.13) sestavíme soustavu

$$(3.4.14) \quad \mathbf{A}_h \mathbf{U}_h = \mathbf{F}_h,$$

kde $\mathbf{U}_h = [U_0, U_1, \dots, U_{N-1}, U_N]^T$, $\mathbf{F}_h = [F_0, F_1, \dots, F_{N-1}, F_N]^T$. Matice \mathbf{A}_h je třídíagonální a pro $\beta_0 > 0$, $\beta_1 > 0$ je řádu $N+1$:

$$\mathbf{A}_h = \begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & 0 & & \dots & & 0 \\ a_{10} & \boxed{a_{11} & a_{12}} & & & & \\ 0 & a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & & & & 0 \\ & & & \boxed{a_{N-1,N-2} & a_{N-1,N-1}} & & a_{N-1,N} \\ 0 & \dots & & 0 & a_{N,N-1} & & a_{NN} \end{bmatrix},$$

kde ($i = 0$; první řádek matice)

$$a_{00} = \frac{p_{1/2}}{h_0} - \frac{\gamma_0^+}{2} + \frac{h_0 q_0^+}{2} + \frac{\alpha_0}{\beta_0},$$

$$a_{01} = -\frac{p_{1/2}}{h_0} + \frac{\gamma_0^+}{2};$$

pro $i = 1, 2, \dots, N-1$:

$$a_{i,i-1} = -\left(\frac{p_{i-1/2}}{h_{i-1}} + \frac{\gamma_i^-}{2}\right),$$

$$a_{ii} = \frac{p_{i+1/2}}{h_i} + \frac{p_{i-1/2}}{h_{i-1}} + \frac{\gamma_i^- - \gamma_i^+}{2} + \frac{h_{i-1}q_i^- + h_i q_i^+}{2},$$

$$a_{i,i+1} = -\left(\frac{p_{i+1/2}}{h_i} - \frac{\gamma_i^+}{2}\right);$$

($i = N$; poslední řádek matice)

$$a_{N,N-1} = -\frac{p_{N-1/2}}{h_N} + \frac{\gamma_N^-}{2},$$

$$a_{NN} = \frac{p_{N-1/2}}{h_{N-1}} + \frac{\gamma_N^-}{2} + \frac{h_{N-1}q_N}{2} + \frac{\alpha_1}{\beta_1}.$$

Pro složky vektoru \mathbf{F}_h máme:

$$F_0 = \frac{h_0}{2}f_0^+ + \frac{g_0}{\beta_0},$$

$$F_i = \frac{h_{i-1}f_i^- + h_i f_i^+}{2}, \quad i = 1, 2, \dots, N-1,$$

$$F_N = \frac{h_{N-1}}{2}f_N^- + \frac{g_1}{\beta_1}.$$

Pokud je na některém z konců intervalu $\langle a, b \rangle$ zadána Dirichletova okrajová podmínka ($\beta_0 = 0$ nebo $\beta_1 = 0$), řád soustavy se sníží (viz naznačené „orámování“ v matici \mathbf{A}_h). Rovnice (3.4.12) pro $\beta_0 = 0$ nebo (3.4.13) pro $\beta_1 = 0$ odpadá a členy v (3.4.10) s U_0 (pro $i = 1$) nebo s U_N (pro $i = N-1$) se převedou na pravou stranu, takže se změni F_1 , resp. F_{N-1} . Když $\beta_0 = 0$, bude

$$F_1 = \frac{h_0 f_1^- + h_1 f_1^+}{2} + \left(\frac{p_{1/2}}{h_0} + \frac{\gamma_1^-}{2}\right)g_0,$$

když $\beta_1 = 0$, bude

$$F_{N-1} = \frac{h_{N-2}f_{N-1}^- + h_{N-1}f_{N-1}^+}{2} + \left(\frac{p_{N-1/2}}{h_{N-1}} - \frac{\gamma_{N-1}^+}{2}\right)g_1,$$

(číslo g_0 , resp. g_1 je dáno podmínkou $u(a) = g_0$, resp. podmínkou $u(b) = g_1$). Zbývající složky vektoru \mathbf{F}_h se nezmění.

Pro dostatečně malé kroky sítě h_i , $i = 0, 1, \dots, N-1$, má matice \mathbf{A}_h z (3.4.14) podobné vlastnosti jako matice v (3.2.5) vzniklá při diskretizaci metodou konečných diferencí. Její diagonální prvky jsou kladné, kdežto prvky ležící mimo hlavní diagonálu jsou nekladné. Není obecně symetrická, což ovšem není překvapivé, protože diferenciální rovnice (3.4.1) není v samoadjungovaném tvaru. Pokud ovšem $\gamma(x) \equiv 0$ a p' a q jsou spojitě funkce, jde o standardní samoadjungovanou okrajovou úlohu a symetričnost matice \mathbf{A}_h je zřejmá. Dá se pak navíc ukázat, že \mathbf{A}_h je pozitivně definitní. Tyto vlastnosti nezávisí na tom, jakou síť jsme použili, což je výhoda oproti metodě konečných diferencí, kde tomu tak obecně být nemusí.

Odhad diskretizační chyby je vzhledem k možným nespojitostem koeficientů a nerovnoměrnosti sítě obtížný a pracný. Spokojíme se proto pouze s konstatováním, že pro spojitě koeficienty a rovnoměrnou síť je chyba přibližného řešení získaného metodou integrálních identit z tohoto odstavce velikosti $O(h^2)$.

Řadu dalších praktických informací o soustavách lineárních algebraických rovnic, které vznikají při diskretizaci okrajových úloh (jak pro obyčejné, tak parciální diferenciální rovnice), čtenář nalezne v odst. 3.5.

3.4.4. Příklad. Metodou integrálních identit budeme diskretizovat okrajovou úlohu

$$(3.4.15) \quad \begin{aligned} -(p(x)u')' &= 1, \quad u(0) = u(1) = 0, \\ p(x) &= \begin{cases} 1 & \text{pro } x \in \langle 0, \frac{1}{2} \rangle, \\ 2 & \text{pro } x \in \langle \frac{1}{2}, 1 \rangle. \end{cases} \end{aligned}$$

Volíme rovnoměrnou síť \mathcal{S} s krokem $h = \frac{1}{6}$ ($N = 6$).

Protože jde o Dirichletovu úlohu, zajímají nás pouze síťové rovnice (3.4.10) pro vnitřní uzly, které v našem případě mají tvar

$$(3.4.16) \quad -\frac{p_{i-1/2}}{h}U_{i-1} + \frac{p_{i-1/2} + p_{i+1/2}}{h}U_i - \frac{p_{i+1/2}}{h}U_{i+1} = h, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5.$$

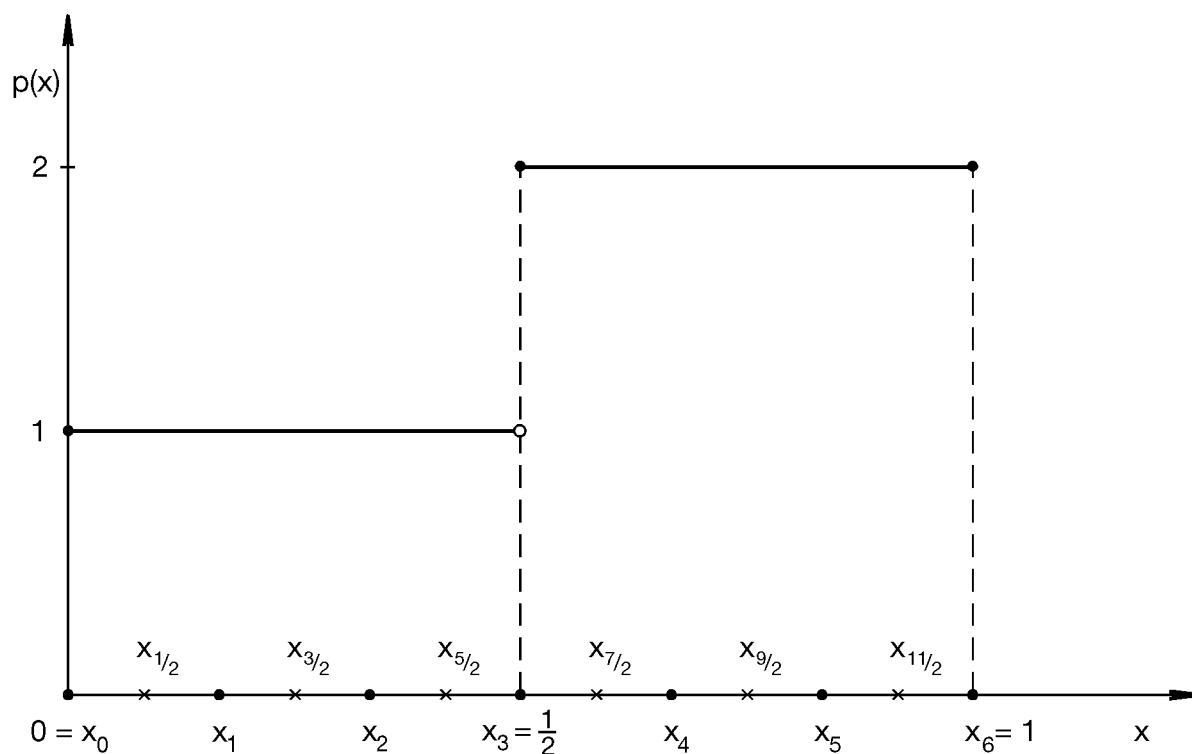
Hodnoty $U_0 = 0$, $U_6 = 0$ známe z okrajových podmínek a hodnoty koeficientů $p_{i+1/2}$, $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, jsou patrné z obr. 2.

V maticovém zápisu dostáváme z (3.4.16) po úpravě soustavu

$$h^{-2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

jejímž řešením obdržíme (na 6D) vektor

$$\mathbf{U}_h = [0,055\,556; 0,083\,334; 0,083\,334; 0,069\,445; 0,041\,667]^T.$$



Obr. 2. Funkce p a uzly sítě v úloze (3.4.15).

Snadno se přesvědčíme, že až na zaokrouhlovací chyby je $U_i = u(x_i)$, neboť přesné řešení úlohy (3.4.15) je

$$u(x) = \begin{cases} \frac{1}{12}x(5 - 6x), & x \in \langle 0, \frac{1}{2} \rangle, \\ \frac{1}{24}(1 + 5x - 6x^2), & x \in \langle \frac{1}{2}, 1 \rangle, \end{cases}$$

a tedy

$$u'(\frac{1}{2} -) = -\frac{1}{12}, \quad u'(\frac{1}{2} +) = -\frac{1}{24}.$$

Přechodovou podmínku bychom v naší úloze psali ve tvaru $2u'(\frac{1}{2}+) = u'(\frac{1}{2}-)$ a její aproximace je zahrnuta do třetí rovnice sestrojené soustavy.

3.5. Soustavy síťových rovnic V tomto odstavci pojednáme o řešitelnosti soustav lineárních algebraických rovnic vzniklých diskretizací okrajových úloh a shrneme základní poznatky o přímých metodách pro řešení takových soustav ([24], [46]). Iteračním metodám pro řešení soustav síťových rovnic bude věnován čl. 10 druhé části naší série.

Jak jsme viděli např. v odst. 3.2.1, mají matice soustav síťových rovnic speciální strukturu. Soustavy lineárních síťových rovnic lze proto řešit speciálními algoritmy, které

dovolují snížit jak počet aritmetických operací potřebných k vyřešení soustavy, tak nároky na kapacitu paměti počítače.

3.5.1. Řešitelnost soustavy síťových rovnic. O regularitě matice soustavy síťových rovnic se často dá rozhodnout na základě dvou vlastností, které tyto matice mívají — nerozložitelnosti a převládání prvků na diagonále.

Čtvercová matice \mathbf{A} řádu n je *reducibilní* neboli *rozložitelná*, jestliže je ve vztahu $\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{v}$ jistých n_1 složek ($n_1 < n$) vektoru \mathbf{u} jednoznačně určeno nějakými n_1 složkami vektoru \mathbf{v} . Jinými slovy, existuje permutační matice \mathbf{P} taková, že

$$(3.5.1) \quad \mathbf{PAP}^T = \mathbf{PAP}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_2 & \mathbf{A}_3 \end{bmatrix},$$

kde \mathbf{A}_1 je čtvercová matice řádu n_1 , \mathbf{A}_3 čtvercová matice řádu $n - n_1$ a \mathbf{A}_2 matice typu $(n - n_1, n_1)$. Připomínáme, že permutační matice \mathbf{P} má prvky rovné buď 0 nebo 1, přičemž v každém řádku a každém sloupci je právě jeden jednotkový prvek. Speciálně může být $\mathbf{P} = \mathbf{I}$. Násobení permutační maticí \mathbf{P} zleva znamená provést permutaci řádků matice \mathbf{A} , násobení \mathbf{P}^T zprava představuje odpovídající záměnu sloupců. Extrémním případem reducibilní matice je matice diagonální. Není-li matice \mathbf{A} reducibilní, říkáme, že je *ireducibilní* nebo *nerozložitelná*. O reducibilitě matice se v praxi často rozhoduje nikoli hledáním vhodné matice \mathbf{P} , ale vyšetřením orientovaného grafu matice \mathbf{A} ([49], [55]). Trídiagonální matice \mathbf{A} je reducibilní tehdy a jen tehdy, je-li některý z prvků $a_{i-1,i}$ (pod diagonálou) či $a_{i,i+1}$ (nad diagonálou) roven nule. Matice \mathbf{A}_h z (3.2.5) a (3.3.10) jsou tedy příklady ireducibilních matic.

Čtvercová matice $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ řádu n je *diagonálně dominantní* (má *převládající diagonálu*), jestliže pro $i = 1, 2, \dots, n$ platí

$$(3.5.2) \quad |a_{ii}| \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|.$$

Jestliže v (3.5.2) platí vesměs ostré nerovnosti, řekneme, že \mathbf{A} je *ostře diagonálně dominantní*. Ostře diagonálně dominantní matice má podle Geršgorinovy věty pouze nenulová vlastní čísla, a je tedy *regularní*. Matice \mathbf{A}_h z (3.2.5) je při $q_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, N - 1$, ostře diagonálně dominantní.

Čtvercová matice $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ řádu n je *ireducibilně diagonálně dominantní*, jestliže a) je ireducibilní, b) je diagonálně dominantní a c) alespoň pro jeden index $i = i_0$ platí v (3.5.2) ostrá nerovnost. Dá se ukázat [53], že ireducibilně diagonálně dominantní matice je vždy *regularní*. Matice \mathbf{A}_h z (3.2.5) je při $q_i \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, N - 1$, ireducibilně diagonálně dominantní (ověřte to).

Dá se dokonce ukázat [53], že symetrické čtvercové matice, které mají na diagonále kladné prvky a jsou ostře či ireducibilně diagonálně dominantní, jsou vždy pozitivně definitní.

3.5.2. Metody rozkladu. Uvažujme soustavu

$$(3.5.3) \quad \mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{F},$$

kde matice \mathbf{A} je řádu n a $\mathbf{F} = [F_1, F_2, \dots, F_n]^T$, $\mathbf{y} = [y_1, y_2, \dots, y_n]^T$.

Metodou LU-rozkladu ([24]) rozumíme postup, při němž se matice \mathbf{A} rozloží na součin $\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{U}$, kde $\mathbf{L} = [l_{ij}]$ je dolní trojúhelníková matice (tj. $l_{ij} = 0$ pro $j > i$) s jedničkami na diagonále a $\mathbf{U} = [u_{ij}]$ je horní trojúhelníková matice (tj. $u_{ij} = 0$ pro $i > j$), a místo soustavy (3.5.3) se řeší dvě jednodušší soustavy $\mathbf{L}\mathbf{z} = \mathbf{F}$ a $\mathbf{U}\mathbf{y} = \mathbf{z}$. Tento postup je ekvivalentní Gaussově eliminační metodě bez výběru hlavního prvku.

Pro symetrickou matici \mathbf{A} je vhodnou variantou Gaussovy eliminační metody *metoda symetrického rozkladu*, v níž rozložíme matici \mathbf{A} na součin $\mathbf{A} = \mathbf{U}^T \mathbf{D} \mathbf{U}$, kde \mathbf{U} je horní trojúhelníková matice s jedničkami na diagonále a \mathbf{D} je diagonální matice. Místo soustavy (3.5.3) se řeší tři soustavy $\mathbf{U}^T \mathbf{z} = \mathbf{F}$, $\mathbf{D}\mathbf{w} = \mathbf{z}$, $\mathbf{U}\mathbf{y} = \mathbf{w}$.

Uvedené dva postupy jsou proveditelné, jsou-li diagonální prvky matice \mathbf{U} v metodě LU-rozkladu či prvky matice \mathbf{D} v metodě symetrického rozkladu různé od nuly. K tomu stačí např., aby matice \mathbf{A} byla regulární a diagonálně dominantní ([7]).

Je-li matice \mathbf{A} symetrická a pozitivně definitní, lze doporučit *Choleského metodu rozkladu*. V této metodě vycházíme z vyjádření $\mathbf{A} = \mathbf{U}^T \mathbf{U}$, v němž \mathbf{U} je opět horní trojúhelníková matice, u níž však, na rozdíl od předcházejících metod, neklademe žádné požadavky na diagonální prvky. Další postup je stejný jako v metodě LU-rozkladu. Funkci matice \mathbf{L} zde plní matice \mathbf{U}^T .

Pro symetrickou a pozitivně definitní matici \mathbf{A} jsou uvedené metody vždy proveditelné. Nesplnění požadavku pozitivní definitnosti matice \mathbf{A} se v Choleského metodě projeví výskytem záporných čísel v odmocninách či dělením nulou.

Metoda LU-rozkladu pro soustavu s třídiagonální maticí se obvykle nazývá *metoda faktorizace*.

3.5.3. Algoritmus metody faktorizace. Nechť v soustavě $\mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{F}$ je matice \mathbf{A} třídiagonální, tj.

$$(3.5.4) \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} b_1 & c_1 & 0 & \dots & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & & \\ 0 & a_3 & b_3 & c_3 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & & & 0 \\ 0 & \dots & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ & & 0 & a_n & b_n \end{bmatrix}.$$

Algoritmus metody faktorizace a algoritmy v dalších odstavcích popíšeme způsobem užívaným v [24], [37]:

$$\begin{aligned}
 (3.5.5) \quad & \text{Vstup: } n, \mathbf{A}, \mathbf{F} = [F_1, F_2, \dots, F_n]^T. \\
 & w_1 = b_1; \quad z_1 = F_1. \\
 & \text{Pro } i = 2, 3, \dots, n : \\
 & \quad \left[\begin{array}{l} m_i = -a_i/w_{i-1}, \\ w_i = b_i + m_i c_{i-1}, \\ z_i = F_i + m_i z_{i-1}. \end{array} \right. \\
 & y_n = z_n/w_n. \\
 & \text{Pro } k = n-1, n-2, \dots, 2, 1 : \\
 & \quad \left[y_k = (z_k - c_k y_{k+1})/w_k. \right. \\
 & \text{Výstup: } \mathbf{y} = [y_1, y_2, \dots, y_n]^T.
 \end{aligned}$$

Prvky matice \mathbf{L} v rozkladu $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$ jsou zde dány čísla $-m_i$ a prvky matice \mathbf{U} čísla w_i, c_i . Evidentně nulové prvky nebereme v úvahu. Jestliže je \mathbf{A} ostře diagonálně dominantní nebo ireducibilně diagonálně dominantní, dá se ukázat ([46]), že je $w_i \neq 0$, $i = 1, 2, \dots, n$, takže se algoritmus (3.5.5) dá skutečně provést (nedochází k dělení nulou). Stejně vlastnosti matice \mathbf{A} jsou zároveň postačující pro to, aby algoritmus metody faktorizace byl numericky stabilní. Praktické zkušenosti ukazují, že při dobré podmíněnosti soustavy (3.5.3) bývá metoda faktorizace dostatečně stabilní i tehdy, nejsou-li podmínky diagonální dominance splněny. Dají se ale sestavit příklady diferenčních úloh, při jejichž řešení se v takovém případě metoda faktorizace chová nestabilně.

Metoda faktorizace je neobyčejně efektivní metodou pro řešení síťových rovnic. K jejímu provedení stačí cca $8n$ aritmetických operací ($5n$ násobení nebo dělení a $3n$ sčítání). Při promyšleném uložení dat vystačíme s $4n$ paměťovými místy (neukládáme nulové prvky matice \mathbf{A}). Jednou z možností je následující uložení prvků matice \mathbf{A} :

$$\begin{bmatrix} - & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ a_n & b_n & - \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} - & w_1 & c_1 \\ m_2 & w_2 & c_2 \\ m_3 & w_3 & c_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ m_{n-1} & w_{n-1} & c_{n-1} \\ m_n & w_n & c_n \end{bmatrix}.$$

Mezivýsledky m_i , resp. w_i ukládáme na místa prvků a_i , resp. b_i . Na místa F_i ukládáme nejdříve mezivýsledky z_i a posléze konečné výsledky y_i . Lze tak bez problémů řešit soustavu rovnic se stovkami neznámých.

3.5.4. Algoritmy pro třídiagonální soustavu se symetrickou maticí. Symetrickost matice \mathbf{A} v (3.5.4) (tj. $a_i = c_{i-1}$, $i = 2, 3, \dots, n$) umožňuje ušetřit dalších n paměťových míst. Nemáme-li zaručenu pozitivní definitnost matice \mathbf{A} , užijeme *algoritmus symetrického rozkladu*, jehož proveditelnost je zaručena stejnými předpoklady jako u algoritmu (3.5.5):

$$\begin{aligned}
 (3.5.6) \quad & \text{Vstup: } n, \mathbf{A}, \mathbf{F} = [F_1, F_2, \dots, F_n]^T. \\
 & d_1 = b_1; \quad z_1 = F_1. \\
 & \text{Pro } i = 1, 2, \dots, n-1 : \\
 & \quad \left[\begin{array}{l} u_i = c_i/d_i, \\ d_{i+1} = b_{i+1} - d_i u_i^2, \\ z_{i+1} = F_{i+1} - u_{i+1} z_i. \end{array} \right. \\
 & \text{Pro } j = 1, 2, \dots, n : \\
 & \quad \left[\begin{array}{l} w_i = z_i/d_i. \end{array} \right. \\
 & y_n = w_n; \quad u_n = 0. \\
 & \text{Pro } k = n, n-1, n-2, \dots, 2, 1 : \\
 & \quad \left[\begin{array}{l} y_k = w_k - u_{k+1} y_{k+1}. \end{array} \right. \\
 & \text{Výstup: } \mathbf{y} = [y_1, y_2, \dots, y_n]^T.
 \end{aligned}$$

Je-li matice \mathbf{A} navíc pozitivně definitní, užijeme *Choleského algoritmus*:

$$\begin{aligned}
 (3.5.7) \quad & \text{Vstup: } n, \mathbf{A}, \mathbf{F} = [F_1, F_2, \dots, F_n]^T. \\
 & u_0 = 0; \quad z_0 = 0. \\
 & \text{Pro } i = 1, 2, \dots, n : \\
 & \quad \left[\begin{array}{l} w_i = \sqrt{b_i - u_{i-1}^2}, \\ u_i = c_i/w_i, \\ z_i = (F_i - u_{i-1} z_{i-1})/w_i. \end{array} \right. \\
 & y_{n+1} = 0. \\
 & \text{Pro } k = n, n-1, \dots, 2, 1 : \\
 & \quad \left[\begin{array}{l} y_k = (z_k - u_k y_{k+1})/w_k. \end{array} \right. \\
 & \text{Výstup: } \mathbf{y} = [y_1, y_2, \dots, y_n]^T.
 \end{aligned}$$

3.5.5. Algoritmy pro soustavu s pásovou maticí. Při diskretizaci okrajových úloh pro parciální diferenciální rovnice eliptického typu se setkáme s maticemi, které již nebudou třídiagonální, ale pásové. Matice \mathbf{A} je *pásová*, existuje-li přirozené číslo $p \geq 1$ takové, že prvky a_{ij} matice \mathbf{A} jsou nulové, když $|i - j| > p$. Číslo p označuje *šířku polopásu* ([24]). Třídiagonální matice je speciálním případem pásové matice (pro $p = 1$).

Matice \mathbf{L} a \mathbf{U} v rozkladu $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$ (pokud jdou sestrojít) budou pásové se stejným p , tj. $l_{ij} = 0$ pro $i < j$ a pro $i > j + p$, $u_{ij} = 0$ pro $j < i$ a pro $j > p + i$.

V následujícím algoritmu se výpočet prvků matice \mathbf{U} a \mathbf{L} realizuje ve smyslu sloupců matice \mathbf{A} :

$$\begin{aligned}
 (3.5.8) \quad & \text{Vstup: } n, p, \mathbf{A} = [a_{ij}], \mathbf{F} = [F_1, F_2, \dots, F_n]^T. \\
 & \text{Pro } j = 1, 2, \dots, n : (\mathbf{A} = \mathbf{LU}) \\
 & \quad \alpha = \max(1, j - p), \\
 & \quad \gamma = \min(n, j + p). \\
 & \quad \text{Pro } i = \alpha, \alpha + 1, \dots, j : \\
 & \quad \quad \left[u_{ij} = a_{ij} - \sum_{r=\alpha}^{i-1} l_{ir} u_{rj}. \right. \\
 & \quad \quad \text{Pro } i = j + 1, j + 2, \dots, \gamma : \\
 & \quad \quad \quad \beta = \max(1, i - p), \\
 & \quad \quad \quad \left. l_{ij} = (a_{ij} - \sum_{s=\beta}^{j-1} l_{is} u_{sj}) / u_{jj}. \right] \\
 & \text{Pro } j = 1, 2, \dots, n : (\mathbf{Lz} = \mathbf{F}) \\
 & \quad \alpha = \max(1, j - p), \\
 & \quad \left[z_j = F_j - \sum_{k=\alpha}^{j-1} l_{jk} z_k. \right. \\
 & \text{Pro } j = n, n - 1, \dots, 2, 1 : (\mathbf{Uy} = \mathbf{z}) \\
 & \quad \gamma = \min(n, j + p), \\
 & \quad \left[y_j = (z_j - \sum_{k=j+1}^{\gamma} u_{jk} y_k) / u_{jj}. \right. \\
 & \text{Výstup: } \mathbf{y} = [y_1, y_2, \dots, y_n]^T.
 \end{aligned}$$

Počet operací tohoto algoritmu je řádově dán číslem $np(p+1) + n(2p+1)$ [24]. Při vhodném naprogramování ušetříme navíc (když $p \ll n$) značné množství paměťových míst, neboť do paměti počítače ukládáme pouze prvky umístěné v pozicích uvnitř pásu dané matice. Můžeme např. volit schéma uložení prvků znázorněné pro $p = 2$ na obr. 3. Pozici (i, j) pásové matice \mathbf{A} odpovídá pozice (i, k) v poli o rozměru $n \times (2p+1)$. Příslušná mapovací funkce je dána vzorcem $k = (j - i) + p + 1$. Mezivýsledky l_{ik} , u_{ik} ukládáme do příslušných pozic prvků a_{ik} . Na místa F_i ukládáme mezivýsledky z_j a posléze konečné výsledky y_j .

Je-li pásová matice \mathbf{A} symetrická a pozitivně definitní, můžeme použít Choleského metodu a místo (3.5.8) odvodit algoritmus, který má zhruba poloviční nároky na paměť počítače.

	$k \longrightarrow$				
i \downarrow	—	—	a_{11}	a_{12}	a_{13}
	—	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}
	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	a_{35}
	a_{42}	a_{43}	a_{44}	a_{45}	a_{46}
	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
	\cdot	\cdot	$a_{n-2,n-2}$	$a_{n-2,n-1}$	$a_{n-2,n}$
	$a_{n-1,n-3}$	$a_{n-1,n-2}$	$a_{n-1,n-1}$	$a_{n-1,n}$	—
	$a_{n,n-2}$	$a_{n,n-1}$	a_{nn}	—	—

	$k \longrightarrow$				
i \downarrow	—	—	u_{11}	u_{12}	u_{13}
	—	l_{21}	u_{22}	u_{23}	u_{24}
	l_{31}	l_{32}	u_{33}	u_{34}	u_{35}
	l_{42}	l_{43}	u_{44}	u_{45}	u_{46}
	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
	\cdot	\cdot	$u_{n-2,n-2}$	$u_{n-2,n-1}$	$u_{n-2,n}$
	$l_{n-1,n-3}$	$l_{n-1,n-2}$	$u_{n-1,n-1}$	$u_{n-1,n}$	—
	$l_{n,n-2}$	$l_{n,n-1}$	u_{nn}	—	—

Obr. 3. Uložení prvků pětidiagonální matice.

3.6. Cvičení

3.6.1. Ukažte, že řešení $\tilde{u} = \tilde{u}(z)$, $z \in \langle a, b \rangle$, okrajové úlohy $-(\tilde{p}(z)\tilde{u}')' + \tilde{q}(z)\tilde{u} = \tilde{f}(z)$, $\tilde{u}(a) = \tilde{g}_0$, $\tilde{p}(b)\tilde{u}'(b) = \tilde{g}_1$, lze získat pomocí řešení $u = u(x)$, $x \in \langle 0, 1 \rangle$, okrajové úlohy $-(p(x)u'(x))' + q(x)u = f(x)$, $u(0) = g_0$, $p(1)u'(1) = g_1$. Určete příslušné transformační vztahy. [Návod: Volte lineární substituci $z = a + (b-a)x$ a užíjte pravidla pro derivování složené funkce ($\tilde{u}'(z) = d\tilde{u}/dz$, $u'(x) = du/dx$). Výsledky: $p(x) = \tilde{p}(a + (b-a)x)$, $q(x) = (b-a)^2\tilde{q}(a + (b-a)x)$, $f(x) = (b-a)^2\tilde{f}(a + (b-a)x)$, $g_0 = \tilde{g}_0$, $g_1 = (b-a)\tilde{g}_1$, $\tilde{u}(z) = u((z-a)/(b-a))$.]

3.6.2. Ukažte, že řešení $\tilde{u} = \tilde{u}(z)$, $z \in \langle a, b \rangle$, okrajové úlohy $-(\tilde{p}(z)\tilde{u}')' + \tilde{q}(z)\tilde{u} = \tilde{f}(z)$, $\tilde{\sigma}_0\tilde{u}(a) - \tilde{p}(a)\tilde{u}'(a) = \tilde{g}_0$, $\tilde{u}(b) = \tilde{g}_1$ lze získat pomocí řešení $u = u(x)$, $x \in \langle 0, 1 \rangle$, okrajové úlohy $-(p(x)u')' + q(x)u = f(x)$, $\sigma_0 u(0) - p(0)u'(0) = g_0$, $u(1) = g_1$. [$\sigma_0 = (b-a)\tilde{\sigma}_0$, $g_0 = (b-a)\tilde{g}_0$, $g_1 = \tilde{g}_1$; ostatní stejné jako ve cvičení 3.6.1.]

3.6.3. Řešte metodou konečných diferencí okrajovou úlohu $-u'' + xu = -x^2$, $x \in (-1, 2)$, $u(-1) = 1$, $u(2) = -2$. Volte rovnoměrnou síť s krokem $h = \frac{1}{2}$. Posuďte chybu metody. [$U_1 = \frac{1}{2}$, $U_2 = 0$, $U_3 = -\frac{1}{2}$, $U_4 = -1$, $U_5 = -\frac{3}{2}$. Přesné řešení je $u(x) = -x$; pro takovou funkci je derivace u'' aproximována přesně.]

3.6.4. Proveďte diskretizaci okrajové úlohy $-u'' + q(x)u = f(x)$, $x \in (0, 1)$, $u(0) = g_0$, $\alpha_1 u(1) + \beta_1 u'(1) = g_1$, $\beta_1 \neq 0$ metodou konečných diferencí. Posuďte velikost diskretizační chyby a vlastnosti matice soustavy diferenčních rovnic. [Návod: Postupujte obdobně jako v odst. 3.3.2 a využijte poznatků odst. 3.3.1; porovnejte matici získané soustavy diferenčních rovnic s maticí (3.3.10).]

3.6.5. Porovnejte diskretizaci diferenciální rovnice z odst. 3.3.5. s $p(x) \equiv 1$ a výsledky diskretizace z odst. 3.3.2. Pro jaké funkce p bude matice soustavy diferenčních rovnic (3.3.25) zaručeně symetrická? [Shodné výsledky. Symetrie zaručena pro $p(x) \equiv \text{konst.}$]

3.6.6. Řešte nelineární okrajovou úlohu $u'' = u^3 - (1 + \sin^2 x) \sin x$, $u(0) = u(\pi) = 0$, a) normální metodou konečných diferencí, b) Numerovovou metodou. Volte $h = \pi/10$. [Přesné řešení $u(x) = \sin x$. Chyba řešení pro b): $\max |e(x_i)| \leq 1,2 \cdot 10^{-5}$.]

3.6.7. Aproximujte okrajovou úlohu $u'' + xu' + u = 0$, $u(0) = 0$, $u(1) = 1$ metodou integrálních identit. Řešte diskrétní úlohu s $h = 0,2$. [$\mathbf{U}_h = [0; 0,2729; 0,5245; 0,7365; 0,8967; 1]^T$ na 4D.]

3.6.8. Popište metodu integrálních identit z odst. 3.4 v případě, že funkce p' , q , p a f jsou na $\langle a, b \rangle$ spojité a síť rovnoměrná. Proveďte touto metodou diskretizaci Dirichletovy okrajové úlohy (3.2.1) a porovnejte s výsledkem získaným v odst. 3.2.1 metodou konečných diferencí. [Návod: Ve vzorcích odst. 3.4 položte $q_i^+ = q_i^- = q_i$ atd. Dále položte $h_i = h = 1/N$, $i = 0, 1, \dots, N-1$. Stejný výsledek jako v odst. 3.2.1.]

3.6.9. Stanovte diferenční aproximaci okrajové úlohy $u'' + 2xu' + 2u = 4x$, $u(0) - u'(0) = 0$, $u(1) = 1 + e^{-1} \doteq 1,368$ a) metodou konečných diferencí, b) metodou integrálních identit. Volte rovnoměrnou síť s krokem $h = 0,1$ a k řešení síťových rovnic použijte metodu faktorizace. [Přesné řešení úlohy je $u(x) = x + e^{-x^2}$.]

4. Diskretizace okrajových úloh metodami Galerkinova typu

4.1. Předběžné úvahy

4.1.1. Princip metod Galerkinova typu. V metodách Galerkinova typu budeme řešení okrajové úlohy aproximovat konečnou lineární kombinací vhodně zvolených lineárně nezávislých funkcí. Tyto zvolené funkce obvykle nazýváme *bázové funkce*. Metoda Galerkinova typu nám tedy musí dávat návod, jak a) vhodně vybrat bázové funkce; b) stanovit koeficienty lineární kombinace těchto bázových funkcí tak, abychom dostali dobrou aproximaci přesného řešení dané okrajové úlohy.

Uvažujme například okrajovou úlohu

$$(4.1.1) \quad \begin{aligned} - (p(x)u')' &= f(x), \quad x \in (0, 1), \\ - p(0)u'(0) &= 0, \quad u(1) = 0, \end{aligned}$$

a zvolme tři lineárně nezávislé funkce $w_1(x)$, $w_2(x)$, $w_3(x)$ tak, aby každá z nich splňovala zadané okrajové podmínky. Potom každá lineární kombinace těchto tří funkcí

$$(4.1.2) \quad \tilde{u}(x) = c_1 w_1(x) + c_2 w_2(x) + c_3 w_3(x)$$

také splňuje okrajové podmínky a klademe si otázku, jak určit koeficienty c_1 , c_2 , c_3 tak, aby funkce \tilde{u} v nějakém smyslu aproximovala přesné řešení úlohy (4.1.1) na celém intervalu $\langle 0, 1 \rangle$.

Abychom určili funkci \tilde{u} musíme pro ni stanovit tři podmínky, ze kterých lze vypočítat koeficienty c_1 , c_2 , c_3 . Můžeme to udělat např. následujícím způsobem. Zvolíme tři body x_1 , x_2 , $x_3 \in (0, 1)$ a budeme požadovat, aby hledaná funkce \tilde{u} vyhovovala v těchto třech bodech rovnici (4.1.1), tj. aby platilo

$$(4.1.3) \quad \begin{aligned} - \{p(x_1)[c_1 w_1'(x_1) + c_2 w_2'(x_1) + c_3 w_3'(x_1)]\}' &= f(x_1), \\ - \{p(x_2)[c_1 w_1'(x_2) + c_2 w_2'(x_2) + c_3 w_3'(x_2)]\}' &= f(x_2), \\ - \{p(x_3)[c_1 w_1'(x_3) + c_2 w_2'(x_3) + c_3 w_3'(x_3)]\}' &= f(x_3). \end{aligned}$$

Je zřejmé, že k tomu, abychom mohli podmínky (4.1.3) vůbec zapsat, je nutné, aby bázové funkce w_1 , w_2 , w_3 byly dostatečně hladké a příslušné derivace v (4.1.3) existovaly.

Soustava podmínek (4.1.3) představuje soustavu tří lineárních algebraických rovnic pro neznámé koeficienty c_1 , c_2 , c_3 . Abychom mohli ze (4.1.3) koeficienty c_1 , c_2 , c_3 vypočítat, je třeba bázové funkce w_1 , w_2 , w_3 a body x_1 , x_2 , x_3 volit tak, aby byla zaručena řešitelnost této soustavy. Funkci \tilde{u} , která vznikne dosazením vypočítaných koeficientů

c_1, c_2, c_3 do (4.1.2), pak považujeme za aproximaci přesného řešení u úlohy (4.1.1). Říkáme také, že funkce \tilde{u} je *přibližným řešením* úlohy (4.1.1) (ve smyslu uvedené metody). Je přirozené že nás bude zajímat *chyba* sestrojené aproximace, tj. funkce $u - \tilde{u}$, neboť podle ní posuzujeme kvalitu získaného přibližného řešení. V řadě případů lze metodami numerické matematiky získat uspokojivé odhady velikosti této chyby.

Popsaný postup má své přednosti. Odvození rovnic pro neznámé koeficienty c_1, c_2, c_3 je jednoduché a přímočaré. Má ale také svoje slabiny. Jsou to především problémy s volbou vhodných bodů, v nichž požadujeme splnění diferenciální rovnice. Potíže také vznikají s volbou báзовých funkcí především při složitějších okrajových podmínkách. Metoda, kterou jsme zde stručně popsali, se však přesto pro řešení okrajových úloh pro obyčejné diferenciální rovnice úspěšně používá. Nazývá se *kolokační metoda* a podrobnější informace o ní lze nalézt např. v [30].

V kolokační metodě jsme se snažili splnit diferenciální rovnici v tom smyslu, aby *reziduum* $R(x; \tilde{u})$ přibližného řešení \tilde{u} dané vztahem

$$(4.1.4) \quad R(x; \tilde{u}) = -(p(x)\tilde{u}'(x))' - f(x)$$

bylo nulové v bodech $x_i \in (0, 1)$, $i = 1, 2, 3$. Řada široce používaných numerických metod pro řešení okrajových úloh vychází naproti tomu z požadavku, aby reziduum $R(x; \tilde{u})$ bylo nulové v e s m y s l u i n t e g r á l n í h o p r ů m ě r u přes celý interval $\langle 0, 1 \rangle$. To znamená, že pro vhodně vybranou *váhovou funkci* v požadujeme, aby platilo

$$(4.1.5) \quad \int_0^1 R(x; \tilde{u})v(x) dx = 0,$$

tj.

$$\begin{aligned} & \int_0^1 [-(p(x)\tilde{u}'(x))' - f(x)]v(x) dx = \\ & = \int_0^1 \{ -[p(x)(c_1w_1'(x) + c_2w_2'(x) + c_3w_3'(x))] - f(x) \} v(x) dx = 0. \end{aligned}$$

Vztah (4.1.5) představuje lineární algebraickou rovnici tvaru $A_1c_1 + A_2c_2 + A_3c_3 + F = 0$ pro koeficienty c_1, c_2, c_3 přibližného řešení $\tilde{u}(x) = c_1w_1(x) + c_2w_2(x) + c_3w_3(x)$. Je přitom

$$\begin{aligned} A_i &= - \int_0^1 [p(x)w_i'(x)]' v(x) dx, \quad i = 1, 2, 3, \\ F &= - \int_0^1 f(x)v(x) dx. \end{aligned}$$

Jestliže nyní postupně zvolíme tři různé váhové funkce v_1, v_2, v_3 , dostaneme soustavu

tří lineárních algebraických rovnic

$$(4.1.6) \quad \begin{aligned} & \int_0^1 \{ - [p(x)(c_1 w_1'(x) + c_2 w_2'(x) + c_3 w_3'(x))] - f(x) \} v_1(x) dx = 0, \\ & \int_0^1 \{ - [p(x)(c_1 w_1'(x) + c_2 w_2'(x) + c_3 w_3'(x))] - f(x) \} v_2(x) dx = 0, \\ & \int_0^1 \{ - [p(x)(c_1 w_1'(x) + c_2 w_2'(x) + c_3 w_3'(x))] - f(x) \} v_3(x) dx = 0 \end{aligned}$$

pro neznámé koeficienty c_1, c_2, c_3 . Popsané metodě se říká *metoda vážených reziduí*.

Na úspěch metody vážených reziduí má kromě volby báзовých funkcí w_1, w_2, w_3 vliv také volba váhových funkcí v_1, v_2, v_3 . Jednou z variant metody vážených reziduí je *klasická Galerkinova metoda*, v níž klademe $w_i = v_i, i = 1, 2, 3$, a požadujeme, aby báзовé funkce splňovaly zadané okrajové podmínky. Koeficienty c_1, c_2, c_3 přibližného řešení $\tilde{u}(x) = c_1 v_1(x) + c_2 v_2(x) + c_3 v_3(x)$ nyní počítáme ze soustavy

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \{ - [p(x)(c_1 v_1'(x) + c_2 v_2'(x) + c_3 v_3'(x))] - f(x) \} v_1(x) dx = 0, \\ & \int_0^1 \{ - [p(x)(c_1 v_1'(x) + c_2 v_2'(x) + c_3 v_3'(x))] - f(x) \} v_2(x) dx = 0, \\ & \int_0^1 \{ - [p(x)(c_1 v_1'(x) + c_2 v_2'(x) + c_3 v_3'(x))] - f(x) \} v_3(x) dx = 0. \end{aligned}$$

Jak uvidíme dále, jiné, obecnější metody Galerkinova typu nám umožní elegantně se vypořádat se splněním některých okrajových podmínek. Kromě toho budeme moci snížit požadavky na hladkost báзовých funkcí a řešit tak okrajové úlohy, které už v klasickém smyslu řešitelné nejsou.

4.1.2. Zobecnění pojmu řešení. Požadavek (4.1.5) byl východiskem pro určení přibližného řešení ve smyslu metody vážených reziduí, a tedy i ve smyslu Galerkinovy metody. Je však velmi účelné integrální vztah tohoto typu vzít za východisko k definici *s a m o t n é h o ř e š e n í* uvažované okrajové úlohy.

Uvažujme pro jednoduchost opět okrajovou úlohu (4.1.1) a místo toho, abychom řešením této úlohy rozuměli funkci u , která splňuje rovnost $-(p(x)u'(x))' - f(x) = 0$ v každém bodě $x \in (0, 1)$, požadujeme pouze, aby hledané řešení u splňovalo integrální rovnost (integrál zde i v dalším chápeme v Lebesgueově smyslu [34])

$$(4.1.7) \quad \int_0^1 [- (p(x)u'(x))' - f(x)] v(x) dx = 0$$

pro každou omezenou funkci v z dostatečně široké třídy funkcí. Bude-li navíc funkce v diferencovatelná na $\langle 0, 1 \rangle$, lze (4.1.7) převést integrací per partes na tvar

$$(4.1.8) \quad \int_0^1 p(x)u'(x)v'(x) dx - p(1)u'(1)v(1) + p(0)u'(0)v(0) = \int_0^1 f(x)v(x) dx.$$

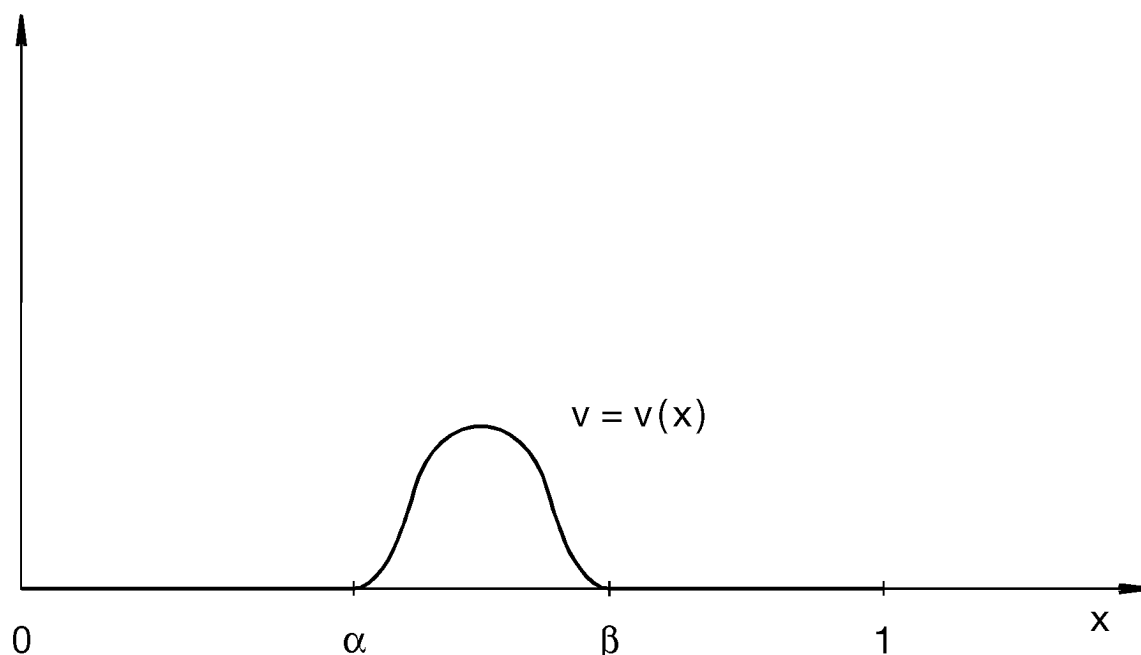
Díky okrajové podmínce úlohy (4.1.1) v bodě $x = 0$ se anulují člen $p(0)u'(0)v(0)$. Vybereme-li nyní váhové funkce v speciálněji, a to tak, aby splňovaly podmínku $v(1) = 0$, vztah (4.1.8) se dále zjednoduší. Dostaneme

$$(4.1.9) \quad \int_0^1 p(x)u'(x)v'(x) \, dx = \int_0^1 f(x)v(x) \, dx.$$

Řešení okrajové úlohy (4.1.1) můžeme nyní definovat jako takovou funkci u , která splňuje danou Dirichletovu podmínku $u(1) = 0$ a integrální rovnost (4.1.9) pro všechny funkce v z uvažované třídy funkcí, které splňují podmínku $v(1) = 0$. Funkce u těchto vlastností se pak nazývá *slabým řešením* okrajové úlohy (4.1.1).

V čem je výhoda takové definice řešení? Především v tom, že rovnost (4.1.9) má smysl i pro funkce u a p , pro které $(p(x)u'(x))'$ neexistuje v každém bodě $x \in (0, 1)$. Také požadavek na hladkost řešení u samotného je fakticky o řád nižší. Dále nemusíme požadovat spojitost funkce f . Stačí, aby integrály v (4.1.9) byly konečné. Dá se tedy očekávat, že třída úloh řešitelných v slabém smyslu bude širší. Další předností tohoto přístupu je, že nemusíme explicitně vyžadovat splnění Neumannovy okrajové podmínky. Při volbě dostatečně široké třídy váhových funkcí v bude její splnění vyplývat z rovností (4.1.9).

Poznamenejme ještě, že vztah typu (4.1.7) (bez přechodu k (4.1.9)) slouží k definování tzv. *silného řešení* okrajové úlohy.



Obr. 4. Příklad testovací funkce.

4.1.3. Souvislost slabého a klasického řešení. Všimněme si nejprve následující skutečnosti. Platí-li rovnost $\int_0^1 w(x)v(x) dx = 0$ pro dostatečně širokou třídu funkcí v , potom funkce w v uvedeném integrálu musí být nulová skoro všude na $(0, 1)$. Jinak by totiž nebyla zaručena nulovost zmíněného integrálu. Toto tvrzení se někdy nazývá základním lemmatem variačního počtu a podrobněji se o něm lze poučit v odborné literatuře. Takovou dostatečně širokou třídou funkcí je například třída všech hladkých funkcí, které mají na intervalu $(0, 1)$ všechny (spojité) derivace a které jsou nulové vně nějakých uzavřených intervalů ležících uvnitř $(0, 1)$. Příklad takové funkce je na obr. 4, kde funkce v je spojitá na $(0, 1)$ a nulová vně intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle \subset (0, 1)$. Interval $\langle \alpha, \beta \rangle$ se může obecně pro jednotlivé funkce z této třídy lišit.

Obraťme nyní svoji pozornost k slabému řešení okrajové úlohy (4.1.1) definovanému v předcházejícím odstavci a předpokládejme, že pro toto slabé řešení u je funkce pu' diferencovatelná a že funkce f je spojitá. Potom lze rovnost (4.1.9) integrací per partes a užitím podmínky $v(1) = 0$ upravit na tvar

$$(4.1.10) \quad \int_0^1 \left[- (p(x)u'(x))' - f(x) \right] v(x) dx - p(0)u'(0)v(0) = 0.$$

Protože tato rovnost má platit pro všechny váhové funkce v jako rovnost (4.1.9), plyne odtud (a z úvahy zmíněné v úvodu tohoto odstavce), že

$$-(p(x)u'(x))' - f(x) = 0, \quad -p(0)u'(0) = 0, \quad x \in (0, 1).$$

Slabé řešení u je tedy z a u v e d e n ý c h o k o l n o s t í současně klasickým řešením. Naproti tomu, klasické řešení je v ž d y zároveň slabým řešením.

4.1.4. Princip Galerkinovy metody. Zavedení pojmu slabého řešení nám umožní zobecnit Galerkinovu metodu ve srovnání s výkladem v odst. 4.1.1. Při výpočtu koeficientů přibližného řešení tvaru $\tilde{u}(x) = c_1w_1(x) + c_2w_2(x) + c_3w_3(x)$ nevycházíme nyní z požadavku (4.1.5), ale z podmínky (4.1.9) vystupující v definici slabého řešení. Stejně jako u klasické Galerkinovy metody volíme báze funkce w_i , $i = 1, 2, 3$, a váhové funkce v_i , $i = 1, 2, 3$, tak aby splývaly ($w_i = v_i$, $i = 1, 2, 3$). Splnění předepsané Neumannovy podmínky explicitně nevyžadujeme, žádáme pouze, aby $v_i(1) = 0$, $i = 1, 2, 3$. Koeficienty c_1, c_2, c_3 určíme tedy ze soustavy podmínek

$$(4.1.11) \quad \int_0^1 p(x)\tilde{u}'(x)v_i'(x) dx = \int_0^1 f(x)v_i(x) dx, \quad i = 1, 2, 3.$$

Je vidět, že požadavek na hladkost báze funkcí v_i je v tomto případě o řád menší než v odst. 4.1.1. To například umožňuje volit funkce v_i po částech lineární. Dosadíme-li do (4.1.11) $\tilde{u}(x) = c_1v_1(x) + c_2v_2(x) + c_3v_3(x)$, dostaneme soustavu tří lineárních

algebraických rovnic

$$(4.1.12) \quad \begin{aligned} \int_0^1 p(x) [c_1 v_1'(x) + c_2 v_2'(x) + c_3 v_3'(x)] v_1'(x) dx &= \int_0^1 f(x) v_1(x) dx, \\ \int_0^1 p(x) [c_1 v_1'(x) + c_2 v_2'(x) + c_3 v_3'(x)] v_2'(x) dx &= \int_0^1 f(x) v_2(x) dx, \\ \int_0^1 p(x) [c_1 v_1'(x) + c_2 v_2'(x) + c_3 v_3'(x)] v_3'(x) dx &= \int_0^1 f(x) v_3(x) dx, \end{aligned}$$

pro neznámé koeficienty c_1, c_2, c_3 . Nalezené přibližné řešení \tilde{u} splňuje Dirichletovu okrajovou podmínku $u(1) = 0$ díky zvoleným bázevým funkcím. Požadovanou Neumannovu okrajovou podmínku splňuje funkce \tilde{u} pouze přibližně.

4.1.5. Příklad. Vyloženou obecnější Galerkinovu metodu budeme ilustrovat na příkladu jednoduché okrajové úlohy

$$(4.1.13) \quad -u'' = 1, \quad u'(0) = 0, \quad u(1) = 0, \quad x \in (0, 1).$$

Její slabým řešením je funkce u , která splňuje integrální rovnost

$$(4.1.14) \quad \int_0^1 u'(x) v'(x) dx = \int_0^1 v(x) dx$$

pro všechny váhové funkce v , které splňují podmínku $v(1) = 0$. Snadno ověříme, že tímto řešením je funkce $u(x) = \frac{1}{2}(1 - x^2)$ a že je to dokonce klasické řešení.

Zvolíme dvě bázevé funkce $v_1(x) = \sin \pi x$, $v_2(x) = \sin 2\pi x$, které splňují Dirichletovu podmínku $v_i(1) = 0$, $i = 1, 2$, a evidentně nesplňují zadanou Neumannovu podmínku. Koeficienty c_1, c_2 přibližného řešení $\tilde{u}(x) = c_1 \sin \pi x + c_2 \sin 2\pi x$ určíme ze soustavy (srov. se (4.1.11) a (4.1.12))

$$\begin{aligned} c_1 \int_0^1 (\cos \pi x)^2 dx + c_2 \int_0^1 (\pi \cos x)(2\pi \cos 2\pi x) dx &= \int_0^1 \sin \pi x dx, \\ c_1 \int_0^1 (\pi \cos \pi x)(2\pi \cos 2\pi x) dx + c_2 \int_0^1 (2\pi \cos 2\pi x)^2 dx &= \int_0^1 \sin 2\pi x dx. \end{aligned}$$

Dostaneme $c_1 = 4/\pi^3$, $c_2 = 0$. Přibližným řešením úlohy (4.1.13) je tedy funkce

$$\tilde{u}(x) = \frac{4}{\pi^3} \sin \pi x.$$

Porovnáním s přesným řešením zjistíme, že

$$\max_{x \in \langle 0, 1 \rangle} |u(x) - \tilde{u}(x)| = u(0) - \tilde{u}(0) = 0,5.$$

Chyba přibližného řešení je nepříjemně velká. Klademe si proto oprávněnou otázku, jak máme volit báze funkce, abychom získali lepší aproximaci přesného řešení. Uspokojivou odpověď na tuto otázku dává až metoda konečných prvků vyložená v čl. 5. Volba báze funkcí $v_1(x) = \sin \pi x$, $v_2(x) = \sin 2\pi x$ byla na první pohled jednoduchá, ale ani zvětšením jejich počtu, tj. volbou $v_n(x) = \sin n\pi x$, $n = 1, 2, \dots, N$, nedosáhneme pronikavějšího zmenšení chyby aproximace. Pro $\tilde{u}(x) = \sum_{n=1}^N c_n \sin n\pi x$ vždy (pro libovolně velké N) bude $u(0) - \tilde{u}(0) = 0,5$. Říkáme, že posloupnost přibližných řešení \tilde{u} **n e k o n v e r g u j e** k funkci u .

4.2. Slabá formulace okrajových úloh

4.2.1. Hladké a integrovatelné funkce. Pro celé nezáporné číslo k a konečný interval $\langle a, b \rangle$ symbolem $C^k \langle a, b \rangle$ označujeme lineární prostor funkcí f definovaných na intervalu $\langle a, b \rangle$, které tam jsou spojitě a mají (pro $k > 0$) spojitě derivace až do k -tého řádu včetně. Prostor $C^k \langle a, b \rangle$ je lineární normovaný prostor s normou

$$(4.2.1) \quad \|f\|_{C^k} = \sum_{i=0}^k \max_{x \in \langle a, b \rangle} |f^{(i)}(x)|.$$

Symbolem $C^k(a, b)$ označujeme třídu funkcí spojitých na otevřeném intervalu (a, b) , které mají na tomto intervalu spojitě derivace až do k -tého řádu včetně. Třída funkcí $C^k(a, b)$ **n e n í** normovaný prostor. Místo C^0 píšeme C a chceme-li pouze stručně zaznamenat řád hladkosti funkce f , píšeme $f \in C^k$.

Symbolem $L_2(a, b)$ označíme lineární normovaný prostor reálných funkcí f definovaných skoro všude na intervalu (a, b) , pro které je integrál

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx$$

konečný. Norma funkce $f \in L_2(a, b)$ je definována vzorcem

$$(4.2.2) \quad \|f\| = \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Integraci chápeme v Lebesgueově smyslu (viz [34]), takže hodnoty funkce v bodech podmnožiny intervalu (a, b) , která má nulovou míru, „nehrají žádnou roli“ a neovlivní hodnotu integrálu (funkce f nemusí být na takové podmnožině vůbec definována). Do prostoru $L_2(a, b)$ patří např. po částech spojitě omezené funkce.

Poznamenejme, že *nulový prvek* v normovaném prostoru je reprezentován funkcí w , pro kterou je $\|w\| = 0$. Konvergence $f_n \rightarrow f$ v normovaném prostoru znamená, že $\|f_n - f\| \rightarrow 0$ pro $n \rightarrow \infty$. Jestliže každá cauchyovská posloupnost v normovaném prostoru B

je v tomto prostoru konvergentní, říkáme, že B je *úplný prostor*. Lze ukázat, že $C^k \langle a, b \rangle$ a $L_2(a, b)$ jsou úplné prostory.

Pro každé dvě funkce $f, g \in L_2(a, b)$ definujeme *skalární součin* vztahem

$$(4.2.3) \quad (f, g) = \int_a^b f(x)g(x) \, dx.$$

V prostoru $L_2(a, b)$ je mezi skalárním součinem a normou jednoduchý vztah

$$\|f\| = \sqrt{(f, f)}.$$

Říkáme, že norma v $L_2(a, b)$ je generována skalárním součinem. Úplný normovaný prostor, v němž definovaný skalární součin má tuto vlastnost, se nazývá *Hilbertův prostor*. Pro libovolné dvě funkce $f, g \in L_2(a, b)$ platí důležitá *Schwarzova nerovnost*

$$(4.2.4) \quad \left| \int_a^b f(x)g(x) \, dx \right| \leq \left(\int_a^b |f(x)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b |g(x)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

kterou stručně píšeme v tvaru

$$|(f, g)| \leq \|f\| \cdot \|g\|.$$

Obecně symbolem $L_p(a, b)$, $p > 0$, označujeme úplný normovaný prostor funkcí f s normou

$$\|f\|_{L_p} = \left(\int_a^b |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Pro $p \neq 2$ není tento prostor Hilbertovým prostorem. Pro $p = 1$ hovoříme o *prostoru integrovatelných funkcí*.

4.2.2. Sobolevovy prostory. *Zobecněnou derivací* funkce $f \in L_2(a, b)$ nazýváme takovou integrovatelnou funkci g , pro niž platí $f(x) = \int_a^x g(\xi) \, d\xi + C$. Značíme tradičně $g = f'$. Analogicky definujeme zobecněné derivace vyšších řádů.

Symbolem $W_2^1(a, b)$ označujeme podmnožinu všech funkcí $f \in L_2(a, b)$, pro které zobecněná derivace f' existuje a patří opět do $L_2(a, b)$. Do prostoru $W_2^1(a, b)$ patří např. spojitě omezené funkce, které mají po částech spojitou omezenou derivaci. Dokonce lze ukázat, že každý prvek prostoru $W_2^1(a, b)$ lze reprezentovat tzv. absolutně spojitou funkcí. (Přesněji řečeno jsou prvky prostoru $W_2^1(a, b)$ třídy funkcí lišících se navzájem nanejvýš na množině bodů nulové míry.) Množina $W_2^1(a, b)$ je úplným normovaným prostorem s normou

$$(4.2.5) \quad \|f\|_1 = \left[\int_a^b (|f(x)|^2 + |f'(x)|^2) \, dx \right]^{\frac{1}{2}}$$

a nazývá se *Sobolevův prostor*. V tomto prostoru definujeme skalární součin funkcí $f, g \in W_2^1(a, b)$ předpisem

$$(4.2.6) \quad (f, g)_1 = \int_a^b [f(x)g(x) + f'(x)g'(x)] dx.$$

Prostor $W_2^1(a, b)$ je Hilbertovým prostorem vzhledem ke skalárnímu součinu (4.2.6), neboť $\|f\|_1 = \sqrt{(f, f)_1}$. Proto také platí Schwarzova nerovnost $|(f, g)_1| \leq \|f\|_1 \|g\|_1$. Rovnost $f = g$ v prostoru $W_2^1(a, b)$ znamená, že $\|f - g\|_1 = 0$. Konvergence $f_n \rightarrow f$ v prostoru $W_2^1(a, b)$ znamená, že $\|f_n - f\|_1 \rightarrow 0$ pro $n \rightarrow \infty$.

Obecně symbolem $W_2^k(a, b)$, k přirozené číslo, označujeme Sobolevův prostor těch funkcí $f \in L_2(a, b)$, jejichž všechny zobecněné derivace až do řádu k patří do $L_2(a, b)$. Normu v prostoru $W_2^k(a, b)$ definujeme předpisem

$$(4.2.7) \quad \|f\|_k = \left(\sum_{j=0}^k \int_a^b |f^{(j)}(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Sobolevovy prostory hrají důležitou roli v teorii okrajových úloh. Řada okrajových úloh popisující rozumné fyzikální situace nemá klasické řešení. S dostatečnou obecností (máme na mysli vlastnosti koeficientů a pravé strany rovnice) lze však zaručit, že řešením je funkce z prostoru $W_2^k(a, b)$ (pro rovnice $2k$ -tého řádu na intervalu (a, b)), jejíž zobecněné derivace až do řádu k patří do $L_2(a, b)$.

Protože každá funkce $f \in W_2^1(a, b)$ je spojitá na $\langle a, b \rangle$, mají smysl hodnoty $f(a)$, $f(b)$ a můžeme proto vytvářet vhodné podmnožiny funkcí prostoru $W_2^1(a, b)$ charakterizované hodnotami těchto funkcí v některých bodech intervalu $\langle a, b \rangle$. Například pro daná čísla g_0, g_1 definujeme dvojici množin

$$\begin{aligned} V_g &= \{u \in W_2^1(0, 1) : u(0) = g_0, u(1) = g_1\}, \\ V &= \{v \in W_2^1(0, 1) : v(0) = 0, v(1) = 0\}, \end{aligned}$$

nebo

$$\begin{aligned} V_g &= \{u \in W_2^1(0, 1) : u(0) = g_0\}, \\ V &= \{v \in W_2^1(0, 1) : v(0) = 0\}. \end{aligned}$$

Tyto podmnožiny prostoru $W_2^1(0, 1)$, a některé další, podobným způsobem konstruované, budeme užívat v d e f i n i c i s l a b é h o řešení okrajové úlohy (viz odst. 4.1.2). Je zřejmé, že V_g a V splývají (tj. $V_g = V$), když čísla g_0, g_1 jsou nuly.

Například úloze s okrajovými podmínkami $-p(0)u'(0) = g_0$, $u(1) = g_1$ přiřadíme množiny

$$\begin{aligned} V_g &= \{u \in W_2^1(0, 1) : u(1) = g_1\}, \\ V &= \{v \in W_2^1(0, 1) : v(1) = 0\}. \end{aligned}$$

Úloze s Neumannovými, příp. Newtonovými podmínkami na obou koncích intervalu můžeme také přiřadit dvojici množin V_g a V , ovšem klademe

$$V_g \equiv V \equiv W_2^1(0, 1).$$

Množinu V_g přiřazenou okrajové úloze nazveme *prostorem přípustných funkcí*, neboť v ní budeme hledat řešení dané okrajové úlohy. Množina V bude *prostorem testovacích (váhových) funkcí* dané krajové úlohy. Pro každou okrajovou úlohu bude množina V vždy lineárním prostorem. Pro okrajovou úlohu s nehomogenní Dirichletovou okrajovou podmínkou bude vždy $V \neq V_g$ a V_g nebude lineární prostor. Termín „prostor“ je však i zde oprávněný, neboť v takovém případě je V_g tzv. *afinní prostor* a každý prvek $u \in V_g$ lze vyjádřit ve tvaru $u = u_0 + v$, kde u_0 je jistý prvek z V_g a v je prvek z odpovídajícího lineárního prostoru V .

4.2.3. Slabé řešení Dirichletovy úlohy. Pro standardní okrajovou úlohu s Dirichletovými podmínkami

$$(4.2.8) \quad \begin{aligned} -(p(x)u')' + q(x)u &= f(x), \quad x \in (0, 1), \\ u(0) &= g_0, \quad u(1) = g_1 \end{aligned}$$

v níž $p \not\equiv 0$, q , f jsou dané funkce a g_0 , g_1 jsou dané konstanty, definujeme *prostor přípustných funkcí*

$$V_g = \{u \in W_2^1(0, 1) : u(0) = g_0, u(1) = g_1\}$$

a *prostor testovacích funkcí* (v odst. 4.1.1 jsme poněkud neurčitě mluvili o třídě váhových funkcí)

$$V = \{v \in W_2^1(0, 1) : v(0) = 0, v(1) = 0\}.$$

Funkce u je *slabým řešením* úlohy (4.2.8), má-li tyto vlastnosti:

- (i) $u \in V_g$ (tj. u je přípustná funkce),
- (ii) pro každou testovací funkci $v \in V$ platí integrální rovnost

$$(4.2.9) \quad \int_0^1 [p(x)u'(x)v'(x) + q(x)u(x)v(x)] dx = \int_0^1 f(x)v(x) dx.$$

Vlastnost (i) vystihuje nejen požadavek splnění daných okrajových podmínek, ale i požadavek integrovatelnosti (s druhou mocninou) funkce u a její zobecněné derivace. Jestliže funkce u splňuje vlastnost (ii), říkáme, že u splňuje diferenciální rovnici (4.2.8) v *slabém smyslu*.

4.2.4. Slabé řešení standardní okrajové úlohy. Uvažujme standardní okrajovou úlohu

$$(4.2.10) \quad \begin{aligned} -(p(x)u')' + q(x)u &= f(x), \quad x \in (0, 1), \\ \alpha_0 u(0) - \beta_0 p(0)u'(0) &= g_0, \quad \alpha_1 u(1) + \beta_1 p(1)u'(1) = g_1, \end{aligned}$$

kde $p \not\equiv 0$, q , f jsou dané funkce, g_0 , g_1 dané konstanty a α_0 , β_0 , α_1 , β_1 jsou dané konstanty takové, že platí

$$|\alpha_0| + |\beta_0| \neq 0, \quad |\alpha_1| + |\beta_1| \neq 0.$$

Této úloze přiřadíme prostor V_g přípustných funkcí a prostor V testovacích funkcí následujícím způsobem v závislosti na hodnotách konstant α_0 , β_0 , α_1 , β_1 :

- a) $\alpha_0 = 1$, $\beta_0 = 0$, $\alpha_1 = 1$, $\beta_1 = 0$: provedeno v odst. 4.2.3;
- b) $\beta_0 \neq 0$, $\beta_1 \neq 0$: $V_g \equiv V \equiv W_2^1(0, 1)$;
- c) $\alpha_0 \neq 0$, $\beta_0 = 0$, $\beta_1 \neq 0$: $V = \{v \in W_2^1(0, 1) : v(0) = 0\}$,
 $V_g = \left\{u \in W_2^1(0, 1) : u(0) = \frac{g_0}{\alpha_0}\right\}$;
- d) $\beta_0 \neq 0$, $\alpha_1 \neq 0$, $\beta_1 = 0$: $V = \{v \in W_2^1(0, 1) : v(1) = 0\}$,
 $V_g = \left\{u \in W_2^1(0, 1) : u(1) = \frac{g_1}{\alpha_1}\right\}$.

Funkce u je *slabým řešením úlohy* (4.2.10), má-li tyto vlastnosti:

- (i) $u \in V_g$,
- (ii) pro každou (testovací) funkci $v \in V$ platí integrální rovnost

$$(4.2.11) \quad \begin{aligned} &\int_0^1 [p(x)u'(x)v'(x) + q(x)u(x)v(x)] dx + \frac{\alpha_0}{\beta_0}u(0)v(0) + \frac{\alpha_1}{\beta_1}u(1)v(1) = \\ &= \int_0^1 f(x)v(x) dx + \frac{g_0}{\beta_0}v(0) + \frac{g_1}{\beta_1}v(1). \end{aligned}$$

Této rovnosti rozumíme tak, že pokud $\beta_0 = 0$ nebo $\beta_1 = 0$, pak členy, v nichž by se dělilo nulou, z (4.2.11) vynecháme. Eventuální Dirichletova okrajová podmínka je respektována výběrem prostoru V_g přípustných funkcí.

4.2.5. Věta. Budiž dána okrajová úloha (4.2.10) a předpokládejme, že funkce p a q jsou na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ omezené a měřitelné, $f \in L_2(0, 1)$ a že pro skoro všechna $x \in \langle 0, 1 \rangle$ platí

$$(4.2.12) \quad p_1 \geq p(x) \geq p_0 > 0, \quad q(x) \geq 0.$$

Okrajové podmínky v (4.2.10) necht' jsou takové, že

$$(4.2.13) \quad \begin{aligned} \alpha_0 \geq 0, \quad \alpha_1 \geq 0, \quad \beta_0 \geq 0, \quad \beta_1 \geq 0, \\ \alpha_0 + \beta_0 > 0, \quad \alpha_1 + \beta_1 > 0. \end{aligned}$$

(1) Necht' $q(x) \not\equiv 0$. Pak existuje právě jedna funkce $u \in V_g$, která je slabým řešením úlohy (4.2.10).

(2) Necht' $q(x) \equiv 0$ a necht' alespoň jedna z konstant α_0, α_1 je nenulová. Pak existuje právě jedno slabé řešení okrajové úlohy (4.2.10).

(3) Necht' $q(x) \equiv 0, \alpha_0 = \alpha_1 = 0$. Pak k tomu, aby existovalo slabé řešení okrajové úlohy

$$-(p(x)u')' = f(x), \quad -\beta_0 p(0)u'(0) = g_0, \quad \beta_1 p(1)u'(1) = g_1,$$

je nutné a stačí, aby platilo

$$(4.2.14) \quad \int_0^1 f(x) dx + \frac{g_0}{\beta_0} + \frac{g_1}{\beta_1} = 0.$$

Na množině $\tilde{V} = \{u \in W_2^1(0, 1) : \int_0^1 u(x) dx = 0\}$ je toto řešení jediné.

4.2.6. Abstraktní formulace okrajové úlohy. Jak uvidíme později, je účelné zavést následující označení členů integrální rovnosti (4.2.11):

$$(4.2.15) \quad \begin{aligned} a(u, v) = \int_0^1 [p(x)u'(x)v'(x) + q(x)u(x)v(x)] dx + \\ + \frac{\alpha_0}{\beta_0} u(0)v(0) + \frac{\alpha_1}{\beta_1} u(1)v(1), \end{aligned}$$

$$(4.2.16) \quad F(v) = \int_0^1 f(x)v(x) dx + \frac{g_0}{\beta_0} v(0) + \frac{g_1}{\beta_1} v(1).$$

Je-li $\beta_0 = 0$ nebo $\beta_1 = 0$, pak výraz, v němž by se dělilo nulou, v uvedených vztazích vynecháme. Rovnost (4.2.11) budeme nyní zapisovat ve tvaru

$$(4.2.17) \quad a(u, v) = F(v).$$

Výraz $a(u, v)$ chápeme jako zobrazení $a: W_2^1(0, 1) \times W_2^1(0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, které je lineární v obou proměnných, tj. pro $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ platí

$$\begin{aligned} a(\alpha u_1 + \beta u_2, v) &= \alpha a(u_1, v) + \beta a(u_2, v), \\ a(u, \alpha v_1 + \beta v_2) &= \alpha a(u, v_1) + \beta a(u, v_2). \end{aligned}$$

Takovému zobrazení $a(u, v)$ říkáme *bilineární forma*. Je patrné, že pro bilineární formu (4.2.15) platí

$$(4.2.18) \quad a(u, v) = a(v, u).$$

Říkáme, že tato forma je *symetrická*.

Okrajová úloha	Prostor	Prostor	Bilineární forma $a(u, v)$	Lineární forma $F(v)$
	$V_g \subset W_2^1(0, 1)$	$V \subset W_2^1(0, 1)$	$u \in V_g, v \in V$	$v \in V, f \in L_2(0, 1)$
$-(p(x)u')' + q(x)u = f(x),$ $u(0) = g_0, u(1) = g_1$	$u(0) = g_0,$ $u(1) = g_1$	$v(0) = 0,$ $v(1) = 0$	$\int_0^1 [p(x)u'v' + q(x)uv] dx$	$\int_0^1 f(x)v dx$
$-(p(x)u')' + q(x)u = f(x),$ $u(0) = g_0, p(1)u'(1) = g_1$	$u(0) = g_0$	$v(0) = 0$	$\int_0^1 [p(x)u'v' + q(x)uv] dx$	$\int_0^1 f(x)v dx + g_1v(1)$
$-(p(x)u')' + q(x)u = f(x),$ $\sigma_0 u(0) - p(0)u'(0) = g_0, u(1) = g_1$	$u(1) = g_1$	$v(1) = 0$	$\int_0^1 [p(x)u'v' + q(x)uv] dx +$ $+\sigma_0 u(0)v(0)$	$\int_0^1 f(x)v dx + g_0v(0)$
$-(p(x)u')' + q(x)u = f(x),$ $-p(0)u'(0) = g_0, p(1)u'(1) = g_1$	$V_g = W_2^1(0, 1)$	$V = W_2^1(0, 1)$	$\int_0^1 [p(x)u'v' + q(x)uv] dx$	$\int_0^1 f(x)v dx + g_0v(0) +$ $+g_1v(1)$
$-(p(x)u')' + q(x)u = f(x),$ $\alpha_0 u(0) - \beta_0 p(0)u'(0) = g_0,$ $\alpha_1 u(1) + \beta_1 p(1)u'(1) = g_1$	$V_g = W_2^1(0, 1)$ pro $\beta_0 \neq 0,$ $\beta_1 \neq 0$	$V = W_2^1(0, 1)$ pro $\beta_0 \neq 0$ $\beta_1 \neq 0$	$\int_0^1 [p(x)u'v' + q(x)uv] dx +$ $+(\alpha_0/\beta_0)u(0)v(0) +$ $+(\alpha_1/\beta_1)u(1)v(1)$	$\int_0^1 f(x)v dx +$ $+(g_0/\beta_0)v(0) +$ $+(g_1/\beta_1)v(1)$
$-(p(x)u')' + \gamma(x)u' + q(x)u = f(x),$ $u(0) = g_0, u(1) = g_1$	$u(0) = g_0,$ $u(1) = g_1$	$v(0) = 0$ $v(1) = 0$	$\int_0^1 [p(x)u'v' + \gamma(x)u'v +$ $+q(x)uv] dx$	$\int_0^1 f(x)v dx$

Tab. 4. Formulace typických okrajových úloh pro obyčejné diferenciální rovnice 2. řádu.

Podobně výraz $F(v)$ chápeme jako zobrazení (funkcionál) $F: W_2^1(0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, které je lineární, tj. pro $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ platí

$$F(\alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha F(v_1) + \beta F(v_2).$$

Říkáme, že $F(v)$ je *lineární forma* nebo *lineární funkcionál*.

Každé standardní okrajové úloze přiřazujeme bilineární formu $a(u, v)$ a lineární formu $F(v)$ tak, že slabá formulace této úlohy může být zapsána ve tvaru (4.2.17). Pro nejběžnější okrajové úlohy jsme konkrétní tvary těchto forem seřadili v tab. 4, kde zároveň uvádíme základní vlastnosti odpovídajících prostorů přípustných a testovacích funkcí.

4.2.7. Variační úlohy. Řadu okrajových úloh můžeme také chápat jako úlohu stanovit tzv. stacionární bod vhodně definovaného funkcionálu.

Nechť Y je nějaký lineární prostor funkcí a nechť X je množina funkcí taková, že s každým svým prvkem u obsahuje také všechny funkce $u + tw$, kde $t \in \mathbb{R}$, $w \in Y$. Nechť dále $\Psi: X \rightarrow \mathbb{R}$ je funkcionál, kterým je každé funkci $v \in X$ přiřazeno reálné číslo $\Psi(v)$. *Variace funkcionálu* Ψ v bodě $u \in X$ a ve směru $w \in Y$ je pak definována vztahem

$$(4.2.19) \quad d\Psi(u; w) = \frac{d}{dt} \Psi(u + tw) \big|_{t=0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [\Psi(u + tw) - \Psi(u)].$$

Říkáme, že funkcionál Ψ je *stacionární* v bodě u nebo že u je *stacionárním bodem* funkcionálu Ψ , platí-li

$$(4.2.20) \quad d\Psi(u; w) = 0 \quad \forall w \in Y.$$

Konkrétní vlastnosti funkcionálu Ψ dovolují rozhodnout, zda stacionární bod je bodem minima, maxima či tzv. sedlovým bodem.

Variační úlohou rozumíme úlohu stanovit stacionární bod daného funkcionálu. Mezi okrajovými a variačními úlohami je úzká souvislost. Jestliže okrajovou úlohu chápeme jako úlohu najít funkci $u \in V_g$ takovou, že platí $a(u, w) = F(w)$ pro každou funkci $w \in V$ a bilineární forma $a(u, w)$ je *s y m e t r i c k á*, potom stacionární bod funkcionálu $\Phi: V_g \rightarrow \mathbb{R}$ definovaného předpisem

$$(4.2.21) \quad \Phi(v) = \frac{1}{2} a(v, v) - F(v)$$

je řešením zmíněné okrajové úlohy. Dá se totiž ukázat, že podmínka (4.2.20) má v tomto případě tvar

$$(4.2.22) \quad a(u, w) - F(w) = 0 \quad \forall w \in V.$$

Zde prostor V_g přípustných funkcí hraje roli prostoru X a prostor V testovacích funkcí hraje roli prostoru Y .

Pro okrajovou úlohu (4.2.10) s bilineární formou (4.2.15) bude mít funkcionál Φ tvar

$$(4.2.23) \quad \begin{aligned} \Phi(v) = & \frac{1}{2} \int_0^1 [p(x)(v'(x))^2 + q(x)v^2(x)] dx + \frac{1}{2} \frac{\alpha_0}{\beta_0} v^2(0) + \\ & + \frac{1}{2} \frac{\alpha_1}{\beta_1} v^2(1) - \int_0^1 f(x)v(x) dx - \frac{g_0}{\beta_0} v(0) - \frac{g_1}{\beta_1} v(1), \quad v \in V_g. \end{aligned}$$

Jsou-li splněny předpoklady věty 4.2.5 a není-li současně $q(x) \equiv 0$, $\alpha_0 = \alpha_1 = 0$, má funkcionál (4.2.23) jediný stacionární bod u a tento bod je dokonce bodem minima tohoto funkcionálu, tj. platí

$$(4.2.24) \quad \Phi(u) = \min_{v \in V_g} \Phi(v).$$

V tomto případě není těžké ukázat, že okrajová úloha a variační úloha jsou ekvivalentní, tj. obě řeší jedna a táž funkce u ([25], [26]). Ekvivalenci okrajové úlohy a příslušné variační úlohy lze dokázat v řadě případů. Podrobně se těmito otázkami zabývá kniha [38].

Variační metodou pro řešení okrajové úlohy nazýváme postup, který se opírá o poznatek, že okrajová úloha psaná ve tvaru (4.2.22) může být interpretována jako podmínka pro stacionární bod určitého funkcionálu. (Obecně tedy nemusí jít o úlohu týkající se minima či maxima.) Funkcionál (4.2.21) mívá v aplikacích význam energie a hovoří se potom o *energetickém funkcionálu*. Lze ovšem sestavit příklady variačních úloh, kde příslušné funkcionály přímou fyzikální interpretaci nemají. Je-li např. $R(x; v)$ reziduum diferenciální rovnice $-(p(x)v')' + q(x)v = f(x)$, potom řešení u okrajové úlohy s takovou rovnicí je bodem minima funkcionálu

$$(4.2.25) \quad \Phi(v) = \int_0^1 [R(x; v)]^2 dx$$

na prostoru funkcí v splňujících některé (nebo všechny) zadané okrajové podmínky. Variační metoda založená na minimalizaci funkcionálu (4.2.25) se nazývá *metoda nejmenších čtverců*. Existuje řada variant této metody, jejíž součástí je i samotná konstrukce vhodného funkcionálu Φ typu (4.2.25).

4.3. Galerkinova metoda

4.3.1. Báze lineárního prostoru testovacích funkcí. Předpokládáme, že čtenář je seznámen s pojmem báze v prostoru konečné dimenze. Pro lineární (normované) prostory V spojené s okrajovými úlohami pro diferenciální rovnice je však typické, že nemají konečnou dimenzi. Znamená to, že řešení takových úloh se nedá vyjádřit (s výjimkou některých jednoduchých úloh) ve tvaru konečné lineární kombinace jednoduchých elementárních funkcí.

Báze lineárního normovaného prostoru V se definuje jako posloupnost $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$, jejíž členy mají tyto vlastnosti:

- (i) $v_n \in V$, $n = 1, 2, \dots$;
- (ii) pro každé přirozené číslo N jsou funkce

$$(4.3.1) \quad v_1, v_2, \dots, v_N$$

lineárně nezávislé (tj. $\sum_{n=1}^N \beta_n v_n = 0$ pouze když $\beta_n = 0$, $n = 1, 2, \dots, N$);

(iii) každou funkci $v \in V$ lze s libovolnou přesností aproximovat konečnou lineární kombinací typu

$$(4.3.2) \quad v^{(N)} = \sum_{n=1}^N \alpha_n v_n,$$

kde α_n , $n = 1, 2, \dots, N$, jsou čísla. Znamená to, že pro každé $v \in V$ a ke každému $\epsilon > 0$ lze najít takové N a $v^{(N)}$ tvaru (4.3.2), že

$$(4.3.3) \quad \|v - v^{(N)}\|_V < \epsilon.$$

Symbolem $V^{(N)}$ budeme označovat množinu všech funkcí $v^{(N)} \in V$ tvaru (4.3.2). Množina $V^{(N)}$ je lineárním prostorem a funkce (4.3.1) tvoří jeho bázi. Říkáme jim proto *bázové funkce*. Dimenze prostoru $V^{(N)}$ je rovna číslu N . S ohledem na vlastnost (iii) báze prostoru V říkáme, že systém prostorů $V^{(N)}$ generovaný touto bází *aproximuje* prostor V .

4.3.2. Výklad Galerkinovy metody. Příklad $V = V_g$. Budeme uvažovat standardní okrajovou úlohu, jejíž slabé řešení $u \in V$ je definováno rovností

$$(4.3.4) \quad a(u, v) = F(v)$$

platnou pro všechny testovací funkce $v \in V$. Omezujeme se tedy na úlohy, u nichž prostor přípustných funkcí splývá s prostorem testovacích funkcí. Tak je tomu např. u Neumannovy úlohy a Newtonovy úlohy (odst. 4.2.4), případně u okrajové úlohy s homogenní Dirichletovou podmínkou. Nechť daná úloha splňuje předpoklady věty 4.2.5.

Předpokládáme, že jsou nám známy bázové funkce v_1, v_2, v_3, \dots prostoru V . Prvních N těchto funkcí tvoří bázi konečně-dimenzionálního podprostoru $V^{(N)}$ prostoru V . Galerkinova metoda nyní spočívá v tom (srov. odst. 4.1.4), že *přibližné řešení* úlohy (4.3.4) se hledá jako taková funkce $u^{(N)} \in V^{(N)}$, která splňuje rovnost

$$(4.3.5) \quad a(u^{(N)}, v^{(N)}) = F(v^{(N)})$$

pro každou funkci $v^{(N)} \in V^{(N)}$, tj. pro každou funkci tvaru (4.3.2). Funkci $u^{(N)} \in V^{(N)}$ definovanou požadavkem (4.3.5) nazýváme také *Galerkinova aproximace* funkce

u (v prostoru $V^{(N)}$). Vlastnosti báзовých funkcí a předpoklady věty 4.2.5 zaručují, že úloha (4.3.5) má právě jedno řešení $u^{(N)} \in V^{(N)}$ ([6]). Úloze (4.3.5) říkáme *přibližná úloha* ve smyslu Galerkinovy metody.

Je zřejmé, že přibližné řešení $u^{(N)} \in V^{(N)}$ musí být tvaru

$$(4.3.6) \quad u^{(N)} = \sum_{n=1}^N c_n v_n.$$

Volíme-li v (4.3.5) za $v^{(N)}$ postupně všechny báзовé funkce v_n , $n = 1, 2, \dots, N$, prostoru $V^{(N)}$ a dosadíme-li za $u^{(N)}$ z (4.3.6), dostaneme jednoznačně řešitelnou soustavu N lineárních algebraických rovnic pro neznámé c_1, c_2, \dots, c_N (tzv. *Galerkinova soustava*)

$$(4.3.7) \quad \sum_{n=1}^N c_n a(v_n, v_j) = F(v_j), \quad j = 1, 2, \dots, N.$$

Obráceně, platí-li (4.3.7), tj. $a(u^{(N)}, v_j) = F(v_j)$, $j = 1, 2, \dots, N$, pro všechny báзовé funkce, plyne odtud platnost (4.3.5) pro libovolnou funkci $v^{(N)} \in V^{(N)}$ tvaru (4.3.2). Funkce $u^{(N)}$ tvaru (4.3.6) je proto hledanou Galerkinovou aproximací slabého řešení $u \in V$.

Označíme-li $F_j = F(v_j)$, $\mathbf{F} = [F_1, F_2, \dots, F_N]^T$, $\mathbf{c} = [c_1, c_2, \dots, c_N]^T$, $\boldsymbol{\alpha} = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N]^T$, bude

$$a(u^{(N)}, v^{(N)}) = \sum_{n=1}^N \sum_{j=1}^N c_n \alpha_j a(v_n, v_j) = \boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{A} \mathbf{c},$$

$$F(v^{(N)}) = \sum_{n=1}^N \alpha_n F(v_n) = \boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{F}.$$

Matice \mathbf{A} definovaná bilineární formou $a(\cdot, \cdot)$ se nazývá (v souvislosti s aplikacemi především v teorii pružnosti) *matice tuhosti* a vektor \mathbf{F} *vektor zatížení*. Prvky matice \mathbf{A} označujeme $a_{nj} = a(v_n, v_j)$. Vektorový zápis rovnosti (4.3.5) je

$$\boldsymbol{\alpha}^T (\mathbf{A} \mathbf{c} - \mathbf{F}) = 0.$$

Odtud pak máme maticový tvar soustavy (4.3.7)

$$(4.3.8) \quad \mathbf{A} \mathbf{c} = \mathbf{F}.$$

Protože bilineární forma $a(u, v)$ odpovídající standardní okrajové úloze je symetrická (viz odst. 4.2.6 a tab. 4), bude i matice \mathbf{A} definovaná touto formou symetrická.

4.3.3. Příklad. Uvažujme okrajovou úlohu

$$(4.3.9) \quad \begin{aligned} -(p(x)u')' + q(x)u &= f(x), \quad x \in (0, 1), \\ -p(0)u'(0) &= g_0, \quad u(1) = 0, \end{aligned}$$

v níž obecně $g_0 \neq 0$ a funkce p, q, f splňují předpoklady věty 4.2.5. Máme zde (viz tab. 4)

$$\begin{aligned} V &= V_g \equiv \{v \in W_2^1(0, 1) : v(1) = 0\}, \\ a(u, v) &= \int_0^1 [p(x)u'(x)v'(x) + q(x)u(x)v(x)] dx, \\ F(v) &= \int_0^1 f(x)v(x) dx + g_0v(0). \end{aligned}$$

Předpokládejme, že známe bázi prostoru V . Všechny báze funkce $v_n, n = 1, 2, \dots$, tedy splňují homogenní Dirichletovu podmínku $v_n(1) = 0$. Zvolíme přirozené číslo N . Galerkinovu aproximaci $u^{(N)} \in V^{(N)}$,

$$u^{(N)} = \sum_{n=1}^N c_n v_n,$$

řešení u okrajové úlohy (4.3.9) definujeme rovností (4.3.5), tj. v našem případě rovností

$$(4.3.10) \quad \begin{aligned} &\int_0^1 [p(x)(u^{(N)}(x))'(v^{(N)}(x))' + q(x)u^{(N)}(x)v^{(N)}(x)] dx \\ &= \int_0^1 f(x)v^{(N)}(x) dx + g_0v^{(N)}(0), \end{aligned}$$

kde $v^{(N)}$ je libovolná lineární kombinace funkcí v_1, v_2, \dots, v_N . Neznámé koeficienty c_1, c_2, \dots, c_N vypočítáme ze soustavy (4.3.8), v níž jsou prvky matice \mathbf{A} dány vzorci

$$a_{nj} = a(v_n, v_j) = \int_0^1 [p(x)v_n'(x)v_j'(x) + q(x)v_n(x)v_j(x)] dx, \quad n, j = 1, 2, \dots, N,$$

a složky vektoru \mathbf{F} vzorci

$$F_j = F(v_j) = \int_0^1 f(x)v_j(x) dx + g_0v_j(0), \quad j = 1, 2, \dots, N.$$

Jednoznačná řešitelnost soustavy $\mathbf{A}\mathbf{c} = \mathbf{F}$, tj. regularita (symetrické) matice \mathbf{A} , je zaručena lineární nezávislostí báze funkcí a jednoznačnou řešitelností úlohy (4.3.9).

4.3.4. Poznámka. Volba systému lineárně nezávislých funkcí v_1, v_2, \dots, v_N tvořících bázi prostoru $V^{(N)}$ není obvykle obtížná. Samotná konstrukce soustavy $\mathbf{Ac} = \mathbf{F}$ je tedy rutinní záležitost. Ovšem aby nám tato volba současně umožnila určit bázi prostoru V a měli jsme tak možnost vyhovět požadavku (iii) z odst. 4.3.1, museli bychom provést dosti hluboké teoretické úvahy [38]. Výsledky těchto úvah nám pak umožňují dělat závěry o konvergenci posloupnosti přibližných řešení $u^{(N)}$ k přesnému řešení u (když $N \rightarrow \infty$). V čl. 5 popíšeme konstrukci bázevých funkcí, které požadavky odst. 4.3.1 splňují.

4.3.5. Příklad. Chceme Galerkinovou metodou řešit okrajovou úlohu (srov. s příkladem 4.1.5)

$$\begin{aligned} -u'' &= 1, & x \in (0, 1), \\ u(0) &= u(1) = 0. \end{aligned}$$

Zde (viz tab. 4)

$$\begin{aligned} V &= V_g \equiv \{v \in W_2^1(0, 1) : v(0) = v(1) = 0\}, \\ a(u, v) &= \int_0^1 u'(x)v'(x) \, dx, & F(v) &= \int_0^1 v(x) \, dx. \end{aligned}$$

Např. funkce $v_n(x) = \sin n\pi x$, $n = 1, 2, \dots$, tvoří bázi prostoru V . (Zdůvodnění lze provést na základě teorie Fourierových řad.) Vezmeme první z nich $v_1(x) = \sin \pi x$. Všechny její násobky $\alpha \sin \pi x$ tvoří lineární prostor $V^{(1)}$ dimenze 1. V prostoru $V^{(1)}$ má Galerkinova aproximace tvar

$$u^{(1)}(x) = c_1 \sin \pi x.$$

Z podmínky

$$a(u^{(1)}, v_1) = F(v_1)$$

dostaneme

$$c_1 a(v_1, v_1) = F(v_1).$$

Protože

$$a(v_1, v_1) = \int_0^1 \pi^2 \cos^2 \pi x \, dx = \frac{\pi^2}{2}, \quad F(v_1) = \int_0^1 \sin \pi x \, dx = \frac{2}{\pi},$$

máme

$$c_1 = \frac{4}{\pi^3},$$

a tedy

$$u^{(1)}(x) = \frac{4}{\pi^3} \sin \pi x.$$

Protože přesným řešením úlohy je funkce $u(x) = \frac{1}{2}x(1-x)$, lze snadno zjistit, že

$$\max_{x \in \langle 0,1 \rangle} |u(x) - u^{(1)}(x)| = |u(\frac{1}{2}) - u^{(1)}(\frac{1}{2})| \doteq |0,125 - 0,129| = 4 \cdot 10^{-3}.$$

Volbou $v_1(x) = \sin \pi x$, $v_2(x) = \sin 2\pi x$ bychom analogicky dostali přibližné řešení $u^{(2)}(x) = c_1 \sin \pi x + c_2 \sin 2\pi x$, atd. Lze ukázat, že $u^{(N)}(x) = \sum_{n=1}^N c_n \sin n\pi x$ bude N -tým částečným součtem Fourierovy řady funkce $u(x)$, a tedy

$$u(x) = \lim_{N \rightarrow +\infty} u^{(N)}(x).$$

4.3.6. Příklad. Galerkinovou metodou řešme okrajovou úlohu

$$\begin{aligned} -(p(x)u')' + u &= f(x), \quad x \in (0, 1), \\ u(0) &= u(1) = 0, \end{aligned}$$

kde

$$p(x) = \begin{cases} 1\,000, & x \in \langle 0, \frac{1}{2} \rangle, \\ 1, & x \in (\frac{1}{2}, 1), \end{cases} \quad f(x) = 1\,000.$$

Zde

$$\begin{aligned} V &= V_g \equiv \{v \in W_2^1(0, 1) : v(0) = v(1) = 0\}, \\ a(u, v) &= \int_0^1 [p(x)u'(x)v'(x) + u(x)v(x)] \, dx, \\ F(v) &= \int_0^1 1\,000v(x) \, dx. \end{aligned}$$

Za báze funkce zvolíme $v_n(x) = \sin n\pi x$ a prostor $V^{(N)}$ bude potom tvořen všemi funkcemi tvaru

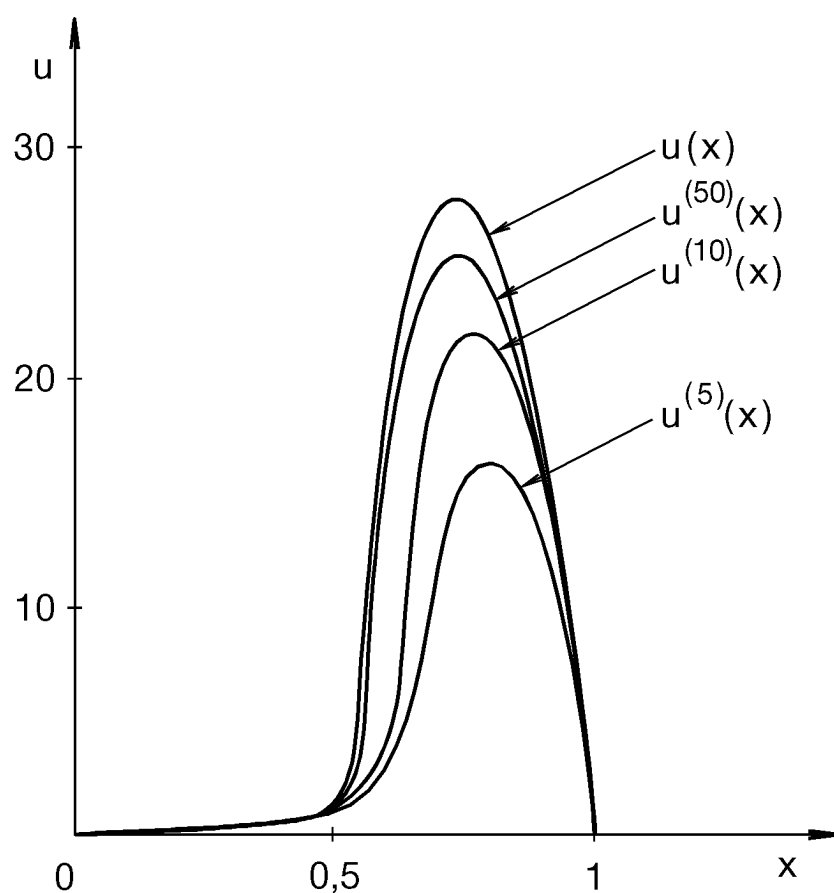
$$v^{(N)}(x) = \sum_{n=1}^N \alpha_n \sin n\pi x.$$

Galerkinovu aproximaci řešení $u \in V$ hledáme tedy ve tvaru

$$u^{(N)}(x) = \sum_{n=1}^N c_n \sin n\pi x.$$

Prvky a_{nj} matice tuhosti \mathbf{A} a složky F_j vektoru \mathbf{F} soustavy $\mathbf{Ac} = \mathbf{F}$ jsou dány vzorci ([19], str. 89)

$$\begin{aligned} a_{nn} &= \frac{1\,001n^2\pi^2}{4} + \frac{1}{2}, \\ a_{nj} &= a_{jn} = \frac{999}{2}nj\pi \left(\frac{\sin \frac{(n+j)\pi}{2}}{n+j} + \frac{\sin \frac{(n-j)\pi}{2}}{n-j} \right), \quad n \neq j, \\ F_j &= \frac{1\,000(1 - \cos j\pi)}{j\pi}. \end{aligned}$$



Obr. 5. Galerkinovy aproximace $u^{(N)}(x)$ pro $N = 5, 10, 50$.

Z obr. 5 vidíme, že musíme volit dosti velké N , aby $u^{(N)}$ byla dobrá aproximace slabého řešení u naší úlohy.

4.3.7. Příklad $V \neq V_g$. Úloha s nehomogenní Dirichletovou podmínkou.

V případě okrajové úlohy s nehomogenní Dirichletovou okrajovou podmínkou musíme způsob konstrukce Galerkinovy soustavy popsany v předcházejících odstavcích poněkud modifikovat.

Vezmeme opět prvních N bázevých funkcí v_1, v_2, \dots, v_N prostoru V testovacích funkcí. Tím určíme prostor $V^{(N)}$ dimenze N . Tyto funkce a každá jejich konečná lineární kombinace splňují příslušnou homogenní Dirichletovu okrajovou podmínku (viz odst. 4.2.3 a tab. 4). Kromě toho sestrojíme funkci v_0 , která splňuje zadanou nehomogenní okrajovou podmínku, tj. $v_0 \in V_g$. Přibližné řešení $u^{(N)}$ budeme pak hledat ve tvaru

$$(4.3.11) \quad u^{(N)} = v_0 + \sum_{n=1}^N c_n v_n.$$

Pro úlohu nalézt $u \in V_g$ tak, že platí

$$(4.3.12) \quad a(u, v) = F(v) \quad \forall v \in V,$$

určíme přibližné řešení tvaru (4.3.11) z podmínky, že rovnost

$$(4.3.13) \quad a(u^{(N)}, v^{(N)}) = F(v^{(N)})$$

musí platit pro každou funkci $v^{(N)} \in V^{(N)}$. Přibližné řešení $u^{(N)}$ tedy patří do afinního prostoru (viz odst. 4.2.2), který značíme $V_g^{(N)} = v_0 + V^{(N)}$.

Dosadíme-li z (4.3.11) do (4.3.13) a volíme-li za $v^{(N)}$ postupně všechny bázové funkce v_n , $n = 1, 2, \dots, N$, prostoru $V^{(N)}$, dostaneme Galerkinovu soustavu ve tvaru

$$a\left(v_0 + \sum_{n=1}^N c_n v_n, v_j\right) = F(v_j), \quad j = 1, 2, \dots, N,$$

neboli

$$(4.3.14) \quad \sum_{n=1}^N c_n a(v_n, v_j) = F(v_j) - a(v_0, v_j), \quad j = 1, 2, \dots, N.$$

Označíme-li $a_j = a(v_0, v_j)$, $\mathbf{a} = [a_1, a_2, \dots, a_N]^T$ a zachováme-li označení z odst. 4.3.2, můžeme soustavu (4.3.14) psát maticově ve tvaru

$$(4.3.15) \quad \mathbf{A}\mathbf{c} = \mathbf{F} - \mathbf{a}.$$

Účelnost explicitního vypisování vektoru \mathbf{a} v soustavě (4.3.15) bude patrná z dalšího výkladu.

Vraťme se ještě ke konstrukci funkce v_0 . Možností jak volit tuto funkci je celá řada. Jsou-li zadány okrajové podmínky

$$(4.3.16) \quad u(0) = g_0, \quad g_0 \neq 0, \quad p(1)u'(1) = g_1,$$

volíme např. $v_0(x) \equiv g_0$ a bázové funkce $v_n(x)$, $n = 1, 2, \dots, N$, volíme tak, aby $v_n(0) = 0$. Jsou-li zadány okrajové podmínky

$$(4.3.17) \quad -p(0)u'(0) = g_0, \quad u(1) = g_1, \quad g_1 \neq 0,$$

volíme např. $v_0(x) \equiv g_1$ a bázové funkce $v_n(x)$, $n = 1, 2, \dots, N$, volíme tak, aby $v_n(1) = 0$. Jsou-li zadány Dirichletovy okrajové podmínky na obou koncích

$$(4.3.18) \quad u(0) = g_0, \quad u(1) = g_1, \quad g_0, g_1 \neq 0,$$

volíme např. $v_0(x) = g_0 + (g_1 - g_0)x$ a bázové funkce $v_n(x)$, $n = 1, 2, \dots, N$, volíme tak, aby $v_n(0) = v_n(1) = 0$.

Uvedme na závěr, že např. pro standardní okrajovou úlohu s podmínkami (4.3.16) jsou složky vektoru \mathbf{a} v (4.3.15) při volbě $v_0(x) \equiv g_0$ dány vzorci

$$(4.3.19) \quad a_j = a(v_0, v_j) = \int_0^1 q(x)g_0v_j(x)dx, \quad j = 1, 2, \dots, N.$$

4.3.8. Galerkinova metoda pro nestandardní okrajové úlohy. Přibližné řešení $u^{(N)}$ sestrojujeme v případě nestandardních úloh formálně stejným způsobem, jako jsme to pro standardní úlohy dělali v odst. 4.3.2 a 4.3.7. O řešitelnosti Galerkinových soustav rovnic nyní ovšem musíme rozhodnout individuálně, větu 4.2.5 zde obecně zužít nelze. Na rozdíl od standardních úloh bude v případě nesymetrické formy $a(u, v)$ matice \mathbf{A} Galerkinovy soustavy nesymetrická.

4.4. Ritzova metoda

4.4.1. Princip metody. Ritzovou metodou řešíme přibližně variační úlohu najít $u \in V_g$ tak, že platí

$$(4.4.1) \quad \Phi(u) \leq \Phi(v) \quad \forall v \in V_g,$$

přičemž funkcionál $\Phi: V_g \rightarrow \mathbb{R}$ je dán předpisem (4.2.23) a je přiřazen okrajové úloze se symetrickou bilineární formou $a(u, v)$. Při výkladu se opět nejdříve omezíme na případ $V = V_g$ (srov. odst. 4.3.2). Pro konkrétnost budeme předpokládat, že řešíme standardní okrajovou úlohu, která splňuje předpoklady věty 4.2.5 a v níž není současně $q(x) = 0$ a $\alpha_0 = \alpha_1 = 0$.

Stejně jako u Galerkinovy metody v odst. 4.3.2 předpokládáme, že jsou nám známy báze funkce v_1, v_2, v_3, \dots , prostoru V . Prvních N těchto funkcí tvoří bázi konečně-dimenzionálního podprostoru $V^{(N)}$ prostoru V .

Jestliže $u \in V$ je řešením variační úlohy (4.4.1), tj.

$$(4.4.2) \quad \Phi(u) = \min_{v \in V} \Phi(v),$$

potom *Ritzova metoda* spočívá v tom, že se hledá taková funkce $u^{(N)} \in V^{(N)}$ tvaru

$$(4.4.3) \quad u^{(N)} = \sum_{n=1}^N c_n v_n,$$

která řeší variační úlohu najít $u^{(N)} \in V^{(N)}$ tak, že platí

$$(4.4.4) \quad \Phi(u^{(N)}) = \min_{v^{(N)} \in V^{(N)}} \Phi(v^{(N)}).$$

Označíme-li $\mathbf{c} = [c_1, c_2, \dots, c_N]^T$ vektor neznámých koeficientů v (4.4.3) a dále označíme

$$\mathbf{A} = [a_{nj}], \quad \mathbf{F} = [F_1, F_2, \dots, F_N]^T,$$

kde $a_{nj} = a(v_n, v_j)$, $F_n = F(v_n)$, můžeme minimální hodnotu funkcionálu Φ psát ve tvaru

$$(4.4.5) \quad \Phi(u^{(N)}) = \frac{1}{2} a(u^{(N)}, u^{(N)}) - F(u^{(N)}) = \frac{1}{2} \mathbf{c}^T \mathbf{A} \mathbf{c} - \mathbf{c}^T \mathbf{F}.$$

Z matematické analýzy víme, že nutnou podmínkou minima kvadratické funkce $\frac{1}{2}\mathbf{c}^T\mathbf{A}\mathbf{c} - \mathbf{c}^T\mathbf{F}$ proměnných c_1, c_2, \dots, c_N je nulovost jejího gradientu. Dostáváme se tak k podmínce

$$(4.4.6) \quad \mathbf{A}\mathbf{c} - \mathbf{F} = \mathbf{0}.$$

To je soustava lineárních algebraických rovnic pro neznámé c_1, c_2, \dots, c_N . Tato soustava je totožná s Galerkinovou soustavou (4.3.8). Vlastnosti báзовých funkcí, symetrie formy $a(u, v)$ a předpoklady věty 4.2.5 zaručují, že matice \mathbf{A} je symetrická a pozitivně definitní, a tedy regulární. Podmínka (4.4.6) je proto i postačující podmínkou minima kvadratické funkce $\frac{1}{2}\mathbf{c}^T\mathbf{A}\mathbf{c} - \mathbf{c}^T\mathbf{F}$.

Pozitivní definitnost matice \mathbf{A} nemáme zaručenou (stejně jako u Galerkinovy metody) v případě (řešitelné) Neumannovy okrajové úlohy, v níž $q(x) \equiv 0$. Tato Neumannova úloha má nekonečně mnoho řešení lišících se aditivní konstantou (viz větu 1.2.6); matice \mathbf{A} bude v tomto případě singulární a soustava (4.4.6) bude mít nekonečně mnoho řešení.

Ritzovu metodu užíváme k řešení takové okrajové úlohy, která je ekvivalentní s variační úlohou (4.4.1).

4.4.2. Příklad. Chceme Ritzovou metodou řešit okrajovou úlohu z příkl. 4.3.5: $-u'' = 1$, $u(0) = u(1) = 0$. Protože pro tuto úlohu je bilineární forma $a(u, v) = \int_0^1 u'v' dx$ symetrická na prostoru $V = \{v \in W_2^1(0, 1) : v(0) = v(1) = 0\} = V_g$, je řešení u dané úlohy bodem minima funkcionálu

$$\Phi(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - F(v) = \frac{1}{2} \int_0^1 [(v'(x))^2 - 2v(x)] dx.$$

Z báзовých funkcí $\{\sin n\pi x\}_{n=1}^\infty$ prostoru V (splňujících dané homogenní Dirichletovy podmínky) vezmeme první funkci $v_1(x) = \sin \pi x$ a označíme $V^{(1)}$ lineární prostor všech násobků funkce v_1 . Přibližné řešení $u^{(1)} \in V^{(1)}$ podle Ritzovy metody hledáme tedy ve tvaru $u^{(1)} = c_1 v_1$ a koeficient c_1 určíme tak, aby platilo

$$\Phi(u^{(1)}) = \min_{v^{(1)} \in V^{(1)}} \Phi(v^{(1)}).$$

Máme

$$\begin{aligned} \Phi(u^{(1)}) &= \frac{1}{2} \int_0^1 [(c_1 v_1'(x))^2 - 2(c_1 v_1(x))] dx = \\ &= \frac{1}{2} c_1^2 \pi^2 \int_0^1 \cos^2 \pi x dx - c_1 \int_0^1 \sin \pi x dx = \\ &= \frac{\pi^2}{4} c_1^2 - \frac{2}{\pi} c_1. \end{aligned}$$

Z podmínky minima

$$\frac{d\Phi}{dc_1} = \frac{\pi^2}{2} c_1 - \frac{2}{\pi} = 0$$

plyne $c_1 = 4/\pi^3$, a tedy $u^{(1)} = (4/\pi^3) \sin \pi x$. Dostali jsme stejný výsledek jako Galerkinovou metodou v příkl. 4.3.5, což by nás vzhledem k ekvivalenci okrajové a variační úlohy nemělo překvapit.

4.4.3. Příklad. Ritzovou metodou řešíme okrajovou úlohu

$$-u'' + u = 1, \quad x \in (0, 1), \quad u(0) = 0, \quad u'(1) = 0.$$

Také zde je bilineární forma (viz tab. 4) $a(u, v) = \int_0^1 (u'v' + uv) dx$ symetrická na prostoru $V = \{v \in W_2^1(0, 1) : v(0) = 0\} = V_g$. Budeme tedy minimalizovat funkcionál

$$\Phi(v) = \frac{1}{2}a(u, v) - F(v) = \frac{1}{2} \int_0^1 [(v'(x))^2 + v^2(x)] dx - \int_0^1 v(x) dx.$$

V prostoru V zvolíme lineárně nezávislé funkce

$$v_1(x) = x, \quad v_2(x) = x^2, \quad v_3(x) = x^3,$$

které určují třídimenzionální prostor $V^{(3)}$ všech lineárních kombinací těchto funkcí. Přibližné řešení

$$u^{(3)} = c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3$$

určíme minimalizací kvadratické funkce $\Phi(u^{(3)}) = \frac{1}{2} \mathbf{c}^T \mathbf{A} \mathbf{c} - \mathbf{c}^T \mathbf{F}$, kde

$$\mathbf{A} = [a_{nj}], \quad \mathbf{F} = [F_1, F_2, F_3]^T, \quad \mathbf{c} = [c_1, c_2, c_3]^T.$$

Snadno vypočteme ($n, j = 1, 2, 3$)

$$a_{nj} = a(v_n, v_j) = \int_0^1 (njx^{n+j-2} + x^{n+j}) dx = \frac{nj}{n+j-1} + \frac{1}{n+j+1},$$

$$F_n = F(v_n) = \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}.$$

Podmínka minima $\mathbf{A} \mathbf{c} - \mathbf{F} = \mathbf{0}$ má zde tvar

$$\begin{bmatrix} \frac{4}{3} & \frac{5}{4} & \frac{6}{5} \\ \frac{5}{4} & \frac{23}{15} & \frac{5}{3} \\ \frac{6}{5} & \frac{5}{3} & \frac{68}{35} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

Odtud dostaneme $\mathbf{c} \doteq [0, 724\,554; -0, 378\,357; 0, 005\,729\,40]^T$. Porovnání vypočteného přibližného řešení

$$u^{(3)} = x(0, 724\,554 - 0, 378\,357x + 0, 005\,729\,4x^2)$$

s přesným řešením

$$u(x) = \frac{\sinh 1}{\cosh 1} \sinh x - \cosh x + 1$$

je provedeno v tab. 5.

	$x = 0$	$x = 0,25$	$x = 0,5$	$x = 0,75$	$x = 1$
u	0 (dáno)	0,160 975	0,269 237	0,331 588	0,351 946
$u^{(3)}$	0 (dáno)	0,157 581	0,268 404	0,333 007	0,351 926
$u - u^{(3)}$	0	0,003 394	0,000 833	-0,001 419	0,000 020
u'	0,761 594	0,532 906	0,337 698	0,163 706	0 (dáno)
$(u^{(3)})'$	0,724 554	0,536 450	0,350 494	0,166 687	-0,014 972
$(u - u^{(3)})'$	0,037 040	-0,003 544	-0,012 796	-0,002 981	0,014 972

Tab. 5. Hodnoty přesného řešení u , přibližného řešení $u^{(3)}$ a jejich prvních derivací.

4.4.4. Poznámka. Společným problémem Ritzovy i Galerkinovy metody a v podstatě všech metod Galerkinova typu je výběr vhodných báзовých funkcí. Volba polynomů, kterou jsme použili v příkl. 4.4.3, má svoje přednosti (jednoduché výpočty), ale i nedostatky. Matice \mathbf{A} bude obecně vždy plná a pro větší N (v zájmu lepší aproximace řešení) mohou být eliminační algoritmy časově náročné. To ve srovnání se soustavami získanými diferenční metodou, u nichž jsou matice pásové, je dosti vážný nedostatek. U zmíněných polynomů pak ještě vyvstává problém s konvergencí metody, resp. s prověřením podmínek konvergence, neboť vlastnost (iii) báзовých funkcí z odst. 4.3.1 zůstává často (jako v příkl. 4.4.3) ve fázi hypotézy.

Na druhé straně předností metod Galerkinova typu oproti diferenčním metodám je jejich bližší vazba na výchozí vyšetřovaný fyzikální problém na jedné straně a na současnou teorii okrajových úloh na straně druhé. Kromě toho rozvoj počítačů umožnil rozšířit principy metod Galerkinova typu na řadu úloh technické praxe díky speciálnímu a přitom standardnímu výběru báзовých funkcí, který vede k soustavám rovnic se speciálními maticemi a dovoluje tedy použít k řešení těchto soustav speciální rychlé algoritmy. Různé formy diskretizace okrajové úlohy na základě takové speciální konstrukce báзовých funkcí se souhrnně nazývají *metoda konečných prvků*. Někdy pro přesnost hovoříme o Galerkinově nebo Ritzově metodě konečných prvků. Podrobněji se metodou konečných prvků budeme zabývat v čl. 5 (pro obyčejné diferenciální rovnice) a v čl. 9 druhé části této série (pro parciální diferenciální rovnice eliptického typu).

4.4.5. Úloha s nehomogenní Dirichletovou podmínkou. Při výkladu Ritzovy metody jsme se v odst. 4.4.1 omezili na případ $V = V_g$. V případě, že $V \neq V_g$, postupujeme u Ritzovy metody analogicky jako u Galerkinovy metody v odst. 4.3.7. Vybereme nějakou funkci v_0 , která splňuje zadanou nehomogenní Dirichletovu podmínku,

tj. volíme $v_0 \in V_g$. Bázové funkce v_1, v_2, \dots, v_N volíme tak, že splňují příslušnou homogenní Dirichletovu podmínku. Přibližné Ritzovo řešení $u^{(N)}$ variační úlohy (4.4.1) hledáme potom ve tvaru

$$(4.4.7) \quad u^{(N)} = v_0 + \sum_{n=1}^N c_n v_n.$$

Konstanty c_1, c_2, \dots, c_N určíme nyní minimalizací kvadratické funkce (viz cvičení 4.5.5) $\Phi(u^{(N)}) = \frac{1}{2} \mathbf{c}^T \mathbf{A} \mathbf{c} + \mathbf{c}^T (\mathbf{a} - \mathbf{F}) + \frac{1}{2} a_{00} - F_0$, kde matice \mathbf{A} a vektory \mathbf{c} , \mathbf{F} jsou definovány stejně jako v odst. 4.4.1, vektor \mathbf{a} je shodný s vektorem \mathbf{a} z odst. 4.3.7 a $a_{00} = a(v_0, v_0)$, $f_0 = f(v_0)$. Podmínka minima této kvadratické funkce má tvar (srov. (4.3.15))

$$(4.4.8) \quad \mathbf{A} \mathbf{c} + \mathbf{a} - \mathbf{F} = \mathbf{0}.$$

Poznamenejme, že čísla a_{00} , F_0 k určení přibližného řešení (4.4.7) nepotřebujeme (vysvětlete!).

4.5. Cvičení

4.5.1. Galerkinovou metodou řešte okrajovou úlohu $-u'' = 1, x \in (0, 1)$, $u(0) = u(1) = 0$. Jako bázové funkce volte $v_1(x) = \sin \pi x$, $v_2(x) = \sin 3\pi x$. Získané přibližné řešení porovnejte s přesným řešením $u(x) = \frac{1}{2}x(1-x)$. [$u^{(2)}(x) = (4/\pi^3) \sin \pi x + (4/27\pi^3) \sin 3\pi x$.]

4.5.2. Sestavte Galerkinovu soustavu $\mathbf{A} \mathbf{c} = \mathbf{F}$ pro okrajovou úlohu $-((1+x^2)u')' + x^2u = x^3$, $x \in (0, 1)$, $u(0) = u(1) = 0$. Jako bázové funkce volte a) $v_n(x) = x^n(1-x)$, $n = 1, 2, \dots, N$; b) $v_n(x) = \sin n\pi x$, $n = 1, 2, \dots, N$. [Návod: Jde o případ $V = V_g$. Postupujte podobně jako v příkl. 4.3.3 a napište vzorce pro výpočet prvků matice \mathbf{A} a složek vektoru \mathbf{F} .]

4.5.3. Sestavte Galerkinovu soustavu pro nelineární okrajovou úlohu $-u'' = \sin u$, $x \in (0, 1)$, $u(0) = u(1) = 0$. [Návod: Postupujte obdobně jako v lineárním případě. Položte $V = V_g = \{v \in W_2^1(0, 1) : v(0) = v(1) = 0\}$ a vyjděte z integrálního vztahu

$$\int_0^1 u'(x)v'(x) dx = \int_0^1 v(x) \sin u(x) dx \quad \forall v \in V.$$

Výsledkem bude nelineární soustava algebraických rovnic pro neznámé koeficienty přibližného řešení (4.3.6).]

4.5.4. Galerkinovou metodou řešte okrajovou úlohu $-u'' - (1 + x^2)u = 1$, $x \in (-1, 1)$, $u(-1) = u(1) = 0$. Posuďte splnění předpokladů věty 4.2.5. Jako bázové funkce volte $v_1(x) = 1 - x^2$, $v_2(x) = 1 - x^4$. [Předpoklady věty 4.2.5 nejsou splněny, neboť $q(x) = -(1 + x^2) < 0$, Galerkinova soustava má však přesto jediné řešení. Získaná Galerkinova aproximace je $u^{(2)}(x) \doteq 0,988v_1(x) - 0,054v_2(x)$.]

4.5.5. Ukažte, že při řešení standardní okrajové úlohy s nehomogenní Dirichletovou podmínkou vede Ritzova metoda na soustavu lineárních algebraických rovnic (4.4.8). [Návod: Přibližné řešení hledejte ve tvaru (4.4.7) a dosadte je do funkcionálu příslušné variační úlohy. Po úpravě napište podmínku minima tohoto funkcionálu.]

5. Metoda konečných prvků

5.1. Bázové funkce Již v odst. 4.4.4 jsme se zmínili, že metodou konečných prvků rozumíme speciální konstrukci bázových funkcí v metodách Galerkinova typu. Budeme proto věnovat pozornost konstrukci takových bázových funkcí, které se v konkrétních úlohách nejčastěji užívají.

5.1.1. Definice. Předpokládáme, že okrajovou úlohu řešíme na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$. Zvolíme na tomto intervalu síť $N + 1$ uzlů

$$(5.1.1) \quad \mathcal{S} = \{x_0, x_1, \dots, x_{N-1}, x_N\}, \quad x_0 = 0, \quad x_N = 1.$$

Délky jednotlivých subintervalů $\langle x_{n-1}, x_n \rangle$ označíme $h_n = x_n - x_{n-1}$, $n = 1, 2, \dots, N$. Bázové funkce sestavujeme tak, aby

- (i) byly na každém intervalu $\langle x_{n-1}, x_n \rangle$ (tzv. *prvku*), $n = 1, 2, \dots, N$, polynomem předem zvoleného stupně $s \geq 0$;
- (ii) splňovaly jisté interpolační podmínky (budeme specifikovat později);
- (iii) měly na celém intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ určitý, předem zvolený stupeň hladkosti;
- (iv) byly nenulové na malé části intervalu $\langle 0, 1 \rangle$, obvykle na několika sousedních prvcích (o takových funkcích říkáme, že mají malý *nosič*);
- (v) byly lineárně nezávislé.

5.1.2. Po částech konstantní bázové funkce. Na síti \mathcal{S} z (5.1.1) definujeme po částech konstantní bázové funkce jedním z následujících tří způsobů.

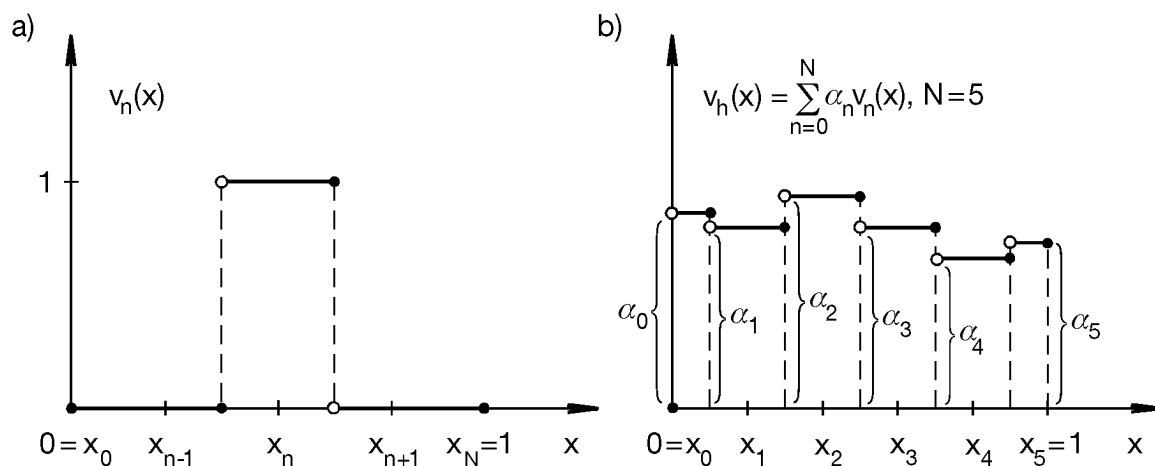
(A) Položíme (viz obr. 6a)

$$(5.1.2) \quad \begin{aligned} v_0(x) &= \begin{cases} 1, & x \in \langle x_0, x_0 + \frac{1}{2}h_1 \rangle, \\ 0 & \text{na zbývajících částech intervalu } \langle 0, 1 \rangle, \end{cases} \\ v_n(x) &= \begin{cases} 1, & x \in (x_n - \frac{1}{2}h_n, x_n + \frac{1}{2}h_{n+1}), \quad n = 1, 2, \dots, N-1, \\ 0 & \text{na zbývajících částech intervalu } \langle 0, 1 \rangle, \end{cases} \\ v_N(x) &= \begin{cases} 1, & x \in (x_N - \frac{1}{2}h_N, x_N), \\ 0 & \text{na zbývajících částech intervalu } \langle 0, 1 \rangle. \end{cases} \end{aligned}$$

Takto definované bázové funkce v_0, v_1, \dots, v_N mají tyto vlastnosti:

1. Jsou lineárně nezávislé.
2. Splňují interpolační podmínky: $v_n(x_j) = \begin{cases} 1, & j = n, \\ 0, & j \neq n. \end{cases}$
3. Jsou ortogonální na $\langle 0, 1 \rangle$, tj. platí

$$\int_0^1 v_n(x)v_j(x) dx \begin{cases} \neq 0, & j = n, \\ = 0, & j \neq n. \end{cases}$$



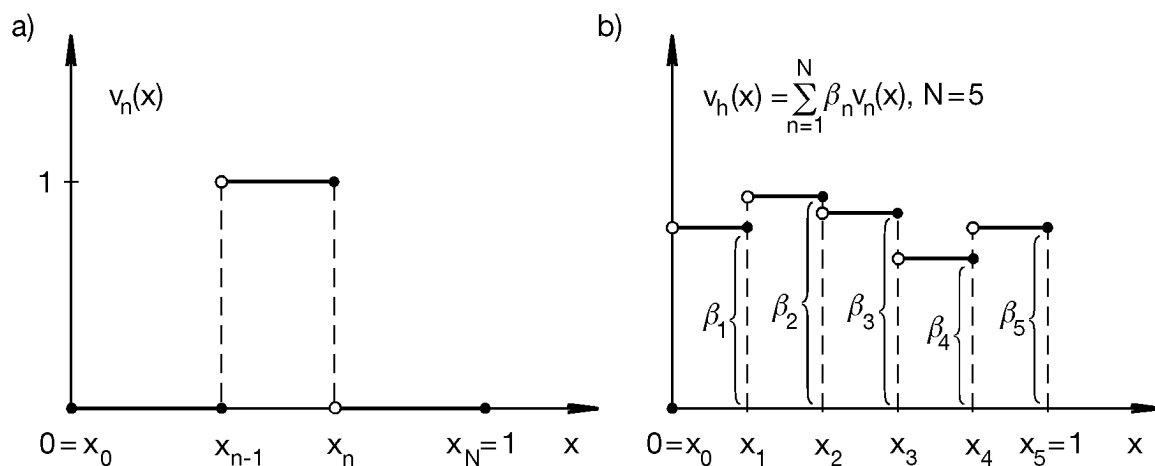
Obr. 6a. Po částech konstantní bázevé funkce typu (5.1.2).

Obr. 6b. Lineární kombinace bázevých funkcí (5.1.3).

4. Množina všech lineárních kombinací těchto bázevých funkcí tvoří lineární prostor dimenze $N+1$, který budeme označovat L^h . Libovolná funkce v_h z tohoto prostoru může být vyjádřena ve tvaru (obr. 6b)

$$(5.1.3) \quad v_h(x) = \sum_{n=0}^N \alpha_n v_n(x), \quad x \in \langle 0, 1 \rangle.$$

Koeficienty $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_N$ mají význam hodnot funkce v_h v uzlech x_n , $n = 0, 1, \dots, N$.



Obr. 7a. Po částech konstantní bázevé funkce typu (5.1.4).

Obr. 7b. Lineární kombinace bázevých funkcí (5.1.5).

(B) Položíme (viz obr. 7a)

$$(5.1.4) \quad v_n(x) = \begin{cases} 1, & x \in (x_{n-1}, x_n), \quad n = 1, 2, \dots, N, \\ 0 & \text{na zbývající části intervalu } \langle 0, 1 \rangle. \end{cases}$$

Vlastnosti těchto bázových funkcí v_1, v_2, \dots, v_N jsou patrné z obr. 7a. Lineární prostor všech funkcí typu (obr. 7b)

$$(5.1.5) \quad v_h(x) = \sum_{n=1}^N \beta_n v_n(x), \quad x \in \langle 0, 1 \rangle,$$

má dimenzi N a značíme jej opět L^h . Koeficienty $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ mají význam hodnot funkce v_h v uzlech x_n , $n = 1, 2, \dots, N$.

(C) Položíme (viz obr. 8a)

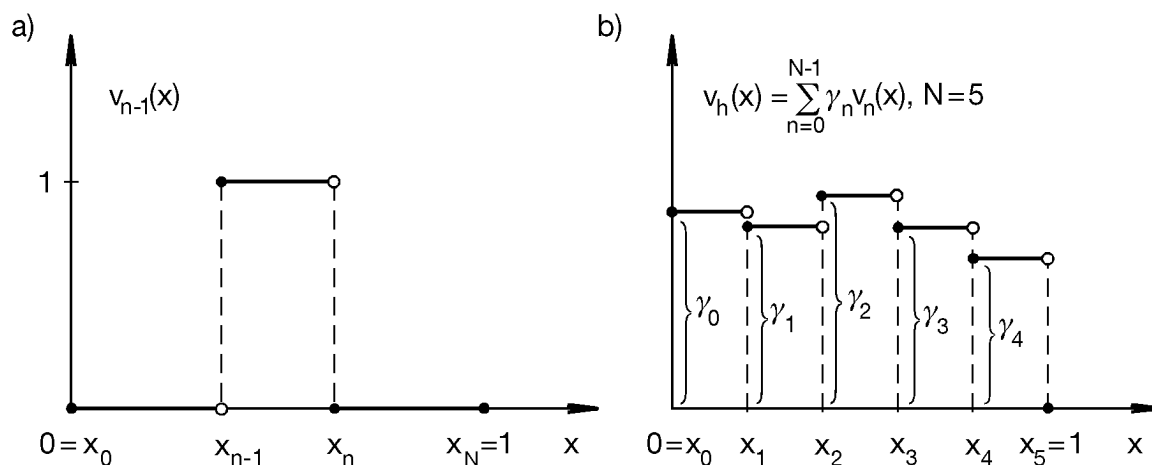
$$(5.1.6) \quad v_{n-1}(x) = \begin{cases} 1, & x \in \langle x_{n-1}, x_n \rangle, \quad n = 1, 2, \dots, N, \\ 0 & \text{na zbývajících částech intervalu } \langle 0, 1 \rangle. \end{cases}$$

Lineární prostor všech funkcí typu (obr. 8b)

$$(5.1.7) \quad v_h(x) = \sum_{n=0}^{N-1} \gamma_n v_n(x), \quad x \in \langle 0, 1 \rangle,$$

má dimenzi N a značíme jej opět L^h . Koeficienty $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{N-1}$ mají význam hodnot funkce v_h v uzlech x_n , $n = 0, 1, \dots, N-1$.

Také funkce (5.1.4) a (5.1.6) jsou ortogonální na $\langle 0, 1 \rangle$.



Obr. 8a. Po částech konstantní bázové funkce typu (5.1.6).

Obr. 8b. Lineární kombinace bázových funkcí (5.1.7).

5.1.3. Věta o aproximaci. Pro každou funkci $v \in W_2^1(0, 1)$ existuje taková po částech konstantní funkce $v_h \in L^h$ určená interpolačními podmínkami $v(x_n) = v_h(x_n)$, $n = 0, 1, \dots, N-1$, že platí

$$(5.1.8) \quad \|v - v_h\| \leq ch \|v\|_1,$$

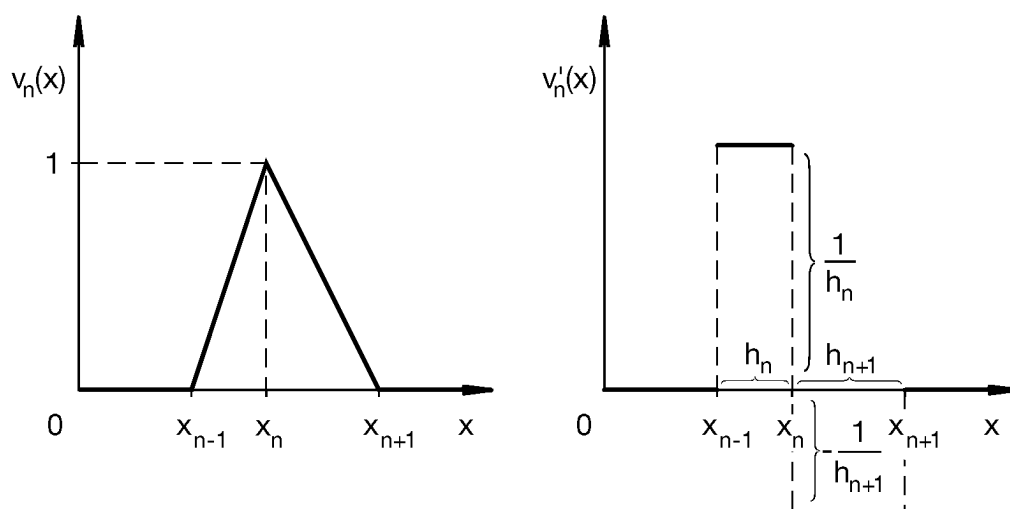
kde c nezávisí na $h = \max h_n$ a na funkci v . Norma $\|\cdot\|$ je dána vzorcem (4.2.2) a norma $\|\cdot\|_1$ vzorcem (4.2.5).

Důk a z věty lze nalézt např. v [19].

Z uvedené věty plyne, že každou funkci $v \in W_2^1(0,1)$ lze s libovolnou přesností aproximovat (v normě prostoru L_2 — odst. 4.2.1) po částech konstantní funkcí $v_h \in L^h$. Znamená to, že pro každou funkci $v \in W_2^1(0,1)$ a ke každému $\epsilon > 0$ existuje takové $h > 0$ a taková funkce $v_h \in L^h$, že platí $\|v - v_h\| < \epsilon$. Tato vlastnost v důkazech konvergence metody konečných prvků nahrazuje vlastnost (iii), odst. 4.3.1, požadovanou od báзовých funkcí v klasické Galerkinově metodě.

5.1.4. Po částech lineární báзовé funkce. Pomocí uzlů zvolené sítě $\mathcal{S} = \{x_0, x_1, \dots, x_N\}$, $x_0 = 0$, $x_N = 1$, definujeme na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ spojitě po částech lineární báзовé funkce (obr. 9; $h_n = x_n - x_{n-1}$)

$$(5.1.9) \quad \begin{aligned} v_0(x) &= \begin{cases} \frac{x_1 - x}{h_1}, & x \in \langle x_0, x_1 \rangle, \\ 0 & \text{na zbývající části intervalu } \langle 0, 1 \rangle, \end{cases} \\ v_n(x) &= \begin{cases} \frac{x - x_{n-1}}{h_n}, & x \in \langle x_{n-1}, x_n \rangle, \\ \frac{x_{n+1} - x}{h_{n+1}}, & x \in \langle x_n, x_{n+1} \rangle, \quad n = 1, 2, \dots, N-1, \\ 0 & \text{na zbývající části intervalu } \langle 0, 1 \rangle, \end{cases} \\ v_N(x) &= \begin{cases} \frac{x - x_{N-1}}{h_N}, & x \in \langle x_{N-1}, x_N \rangle, \\ 0 & \text{na zbývající části intervalu } \langle 0, 1 \rangle. \end{cases} \end{aligned}$$



Obr. 9. Po částech lineární spojitá báзовá funkce $v_n(x)$ přiřazená uzlu x_n a její zobecněná derivace $v'_n(x)$, $x \neq x_n, x_{n-1}, x_{n+1}$.

Takto definované báze funkce v_0, v_1, \dots, v_N mají tyto vlastnosti:

1. Jsou lineárně nezávislé.
2. Splňují interpolační podmínky: $v_n(x_j) = \begin{cases} 1, & j = n, \\ 0, & j \neq n. \end{cases}$
3. Jsou „skoro“ ortogonální, tj. platí

$$\int_0^1 v_n(x)v_j(x) dx \begin{cases} \neq 0 & \text{pro } |n-j| \leq 1, \\ = 0 & \text{pro } |n-j| > 1. \end{cases}$$

4. Množina všech lineárních kombinací těchto bázevých funkcí tvoří lineární prostor dimenze $N+1$, který budeme označovat V^h . Libovolná funkce v_h tohoto prostoru může být vyjádřena ve tvaru

$$(5.1.10) \quad v_h(x) = \sum_{n=0}^N \alpha_n v_n(x), \quad x \in \langle 0, 1 \rangle.$$

Koeficienty $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_N$ mají význam hodnot funkce v_h v uzlech $x_n, n = 0, 1, 2, \dots, N$, tj. $v_h(x_n) = \alpha_n$. Grafem funkce v_h je lomená čára.

Protože derivace v'_n funkce v_n (obr. 9) existuje skoro všude na $\langle 0, 1 \rangle$ a platí

$$\int_0^1 [v'_n(x)]^2 dx = \frac{1}{h_n} + \frac{1}{h_{n+1}}, \quad n = 1, 2, \dots, N-1,$$

$$\int_0^1 [v'_0(x)]^2 dx = \frac{1}{h_1}, \quad \int_0^1 [v'_N(x)]^2 dx = \frac{1}{h_N},$$

bude $v'_n \in L_2(0, 1)$, $n = 0, 1, 2, \dots, N$, a tedy také $v'_h \in L_2(0, 1)$. Znamená to, že pro každou funkci $v_h \in V^h$ (typu (5.1.10)) je $v_h \in W_2^1(0, 1)$. Jinak řečeno, $V^h \subset W_2^1(0, 1)$. Kromě toho ovšem je $V^h \subset C \langle 0, 1 \rangle$.

Restrikcí (zúžením) funkce v_h na interval $\langle x_{n-1}, x_n \rangle$, $n = 1, 2, \dots, N$, je lineární polynom tvaru

$$(5.1.11) \quad \alpha(x) = \alpha_{n-1} \frac{x_n - x}{h_n} + \alpha_n \frac{x - x_{n-1}}{h_n},$$

v němž $\alpha_{n-1} = \alpha(x_{n-1})$, $\alpha_n = \alpha(x_n)$. Jeho derivace je dána vzorcem

$$(5.1.12) \quad \alpha'(x) = \frac{\alpha_n - \alpha_{n-1}}{h_n}.$$

5.1.5. Věta o aproximaci. Pro každou funkci $v \in W_2^2(0, 1)$ existuje taková po částech lineární funkce $v_h \in V^h$ určená interpolačními podmínkami $v(x_n) = v_h(x_n)$, $n = 0, 1, \dots, N$, že platí

$$(5.1.13) \quad \begin{aligned} \|v - v_h\| &\leq c_1 h^2 \|v\|_2, \\ \|v - v_h\|_1 &\leq c_2 h \|v\|_2, \end{aligned}$$

kde konstanty c_1, c_2 nezávisí na $h = \max h_n$ a na funkci v .

Důkaz z věty lze nalézt v [19].

Věta 5.1.5 nás opravňuje k tvrzení analogickému tomu, které bylo vysloveno v závěru odst. 5.1.3: Každou funkci $v \in W_2^2(0, 1)$ lze s libovolnou přesností aproximovat po částech lineární funkcí $v_h \in V^h$. Podobná věta platí pro $v \in C^2 \langle 0, 1 \rangle$.

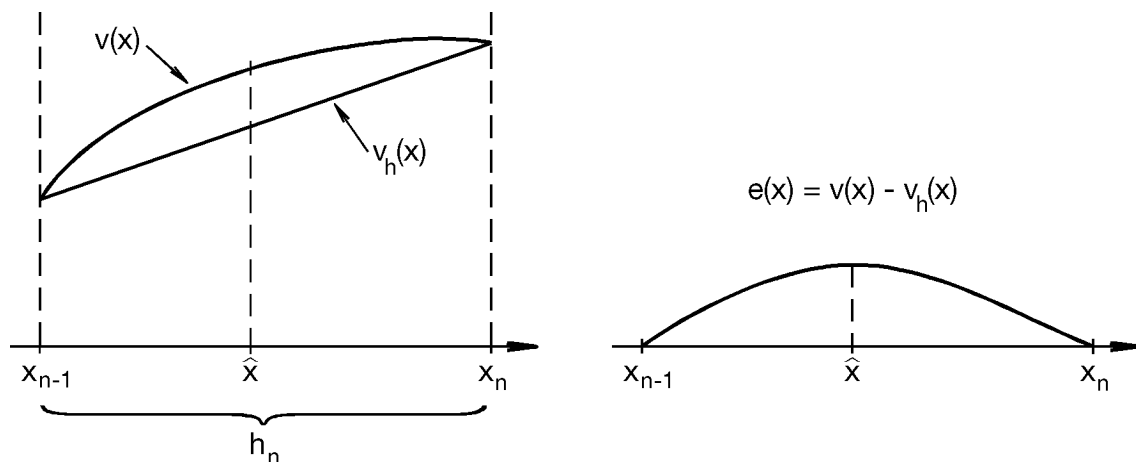
5.1.6. Věta o aproximaci. Pro každou funkci $v \in C^2 \langle 0, 1 \rangle$ existuje jediná po částech lineární funkce $v_h \in V^h$ určená interpolačními podmínkami $v_h(x_n) = v(x_n)$, $n = 0, 1, \dots, N$, tak, že platí

$$(5.1.14) \quad \begin{aligned} \|v - v_h\|_{C \langle 0, 1 \rangle} &\leq \kappa_1 h^2 \|v\|_{C^2 \langle 0, 1 \rangle}, \\ \|v - v_h\|_{C^1 \langle x_{n-1}, x_n \rangle} &\leq \kappa_2 h \|v\|_{C^2 \langle x_{n-1}, x_n \rangle}, \end{aligned}$$

kde konstanty κ_1, κ_2 nezávisí na $h = \max h_n$ ani na funkci v . (Normy v prostorech C, C^1 a C^2 jsou definovány podle vzorce (4.2.1).)

Důkaz. Pro ilustraci dokážeme alespoň první z nerovností (5.1.14). Na intervalu $\langle x_{n-1}, x_n \rangle$ jistě existuje lineární funkce v_h jednoznačně určená interpolačními podmínkami $v_h(x_{n-1}) = v(x_{n-1})$, $v_h(x_n) = v(x_n)$ (viz vzorec (5.1.11)). Označíme $e(x) = v(x) - v_h(x)$ (viz obr. 10). Z interpolačních podmínek plyne $e(x_{n-1}) = e(x_n) = 0$. Vzhledem k předpokladům věty je $e \in C^2 \langle x_{n-1}, x_n \rangle$ a jistě existuje bod $\hat{x} \in (x_{n-1}, x_n)$, v němž $|e(x)|$ nabývá maximální hodnoty a v němž $e'(\hat{x}) = 0$. Funkci e můžeme díky předpokladu o hladkosti vyjádřit ve tvaru Taylorova rozvoje v bodě \hat{x} . Platí tedy $e(x) = e(\hat{x}) + e'(\hat{x})(x - \hat{x}) + \frac{1}{2}v''(\xi)(x - \hat{x})^2$, kde ξ leží mezi x a \hat{x} (v intervalu (x_{n-1}, x_n) je totiž $e''(x) = v''(x)$). Protože $e'(\hat{x}) = 0$, máme

$$(5.1.15) \quad e(x) = e(\hat{x}) + \frac{1}{2}v''(\xi)(x - \hat{x})^2, \quad x \in \langle x_{n-1}, x_n \rangle.$$



Obr. 10. Lineární aproximace $v_h(x)$ funkce $v(x)$, $x \in \langle x_{n-1}, x_n \rangle$, a funkce chyby $e(x)$.

Položíme nyní x rovno tomu krajnímu bodu intervalu $\langle x_{n-1}, x_n \rangle$, který je blíže bodu \hat{x} . Nechť je to např. bod x_{n-1} . Platí tedy

$$(5.1.16) \quad |x_{n-1} - \hat{x}| \leq \frac{1}{2}h_n.$$

Protože $e(x_{n-1}) = 0$, dostaneme z (5.1.15) $e(\hat{x}) = -\frac{1}{2}v''(\xi)(x_{n-1} - \hat{x})^2$ a tudíž

$$|e(\hat{x})| = \max_{x_{n-1} \leq x \leq x_n} |e(x)| \leq \frac{1}{2}|x_{n-1} - \hat{x}|^2 \max_{x_{n-1} \leq x \leq x_n} |v''(x)|.$$

(V případě $x = x_n$ bychom postupovali obdobně.) Vezmeme-li v úvahu ještě (5.1.16), dostáváme na intervalu $\langle x_{n-1}, x_n \rangle$ odhad chyby $e(x)$ ve tvaru

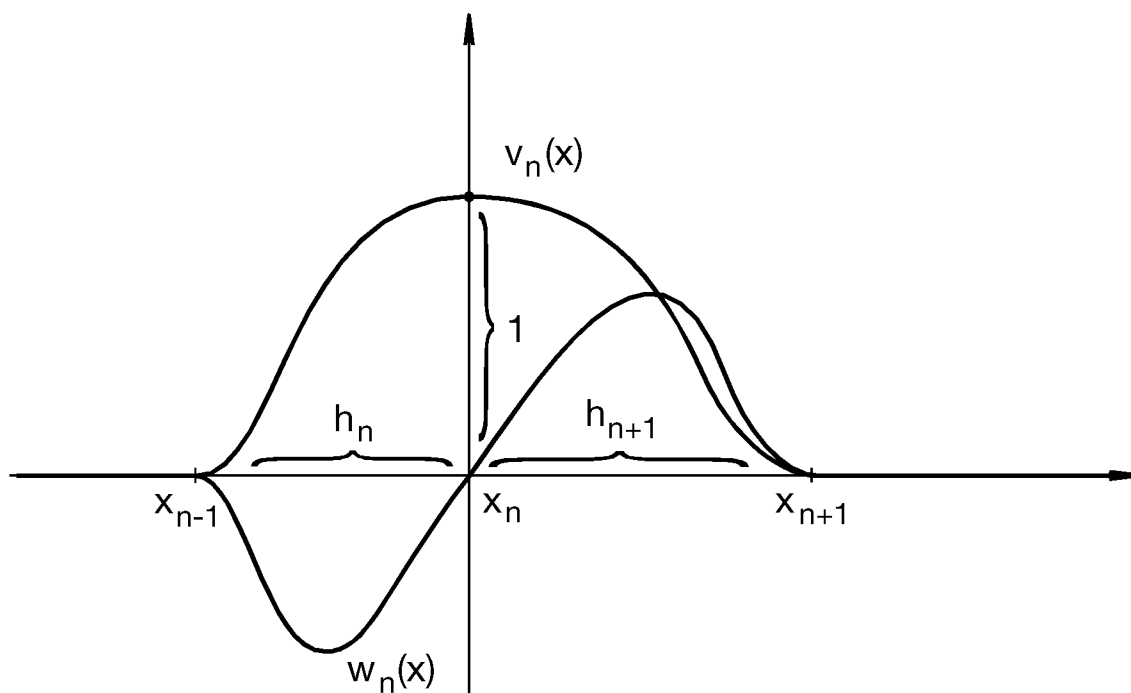
$$(5.1.17) \quad \max_{x_{n-1} \leq x \leq x_n} |e(x)| \leq \frac{1}{8}h_n^2 \max_{x_{n-1} \leq x \leq x_n} |v''(x)|.$$

Pro $v \in C^2 \langle 0, 1 \rangle$ evidentně platí

$$(5.1.18) \quad \max_{0 \leq x \leq 1} |v''(x)| \leq \max_{0 \leq x \leq 1} |v(x)| + \max_{0 \leq x \leq 1} |v'(x)| + \max_{0 \leq x \leq 1} |v''(x)|.$$

První z odhadů (5.1.14) je nyní již snadným důsledkem (5.1.17) a (5.1.18). Důkaz druhého odhadu využívá v podstatě stejnou techniku (viz [11]).

5.1.7. Po částech kubické báze funkce. Kubický polynom na intervalu $\langle x_{n-1}, x_n \rangle$ je jednoznačně určen funkčními hodnotami a hodnotami prvních derivací v koncových bodech intervalu $\langle x_{n-1}, x_n \rangle$.



Obr. 11. Po částech kubická báze funkce.

Na síti $\mathcal{S} = \{x_0, x_1, \dots, x_N\} \subset \langle 0, 1 \rangle$, $x_0 = 0$, $x_N = 1$, $h_n = x_n - x_{n-1}$, definujeme po částech kubické báze funkce v_0, v_1, \dots, v_N , w_0, w_1, \dots, w_N (obr. 11) interpolačními podmínkami

$$(5.1.19) \quad \begin{aligned} v_n(x_j) &= \begin{cases} 1, & n = j, \\ 0, & n \neq j, \end{cases} & v'_n(x_j) &= 0 \quad \text{pro } n, j = 0, 1, \dots, N; \\ w'_n(x_j) &= \begin{cases} 1, & n = j, \\ 0, & n \neq j, \end{cases} & w_n(x_j) &= 0 \quad \text{pro } n, j = 0, 1, \dots, N. \end{aligned}$$

Z těchto podmínek vypočteme, že pro $n = 1, 2, \dots, N - 1$ budou báze funkce $v_n(x)$, $w_n(x)$ určeny vzorci

$$(5.1.20) \quad v_n(x) = \begin{cases} -2\left(\frac{x - x_{n-1}}{h_n}\right)^3 + 3\left(\frac{x - x_{n-1}}{h_n}\right)^2, & x \in \langle x_{n-1}, x_n \rangle, \\ 2\left(\frac{x - x_{n+1}}{h_{n+1}}\right)^3 + 3\left(\frac{x - x_{n+1}}{h_{n+1}}\right)^2, & x \in \langle x_n, x_{n+1} \rangle, \\ 0 & \text{na zbývajících částech intervalu } \langle 0, 1 \rangle; \end{cases}$$

$$(5.1.21) \quad w_n(x) = \begin{cases} \frac{(x-x_n)(x-x_{n-1})^2}{h_n^2}, & x \in \langle x_{n-1}, x_n \rangle, \\ \frac{(x-x_n)(x-x_{n+1})^2}{h_{n+1}^2}, & x \in \langle x_n, x_{n+1} \rangle, \\ 0 & \text{na zbývajících částech intervalu } \langle 0, 1 \rangle. \end{cases}$$

Funkce $v_0(x)$ je určena druhým a třetím vztahem v (5.1.20) pro $n = 0$ a funkce $v_N(x)$ je určena prvním a třetím vztahem v (5.1.20) pro $n = N$. Funkce $w_0(x)$ je určena druhým a třetím vztahem v (5.1.21) pro $n = 0$ a funkce $w_N(x)$ je určena prvním a třetím vztahem v (5.1.21) pro $n = N$.

Takto sestrojené báze funkce jsou lineárně nezávislé a tvoří bázi lineárního prostoru V_3^h spojitě diferencovatelných po částech kubických funkcí. Každou funkci $v_h \in V_3^h$ lze psát ve tvaru

$$(5.1.22) \quad v_h(x) = \sum_{n=0}^N \alpha_n v_n(x) + \sum_{n=0}^N \beta_n w_n(x).$$

Koeficienty α_n , $n = 0, 1, \dots, N$, mají význam hodnot funkce v_h v uzlech sítě \mathcal{S} a koeficienty β_n , $n = 0, 1, \dots, N$, mají význam hodnot prvních derivací funkce v_h v uzlech sítě \mathcal{S} .

Funkce v_h z (5.1.22) je spojitá a má spojitou první derivaci v'_h na celém intervalu $\langle 0, 1 \rangle$. Druhá derivace v''_h má body nespojitosti (1. druhu) v uzlech sítě \mathcal{S} . Znamená to, že $V_3^h \subset W_2^2(0, 1)$.

5.1.8. Věta o aproximaci. Pro každou funkci $v \in W_2^k(0, 1)$, $k = 2, 3, 4$, existuje jediná funkce $v_h \in V_3^h$ typu (5.1.22) určená interpolačními podmínkami $v_h(x_n) = v(x_n)$, $v'_h(x_n) = v'(x_n)$, $n = 0, 1, \dots, N$, tak že platí

$$(5.1.23) \quad \|v - v_h\|_{W_2^s} \leq ch^{k-s} \|v\|_{W_2^k}, \quad s = 0, 1, \dots, \min(k-1, 2),$$

kde konstanta c nezávisí na $h = \max h_n$ a na funkci v .

Důk a z lze nalézt pro obecnější situaci v [19].

5.1.9. Volba báze funkce. Po částech konstantní báze funkce se užívají k aproximaci řešení okrajových úloh s rovnicí prvního řádu (u soustav prvního řádu). Po částech lineární báze funkce se užívají k aproximaci řešení okrajových úloh s rovnicí druhého řádu. Po částech kubické báze funkce lze také užít k aproximaci dostatečně hladkého řešení okrajové úlohy s rovnicí druhého řádu, ale obvykle se používají ke konstrukci přibližného řešení okrajových úloh s rovnicí čtvrtého řádu.

Protože se v dalším výkladu omezíme na úlohy s rovnicí druhého řádu, budeme ke konstrukci přibližného řešení užívat po částech lineární báze funkce a přibližné řešení bude pak také funkce po částech lineární.

5.2. Výklad metody konečných prvků

5.2.1. Příklad $V = V_g$. Uvažujme modelovou úlohu

$$(5.2.1) \quad \begin{aligned} -(p(x)u')' + q(x)u &= f(x), \quad x \in (0, 1), \\ u(0) &= 0, \quad p(1)u'(1) = 0. \end{aligned}$$

Na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ zvolíme síť $N + 1$ uzlů $\mathcal{S} = \{x_0, x_1, \dots, x_{N-1}, x_N\}$, $x_0 = 0$, $x_N = 1$, přibližné řešení u_h úlohy (5.2.1) budeme hledat jako spojitou a po částech lineární funkci. Chceme stanovit její hodnoty $U_n = u_h(x_n)$, $n = 0, 1, \dots, N$, v uzlech sítě.

Vzhledem k okrajové podmínce v bodě $x = 0$ je přirozené klást $U_0 = u(0) = 0$. Musíme tedy vypočítat U_1, U_2, \dots, U_N . K vyjádření přibližného řešení u_h uijeme po částech lineární básové funkce v_1, v_2, \dots, v_N dané vzorci (5.1.9) a u_h hledáme ve tvaru (srov. (5.1.10))

$$(5.2.2) \quad u_h(x) = \sum_{n=1}^N U_n v_n(x).$$

Díky vlastnostem použitých básovéch funkcí skutečně platí $u_h(0) = 0$, $u_h(x_n) = U_n$, $n = 1, 2, \dots, N$ (ověřte!). Všimněme si, že v důsledku toho, že v bodě $x = 0$ je předepsána homogenní Dirichletova okrajová podmínka, jsme při konstrukci přibližného řešení nemuseli použít básovou funkci v_0 z (5.1.9). Poznamenáváme ještě, že koeficientům U_n , $n = 1, 2, \dots, N$, lineární kombinace (5.2.2) se v této a podobných situacích říká také *uzlové parametry*.

Nyní použijeme Galerkinovu metodu. Předpokládáme, že jsou splněny předpoklady věty 4.2.5 a v souladu s odst. 4.2.4 položíme (viz tab. 4)

$$\begin{aligned} a(u, v) &= \int_0^1 [p(x)u'(x)v'(x) + q(x)u(x)v(x)] dx, \\ f(v) &= \int_0^1 f(x)v(x) dx, \\ V_g &= V = \{v \in W_2^1(0, 1) : v(0) = 0\}. \end{aligned}$$

Řešení úlohy (5.2.1) je tedy taková funkce $u \in V$, pro kterou platí

$$(5.2.3) \quad a(u, v) = F(v) \quad \forall v \in V.$$

Zvolené básové funkce v_1, v_2, \dots, v_N určují lineární prostor V^h dimenze N . Přibližné Galerkinovo řešení $u_h \in V_h$ určíme z požadavku, aby rovnost $a(u_h, v) = F(v)$ byla splněna pro všechny funkce v z prostoru V^h , tj. za v volíme postupně všechny básové funkce užitě ke konstrukci přibližného řešení (viz odst. 4.3.2). Dostaneme tak N podmínek

$$(5.2.4) \quad a(u_h, v_j) = F(v_j), \quad j = 1, 2, \dots, N.$$

Dosadíme-li do (5.2.4) za u_h z (5.2.2), dostaneme po úpravě soustavu lineárních algebraických rovnic

$$(5.2.5) \quad \sum_{n=1}^N U_n a(v_n, v_j) = F(v_j), \quad j = 1, 2, \dots, N,$$

pro neznámé uzlové parametry U_1, U_2, \dots, U_N .

5.2.2. Sestavení diskrétní úlohy. Zatím se náš výklad výrazně neodlišoval od výkladu klasické Galerkinovy metody z odst. 4.3.2. Zde však můžeme poskytnout konkrétní a jednoduchý návod, jak sestavovat matici \mathbf{A}_h a vektor \mathbf{F}_h v Galerkinově soustavě. Označíme

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_h &= [U_1, U_2, \dots, U_N]^T, \\ \mathbf{F}_h &= [F_1, F_2, \dots, F_N]^T, \quad F_j = F(v_j) = \int_0^1 f(x) v_j(x) dx, \\ \mathbf{A}_h &= [a_{nj}], \quad n, j = 1, 2, \dots, N, \\ a_{nj} &= a(v_n, v_j) = \int_0^1 [p(x) v'_n(x) v'_j(x) + q(x) v_n(x) v_j(x)] dx, \end{aligned}$$

a zapíšeme Galerkinovu soustavu (5.2.5) v maticovém tvaru

$$(5.2.6) \quad \mathbf{A}_h \mathbf{U}_h = \mathbf{F}_h.$$

Výhoda zvolených báзовých funkcí spočívá právě v tom, že díky jejich „skoro ortogonalitě“ máme

$$a_{nj} = a(v_n, v_j) = 0 \quad \text{pro } |n - j| > 1,$$

a matice \mathbf{A}_h bude t ř í d i a g o n á l n í, tj. tvaru

$$\mathbf{A}_h = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & & & & \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & a_{j,j-1} & a_{jj} & a_{j,j+1} & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & 0 & & a_{N-1,N-2} & a_{N-1,N-1} & a_{N-1,N} \\ & & & & a_{N,N-1} & a_{NN} \end{bmatrix}.$$

Označíme

$$(5.2.8) \quad \begin{aligned} p_{nj} &= \int_0^1 p(x) v'_n(x) v'_j(x) \, dx = p_{jn}, \\ q_{nj} &= \int_0^1 q(x) v_n(x) v_j(x) \, dx = q_{jn}. \end{aligned}$$

Dosadíme-li do těchto vzorců konkrétní tvary bázových funkcí a jejich derivací na příslušných subintervalech (viz (5.1.9) a obr. 9), dostaneme prvky

$$a_{nj} = p_{nj} + q_{nj} = a_{jn}$$

s y m e t r i c k é matice \mathbf{A}_h odpovídající úloze (5.2.1).

Pro prvky matice \mathbf{A}_h z (5.2.7) a složky vektoru \mathbf{F}_h tak dostaneme vzorce, které by si každý zájemce o metodu konečných prvků měl jednou za život odvodit.

Pro $j = 1, 2, \dots, N-1$ ($h_j = x_j - x_{j-1}$):

$$\begin{aligned} p_{jj} &= \int_0^1 p(x) [v'_j(x)]^2 \, dx = \frac{1}{h_j^2} \int_{x_{j-1}}^{x_j} p(x) \, dx + \frac{1}{h_{j+1}^2} \int_{x_j}^{x_{j+1}} p(x) \, dx, \\ q_{jj} &= \int_0^1 q(x) v_j^2(x) \, dx = \\ &= \frac{1}{h_j^2} \int_{x_{j-1}}^{x_j} q(x) (x - x_{j-1})^2 \, dx + \frac{1}{h_{j+1}^2} \int_{x_j}^{x_{j+1}} q(x) (x_{j+1} - x)^2 \, dx, \\ F_j &= \int_0^1 f(x) v_j(x) \, dx = \frac{1}{h_j} \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x) (x - x_{j-1}) \, dx + \frac{1}{h_{j+1}} \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x) (x_{j+1} - x) \, dx. \end{aligned}$$

Pro $j = N$:

$$\begin{aligned} p_{NN} &= \int_0^1 p(x) [v'_N(x)]^2 \, dx = \frac{1}{h_N^2} \int_{x_{N-1}}^{x_N} p(x) \, dx, \\ q_{NN} &= \int_0^1 q(x) v_N^2(x) \, dx = \frac{1}{h_N^2} \int_{x_{N-1}}^{x_N} q(x) (x - x_{N-1})^2 \, dx, \\ F_N &= \int_0^1 f(x) v_N(x) \, dx = \frac{1}{h_N} \int_{x_{N-1}}^{x_N} f(x) (x - x_{N-1}) \, dx. \end{aligned}$$

Pro $j = 1, 2, \dots, N-1$:

$$\begin{aligned} p_{j,j+1} &= \int_0^1 p(x) v'_j(x) v'_{j+1}(x) \, dx = -\frac{1}{h_{j+1}^2} \int_{x_j}^{x_{j+1}} p(x) \, dx = p_{j+1,j}, \\ q_{j,j+1} &= \int_0^1 q(x) v_j(x) v_{j+1}(x) \, dx = \frac{1}{h_{j+1}^2} \int_{x_j}^{x_{j+1}} q(x) (x_{j+1} - x)(x - x_j) \, dx = q_{j+1,j}. \end{aligned}$$

Z těchto vzorců lze pro $p(x) > 0$, $q(x) \geq 0$ dokázat platnost nerovností

$$\begin{aligned} |p_{11}| &\geq |p_{12}|, \\ |p_{jj}| &\geq |p_{j-1,j}| + |p_{j,j+1}|, \quad j = 2, 3, \dots, N-1, \\ |p_{NN}| &\geq |p_{N,N-1}|, \\ |q_{11}| &\geq |q_{12}|, \\ |q_{jj}| &\geq |q_{j-1,j}| + |q_{j,j+1}|, \quad j = 2, 3, \dots, N-1, \\ |q_{NN}| &\geq |q_{N,N-1}|. \end{aligned}$$

Znamená to, že symetrická matice \mathbf{A}_h určená prvky $a_{nj} = p_{nj} + q_{nj}$ je d i a g o n á l n ě d o m i n a n t n í.

Protože pro každou funkci $v_h(x) = \sum_{n=1}^N Y_n v_n(x) \in V^h$ je $a(v_h, v_h) = \mathbf{Y}_h^T \mathbf{A}_h \mathbf{Y}_h$, $\mathbf{Y}_h = [Y_1, Y_2, \dots, Y_N]^T$, a pro $p(x) \geq p_0 > 0$, $q(x) \geq 0$ a pro nenulové v_h je $a(v_h, v_h) = \int_0^1 [p(x)(v'_h(x))^2 + q(x)(v_h(x))^2] dx \geq c \int_0^1 [|v'_h|^2 + |v_h|^2] dx \geq c \|v_h\|_1^2 > 0$, platí $\mathbf{Y}_h^T \mathbf{A}_h \mathbf{Y}_h > 0$ pro každý nenulový vektor \mathbf{Y}_h a matice \mathbf{A}_h je tudíž p o z i t i v n ě d e f i n i t n í.

Zvolíme-li v úloze (5.2.1) $p(x) \equiv 1$ a q konstantní, dostaneme pro ekvidistantní rozložení uzlů sítě \mathcal{S} s krokem h vzorce

$$\begin{aligned} a_{jj} &= \frac{2}{h} + \frac{2qh}{3}, \\ a_{j,j+1} &= \frac{1}{h} + \frac{qh}{6} = a_{j+1,j}. \end{aligned}$$

Potom j -tá rovnice soustavy (5.2.6) má tvar

$$\left(-\frac{1}{h} + \frac{qh}{6}\right)U_{j-1} + \left(\frac{2}{h} + \frac{2qh}{3}\right)U_j + \left(-\frac{1}{h} + \frac{qh}{6}\right)U_{j+1} = F_j,$$

což po úpravě dává

$$-\frac{U_{j-1} - 2U_j + U_{j+1}}{h^2} + \frac{q}{6}(U_{j-1} + 4U_j + U_{j+1}) = \frac{F_j}{h}.$$

Interpretujeme-li výraz $\frac{1}{6}(U_{j-1} + 4U_j + U_{j+1})$ jako aproximaci hodnoty řešení $u = u(x)$ v uzlu x_j a F_j/h jako střední hodnotu funkce $f = f(x)$ na intervalu $\langle x_{j-1}, x_{j+1} \rangle$, dostáváme vlastně aproximaci rovnice $-u'' + qu = f(x)$ v uzlu x_j ve smyslu metody konečných diferencí.

5.2.3. Příklad $V \neq V_g$. Speciální volba báзовých funkcí (odst. 5.1.4) umožňuje také jednoduše se vypořádat s nehomogenními Dirichletovými podmínkami. Jsou-li k rovnici z (5.2.1) zadány okrajové podmínky

$$(5.2.9) \quad u(0) = g_0, \quad g_0 \neq 0, \quad p(1)u'(1) = 0,$$

užijeme ke konstrukci přibližného řešení u_h také funkci $v_0(x)$ z (5.1.9), tj. volíme

$$(5.2.10) \quad u_h(x) = g_0 v_0(x) + \sum_{n=1}^N U_n v_n(x)$$

a na základě poznatků z odst. 4.3.7 usoudíme, že získaná soustava lineárních rovnic pro neznámé uzlové parametry U_1, U_2, \dots, U_N se bude od soustavy (5.2.6) lišit pouze první složkou vektoru \mathbf{F}_h . K číslu F_1 z odst. 5.2.2 se přičte číslo

$$\frac{g_0}{h_1^2} \int_{x_0}^{x_1} [p(x) - q(x)(x_1 - x)(x - x_0)] dx.$$

Analogicky pro okrajové podmínky

$$(5.2.11) \quad p(0)u'(0) = 0, \quad u(1) = g_1, \quad g_1 \neq 0,$$

budou neznámými uzlovými parametry čísla U_0, U_1, \dots, U_{N-1} a přibližné řešení u_h volíme ve tvaru

$$(5.2.12) \quad u_h(x) = g_1 v_N(x) + \sum_{n=0}^{N-1} U_n v_n(x).$$

Výsledná soustava lineárních rovnic pro N neznámých U_0, U_1, \dots, U_{N-1} se oproti soustavě (5.2.6) také poněkud změní. Bude

$$\begin{aligned} 1. \text{ rovnice:} & \quad a_{00}U_0 + a_{01}U_1 = F_0, \\ 2. \text{ rovnice:} & \quad a_{10}U_0 + a_{11}U_1 + a_{12}U_2 = F_1, \\ 3. \text{ rovnice:} & \quad a_{21}U_1 + a_{22}U_2 + a_{23}U_3 = F_2, \\ \text{poslední rovnice:} & \quad a_{N-1,N-2}U_{N-2} + a_{N-1,N-1}U_{N-1} = F_{N-1} - a_{N-1,N}g_1, \end{aligned}$$

kde

$$a_{00} = \frac{1}{h_1^2} \int_{x_0}^{x_1} [p(x) + q(x)(x - x_0)^2] dx.$$

Číslo $a_{01} = a_{10}$, které ve vzorcích odst. 5.2.2 uvedeno není, dostaneme ze vzorce pro $a_{j,j+1} = p_{j,j+1} + q_{j,j+1}$, v němž volíme $j = 0$.

5.3. Algoritmizace metody konečných prvků Výklad v odst. 5.2.1 až 5.2.3 nám umožňuje popsat obecný algoritmus konstrukce soustavy lineárních algebraických rovnic pro neznámé uzlové parametry.

5.3.1 Aproximace na subintervalu (prvku). Uvažujeme standardní okrajovou úlohu

$$(5.3.1) \quad \begin{aligned} & - (p(x)u')' + q(x)u = f(x), \quad x \in (0, 1), \\ & \alpha_0 u(0) - \beta_0 p(0)u'(0) = g_0, \quad \alpha_1 u(1) + \beta_1 p(1)u'(1) = g_1, \end{aligned}$$

včetně všech speciálních případů popsaných v odst. 4.2.4. Chceme popsat konstrukci diskrétní úlohy na síti uzlů

$$\mathcal{S} = \{x_0, x_1, \dots, x_{N-1}, x_N\}, \quad x_0 = 0, \quad x_N = 1, \quad h_n = x_n - x_{n-1}.$$

Libovolný subinterval (*prvek*) označíme

$$e_s = \langle x_1^s, x_2^s \rangle, \quad s = 1, 2, \dots, N; \quad h_s = x_2^s - x_1^s.$$

Hledané uzlové parametry na tomto intervalu označíme

$$U_1^s, \quad U_2^s.$$

Index s je tzv. *lokální index* prvku a uzlového parametru.

Přibližné řešení $u_h(x)$ je na každém prvku e_s lineárním (interpolacním) polynomem určeným hodnotami U_1^s, U_2^s v uzlech x_1^s, x_2^s . Má tedy tvar

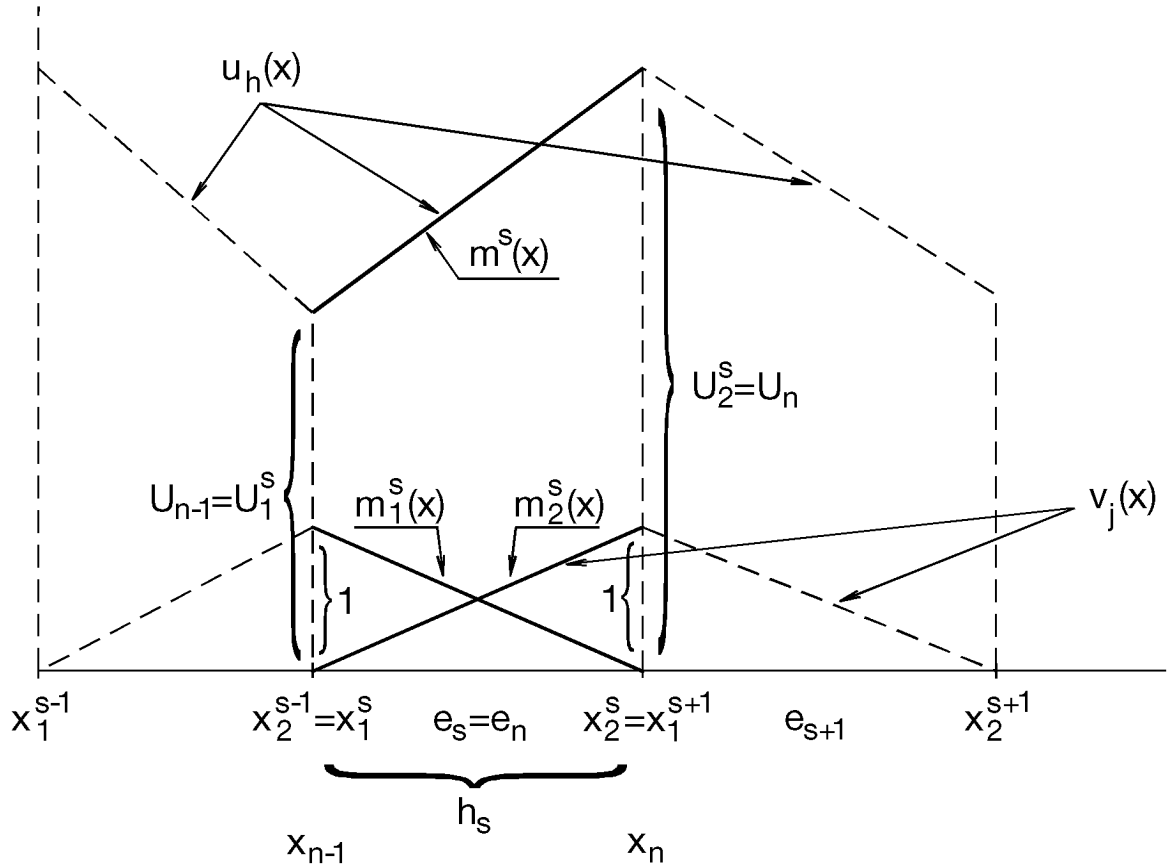
$$(5.3.2) \quad m^s(x) = U_1^s \frac{x_2^s - x}{h_s} + U_2^s \frac{x - x_1^s}{h_s}, \quad x \in e_s, \quad s = 1, 2, \dots, N.$$

Je užitečné označit

$$(5.3.3) \quad m_1^s(x) = \frac{x_2^s - x}{h_s}, \quad m_2^s(x) = \frac{x - x_1^s}{h_s}, \quad x \in e_s,$$

a psát

$$(5.3.4) \quad m^s(x) = U_1^s m_1^s(x) + U_2^s m_2^s(x), \quad x \in e_s.$$



Obr. 12. Lokální a globální označení uzlů, uzlových parametrů, bázových funkcí a přibližného řešení. Význam tohoto označení je patrný z obr. 12. Funkce $m_1^s(x), m_2^s(x)$ jsou restrikce těch bázových funkcí, které jsou na prvku e_s nenulové. Ihned vidíme, že

$$(5.3.5) \quad \begin{aligned} (m_1^s(x))' &= -\frac{1}{h_s}, & (m_2^s(x))' &= \frac{1}{h_s}, \\ (m^s(x))' &= \frac{1}{h_s}(-U_1^s + U_2^s), & x &\in e_s. \end{aligned}$$

Ve zbylé části odstavce budeme předpokládat, že $\beta_0 \neq 0, \beta_1 \neq 0$ (Dirichletovými podmínkami s $\beta_0 = 0$ nebo $\beta_1 = 0$ se budeme zabývat v následujícím odstavci). Užijeme označení z odst. 4.2.6

$$(5.3.6) \quad \begin{aligned} a(u, v) &= \int_0^1 [p(x)u'(x)v'(x) + q(x)u(x)v(x)] dx + \\ &\quad + \frac{\alpha_0}{\beta_0}u(0)v(0) + \frac{\alpha_1}{\beta_1}u(1)v(1), \\ F(v) &= \int_0^1 f(x)v(x) dx + \frac{g_0}{\beta_0}v(0) + \frac{g_1}{\beta_1}v(1) \end{aligned}$$

a vezmeme prostor V^h všech lineárních kombinací báзовých funkcí v_0, v_1, \dots, v_N z (5.1.9). Přibližné řešení $u_h \in V^h$ stanovíme řešením Galerkinovy soustavy (viz odstavec 4.3.2)

$$(5.3.7) \quad a(u_h, v_j) = F(v_j), \quad j = 0, 1, \dots, N.$$

Protože

$$\begin{aligned} u_h(x) &= m^s(x), \quad x \in e_s, \\ v_j(x) &= \begin{cases} m_2^j(x), & x \in e_j, \\ m_1^{j+1}(x), & x \in e_{j+1}, \end{cases} \end{aligned}$$

vyjádříme integrály v $a(u_h, v_j)$ a $F(v_j)$ jako součet integrálů přes jednotlivé prvky a píšeme

$$\begin{aligned} a(u_h, v_0) &= a(m^1, m_2^1) + \frac{\alpha_0}{\beta_0} U_1^1, \\ a(u_h, v_1) &= a(m^1, m_2^1) + a(m^2, m_1^2), \\ a(u_h, v_2) &= a(m^2, m_2^2) + a(m^3, m_1^3), \\ &\vdots \\ (5.3.8) \quad a(u_h, v_N) &= a(m^N, m_2^N) + \frac{\alpha_1}{\beta_1} U_2^N; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(v_0) &= F(m_1^1) + \frac{g_0}{\beta_0}, \\ F(v_1) &= F(m_2^1) + F(m_1^2), \\ &\vdots \\ F(v_N) &= F(m_2^N) + \frac{g_1}{\beta_1}. \end{aligned}$$

V těchto vzorcích je ($s = 1, 2, \dots, N$)

$$\begin{aligned} (5.3.9) \quad a(m^s, m_r^s) &= \int_{e_s} [p(x)(m^s(x))'(m_r^s(x))' + q(x)m^s(x)m_r^s(x)] dx, \\ F(m_r^s) &= \int_{e_s} f(x)m_r^s(x) dx, \quad r = 1, 2. \end{aligned}$$

Dosadíme-li do těchto integrálů za m^s, m_r^s z (5.3.3) až (5.3.5), dostaneme

$$\begin{aligned} (5.3.10) \quad a(m^s, m_1^s) &= a_{11}^s U_1^s + a_{12}^s U_2^s, \\ a(m^s, m_2^s) &= a_{21}^s U_1^s + a_{22}^s U_2^s, \\ F(m_1^s) &= F_1^s, \\ F(m_2^s) &= F_2^s, \end{aligned}$$

kde

$$\begin{aligned}
 a_{11}^s &= \frac{1}{h_s^2} \int_{e_s} [p(x) + q(x)(x_2^s - x)^2] dx, \\
 a_{12}^s &= a_{21}^s = \frac{1}{h_s^2} \int_{e_s} [-p(x) + q(x)(x - x_1^s)(x_2^s - x)] dx, \\
 a_{22}^s &= \frac{1}{h_s^2} \int_{e_s} [p(x) + q(x)(x - x_1^s)^2] dx, \\
 F_1^s &= \frac{1}{h_s} \int_{e_s} f(x)(x_2^s - x) dx, \\
 F_2^s &= \frac{1}{h_s} \int_{e_s} f(x)(x - x_1^s) dx.
 \end{aligned}
 \tag{5.3.11}$$

Příspěvek jednoho prvku e_s k celkové matici \mathbf{A}_h je tedy dán tzv. *prvkovou maticí*

$$\mathbf{A}^s = \begin{bmatrix} a_{11}^s & a_{12}^s \\ a_{21}^s & a_{22}^s \end{bmatrix}$$

a příspěvek k celkovému vektoru \mathbf{F}_h je dán tzv. *prvkovým vektorem*

$$\mathbf{F}^s = \begin{bmatrix} F_1^s \\ F_2^s \end{bmatrix}.$$

Využijeme-li přiřazení lokálních (prvkových) a globálních uzlových parametrů, daného vztahy

$$\begin{aligned}
 U_0 &= U_1^1, \\
 U_1 &= U_1^2 = U_2^1, \\
 U_2 &= U_1^3 = U_2^2, \\
 U_3 &= U_1^4 = U_2^3, \\
 &\vdots \\
 U_{N-1} &= U_1^N = U_2^{N-1}, \\
 U_N &= U_2^N,
 \end{aligned}$$

bude mít celková matice \mathbf{A}_h tvar

(5.3.12)

$$\mathbf{A}_h = \begin{bmatrix} \boxed{a_{11}^1 + \frac{\alpha_0}{\beta_0}} & \boxed{a_{12}^1} & & & 0 \\ \boxed{a_{21}^1} & \boxed{a_{22}^1 + a_{11}^2} & \boxed{a_{12}^2} & & \\ & \boxed{a_{21}^2} & \boxed{a_{22}^2 + a_{11}^3} & \boxed{a_{12}^3} & \\ & & & & \\ & & & & 0 \\ & & & \boxed{a_{21}^{N-1}} & \boxed{a_{22}^{N-1} + a_{11}^N} & \boxed{a_{12}^N} \\ & & & & \boxed{a_{21}^N} & \boxed{a_{22}^N + \frac{\alpha_1}{\beta_1}} \end{bmatrix}.$$

Celkový vektor \mathbf{F}_h bude také sestaven z prvkových vektorů \mathbf{F}^s podle stejného schématu, v němž $F_j = \int_0^1 f(x)v_j(x) dx$, $j = 0, 1, \dots, N$:

$$\mathbf{F}_h = \begin{bmatrix} F_1^1 + \frac{g_0}{\beta_0} & & & & \\ & F_1^1 + F_1^2 & & & \\ & & F_2^2 + F_1^3 & & \\ & & & F_2^3 + F_1^4 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & F_2^{N-1} + F_1^N \\ & & & & & & F_2^N + \frac{g_1}{\beta_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_0 + \frac{g_0}{\beta_0} \\ F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ \vdots \\ F_{N-1} \\ F_N + \frac{g_1}{\beta_1} \end{bmatrix}.$$

5.3.2. Realizace hlavních okrajových podmínek. Neumannova resp. Newtonova okrajová podmínka v úloze (5.3.1) odpovídá předpokladu $\beta_0 \neq 0$ nebo $\beta_1 \neq 0$. Je respektována tvarem bilineární formy $a(u, v)$ a lineární formy $F(v)$ v (5.3.6). Takovým podmínkám říkáme *přirozené okrajové podmínky*. Přibližné řešení úloh s přirozenými okrajovými podmínkami je konstruováno pomocí všech báзовých funkcí z odst. 5.1.4 a $\mathbf{A}_h \mathbf{U}_h = \mathbf{F}_h$ je soustavou $N + 1$ rovnic pro $N + 1$ neznámých uzlových parametrů.

V případě Neumannovy úlohy s $q(x) \equiv 0$ je matice \mathbf{A}_h singulární. Postupujeme tak, že pevně zvolíme jednu složku vektoru \mathbf{U}_h a ostatní složky počítáme ze soustavy N rovnic, která se získá snadnou modifikací původní soustavy $\mathbf{A}_h \mathbf{U}_h = \mathbf{F}_h$.

V úloze s Dirichletovou okrajovou podmínkou je parametr U_0 nebo U_N dán okrajovou podmínkou $U_0 = g_0$ nebo $U_N = g_1$ a k určení přibližného řešení takové úlohy (viz např. odst. 5.2.3) potřebujeme stanovit buď N , nebo $N - 1$ uzlových parametrů

podle toho, zda je Dirichletova podmínka předepsána na jednom nebo na obou koncích intervalu $\langle 0, 1 \rangle$. Dirichletovým podmínkám se říká také *hlavní okrajové podmínky*.

Při popisu konstrukce výsledné soustavy lineárních rovnic vyjdeme i nyní ze soustavy z odst. 5.3.1. Je-li dána podmínka $u(0) = g_0$, nahradíme formálně první rovnici $a_{00}U_0 + a_{11}U_1 = F_0 + g_0/\beta_0$ podmínkou $U_0 = g_0$. Fakticky tedy výsledná soustava začíná rovnicí $a_{11}U_1 + a_{12}U_2 = F_1 - a_{10}g_0$. Je-li dána podmínka $u(1) = g_1$, nahradíme rovnici $a_{N,N-1}U_{N-1} + a_{NN}U_N = F_N + g_1/\beta_1$ podmínkou $U_N = g_1$; ostatní rovnice zůstanou beze změn. Fakticky výsledná soustava končí rovnicí $a_{N-1,N-2}U_{N-2} + a_{N-1,N-1}U_{N-1} = F_{N-1} - a_{N-1,N}g_1$.

5.3.3. Algoritmus metody konečných prvků. Shrňme algoritmus metody konečných prvků do několika kroků:

1. *Vstupní data:* Interval $\langle 0, 1 \rangle$ (případně $\langle a, b \rangle$); počet prvků N ; uzly x_0, x_1, \dots, x_N ; čísla $g_0, g_1, \alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1$ (v závislosti na typu úlohy); funkce $p = p(x)$, $q = q(x)$, $f = f(x)$.

2. *Přípravné práce:* $h_s = x_s - x_{s-1}$, $s = 1, 2, \dots, N$; přiřazení lokálních a globálních indexů; dimenzování polí $A(N+1, N+1)$, $U(N+1)$, $F(N+1)$. Fakticky se volí $A(N+1, 3)$, neboť se ukládají pouze nenulové prvky matice \mathbf{A}_h (viz odst. 3.5).

3. *Výpočet prvkové matice \mathbf{A}^s a prvkového vektoru \mathbf{F}^s pro $s = 1, 2, \dots, N$ podle vzorců (5.3.11).* Obvykle se užívá dvoubodový Gaussův kvadrurní vzorec

$$\int_{e_s} g(x) dx \approx \frac{h_s}{2} \left[g\left(x_s + \frac{h_s}{2}(-\sqrt{\frac{1}{3}} + 1)\right) + g\left(x_s + \frac{h_s}{2}(\sqrt{\frac{1}{3}} + 1)\right) \right].$$

4. *Sestavení celkové matice \mathbf{A}_h a celkového vektoru \mathbf{F}_h .* Pro $s = 1, 2, \dots, N$ se do pozic $(s-1, s-1)$, $(s-1, s)$, $(s, s-1)$, (s, s) globální matice \mathbf{A}_h přičítají odpovídající prvky matice \mathbf{A}^s a do pozic $(s-1)$, (s) globálního vektoru \mathbf{F}_h se přičtou odpovídající složky prvkového vektoru \mathbf{F}^s . Předpokládá se vynulování polí A , F na počátku výpočtu.

5. *Modifikace matice \mathbf{A}_h a vektoru \mathbf{F}_h i co do rozměru v závislosti na konkrétní okrajové podmínce ve smyslu odst. 5.3.2.*

6. *Řešení výsledné soustavy $\mathbf{A}_h \mathbf{U}_h = \mathbf{F}_h$ některým rozkladovým algoritmem z odst. 3.5.*

5.3.4. Algoritmizace nestandardní úlohy. Je-li v diferenciální rovnici navíc člen $\gamma(x)u'$, bude v bilineární formě $a(u, v)$ z (5.3.6) navíc integrál

$$\int_0^1 \gamma(x)u'(x)v(x) dx$$

a sestrojí se prvková matice

$$\mathbf{B}^s = \begin{bmatrix} b_{11}^s & b_{12}^s \\ b_{21}^s & b_{22}^s \end{bmatrix},$$

v níž

$$\begin{aligned}
 b_{11}^s &= -\frac{1}{h_s^2} \int_{e_s} \gamma(x)(x_2^s - x) \, dx, \\
 b_{12}^s &= \frac{1}{h_s^2} \int_{e_s} \gamma(x)(x_2^s - x) \, dx, \\
 b_{21}^s &= -\frac{1}{h_s^2} \int_{e_s} \gamma(x)(x - x_1^s) \, dx, \\
 b_{22}^s &= \frac{1}{h_s^2} \int_{e_s} \gamma(x)(x - x_1^s) \, dx.
 \end{aligned}
 \tag{5.3.13}$$

Tato matice \mathbf{B}^s se přičte k prvkové matici \mathbf{A}^s určené formulí (5.3.11) a odpovídající standardním členům diferenciální rovnice. Protože $b_{12}^s \neq b_{21}^s$, bude výsledná prvková matice nesymetrická a tedy i celková matice \mathbf{A}_h bude nesymetrická.

5.4. Cvičení

5.4.1. Ritzovou metodou konečných prvků proveďte diskretizaci okrajové úlohy $-u'' + u = 1$, $u(0) = 0$, $u(1) + u'(1) = 0$, $x \in \langle 0, 1 \rangle$. Užijte po částech lineární aproximaci řešení na síti s krokem $h = 1/N$, kde N je přirozené číslo. [Návod: Minimalizuje se funkcionál

$$\Phi(v) = \frac{1}{2} \int_0^1 (v'^2 + v^2 - 2v) \, dx + \frac{1}{2} v^2(1)$$

na prostoru V^h z odst. 5.2.1. Máme

$$\min_{v \in V} \Phi_h(v) = \Phi(u_h) = \frac{1}{2} \mathbf{U}_h^T \mathbf{A} \mathbf{U}_h - \mathbf{U}_h^T \mathbf{F}_h,$$

kde

$$u_h = \sum_{n=1}^N U_n v_n, \mathbf{U}_h = [U_1, U_2, \dots, U_N]^T, \mathbf{F}_h = [F_1, F_2, \dots, F_N]^T, F_n = \int_0^1 v_n(x) \, dx;$$

matici \mathbf{A}_h a vektor \mathbf{F}_h lze stanovit postupem z odst. 5.3.1, 5.3.2. V matici \mathbf{A}_h tvaru (5.3.12) klademe $\alpha_1 = \beta_1 = 1$ a první řádek nahradíme řádkem $[1, 0, 0, \dots, 0]$.

5.4.2. Galerkinovou metodou konečných prvků proveďte diskretizaci okrajové úlohy $-u'' + u = 0$, $u(0) = 0$, $u(1) = 1$, $x \in \langle 0, 1 \rangle$. Užijte po částech lineární aproximaci řešení na síti s krokem $h = \frac{1}{3}$. [Návod: Prvkové matice budou

$$\mathbf{A}^s = \begin{bmatrix} \frac{1}{h} + \frac{h}{3} & -\frac{1}{h} + \frac{h}{6} \\ -\frac{1}{h} + \frac{h}{6} & \frac{1}{h} + \frac{h}{3} \end{bmatrix}.$$

Po úpravách ve smyslu odst. 5.3.2 bude mít výsledná soustava tvar

$$\begin{aligned} 2\left(\frac{1}{h} + \frac{h}{3}\right)U_1 + \left(-\frac{1}{h} + \frac{h}{6}\right)U_2 &= 0, \\ \left(-\frac{1}{h} + \frac{h}{6}\right)U_1 + 2\left(\frac{1}{h} + \frac{h}{3}\right)U_2 &= -\left(-\frac{1}{h} + \frac{h}{6}\right). \end{aligned}$$

Výsledky: $U_0 = 0$, $U_3 = 1$ (z okrajových podmínek), $U_1 = 0,2885$, $U_2 = 0,6098$.
Hodnoty přesného řešení: $u(1/3) = 0,28892$, $u(2/3) = 0,61024$.]

Kapitola II

Numerické řešení okrajových úloh pro parciální diferenciální rovnice eliptického typu (stacionární rovnice)

6. Okrajové úlohy pro parciální diferenciální rovnice eliptického typu

6.1. Příklady okrajových úloh

6.1.1. Okrajová úloha pro Poissonovu rovnici. Nejjednodušší parciální diferenciální rovnici eliptického typu je *Poissonova rovnice*. Pro neznámou funkci u dvou (reálných) proměnných x, y má tvar

$$(6.1.1) \quad -\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = f(x, y)$$

a pro funkci u tří proměnných x, y, z má tvar

$$(6.1.2) \quad -\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) = f(x, y, z).$$

Funkce $f = f(x, y)$, resp. $f = f(x, y, z)$ je funkce daná. Požadujeme, aby funkce u splňovala rovnici (6.1.1), resp. (6.1.2), uvnitř nějaké oblasti Ω a na celé hranici $\partial\Omega$ ještě další doplňující podmínky, zvané *okrajové podmínky*. Soubor těchto požadavků nazýváme *okrajovou úlohou*.

Mějme např. v \mathbb{R}^2 čtverec $\bar{\Omega} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ a označme $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ části hranice $\partial\Omega$ tohoto čtverce podle obr. 13. Hledejme funkci $u = u(x, y)$, která je ve čtverci Ω řešením rovnice (6.1.1) s funkcí $f(x, y) = -(2y^2 + 6x^2)y$ a na jednotlivých částech hranice splňuje okrajové podmínky

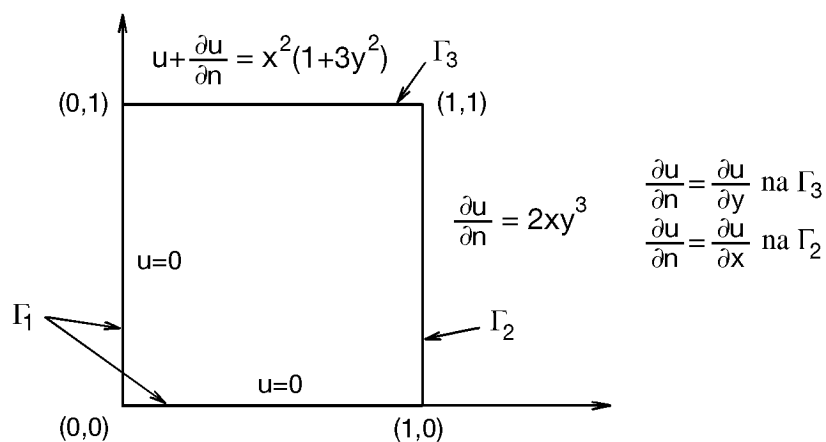
$$(6.1.3) \quad \begin{aligned} u &= 0 \quad \text{na } \Gamma_1, \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= 2xy^3 \quad \text{na } \Gamma_2, \\ u + \frac{\partial u}{\partial n} &= x^2(1 + 3y^2) \quad \text{na } \Gamma_3. \end{aligned}$$

Zde

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x}n_1 + \frac{\partial u}{\partial y}n_2$$

je derivace funkce u ve směru vnější normály k příslušné části hranice $\partial\Omega$ ($\mathbf{n} = [n_1, n_2]$ je jednotkový vektor vnější normály). Protože na Γ_2 je $\partial u / \partial n = \partial u / \partial x$ a na Γ_3 je $\partial u / \partial n = \partial u / \partial y$, lze psát (6.1.3) ve tvaru

$$(6.1.4) \quad \begin{aligned} u(0, y) &= 0, \quad u(x, 0) = 0, \\ \frac{\partial u(1, y)}{\partial x} &= 2xy^3, \\ u(x, 1) + \frac{\partial u(x, 1)}{\partial y} &= x^2(1 + 3y^2). \end{aligned}$$



Obr. 13. Okrajové podmínky (6.1.3).

Snadno se přesvědčíme, že funkce u určená předpisem $u(x, y) = x^2 y^3$ splňuje rovnici (6.1.1) s uvedenou konkrétní funkcí f a vyhovuje okrajovým podmínkám (6.1.3). Je tedy řešením formulované okrajové úlohy.

6.1.2. Základní úloha teorie potenciálu. Mějme danou omezenou oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ (\mathbb{R}^n je n -dimenzionální euklidovský prostor prvků $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]$) s hranicí $\partial\Omega$ skládající se ze dvou hladkých částí Γ_1 a Γ_2 . V oblasti Ω mějme dány funkce $p = p(\mathbf{x})$, $f = f(\mathbf{x})$, na Γ_1 funkci $g_1 = g_1(\mathbf{x})$ a na Γ_2 funkci $g_2 = g_2(\mathbf{x})$. Hledáme vektorovou funkci $\Psi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ a skalární funkci $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, pro něž platí

$$(6.1.5) \quad \begin{aligned} \Psi + p(\mathbf{x}) \operatorname{grad} u &= \mathbf{0} \quad \text{v } \Omega, \\ \operatorname{div} \Psi &= f(\mathbf{x}) \quad \text{v } \Omega, \\ u &= g_1 \text{ na } \Gamma_1, \quad \mathbf{n} \cdot \Psi = g_2 \text{ na } \Gamma_2. \end{aligned}$$

Zde $\mathbf{n} = \mathbf{n}(\mathbf{x})$ je opět jednotkový vektor vnější normály v bodě $\mathbf{x} \in \Gamma_2$. Pro $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ představuje (6.1.5) soustavu tří skalárních rovnic pro neznámé funkce Ψ_1, Ψ_2, u proměnných x_1, x_2

$$\begin{aligned} \Psi_1 + p(x_1, x_2) \frac{\partial u}{\partial x_1} &= 0, \quad \Psi_2 + p(x_1, x_2) \frac{\partial u}{\partial x_2} = 0, \\ \frac{\partial \Psi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \Psi_2}{\partial x_2} &= f(x_1, x_2). \end{aligned}$$

Úloha (6.1.5) je příkladem okrajové úlohy pro soustavu rovnic prvního řádu (vystupují v ní pouze derivace prvního řádu hledané funkce). Vyloučením funkce Ψ můžeme úlohu (6.1.5) převést na okrajovou úlohu

$$(6.1.6) \quad \begin{aligned} -\operatorname{div} (p(\mathbf{x}) \operatorname{grad} u) &= f(\mathbf{x}) \quad \text{v } \Omega, \\ u &= g_1 \text{ na } \Gamma_1, \quad p \frac{\partial u}{\partial n} = g_2 \text{ na } \Gamma_2. \end{aligned}$$

Zde již vystupuje pouze jedna diferenciální rovnice, ovšem druhého řádu. Pro $p(x) = 1$ je (6.1.6) Poissonovou rovnicí. V aplikacích má funkce u význam *potenciálu* a funkce Ψ význam tzv. *hustoty toku*. Funkce p charakterizuje vlastnosti prostředí.

6.1.3. Příklad. Zvolme nyní $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 4\}$ (kruh o poloměru 2) a položme

$$(6.1.7) \quad p(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x^2 + y^2 < 1, \\ 2 & \text{pro } 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4. \end{cases}$$

Řešením okrajové úlohy

$$(6.1.8) \quad \begin{aligned} -\operatorname{div}(p(x, y) \operatorname{grad} u) &= -1 \quad \text{v } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{na } \partial\Omega, \end{aligned}$$

je funkce

$$(6.1.9) \quad u(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{8}[2(x^2 + y^2) - 5] & \text{pro } x^2 + y^2 \leq 1, \\ \frac{1}{8}[x^2 + y^2 - 4] & \text{pro } 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4. \end{cases}$$

Tato funkce je spojitá v $\bar{\Omega}$, avšak její první derivace jsou v bodech kružnice $x^2 + y^2 = 1$ nespojité, a proto druhé derivace $\partial^2 u / \partial x^2$, $\partial^2 u / \partial y^2$ v těchto bodech neexistují. Nicméně vektorová funkce $p \operatorname{grad} u$ je nejen spojitá, ale i diferencovatelná v celé oblasti Ω a rovnice (6.1.8) je splněna v každém bodě $(x, y) \in \Omega$.

Pozornému čtenáři jistě neuniklo, že zde máme situaci podobnou té, o které jsme se zmiňovali v odstavcích 1.2.7, 1.2.8.

6.1.4. Poznámka. Stejně jako u obyčejných diferenciálních rovnic, také u parciálních diferenciálních rovnic vzniká přirozená otázka, jaké vlastnosti musí funkce u mít, abychom ji mohli považovat za řešení formulované okrajové úlohy. Na tomto místě se těmito otázkami podrobně zabývat nebudeme a odkazujeme čtenáře na [26]. Nejnutnější obecnější výsledky uvedeme v následujících odstavcích.

6.2. Klasické a slabé řešení okrajových úloh.

6.2.1. Standardní okrajová úloha. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je omezená oblast s hladkou nebo po částech hladkou hranicí $\partial\Omega$. *Standardní okrajovou úlohou* budeme v této kapitole nazývat okrajovou úlohu pro lineární diferenciální rovnici

$$(6.2.1) \quad -\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(p_{ij}(\mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + q(\mathbf{x})u = f(\mathbf{x}) \quad \text{v } \Omega$$

s okrajovou podmínkou

$$(6.2.2) \quad \alpha(\mathbf{x})u + \beta \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n p_{ij}(\mathbf{x})n_i \frac{\partial u}{\partial x_j} = g(\mathbf{x}) \quad \text{na } \partial\Omega.$$

Zde jak dané funkce $p_{ij} = p_{ji}$, q , f , tak i hledanou funkci u uvažujeme v $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ a na $\partial\Omega$ jsou dány funkce α , β , g . Předpokládáme, že jednotkový vektor $\mathbf{n} = [n_i]$ vnější normály k hranici $\partial\Omega$ existuje v každém bodě hranice s případnou výjimkou konečného počtu bodů. Je-li např. $\bar{\Omega}$ obdélník, pak v jeho vrcholech vektor normály neexistuje. Požadavky na hranici $\partial\Omega$ lze ještě zeslabit (viz např. [38], [55]).

Požadujeme splnění *podmínky eliptičnosti*

$$(6.2.3) \quad \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n p_{ij}(\mathbf{x})\xi_i\xi_j \geq p_0 \sum_{i=1}^n \xi_i^2 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad \forall \xi_i, \xi_j \in \mathbb{R}^n,$$

kde p_0 je kladná konstanta. Kromě toho je rozumné předpokládat, že koeficienty α a β v okrajové podmínce (6.2.2) splňují pro $\mathbf{x} \in \Omega$ nerovnosti

$$(6.2.4) \quad \alpha(\mathbf{x}) \geq 0, \quad \beta(\mathbf{x}) \geq 0, \quad \alpha(\mathbf{x}) + \beta(\mathbf{x}) > 0,$$

že funkce p_{ij} , q , f jsou omezené na $\bar{\Omega}$ a že α , β jsou omezené na $\partial\Omega$.

Označíme-li $\mathbf{P}(\mathbf{x}) = [p_{ij}(\mathbf{x})]$ matici koeficientů rovnice (6.2.1), můžeme tuto rovnici psát ve tvaru

$$(6.2.5) \quad -\operatorname{div}(\mathbf{P}(\mathbf{x}) \operatorname{grad} u) + q(\mathbf{x})u = f(\mathbf{x}).$$

Příležitostně se zmíníme i o rovnicích, které se ve tvaru (6.2.5) psát nedají. V takových případech budeme hovořit o *nestandardní úloze*.

V dalším textu se budeme převážně zabývat okrajovými úlohami se speciálními tvary okrajové podmínky (6.2.2), např.

$$(6.2.6a) \quad u(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega \quad (\text{tj. } \beta(\mathbf{x}) \equiv 0 \text{ na } \partial\Omega),$$

$$(6.2.6b) \quad \mathbf{n} \cdot (\mathbf{P}(\mathbf{x}) \operatorname{grad} u) = g(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega \quad (\text{tj. } \alpha(\mathbf{x}) \equiv 0 \text{ na } \partial\Omega),$$

$$(6.2.6c) \quad \sigma(\mathbf{x})u + \mathbf{n} \cdot (\mathbf{P}(\mathbf{x}) \operatorname{grad} u) = g(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega, \quad \sigma(\mathbf{x}) > 0.$$

Podmínce (6.2.6a) říkáme *Dirichletova okrajová podmínka*, podmínce (6.2.6b) *Neumanova okrajová podmínka* a podmínce (6.2.6c) *Newtonova okrajová podmínka*.

6.2.2. Klasické řešení okrajové úlohy. Mezi standardní okrajové úlohy zahrnujeme i takové, u nichž jsou na různých částech hranice $\partial\Omega$ zadány okrajové podmínky různých typů. Příkladem je okrajová úloha

$$(6.2.7) \quad -\operatorname{div}(p(\mathbf{x}) \operatorname{grad} u) + q(\mathbf{x})u = f(\mathbf{x}) \quad \text{v } \Omega,$$

$$(6.2.8) \quad \begin{aligned} u &= g_1 \quad \text{na } \Gamma_1, \\ p \frac{\partial u}{\partial n} &= g_2 \quad \text{na } \Gamma_2, \\ \sigma u + p \frac{\partial u}{\partial n} &= g_3 \quad \text{na } \Gamma_3, \end{aligned}$$

kde $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ jsou části hranice $\partial\Omega$ s disjunktními vnitřky takové, že $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 = \partial\Omega$. Na rovnici (6.2.7) se můžeme dívat jako na speciální případ rovnice (6.2.5) s diagonální maticí $\mathbf{P}(\mathbf{x}) = \operatorname{diag}(p(\mathbf{x}))$.

Funkci u , která splňuje diferenciální rovnici a okrajové podmínky, nazýváme *řešení okrajové úlohy*. Stejně jako u okrajových úloh pro obyčejné diferenciální rovnice (odst. 1.2.5), i zde *klasickým řešením* rozumíme takovou funkci u , která splňuje požadavky úlohy v tom smyslu, že jejich splnění lze dosazením a příslušným derivováním verifikovat v každém bodě $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}$.

Pojem klasického řešení úlohy (6.2.7), (6.2.8) mimo jiné vyžaduje, aby funkce $p \operatorname{grad} u$ byla diferencovatelná v Ω . V praxi se však velmi často setkáváme s okrajovými úlohami, v nichž tento požadavek splněn není, a tedy příslušná úloha nemůže mít klasické řešení. Všimneme si jednoho typického případu. Předpokládejme, že oblast Ω je rozdělena na dvě oblasti Ω_1 a Ω_2 . Označme $\Gamma \subset \Omega$ jejich společnou hranici a nazvěme ji *rozhraním*. Nechť funkce p je definována zvlášť na Ω_1 a zvlášť na Ω_2 , přičemž je na Γ nespojitá s konečným skokem (tj. má v bodech $Q \in \Gamma$ konečné limity jak „zleva“ (z Ω_1), tak „zprava“ (z Ω_2)). V bodech rozhraní Γ není tedy diferenciální rovnice (6.2.7) obecně splněna. V takových případech požadujeme, aby funkce u a $p \operatorname{grad} u$, resp. $p(\partial u / \partial n) = p(\mathbf{n} \cdot \operatorname{grad} u)$, v bodech $Q \in \Gamma$ místo (6.2.7) splňovaly tzv. *přechodové podmínky*

$$(6.2.9) \quad \begin{aligned} u(Q-) &= u(Q+), \\ p(Q-) \frac{\partial u(Q-)}{\partial n} &= p(Q+) \frac{\partial u(Q+)}{\partial n}, \end{aligned}$$

kde symboly $w(Q-)$, $w(Q+)$ označují limity

$$w(Q-) = \lim_{\substack{P \rightarrow Q \\ P \in \Omega_1}} w(P), \quad w(Q+) = \lim_{\substack{P \rightarrow Q \\ P \in \Omega_2}} w(P).$$

Podmínky (6.2.9) vyjadřují požadavek spojitosti funkcí u , $p(\partial u / \partial n)$ při přechodu přes rozhraní Γ . Připomeňme, že pokud u je klasické řešení, pak funkce $p \operatorname{grad} u$ je spojitě diferencovatelná a přechodové podmínky (6.2.9) jsou pro hladké Γ splněny automaticky.

Na rozhraní Γ můžeme formulovat ještě obecnější přechodovou podmínku. Místo požadavku spojitosti funkce $p(\partial u/\partial n)$ při přechodu přes rozhraní Γ (u požadujeme opět spojitě) klademe přechodovou podmínku ve tvaru

$$(6.2.10) \quad p(Q-)\frac{\partial u(Q-)}{\partial n} - p(Q+)\frac{\partial u(Q+)}{\partial n} = \tilde{g}(Q), \quad Q \in \Gamma,$$

kde \tilde{g} je nenulová funkce daná na Γ . Předepisujeme tedy nenulový skok funkce $p(\partial u/\partial n)$ na Γ . Tuto podmínku předepisujeme např. v úlohách na elektrostatický potenciál, v nichž \tilde{g} představuje hustotu dipólů dvojvrstvy a p má význam permitivity prostředí. Dá se ukázat [26], že v případě okrajových úloh s přechodovými podmínkami typu (6.2.10) je existence klasického řešení principiálně vyloučena. Jelikož však podobné úlohy mohou přesto mít rozumný fyzikální smysl, je vidět, že i u parciálních diferenciálních rovnic bude účelné definovat řešení okrajové úlohy poněkud obecněji. Proto si nejdříve připomeneme některé pojmy a uvedeme nezbytné výsledky o prostorech funkcí. Podrobnější poučení najde čtenář např. v [38].

6.2.3. Hladké a integrovatelné funkce. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je omezená oblast. Symbolem $C(\bar{\Omega})$ označíme normovaný lineární prostor funkcí $f: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ spojitých na $\bar{\Omega}$ s normou

$$(6.2.11) \quad \|f\|_C = \max_{x \in \bar{\Omega}} |f(\mathbf{x})|.$$

Nechť k je přirozené číslo. Symbolem $C^k(\bar{\Omega})$ označíme normovaný lineární prostor funkcí f , které jsou spojitě v Ω se všemi svými parciálními derivacemi až do k -tého řádu včetně a takové, že všechny tyto derivace lze spojitě rozšířit z Ω na $\bar{\Omega}$. Normu v tomto prostoru budeme označovat $\|f\|_{C^k}$. Např. pro $f \in C^1(\bar{\Omega})$ je

$$(6.2.12) \quad \|f\|_{C^1} = \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} |f(\mathbf{x})| + \sum_{i=1}^n \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} \left| \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i} \right|.$$

Symbolem $L_2(\Omega)$ označíme lineární prostor funkcí $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, pro něž je integrál (v Lebesgueově smyslu) $\int_{\Omega} |f(\mathbf{x})|^2 d\Omega$ konečný. Pro $f, g \in L_2(\Omega)$ definujeme skalární součin předpisem

$$(6.2.13) \quad (f, g) = \int_{\Omega} fg d\Omega$$

a normu předpisem

$$(6.2.14) \quad \|f\| = (f, f)^{1/2} = \sqrt{\int_{\Omega} |f|^2 d\Omega}.$$

Pro libovolné dvě funkce $f, g \in L_2(\Omega)$ platí *Schwarzova nerovnost*

$$|(f, g)| \leq \|f\| \cdot \|g\|.$$

Stejně jako u funkcí jedné proměnné (odst. 4.2.1) je $L_2(\Omega)$ Hilbertův prostor (úplný normovaný prostor se skalárním součinem). Do prostoru $L_2(\Omega)$ patří nejen všechny funkce spojitě v $\bar{\Omega}$, ale také funkce omezené a po částech spojitě (např. po částech konstantní funkce) a také limitní funkce konvergentních posloupností takových funkcí.

Obecně je $L_p(\Omega)$, $p > 0$, úplný normovaný prostor s normou

$$\|f\|_{L_p} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p d\Omega \right)^{1/p}.$$

Pro $p \neq 2$ není $L_p(\Omega)$ Hilbertovým prostorem. Funkce $f, g \in L_p(\Omega)$, které se liší na množině nulové míry (např. v bodech hranice $\partial\Omega$), představují jeden a tentýž prvek prostoru $L_p(\Omega)$, neboť pro takové funkce je $\|f - g\|_{L_p} = 0$.

6.2.4. Sobolevovy prostory. Pro formulaci okrajových úloh pro parciální diferenciální rovnice druhého řádu v \mathbb{R}^2 je přirozené požadovat, aby řešením úlohy byla funkce, pro kterou je integrál (pro $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, $d\Omega = dx dy$)

$$\int_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + u^2 \right] d\Omega$$

konečný. Množinu takových funkcí označíme $W_2^1(\Omega)$. Obecně symbolem $W_2^k(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, označujeme lineární normovaný prostor všech těch funkcí $u \in L_2(\Omega)$, jejichž všechny zobecněné parciální derivace až do řádu k včetně patří také do $L_2(\Omega)$. Normu v tomto prostoru budeme označovat $\|\cdot\|_k$.

Například v prostoru

$$(6.2.15) \quad W_2^1(\Omega) = \left\{ u \in L_2(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L_2(\Omega), \quad i = 1, 2, \dots, n \right\}$$

je norma definována vzorcem

$$(6.2.16) \quad \|u\|_1 = \left[\int_{\Omega} \left(u^2 + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 \right) d\Omega \right]^{1/2}.$$

Prostor $W_2^1(\Omega)$ je Hilbertovým prostorem vzhledem ke skalárnímu součinu

$$(6.2.17) \quad (u, v)_1 = \int_{\Omega} \left[uv + \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \right] d\Omega.$$

Podobně norma a skalární součin v prostoru

$$(6.2.18) \quad W_2^2(\Omega) = \left\{ u \in L_2 : \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L_2, \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \in L_2, i, j = 1, \dots, n \right\}$$

jsou dány vzorci

$$(6.2.19) \quad \|u\|_2 = \left[\int_{\Omega} \left(u^2 + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 + \sum_{i,j=1}^n \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right)^2 \right) d\Omega \right]^{1/2},$$

$$(6.2.20) \quad (u, v)_2 = \int_{\Omega} \left[uv + \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} + \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} \right] d\Omega.$$

6.2.5. Věty o vnoření a stopa funkce. Derivace funkce $u \in W_2^k(\Omega)$ chápeme v zobecněném smyslu [26]. Diferencovatelnost u v klasickém smyslu závisí jak na k , tak na dimenzi n prostoru $\mathbb{R}^n \supset \Omega$. V případě $\Omega = (a, b) \subset \mathbb{R}$ ($n = 1$) platí $W_2^k(a, b) \subset C^{k-1}(a, b)$. Znamená to, že např. každá funkce $u \in W_2^1(a, b)$ je spojitá na (a, b) . Pro \mathbb{R}^n , $n \geq 2$ už takové tvrzení neplatí. Pro $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ s dostatečně hladkou hranicí $\partial\Omega$ totiž platí (*věta o vnoření*)

$$(6.2.21) \quad W_2^k(\Omega) \subset C^s(\bar{\Omega}),$$

kde k, s, n jsou vázány podmínkou $2(k - s) > n$. Pro $k = 1, s = 0$ je tato podmínka splněna pouze když $n = 1$, tj. $W_2^1(\Omega) \subset C(\bar{\Omega})$ platí pouze pro funkce jedné proměnné. Z (6.2.21) dále např. plyne, že pro funkce dvou a tří proměnných ($n = 2, 3$) platí

$$(6.2.22) \quad W_2^k(\Omega) \subset C^{k-2}(\bar{\Omega}), \quad k \geq 2, \quad C^0 \equiv C.$$

Inkluze typu (6.2.21) pochopitelně nejsou v rozporu s tvrzením, že např. prostor $W_2^1(\Omega)$ obsahuje také funkce spojitě diferencovatelné na $\bar{\Omega}$.

Je-li $u \in C(\bar{\Omega})$, potom restrikce $u|_{\partial\Omega}$ na $\partial\Omega$ je spojitou funkcí (tj. $u|_{\partial\Omega} \in C(\partial\Omega)$) a má tedy smysl hovořit o jejích hodnotách v bodech hranice. Tato restrikce $u|_{\partial\Omega}$ je funkcí u určena jednoznačně. Zobecněním pojmu restrikce na $\partial\Omega$ pro funkce $u \in W_2^1(\Omega)$ je tzv. *stopa funkce* u na $\partial\Omega$. Lze dokázat [38], že každé funkci $u \in W_2^1(\Omega)$ (podobně pro $u \in W_2^k(\Omega)$) lze jednoznačně přiřadit funkci $u_s \in L_2(\partial\Omega)$, která pro funkce $u \in W_2^1(\Omega)$, spojitě na $\bar{\Omega}$, je rovna výše zmíněné restrikci, tj. $u_s = u|_{\partial\Omega}$. Skutečnost, že dvě funkce $u, v \in W_2^1(\Omega)$ mají na $\partial\Omega$ stejné stopy, zapisujeme

$$u = v \quad \text{na } \partial\Omega$$

a říkáme, že rovnost $u = v$ na $\partial\Omega$ je splněna ve smyslu stop.

Při formulaci okrajových úloh pro parciální diferenciální rovnice druhého řádu se setkáváme s požadavkem, abychom k dané funkci g definované na $\partial\Omega$ našli funkci $u \in W_2^1(\Omega)$, která řeší danou diferenciální rovnici v Ω a jejíž stopa je rovna dané funkci g . Poslední požadavek zapíšeme ve tvaru

$$u = g \quad \text{na } \partial\Omega.$$

Zde je automaticky zahrnut předpoklad, že funkci g lze rozšířit na celou oblast Ω tak, že rozšířená funkce g patří do $W_2^1(\Omega)$. Obecně totiž takové rozšíření pro libovolnou funkci definovanou na $\partial\Omega$ existovat nemusí (důležitou roli také hrají vlastnosti hranice) a příslušná okrajová úloha nemusí být řešitelná.

Podrobnější zpracování problematiky odst. 6.2.3 až 6.2.5 najde čtenář např. v [38].

6.2.6. Prostory přípustných a testovacích funkcí. Stejně jako v odst. 4.2.2 zavedeme také zde jisté podmnožiny V a V_g prostoru $W_2^1(\Omega)$ (pro diferenciální rovnice druhého řádu). V množině V_g budeme hledat řešení a budeme ji nazývat *prostorem přípustných funkcí*. Množinu V budeme nazývat *prostorem testovacích funkcí*. Tyto prostory budou určeny danými okrajovými podmínkami. Prostor V_g je tvořen těmi funkcemi z $W_2^1(\Omega)$, které splňují zadanou Dirichletovu okrajovou podmínku. Nebude-li na $\partial\Omega$ nebo na její části Dirichletova okrajová podmínka zadána, bude $V \equiv V_g \equiv W_2^1(\Omega)$. Obecně platí, že $V \subset V_g \subset W_2^1(\Omega)$.

6.2.7. Definice slabého řešení. Omezíme se na úlohu (6.2.7), (6.2.8) z odst. 6.2.2. Předpokládáme, že p, q jsou spojité nebo po částech spojité a omezené funkce na $\bar{\Omega}$, σ je spojitá či po částech spojitá omezená funkce na Γ_3 , $f \in L_2(\Omega)$, $g_1 \in W_2^1(\Omega)$, $g_i \in L_2(\Gamma_i)$, $i = 2, 3$. Označíme

$$\begin{aligned} V_g &= \{u \in W_2^1(\Omega) : u = g_1 \text{ na } \Gamma_1 \text{ ve smyslu stop}\}, \\ V &= \{v \in W_2^1(\Omega) : v = 0 \text{ na } \Gamma_1 \text{ ve smyslu stop}\}. \end{aligned}$$

Funkce u je *slabým řešením* okrajové úlohy

$$\begin{aligned} (6.2.23) \quad & -\operatorname{div}(p(\mathbf{x}) \operatorname{grad} u) + q(\mathbf{x})u = f(\mathbf{x}) \quad \text{v } \Omega, \\ & u = g_1 \quad \text{na } \Gamma_1, \\ & p \frac{\partial u}{\partial n} = g_2 \quad \text{na } \Gamma_2, \\ & \sigma u + p \frac{\partial u}{\partial n} = g_3 \quad \text{na } \Gamma_3, \end{aligned}$$

má-li tyto vlastnosti:

- (i) $u \in V_g$ (tj. u je přípustná funkce),

(ii) pro každou testovací funkci $v \in V$ platí integrální rovnost

$$(6.2.24) \quad \begin{aligned} & \int_{\Omega} [p \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v + quv] \, d\Omega + \int_{\Gamma_3} \sigma uv \, dS = \\ & = \int_{\Omega} f v \, d\Omega + \int_{\Gamma_2} g_2 v \, dS + \int_{\Gamma_3} g_3 v \, dS. \end{aligned}$$

Integrály přes Γ_2 , Γ_3 jsou pro $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ křivkové, pro $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ plošné. Všimněme si, že od funkcí g_2 a g_3 nepožadujeme, aby byly stopami nějakých funkcí z $W_2^1(\Omega)$; stačí, aby uvedené integrály měly smysl.

Označíme-li

$$(6.2.25) \quad \begin{aligned} a(u, v) &= \int_{\Omega} [p \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v + quv] \, d\Omega + \int_{\Gamma_3} \sigma uv \, dS, \\ F(v) &= \int_{\Omega} f v \, d\Omega + \int_{\Gamma_2} g_2 v \, dS + \int_{\Gamma_3} g_3 v \, dS, \end{aligned}$$

můžeme podmínku (ii) se vztahem (6.2.24) zapisovat ve tvaru

$$(6.2.26) \quad a(u, v) = F(v) \quad \forall v \in V.$$

Výraz $a(u, v)$ chápeme jako bilineární formu $a: W_2^1(\Omega) \times W_2^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ a výraz $F(v)$ jako lineární formu $F: W_2^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ ve stejném duchu jako v odst. 4.2.6. Je patrné, že bilineární forma $a(u, v)$ daná integrálem (6.2.25) je symetrická, tj. platí $a(u, v) = a(v, u)$.

Slabou formulaci běžných okrajových úloh budeme psát ve tvaru (6.2.26). Specifikace forem $a(u, v)$, $F(v)$ a prostorů V a V_g je dána tabulkou 6.

Na tomto místě zdůrazníme, že bude-li slabé řešení u dané okrajové úlohy dostatečně hladké, bude splňovat okrajovou úlohu v klasickém smyslu, tj. bude klasickým řešením. Tuto problematiku jsme podrobněji popsali v odst. 4.1. U parciálních diferenciálních rovnic je situace obdobná.

Všimněme si ještě skutečnosti, že splnění Dirichletovy okrajové podmínky na Γ_1 explicitně vyžadujeme, kdežto splnění Neumannovy podmínky na Γ_3 a Newtonovy podmínky na Γ_3 nikoliv. Splnění těchto podmínek ve slabém smyslu je přirozeným způsobem zahrnuto v integrální rovnosti (6.2.24). Chápeme to tak, že pokud (6.2.24) platí pro dostatečně hladkou funkci u (stačí $u \in W_2^2(\Omega)$), a pro libovolnou funkci $v \in V$, pak z (6.2.24) plyne rovnost ($\forall v \in V$)

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} [-\operatorname{div}(p(\mathbf{x}) \operatorname{grad} u) + q(\mathbf{x})u - f(\mathbf{x})] v \, d\Omega + \int_{\Gamma_1} p \frac{\partial u}{\partial n} v \, dS + \\ & + \int_{\Gamma_2} \left[p \frac{\partial u}{\partial n} - g_2 \right] v \, dS + \int_{\Gamma_3} \left[p \frac{\partial u}{\partial n} + \sigma - g_3 \right] v \, dS = 0. \end{aligned}$$

Požadavky úlohy (6.2.23) jsou tedy splněny skoro všude v Ω (rovnice) a skoro ve všech bodech hranice $\partial\Omega$ (okrajové podmínky). Pro $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ jsou příslušné požadavky splněny ve všech bodech.

Okrajová úloha	Prostor	Prostor	Bilineární forma $a(u, v)$	Lineární forma $F(v)$
	$V_g \subset W_2^1(\Omega)$	$V \subset W_2^1(\Omega)$	$u \in V_g, v \in V$	$v \in V, f \in L_2(\Omega)$
$-\operatorname{div}(p(\mathbf{x}) \operatorname{grad} u) + q(\mathbf{x})u = f(\mathbf{x}),$ $u = g$ na $\partial\Omega$	$u = g$ na $\partial\Omega$	$v = 0$ na $\partial\Omega$	$\int_{\Omega} [p \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v + quv] \, d\Omega$	$\int_{\Omega} f v \, d\Omega$
$-\operatorname{div}(p(\mathbf{x}) \operatorname{grad} u) + q(\mathbf{x})u = f(\mathbf{x}),$ $p(\partial u / \partial n) = g$ na $\partial\Omega$	$V_g = W_2^1(\Omega)$	$V = W_2^1(\Omega)$	$\int_{\Omega} [p \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v + quv] \, d\Omega$	$\int_{\Omega} f v \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} g v \, dS$
$-\operatorname{div}(p(\mathbf{x}) \operatorname{grad} u) + q(\mathbf{x})u = f(\mathbf{x}),$ $y = g_1$ na $\Gamma_1,$ $p(\partial u / \partial n) = g_2$ na $\Gamma_2, \Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \partial\Omega$	$u = g_1$ na Γ_1	$v = 0$ na Γ_1	$\int_{\Omega} [p \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v + quv] \, d\Omega$	$\int_{\Omega} f v \, d\Omega + \int_{\Gamma_2} g_2 v \, dS$
$-\operatorname{div}(p(\mathbf{x}) \operatorname{grad} u) + q(\mathbf{x})u = f(\mathbf{x}),$ $\sigma u + p(\partial u / \partial n) = g$ na $\partial\Omega$	$V_g = W_2^1(\Omega)$	$V = W_2^1(\Omega)$	$\int_{\Omega} [p \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v + quv] \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} \sigma uv \, dS$	$\int_{\Omega} f v \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} g v \, d\Omega$
$-\operatorname{div}(\mathbf{P}(\mathbf{x}) \operatorname{grad} u) + q(\mathbf{x})u = f(\mathbf{x}),$ $u = g_1$ na $\Gamma_1,$ $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{P} \operatorname{grad} u) = g_2$ na Γ_2	$u = g_1$ na Γ_1	$v = 0$ na Γ_1	$\int_{\Omega} [(\mathbf{P} \operatorname{grad} u) \cdot \operatorname{grad} v + quv] \, d\Omega,$ $\mathbf{P}(\mathbf{x}) = [p_{ij}(\mathbf{x})], p_{ij} = p_{ji}$	$\int_{\Omega} f v \, d\Omega + \int_{\Gamma_2} g_2 v \, dS$
$-\operatorname{div}(p(\mathbf{x}) \operatorname{grad} u) q(\mathbf{x})u = f(\mathbf{x}),$ $u = g_1$ na $\Gamma_1, p(\partial u / \partial n) = g_2$ na $\Gamma_2,$ $\sigma u + p(\partial u / \partial n) = g_3$ na Γ_3	$u = g_1$ na Γ_1	$v = 0$ na Γ_1	$\int_{\Omega} [p \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v + quv] \, d\Omega + \int_{\Gamma_3} \sigma uv \, dS$	$\int_{\Omega} f v \, d\Omega + \int_{\Gamma_2} g_2 v \, dS + \int_{\Gamma_3} g_3 v \, dS$

Tab. 6. Formulace typických okrajových úloh pro eliptické parciální diferenciální rovnice.

6.2.8. Věta. Budiž dána standardní okrajová úloha (6.2.1), (6.2.2) a k ní přiřazené formy $a(u, v)$, $F(v)$ a prostory V a V_g (viz tab. 6). Necht' $f \in L_2(\Omega)$ a necht' platí:

(a) bilineární forma $a(u, v): W_2^1(\Omega) \times W_2^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ je omezená, tj. existuje číslo $C_1 > 0$ takové, že

$$(6.2.27) \quad |a(u, v)| \leq C_1 \|u\|_1 \|v\|_1 \quad \forall u, v \in W_2^1(\Omega);$$

(b) bilineární forma $a(u, v)$ je eliptická, tj. existuje číslo $C_2 > 0$ takové, že

$$(6.2.28) \quad a(v, v) \geq C_2 \|v\|_1^2 \quad \forall v \in W_2^1(\Omega);$$

(c) lineární forma $F(v): W_2^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ je omezená, tj. existuje číslo $C_3 > 0$ takové, že

$$(6.2.29) \quad |F(v)| \leq C_3 \|v\|_1.$$

Potom existuje jediná funkce $u \in V_g$, která splňuje rovnost

$$(6.2.30) \quad a(u, v) = F(v)$$

pro každou funkci $v \in V$, tj. okrajová úloha má právě jedno slabé řešení u . V případě, že funkce f, g budou spojité na $\bar{\Omega}$, hranice $\partial\Omega$ bude dostatečně hladká [22], funkce α, β budou spojité na té části hranice $\partial\Omega$, kde jsou uvažovány, a funkce p nebo $p \operatorname{grad} u$ bude spojitě diferencovatelná na $\bar{\Omega}$, bude slabé řešení u zároveň klasickým řešením.

6.2.9. Poznámky.

(i) Připomeňme, že bilineární forma (6.2.25) má vlastnost (6.2.27) např. za těchto předpokladů: oblast Ω je omezená a má hladkou nebo po částech hladkou hranici $\partial\Omega$ a funkce p, q, σ jsou omezené a po částech spojité. Předpoklad (6.2.28) splníme, platí-li $p(\mathbf{x}) \geq p_0 > 0$, $q(\mathbf{x}) \geq 0$, $\sigma(\mathbf{x}) \geq \sigma_0 > 0$. Požadavek (6.2.29) splníme, když $f \in L_2(\Omega)$ a když funkce g_2, g_3 jsou omezené a po částech spojité na příslušných částech hranice $\partial\Omega$.

(ii) Věta 6.2.8 je důsledkem známé Laxovy-Milgramovy věty uvedené např. v [26]. Podstatná je zde skutečnost, že $W_2^1(\Omega)$ je Hilbertovým prostorem

(iii) Podotkněme, že větu 6.2.8 nelze bezprostředně aplikovat na úlohu

$$(6.2.31) \quad \begin{aligned} -\operatorname{div}(p(\mathbf{x}) \operatorname{grad} u) &= f(\mathbf{x}) \quad \text{v } \Omega, \\ p \frac{\partial u}{\partial n} &= g \quad \text{na } \partial\Omega, \end{aligned}$$

u níž existuje v prostoru $W_2^1(\Omega)$ řešení (nikoliv však jediné) pouze při splnění doplňující podmínky

$$(6.2.32) \quad \int_{\Omega} f(\mathbf{x}) \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} g(\mathbf{x}) \, dS = 0.$$

Jediné řešení pak existuje např. na užším prostoru

$$\tilde{V} = \left\{ v \in W_2^1(\Omega) : \int_{\Omega} v(\mathbf{x}) \, d\Omega = 0 \right\}.$$

(iv) Přejchodové podmínky (6.2.9) jsou automaticky zahrnuty ve slabé formulaci úlohy (viz [26], odst. 16.8). Nehomogenní přechodová podmínka (6.2.10) však nikoliv (viz [26], odst. 16.21 až 16.23).

6.3. Variační úlohy

6.3.1. Variační formulace okrajové úlohy. Princip variačního přístupu k okrajové úloze byl popsán v odst. 4.2.7. Pro parciální diferenciální rovnice eliptického typu lze podrobnější výklad nalézt v [26] a především v [38]. Zde se omezíme na jeden konkrétní případ.

Pro okrajovou úlohu (6.2.23) definujeme funkcionál $\Phi: V_g \rightarrow \mathbb{R}$ předpisem

$$(6.3.1) \quad \begin{aligned} \Phi(v) = & \frac{1}{2} \int_{\Omega} [p \operatorname{grad}^2 v + qv^2 - 2fv] \, d\Omega + \\ & + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_3} \sigma v^2 \, dS - \int_{\Gamma_2} g_2 v \, dS - \int_{\Gamma_3} g_3 v \, dS, \end{aligned}$$

kde $V_g = \{v \in W_2^1(\Omega) : v = g_1 \text{ na } \Gamma_1 \text{ ve smyslu stop}\}$. Nechť $w \in V = \{v \in W_2^1(\Omega) : v = 0 \text{ na } \Gamma_1 \text{ ve smyslu stop}\}$. Potom podmínka nulovosti variace funkcionálu Φ v bodě $u \in V_g$ má tvar

$$(6.3.2) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dt} \Phi(u + tw) \big|_{t=0} = & \int_{\Omega} [p \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} w + quw - fw] \, d\Omega + \\ & + \int_{\Gamma_3} \sigma uw \, dS - \int_{\Gamma_2} g_2 w \, dS - \int_{\Gamma_3} g_3 w \, dS = 0 \end{aligned}$$

a má být splněna pro každou funkci $w \in V$.

Užijeme-li označení z odst. 6.2.7, můžeme podmínku (6.3.2) psát stručně ve tvaru

$$(6.3.3) \quad a(u, w) - F(w) = 0 \quad \forall w \in V.$$

Protože $a(u, w) = a(w, u)$ (symetrická bilineární forma), lze funkcionál (6.3.1) zapsat stručně

$$(6.3.4) \quad \Phi(v) = \frac{1}{2} a(v, v) - F(v).$$

Funkcionál Φ je kvadratický, neboť

$$\frac{d^2}{dt^2} \Phi(u + tw) \big|_{t=0} = a(w, w) > 0, \quad \frac{d^k}{dt^k} \Phi(u + tw) \big|_{t=0} = 0 \quad \text{pro } k \geq 3.$$

V aplikacích má takto sestrojený funkcionál často význam energie, a hovoří se o něm jako o *energetickém funkcionálu*.

V odst. 4.2.7 jsme uvedli, že řešení konkrétní okrajové úlohy může být minimem, resp. stacionárním bodem i jiných funkcionálů. Pro úlohy s parciální diferenciální rovnicí je situace obdobná, ale podrobněji se zde touto problematikou zabývat nebudeme.

Energetický funkcionál můžeme konstruovat i pro diferenciální rovnice vyšších řádů. Zmíníme se o tom později (odst. 8.2) v rámci konkrétního příkladu.

6.3.2. Věta. *Budiž dána omezená, symetrická a eliptická bilineární forma $a(u, v): W_2^1(\Omega) \times W_2^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$, omezená lineární forma $F(v): W_2^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$, prostor $V_g \subset W_2^1(\Omega)$ přípustných funkcí a prostor V testovacích funkcí (včetně případu $V = V_g = W_2^1(\Omega)$). Pro $v \in V_g$ definujme kvadratický funkcionál*

$$\Phi(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - F(v).$$

Mějme okrajovou úlohu (a)

najít takové $u \in V_g$, že pro všechna $w \in V$ platí

$$a(u, w) = F(w)$$

a variační úlohu (b)

najít takové $u \in V_g$, že pro všechna $v \in V_g$ platí

$$\Phi(u) \leq \Phi(v),$$

tj.

$$\Phi(u) = \min_{v \in V_g} \Phi(v).$$

Potom

- (1) každá z těchto úloh má právě jedno řešení,
- (2) řešení jedné úlohy je současně řešením druhé úlohy.

Důkaz lze nalézt např. v [26], [37].

6.4. Cvičení

6.4.1. Sestavte bilineární formu $a(u, v)$ a lineární formu $F(v)$ pro okrajovou úlohu $-(u_{xx} + u_{yy}) = 2 \sin 3y \cos x$, $(x, y) \in (0, \frac{1}{2}\pi) \times (0, \frac{1}{2}\pi)$, $u(x, 0) = u(x, \frac{1}{2}\pi) = 0$, $u_x(0, y) = 0$, $u_x(\frac{1}{2}\pi, y) = -\frac{1}{5} \sin 3y$ a určete prostory V a V_g . Proveďte eliptičnost úlohy. Ukažte, že klasické řešení $u(x, y) = \frac{1}{5} \sin 3y \cos x$ je současně slabým řešením dané úlohy. [Návod: $a(u, v) = \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} (u_x(x, y)v_x(x, y) + u_y(x, y)v_y(x, y)) dx dy - \frac{1}{5} \int_0^{\pi/2} \sin 3y v(\frac{1}{2}\pi, y) dy$, $F(v) = \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} 2 \sin 3y \cos x v(x, y) dx dy$; $V = V_g = \{v \in W_2^1((0, \pi/2) \times (0, \pi/2)): v(x, 0) = 0, v(x, \pi/2) = 0\}$. Pro důkaz eliptičnosti vyjdeme ze zřejmé rovnosti $u(x, y) = \int_0^y u_y(x, \eta) d\eta$ a použijeme Schwarzovu nerovnost (odst.

6.2.3). Dostaneme tak nerovnost $u^2(x, y) \leq y \int_0^y u_y^2(x, \eta) d\eta$. Protože $0 \leq y \leq \pi/2$, pak další integrace dává

$$\int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} u^2(x, y) dx dy \leq (\pi/2)^2 \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} u_y^2(x, y) dx dy,$$

a tím spíše platí

$$\int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} u^2(x, y) dx dy \leq (\pi/2)^2 \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} u_x^2(x, y) + u_y^2(x, y) dx dy.$$

Nyní stačí k oběma stranám přičíst výraz rovný integrálu na pravé straně.]

6.4.2. Volme $V = \mathbb{R}^n$, $a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{v}^T \mathbf{A} \mathbf{u}$, $F(\mathbf{v}) = \mathbf{f}^T \mathbf{v}$, kde $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{f}$ jsou reálné vektory z \mathbb{R}^n a \mathbf{A} je čtvercová symetrická matice řádu n . Posuďte řešitelnost úlohy najít $\mathbf{u} \in V$ takové, že $a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = F(\mathbf{v}) \forall \mathbf{v} \in V$. Výsledky porovnejte s větou 6.2.8. Volte normu $\|\mathbf{v}\|_V = (\sum_{k=1}^n v_k^2)^{1/2}$. [Návod: Úloha je ekvivalentní s úlohou $\mathbf{v}^T (\mathbf{A} \mathbf{u} - \mathbf{f}) = 0 \forall \mathbf{v} \in V$, tj. se soustavou n lineárních algebraických rovnic. Podmínky omezenosti uvažovaných forem jsou důsledkem známých faktů z lineární algebry $|\mathbf{v}^T \mathbf{A} \mathbf{u}| \leq \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{u}\|_V \|\mathbf{v}\|_V$, $|\mathbf{f}^T \mathbf{v}| \leq \|\mathbf{f}\|_V \|\mathbf{v}\|_V$ (konzistence vektorové a maticové normy) a podmínka eliptičnosti představuje podmínku pozitivní definitnosti (a tedy regulárnosti) matice \mathbf{A} .]

7. Diskretizace eliptických úloh diferenčními metodami

7.1. Úvod. Chceme-li numericky řešit okrajovou úlohu pro parciální diferenciální rovnici, užíváme v zásadě tytéž postupy, které jsme používali v čl. 3 a 4. Základní princip diferenčních metod tedy zůstává stejný. V oblasti, ve které hledáme řešení, zvolíme nějakou konečnou množinu bodů a diferenciální úlohu nahradíme soustavou konečně mnoha algebraických rovnic pro přibližné hodnoty řešení v těchto bodech.

V *metodě konečných diferencí* přitom nahrazujeme derivace v diferenciální rovnici a okrajových podmínkách vhodnými diferenčními podíly. V *metodě integrálních identit* naproti tomu aproximujeme jisté integrální vztahy, které platí pro řešení dané diferenciální rovnice. Souhrnně užíváme pro tyto metody termín *diferenční metoda* nebo *metoda sítě*.

7.2. Metoda konečných diferencí. Základní ideu metody konečných diferencí pro řešení eliptických úloh vyložíme na jednoduché modelové úloze pro Poissonovu rovnici s Dirichletovými okrajovými podmínkami.

7.2.1. Diskretizace metodou konečných diferencí. Na čtverci $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$ chceme řešit okrajovou úlohu

$$(7.2.1) \quad \begin{aligned} -(u_{xx} + u_{yy}) &= f(x, y), & (x, y) \in \Omega, \\ u(x, y) &= g(x, y), & (x, y) \in \partial\Omega. \end{aligned}$$

Funkce f a g jsou dané funkce, o nichž předpokládáme, že f je spojitá na $\bar{\Omega}$ a g je spojitá na $\partial\Omega$.

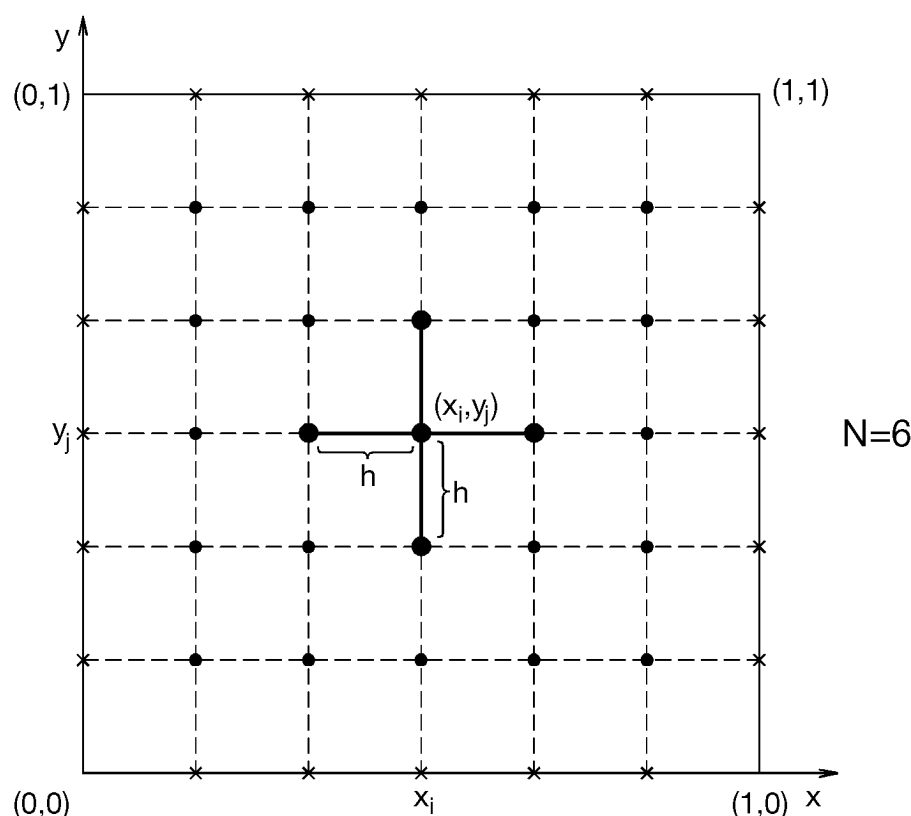
Zvolíme celé číslo $N > 1$ a položíme $h = 1/N$. V oblasti Ω sestrojíme množinu (obr. 14)

$$\mathcal{S} = \{(x_i, y_j) \in \Omega: x_i = ih, y_j = jh, i, j = 1, 2, \dots, N-1\}$$

a na $\partial\Omega$ množinu

$$\partial\mathcal{S} = \{(x_i, 0), (x_i, 1), (0, y_j), (1, y_j); i, j = 1, 2, \dots, N-1\}.$$

Množina $\bar{\mathcal{S}} = \mathcal{S} \cup \partial\mathcal{S}$ se nazývá *čtvercová síť* a číslo h se nazývá *krok sítě*. Bodům $(x_i, y_j) \in \bar{\mathcal{S}}$ říkáme *uzly sítě*. Body množiny \mathcal{S} se nazývají *vnitřní uzly* a body množiny $\partial\mathcal{S}$ *hraniční uzly*. Množina \mathcal{S} obsahuje $(N-1)^2$ uzlů a množina $\partial\mathcal{S}$ obsahuje $4(N-1)$ uzlů. Na obr. 14 je $N = 6$.



Obr. 14. Čtvercová síť pro úlohu (7.2.1) s $N = 6$, $h = 1/6$.
Hraniční uzly jsou označeny křížkem, vnitřní uzly tečkou.

Naše předpoklady zaručují, že řešením úlohy (7.2.1) je funkce $u = u(x, y)$, která je spojitá v $\bar{\Omega}$ a má spojitě druhé derivace u_{xx}, u_{yy} v každém bodě oblasti Ω . Proto v každém uzlu $(x_i, y_j) \in \mathcal{S}$ platí rovnost

$$(7.2.2) \quad -u_{xx}(x_i, y_j) - u_{yy}(x_i, y_j) = f(x_i, y_j), \quad i, j = 1, 2, \dots, N-1.$$

Druhé derivace v uzlu (x_i, y_j) nahradíme (aproximujeme) druhými poměrnými diferencemi (srov. ř. 6 tab. 3, odst. 3.3.1)

$$u_{xx}(x_i, y_j) \approx \frac{1}{h^2}[u(x_i - h, y_j) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i + h, y_j)],$$

$$u_{yy}(x_i, y_j) \approx \frac{1}{h^2}[u(x_i, y_j - h) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i, y_j + h)].$$

Aproximací rovnice (7.2.2) je tedy vztah

$$\frac{1}{h^2}[4u(x_i, y_j) - u(x_i - h, y_j) - u(x_i + h, y_j) - u(x_i, y_j - h) - u(x_i, y_j + h)] \approx f(x_i, y_j).$$

Přibližné řešení úlohy (7.2.1) hledáme jako síťovou funkci, jejíž hodnoty $U_{ij} \approx u(x_i, y_j)$ splňují soustavu síťových rovnic

$$(7.2.3) \quad \frac{1}{h^2}(4U_{ij} - U_{i-1,j} - U_{i+1,j} - U_{i,j-1} - U_{i,j+1}) = f_{ij},$$

$$i, j = 1, 2, \dots, N-1,$$

kde $f_{ij} = f(x_i, y_j)$. Soustava (7.2.3) aproximuje (7.2.2) s řádem $O(h^2)$ stejně jako tomu bylo v analogické situaci u obyčejných diferenciálních rovnic (viz odst. 3.2).

Síťové rovnice (7.2.3) obsahují $(N+1)^2 - 4$ hodnot U_{ij} , z toho $(N-1)^2$ neznámých hodnot v $(N-1)^2$ vnitřních uzlech a $4(N-1)$ hodnot v $4(N-1)$ hraničních uzlech určených okrajovou podmínkou. Proto do síťových rovnic (7.2.3) dosadíme z okrajové podmínky $U_{ij} = g(x_i, y_j)$, $(x_i, y_j) \in \partial\mathcal{S}$ a převedeme členy obsahující $g_{ij} \equiv g(x_i, y_j)$ (známé konstanty) na pravou stranu. $(N-1)^2$ rovnic seřadíme např. podle sloupců sítě (obr. 14). Tím je určeno i seřazení neznámých U_{ij} a posléze označíme $\mathbf{U}_h = [U_{11}, U_{12}, \dots, U_{1,N-1}; U_{21}, \dots, U_{2,N-1}; \dots; U_{N-1,1}, \dots, U_{N-1,N-1}]^T$. Abychom zjednodušili další zápis, vynásobíme nakonec všechny síťové rovnice číslem h^2 . Dostaneme tak soustavu lineárních algebraických rovnic

$$(7.2.4) \quad \mathbf{A}_h \mathbf{U}_h = \mathbf{F}_h,$$

kde $\mathbf{F}_h = [F_{11}, F_{12}, \dots, F_{1,N-1}; F_{21}, \dots, F_{2,N-1}; \dots; F_{N-1,1}, \dots, F_{N-1,N-1}]^T$,

$$\begin{aligned} F_{ij} &= h^2 f_{ij}, \quad i, j = 2, 3, \dots, N-2, \\ F_{11} &= h^2 f_{11} + g_{10} + g_{01}, \\ F_{1,N-1} &= h^2 f_{1,N-1} + g_{1,N} + g_{0,N-1}, \\ F_{i,1} &= h^2 f_{i,1} + g_{i,0}, \quad i = 2, 3, \dots, N-2, \\ F_{i,N-1} &= h^2 f_{i,N-1} + g_{i,N}, \quad i = 2, 3, \dots, N-2, \\ F_{N-1,j} &= h^2 f_{N-1,j} + g_{N,j}, \quad j = 2, 3, \dots, N-2, \\ F_{N-1,1} &= h^2 f_{N-1,1} + g_{N-1,0} + g_{N,1}, \\ F_{N-1,N-1} &= h^2 f_{N-1,N-1} + g_{N-1,N} + g_{N,N-1}. \end{aligned}$$

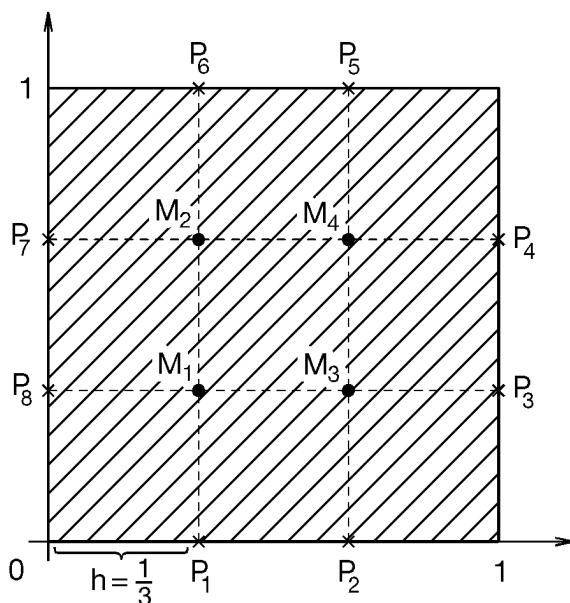
Matice \mathbf{A}_h soustavy (7.2.4) je řádu $(N-1)^2$ a má následující blokově třídiagonální strukturu

$$\mathbf{A}_h = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & -\mathbf{I} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{B} & -\mathbf{I} & & \vdots \\ \mathbf{0} & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & -\mathbf{I} & \mathbf{B} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 4 & -1 & & \vdots \\ 0 & & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 4 & -1 \\ & & & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Řád třídiagonální matice \mathbf{B} a jednotkové matice \mathbf{I} je roven $N - 1$. Matice \mathbf{A}_h je řádková (pásová), neboť v každém řádku má nejvýše pět nenulových prvků. Kromě toho je symetrická a ireducibilně diagonálně dominantní s kladnými prvky na diagonále. Dá se tedy dokázat, že matice \mathbf{A}_h je pozitivně definitní, a tudíž regulární. O maticích tohoto typu jsme se zmínili v odst. 3.5. Obdobné vlastnosti mají většinou i matice vznikající při diskretizaci obecnějších eliptických úloh.

7.2.2. Příklad. Pro úlohu (7.2.1) na jednotkovém čtverci Ω zvolíme čtvercovou síť s krokem $h = \frac{1}{3}$ (obr. 15). Máme tedy množinu čtyř vnitřních uzlů $\mathcal{S} = \{M_1, M_2, M_3, M_4\}$ a množinu osmi hraničních uzlů $\partial\mathcal{S} = \{P_1, P_2, \dots, P_8\}$, kde $M_1 = (h, h)$, $M_2 = (h, 2h)$, $M_3 = (2h, h)$, $M_4 = (2h, 2h)$, $P_1 = (h, 0)$, \dots , $P_8 = (0, h)$ (uzly číslujeme jedním indexem).



Obr. 15. Čtvercová síť s krokem $h = 1/3$.

Soustava síťových rovnic pro 4 neznámé $U_n \approx u(M_n)$, $n = 1, 2, 3, 4$, má podle (7.2.3) po vynásobení číslem h^2 tvar

$$\begin{aligned}
(7.2.5) \quad & 4U_1 - U_2 - g(P_1) - U_3 - g(P_8) = h^2 f_1, \\
& 4U_2 - U_1 - g(P_6) - U_4 - g(P_7) = h^2 f_2, \\
& 4U_3 - g(P_2) - U_4 - g(P_3) - U_1 = h^2 f_3, \\
& 4U_4 - U_3 - g(P_5) - g(P_4) - U_2 = h^2 f_4,
\end{aligned}$$

kde $f_n = f(M_n)$, $n = 1, 2, 3, 4$, a kde $g(P_k)$, $k = 1, 2, \dots, 8$, jsou hodnoty funkce g z okrajové podmínky $u = g$ na $\partial\Omega$. Struktura soustavy (7.2.5) je patrnější v maticovém zápisu

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} = h^2 \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g(P_1) + g(P_8) \\ g(P_6) + g(P_7) \\ g(P_2) + g(P_3) \\ g(P_5) + g(P_4) \end{bmatrix}.$$

Je-li konkrétně $f(x, y) = -4$ a je-li na $\partial\Omega$ okrajová podmínka dána vztahy $u(x, 0) = x^2$, $u(x, 1) = x^2 - x + 2$, $u(0, y) = y(y + 1)$, $u(1, y) = 1 + y^2$, snadno určíme $\mathbf{F}_h = [\frac{1}{9}, \frac{22}{9}, \frac{10}{9}, \frac{25}{9}]^T$. K řešení získané soustavy lineárních algebraických rovnic použijeme např. některou eliminační metodu ([24]). Dostaneme $\mathbf{U}_h = [\frac{4}{9}, 1, \frac{2}{3}, \frac{10}{9}]^T$. Porovnáním s přesným řešením $u(x, y) = x^2 - xy + y^2 + y$ dané Dirichletovy okrajové úlohy pro Poissonovu rovnici na jednotkovém čtverci zjistíme, že dokonce platí $U_n = u(M_n)$, $n = 1, 2, 3, 4$. Důvodem je skutečnost, že soustava (7.2.5) aproximuje v daném případě okrajovou úlohu (7.2.1) s nulovou chybou.

Díky struktuře matice soustavy (symetrická a ostře diagonálně dominantní) můžeme k řešení soustavy síťových rovnic použít i iterační metody. Užijeme-li metodu superrelaxace (viz [24] nebo čl. 10), dostaneme řešení soustavy rovnic (7.2.5) s chybou $< 10^{-4}$ při sedmi iteracích pro $\omega = 1, 2$ a při dvanácti iteracích pro $\omega = 1, 4$. Pro $\omega = 1$ dostáváme zhruba stejnou rychlost konvergence jako pro $\omega = 1, 4$. Počáteční iteraci jsme volili $\mathbf{U}^{(0)} = \mathbf{F}_h$.

7.2.3. Příklad. Na čtverci $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$ chceme řešit Neumannovu okrajovou úlohu

$$\begin{aligned}
(7.2.6) \quad & -(u_{xx} + u_{yy}) = f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega, \\
& \frac{\partial u}{\partial n} = g(x, y), \quad (x, y) \in \partial\Omega.
\end{aligned}$$

Zde $\partial u / \partial n = \mathbf{n} \cdot \text{grad } u$ značí derivaci funkce u ve směru vnější normály k hranici $\partial\Omega$ (\mathbf{n} je jednotkový vektor vnější normály). Na jednotlivých stranách čtverce Ω je

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u(0, y)}{\partial n} &= -u_x(0, y), & \frac{\partial u(1, y)}{\partial n} &= u_x(1, y), \\
\frac{\partial u(x, 0)}{\partial n} &= -u_y(x, 0), & \frac{\partial u(x, 1)}{\partial n} &= u_y(x, 1).
\end{aligned}$$

Při vhodném seřazení dostaneme výslednou soustavu síťových rovnic se symetrickou maticí soustavy

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \\ U_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} hg_2 \\ hg_4 \\ h^2 f_5 \\ hg_6 \\ hg_8 \end{bmatrix}.$$

Nevýhodou tohoto postupu je skutečnost, že užitá aproximace okrajové podmínky znehodnotí celkový řád aproximace úlohy a také řád chyby, přestože aproximace diferenciální rovnice je druhého řádu (viz též odst. 3.3.3).

V druhém případě budeme postupovat tak, abychom dosáhli celkové aproximace řádu $O(h^2)$. Musíme proto aproximovat derivace v okrajové podmínce centrálními poměrnými diferenciemi, tj. použijeme přibližné vzorce (viz ř. 3 tab. 3, odst. 3.3.2)

$$u_x(x, y) \approx \frac{1}{2h}[u(x+h, y) - u(x-h, y)], \quad u_y(x, y) \approx \frac{1}{2h}[u(x, y+h) - u(x, y-h)].$$

V tomto případě musíme k aproximaci užít ještě další (pomocné) uzly s indexy 10 – 21. Diferenciální rovnici i okrajovou podmínku aproximujeme nyní v 9 uzlech, přičemž užijeme hodnoty síťové funkce v pomocných uzlech. Těmto hodnotám říkáme *fiktivní hodnoty*. Dostaneme tak soustavu podmínek (aproximaci rovnice a okrajové podmínky ve stejném uzlu píšeme vedle sebe; síťové rovnice jsme vynásobili h^2 , resp. $2h$)

$$\begin{aligned} 4U_1 - U_{11} - U_2 - U_4 - U_{10} &= h^2 f_1, & U_{10} &= U_2 + 2hg_1, & U_{11} &= U_4 + 2hg_1, \\ 4U_2 - U_{12} - U_3 - U_5 - U_1 &= h^2 f_2, & U_{12} &= U_5 + 2hg_2, \\ 4U_3 - U_{13} - U_{14} - U_6 - U_2 &= h^2 f_3, & U_{13} &= U_6 + 2hg_3, & U_{14} &= U_2 + 2hg_3, \\ 4U_4 - U_1 - U_5 - U_7 - U_{21} &= h^2 f_4, & U_{21} &= U_5 + 2hg_4, \\ 4U_5 - U_2 - U_6 - U_8 - U_4 &= h^2 f_5, \\ 4U_6 - U_3 - U_{15} - U_1 - U_5 &= h^2 f_6, & U_{15} &= U_5 + 2hg_6, \\ 4U_7 - U_4 - U_8 - U_{19} - U_{20} &= h^2 f_7, & U_{19} &= U_4 + 2hg_7, & U_{20} &= U_8 + 2hg_7, \\ 4U_8 - U_5 - U_9 - U_{18} - U_7 &= h^2 f_8, & U_{19} &= U_5 + 2hg_8, \\ 4U_9 - U_6 - U_{16} - U_{17} - U_8 &= h^2 f_9, & U_{16} &= U_8 + 2hg_9, & U_{17} &= U_6 + 2hg_9. \end{aligned}$$

Tento formální způsob odvození síťových rovnic vede k tomu, že musíme psát „aproximace“ normálové derivace $(\partial u / \partial n)$ ve vrcholech čtverce, v nichž tato derivace neexistuje (neexistuje normálový vektor). Například v bodě $(0, 0)$ neexistuje normála a neexistující derivaci $(\partial u / \partial n)$ ve vrcholu čtverce interpretujeme jako aritmetický průměr limitních hodnot normálových derivací, blížíme-li se k vrcholu po stranách čtverce. Píšeme tedy

$$g_1 \approx \frac{1}{2} \left(\frac{u_{11} - u_4}{2h} + \frac{u_{10} - u_2}{2h} \right)$$

a klademe

$$\frac{(U_{11} - U_4)}{2h} = g_1, \quad \frac{(U_{10} - U_2)}{2h} = g_1.$$

Podobně postupujeme v ostatních vrcholech čtverce. Teoretické zdůvodnění celého formalismu nám však poskytne až metoda integrálních identit.

Vyloučením dvanácti fiktivních hodnot U_{10} až U_{21} dostaneme výslednou soustavu devíti lineárních rovnic

(7.2.7)

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 4 & -2 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -2 & 4 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 4 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & 4 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -2 & 4 \end{array} \right] \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \\ U_7 \\ U_8 \\ U_9 \end{bmatrix} = h^2 \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \\ f_7 \\ f_8 \\ f_9 \end{bmatrix} + 2h \begin{bmatrix} 2g_1 \\ g_2 \\ 2g_3 \\ g_4 \\ 0 \\ g_6 \\ 2g_7 \\ g_8 \\ 2g_9 \end{bmatrix}$$

pro hodnoty přibližného řešení ve stejných uzlech jako v prvním případě a navíc pro hodnoty přibližného řešení i v rozích čtverce.

Matice \mathbf{A}_h této soustavy není symetrická avšak vynásobením všech devíti rovnic postupně čísly $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ dostaneme soustavu se s y m e t r i c k o u maticí.

Označíme-li $\mathbf{r}_i, i = 1, 2, \dots, 9$, řádky matice \mathbf{A}_h , platí

$$(7.2.8) \quad \frac{1}{4}\mathbf{r}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{r}_2 + \frac{1}{4}\mathbf{r}_3 + \frac{1}{2}\mathbf{r}_4 + \mathbf{r}_5 + \frac{1}{2}\mathbf{r}_6 + \frac{1}{4}\mathbf{r}_7 + \frac{1}{2}\mathbf{r}_8 + \frac{1}{4}\mathbf{r}_9 = \mathbf{0},$$

čili řádky matice \mathbf{A}_h jsou lineárně závislé a matice je s i n g u l á r n í (vektor jedniček $\mathbf{v} = [1, 1, \dots, 1]^T$ je nenulovým řešením soustavy $\mathbf{A}_h \mathbf{v} = \mathbf{0}$). Soustava (7.2.7) bude řešitelná jen tehdy, bude-li se pro její pravé strany anulovat stejná lineární kombinace jako pro řádky matice \mathbf{A}_h — viz (7.2.8). To vede na podmínku ($g_5 = 0$)

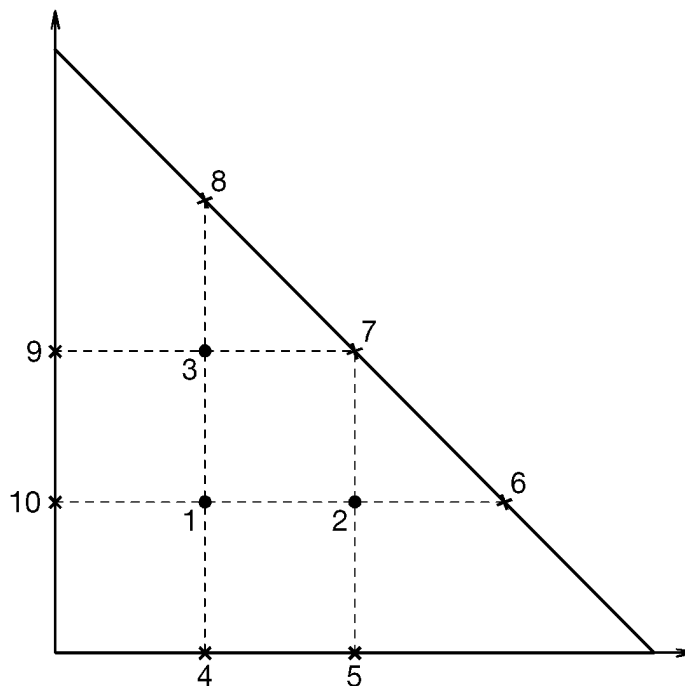
$$(7.2.9) \quad \frac{h^2}{4}[f_1 + 2f_2 + f_3 + 2f_4 + 4f_5 + 2f_6 + f_7 + 2f_8 + f_9] + h[g_1 + g_2 + g_3 + g_4 + g_5 + g_6 + g_7 + g_8 + g_9] = 0.$$

Tento vztah můžeme chápat jako aproximaci nutné podmínky řešitelnosti Neumannovy úlohy (7.2.6)

$$\int_{\Omega} f(\mathbf{x}) d\Omega + \int_{\partial\Omega} g(\mathbf{x}) dS = 0$$

lichoběžníkovým vzorcem pro přibližný výpočet integrálů. Abychom odstranili nejednoznačnost řešení soustavy (7.2.7), volíme jednu hodnotu neznámé U_i . Například klademe $U_9 = 0$.

7.2.4. Struktura matice \mathbf{A}_h . Blokovou strukturu a velikost jednotlivých bloků matice \mathbf{A}_h ovlivní nejen řešená úloha, ale také tvar oblasti Ω .



Obr. 17. Volba sítě v trojúhelníkové oblasti.

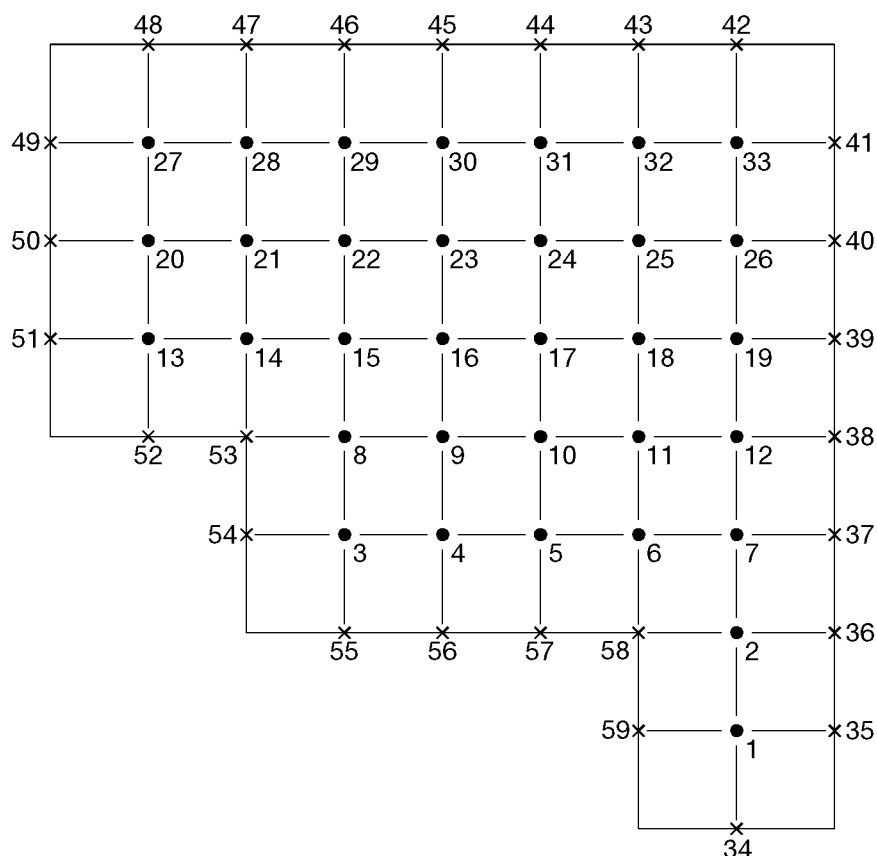
Například, užijeme-li síť z obr. 17 pro řešení Dirichletovy úlohy $-(u_{xx} + u_{yy}) = 0$, $u = g$ na trojúhelníku, dostaneme aproximaci úlohy soustavu tří lineárních algebraických rovnic

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_4 + g_{10} \\ g_5 + g_6 + g_7 \\ g_7 + g_8 + g_9 \end{bmatrix}$$

pro tři neznámé hodnoty U_1, U_2, U_3 přibližného řešení ve třech vnitřních uzlech.

Chceme-li řešit tutéž Dirichletovu úlohu v oblasti z obr. 18 a volíme-li číslování uzlů zvolené sítě tak, jak je uvedeno, bude mít matice \mathbf{A}_h získané diskrétní úlohy strukturu podle obr. 19 (str. 30), kde $\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_2 = [4]$ jsou matice řádu 1, $\mathbf{B}_3 = \mathbf{B}_4$ jsou matice řádu 5 tvaru \mathbf{B} z odst. 7.2.1, $\mathbf{B}_5 = \mathbf{B}_6 = \mathbf{B}_7$ jsou matice řádu 7 tvaru \mathbf{B} z odst. 7.2.1, $\mathbf{E}_1 = [-1]$ je matice řádu 1, $\mathbf{E}_2 = [0, 0, 0, 0, -1]$ je matice typu (1,5), \mathbf{E}_2^T je typu (5,1), $\mathbf{E}_3 = -\mathbf{I}_5$, kde \mathbf{I}_5 je jednotková matice řádu 5,

$$\mathbf{E}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

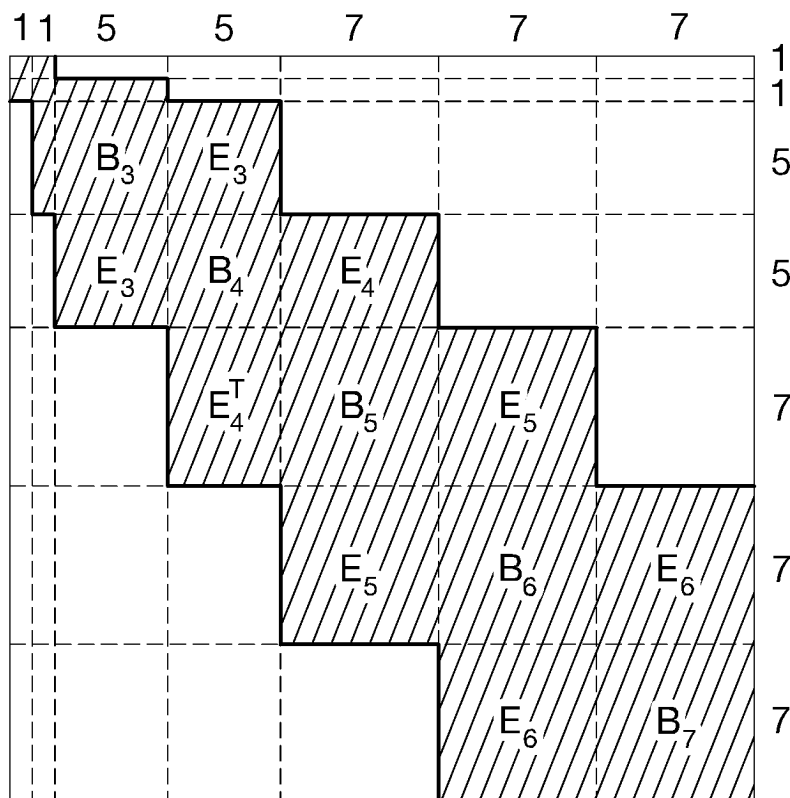


Obr. 18. Síť pro Dirichletovu úlohu. 33 vnitřních uzlů, 26 hraničních uzlů.

a $\mathbf{E}_5 = \mathbf{E}_6 = -\mathbf{I}_7$, kde \mathbf{I}_7 je jednotková matice řádu 7. Všimněme si, že počet diagonálních bloků je roven počtu síťových řádků a jejich řád je roven počtu vnitřních uzlů v každém síťovém řádku.

7.3. Principy aproximace úloh v \mathbb{R}^2 . V předcházejících odstavcích a také v čl. 3 jsme viděli, že přechod od diferenciální úlohy k diskrétní úloze (soustavě síťových rovnic) má při použití diferenčních metod tři fáze:

1. *Aproximace oblasti*, tj. výběr konečného počtu bodů, v nichž nahrazujeme rovnici a okrajové podmínky. Zvolené množině bodů říkáme *síť* nebo *síťová oblast*.
2. *Aproximace diferenciální rovnice*, tj. sestavení diferenčních vztahů, nahrazující diferenciální rovnici ve vybraných bodech sítě.
3. *Aproximace okrajových podmínek*.

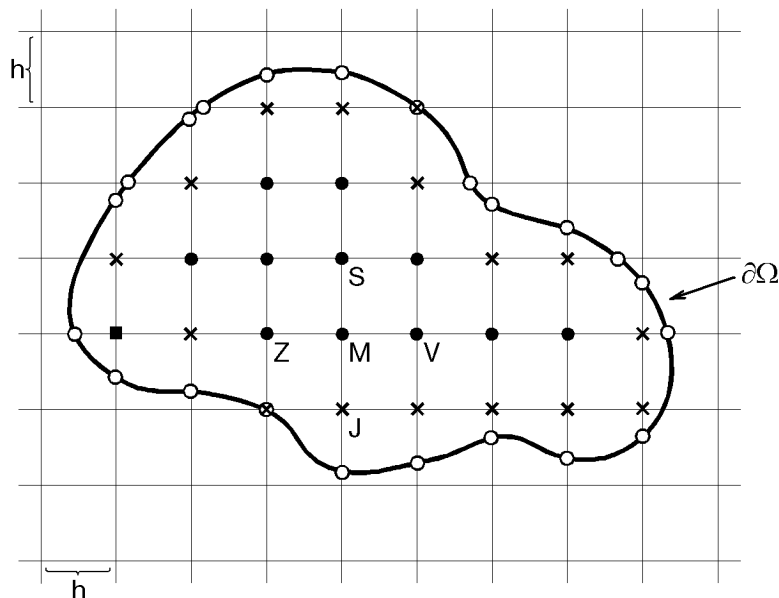


Obr. 19. Struktura matice \mathbf{A}_h řádu 33 pro síť z obr. 18.

7.3.1. Aproximace oblasti čtvercovou sítí. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je omezená oblast, jejíž hranice $\partial\Omega$ je tvořena konečným počtem jednoduchých hladkých křivek (tj. $\partial\Omega$ je po částech hladká uzavřená křivka).

Sestrojíme v rovině (x, y) soustavu rovnoběžných přímk $x = x_0 + ih$, $y = y_0 + jh$, $i, j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, kde (x_0, y_0) je pevně zvolený bod a $h > 0$ je zvolený parametr zvaný *krok sítě*. Průsečíky uvedených přímk nazveme *uzly* a množinu uzlů nazveme *čtvercovou sítí* (obr. 20). Krok sítě h volíme dostatečně malý vzhledem ke geometrickým rozměrům a tvaru oblasti Ω . Jednotlivé uzly sítě budeme označovat buď (x_i, y_j) , nebo velkými písmeny. Dva uzly sítě nazveme *sousední*, jestliže jejich vzdálenost ve směru osy x nebo ve směru osy y je rovna kroku sítě. Každý uzel sítě má právě čtyři sousedy. Uzel sítě $(x_i, y_j) \in \Omega$ nazveme *vnitřním uzlem*, leží-li všechny jeho čtyři sousední uzly v $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$. Množinu všech vnitřních uzlů označíme \mathcal{S} . Uzel $(x_i, y_j) \in \bar{\Omega}$ se nazývá *hraniční*, není-li vnitřní a má aspoň jednoho vnitřního souseda. Množinu hraničních uzlů označíme $\partial\Omega$. Množinu $\bar{\mathcal{S}} = \mathcal{S} \cup \partial\Omega$ nazýváme *síťovou aproximací množiny Ω* nebo také *síťovou*

oblastí. V odst. 7.2.1 jsme tuto množinu stručně nazvali sítí. Na obr. 20 je znázorněna síťová aproximace konkrétní oblasti Ω s vyznačením jednotlivých typů uzlů.



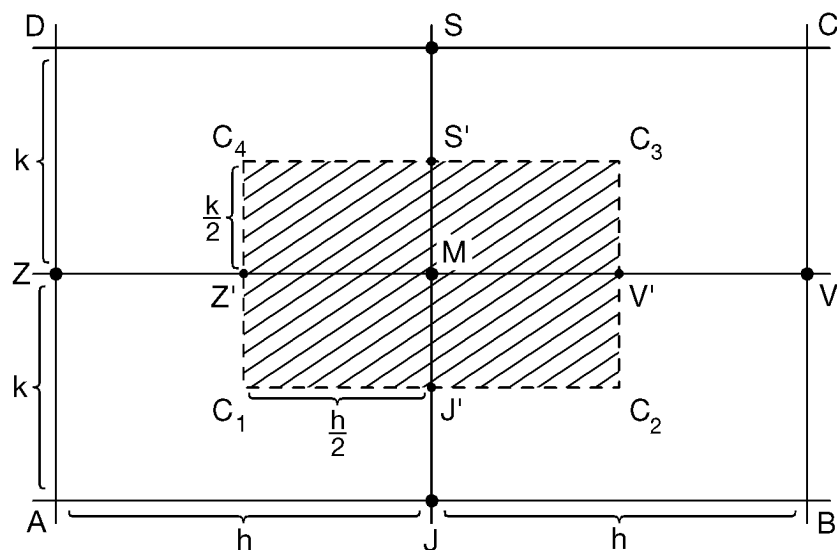
Obr. 20. Čtvercová síť pro oblast Ω . Vnitřní uzly jsou označeny tečkou, hraniční uzly křížkem. Kroužkem jsou označeny body hranice $\partial\Omega$ někdy používané k aproximaci okrajových podmínek. Uzel označený černým čtverečkem patří do $\bar{\Omega}$, ale není ani vnitřní ani hraniční.

Funkci U definovanou na \bar{S} nazýváme *síťová funkce*. Její hodnotu v uzlu $M = (x_i, y_j)$ označíme U_{ij} nebo U_M .

V závislosti na geometrickém tvaru oblasti Ω se často užívá *rovnoměrná obdélníková síť*, která je tvořena uzly $x_i = x_0 + ih$, $y_j = y_0 + jk$. Čísla $h = x_{i+1} - x_i > 0$, $k = y_{j+1} - y_j > 0$ jsou *kroky obdélníkové sítě*.

Lze konstruovat také *nerovnoměrné obdélníkové sítě*, v nichž volíme proměnné kroky $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, $\Delta y_j = y_{j+1} - y_j$ či ještě obecnější *nerovnoměrné sítě* (viz [55]). Při užití těchto sítí se ovšem komplikuje konstrukce soustavy síťových rovnic. Jejich výhodou je možnost přesnější aproximace oblasti Ω .

7.3.2. Aproximace derivací diferencemi. Zde navážeme na obsah odst. 3.1.1 a uvedeme některé potřebné výsledky o aproximaci derivací funkce dvou proměnných. Uvedené vzorce budeme užívat i v článcích věnovaných parabolickým a hyperbolickým rovnicím.



Obr. 21. Část síťové oblasti s vnitřním uzlem M .

Mějme dostatečně hladkou funkci u v oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. V oblasti Ω zvolíme bod M a jeho souřadnice označíme x, y . Dále zvolíme čísla $h > 0, k > 0$ taková, aby body $V = (x + h, y)$, $Z = (x - h, y)$, $S = (x, y + k)$, $J = (x, y - k)$ ležely také v oblasti Ω (označení je „zeměpisné“ — východ, západ, sever, jih — viz obr. 21). Místo $u(x, y)$, $u(x + h, y)$ budeme psát $u(M)$, $u(V)$ atp. Dále označíme

$$V' = \left(x + \frac{1}{2}h, y\right), \quad Z' = \left(x - \frac{1}{2}h, y\right), \quad S' = \left(x, y + \frac{1}{2}k\right), \quad J' = \left(x, y - \frac{1}{2}k\right).$$

Hodnoty $u(V)$, $u(Z)$ vyjádříme Taylorovými vzorci

$$(7.3.1) \quad u(V) = u(M) + u_x(M)h + \frac{1}{2}u_{xx}(M)h^2 + \frac{1}{6}u_{xxx}(\widetilde{M})h^3,$$

\widetilde{M} leží mezi body V a M ,

$$u(Z) = u(M) - u_x(M)h + \frac{1}{2}u_{xx}(M)h^2 - \frac{1}{6}u_{xxx}(\widetilde{\widetilde{M}})h^3,$$

$\widetilde{\widetilde{M}}$ leží mezi body Z a M .

Odtud dostaneme

$$(7.3.2) \quad \begin{aligned} u_x(M) &= \frac{1}{h}[u(V) - u(M)] - \frac{1}{2}u_{xx}(M)h - \frac{1}{6}u_{xxx}(\widetilde{M})h^2, \\ u_x(M) &= \frac{1}{h}[u(M) - u(Z)] + \frac{1}{2}u_{xx}(M)h - \frac{1}{6}u_{xxx}(\widetilde{\widetilde{M}})h^2, \\ u_x(M) &= \frac{1}{2h}[u(V) - u(Z)] - \frac{1}{12}h^2[u_{xxx}(\widetilde{M}) + u_{xxx}(\widetilde{\widetilde{M}})], \end{aligned}$$

kde poslední rovnici získáme sečtením prvních dvou rovnic. Stručně zapisujeme

$$(7.3.3) \quad \begin{aligned} u_x(M) &= \frac{1}{h}[u(V) - u(M)] + O(h), \\ u_x(M) &= \frac{1}{h}[u(M) - u(Z)] + O(h), \\ u_x(M) &= \frac{1}{2h}[u(V) - u(Z)] + O(h^2). \end{aligned}$$

Analogicky obdržíme

$$(7.3.4) \quad \begin{aligned} u_y(M) &= \frac{1}{k}[u(S) - u(M)] + O(k), \\ u_y(M) &= \frac{1}{k}[u(M) - u(J)] + O(k), \\ u_y(M) &= \frac{1}{2k}[u(S) - u(J)] + O(k^2). \end{aligned}$$

Pro aproximaci druhých derivací podobným postupem získáme vzorce

$$(7.3.5) \quad \begin{aligned} u_{xx}(M) &= \frac{1}{h^2}[u(Z) - 2u(M) + u(V)] + O(h^2), \\ u_{yy}(M) &= \frac{1}{k^2}[u(J) - 2u(M) + u(S)] + O(h^2), \\ u_{xy}(M) &= \frac{1}{4hk}[(u(C) - u(B)) - (u(D) - u(A))] + O(hk). \end{aligned}$$

Obecnější vzorce pro nerovnoměrné rozložení uzlů M, Z, V, J, S lze nalézt v [10].

Pro aproximace výrazů $(p_1 u_x)_x, (p_2 u_y)_y$ v bodě M budeme používat vzorce

$$(7.3.6) \quad \begin{aligned} (p_1 u_x)_x &\approx \frac{1}{h^2}[p_1(Z')u(Z) - (p_1(Z') + p_1(V'))u(M) + p_1(V')u(V)], \\ (p_2 u_y)_y &\approx \frac{1}{k^2}[p_2(J')u(J) - (p_2(J') + p_2(S'))u(M) + p_2(S')u(S)]. \end{aligned}$$

Tyto vzorce dostaneme z diferenčních podílů typu

$$\begin{aligned} (p(M)u_x(M))_x &\approx \frac{1}{h}[p(V')u_x(V') - p(Z')u_x(Z')] \approx \\ &\approx \frac{1}{h}\left[p(V')\frac{u(V) - u(M)}{h} - p(Z')\frac{u(M) - u(Z)}{h}\right]. \end{aligned}$$

Chyba aproximací (7.3.6) je pro dostatečně hladké funkce p_i a u opět řádové velikosti $O(h^2)$, resp. $O(k^2)$.

Pro $h = k$ ze vzorců (7.3.5) dostaneme aproximaci Laplaceova operátoru

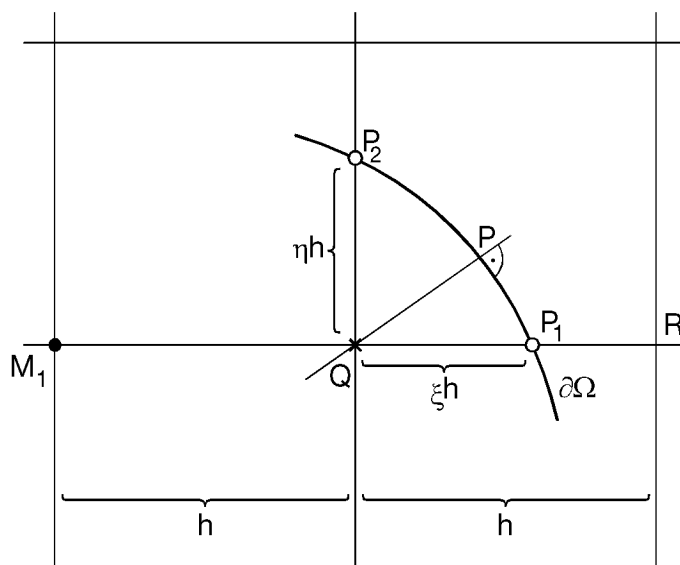
$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = \frac{1}{h^2}[u(Z) + u(V) + u(J) + u(S) - 4u(M)] + O(h^2).$$

7.3.3. Aproximace Dirichletovy okrajové podmínky. Okrajovou podmínku

$$(7.3.7) \quad u(P) = g(P), \quad P \in \partial\Omega,$$

respektujeme při sestavování soustavy síťových rovnic jednoduše, je-li bod $P \in \partial\Omega$ současně hraničním uzlem síťové oblasti. Hodnotu síťové funkce U v bodě P pak definujeme vztahem

$$(7.3.8) \quad U_P = g(P).$$



Obr. 22. Aproximace Dirichletovy okrajové podmínky.

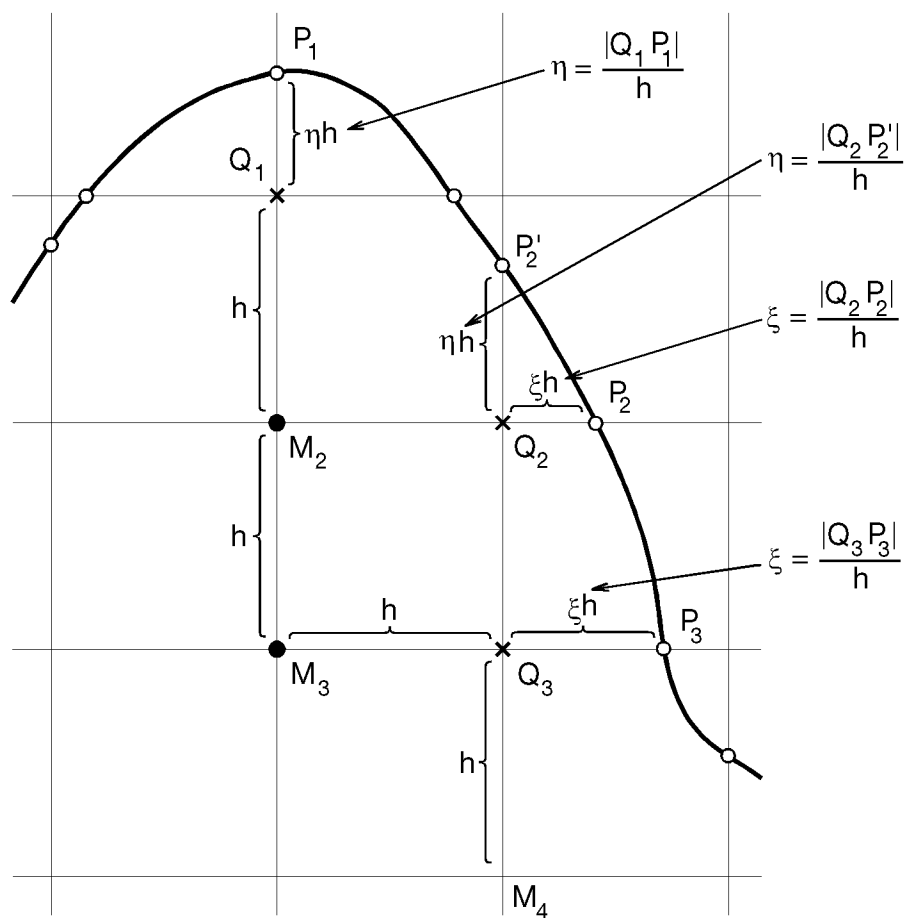
Není-li hraniční uzel Q síťové oblasti \bar{S} bodem hranice $\partial\Omega$, máme několik možností jak respektovat, resp. nahradit podmínku (7.3.7). Uvažujme čtvercovou síť z obr. 22. Nejjednodušší se zdá tento postup: K danému uzlu Q se určí bod P hranice $\partial\Omega$, který je uzlu Q nejbližší a položí se

$$(7.3.9) \quad U_Q = g(P).$$

Další možností je stanovit U_Q jako vážený průměr

$$(7.3.10) \quad U_Q = \frac{\eta g(P_1) + \xi g(P_2)}{\eta + \xi}, \quad \eta = \frac{|QP_2|}{h}, \quad \xi = \frac{|QP_1|}{h}.$$

Tyto aproximace však mají chybu řádové velikosti $O(h)$.

$$u(Q) - u(M_1) = \frac{g(P_1) - u(M_1)}{h + \xi h} h + O(h^2).$$
$$(7.3.11) \quad U_Q - \frac{\xi}{1+\xi} U_{M_1} = \frac{1}{1+\xi} g(P_1).$$


Protože pro standardní okrajové úlohy je žádoucí symetrie matice soustavy síťových rovnic, musíme vztah (7.3.11) poněkud modifikovat v závislosti na tom, kolik vnitřních

sousedů hraniční uzel Q má. Je pochopitelné, že v takovém přepisu Dirichletovy podmínky se musí také (v zájmu zachování symetrie) objevit koeficient p uvažované diferenciální rovnice $-\operatorname{div}(p(\mathbf{x}) \operatorname{grad} u) + q(\mathbf{x})u = f(\mathbf{x})$. Vyjdeme ze situace znázorněné na obr. 23.

Má-li hraniční uzel $Q = Q_1$ pouze jednoho vnitřního souseda M_2 , klademe

$$(7.3.12) \quad \begin{aligned} & \frac{1+\eta}{\eta} p\left(\frac{Q_1+M_2}{2}\right) U_{Q_1} - p\left(\frac{Q_1+M_2}{2}\right) U_{M_2} = \\ & = \frac{1}{\eta} p\left(\frac{Q_1+M_2}{2}\right) g(P_1), \quad \eta = \frac{|Q_1 P_1|}{h}. \end{aligned}$$

Má-li hraniční uzel $Q = Q_2$ pouze dva vnitřní sousedy M_2, Q_3 , klademe

$$(7.3.13) \quad \begin{aligned} & \left[\frac{1+\xi}{\xi} p\left(\frac{Q_2+M_2}{2}\right) + \frac{1+\eta}{\eta} p\left(\frac{Q_2+Q_3}{2}\right) \right] U_{Q_2} - \\ & - p\left(\frac{Q_2+M_2}{2}\right) U_{M_2} - p\left(\frac{Q_2+Q_3}{2}\right) U_{Q_3} = \\ & = \frac{1}{\xi} p\left(\frac{Q_3+M_2}{2}\right) g(P_2) + \frac{1}{\eta} p\left(\frac{Q_2+Q_3}{2}\right) g(P'_2), \\ & \quad \xi = \frac{|Q_2 P_2|}{h}, \quad \eta = \frac{|Q_2 P'_2|}{h}. \end{aligned}$$

Má-li hraniční uzel $Q = Q_3$ tři vnitřní sousedy Q_2, M_3, M_4 , klademe

$$(7.3.14) \quad \begin{aligned} & \left[\frac{1+\xi}{\xi} p\left(\frac{Q_3+M_3}{2}\right) + p\left(\frac{Q_3+M_4}{2}\right) + p\left(\frac{Q_3+Q_2}{2}\right) \right] U_{Q_3} - \\ & - p\left(\frac{Q_3+M_3}{2}\right) U_{M_3} - p\left(\frac{Q_3+M_4}{2}\right) U_{M_4} - p\left(\frac{Q_3+Q_2}{2}\right) U_{Q_2} = \\ & = \frac{1}{\xi} p\left(\frac{Q_3+M_3}{2}\right) g(P_3), \quad \xi = \frac{|Q_3 P_3|}{h}. \end{aligned}$$

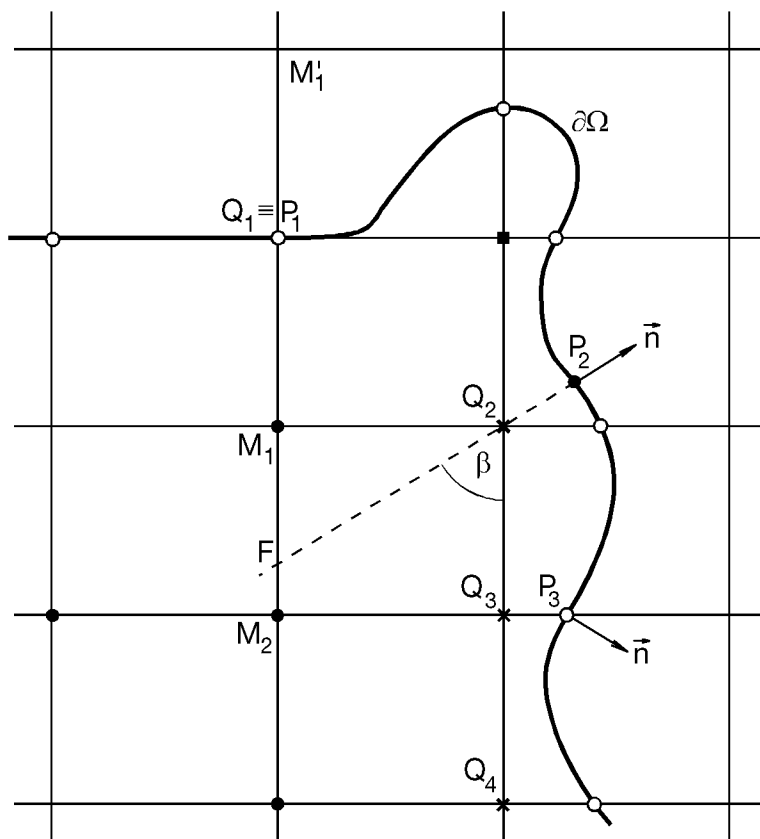
Realizace Dirichletovy podmínky volbou nerovnoměrné sítě je popsána v [55], [2]. Spočívá v tom, že např. v uzlu Q_3 z obr. 23 aproximujeme rovnici pomocí hodnot v bodech Q_3, M_3, Q_2, P_3, M_4 a využijeme okrajovou hodnotu v bodě P_3 . Nezdá se, že by tento postup měl ve srovnání s předcházejícími postupy nějaké přednosti.

7.3.4. Aproximace Newtonovy okrajové podmínky. Přepis okrajové podmínky obsahující normálové derivace přináší jisté problémy a v těchto případech pak diskretizace okrajové úlohy diferenční metodou ztrácí svoji hlavní přednost, a to jednoduchost.

Mějme okrajovou podmínku

$$(7.3.15) \quad \sigma(P)u(P) + p(P)\frac{\partial u(P)}{\partial n} = g(P), \quad P \in \partial\Omega,$$

a předpokládejme, že funkce σ , p , g jsou spojité a že řešení u uvažované okrajové úlohy je dostatečně hladké v $\bar{\Omega}$.



Obr. 24. Aproximace okrajové podmínky s derivací.

Postup ukážeme pro situaci znázorněnou na obr. 24. M_1 , M_2 jsou vnitřní uzly, Q_1 , Q_2 , Q_3 , Q_4 jsou hraniční uzly a P_1 , P_2 , P_3 jsou body hranice $\partial\Omega$.

Uvažujme nejdříve podmínku (7.3.15) v bodě P_1 , kde část hranice splývá s přímkou sítě a hraniční uzel Q_1 je tedy bodem hranice. Užijeme-li aproximaci

$$\frac{\partial u(P_1)}{\partial n} = \frac{1}{h}[u(P_1) - u(M_1)] + O(h),$$

klademe

$$(7.3.16) \quad \sigma(P_1)U_{P_1} + p\left(\frac{P_1 + M_1}{2}\right)\frac{1}{h}[U_{P_1} - U_{M_1}] = g(P_1).$$

Druhou (lepší) možností je považovat uzel $Q_1 \equiv P_1$ za vnitřní a doplnit síť hraničním uzlem M'_1 ležícím vně Ω (uzel označený na obr. 24 černým čtverečkem se pak stane

hraničním uzlem!). Za předpokladu existence spojitého prodloužení funkce u do uzlu M'_1 můžeme užít aproximaci druhého řádu

$$\frac{\partial u(P_1)}{\partial n} = \frac{1}{2h}[u(M'_1) - u(M_1)] + O(h^2)$$

a klademe pak

$$(7.3.17) \quad \sigma(P_1)U_{P_1} + p(P_1)\frac{1}{2h}[U_{M'_1} - U_{M_1}] = g(P_1).$$

K vyloučení fiktivní hodnoty $U_{M'_1}$ musíme mít v bodě $Q_1 = P_1$ k dispozici ještě jednu podmínku, kterou získáme aproximováním diferenciální rovnice v uzlu Q_1 . Tento postup jsme užili v příkl. 7.2.3.

Uvažujme nyní obecnější situaci. Chceme přepsat okrajovou podmínku (7.3.15) do hraničního uzlu Q_2 . Bodem Q_2 vedeme normálu k hranici $\partial\Omega$ a určíme její průsečík P_2 s touto hranicí a nejbližší průsečík F této normály s některou přímkou sítě. Označíme β ($0 \leq \beta \leq \frac{\pi}{4}$) úhel, který svírá normála s osou x nebo y . Užijeme aproximaci prvního řádu

$$\frac{\partial u(P_2)}{\partial n} = \frac{1}{|Q_2F|}[u(Q_2) - u(F)] + O(h)$$

a klademe

$$(7.3.18) \quad \sigma(Q_2)U_{Q_2} + p(Q_2)[U_{Q_2} - U_F]\left(\frac{h}{\cos\beta}\right)^{-1} = g(P_2).$$

Lineární interpolací hodnot síťové funkce v uzlech M_1, M_2 vyloučíme z (7.3.18) hodnotu

$$U_F = U_{M_2} \cotg \beta + U_{M_1}(1 - \cotg \beta).$$

Definitivní podoba síťové rovnice v uzlu Q_2 je

$$(7.3.19) \quad \left[\sigma(Q_2)\frac{h}{\cos\beta} + p(Q_2) \right] U_{Q_2} - p(Q_2)[U_{M_2} \cotg \beta + U_{M_1}(1 - \cotg \beta)] = \frac{h}{\cos\beta} g(P_2).$$

Uvedenou aproximací se nenaruší diagonální dominance matice vzniklé soustavy síťových rovnic, ale její symetrii obecně ani pro standardní úlohy zajistit nelze. Užitím uvedených aproximací se ovšem sníží řád chyby v celé oblasti Ω .

7.3.5. Poznámka. V tomto článku soustřeďujeme svoji pozornost na sestavení soustavy diferenčních rovnic aproximující danou okrajovou úlohu. Řešitelnost této soustavy můžeme posoudit stejnými postupy jako u obyčejných diferenciálních rovnic. Potřebné poznatky lze nalézt v odst. 3.5, kde jsou rovněž uvedeny algoritmy pro řešení soustav síťových rovnic eliminačními metodami. O iteračních metodách pro řešení soustav síťových rovnic pojednáme v čl. 10. Otázkou chyby přibližného řešení a konvergence posloupnosti přibližných řešení k přesnému řešení dané okrajové úlohy se budeme zabývat v čl. 11. Orientačně lze i zde říci, že pro standardní eliptické úlohy s dostatečně hladkým řešením je řád chyby diferenční metody roven minimu z řádů chyb aproximace diferenciální rovnice a okrajových podmínek.

7.4. Metoda integrálních identit. Důvody, které nás vedly k výkladu metody integrálních identit v odst. 3.4, zůstávají v platnosti i u standardních eliptických okrajových úloh.

7.4.1. Princip metody integrálních identit. V oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ uvažujme diferenciální rovnici

$$(7.4.1) \quad -\operatorname{div}(p(\mathbf{x}) \operatorname{grad} u) + q(\mathbf{x})u = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \Omega.$$

Na oblasti Ω sestrojíme obdélníkovou síť a ke každému vnitřnímu uzlu M sestrojíme obdélníkový sektor Ω_M podle obr. 21 z odst. 7.3.2 (vyšrafováno). Předpokládejme, že rovnice (7.4.1) je splněna skoro všude v Ω . Budou tedy platit integrální rovnosti

$$(7.4.2) \quad \begin{aligned} \int_{\Omega_M} [-\operatorname{div}(p(x_1, x_2) \operatorname{grad} u(x_1, x_2)) + q(x_1, x_2)u(x_1, x_2)] dx_1 dx_2 = \\ = \int_{\Omega_M} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2, \end{aligned}$$

jejichž počet je roven počtu vnitřních uzlů sítě, tj. počtu sestrojených obdélníkových sektorů.

Budeme nyní aproximovat jednotlivé členy rovnosti (7.4.2) pomocí obdélníkového kvadraturního vzorce. Dostaneme

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_M} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 &\approx f(M)hk, \\ \int_{\Omega_M} q(x_1, x_2)u(x_1, x_2) dx_1 dx_2 &\approx q(M)u(M)kh. \end{aligned}$$

K aproximaci integrálu $\int_{\Omega_M} \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) d\Omega$ užijeme Greenovu formuli

$$\int_{\Omega_M} \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) d\Omega = \oint_{\partial\Omega_M} (p \operatorname{grad} u) \cdot \mathbf{n} ds = \oint_{\partial\Omega_M} \left[p \frac{\partial u}{\partial x_1} dx_2 - p \frac{\partial u}{\partial x_2} dx_1 \right],$$

kde \mathbf{n} je jednotkový vektor vnější normály k $\partial\Omega_M$ (obvod obdélníku $C_1C_2C_3C_4$ — obr. 21). Aproximujeme-li jednotlivé členy křivkového integrálu centrální obdélníkovou kvadraturní formulí s chybou druhého řádu, např.

$$\int_{C_2C_3} p \frac{\partial u}{\partial x_1} dx_2 \approx p(V') \frac{\partial u(V')}{\partial x_1} k \approx p(V') \frac{u(V) - u(M)}{h} k,$$

dostaneme

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega_M} \operatorname{div}[p(x_1, x_2) \operatorname{grad} u(x_1, x_2)] dx_1 dx_2 \approx \\ & \approx \left[p(Z') \frac{u(M) - u(Z)}{h} - p(V') \frac{u(V) - u(M)}{h} \right] k + \\ & + \left[p(J') \frac{u(M) - u(J)}{k} - p(S') \frac{u(S) - u(M)}{k} \right] h. \end{aligned}$$

Pro síťovou funkci s hodnotami U_M, U_S, U_Z, U_J, U_V v uvažovaných uzlech M, S, Z, J, V tak dostaneme z integrální identity (7.4.2) síťovou rovnici

$$\begin{aligned} (7.4.3) \quad & \left[\frac{k}{h} (p(Z') + p(V')) + \frac{h}{k} (p(J') + p(S')) + q(M)hk \right] U_M - \\ & - \frac{k}{h} p(Z') U_Z - \frac{k}{h} p(V') U_V - \frac{h}{k} p(J') U_J - \frac{h}{k} p(S') U_S = f(M)hk. \end{aligned}$$

Na čtvercové síti ($h = k$) máme

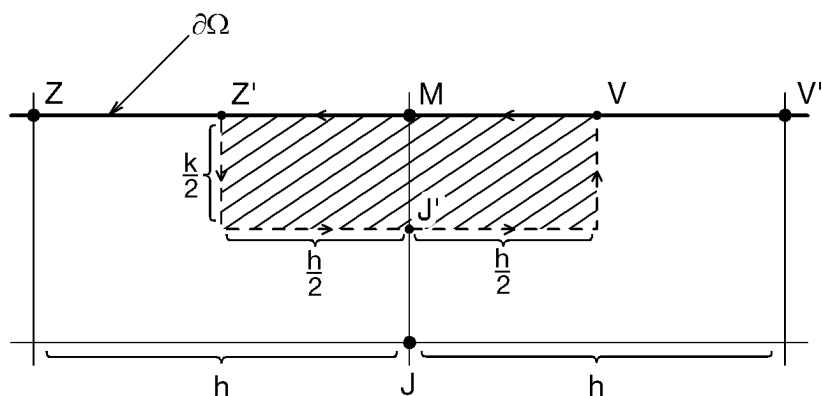
$$\begin{aligned} & [p(Z') + p(V') + p(J') + p(S') + q(M)h^2] U_M - \\ & - p(Z') U_Z - p(V') U_V - p(J') U_J - p(S') U_S = f(M)h^2. \end{aligned}$$

Metodou integrálních identit se můžeme přirozeným způsobem vypořádat i s okrajovou podmínkou obsahující normálovou derivaci. Jednoduché to ovšem je pouze na části hranice, která splývá se síťovou přímkou. Vezměme si například část hranice $\partial\Omega$ z obr. 25. Zde uzly sítě Z, M, V jsou hraniční uzly a současně body hranice. Zvolíme „hraniční“ sektor Ω_M (vyšrafováno) a aproximujeme rovnost (7.4.2) na tomto sektoru. Jestliže je dána okrajová podmínka

$$(7.4.5) \quad p(M) \frac{\partial u(M)}{\partial n} = g(M), \quad M \in \Gamma,$$

potom

$$\int_{V'Z'} (p \operatorname{grad} u) \cdot \mathbf{n} ds = \int_{V'Z'} g ds \approx g(M)h.$$



Obr. 25. Hraniční sektor Ω_M v metodě integrálních identit.

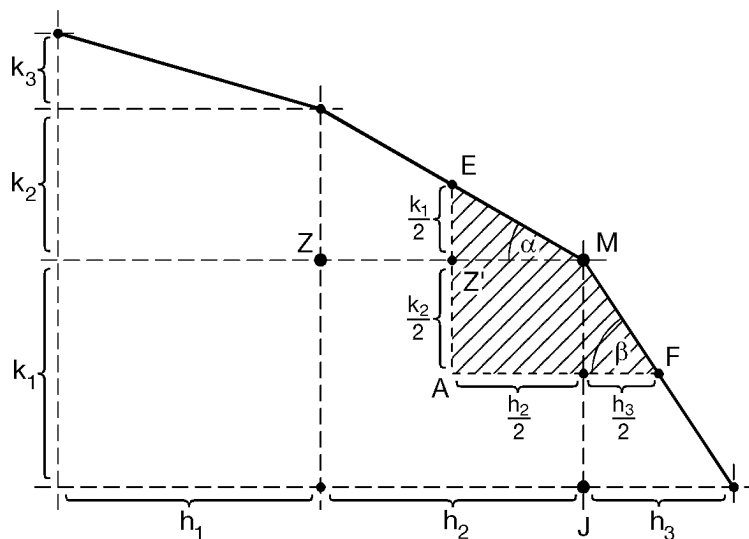
Síťová rovnice odpovídající hraničnímu uzlu M má nyní tvar

$$(7.4.6) \quad \left[\frac{k}{2h} (p(Z') + p(V')) + \frac{h}{k} p(J') + \frac{hk}{2} q(M) \right] U_M - \frac{k}{2h} p(Z') U_Z - \frac{k}{2h} p(V') U_V - \frac{h}{k} p(J') U_J - g(M)h = \frac{hk}{2} f(M).$$

Pro $h = k$, $p \equiv 1$, $q \equiv 0$ odtud dostaneme

$$(7.4.7) \quad 4U_M - U_Z - U_V - 2U_J - 2hg(M) = h^2 f(M),$$

což je v souladu s postupem užívajícím fiktivních hodnot. V příkl. 7.2.3 je druhá, čtvrtá, šestá a osmá rovnice soustavy (7.2.7) typu (7.4.7).



Obr. 26. Hraniční sektor Ω_M s hraničním uzlem M ležícím na křivočaré části hranice.

Neaproximovali jsme tedy pouze okrajovou podmínku, ale vztah typu (7.4.2) na hraničním sektoru a v získané aproximaci je okrajová podmínka s normálovou derivací zahrnuta. V případě křivočaré hranice se obvykle volí nerovnoměrná síť a volba hraničního sektoru je naznačena na obr. 26. Odvození příslušné síťové rovnice je poměrně pracné a přistupujeme k němu v těch případech, kdy nechceme postupovat ve smyslu odst. 7.3.4 (viz cvičení 7.6.4).

7.4.2. Příklad. Diskretizace na polární síti. Jednou z možností, jak se při diskretizaci okrajové úlohy vyhnout potížím s aproximováním okrajových podmínek na křivočarých hranicích, je užití vhodných křivočarých souřadnic. Speciálně pro oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, které mají kruhový charakter (kruh a jeho části, mezikružní a jeho části), je přirozené formulovat okrajovou úlohu v polárních souřadnicích r, α ($r = (x^2 + y^2)^{1/2}$, $\tan \alpha = y/x$).

Uvažujme Dirichletovu okrajovou úlohu pro funkci $u = u(r, \alpha)$ v kruhu Ω o poloměru R ($0 < r < R, 0 \leq \alpha < 2\pi$)

$$(7.4.8) \quad \begin{aligned} -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} &= f(r, \alpha), \\ u(R, \alpha) &= 0, \quad 0 \leq \alpha < 2\pi. \end{aligned}$$

Koeficienty rovnice mají singularitu pro $r = 0$, proto na řešení $u = u(r, \alpha)$ klademe navíc podmínku omezenosti a hladkosti, což implikuje

$$(7.4.9) \quad \lim_{r \rightarrow 0} r \frac{\partial u}{\partial r} = 0.$$

Zvolíme přirozená čísla I, J a sestrojíme soustředné kružnice o poloměrech

$$r_i = (i + 0,5)\Delta r, \quad i = 0, 1, \dots, I, \quad \Delta r = \frac{R}{I + 0,5}.$$

Dále sestrojíme systém přímek $\alpha = \alpha_j$ procházejících počátkem a takových, že

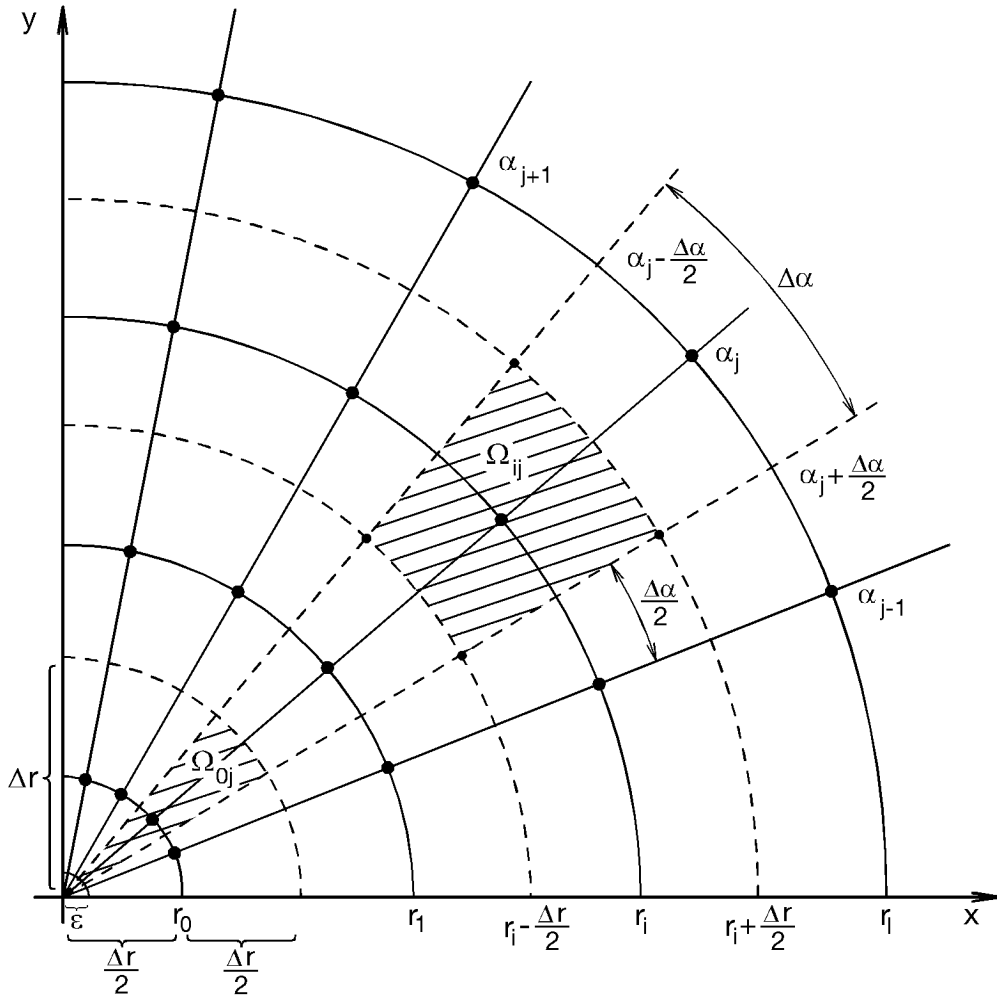
$$\alpha_j = j\Delta\alpha, \quad j = 0, 1, \dots, J - 1, \quad \Delta\alpha = \frac{2\pi}{J}.$$

Dostaneme tak *polární síť* (obr. 27). Průsečíky sestrojených kružnic a přímek jsou uzly sítě. Síť jsme zvolili tak, aby střed kruhu Ω nebyl uzlem (abychom mohli snáze respektovat podmínku (7.4.9)). K bodu (r_i, α_j) zvolíme polární sektor

$$\bar{\Omega}_{ij}: r_i - \frac{\Delta r}{2} \leq r \leq r_i + \frac{\Delta r}{2}, \alpha_j - \frac{\Delta \alpha}{2} \leq \alpha \leq \alpha_j + \frac{\Delta \alpha}{2}$$

a ve smyslu metody integrálních identit budeme aproximovat integrální rovnosti

$$(7.4.10) \quad \iint_{\Omega_{ij}} \left[-\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u(r, \alpha)}{\partial r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u(r, \alpha)}{\partial \alpha^2} \right] dr d\alpha = \iint_{\Omega_{ij}} r f(r, \alpha) dr d\alpha.$$



Obr. 27. Volba polární sítě a sektorů pro diskretizaci úlohy (7.4.8) metodou integrálních identit.

Označíme-li $u_{ij} = u(r_i, \alpha_j)$, $f_{ij} = f(r_i, \alpha_j)$, dostaneme postupně vztahy (pro $i = 1, 2, \dots, I-1$; $j = 0, 1, \dots, J-1$)

$$\begin{aligned}
 \iint_{\Omega_{ij}} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u(r, \alpha)}{\partial r} \right) dr d\alpha &= \int_{\alpha_j - \Delta\alpha/2}^{\alpha_j + \Delta\alpha/2} \left[\int_{r_i - \Delta r/2}^{r_i + \Delta r/2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u(r, \alpha)}{\partial r} \right) dr \right] d\alpha \approx \\
 &\approx \left[\left(r_i + \frac{\Delta r}{2} \right) \frac{u_{i+1,j} - u_{ij}}{\Delta r} - \left(r_i - \frac{\Delta r}{2} \right) \frac{u_{ij} - u_{i-1,j}}{\Delta r} \right] \Delta\alpha, \\
 \iint_{\Omega_{ij}} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u(r, \alpha)}{\partial \alpha^2} dr d\alpha &= \int_{r_i - \Delta r/2}^{r_i + \Delta r/2} \left[\frac{1}{r} \int_{\alpha_j - \Delta\alpha/2}^{\alpha_j + \Delta\alpha/2} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial u(r, \alpha)}{\partial \alpha} \right) d\alpha \right] dr = \\
 &= \int_{r_i - \Delta r/2}^{r_i + \Delta r/2} \frac{1}{r} \left[\frac{\partial u}{\partial \alpha} \right]_{\alpha=\alpha_j - \Delta\alpha/2}^{\alpha=\alpha_j + \Delta\alpha/2} dr \approx \frac{\Delta r}{r_i} \left[\frac{u_{i,j+1} - u_{ij}}{\Delta\alpha} - \frac{u_{ij} - u_{i,j-1}}{\Delta\alpha} \right],
 \end{aligned}$$

$$\iint_{\Omega_{ij}} r f(r, \alpha) dr d\alpha \approx r_i \Delta r \Delta \alpha f_{ij}.$$

Pro síťovou funkci s hodnotami $U_{ij} \approx u(r_i, \alpha_j)$ tak dostaneme síťové rovnice

$$(7.4.11) \quad \begin{aligned} & 2 \left[r_i \frac{\Delta \alpha}{\Delta r} + \frac{1}{r_i} \frac{\Delta r}{\Delta \alpha} \right] U_{ij} - \frac{\Delta \alpha}{\Delta r} \left(r_i + \frac{\Delta r}{2} \right) U_{i+1,j} - \\ & - \frac{\Delta \alpha}{\Delta r} \left(r_i - \frac{\Delta r}{2} \right) U_{i-1,j} - \frac{\Delta r}{r_i \Delta \alpha} [U_{i,j-1} + U_{i,j+1}] = r_i \Delta r \Delta \alpha f_{ij}, \\ & i = 1, 2, \dots, I-1, \quad j = 0, 1, \dots, J-1. \end{aligned}$$

V hraničních uzlech (na kružnici $\partial\Omega$) (r_I, α_j) , $j = 0, 1, \dots, J-1$, $r_I = R$, je $u(r_I, \alpha_j) = 0$, a proto klademe

$$(7.4.12) \quad U_{Ij} = 0, \quad j = 0, 1, \dots, J-1.$$

K aproximaci rovnice (7.4.8) v uzlech (r_o, α_j) , $j = 0, 1, \dots, J-1$, (obr. 27) volíme sektor

$$\bar{\Omega}_{0j}: \epsilon \leq r \leq \Delta r, \quad \alpha_j - \frac{\Delta \alpha}{2} \leq \alpha \leq \alpha_j + \frac{\Delta \alpha}{2}.$$

Z integrální identity (7.4.10) nyní dostaneme

$$(7.4.13) \quad \begin{aligned} & - \int_{\alpha_j - \Delta \alpha/2}^{\alpha_j + \Delta \alpha/2} \left[\Delta r \frac{\partial u(\Delta r, \alpha)}{\partial r} - \epsilon \frac{\partial u(\epsilon, \alpha)}{\partial r} \right] d\alpha - \\ & - \int_{\epsilon}^{\Delta r} \frac{1}{r} \left[\frac{\partial u(r, \alpha_j + \frac{\Delta \alpha}{2})}{\partial \alpha} - \frac{\partial u(r, \alpha_j - \frac{\Delta \alpha}{2})}{\partial \alpha} \right] dr = \int_{\alpha_j - \Delta \alpha/2}^{\alpha_j + \Delta \alpha/2} \int_{\epsilon}^{\Delta r} r f(r, \alpha) dr d\alpha. \end{aligned}$$

Když $\epsilon \rightarrow 0$, pak

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \frac{\partial u(\epsilon, \alpha)}{\partial r} = 0$$

(viz podmínku (7.4.9)). Abychom aproximovali (7.4.13) s chybou druhého řádu, nahradíme integrály centrální obdélníkovou kvadraturní formulí a derivace nahradíme centrálním diferenčním podílem. Dostaneme tak (v bodech $(\Delta r, \alpha_j)$, $j = 0, 1, \dots, J-1$)

$$\begin{aligned} & -\Delta r \frac{u(r_1, \alpha_j) - u(r_0, \alpha_j)}{\Delta r} \Delta \alpha - \frac{\Delta r}{r_0} \left[\frac{u(r_0, \alpha_{j+1}) - u(r_0, \alpha_j)}{\Delta \alpha} - \right. \\ & \left. - \frac{u(r_0, \alpha_j) - u(r_0, \alpha_{j-1})}{\Delta \alpha} \right] \approx r_0 f(r_0, \alpha_j) \Delta r \Delta \alpha. \end{aligned}$$

Pro uzly (r_0, α_j) , $j = 0, 1, \dots, J-1$, odtud odvodíme síťové rovnice ($U_{0j} \approx u(r_0, \alpha_j)$)

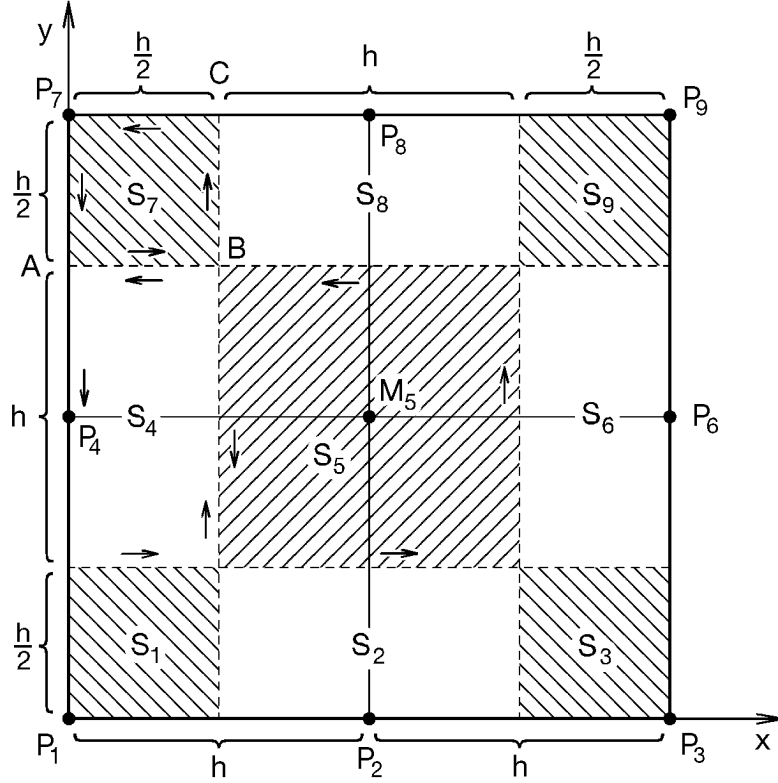
$$(7.4.14) \quad \left(\Delta \alpha + \frac{4}{\Delta \alpha} \right) U_{0j} - \frac{2}{\Delta \alpha} U_{0,j-1} - \frac{2}{\Delta \alpha} U_{0,j+1} - U_{1j} \Delta \alpha = \frac{(\Delta r)^2}{2} \Delta \alpha f_{0j}.$$

Spojením rovnic (7.4.14) s rovnicemi (7.4.11) a respektováním podmínek (7.4.12) dostaneme při vhodném seřazení soustavu lineárních algebraických rovnic pro neznámé U_{ij} se symetrickou maticí.

7.4.3 Příklad. Chceme užít metodu integrálních identit k aproximaci okrajové úlohy z odst. 7.2.3. Máme tedy

$$(7.4.15) \quad \begin{aligned} -(u_{xx} + u_{yy}) &= f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= g(x, y), \quad (x, y) \in \partial\Omega, \end{aligned}$$

kde $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$.



Obr. 28. Volba sektorů pro aproximaci úlohy (7.4.15) metodou integrálních identit.

Zvolíme čtvercovou síť s krokem $h = 0,5$. Ve čtverci Ω zvolíme sektory podle obr. 28. V uzlu M_5 sestavíme síťovou rovnici podle (7.4.4), kde nyní máme $p \equiv 1$, $q \equiv 0$. Označíme-li $U_{M_5} = U_5$, $U_{P_i} = U_i$, $i = 1, 2, \dots, 9$, $i \neq 5$, $f(M_5) = f_5$, obdržíme tak rovnici

$$4U_5 - U_4 - U_2 - U_6 - U_8 = h^2 f_5.$$

V hraničních sektorech S_2 , S_6 , S_8 , S_4 použijeme vztah (7.4.7) modifikovaný podle konkrétní polohy hraničního sektoru a dostaneme čtyři rovnice (značíme $g_i = g(P_i)$,

$$f_i = f(P_i))$$

$$4U_2 - U_1 - U_3 - 2U_5 = h^2 f_2 + 2hg_2,$$

$$4U_6 - U_3 - U_9 - 2U_5 = h^2 f_6 + 2hg_6,$$

$$4U_8 - U_7 - U_9 - 2U_5 = h^2 f_8 + 2hg_8,$$

$$4U_4 - U_1 - U_7 - 2U_5 = h^2 f_4 + 2hg_4.$$

Výpočet v hraničních (rohových) sektorech S_1, S_3, S_9, S_7 , provedeme podrobněji. Aproximujme např. integrální rovnost

$$-\int_{\partial S_7} (\text{grad } u) \cdot \mathbf{n} \, ds = \iint_{S_7} f(x, y) \, dx \, dy.$$

Na části hranice CP_7A je $\mathbf{n} \cdot \text{grad } u = g$,

$$\text{na } AB \text{ je } -\int_{AB} (\text{grad } u) \cdot \mathbf{n} \, ds = \int_0^{h/2} \frac{\partial u}{\partial y} \, dx \approx \frac{U_7 - U_4}{h} \frac{h}{2},$$

$$\text{na } BC \text{ je } -\int_{BC} (\text{grad } u) \cdot \mathbf{n} \, ds = \int_{3h/2}^{2h} \frac{\partial u}{\partial x} \, dy \approx -\frac{U_8 - U_7}{h} \frac{h}{2}.$$

V sektoru S_7 bude mít výsledná aproximace tvar

$$-g_7 h + \frac{U_7 - U_4}{h} \frac{h}{2} - \frac{U_8 - U_7}{h} \frac{h}{2} = f_7 \frac{h^2}{4}.$$

Po úpravě dostaneme v uzlu P_7 síťovou rovnici

$$4U_7 - 2U_4 - 2U_8 = h^2 f_7 + 2hg_7.$$

Ve zbývajících rohových sektorech analogicky dostaneme síťové rovnice

$$4U_1 - 2U_2 - 2U_4 = h^2 f_1 + 2hg_1$$

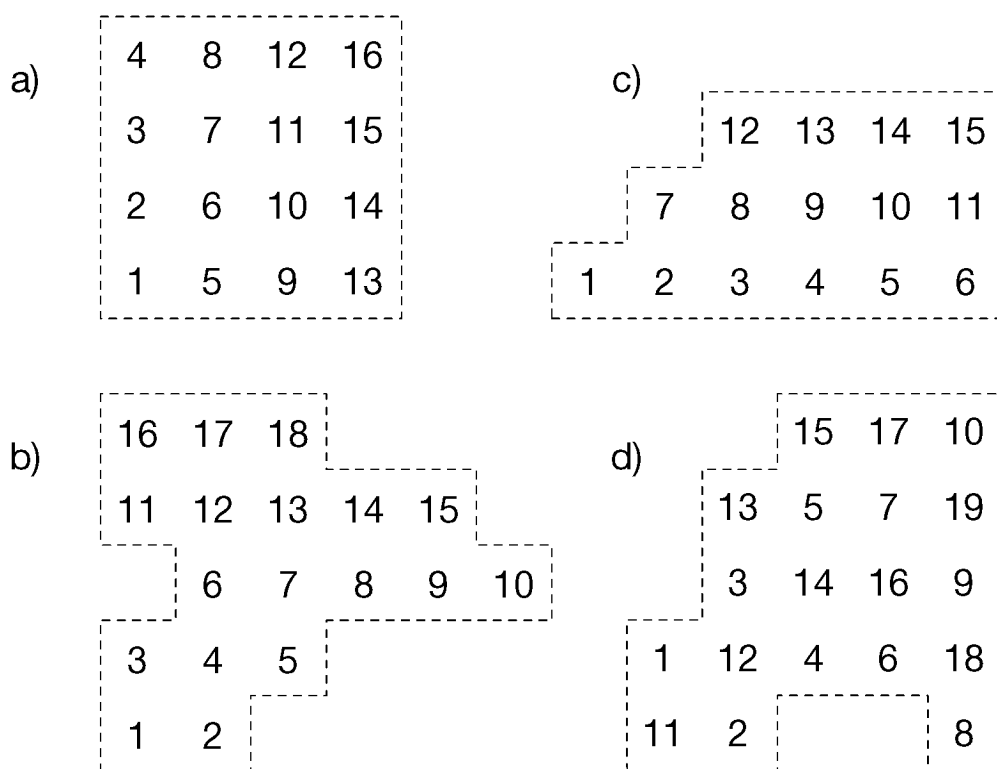
$$4U_3 - 2U_2 - 2U_6 = h^2 f_3 + 2hg_3$$

$$4U_9 - 2U_6 - 2U_8 = h^2 f_9 + 2hg_9$$

Spojením všech získaných síťových rovnic dostaneme soustavu (7.2.7), aniž bychom museli použít techniku fiktivních hodnot.

7.5. Sestavování síťových rovnic. Již v kap. I jsme upozornili čtenáře na to, že při konstrukci diskrétních aproximací okrajových úloh je na místě snažit se o to, aby výsledná aproximace měla co nejvíce charakteristických rysů společných s původní úlohou. Vzhledem k tomu, že bilineární formy $a(u, v)$ příslušné ke studovaným standardním okrajovým úlohám jsou vesměs symetrické, je tedy např. žádoucí, aby i výsledná soustava síťových rovnic byla symetrická. Je také rozumné snažit se o to, aby matice soustavy byla diagonálně dominantní a aby její struktura co nejvíce usnadnila výpočet hodnot přibližného řešení. V některých situacích pro nás ovšem mohou být důležitá i jiná hlediska. Můžeme např. být nuceni dát přednost vyššímu řádu aproximace okrajové úlohy či naopak jednoduché náhradě okrajové podmínky před snahou zachovat symetrii za každou cenu.

Při všech těchto hlediscích je především přirozené sestavovat soustavu síťových rovnic v tom pořadí, jak jsou očíslovány uzly sítě. Pro tento účel je tedy vhodnější číslovat uzly jedním indexem (a složky vektoru přibližného řešení podle toho), i když tím většinou ztratíme bezprostřední informaci o souřadnicích jednotlivých uzlů. Při číslování uzlů se snažíme o to, aby rozdíl indexů dvou sousedních uzlů byl co nejmenší. Tím totiž minimalizujeme šíři pásu výsledné matice.



Obr. 29. Očíslování uzlů sítě.

Otázkám volby očíslování uzlů sítě s cílem získat soustavu síťových rovnic s co nejjednodušší strukturou se dnes věnuje značná pozornost ([36]). Jednoduchá struktura získané soustavy současně umožňuje bezprostředně rozhodnout o její řešitelnosti. Na příkladu zde ukážeme některé běžné používané postupy. Na obr. 29 je několik možných situací s vyznačením geometrického tvaru oblasti. V případě očíslování typu a), b), c) bude matice soustavy síťových rovnic blokově třídiagonální. Řád jednotlivých bloků je určen počtem uzlů síťové aproximace oblasti Ω v jednom síťovém řádku (sloupci) a počet bloků je určen počtem takových síťových řádků (sloupců). Tato struktura však může být více či méně porušena aproximováním okrajové podmínky, především podmínky s derivací. V případě číslování d) dostaneme výslednou matici tvaru

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_1 & \mathbf{S}_1 \\ \mathbf{S}_2^T & \mathbf{D}_2 \end{bmatrix},$$

kde \mathbf{D}_1 a \mathbf{D}_2 jsou diagonální matice a \mathbf{S}_1 a \mathbf{S}_2 jsou pásové matice. Pro úlohy s Poissonovou rovnicí a Dirichletovými okrajovými podmínkami je diagonála tvořena čtyřkami a prvky matic \mathbf{S}_1 a \mathbf{S}_2 jsou -1. Toto šachovnicové číslování je vhodné (a potřebné) k realizaci některých speciálních algoritmů.

7.6. Cvičení

7.6.1. Metodou konečných diferencí a metodou integrálních identit aproximujte Dirichletovu okrajovou úlohu $((1+yx^2)u_x)_x + ((1+xy^2)u_y)_y = 0$ v Ω , $u(x, y) = g(x, y)$ na $\partial\Omega$, kde $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$. Užijte čtvercovou síť s krokem h . [Ke každému vnitřnímu uzlu M dostaneme síťovou rovnici $[(p_1(Z') + p_1(V')) + (p_2(J') + p_2(S'))]U_M - p_1(Z')U_Z - p_1(V')U_V - p_2(J')U_J - p_2(S')U_S = 0$, kde $p_1(x, y) = 1 + yx^2$, $p_2(x, y) = 1 + xy^2$.]

7.6.2. Aproximujte na čtverci $\bar{\Omega} = \langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle$ Dirichletovu okrajovou úlohu $-\Delta u + \gamma u_x = 0$, $\gamma \in \mathbb{R}$, $u = g$ na $\partial\Omega$. Užijte aproximace

$$\text{a) } u_x \approx \frac{1}{2h}(U_{i+1,j} - U_{i-1,j}), \quad \text{b) } u_x \approx \frac{1}{h}(U_{ij} - U_{i-1,j}).$$

Realizujte výpočet pro $\gamma = 40$, $h = 0,25$ a s okrajovými podmínkami $u(0, y) = \sin \pi y$, $u(x, 0) = u(x, 1) = u(1, y) = 0$. [a) $4U_{ij} - (1 - \frac{1}{2}\gamma h)U_{i+1,j} - (1 + \frac{1}{2}\gamma h)U_{i-1,j} - U_{i,j+1} - U_{i,j-1} = 0$, aproximace je řádu 2; b) $(4 + \gamma h)U_{ij} - U_{i+1,j} - (1 + \gamma h)U_{i-1,j} - U_{i,j-1} - U_{i,j+1} = 0$, aproximace je řádu 1. Numerické výsledky jsou v případě a) nepřijatelné, v případě b) vyhovující a odpovídající řádové přesnosti při srovnání s přesným řešením

$$u(x, y) = e^{20x} \frac{\sin h\beta(1-x) \sin \pi y}{\sin \beta}, \quad \beta = \frac{1}{2}\sqrt{1600 + 4\pi^2}.$$

Numerické výsledky jsou uvedeny v [26], odst. 18.22].

7.6.3. Na kruhové výseči $\Omega = \{(r, \alpha) \in \mathbb{R}^2: 0 < r < 1, 0 \leq \alpha < \frac{\pi}{4}\}$ aproximujte úlohu

$$-\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} = f(r, \alpha), \quad u(1, \alpha) = 1, \quad \frac{\partial u(r, 0)}{\partial \alpha} = 0, \quad \frac{\partial u(r, \pi/4)}{\partial \alpha} = 0.$$

[Návod: Využijte poznatky z odst. 7.4.2.]

7.6.4. Použijte metodu integrálních identit a stanovte aproximaci okrajové úlohy $-\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) = f$ v Ω , $p \partial u / \partial n = g$ na $\partial \Omega$ v hraničním sektoru Ω_M z obr. 26, odst. 7.4.1. [Návod:

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega_M} \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) \, d\Omega &= - \oint_{\partial \Omega_M} (p \operatorname{grad} u) \cdot \mathbf{n} \, ds = \\ &= - \int_{EA} p \frac{\partial u}{\partial x} \, dy + \int_{AF} p \frac{\partial u}{\partial y} \, dx - \int_{FM} p \frac{\partial u}{\partial n} \, ds - \int_{ME} p \frac{\partial u}{\partial n} \, ds. \end{aligned}$$

Výsledek:

$$\begin{aligned} p(Z') \frac{U_M - U_Z}{h_2} \cdot \frac{k_1 + k_2}{2} + p(J') \frac{U_M - U_J}{k_1} \frac{h_2 + h_3}{2} + \\ + \frac{1}{2} g(M) \left[\sqrt{k_1^2 + h_3^2} + \sqrt{k_2^2 + h_2^2} \right] = f(M) \cdot \operatorname{obsah}(\Omega_M). \end{aligned}$$

8. Diskretizace eliptických úloh metodami Galerkinova typu

8.1. Ritzova metoda

8.1.1. Princip metody. V odst. 4.4.1 jsme vyložili Ritzovu metodu pro řešení variační úlohy, která byla ekvivalentní s okrajovou úlohou pro obyčejnou diferenciální rovnici druhého řádu. Zde vyložíme princip metody pro standardní okrajovou úlohu eliptického typu.

Uvažujme okrajovou úlohu

$$(8.1.1) \quad \begin{aligned} -\operatorname{div}(p(\mathbf{x}) \operatorname{grad} u) + g(\mathbf{x}) &= f(\mathbf{x}) \quad \text{v } \Omega \subset \mathbb{R}^n, \\ u &= g_1 \quad \text{na } \Gamma_1, \\ p \frac{\partial u}{\partial n} &= g_2 \quad \text{na } \Gamma_2, \\ \sigma u + p \frac{\partial u}{\partial n} &= g_3 \quad \text{na } \Gamma_3, \end{aligned}$$

kde p, q, f jsou funkce dané v $\bar{\Omega}$, $g_i, i = 1, 2, 3$, jsou funkce dané na částech Γ_i hranice $\partial\Omega$, na něž je $\partial\Omega$ rozdělena, a σ je funkce daná na Γ_3 .

V souladu s definicí slabého řešení úlohy (8.1.1) (viz odst. 6.2.7) zavedeme nyní prostory

$$\begin{aligned} V_g &= \{v \in W_2^1(\Omega) : v = g_1 \text{ na } \Gamma_1 \text{ ve smyslu stop}\}, \\ V &= \{v \in W_2^1(\Omega) : v = 0 \text{ na } \Gamma_1 \text{ ve smyslu stop}\}, \end{aligned}$$

bilineární formu

$$a(u, v) = \int_{\Omega} [p \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v + quv] \, d\Omega + \int_{\Gamma_3} \sigma uv \, dS$$

a lineární formu

$$F(v) = \int_{\Omega} f v \, d\Omega + \int_{\Gamma_2} g_2 v \, dS + \int_{\Gamma_3} g_3 v \, dS.$$

Jsou-li splněny předpoklady věty 6.3.2, má úloha (8.1.1) právě jedno slabé řešení, které je zároveň jediným bodem minima funkcionálu $\Phi: V_g \rightarrow \mathbb{R}$ daného předpisem

$$(8.1.2) \quad \Phi(v) = \frac{1}{2} a(v, v) - F(v),$$

tj. platí

$$(8.1.3) \quad \Phi(u) = \min_{v \in V_g} \Phi(v).$$

Přistoupíme k výkladu Ritzovy metody pro případ, že funkce g_1 je na Γ_1 nenulová (tj. $V \neq V_g$). V prostoru V zvolíme N lineárně nezávislých funkcí v_1, v_2, \dots, v_N , které patří bázi prostoru V . Těmto funkcím říkáme *bázové funkce*. Splňují podmínku

$$(8.1.4) \quad v_n = 0 \quad \text{na } \Gamma_1, \quad n = 1, 2, \dots, N.$$

Označíme $V^{(N)} \subset V$ lineární prostor dimenze N tvořený všemi lineárními kombinacemi funkcí v_1, v_2, \dots, v_N . Dále zvolíme pevně funkci $v_0 \in V_g$ takovou, aby splňovala podmínku

$$(8.1.5) \quad v_0 = g_1 \quad \text{na } \Gamma_1.$$

Podotkněme, že praktická konstrukce takové funkce v_0 nemusí být na rozdíl od obdobné situace u obyčejných diferenciálních rovnic jednoduchá záležitost. Afinní prostor funkcí typu $v_0 + v^{(N)}$, kde $v_0 \in V_g$ a $v^{(N)} \in V^{(N)}$ označíme $V_g^{(N)}$.

Poznamenejme, že pokud řešíme okrajovou úlohu, v níž nevystupuje Dirichletova okrajová podmínka ($\Gamma_1 = \emptyset$), je $V = V_g = W_2^1(\Omega)$ a klademe $V_g^{(N)} = V^{(N)}$. Splnění podmínek (8.1.4), (8.1.5) v takovém případě od bázových funkcí nevyžadujeme. V případě, že funkce g_1 je na Γ_1 nulová ($V = V_g \neq W_2^1(\Omega)$), požadujeme splnění podmínky (8.1.4) a funkci v_0 nekonstruujeme (v níže uvedených vzorcích formálně klademe $v_0 \equiv 0$, neboť i v tomto případě je $V^{(N)} = V_g^{(N)}$).

Přibližné Ritzovo řešení úlohy (8.1.1) je taková funkce $u^{(N)} \in V_g^{(N)}$, která minimalizuje funkcionál Φ na prostoru $V_g^{(N)}$, tj. platí

$$(8.1.6) \quad \Phi(u^{(N)}) = \min_{v^{(N)} \in V^{(N)}} \Phi(v_0 + v^{(N)}) = \min_{c_1, \dots, c_N} \Phi\left(v_0 + \sum_{n=1}^N c_n v_n\right).$$

Řešíme proto úlohu najít minimum Φ jako funkce N proměnných c_1, c_2, \dots, c_N dané vztahem

$$(8.1.7) \quad \Phi(\mathbf{c}) = \frac{1}{2} \mathbf{c}^T \mathbf{A} \mathbf{c} + \frac{1}{2} a_{00} - \mathbf{c}^T (\mathbf{F} - \mathbf{a}) - F_0,$$

kde

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_N \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_N \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_{01} \\ a_{02} \\ \vdots \\ a_{0N} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \dots & a_{NN} \end{bmatrix},$$

$$a_{00} = a(v_0, v_0) = \int_{\Omega} [p(\mathbf{x}) \operatorname{grad}^2 v_0(\mathbf{x}) + q(\mathbf{x}) v_0^2(\mathbf{x})] \, d\Omega + \int_{\Gamma_3} \sigma(\mathbf{x}) v_0^2(\mathbf{x}) \, dS,$$

$$\begin{aligned}
F_0 &= F(v_0) = \int_{\Omega} f(\mathbf{x})v_0(\mathbf{x}) \, d\Omega, \\
a_{nj} &= a(v_n, v_j) = \int_{\Omega} [p(\mathbf{x}) \operatorname{grad} v_n(\mathbf{x}) \cdot \operatorname{grad} v_j(\mathbf{x}) + q(\mathbf{x})v_n(\mathbf{x})v_j(\mathbf{x})] \, d\Omega + \\
&\quad + \int_{\Gamma_3} \sigma(\mathbf{x})v_n(\mathbf{x})v_j(\mathbf{x}) \, dS, \quad n, j = 1, 2, \dots, N, \\
a_{0n} &= a(v_0, v_n) = \int_{\Omega} [p(\mathbf{x}) \operatorname{grad} v_0(\mathbf{x}) \cdot \operatorname{grad} v_n(\mathbf{x}) + q(\mathbf{x})v_0(\mathbf{x})v_n(\mathbf{x})] \, d\Omega + \\
&\quad + \int_{\Gamma_3} \sigma(\mathbf{x})v_0(\mathbf{x})v_n(\mathbf{x}) \, dS, \quad n = 1, 2, \dots, N, \\
F_n &= F(v_n) = \int_{\Omega} f(\mathbf{x})v_n(\mathbf{x}) \, d\Omega - \int_{\Gamma_2} g_2(\mathbf{x})v_n(\mathbf{x}) \, dS - \int_{\Gamma_3} g_3(\mathbf{x})v_n(\mathbf{x}) \, dS, \\
&\quad n = 1, 2, \dots, N.
\end{aligned}$$

Protože $a(v, v) = \mathbf{c}^T \mathbf{A} \mathbf{c}$, plyne z eliptičnosti bilineární formy $a(u, v)$ pozitivní definitnost matice \mathbf{A} . Matice \mathbf{A} je proto r e g u l á r n í.

Nutnou a postačující podmínkou pro to, aby vektor \mathbf{c} byl bodem minima kvadratické funkce Φ z (8.1.7) je, aby \mathbf{c} byl řešením soustavy lineárních algebraických rovnic (*Ritzova soustava*)

$$(8.1.8) \quad \mathbf{A} \mathbf{c} = \mathbf{F} - \mathbf{a}.$$

Jediné řešení $\mathbf{c}^* = [c_1^*, c_2^*, \dots, c_N^*]^T$ této soustavy určuje v prostoru $V_g^{(N)}$ přibližné řešení úlohy (8.1.1), které je dáno vztahem

$$(8.1.9) \quad v^{(N)} = v_0 + \sum_{n=1}^N c_n^* v_n.$$

8.1.2. Výběr báзовých funkcí. V odst. 4.3.1 jsme uvedli obecné požadavky na báзовé funkce v_1, v_2, \dots, v_N určující prostor $V^{(N)}$, resp. $V_g^{(N)}$. Pro úlohy typu (8.1.1) se na těchto požadavcích nic nemění. Systémy báзовých funkcí užívaných v metodách Galerkinova typu, a tedy i v Ritzově metodě můžeme rozdělit do dvou kategorií: systémy závislé na geometrickém tvaru oblasti Ω (pro jiný tvar se nehodí) a systémy nezávislé na geometrii oblasti Ω . Báзовé funkce závislé na geometrii oblasti Ω jsou např.: Pro obdélník $\Omega = (0, a) \times (0, b)$ funkce tvaru (m, n jsou přirozená čísla)

1. $v(x, y) = x^n y^m (a - x)(b - y),$
2. $v(x, y) = \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b},$
3. $v(x, y) = \sin \frac{n\pi x}{a} \cos \frac{m\pi y}{b},$
4. $v(x, y) = \cos \frac{n\pi x}{a} \cos \frac{m\pi y}{b}.$

Pro kruhové oblasti volíme funkce (m, n, k jsou přirozená čísla)

5. $v(x, y) = x^n y^m (R_1^2 - x^2 - y^2)(R_2^2 - x^2 - y^2)$ (pro mezikruží),
6. $v(r, \alpha) = (r^2 - R^2) \sin k\alpha$,
7. $v(r, \alpha) = (r^2 - R^2) \cos k\alpha$.

V posledních dvou případech jsou r, α polární souřadnice. Při těchto volbách snadno realizujeme zvětšení dimenze prostoru $V^{(N)}$ — stačí přidat k systému $\{v_1, v_2, \dots, v_N\}$ novou funkci v_{N+1} stejného typu. Významnou slabinou takto voleného systému báзовých funkcí je obtížný odhad chyby přibližného řešení $u - u^{(N)}$.

Systém báзовých funkcí nezávislých na geometrii oblasti bude popsán v odst. 9.3 v souvislosti s výkladem metody konečných prvků. Realizace Ritzovy metody s takovým výběrem báзовých funkcí je podrobně popsána v [26], čl. 20.

8.1.3. Příklad. Chceme Ritzovou metodou řešit Dirichletovu úlohu

$$\begin{aligned} -(u_{xx} + u_{yy}) &= 1 \quad \text{v } \Omega = (-1, 1) \times (-1, 1), \\ u(x, 0) &= x^2 + 1, \quad u(x, 1) = x^2 + 1, \\ u(0, y) &= y^2 + 1, \quad u(1, y) = 1 + y^2. \end{aligned}$$

Zde máme $\Gamma_1 = \partial\Omega$, $\Gamma_2 = \emptyset$, $\Gamma_3 = \emptyset$,

$$a(u, v) = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (u_x v_x + u_y v_y) \, dx \, dy, \quad F(v) = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 v(x, y) \, dx \, dy,$$

$$\Phi(v) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [v_x^2 + v_y^2 - 2v] \, dx \, dy.$$

Zvolíme

$$\begin{aligned} v_0(x, y) &= x^2 + y^2, \\ v_1(x, y) &= (x^2 - 1)(y^2 - 1), \\ v_2(x, y) &= (x^2 - 1)(y^2 - 1)(x^2 + y^2). \end{aligned}$$

Bázové funkce v_1, v_2 určí lineární prostor $V^{(2)}$ dimenze 2. Přibližné Ritzovo řešení hledáme potom ve tvaru

$$u^{(2)}(x, y) = v_0(x, y) + c_1 v_1(x, y) + c_2 v_2(x, y).$$

Ritzova soustava má tvar

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_{01} \\ a_{02} \end{bmatrix},$$

kde

$$\begin{aligned}
a_{11} &= a(v_1, v_1) = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [4x^2(y^2 - 1) + 4y^2(x^2 - 1)^2] \, dx \, dy = \frac{256}{45}, \\
a_{12} &= a(v_1, v_2) = a_{21} = \\
&= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [4x^2(y^2 - 1)(2x^2 + y^2 - 1) + 4y^2(x^2 - 1)(x^2 + 2y^2 - 1)] \, dx \, dy = \frac{1024}{524}, \\
a_{22} &= a(v_2, v_2) = \\
&= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [4x^2(y^2 - 1)^2(2x^2 + y^2 - 1)^2 + 4y^2(x^2 - 1)(x^2 + 2y^2 - 1)^2] \, dx \, dy = \frac{11 \cdot 264}{4 \cdot 725}, \\
F_1 &= F(v_1) = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (x^2 - 1)(y^2 - 1) \, dx \, dy = \frac{16}{9}, \\
F_2 &= F(v_2) = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (x^2 - 1)(y^2 - 1)(x^2 + y^2) \, dx \, dy = \frac{32}{45}, \\
a_{01} &= a(v_0, v_1) = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [4x^2(y^2 - 1) + 4y^2(x^2 - 1)] \, dx \, dy = -\frac{32}{9}, \\
a_{02} &= a(v_0, v_2) = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [4x^2(x^2 - 1)(2x^2 + y^2 - 1) + 4y^2(x^2 + 2y^2 - 1)] \, dx \, dy = -\frac{384}{135}.
\end{aligned}$$

Řešení Ritzovy soustavy je $c_1^* \doteq 0,5918$, $c_2^* \doteq 1,0063$. Přibližné Ritzovo řešení má proto tvar

$$u^{(2)}(x, y) \doteq x^2 + y^2 + 0,5918(x^2 - 1)(y^2 - 1) + 1,0063(x^2 - 1)(y^2 - 1)(x^2 + y^2).$$

8.2. Problém ohybu pružné desky. Zabýváme se převážně úlohami pro diferenciální rovnice druhého řádu. Nicméně jako ukázkou předvedeme realizaci Ritzovy metody pro úlohu s rovnicí čtvrtého řádu. Podrobnější informace najde čtenář např. v [38]. Také v [26] je určitá zmínka o rovnicích čtvrtého řádu.

Uvažujme pružnou desku obdélníkového tvaru o rozměrech a , b a tloušťce h . Pružné vlastnosti homogenního a izotropního materiálu desky jsou charakterizovány Youngovým modulem pružnosti E , Poissonovou konstantou μ a tuhostí desky

$$D = \frac{Eh^3}{[12(1 - \mu)(1 + \mu)]}.$$

Předpokládáme, že k ohybu desky dochází působením konstantně rozloženého tlaku f a že deska je na obrysu prostě podepřena. Z teorie lineární pružnosti víme (viz také [26],

odst. 11.4 až 11.8), že energie (elastický potenciál) desky odpovídající průhybu určenému funkcí $v = v(x, y)$ je dána integrálem

$$(8.2.1) \quad W(v) = \frac{D}{2} \int_0^a \int_0^b [v_{xx}^2 + 2v_{xx}v_{yy} + v_{yy}^2 + 2(1-\mu)v_{xy}^2] dx dy.$$

Práce vnějších sil je dána integrálem

$$(8.2.2) \quad A(v) = \int_0^a \int_0^b f v dx dy.$$

Označíme-li

$$V = \{v \in W_2^2(\Omega) : v = 0 \text{ na } \partial\Omega\}, \quad \bar{\Omega} = \langle 0, a \rangle \times \langle 0, b \rangle,$$

prostor přípustných průhybů, potom rovnovážný stav popsáný průhybovou funkcí $u \in V$ odpovídá minimu celkové energie určené funkcíonálem energie

$$(8.2.3) \quad \Phi(v) = W(v) - A(v)$$

na prostoru V přípustných průhybů, tj.

$$(8.2.4) \quad \Phi(u) = \min_{v \in V} \Phi(v).$$

Podmínku minima

$$\frac{d}{dt} \Phi(u + tv) \big|_{t=0} = 0 \quad \forall v \in V$$

lze zapsat ve tvaru integrální rovnosti

$$(8.2.5) \quad D \int_0^a \int_0^b [u_{xx}v_{xx} + \mu(u_{xx}v_{yy} + u_{yy}v_{xx}) + u_{yy}v_{yy} + 2(1-\mu)u_{xy}v_{xy}] dx dy = \int_0^a \int_0^b f v dx dy.$$

Je-li funkce u splňující (8.2.5) dostatečně hladká ($u \in C^4(\Omega) \cap C^2(\bar{\Omega})$), vyplnou z rovnosti (8.2.5) požadavky

$$(8.2.6) \quad \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = \frac{f}{D} \quad \text{v } \Omega,$$

$$u = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} = 0 \quad \text{na } \partial\Omega.$$

Tyto požadavky představují okrajovou úlohu pro parciální diferenciální rovnici čtvrtého řádu. Integrální vztah (8.2.5) je rovností typu $a(u, v) = F(v)$ a definuje slabé řešení úlohy (8.2.6).

Realizace Ritzovy metody pro úlohu (8.2.4) je následující: Z báze funkcí

$$v_{ij}(x, y) = \sin \frac{i\pi x}{a} \sin \frac{j\pi y}{b}, \quad i, j = 1, 2, \dots,$$

prostoru V vybereme např. dvě funkce

$$\begin{aligned}v_1(x, y) &= \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}, \\v_2(x, y) &= \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{3\pi y}{b},\end{aligned}$$

které určí lineární prostor $V^{(2)}$ dimenze 2. Přibližné Ritzovo řešení $u^{(2)} \in V^{(2)}$ má proto tvar

$$u^{(2)}(x, y) = c_1 v_1(x, y) + c_2 v_2(x, y).$$

Abychom určili neznámé koeficienty c_1, c_2 , budeme minimalizovat funkcionál Φ na prostoru $V^{(2)}$. Hledáme proto minimum kvadratické funkce (v proměnných c_1, c_2)

$$\begin{aligned}\Phi(u^{(2)}) = \Phi(c_1 v_1 + c_2 v_2) &= \frac{D}{2} \pi^4 \frac{ab}{4} \left[c_1^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2 + c_2^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{9}{b^2} \right)^2 \right] - \\&\quad - \frac{4ab}{\pi^2} \left(c_1 + \frac{c_2}{3} \right) f.\end{aligned}$$

Z podmínek minima

$$\frac{\partial \Phi}{\partial c_1} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial c_2} = 0$$

dostaneme Ritzovu soustavu pro neznámé c_1, c_2 :

$$\begin{aligned}D \frac{\pi^4 ab}{4} c_1 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2 &= \frac{4ab}{3\pi^2} f, \\D \frac{\pi^4 ab}{4} c_2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{9}{b^2} \right)^2 &= \frac{4ab}{3\pi^2} f.\end{aligned}$$

Obdržené přibližné řešení

$$u^{(2)}(x, y) = \frac{16a^4 f}{D\pi^6} \frac{\sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}}{\left(a + \frac{a^2}{b^2} \right)^2} + \frac{\sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{3\pi y}{b}}{3 \left(1 + \frac{9a^2}{b^2} \right)^2}$$

určuje (přibližně) průhybovou plochu uvažované desky.

8.3. Metoda vážených reziduí. Termínem *metoda vážených reziduí* se obvykle označuje jistý obecný princip konstrukce přibližného řešení dané okrajové úlohy, kdy stejně jako v Ritzově metodě přibližné řešení hledáme ve tvaru konečné lineární kombinace lineárně nezávislého systému zvolených *bázových funkcí* v_1, v_2, \dots, v_N . Přibližné řešení \tilde{u} diferenciální rovnice (připouštíme i nelineární rovnici)

$$(8.3.1) \quad L(u) = f \quad \text{v } \Omega$$

tedy uvažujeme ve tvaru

$$(8.3.2) \quad \tilde{u} = \sum_{n=1}^N c_n v_n.$$

Koeficienty c_1, c_2, \dots, c_N určíme z požadavků, aby *reziduum rovnice* $R(x; \tilde{u}) \equiv L(\tilde{u}) - f$ pro přibližné řešení \tilde{u} bylo nulové ve smyslu integrálního průměru (viz také odst. 4.1.1) přes celou oblast Ω , tj. požadujeme, aby platilo

$$(8.3.3) \quad \int_{\Omega} \left[L \left(\sum_{n=1}^N c_n v_n \right) - f \right] w \, d\Omega = 0,$$

kde w je vhodně zvolená *váhová funkce*. Abychom z (8.3.3) dostali N podmínek pro výpočet neznámých koeficientů c_1, c_2, \dots, c_N , musíme za w volit N lineárně nezávislých funkcí w_1, w_2, \dots, w_N . Dostaneme pak soustavu N algebraických rovnic (obecně nelineárních) pro neznámé koeficienty $c_i, i = 1, 2, \dots, N$. Máme-li „šťastnou ruku“ při volbě báзовých a váhových funkcí, může být získaná soustava rovnic jednoznačně řešitelná a odpovídající přibližné řešení (8.3.2) může být dobrou aproximací přesného řešení u .

Jestliže volíme báзовé funkce tak, aby každá z nich splňovala danou homogenní okrajovou podmínku, bude také přibližné řešení \tilde{u} splňovat tuto podmínku a při realizaci metody vážených reziduí se nemusíme o takovou okrajovou podmínku starat. Když však funkce \tilde{u} z (8.3.2) nesplňuje např. okrajovou podmínku

$$(8.3.4) \quad u = g \quad \text{na } \partial\Omega,$$

bereme v úvahu kromě rezidua rovnice $R_1(x; \tilde{u}) \equiv L(\tilde{u}) - f$ ještě reziduum okrajové podmínky $R_2(x; \tilde{u}) \equiv \tilde{u} - g$ a požadujeme, aby

$$(8.3.5) \quad \int_{\Omega} [L(\tilde{u}) - f] w \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} (\tilde{u} - g) \bar{w} \, dS = 0.$$

Váhové funkce w, \bar{w} se zde volí nezávisle jedna na druhé.

Jak jsme ukázali v odst. 4.4.1, do třídy metod vážených reziduí zahrnujeme např. klasickou Galerkinovu metodu nebo kolokační metodu. O dalších variantách této metody se lze dočíst ve specializovaných publikacích.

8.4. Galerkinova metoda. V řadě odstavců čl. 4 jsme podrobně popsali Galerkinovu metodu pro řešení okrajových úloh pro obyčejné diferenciální rovnice. V čl. 9 podrobněji popíšeme použití této metody při řešení standardní okrajové úlohy s eliptickou parciální diferenciální rovnicí druhého řádu. Galerkinova metoda je ovšem použitelná (a také se v praxi využívá) pro mnohem obecnější úlohy, včetně úloh pro soustavy parciálních diferenciálních rovnic. V tomto odstavci shrneme základní princip Galerkinovy metody pro abstraktně formulovanou okrajovou úlohu

Nechť V je Hilbertův prostor. Chceme najít takové $u \in V$, že

$$(8.4.1) \quad a(u, v) = F(v) \quad \forall v \in V,$$

kde $a(u, v): V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ je bilineární forma a $F(v): V \rightarrow \mathbb{R}$ je lineární forma. Předpokládáme, že existuje jediné řešení $u \in V$ okrajové úlohy (8.4.1).

Sestrojíme konečnědimenzionální podprostor V^h prostoru V a označíme $v_h \in V^h$ libovolný prvek prostoru V^h . *Přibližným Galerkinovým řešením* úlohy (8.4.1) budeme rozumět takovou funkci $u_h \in V^h$, pro kterou platí

$$(8.4.2) \quad a(u_h, v_h) = F(v_h) \quad \forall v_h \in V^h.$$

Je-li $\dim V^h = N$, pak funkce u_h je lineární kombinací N bázových funkcí prostoru V^h . Potom k určení N koeficientů této lineární kombinace musíme mít N nezávislých podmínek. Získáme je tak, že za v_h v rovnosti (8.4.2) dosadíme postupně všech N bázových funkcí.

V souvislosti s uvedeným postupem musíme zaručit

1. jednoznačnou řešitelnost úloh (8.4.1) a (8.4.2),
2. existenci takové posloupnosti prostorů $\{V^h\}$, že posloupnost $\{u_h\}$ řešení úloh (8.4.2) na těchto prostorech V^h konverguje pro $h \rightarrow 0$ k řešení $u \in V$ úlohy (8.4.1).

Prostory V^h musíme konstruovat tak, aby každý z nich byl dobrou aproximací prostoru V . Přesněji řečeno pro každé $\epsilon > 0$ a pro každé $v \in V$ musí existovat prostor V^h a v něm prvek v_h tak, že

$$(8.4.3) \quad \|v - v_h\|_V < \epsilon.$$

Uvedené abstraktní schéma Galerkinovy metody je bezprostředně aplikovatelné pro okrajové úlohy, u nichž prostor přípustných funkcí je Hilbertovým prostorem a splývá s prostorem testovacích funkcí. V případě okrajové úlohy s nehomogenní Dirichletovou okrajovou podmínkou tomu tak není a schéma metody se poněkud modifikuje, jak jsme viděli např. v odst. 4.3.7.

8.5. Cvičení

8.5.1. Řešte okrajovou úlohu $-(u_{xx} + u_{yy}) = 0$ v Ω , $u = x^2 + y^2$ na $\partial\Omega$, kde $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x > 0, y > 0, x + y < 1\}$, Ritzovou nebo Galerkinovou metodou s bázovými funkcemi $v_1(x, y) = xy(1 - x - y)$, $v_2(x, y) = x^2y(1 - x - y)$, $v_3(x, y) = xy^2(1 - x - y)$. [Návod: Vzhledem k nehomogenní okrajové podmínce volte přibližné řešení ve tvaru $u^{(3)}(x, y) = v_0(x, y) + d_1v_1(x, y) + d_2v_2(x, y) + d_3v_3(x, y)$, $v_0(x, y) = x^2 + y^2$. Výsledky: Prvky matice Galerkinovy (Ritzovy) soustavy (po řádcích): 1/90, 1/252, 1/252; 1/252, 3/1120, 1/170; 1/252, 1/70, 3/1120; pravá strana: 1/30, 1/90, 1/90; $u^{(3)}(x, y) \doteq x^2 + y^2 + xy(1 - x - y)[3,0401 - 0,562(x + y)]$.]

8.5.2. Stanovte postačující podmínky jednoznačné řešitelnosti okrajové úlohy $-(p_1(x, y)u_x)_x - (p_2(x, y)u_y)_y = f(x, y)$ v $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, $u = 0$ na $\partial\Omega$, a formulujte ekvivalentní variační úlohu. Sestrojte Ritzovu soustavu pro zvolený systém báзовých funkcí. [Např. $\partial\Omega$ je po částech hladká hranice oblasti Ω , funkce p_1, p_2 jsou kladné, omezené a po částech spojitě, $f \in L_2(\Omega)$; $V = \{v \in W_2^1(\Omega) : v = 0 \text{ na } \partial\Omega\}$, $a(u, v) = a(v, u) = \int_{\Omega} [p_1 u_x v_x + p_2 u_y v_y] dx dy$, $F(v) = \int_{\Omega} f v dx dy$, $\Phi(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} [p_1 v_x^2 + p_2 v_y^2 - 2fv] dx dy$; $\mathbf{A} = [a_{ij}]$, $a_{ij} = \int_{\Omega} [p_1 (v_i)_x (v_j)_x + p_2 (v_i)_y (v_j)_y] dx dy$, $\mathbf{F} = [F_i]^T$, $F_i = \int_{\Omega} f v_i dx dy$.]

9. Metoda konečných prvků pro eliptické úlohy

9.1. Úvod. Metoda konečných prvků (MKP) je metoda Galerkinova typu se speciální volbou báзовých funkcí. Konkrétně budeme vycházet přímo z Galerkinovy metody. Výklad založený na Ritzově metodě je v [26].

Popíšeme diskretizaci standardní okrajové úlohy pro eliptickou rovnici druhého řádu ve dvou proměnných. Při výkladu se zaměřujeme především na aproximaci řešení pomocí po částech lineárních báзовých funkcí. Opíráme se o obsah čl. 6. a 8 a navazujeme na čl. 5.

Metoda konečných prvků je charakterizována třemi základními aspekty [6]:

a) Diskretizace množiny Ω , na níž se okrajová úloha řeší; množina $\bar{\Omega}$ se vyjádří jako konečné sjednocení zvolených podmnožin. Tyto podmnožiny se nazývají *konečné prvky* a obvykle jsou to buď trojúhelníky nebo čtyřúhelníky (pro $\Omega \subset \mathbb{R}^2$). V případě trojúhelníků se diskretizace Ω nazývá *triangulací*.

b) Konstrukce prostorů funkcí, které jsou na každém prvku polynomem. Těmto prostorům se říká *prostory konečných prvků* a značí se V^h . Budou hrát roli prostorů $V^{(N)}$ a $V_g^{(N)}$, které jsme zavedli při výkladu Galerkinovy či Ritzovy metody.

c) Existence takové báze prostoru V^h , že jednotlivé báзовé funkce mají m a l ý n o s i č, tj. jsou nenulové pouze na několika sousedních prvcích.

Přibližné řešení výchozí okrajové úlohy se určuje jako funkce z V^h , tj. jako lineární kombinace báзовých funkcí. Z praktického hlediska chceme dát odpověď na dvě otázky:

1. Jak se sestavuje diskrétní úloha a jak se tato úloha (soustava lineárních algebraických rovnic) efektivně řeší,

2. jaká je chyba přibližného řešení a jak se tato chyba odhaduje (otázky konvergence).

9.2. Triangulace. Oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, na níž řešíme okrajovou úlohu, aproximujeme sjednocením konečného počtu trojúhelníků. Příklady takových aproximací jsou na obr. 30. Abychom se vyvarovali některých komplikací při výkladu, budeme nadále předpokládat, že $\bar{\Omega}$ je již přímo sjednocení konečně mnoha trojúhelníků. Hranicí $\partial\Omega$ je potom polygon (lomená čára). Z praktického hlediska toto omezení není příliš podstatné.

Množinu

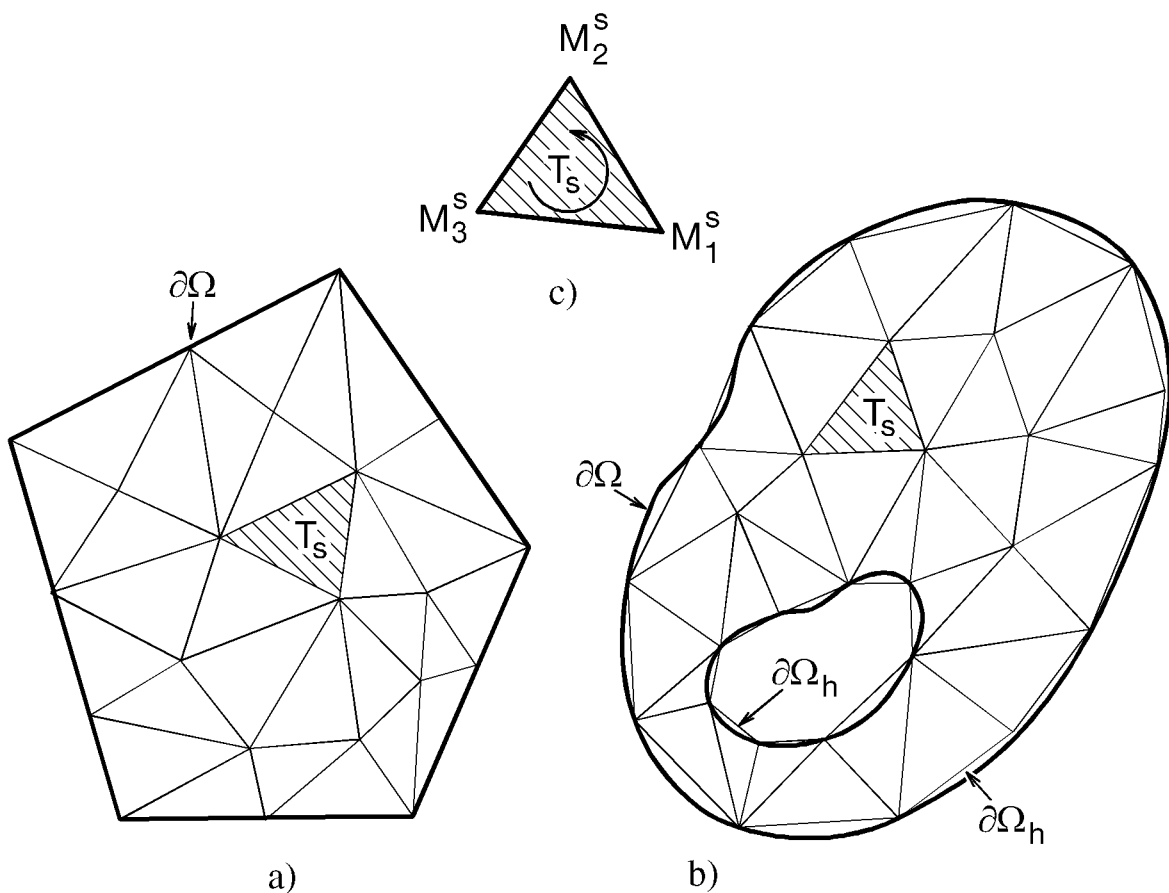
$$\tau_h = \{T_1, T_2, \dots, T_S\}$$

trojúhelníků T_s budeme nazývat *přípustnou triangulací* oblasti Ω , budou-li splněny následující podmínky:

(i) $\bar{\Omega} = \bigcup_{s=1}^S T_s$.

(ii) Jsou-li T_s, T_r dva různé trojúhelníky triangulace τ_h , pak jejich vnitřky mají prázdný průnik.

(iii) Pro každé $s = 1, 2, \dots, S$ je každá strana T_s buď částí hranice $\partial\Omega$, nebo stranou jiného trojúhelníka z τ_h .



Obr. 30. a) Triangulace polygonální oblasti Ω ($\partial\Omega$ je uzavřený polygon).
 b) Aproximace oblasti Ω oblastí Ω_h s polygonální hranicí $\partial\Omega_h$.
 c) Lokální označení vrcholů trojúhelníka T_s .

Trojúhelníky, které mají společnou stranu, nazýváme *sousední*. Z hlediska jednodušší konstrukce algoritmu ještě předpokládáme, že nejvýše jedna strana trojúhelníka T_s je částí hranice $\partial\Omega$.

Konstrukce vhodné přípustné triangulace dané oblasti Ω není zdaleka triviální záležitost. Z teoretické analýzy chyby metody konečných prvků vyplývá, že je třeba dodržovat tyto zásady:

- (i) Nepoužívat trojúhelníky s velmi malými nebo velmi velkými vnitřními úhly.
- (ii) V těch částech oblasti Ω , kde se očekávají velké změny v chování řešení dané úlohy či jeho derivací, volit jemnější triangulaci (větší počet menších trojúhelníků).

Kromě vrcholů trojúhelníků T_s se v některých případech při konstrukci diskrétní úlohy užívají další body trojúhelníka T_s , např. středy stran, těžiště. Všem takovým bodům pak souhrnně říkáme *uzly triangulace*. Ty uzly, které leží na $\partial\Omega$ nazýváme *hraniční uzly*. Strana trojúhelníka, která patří hranici $\partial\Omega$, se nazývá *hraniční strana*.

V uzlech triangulace zadáváme hodnoty koeficientů rovnice či okrajových podmínek a hodnoty pravých stran. Současně v nich hledáme hodnoty přibližného řešení, případně hodnoty derivací přibližného řešení. Všem těmto hodnotám říkáme *uzlové parametry*.

K dosažení vyšší přesnosti (menší chyby přibližného řešení) musíme buď provést jemnější triangulaci oblasti Ω , nebo zvolit v každém trojúhelníku větší počet uzlů. Volba většího počtu uzlů v trojúhelníku má však pro zvýšení přesnosti smysl pouze tehdy, je-li řešení uvažované okrajové úlohy dostatečně hladké.

9.3. Po částech lineární báze funkce. Za uzly triangulace volíme vrcholy trojúhelníků. Vrcholy trojúhelníka T_s (obr. 30c) označíme M_1^s, M_2^s, M_3^s . Číslování provádíme vždy v *kladném smyslu*, tj. proti směru pohybu hodinových ručiček. Každý vrchol (uzel) má tedy lokální index, vázaný na číslo trojúhelníka, a současně globální index určující místo v pořadí všech vrcholů. Hovoříme pak o *lokálním* a *globálním číslování* (viz také odst. 5.3).

Nechť M_n je uzel triangulace (n je globální index). Po částech lineární báze funkce $v_n = v_n(x, y)$ příslušná uzlu M_n je definována takto:

1. Nad každým trojúhelníkem T_s , jehož jeden vrchol je M_n , je lineárním polynomem tvaru

$$(9.3.1) \quad N^s(x, y) = a^s + b^s x + c^s y,$$

2. splňuje *interpolační podmínky*

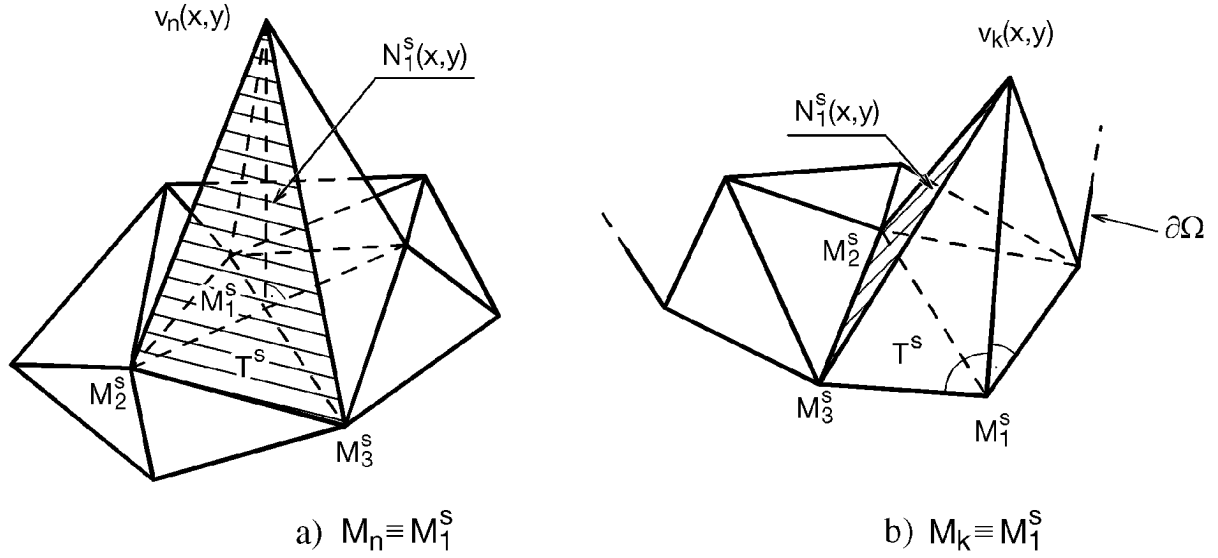
$$(9.3.2) \quad v_n(M_n) = 1, \quad v_n(M_m) = 0 \quad \forall m \neq n,$$

3. je nenulová pouze na těch trojúhelnících, jejichž společným vrcholem je uzel M_n . Tyto trojúhelníky tvoří tzv. *nosič* funkce v_n .

Na obr. 31a a 31b jsou znázorněny báze funkce příslušné vnitřnímu a hraničnímu uzlu triangulace.

Takto definované báze funkce v_1, v_2, \dots, v_N (N je počet uzlů triangulace) jsou spojité na $\bar{\Omega}$ a tvoří lineárně nezávislý systém funkcí. Lineární prostor všech lineárních kombinací sestavených z báze funkcí označíme V_1^h . Dimenze tohoto prostoru je rovna počtu uzlů triangulace. Platí $V_1^h \subset W_2^1(\Omega)$, tj. $v_n \in W_2^1(\Omega)$, $n = 1, 2, \dots, N$, neboť derivace báze funkcí existují skoro všude a jsou na vnitřku každého trojúhelníka konstantní. Funkcím z V_1^h říkáme *lineární splajny*. Libovolnou funkci z V_1^h budeme označovat $v_h = v_h(x, y)$. Je to funkce spojitá a lze ji vyjádřit ve tvaru lineární kombinace báze funkcí

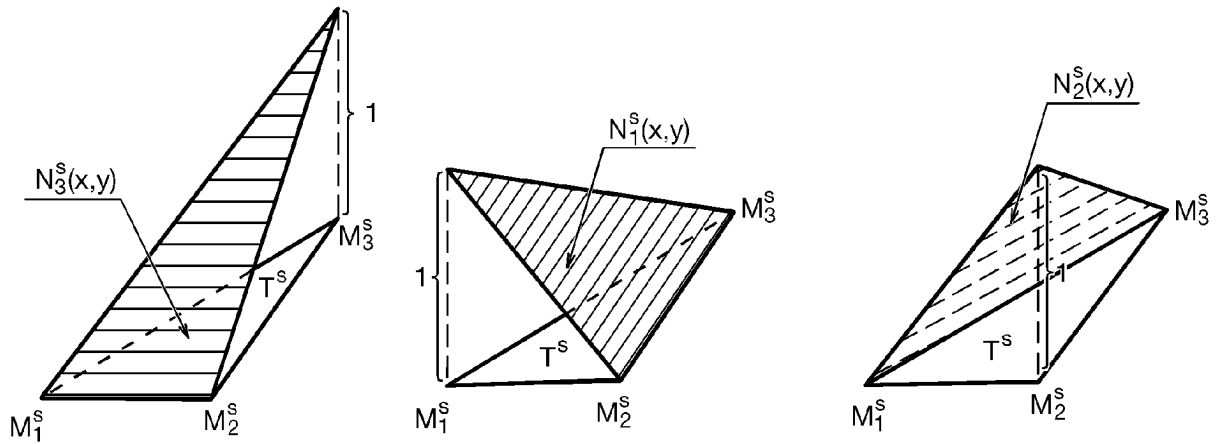
$$(9.3.3) \quad v_h(x, y) = \sum_{n=1}^N \alpha_n v_n(x, y), \quad \alpha_n \in \mathbb{R}.$$



Obr. 31. a) Bázová funkce $v_n(x, y)$ z V_1^h pro vnitřní uzel $M_n = M_1^s$.
b) Bázová funkce $v_k(x, y)$ z V_1^h pro vnitřní uzel $M_k = M_1^s$.

9.4. Konstrukce bázové funkce z V_1^h . Souřadnice vrcholů trojúhelníka T_s označíme $M_1^s = (x_1^s, y_1^s)$, $M_2^s = (x_2^s, y_2^s)$, $M_3^s = (x_3^s, y_3^s)$. Restrikce tří bázových funkcí příslušných těmto vrcholům na T_s označíme (obr. 32)

$$(9.4.1) \quad \begin{aligned} N_1^s(x, y) &= a_1^s + b_1^s x + c_1^s y, \\ N_2^s(x, y) &= a_2^s + b_2^s x + c_2^s y, \\ N_3^s(x, y) &= a_3^s + b_3^s x + c_3^s y. \end{aligned}$$



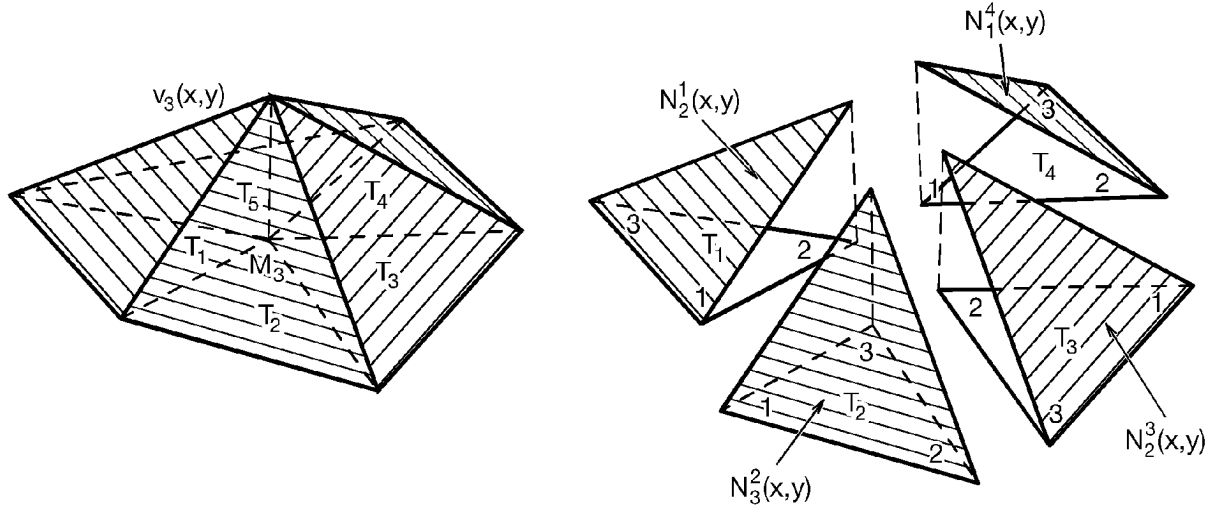
Obr. 32. Restrikce tří bázových funkcí na trojúhelník T_s .

Tyto funkce jsou jednoznačně určeny interpolačními podmínkami

$$\begin{aligned} N_1^s : \quad & N_1^s(M_1^s) = 1, \quad N_1^s(M_2^s) = 0, \quad N_1^s(M_3^s) = 0, \\ N_2^s : \quad & N_2^s(M_1^s) = 0, \quad N_2^s(M_2^s) = 1, \quad N_2^s(M_3^s) = 0, \\ N_3^s : \quad & N_3^s(M_1^s) = 0, \quad N_3^s(M_2^s) = 0, \quad N_3^s(M_3^s) = 1, \end{aligned}$$

a jsou dvojrozměrným analogem funkcí $m_1^s(x)$, $m_2^s(x)$ z odst. 5.3.1.

Na obr. 33 je znázorněna jedna bazová funkce a její restrikce na jednotlivé trojúhelníky.



Obr. 33. Bazová funkce $v_3(x, y)$ příslušná uzlu M_3 a její restrikce (lokálně označené) na jednotlivé trojúhelníky.

Koeficienty lineárních funkcí z (9.4.1) jsou určeny vzorci

$$\begin{aligned} a_1^s &= \frac{1}{D^s}(x_2^s y_3^s - x_3^s y_2^s), \quad b_1^s = \frac{1}{D^s}(y_2^s - y_3^s), \quad c_1^s = \frac{1}{D^s}(x_3^s - x_2^s), \\ a_2^s &= \frac{1}{D^s}(x_3^s y_1^s - x_1^s y_3^s), \quad b_2^s = \frac{1}{D^s}(y_3^s - y_1^s), \quad c_2^s = \frac{1}{D^s}(x_1^s - x_3^s), \\ a_3^s &= \frac{1}{D^s}(x_1^s y_2^s - x_2^s y_1^s), \quad b_3^s = \frac{1}{D^s}(y_1^s - y_2^s), \quad c_3^s = \frac{1}{D^s}(x_2^s - x_1^s), \end{aligned}$$

kde

$$D^s = \det S^s, \quad S^s = \begin{bmatrix} 1 & x_1^s & y_1^s \\ 1 & x_2^s & y_2^s \\ 1 & x_3^s & y_3^s \end{bmatrix}.$$

D^s je dvojnásobek obsahu trojúhelníka T_s (pokud vrcholy T_s číslováme proti směru pohybu hodinových ručiček).

Restrikce ostatních báзовých funkcí na T_s jsou nulové. Každá funkce z V_1^h je tedy na T_s lineární polynom $p^s(x, y)$ typu $a + bx + cy$ a může být vyjádřena jako lineární kombinace funkcí N_1^s, N_2^s, N_3^s . Jestliže tento polynom v uzlech M_1^s, M_2^s, M_3^s nabývá hodnot U_1^s, U_2^s, U_3^s , pak jej lze pro $(x, y) \in T_s$ psát ve tvaru

$$(9.4.2) \quad p^s(x, y) = N_1^s(x, y)U_1^s + N_2^s(x, y)U_2^s + N_3^s(x, y)U_3^s.$$

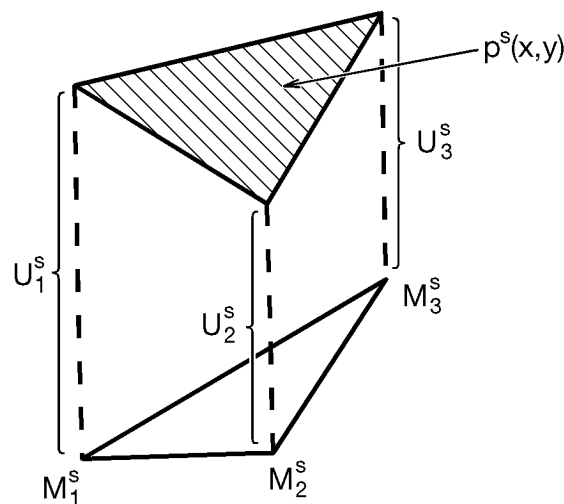
Protože

$$\frac{\partial N_i^s}{\partial x} = b_i^s, \quad \frac{\partial N_i^s}{\partial y} = c_i^s, \quad i = 1, 2, 3,$$

pak

$$(9.4.3) \quad \begin{aligned} \frac{\partial p^s(x, y)}{\partial x} &= b_1^s U_1^s + b_2^s U_2^s + b_3^s U_3^s, \\ \frac{\partial p^s(x, y)}{\partial y} &= c_1^s U_1^s + c_2^s U_2^s + c_3^s U_3^s. \end{aligned}$$

Útvar, který zahrnuje trojúhelník T_s , polynom $p^s(x, y)$ a uzlové parametry U_1^s, U_2^s, U_3^s , se nazývá *lineární trojúhelníkový prvek* (obr. 34).



Obr. 34. Lineární trojúhelníkový prvek.

9.5. Věta o aproximaci. Necht' τ_h je přípustná triangulace omezené (polygonální) oblasti Ω , $T_s \in \tau_h$ a V_1^h necht' je lineární prostor lineárních splajnů z odst. 9.3. Potom pro každou funkci $v \in C^2(\bar{\Omega})$ existuje jediná funkce $v_h \in V_1^h$ určená hodnotami $v(M_n)$ uzlech triangulace taková, že platí

$$(a) \quad |v - v_h| \leq M_2 h^2 \quad \text{v } \bar{\Omega},$$

$$(b) \quad |\mathcal{D}^1 v - \mathcal{D}^1 v_h| \leq \frac{6M_2 h}{\sin \alpha} \quad \text{uvnitř } T_s.$$

Zde $M_2 = \max_{\Omega} \{|v_{xx}|, |v_{xy}|, |v_{yy}|\}$, $h = \max_s (\text{diam } T_s)$ a α je minimum velikostí vnitřních úhlů všech trojúhelníků. $\mathcal{D}^1 v$ značí buď v_x nebo v_y .

9.5.1. Poznámka. Formulovaná věta je „dvojrozměrnou verzí“ aproximační věty z odst. 5.1.6. Její důkaz je ovšem složitější. V teorii metody konečných prvků se dokazuje řada analogických vět pro různé třídy funkcí v a jim odpovídající prostory V^h . Bezprostředním zobecněním naší věty je například tvrzení [19], že pro $v \in W_2^2(\Omega)$ existuje $v_h \in V_1^h$ a konstanta K (nezávislá na h, α, v) tak, že platí

$$\begin{aligned} \|v - v_h\| &\leq Kh^2 \|v\|_2, \\ \|v - v_h\|_1 &\leq K \frac{h}{\sin \alpha} \|v\|_2 \end{aligned}$$

v normách prostorů $L_2(\Omega)$, $W_2^1(\Omega)$ a $W_2^2(\Omega)$.

9.6. Trojúhelníkové prvky vyšších stupňů. Bázové funkce můžeme také konstruovat pomocí polynomů vyšších stupňů. Bázová funkce, která je na trojúhelníku T_s kvadratickým polynomem

$$p^s(x, y) = a_1 + a_2x + a_3y + a_4x^2 + a_5xy + a_6y^2,$$

bude na každém trojúhelníku jednoznačně určena šesti uzlovými parametry. Za uzly v tomto případě volíme vrcholy a středy stran trojúhelníka a uzlovými parametry pak jsou funkční hodnoty v těchto uzlech triangulace (v jednom uzlu volíme hodnotu 1 a ve zbývajících uzlech hodnoty nulové).

Bázová funkce, která je na trojúhelníku T_s kubickým polynomem

$$p^s(x, y) = a_1 + a_2x + a_3y + a_4x^2 + a_5xy + a_6y^2 + a_7x^3 + a_8x^2y + a_9xy^2 + a_{10}y^3,$$

bude na každém trojúhelníku jednoznačně určena deseti uzlovými parametry. Za uzly volíme například vrcholy a těžiště trojúhelníka. Uzlovými parametry jsou pak funkční hodnoty ve vrcholech a v těžišti trojúhelníka a hodnoty obou derivací ve vrcholech. Zevrubné poučení nalezne čtenář např. v [1], [6], [29].

9.7. Diskretizace standardní úlohy. Na polygonální oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ uvažujme okrajovou úlohu

$$(9.7.1) \quad \begin{aligned} -\operatorname{div}(p(x, y) \operatorname{grad} u) + q(x, y)u &= f(x, y) \quad \text{v } \Omega, \\ \sigma u + p \frac{\partial u}{\partial n} &= g \quad \text{na } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Předpokládáme, že jsou splněny předpoklady věty 6.2.8 a že funkce $u \in W_2^1(\Omega)$ je jedním (slabým) řešením úlohy (9.7.1). Ve smyslu odst. 6.2.6, 6.2.7 pro úlohu (9.7.1) máme $V = V_g = W_2^1(\Omega)$ a

$$a(u, v) = \iint_{\Omega} [p \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v + quv] \, dx \, dy + \int_{\partial\Omega} \sigma uv \, ds,$$

$$F(v) = \iint_{\Omega} f v \, dx \, dy + \int_{\partial\Omega} g v \, ds.$$

Výklad metody konečných prvků provedeme nejlépe právě pro případ $V = V_g = W_2^1(\Omega)$. Slabé řešení $u \in W_2^1(\Omega)$ úlohy (9.7.1) je dáno rovností

$$(9.7.2) \quad a(u, v) = F(v) \quad \forall v \in W_2^1(\Omega).$$

Popíšeme diskretizaci okrajové úlohy (9.7.1) Galerkinovou metodou. Opíráme se o abstraktní schéma metody z odst. 8.4. Zvolíme triangulaci oblasti Ω a sestrojíme prostor V_1^h funkcí spojitých na $\bar{\Omega}$ a lineárních na každém trojúhelníku T_s zvolené triangulace. Znamená to, že sestrojíme systém bázových funkcí v_1, v_2, \dots, v_N podle odst. 9.3 a 9.4 ($\dim V_1^h = N$).

Přibližné Galerkinovo řešení úlohy (9.7.1), resp. (9.7.2), v prostoru V_1^h je taková po částech lineární funkce $u_h \in V_1^h$, která splňuje rovnost

$$(9.7.3) \quad a(u_h, v_h) = F(v_h)$$

pro každou funkci $v_h \in V_1^h$. Funkci u_h lze tedy vyjádřit ve tvaru lineární kombinace po částech lineárních bázových funkcí z odst. 9.3, tj.

$$(9.7.4) \quad u_h = \sum_{n=1}^N U_n v_n,$$

kde $U_n = u_h(M_n) \approx u(M_n)$ jsou hledané uzlové parametry. Podobně jako v odst. 4.3.2 či 5.2.1 dostaneme z (9.7.3) soustavu lineárních algebraických rovnic

$$(9.7.5) \quad \mathbf{A}_h \mathbf{U}_h = \mathbf{F}_h,$$

kde

$$\mathbf{U}_h = [U_1, U_2, \dots, U_N]^T, \quad \mathbf{F}_h = [F_1, F_2, \dots, F_N]^T,$$

$$F_n = F(v_n) = \iint_{\Omega} f(x, y) v_n(x, y) \, dx \, dy + \int_{\partial\Omega} g(x, y) v_n(x, y) \, ds, \quad n = 1, 2, \dots, N,$$

a \mathbf{A}_h je symetrická pozitivně definitní matice s prvky

$$a_{nk} = a(v_n, v_k) = \iint_{\Omega} [p(x, y) \operatorname{grad} v_n(x, y) \cdot \operatorname{grad} v_k(x, y) + q(x, y) v_n(x, y) v_k(x, y)] dx dy + \int_{\partial\Omega} \sigma(x, y) v_n(x, y) v_k(x, y) ds, \quad n, k = 1, 2, \dots, N.$$

Je-li S počet trojúhelníků zvolené triangulace, $\bar{\Omega} = \bigcup_{s=1}^S T_s$, a $\partial\Omega = \bigcup_{r=1}^R L_r$ je sjednocení R hraničních stran L_r trojúhelníků triangulace, potom vzorce pro výpočet prvků matice \mathbf{A}_h a složek vektoru \mathbf{F}_h můžeme psát ve tvaru ($n, k = 1, 2, \dots, N$)

(9.7.6)

$$a_{nk} = \sum_{s=1}^S \int_{T_s} [p(x, y) \operatorname{grad} v_n(x, y) \cdot \operatorname{grad} v_k(x, y) + q(x, y) v_n(x, y) v_k(x, y)] dx dy + \sum_{r=1}^R \int_{L_r} \sigma(x, y) v_n(x, y) v_k(x, y) ds,$$

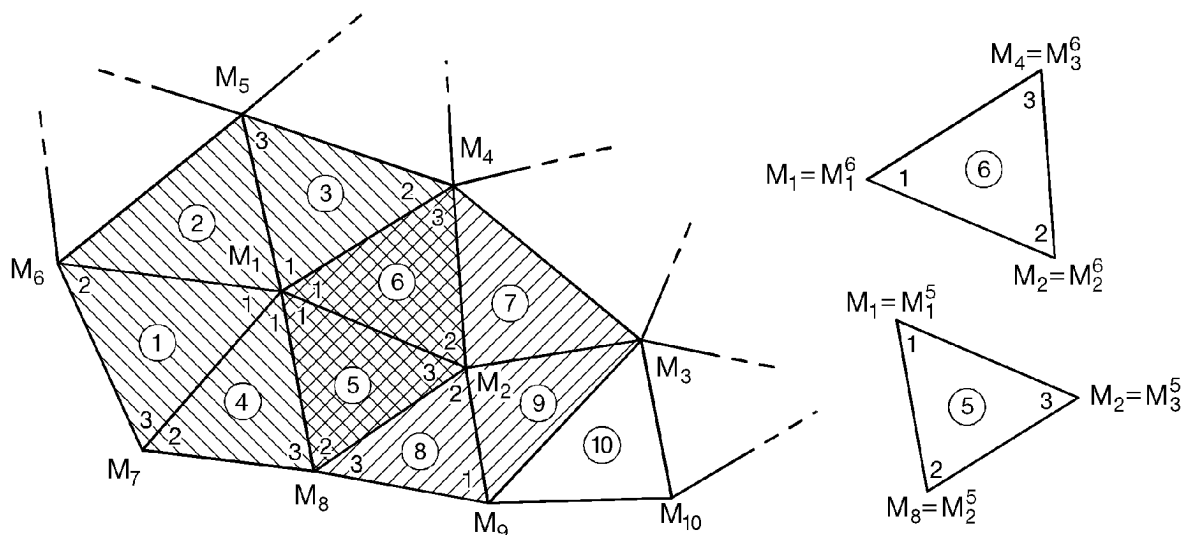
$$(9.7.7) \quad F_n = \sum_{s=1}^S \int_{T_s} f(x, y) v_n(x, y) dx dy + \sum_{r=1}^R \int_{L_r} g(x, y) v_n(x, y) ds.$$

Jsou-li sousední hraniční uzly $M_r = (x_r, y_r)$, $M_{r+1} = (x_{r+1}, y_{r+1})$ koncové body hraniční strany L_r , potom při výpočtu křivkových integrálů přes hranici $\partial\Omega$ vycházíme ze vzorce

$$\begin{aligned} & \int_{L_r} \Psi(x, y) ds = \\ & = \int_0^1 \Psi(x_r + (x_{r+1} - x_r)t, y_r + (y_{r+1} - y_r)t) \sqrt{(x_{r+1} - x_r)^2 + (y_{r+1} - y_r)^2} dt. \end{aligned}$$

9.8. Algoritmizace MKP. Přímé výpočty podle vzorců (9.7.6), (9.7.7) lze doporučit pouze v některých jednoduchých situacích. Zde popíšeme prakticky použitelný postup sestavení matice \mathbf{A}_h a vektoru \mathbf{F}_h , v němž budeme vycházet z výpočtů integrálů přes jednotlivé trojúhelníky, podobně jak jsme to provedli v odst. 5.3.

9.8.1. Sestavení globální matice \mathbf{A}_h . Uzlům a uzlovým parametrům přiřadíme lokální a globální indexy. Toto přiřazení se může provést tabulkou. Předpokládáme tedy, že jsme schopni poznat, který z trojúhelníků T_s , $s = 1, 2, \dots, S$, je vnitřní a který hraniční a která strana hraničního trojúhelníka je hraniční strana. Dále předpokládáme, že víme, který z uzlů M_1, M_2, \dots, M_N a uzlových parametrů U_1, U_2, \dots, U_N je přiřazen trojúhelníku T_s . Pro účely výkladu si toto přiřazení provedeme obrázkem (obr. 35). Dodržujeme zásadu, že lokální očíslování uzlů a uzlových parametrů v trojúhelníku T_s se provádí v kladném smyslu.



Obr. 35. Globální označení uzlů a lokální indexování na trojúhelníku T_s ; lomená čára $M_6M_7M_8M_9M_{10}$ je částí hranice $\partial\Omega$ oblasti Ω . Bázová funkce $v_1(x, y)$ je nenulová na trojúhelnících T_1 až T_6 , bázová funkce $v_2(x, y)$ je nenulová na trojúhelnících T_5 až T_9 .

Všimněme si podrobně trojúhelníka T_5 z obr. 35. Na něm jsou nenulové pouze bázové funkce v_1, v_2, v_8 příslušné uzlům $M_1 = M_1^5, M_2 = M_3^5, M_8 = M_2^5$ (vrcholy trojúhelníka T_5). Restrikce těchto bázových funkcí na trojúhelník T_5 jsou dány vztahy

$$(9.8.1) \quad v_1(x, y) = N_1^5(x, y), \quad v_2(x, y) = N_3^5(x, y), \quad v_8(x, y) = N_2^5(x, y),$$

kde lineární polynomy $N_i^5(x, y)$, $i = 1, 2, 3$, jsou určeny vzorci (9.4.1). Přibližné řešení u_h z (9.7.4) lze podle (9.4.2) vyjádřit na T_5 ve tvaru lineárního polynomu

$$(9.8.2) \quad u_h(x, y) = p^5(x, y) = N_1^5(x, y)U_1^5 + N_2^5(x, y)U_2^5 + N_3^5(x, y)U_3^5.$$

Volíme-li v (9.7.3) za v_h postupně v_1, v_2, v_3 , dostaneme $a(u_h, v_1) = F(v_1)$, $a(u_h, v_2) = F(v_2)$, $a(u_h, v_8) = F(v_8)$, tj. první, druhou a osmou rovnici soustavy (9.7.5). Proto trojúhelník T_5 přispěje k levé straně první rovnice hodnotou

$$a(p^5, N_1^5) = a(N_1^5, N_1^5)U_1^5 + a(N_2^5, N_1^5)U_2^5 + a(N_3^5, N_1^5)U_3^5,$$

k levé straně 2. rovnice hodnotou

$$a(p^5, N_3^5) = a(N_1^5, N_3^5)U_1^5 + a(N_2^5, N_3^5)U_2^5 + a(N_3^5, N_3^5)U_3^5,$$

a k levé straně 8. rovnice hodnotou

$$a(p^5, N_2^5) = a(N_1^5, N_2^5)U_1^5 + a(N_2^5, N_2^5)U_2^5 + a(N_3^5, N_2^5)U_3^5.$$

Protože podobnou úvahu děláme pro každý trojúhelník, přiřadíme každému trojúhelníku T_s zvolené triangulace prvkovou matici \mathbf{A}^s třetího řádu

$$\mathbf{A}^s = \begin{bmatrix} a_{11}^s & a_{12}^s & a_{13}^s \\ a_{21}^s & a_{22}^s & a_{23}^s \\ a_{31}^s & a_{32}^s & a_{33}^s \end{bmatrix},$$

jejíž prvky jsou dány vzorci ($i, j = 1, 2, 3$)

$$(9.8.3) \quad a_{ij}^s = \iint_{T_s} [(b_i^s b_j^s + c_i^s c_j^s)p(x, y) + (a_i^s a_j^s + (a_i^s b_j^s + b_i^s a_j^s)x + (a_i^s c_j^s + c_i^s a_j^s)y + b_i^s b_j^s x^2 + (c_i^s b_j^s + b_i^s c_j^s)xy + c_i^s c_j^s y^2)q(x, y)] dx dy.$$

Zde $p(x, y)$, $q(x, y)$ jsou koeficienty diferenciální rovnice (9.7.1).

Při takto sestavených maticích \mathbf{A}^s je $a_{ij}^s = a(N_i^s, N_j^s)$ pouze pro vnitřní trojúhelníky T_s , tj. v prvkových maticích \mathbf{A}^s pro hraniční trojúhelníky nemáme zatím zahrnuty příspěvky hraničního (křivkového) integrálu

$$\sum_{r=1}^R \int_{L_r} \sigma(x, y) v_n(x, y) v_k(x, y) ds$$

z (9.7.6). Algoritmicky je výhodnější zahrnout příspěvky hraničního integrálu do některých prvkových matic dodatečně (viz odst. 9.8.3).

Globální matice \mathbf{A}_h řádu N (zatím nezahrnující příspěvky hraničního integrálu) se sestavuje z prvkových matic \mathbf{A}^s podobně, jako jsme to „překrývací technikou“ prováděli v odst. 5.3.1.

Jestliže v trojúhelníku T_5 je (vztah lokálních a globálních parametrů, viz obr. 35) $U_1^5 = U_1$, $U_2^5 = U_8$, $U_3^5 = U_2$, potom

- a_{11}^5 se přičte do pozice (1, 1) globální matice \mathbf{A}_h ,
- a_{12}^5 se přičte do pozice (1, 8) globální matice \mathbf{A}_h ,
- a_{13}^5 se přičte do pozice (1, 2) globální matice \mathbf{A}_h ,
- a_{21}^5 se přičte do pozice (8, 1) globální matice \mathbf{A}_h ,
- a_{22}^5 se přičte do pozice (8, 8) globální matice \mathbf{A}_h ,
- a_{23}^5 se přičte do pozice (8, 2) globální matice \mathbf{A}_h ,

a_{31}^5 se přičte do pozice (2, 1) globální matice \mathbf{A}_h ,
 a_{32}^5 se přičte do pozice (2, 8) globální matice \mathbf{A}_h ,
 a_{33}^5 se přičte do pozice (2, 2) globální matice \mathbf{A}_h .

Vidíme, že pořadí prvků a_{ij}^s matice \mathbf{A}^s se v globální matici obecně nezachová, neboť je určeno globálním indexováním uzlů. Tuto proceduru provedeme pro každý (i hraniční) trojúhelník T_s , $s = 1, 2, \dots, S$. Na počátku procesu máme všechny pozice globální matice \mathbf{A}_h obsazeny nulami.

Z toho, co bylo řečeno, vyplývá, že do pozice v globální matici \mathbf{A}_h , která odpovídá nesousedním uzlům — tj. např. do pozice (4, 9) odpovídající uzlům M_4 , M_9 v obr. 35 — se nepřičte žádná nenulová hodnota, neboť průnik nosičů báзовých funkcí v_4 , v_9 je množina (dvourozměrné) míry nula. Při dostatečně husté triangulaci bude více uzlů nesousedních než sousedních. Proto globální matice \mathbf{A}_h bude řídka a při vhodném očíslování uzlů lze navíc dosáhnout toho, že bude pásová, tj. nenulové prvky budou soustředěny kolem hlavní diagonály. Počet sousedních uzlů uzlu M_n určuje počet nenulových prvků v n -tém řádku a maximum rozdílu globálních indexů libovolného uzlu a jeho sousedů určuje šířku polopásu (viz odst. 3.5.5).

9.8.2. Sestavení globálního vektoru \mathbf{F}_h . Každému trojúhelníku T_s , $s = 1, 2, \dots, S$, přiřadíme prvkový vektor

$$\mathbf{F}_s = [F_1^s, F_2^s, F_3^s]^T,$$

jehož složky jsou dány vzorci

$$(9.8.4) \quad F_i^s = \iint_{T_s} f(x, y)(a_i^s + b_i^s x + c_i^s y) dx dy, \quad i = 1, 2, 3.$$

Pro vnitřní trojúhelníky T_s je tedy $F_i^s = F(N_i^s)$, kde F je funkcionál z (9.7.2). Pro trojúhelník T_5 (obr. 35) je příspěvek k první složce globálního vektoru \mathbf{F}_h dán hodnotou $F(N_1^5)$, k druhé složce hodnotou $F(N_3^5)$ a k osmé složce hodnotou $F(N_2^5)$. Opět vidíme, že pořadí složek vektoru \mathbf{F}^s se ve vektoru \mathbf{F}_h nezachová, neboť

F_1^5 se přičte ke složce F_1 globálního vektoru \mathbf{F}_h ,
 F_2^5 se přičte ke složce F_8 globálního vektoru \mathbf{F}_h ,
 F_3^5 se přičte ke složce F_2 globálního vektoru \mathbf{F}_h .

Tuto proceduru provedeme pro každý (i hraniční) trojúhelník T_s , $s = 1, 2, \dots, S$. Příspěvky hraničního (křivkového) integrálu $\int_{L_r} g(x, y)v_n(x, y) ds$ z (9.7.7) zahrneme do \mathbf{F}_h dodatečně.

9.8.3. Hraniční integrály. Hraniční integrály v (9.7.6) ovlivní globální matici \mathbf{A}_h a hraniční integrály v (9.7.7) ovlivní globální vektor \mathbf{F}_h . Na hranici $\partial\Omega$ jsou nenulové pouze báзовé funkce přiřazené hraničním uzlům.

Opět se přidržujeme obr. 35. Například, volíme-li v (9.7.3) za v_n báзовou funkci v_7 , potom rovnice $a(u_h, v_7) = F(v_7)$, kde u_h je dáno vztahem (9.7.4), je sedmou rovnicí

výsledné soustavy (9.7.5). Předpokládáme, že příspěvky z trojúhelníků T_1 a T_4 ($T_1 \cup T_4$ je nosič bázové funkce v_7) jsme do globální matice \mathbf{A}_h již zahrnuli ve smyslu odst. 9.8.1. Zbývá integrál $\sum_{r=1}^R \int_{L_r} \sigma(x, y) u_h(x, y) v_7(x, y) ds$. Protože podle (9.4.2) je

$$(9.8.5) \quad \begin{aligned} u_h(x, y) &= p^1(x, y) = N_1^1(x, y)U_1^1 + N_2^1(x, y)U_2^1 + N_3^1(x, y)U_3^1 & \text{na } T_1, \\ u_h(x, y) &= p^4(x, y) = N_1^4(x, y)U_1^4 + N_2^4(x, y)U_2^4 + N_3^4(x, y)U_3^4 & \text{na } T_4, \end{aligned}$$

a $v_7(x, y)$ je nulová na $\partial\Omega$ s výjimkou lomené čáry $M_6M_7M_8$, budeme mít

$$(9.8.6) \quad \sum_{r=1}^R \int_{L_r} \sigma(x, y) u_h(x, y) v_7(x, y) ds = \int_{M_6M_7} \sigma(x, y) p^1(x, y) v_7(x, y) ds + \\ + \int_{M_7M_8} \sigma(x, y) p^4(x, y) v_7(x, y) ds.$$

Protože

$$(9.8.7) \quad v_7(x, y) = \begin{cases} N_3^1(x, y) & \text{na } T_1, \\ N_2^4(x, y) & \text{na } T_4, \end{cases}$$

dostaneme z (9.8.6) po dosazení za u_h z (9.8.5) a za v_7 z (9.8.7) příspěvek k levé straně 7. rovnice soustavy (9.7.5) ve tvaru

$$(9.8.8) \quad \sum_{r=1}^R \int_{L_r} \sigma u_h v_7 ds = \int_{M_6M_7} \sigma(N_2^1U_2^1 + N_3^1U_3^1)N_3^1 ds + \int_{M_7M_8} \sigma(N_2^4U_2^4 + U_3^4U_3^4)N_2^4 ds,$$

neboť $N_1^1(x, y) = 0$ na M_6M_7 , $N_1^4(x, y) = 0$ na M_7M_8 . Protože $U_1^1 = U_1$, $U_2^1 = U_6$, $U_3^1 = U_7$ a $U_1^4 = U_1$, $U_2^4 = U_7$, $U_3^4 = U_8$, vyplývá odtud tento postup: úsečka $M_6M_7 = M_2^1M_3^1$ patří k trojúhelníku T_1 , úsečka $M_7M_8 = M_2^4M_3^4$ patří k trojúhelníku T_4 ; proto

k prvku a_{23}^1 prvkové matice \mathbf{A}^1 se přičte $\int_{M_6M_7} \sigma(x, y) N_2^1(x, y) N_3^1(x, y) ds$,
k prvku a_{33}^1 prvkové matice \mathbf{A}^1 se přičte $\int_{M_6M_7} \sigma(x, y) N_3^1(x, y) N_3^1(x, y) ds$,
k prvku a_{22}^4 prvkové matice \mathbf{A}^4 se přičte $\int_{M_7M_8} \sigma(x, y) N_2^4(x, y) N_2^4(x, y) ds$,
k prvku a_{23}^4 prvkové matice \mathbf{A}^4 se přičte $\int_{M_7M_8} \sigma(x, y) N_2^4(x, y) N_3^4(x, y) ds$.

Obecně se tedy pro hraniční trojúhelník T_s s hraniční stranou $M_i^sM_j^s$ k prvkům a_{kl}^s , $k = i, j$, $l = i, j$, prvkové matice \mathbf{A}^s přičtou odpovídající integrály $\int_{M_i^sM_j^s} \sigma N_k^s N_l^s ds$.

Analogicky zpracujeme příspěvky hraničního integrálu

$$\sum_{r=1}^R \int_{L_r} g(x, y) v_n(x, y) ds.$$

Pro stejnou hraniční stranu $M_i^s M_j^s$ se integrál

$$\int_{M_i^s M_j^s} g(x, y) N_i^s(x, y) \, ds$$

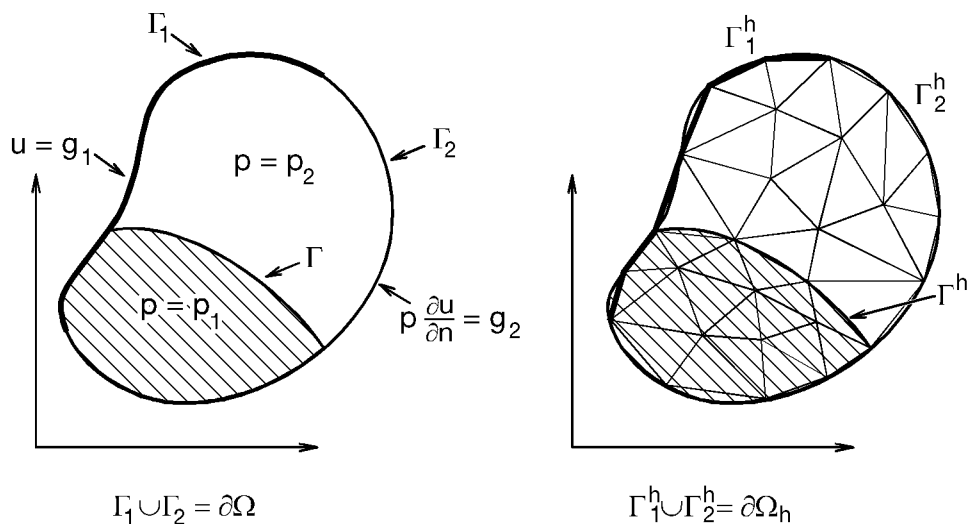
přičte ke složce F_i^s vektoru \mathbf{F}^s a integrál

$$\int_{M_i^s M_j^s} g(x, y) N_j^s(x, y) \, ds$$

se přičte ke složce F_j^s vektoru \mathbf{F}^s .

Matice \mathbf{A}^s a vektory \mathbf{F}^s modifikované uvedeným způsobem hraničními integrály teprve nyní použijeme k sestavení globální matice \mathbf{A}_h podle odst. 9.8.1 a globálního vektoru \mathbf{F}_h podle odst. 9.8.2.

9.8.4. Obecnější okrajové podmínky a přechodová podmínka. Pro okrajové úlohy typu (8.1.1) (viz také tab. 6, odst. 6.2.7) zůstává základní schéma konstrukce matice \mathbf{A}_h a vektoru \mathbf{F}_h z odst. 9.8.1, 9.8.2 beze změn. Bilineární forma $a(u, v)$ obsahuje integrál přes Γ_3 . Proto opravy prvkových matic \mathbf{A}^s popsané v odst. 9.8.3 se nyní týkají pouze těch hraničních trojúhelníků, jejichž strana patří části Γ_3 hranice $\partial\Omega$. Lineární forma $F(v)$ obsahuje integrály přes Γ_2 a Γ_3 . Opravy vektoru \mathbf{F}_h ve smyslu odst. 9.8.3 se týkají těch hraničních trojúhelníků, jejichž strana patří částem Γ_2 a Γ_3 hranice $\partial\Omega$. Triangulace musí být provedena tak, že dělicí body částí $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ jsou vrcholy trojúhelníků. Homogenní přechodová podmínka (6.2.9) je v MKP respektována automaticky (viz odst. 6.2.9), pokud triangulaci provedeme tak, že rozhraní Γ je tvořeno (aproximováno) lomenou čarou, jejíž části jsou strany některých trojúhelníků (viz obr. 36).



Obr. 36. Oblast Ω s rozhraním Γ a její triangulace.

9.8.5. Realizace Dirichletovy okrajové podmínky. Předpokládáme, že na části Γ_1 hranice $\partial\Omega$ je zadána okrajová podmínka $u = g_1$. Připouštíme i případ $\Gamma_1 = \partial\Omega$. Dále předpokládáme, že již máme stanovenou matici \mathbf{A}_h a vektor \mathbf{F}_h podle zásad odst. 9.8.1 a 9.8.2 včetně případných oprav daných hraničními integrály přes Γ_2 , resp. Γ_3 (pokud $\Gamma_1 \neq \partial\Omega$).

Doporučujeme následující postup. Uzly na Γ_1 očíslovujeme jako poslední a přiřadíme jim tedy globální indexy $N_1 + 1, N_1 + 2, \dots, N$, kde N_1 je počet uzlů, v nichž není zadána Dirichletova podmínka (včetně vnitřních uzlů). V matici \mathbf{A}_h nahradíme mimodiagonální prvky v posledních $N - N_1$ řádcích nulami a na diagonálu v těchto řádcích dáme jedničky. Ve vektoru \mathbf{F}_h posledních $N - N_1$ složek nahradíme čísla $g_1(M_{N_1+1}), g_1(M_{N_1+2}), \dots, g_1(M_N)$. Tato úprava odpovídá náhradě posledních $N - N_1$ rovnic formálně sestavené soustavy $\mathbf{A}_h \mathbf{U}_h = \mathbf{F}_h$ rovnicemi

$$\begin{aligned} U_{N_1+1} &= g_1(M_{N_1+1}), \\ U_{N_1+2} &= g_1(M_{N_1+2}), \\ &\vdots \\ U_N &= g_1(M_N). \end{aligned}$$

Přibližné řešení dané okrajové úlohy je ovšem v tomto případě určeno vztahem

$$(9.8.9) \quad u_h(x, y) = \sum_{n=1}^{N_1} U_n v_n(x, y) + \sum_{n=N_1+1}^N g_1(M_n) v_n(x, y).$$

Připomeneme-li si poznatky z odst. 8.1.1, můžeme konstatovat, že báze funkce jsou zde fakticky funkce v_1, v_2, \dots, v_{N_1} a odpovídající lineární prostor $V^{(N_1)}$ s touto bází aproximuje prostor V , kdežto funkce v_0 z (8.1.5) je zde aproximována funkcí

$$\tilde{v}_0(x, y) = \sum_{n=N_1+1}^N g_1(M_n) v_n(x, y),$$

která splňuje požadavek (8.1.5) pouze v uzlech $M_n \in \Gamma_1$. Prostor $V_g^{(N_1)}$ funkcí typu $\tilde{v}_0 + \sum_{n=1}^{N_1} \alpha_n v_n$ je podmnožinou lineárního prostoru V_1^h určeného bázevými funkcemi v_1, v_2, \dots, v_N . Přibližné řešení (9.8.9) patří do prostoru $V_g^{(N_1)}$, který aproximuje prostor V_g přiřazený dané okrajové úloze.

9.9. Stručné shrnutí algoritmu MKP.

1. *Vstupní informace:* Oblast Ω , její hranice $\partial\Omega$ a případně její části $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$, typ okrajové úlohy a funkce p, q, f, g (případně g_1, g_2, g_3) vystupující v diferenciální rovnici a okrajových podmínkách. Souřadnice uzlů, počet N všech uzlů, počet S trojúhelníků,

počet a souřadnice hraničních uzlů s Dirichletovou, Neumannovou a Newtonovou okrajovou podmínkou.

2. *Přípravné práce:* Přiřazení lokálních a globálních indexů a uzlových parametrů. Výpočet čísel a_i^s , b_i^s , c_i^s , $i = 1, 2, 3$, podle vzorců z odst. 9.4.

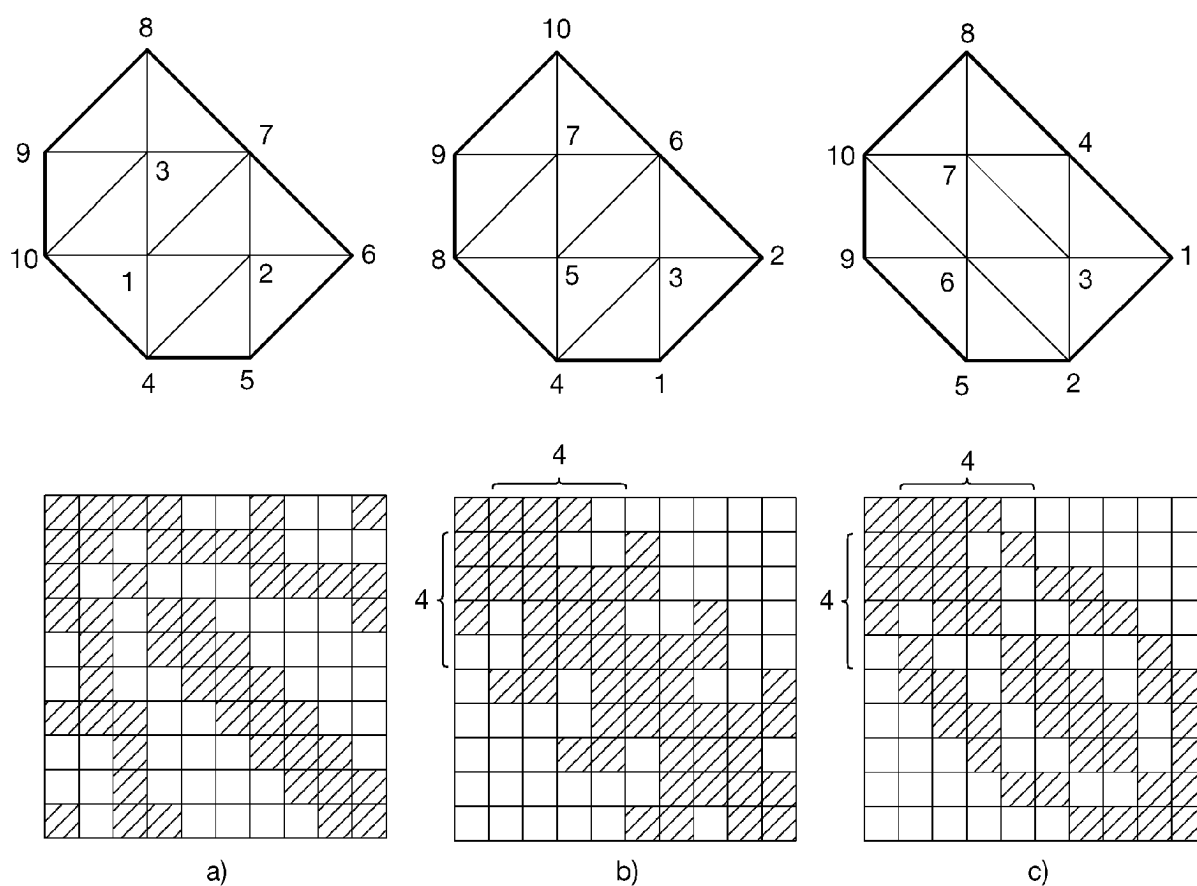
3. *Výpočet integrálů* typu

$$\iint_{T_s} x^\alpha y^\beta p(x, y) dx dy, \iint_{T_s} x^\alpha y^\beta q(x, y) dx dy, \iint_{T_s} f(x, y) x^\alpha y^\beta dx dy$$

vystupujících ve vzorcích (9.8.3), (9.8.4) (používají se obvykle Gaussovy kvadraturní vzorce) a určení prvkových matic \mathbf{A}^s a prvkových vektorů \mathbf{F}^s pro $s = 1, 2, \dots, S$.

4. *Modifikace* \mathbf{A}^s , \mathbf{F}^s v závislosti na typu okrajové úlohy.

5. *Sestavení* globální matice \mathbf{A}_h a globálního vektoru \mathbf{F}_h a řešení soustavy $\mathbf{A}_h \mathbf{U}_h = \mathbf{F}_h$.



Obr. 37. Vliv očíslování uzlů a vliv triangulace na pásovost matice soustavy.
a) Matice není pásová, ale pouze řídká. b), c) Pásová matice s šířkou pásu $4 + 1 + 4 = 9$,
šířka polopásu 4 je rovna maximu rozdílu globálních indexů sousedních uzlů.

Pro okrajové úlohy se symetrickou a eliptickou bilineární formou bude matice \mathbf{A}_h s y m e t r i c k á a p o z i t i v n ě d e f i n i t n í. Vhodným očíslováním uzlů lze dosáhnout toho, že je p á s o v á. Na obr. 37 je ukázán vliv triangulace a vliv číslování uzlů při stejné triangulaci na pásovost, resp. šířku pásu globální matice \mathbf{A}_h .

Soustavu $\mathbf{A}_h \mathbf{U}_h = \mathbf{F}_h$ lze řešit jak některými eliminačními metodami (odst. 3.5), tak i iteračními metodami (čl. 10). V současné době se k řešení soustav lineárních algebraických rovnic vznikajících aplikací MKP používají především různé varianty eliminační metody a metody sdružených gradientů.

V zájmu standardizace algoritmu se při výpočtu integrálů přes T_s často používá transformace trojúhelníka T_s na referenční trojúhelník T_0 o vrcholech $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$. Tuto regulární transformaci zapíšeme transformačními vztahy

$$(9.9.1) \quad \begin{aligned} x &= x_1^s + (x_2^s - x_1^s)\xi + (x_3^s - x_1^s)\eta, \\ y &= y_1^s + (y_2^s - y_1^s)\xi + (y_3^s - y_1^s)\eta. \end{aligned}$$

Potom

$$\iint_{T_s} \phi(x, y) dx dy = \iint_{T_0} \tilde{\phi}(\xi, \eta) d\xi d\eta,$$

kde

$$\tilde{\phi}(\xi, \eta) = D^s \phi(x_1^s + (x_2^s - x_1^s)\xi + (x_3^s - x_1^s)\eta, y_1^s + (y_2^s - y_1^s)\xi + (y_3^s - y_1^s)\eta)$$

a D^s je dvojnásobek obsahu trojúhelníka T_s (viz odst. 9.4).

9.10. Cvičení

9.10.1. Metodou konečných prvků řešte okrajovou úlohu $-\Delta u = 0$ ve čtvrtkruhu $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0, x^2 + y^2 < 1\}$, $u(x, 0) = 1 - x^2$, $x \in \langle 0, 1 \rangle$, $u_x(0, y) = 0$, $y \in \langle 0, 1 \rangle$, $\partial u / \partial n = -2$ pro $(x, y) \in \Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1, x > 0, y > 0\}$. Za uzly triangulace volte $M_1 = (0, 1)$, $M_2 = (0, 1/2)$, $M_3 = (\sqrt{3}/2, 1/2)$, $M_4 = (0, 0)$, $M_5 = (\sqrt{3}/2, 0)$, $M_6 = (1, 0)$. Aproximujte oblast Ω oblastí Ω_h s polygonální hranicí, tj. oblouk kružnice nahraďte lomenou čarou $M_1 M_3 M_6$. $M_4 M_3$ je strana trojúhelníka. Přibližné řešení hledejte ve tvaru (9.8.9). [Návod: V uzlech M_4 , M_5 , M_6 je dána Dirichletova podmínka, proto hledáme tři neznámé parametry U_1 , U_2 , U_3 . Jsou-li v_1, v_2, \dots, v_6 po částech lineární báze funkce příslušné zvoleným uzlům a označíme-li $g(x, y) = 1 - x^2$, potom přibližné řešení bude tvaru $u_h(x, y) = g(M_4)v_4(x, y) + g(M_5)v_5(x, y) + g(M_6)v_6(x, y) + U_1v_1(x, y) + U_2v_2(x, y) + U_3v_3(x, y)$; $g(M_4) = 1$, $g(M_5) = \frac{1}{4}$, $g(M_6) = 0$. Globální matice bude rovna prvkové matici trojúhelníka $M_1 M_2 M_3$.]

9.10.2. V metodě konečných prvků se počítají integrály typu

$$\begin{aligned} \iint_{T_s} \frac{\partial N_i^s}{\partial x} \frac{\partial N_j^s}{\partial x} dx dy, \quad \iint_{T_s} \frac{\partial N_i^s}{\partial y} \frac{\partial N_j^s}{\partial y} dx dy, \quad \iint_{T_s} N_i^s N_j^s dx dy, \\ \iint_{T_s} g \frac{\partial N_i^s}{\partial x} \frac{\partial N_j^s}{\partial x} dx dy, \quad \iint_{T_s} g \frac{\partial N_i^s}{\partial y} \frac{\partial N_j^s}{\partial y} dx dy, \quad \iint_{T_s} g N_i^s N_j^s dx dy \quad (i, j = 1, 2, 3). \end{aligned}$$

Sestavte algoritmus výpočtu těchto integrálů pomocí kvadraturní formule (přesné pro kvadratické polynomy)

$$\iint_{T_s} \phi(x, y) dx dy \approx \frac{1}{6} D^s \left[\phi\left(\frac{M_1^s + M_2^s}{2}\right) + \phi\left(\frac{M_2^s + M_3^s}{2}\right) + \phi\left(\frac{M_3^s + M_1^s}{2}\right) \right].$$

9.10.3. V MKP počítáme hodnoty přibližného řešení v uzlech, tj. ve vrcholech M_1^s, M_2^s, M_3^s trojúhelníka T_s . Vypočtěte hodnotu přibližného řešení u_h v bodě $M \in T_s$, $M \neq M_i^s$, $i = 1, 2, 3$, tj. v bodě, který není vrcholem. [Jsou-li vypočtené hodnoty ve vrcholech T_s (v lokálním značení) U_1^s, U_2^s, U_3^s a $u_h(x, y) = N_1^s(x, y)U_1^s + N_2^s(x, y)U_2^s + N_3^s(x, y)U_3^s$ na T_s , potom pro $M = (x_M, y_M) \in T_s$ je $u_h(M) = u_h(x_M, y_M) = N_1^s(x_M, y_M)U_1^s + N_2^s(x_M, y_M)U_2^s + N_3^s(x_M, y_M)U_3^s$.]

10. Iterační metody řešení síťových rovnic

10.1. Úvod. Iterační metody řešení soustav lineárních algebraických rovnic vznikajících diskretizací eliptických úloh mají oproti přímým metodám (viz odst. 3.5) některé přednosti. V tomto článku uvedeme přehled základních výsledků a nejběžnější algoritmy.

Uvažujme soustavu rovnic $\mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{b}$ s přesným řešením $\mathbf{y}^* = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$. Řešení soustavy budeme aproximovat tak, že konstruujeme posloupnost vektorů $\{\mathbf{y}^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ pomocí iteračního předpisu ($\mathbf{y}^{(0)}$ volíme)

$$(10.1.1) \quad \mathbf{y}^{(k)} = \mathbf{H}\mathbf{y}^{(k-1)} + \mathbf{G}\mathbf{b}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Má-li iterační proces (10.1.1) konvergovat k přesnému řešení (tj. $\mathbf{y}^{(k)} \rightarrow \mathbf{y}^*$, když $k \rightarrow \infty$), musí zřejmě platit $\mathbf{y}^* = \mathbf{H}\mathbf{y}^* + \mathbf{G}\mathbf{b} = \mathbf{H}\mathbf{y}^* + \mathbf{G}\mathbf{A}\mathbf{y}^*$. Je proto rozumné předpokládat, že matice \mathbf{H} a \mathbf{G} v předpisu (10.1.1) splňují *podmínku konzistence*

$$(10.1.2) \quad \mathbf{I} = \mathbf{H} + \mathbf{G}\mathbf{A}.$$

Matice \mathbf{H} se nazývá *iterační matice* metody (10.1.1).

Iterační metoda daná formulí (10.1.1) *k o n v e r g u j e*, právě když pro spektrální poloměr $\rho(\mathbf{H})$ iterační matice \mathbf{H} platí

$$(10.1.3) \quad \rho(\mathbf{H}) < 1.$$

Potom pro regulární matici \mathbf{A} řádu n platí $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{y}^{(k)}$ pro libovolné $\mathbf{y}^{(0)}$. (*Spektrální poloměr* je definován vztahem $\rho(\mathbf{H}) = \max_i |\lambda_i(\mathbf{H})|$, kde $\lambda_i(\mathbf{H})$, $i = 1, 2, \dots, n$, jsou vlastní čísla matice \mathbf{H} .)

Předpokládáme, že diagonální prvky matice \mathbf{A} jsou *n e n u l o v é*. Napišme matici \mathbf{A} jako součet $\mathbf{A} = \mathbf{M} + \mathbf{D} + \mathbf{N}$, kde \mathbf{D} je diagonální matice určená diagonálními prvky a_{ii} matice \mathbf{A} , \mathbf{M} je ostře dolní trojúhelníková matice určená prvky a_{ij} matice \mathbf{A} pro $i > j$ a \mathbf{N} je ostře horní trojúhelníková matice určená prvky a_{ij} pro $i < j$.

Když

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_J = -\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{M} + \mathbf{N}), \quad \mathbf{G} = \mathbf{G}_J = \mathbf{D}^{-1},$$

představuje (10.1.1) *Jacobiho iterační formuli*, když

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_S = -(\mathbf{M} + \mathbf{D})^{-1}\mathbf{N}, \quad \mathbf{G} = \mathbf{G}_S = (\mathbf{M} + \mathbf{D})^{-1},$$

představuje (10.1.1) *Gaussovu-Seidelovu iterační formuli* a když

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \mathbf{H}_\omega = (\mathbf{D} + \omega\mathbf{M})^{-1}[(1 - \omega)\mathbf{D} - \omega\mathbf{N}], \\ \mathbf{G} &= \mathbf{G}_\omega = \omega(\mathbf{D} + \omega\mathbf{M})^{-1}, \quad 0 < \omega < 2, \end{aligned}$$

představuje (10.1.1) *superrelaxační (SOR) iterační formulí*. Číslo ω se nazývá *relaxační parametr*.

Jestliže matice \mathbf{A} je ostře nebo ireducibilně diagonálně dominantní (viz odst. 3.5.1), potom jak pro \mathbf{H}_J , tak pro \mathbf{H}_S platí (10.1.3). Je-li \mathbf{A} symetrická a pozitivně definitní a $0 < \omega < 2$, potom pro \mathbf{H}_ω platí (10.1.3). Pro $\omega = 1$ je $\mathbf{H}_\omega = \mathbf{H}_S$. Jak jsme viděli v předcházejících článcích, matice soustavy lineárních algebraických rovnic vzniklých diskretizací standardní eliptické okrajové úlohy mají často některou z uvedených vlastností, zaručujících konvergenci iteračního procesu (10.1.1).

10.2. Metoda superrelaxace. Pro soustavu $\mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{b}$ s maticí $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ řádu n můžeme algoritmus superrelaxační metody zapsat následujícím způsobem:

$$(10.2.1) \quad \begin{array}{l} \text{Vstup: } n, \mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{y}^{(0)}, \omega, K, \delta. \\ \text{Pro } k = 1, 2, \dots, K : \\ \quad \left[\begin{array}{l} \text{Pro } i = 1, 2, \dots, n : \\ \quad \tilde{y}_i = a_{ii}^{-1} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} y_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} y_j^{(k-1)} \right). \\ \quad y_i^{(k)} = \omega \tilde{y}_i + (1 - \omega) y_i^{(k-1)}. \end{array} \right. \\ \text{Výstup: } \mathbf{y}^{(m)} = [y_1^{(m)}, y_2^{(m)}, \dots, y_n^{(m)}]^T, \quad m \leq K. \end{array}$$

Výpočet zastavujeme např. zastavovací podmínkou $\|\mathbf{y}^{(k)} - \mathbf{y}^{(k-1)}\| < \delta$. V každém kroku vnějšího cyklu kontrolujeme, zda je splněna. Ukončení výpočtu dostatečně velkým číslem K přichází v úvahu při velmi pomalé konvergenci.

Rychlost konvergence se měří velikostí spektrálního poloměru $\rho(\mathbf{H}_\omega)$ a je tím větší, čím je spektrální poloměr menší. Pro většinu matic \mathbf{A} vznikajících při řešení eliptických úloh (viz [55]) je $\rho(\mathbf{H}_\omega)$ nejmenší, když

$$(10.2.2) \quad \omega = \omega_{\text{opt}} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \rho(\mathbf{H}_s)}}.$$

Podrobnější informace o určování optimálního relaxačního parametru ω_{opt} lze nalézt např. v [18], [46]. Prakticky postupujeme tak, že v algoritmu (10.2.1) volíme nejdříve $\omega = 1$ a provedeme několik iterací. Vypočtené vektory $\mathbf{y}^{(k)} - \mathbf{y}^{(k-1)} = \mathbf{H}_S(\mathbf{y}^{(k-1)} - \mathbf{y}^{(k-2)})$ užijeme v mocninné metodě ([24]) pro určení dominantního vlastního čísla. Tak určíme aproximaci ω_{opt} , se kterou ve výpočtu pokračujeme.

10.3. Metoda střídavých směrů. Matici \mathbf{A} soustavy $\mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{b}$ píšeme ve tvaru

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2,$$

přičemž matice \mathbf{A}_1 a \mathbf{A}_2 jsou takové, že soustavy s maticemi $\mathbf{A}_1 + \mu \mathbf{I}$ a $\mathbf{A}_2 + \mu \mathbf{I}$ jsou snadno řešitelné. Definujeme dvoukrokový iterační proces pomocí vzorců ($\mathbf{y}^{(0)}$ volíme)

$$(10.3.1) \quad \begin{aligned} (\mathbf{A}_1 + \mu \mathbf{I}) \tilde{\mathbf{y}} &= (\mu \mathbf{I} - \mathbf{A}_2) \mathbf{y}^{(k-1)} + \mathbf{b}, \\ (\mathbf{A}_2 + \mu \mathbf{I}) \mathbf{y}^{(k)} &= (\mu \mathbf{I} - \mathbf{A}_1) \tilde{\mathbf{y}} + \mathbf{b}. \end{aligned}$$

Iterační matice \mathbf{H}_μ výsledného iteračního procesu

$$(10.3.2) \quad \mathbf{y}^{(k)} = \mathbf{H}_\mu \mathbf{y}^{(k-1)} + \mathbf{g}_\mu$$

má tvar

$$\mathbf{H}_\mu = (\mathbf{A}_2 + \mu \mathbf{I})^{-1}(\mu \mathbf{I} - \mathbf{A}_1)(\mathbf{A}_1 + \mu \mathbf{I})^{-1}(\mu \mathbf{I} - \mathbf{A}_2).$$

Hodnoty parametru μ se volí během iteračního procesu tak, aby rychlost konvergence byla co největší. Lze tak získat rychlou a ekonomickou iterační metodu, která při řešení eliptických okrajových úloh umožňuje řešit vzniklé soustavy síťových rovnic ještě efektivněji než metoda superrelaxace s optimální volbou relaxačního parametru (podrobnosti viz např. [18], [46], [49]).

10.4. Metoda sdružených gradientů s předpodmíněním. Pro soustavy se symetrickou pozitivně definitní maticí \mathbf{A} řádu n se v současné době stále více používají (zvláště v souvislosti s MKP) některé modifikace metody sdružených gradientů. Metoda využívá fakt, že řešení \mathbf{y}^* soustavy $\mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{b}$ je jediným bodem minima kvadratické funkce $\Phi(\mathbf{y}) = \frac{1}{2}\mathbf{y}^T \mathbf{A}\mathbf{y} - \mathbf{y}^T \mathbf{b}$. Postupně se generují vektory $\mathbf{v}^{(0)}, \mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}^{(2)}, \dots$ s vlastností $(\mathbf{v}^{(i)})^T \mathbf{A} \mathbf{v}^{(j)} = 0$ pro $i \neq j$, a pomocí nich se určí posloupnost $\{\mathbf{y}^{(k)}\}_{k=0}^\infty$ taková, že $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{y}^{(k)} = \mathbf{y}^*$. Významnou teoretickou vlastností metody je skutečnost, že k přesnému řešení \mathbf{y}^* dospějeme nejvýše po n krocích. Nicméně vzhledem k zaokrouhlovacím chybám má algoritmus iterační charakter. Na druhé straně se stává, že dostaneme řešení s požadovanou přesností mnohem dříve než po n iteracích.

$$(10.4.1) \quad \begin{array}{l} \text{Vstup: } n, \mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{y}^{(0)}, \mathbf{C}, \varepsilon, K. \\ \mathbf{g}^{(0)} = \mathbf{A}\mathbf{y}^{(0)} - \mathbf{b}, \mathbf{h}^{(0)} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{g}^{(0)}, \mathbf{d}^{(0)} = -\mathbf{h}^{(0)}. \\ \text{Pro } k = 0, 1, \dots, K : \\ \quad \left| \begin{array}{l} \mathbf{u}^{(k)} = \mathbf{A}\mathbf{d}^{(k)}; \\ \alpha_k = \frac{(\mathbf{g}^{(k)})^T \mathbf{h}^{(k)}}{(\mathbf{d}^{(k)})^T \mathbf{u}^{(k)}}; \\ \mathbf{y}^{(k+1)} = \mathbf{y}^{(k)} + \alpha_k \mathbf{d}^{(k)}; \\ \mathbf{g}^{(k+1)} = \mathbf{g}^{(k)} + \alpha_k \mathbf{u}^{(k)}; \\ \mathbf{h}^{(k+1)} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{g}^{(k+1)}; \\ \beta_k = \frac{(\mathbf{g}^{(k+1)})^T \mathbf{h}^{(k+1)}}{(\mathbf{g}^{(k)})^T \mathbf{h}^{(k)}}; \\ \mathbf{d}^{(k+1)} = -\mathbf{h}^{(k)} + \beta_k \mathbf{d}^{(k)}. \end{array} \right. \end{array}$$

$$\text{Výstup: } \mathbf{y}^{(m)}, m \leq K.$$

V každém kroku kontrolujeme splnění zastavovací podmínky $(\mathbf{g}^{(k+1)})^T \mathbf{g}^{(k+1)} < \varepsilon^2$. Protože $\mathbf{g}^{(k)} = \mathbf{A}\mathbf{y}^{(k)} - \mathbf{b} = \text{grad } \Phi(\mathbf{y}^{(k)})$ a víme, že bod \mathbf{y}^* je řešením soustavy $\mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{b}$ právě když $\text{grad } \Phi(\mathbf{y}^*) = 0$, je zastavovací podmínka přibližným vyjádřením podmínky minima. Násobení maticí \mathbf{C}^{-1} se interpretuje jako řešení rovnice $\mathbf{C}\mathbf{h} = \mathbf{g}^{(k+1)}$. Matice \mathbf{C} se nazývá *předpodmiňovací matice* a musí mít dvě důležité vlastnosti: a) musíme umět řešit soustavu $\mathbf{C}\mathbf{h} = \mathbf{g}^{(k+1)}$ nějakou rychlou přímou metodou, b) matice \mathbf{C} musí být

v nějakém smyslu „blízká“ matici \mathbf{A} . Očekáváme, že vhodná volba matice \mathbf{C} urychlí proces konvergence metody (viz [1]) ve srovnání s případem $\mathbf{C} = \mathbf{I}$.

10.5. Zhodnocení iteračních metod

10.5.1. Rychlost konvergence. Necht $\mathbf{e}^{(k)} = \mathbf{y}^* - \mathbf{y}^{(k)}$ je chyba k -té iterační aproximace řešení \mathbf{y}^* získané metodou (10.1.1). Protože díky splnění podmínky konzistence platí $\mathbf{y}^* = \mathbf{H}\mathbf{y}^* + \mathbf{G}\mathbf{b}$, máme

$$\mathbf{e}^{(k)} = \mathbf{H}\mathbf{e}^{(k-1)} = \mathbf{H}^k \mathbf{e}^{(0)}.$$

Z algebry je známo, že platí

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{H}^k\|^{\frac{1}{k}} = \rho(\mathbf{H}).$$

To tedy znamená, že pro libovolně malé $\delta > 0$ a dostatečně velká k platí

$$\|\mathbf{H}^k\| \leq [\rho(\mathbf{H}) + \delta]^k.$$

Odtud plyne

$$(10.5.1) \quad \|\mathbf{e}^{(k)}\| \leq [\rho(\mathbf{H}) + \delta]^k \|\mathbf{e}^{(0)}\|.$$

Vidíme, že čím menší je spektrální poloměr iterační matice \mathbf{H} , tím rychleji konvergují iterační aproximace $\mathbf{y}^{(k)}$ získané metodou (10.1.1) k přesnému řešení.

Buď nyní K počet iteračních kroků potřebných k tomu, aby $\|\mathbf{e}^{(K)}\|$ byla 10^q -krát menší než $\|\mathbf{e}^{(0)}\|$, tj. k tomu, aby platilo

$$\|\mathbf{e}^{(K)}\| \leq 10^{-q} \|\mathbf{e}^{(0)}\|.$$

Z (10.5.1) vidíme, že pro praktické účely můžeme K stanovit z přibližného vztahu

$$[\rho(\mathbf{H})]^K \approx 10^{-q}.$$

Odtud dostáváme

$$(10.5.2) \quad K \approx -\frac{q}{\log[\rho(\mathbf{H})]}.$$

Lze dokázat [49], že pro matice \mathbf{A} vznikající při řešení standardních eliptických okrajových úloh diferenčními metodami zpravidla platí

$$(10.5.3) \quad \rho(\mathbf{H}_S) = [\rho(\mathbf{H}_J)]^2 < 1.$$

Odtud vyplývá, že $K_S \approx \frac{1}{2}K_J$, tj. Gaussova-Seidelova metoda je pak zhruba dvakrát rychlejší. Protože obecně platí $\rho(\mathbf{H}_{\omega_{\text{opt}}}) < \rho(\mathbf{H}_S)$, plyne odtud, že $K_{\omega_{\text{opt}}} < K_S$.

10.5.2. Příklad. Pro soustavu (7.2.4) vzniklou diskretizací okrajové úlohy (7.2.1) bude

$$\mathbf{H}_J = \frac{1}{4}(4\mathbf{I} - \mathbf{A}_h), \quad \mathbf{G} = \frac{1}{4}\mathbf{I}.$$

Vlastní čísla matice \mathbf{H}_J řádu $(N-1)^2$ jsou dána vzorci

$$\lambda^{(m,n)} = \frac{1}{2}(\cos m\pi h + \cos n\pi h), \quad h = \frac{1}{N}, \quad m, n = 1, 2, \dots, N-1,$$

a složky odpovídajících vlastních vektorů vzorci

$$V_{ij}^{(m,n)} = \sin im\pi h \sin jn\pi h, \quad i, j = 1, 2, \dots, N-1.$$

Pro spektrální poloměr matice \mathbf{H}_J pak vyjde

$$\rho(\mathbf{H}_J) = \cos \pi h = 1 - O(h^2).$$

Ze vzorce (10.5.3) dostaneme

$$\rho(\mathbf{H}_S) = \cos^2 \pi h = 1 - O(h^2).$$

Pro superrelaxační metodu s optimálním parametrem platí ([22])

$$\rho(\mathbf{H}_{\omega_{\text{opt}}}) = \frac{\cos^2 \pi h}{(1 + \sin \pi h)^2} = 1 - O(h).$$

Např. když $h = 1/128$ (soustava (7.2.4) má 127^2 rovnic), bude $K_J \approx 23\,000$, $K_S \approx 11\,500$, $K_{\omega_{\text{opt}}} \approx 140$ pro $q = 3$. Tato čísla nám ukazují, kolik iterací musíme provést, abychom počáteční chybu zmenšili tisíckrát (zlepšení aproximace řešení o 3 desetinná místa). Podotkněme, že pro tuto volbu h je $\rho(\mathbf{H}_S) = 0,999\,40$, $\omega_{\text{opt}} = 1,9521$ a $\rho(\mathbf{H}_{\omega_{\text{opt}}}) = 0,952\,09$.

Praktické zkušenosti ukazují, že uvedený poměr mezi efektivitou uvedených tří metod zůstává zachován i u obecnějších eliptických úloh. Je třeba vidět, že soustavy diferenciálních rovnic získané při řešení okrajové úlohy pro Poissonovu rovnici na elementárních oblastech se dají mnohem efektivněji řešit speciálními přímými metodami. Popsané iterační metody nacházejí proto své aplikace především při řešení eliptických úloh na oblastech složitého tvaru a úloh pro rovnice s proměnnými koeficienty.

10.6. Metoda více sítí. V současné době se pro rozsáhlé soustavy algebraických rovnic vzniklých diskretizací eliptických úloh používá rychlá iterační metoda, která k realizaci jednoho iteračního kroku používá více síťových rovnic na různých úrovních diskretizace téže úlohy. Pokusíme se vyložit princip metody.

Nechť soustavy

$$(10.6.1) \quad \begin{aligned} \mathbf{A}_h \mathbf{U}_h &= \mathbf{F}_h, \\ \mathbf{A}_{2h} \mathbf{U}_{2h} &= \mathbf{F}_{2h}, \end{aligned}$$

vznikly diskretizací téže standardní eliptické úlohy a nechť $\mathbf{U}_h^{(k-1)}$ je nějaká aproximace přesného řešení \mathbf{U}_h . Provedeme několik kroků relaxační metodou (viz odst. 10.2) a získáme tak nové iterační přiblížení $\tilde{\mathbf{U}}_h$. Snadno se ukáže, že pak je

$$(10.6.2) \quad \tilde{\mathbf{U}}_h = \mathbf{S}_1 \mathbf{U}_h^{(k-1)} + \mathbf{G}_1 \mathbf{F}_h,$$

kde matice \mathbf{S}_1 , \mathbf{G}_1 lze vyjádřit pomocí matic \mathbf{H} a \mathbf{G} z odst. 10.1. Čtenář možná ze zkušenosti ví, že několik prvních iterací relaxační metodou zmenší výrazně *defekt* $\mathbf{r}_h = \mathbf{A}_h \tilde{\mathbf{U}}_h - \mathbf{F}_h$, ale pak je konvergence (při malých h) pomalá. Kdybychom vyřešili *defektovou rovnici* $\mathbf{A}_h(\tilde{\mathbf{U}}_h - \mathbf{U}_h) = \mathbf{r}_h$ a odečetli její řešení od $\tilde{\mathbf{U}}_h$, dostali bychom přesné řešení \mathbf{U}_h . To je však pouze teoretická úvaha, praktický — a efektivní — postup vypadá jinak.

Označme W^H prostor síťových funkcí, $H = h, 2h$. Definujeme zobrazení *restrikce* $I_h^{2h}: W^h \rightarrow W^{2h}$ ($\dim W^{2h} \ll \dim W^h$), které vektoru \mathbf{r}_h přiřadí vektor $\mathbf{r}_{2h} = I_h^{2h} \mathbf{r}_h$. Určíme řešení \mathbf{V}_{2h} defektové rovnice $\mathbf{A}_{2h} \mathbf{V}_{2h} = \mathbf{r}_{2h}$. Vektor \mathbf{V}_{2h} lze do jisté míry chápat jako obraz (v zobrazení I_h^{2h}) řešení defektové rovnice $\mathbf{A}_h(\tilde{\mathbf{U}}_h - \mathbf{U}_h) = \mathbf{r}_h$. Definujeme nyní zobrazení *prolongace* $I_{2h}^h: W^{2h} \rightarrow W^h$ a určíme $\mathbf{V}_h = I_{2h}^h \mathbf{V}_{2h}$. Odečtením *korekce* \mathbf{V}_h od aproximace $\tilde{\mathbf{U}}_h$ dostaneme

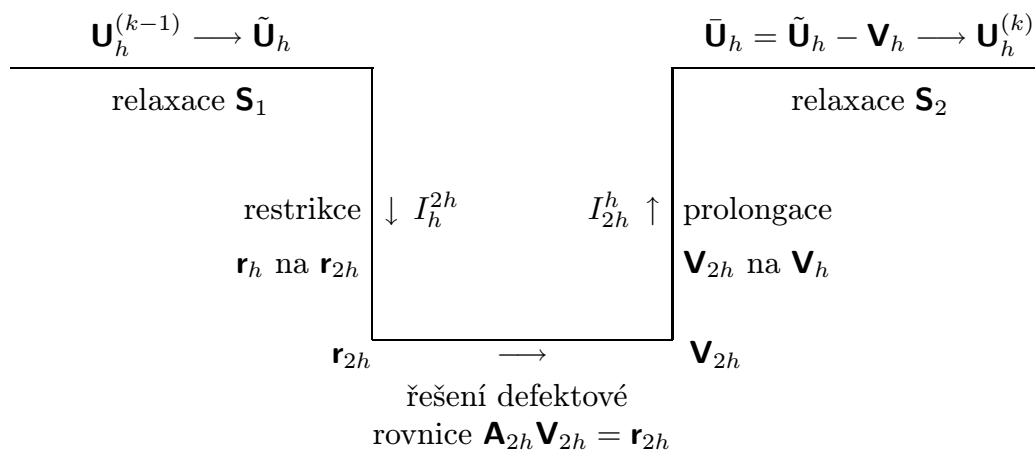
$$(10.6.3) \quad \bar{\mathbf{U}}_h = \tilde{\mathbf{U}}_h - \mathbf{V}_h.$$

Závěrem provedeme opět několik kroků relaxační metodou a výsledek zapíšeme jako

$$(10.6.4) \quad \mathbf{U}^{(k)} = \mathbf{S}_2 \bar{\mathbf{U}}_h + \mathbf{G}_2 \mathbf{F}_h.$$

Popsaná iterační metoda se nazývá *metoda dvou sítí* (TGM, tj. two-grid method). Jsou-li základem analogického iteračního procesu soustavy na více úrovních (více soustav typu (10.6.1)), hovoříme o *metodě více sítí* (MGM — multigrid method). Při realizaci procesu se počet úrovní adaptivně mění, aby bylo možné dosáhnout aproximace řešení \mathbf{U}_h s předem zadanou přesností a minimalizovaly se nároky na dobu výpočtu.

Schematicky lze jeden iterační krok metody TGM znázornit takto:



V teorii se ukazuje, že iterační proces metody více sítí dává mnohem rychlejší konvergenci než samotná relaxační metoda v něm použitá a že rychlost konvergence prakticky nezávisí na velikosti h . Podrobnější informace lze nalézt např. v [1].

11. Otázky konvergence a stability. Výběr metody

11.1. Úvod. V tomto článku chceme čtenáři ukázat, jakými postupy se teoreticky studuje konvergence přibližných řešení k přesnému řešení dané okrajové úlohy. Zaměřujeme se zde na lineární okrajové úlohy jak pro obyčejné diferenciální rovnice, tak pro parciální diferenciální rovnice eliptického typu. Tyto úlohy mají totiž celou řadu společných rysů a také metodika vyšetřování konvergence je u nich podobná.

V závěru článku se pokusíme shrnout charakteristické výhody a nevýhody metod popsaných v této kapitole, totiž diferenčních metod a metody konečných prvků.

11.2. Aproximace diferenciální úlohy diferenční úlohou. Při výkladu diferenčních metod (články 3 a 7) jsme na konkrétních úlohách popsali aproximaci dané okrajové úlohy příslušnou diferenční (diskrétní) úlohou. Pokusíme se vztah obou úloh zaznamenat obecněji.

Danou lineární okrajovou úlohu zapíšeme symbolicky ve tvaru

$$(11.2.1) \quad Lu = F.$$

Tímto způsobem označujeme nejen diferenciální rovnici, ale také příslušné okrajové podmínky. Tak např. u okrajové úlohy

$$(11.2.2) \quad \begin{aligned} -u'' + q(x)u &= f(x), & x \in (0, 1), \\ u(0) &= g_0, & u(1) = g_1, \end{aligned}$$

bude

$$(11.2.3) \quad Lu \equiv \begin{Bmatrix} -u'' + q(x)u \\ u(0) \\ u(1) \end{Bmatrix}, \quad F \equiv \begin{Bmatrix} f \\ g_0 \\ g_1 \end{Bmatrix}.$$

U okrajové úlohy

$$(11.2.4) \quad \begin{aligned} -\operatorname{div}(p(\mathbf{x}) \operatorname{grad} u) + q(\mathbf{x})u &= f(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Omega, \\ u &= g & \text{na } \partial\Omega, \end{aligned}$$

bude

$$(11.2.5) \quad Lu \equiv \begin{Bmatrix} -\operatorname{div}(p(\mathbf{x}) \operatorname{grad} u) + q(\mathbf{x})u \\ u|_{\partial\Omega} \end{Bmatrix}, \quad F \equiv \begin{Bmatrix} f \\ g \end{Bmatrix}.$$

Předpokládáme, že úloha (11.2.1) má jediné řešení u . U diferenčních metod obvykle tímto řešením rozumíme řešení klasické.

Při studiu vlastností diferenčních metod se prakticky zajímáme pouze o hodnoty funkcí v uzlech zvolené sítě \mathcal{S} . Pro zjednodušení našich úvah budeme předpokládat, že i pro parciální diferenciální rovnice charakterizujeme síť jediným parametrem h , který je roven kroku sítě ve všech proměnných. Vektor hodnot přibližného řešení v uzlech sítě \mathcal{S} značíme U_h , kdežto u_h bude označovat vektor hodnot přesného řešení dané úlohy v uzlech sítě. Vektory U_h , u_h budeme interpretovat také jako *síť o v é f u n k c e*, tj. funkce diskrétního argumentu, definované na \mathcal{S} .

Aproximací úlohy $Lu = F$ diferenční metodou dostáváme její diskrétní obdobu

$$(11.2.6) \quad L_h U_h = F_h.$$

Pro úlohu (11.2.2) a síť z odst. 3.2.1 bude

$$(11.2.7) \quad L_h U_h \equiv \begin{cases} -h^{-2}(U_{i-1} - 2U_i + U_{i+1}) + q(x_i)U_i \\ i = 1, 2, \dots, N-1, \\ U_0 \\ U_N \end{cases},$$

$$F_h \equiv \begin{cases} f(x_i), i = 1, 2, \dots, N-1 \\ g_0 \\ g_1 \end{cases}.$$

Pro okrajovou úlohu z odst. 7.2.1,

$$(11.2.8) \quad \begin{aligned} -(u_{xx} + u_{yy}) &= f(x, y), & (x, y) \in \Omega = (0, 1) \times (0, 1), \\ u(x, y) &= g(x, y), & (x, y) \in \partial\Omega, \end{aligned}$$

jsme sestrojili diskrétní aproximaci typu (11.2.6), v níž

$$(11.2.9) \quad L_h U_h \equiv \begin{cases} -h^{-2}(U_{ij} - U_{i+1,j} - U_{i-1,j} - U_{i,j-1} - U_{i,j+1}) \\ i, j = 1, 2, \dots, N-1, \\ U_{ij}, (x_i, y_j) \in \partial\Omega, \end{cases},$$

$$F_h \equiv \begin{cases} f(x_i, y_j), i, j = 1, 2, \dots, N-1 \\ g(x_i, y_j), (x_i, y_j) \in \partial\Omega \end{cases}.$$

Připomeňme, že vektor U_h je zde z formálních důvodů dán nejen hledanými, ale i danými hodnotami přibližného řešení (na rozdíl od významu symbolu \mathbf{U}_h v rovnicích typu $\mathbf{A}_h \mathbf{U}_h = \mathbf{F}_h$).

Víme již z odst. 3.2.3, že přesné řešení u úlohy $Lu = F$ obecně nesplňuje vztah (11.2.6). Platí

$$(11.2.10) \quad L_h u_h = F_h + d_h,$$

kde síťová funkce d_h (nebo její nějaká vektorová norma $\|d_h\|$) se nazývá *diskretizační chyba* nebo *chyba aproximace*.

Říkáme, že $L_h U_h = F_h$ je *konzistentní aproximace* úlohy $Lu = F$, jestliže se v limitě při $h \rightarrow 0$ diskretizační chyba anulují, tj. platí-li

$$(11.2.11) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \|L_h u_h - F_h\| = 0.$$

Pokud je dokonce

$$(11.2.12) \quad \|L_h u_h - F_h\| = O(h^m),$$

říkáme, že *aproximace* nebo *konzistence* je *řádu* m .

V odst. 3.2.3 jsme ukázali (vztah (3.2.20)), že diskrétní úloha (11.2.6), (11.2.7) je konzistentní aproximací úlohy (11.2.2) a že aproximace je řádu druhého, pokud $u \in C^4$. Podobně lze pro úlohu (11.2.8) ukázat [27], že při diferenční aproximaci podle (11.2.9) platí (pro $u \in C^4$)

$$\|L_h u_h - F_h\| = \max_S |L_h u_h - F_h| \leq \frac{1}{6} h^2 \max_{x \in \Omega} \left\{ \left| \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right|, \left| \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \right| \right\}.$$

Jde tedy opět o konzistentní aproximaci druhého řádu. V obou těchto případech o řádu aproximace úlohy rozhodoval řád diskretizační chyby, s níž jsme aproximovali diferenciální rovnici (okrajové podmínky byly splněny přesně). Je přirozené, že u jiných okrajových úloh (zejména u eliptických úloh na křivočarých oblastech) bude řád aproximace záviset také na způsobu aproximace okrajových podmínek.

Odhady diskretizační chyby jsou většinou založeny na užití Taylorova rozvoje. Protože přesné řešení okrajové úlohy předem neznáme, postupujeme zpravidla tak, že se stanoví určitá třída funkcí, do které řešení patří, a odhad se provede pro obecnou funkci z této třídy. Získaný odhad pak samozřejmě platí i pro přesné řešení dané okrajové úlohy. Řád aproximace závisí nejen na dané okrajové úloze a způsobu diskretizace, ale také na třídách funkcí, které uvažujeme (tj. na vlastnostech řešení dané okrajové úlohy) a na volbě normy ve vztahu (11.2.12). Obecně se dá říci, že čím širší třídu funkcí bereme v úvahu (tj. čím slabší požadavky na funkce klademe), tím nižší bude řád aproximace.

Z toho, že diskretizační chyba je malá, ještě obecně *n e p l y n e* malost chyby přibližného řešení. Jsme zde v podobné situaci jako v lineární algebře, kdy při řešení soustavy lineárních rovnic $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ malost rezidua $\mathbf{r} = \mathbf{b} - \mathbf{Ax}$ ještě obecně nezaručuje, že \mathbf{x} je dobrým přiblížením přesného řešení.

11.3. Konvergence a chyba diferenční metody. Jedna z hlavních otázek, která nás při teoretickém studiu diferenčních metod zajímá, je, zda se při zjemňování sítě, tj. $h \rightarrow 0$, budou získané hodnoty přibližného řešení U_h blížit k hodnotám přesného řešení u_h . I pro praktické použití diferenčních metod je důležité vědět, zda jsou si vektory u_h a U_h v nějakém vhodném smyslu blízké. Vzdálenost vektorů u_h a U_h (síťových funkcí) měříme normou jejich rozdílu $\|u_h - U_h\|$. Vektoru $u_h - U_h$ (někdy jeho normě $\|u_h - U_h\|$) říkáme *chyba přibližného řešení* nebo *chyba metody*.

Pokud jde o volbu normy síťových funkcí, záleží tu do značné míry na naší libovůli s tím, že se norma zpravidla volí tak, aby při $h \rightarrow 0$ přecházela v normu některého vhodně vybraného prostoru funkcí spojitého argumentu. Velmi často se používá tzv. *stejnomořná* neboli *Čebyševova norma*, která je pro síťovou funkci y_h definovanou na \mathcal{S} dána vztahem

$$\|y_h\|_{\max} = \max_i |y_{h,i}|,$$

kde $y_{h,i}$ je hodnota síťové funkce y_h v i -tém uzlu (při číslování uzlů jedním indexem). Diskrétní obdobou L_2 -normy je

$$\|y_h\|_2 = \left(\sum_i h y_{h,i}^2 \right)^{1/2}.$$

Je samozřejmě žádoucí, aby přibližné řešení bylo blízké přesnému řešení v co nejsilnější normě. Tak např. v úlohách popisujících vlastnost konstrukcí zaručuje malost deformací ve stejnoměrné normě trvanlivost konstrukce, kdežto v L_2 -normě nikoliv. Na druhé straně se vyšetřování konvergence diferenčních metod dá snáze provádět ve slabších normách.

Definice pojmu konvergence přibližného řešení je nyní zcela přirozená. Řekneme, že přibližné řešení U_h získané některou diferenční metodou *konverguje* k přesnému řešení u dané okrajové úlohy, jestliže

$$(11.3.1) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \|u_h - U_h\| = 0.$$

Pokud navíc při $h \rightarrow 0$ platí

$$(11.3.2) \quad \|u_h - U_h\| = O(h^k), \quad k > 0,$$

říkáme, že *metoda je řádu k* (nebo také, že *konvergence je řádu k*).

Ke konvergenci metody nestačí zaručit konzistenci aproximace diferenční úlohy diferenční úlohou. Je ještě třeba, aby diferenční metoda byla stabilní.

11.4. Stabilita diferenčních metod. Mějme okrajovou úlohu $Lu = F$ a nechť $L_h U_h = F_h$ je příslušná diskrétní úloha. Chyba aproximace (diskretizační chyba) d_h je definována vztahem $L_h u_h = F_h + d_h$. Odečteme-li od sebe poslední dva vztahy a uvážíme-li, že obě úlohy jsou lineární, obdržíme vztah

$$(11.4.1) \quad L_h(u_h - U_h) = d_h,$$

který udává souvislost mezi diskretizační chybou d_h a chybou metody $u_h - U_h$ (chyba metody je tedy rovna řešení diferenční úlohy s pravou stranou rovnou diskretizační chybě).

Je-li daná diskretizační metoda konzistentní, je $\lim_{h \rightarrow 0} \|d_h\| = 0$. K tom, aby z malosti diskretizační chyby plynula malost chyby přibližného řešení, zřejmě stačí, bude-li diferenční úloha (11.4.1) mít pro všechna h řešení a toto řešení bude řádově stejné velikosti jako pravá strana d_h . Všimneme-li si ještě, že úlohy $L_h(u_h - U_h) = d_h$ a $L_h U_h = F_h$ jsou po formální stránce zcela stejné, pochopíme, že popsanou vlastnost uvažované diferenční metody lze vyslovit následujícím způsobem.

Řekneme, že diferenční metoda vedoucí k úloze $L_h U_h = F_h$ je *stabilní*, jestliže řešení této úlohy spojitě závisí na hodnotách síťové funkce F_h a tato závislost je stejnoměrná vzhledem k h . Jinými slovy, existuje konstanta C nezávislá na h tak, že pro libovolnou síťovou funkci U_h platí nerovnost

$$(11.4.2) \quad \|U_h\| \leq C \|L_h U_h\|.$$

Je-li tedy U_h řešením úlohy $L_h U_h = F_h$, vypovídá nerovnost (11.4.2) také o tom, jak se případné poruchy v hodnotách F_h projeví v řešení U_h . Skutečně, porušíme-li F_h o δF_h , takže ve skutečnosti neřešíme úlohu (11.2.6), nýbrž úlohu $L_h \tilde{U}_h = F_h + \delta F_h$, platí pro rozdíl $\tilde{U}_h - U_h$ vztah $L_h(\tilde{U}_h - U_h) = \delta F_h$. Je-li metoda stabilní, máme nyní podle (11.4.2) odhad $\|\tilde{U}_h - U_h\| \leq C \|\delta F_h\|$. Malé poruchy v pravé straně tedy u stabilní diferenční metody vyvolají malé změny přibližného řešení. Pokud metoda není stabilní, mohou malé poruchy v datech vyvolat velké změny ve vypočítaném přibližném řešení. Konvergence přibližného řešení k řešení přesnému pak není možná.

Protože síťová funkce $F_h = L_h U_h$ v úloze (11.2.6) reprezentuje jak pravou stranu rovnice, tak pravou stranu okrajových podmínek, hovoříme někdy o *stabilitě vzhledem k pravé straně a okrajovým podmínkám*. U počátečně-okrajových úloh pro evoluční rovnice rozlišujeme navíc *stabilitu vzhledem k počáteční podmínce*.

Vztah (11.2.6) představuje u lineárních úloh vlastně soustavu lineárních algebraických rovnic pro hodnoty přibližného řešení a L_h je matice této soustavy. Je-li tato matice regulární (což předpokládáme), je $U_h = L_h^{-1} F_h$ a k důkazu korektnosti pak stačí dokázat stejnoměrnou ohraničenost normy inverzní matice L_h^{-1} vzhledem k h , tj. odhad $\|L_h^{-1}\| \leq K$ (srov. k tomu odst. 3.2.3). Takový přímočarý postup však vede k cíli jen zřídka, a proto se k důkazům stability používá celá řada jiných metod. Namátkou jmenujme využití principu maxima (opět viz odst. 3.2.3), Fourierovu metodu, metodu energetických nerovností aj. Důkazy stability jsou podstatně komplikovanější než důkazy konzistence. Poměrně podrobný výklad této problematiky pro parciální diferenciální rovnice lze nalézt např. v [10].

11.5. Laxova věta. Je-li diferenční metoda stabilní, pak z její konzistence bezprostředně plyne konvergence získaného přibližného řešení k řešení přesnému. To je obsahem následujícího tvrzení známého jako *Laxova věta*.

11.5.1. Věta. Je-li diferenční metoda (11.2.6) stabilní a aproximuje okrajovou úlohu (11.2.1) s řádem m , pak přibližné řešení U_h při $h \rightarrow 0$ konverguje k řešení u úlohy (11.2.1) a platí odhad

$$(11.5.1) \quad \|u_h - U_h\| = O(h^m).$$

Důkaz. Z (11.4.2) dostaneme podle (11.4.2) (stabilita) odhad $\|u_h - U_h\| \leq C\|d_h\|$. Podle (11.2.12) (konzistence) je ale $\|d_h\| = O(h^m)$, takže celkově máme $\|u_h - U_h\| = O(h^m)$ a věta je dokázána.

11.5.2. Poznámky. Věta obdobná k větě 11.5.1 se dá dokázat i pro nelineární úlohy [9]. U úloh pro parciální diferenciální rovnice může být řád aproximace vzhledem k různým proměnným různý. Laxova věta pak může dát pro chybu metody např. odhad typu $O(\tau + h^2)$, kde τ je krok sítě v proměnné t , h krok sítě v proměnné x .

Je-li diferenční metoda stabilní a diskretizační chyba má asymptotický rozvoj v mocninách h , bývá možné odvodit takový asymptotický rozvoj i pro chybu přibližného řešení. Existence asymptotického rozvoje umožňuje zvyšovat přesnost získaného řešení opakovanou Richardsonovou extrapolací ([9],[20]).

11.6. Příklad. Vraťme se ještě jednou k okrajové úloze (11.2.2), kterou jsme se zabývali v odst. 3.2. Úlohu jsme tam diskretizovali metodou konečných diferencí, získaná diferenční aproximace byla druhého řádu. Pro složky diskretizační chyby platil odhad (3.2.20). Za předpokladu, že koeficient $q(x)$ v dané diferenciální rovnici je kladný, jsme v odst. 3.2.3 vlastně dokázali stabilitu metody (odhad (3.2.19)). Konečným výsledkem byl odhad (3.2.21), podle něhož je stejnoměrná norma chyby metody velikosti $O(h^2)$. Celý postup tak nebyl ničím jiným než aplikací Laxovy věty 11.5.1 k důkazu toho, že uvažovaná metoda je konvergentní, druhého řádu.

11.7. Odhad chyby Galerkinovy metody. S Galerkinovou metodou jsme se setkali v čl. 4, 5 a 8, 9. Stejně jako při úvodním výkladu této metody budeme i zde předpokládat, že množina přípustných funkcí V_g splývá s prostorem testovacích funkcí V . Aby náš výklad byl dostatečně obecný, nebudeme V blíže specifikovat, předpokládáme pouze, že je to Hilbertův prostor s normou $\|\cdot\|_V$.

Je-li $u \in V$ řešení úlohy (srov. odst. 4.3.2, 8.4)

$$(11.7.1) \quad a(u, v) = F(v) \quad \forall v \in V,$$

potom přibližné Galerkinovo řešení $u^{(N)} \in V^{(N)}$ je definováno rovností

$$(11.7.2) \quad a(u^{(N)}, v^{(N)}) = F(v^{(N)}) \quad \forall v^{(N)} \in V^{(N)},$$

kde $V^{(N)}$ je N -dimenzionální podprostor prostoru V přípustných funkcí tvaru

$$v^{(N)} = \sum_{n=1}^N \alpha_n v_n.$$

Předpokládáme, že integrály vystupující v (11.7.2) (viz tab. 4, odst. 4.2.6, a tab. 6, odst. 6.2.7) jsou vypočteny přesně.

Chybou metody je funkce

$$(11.7.3) \quad e^{(N)} = u - u^{(N)}.$$

Chceme zjistit, za jakých okolností Galerkinova metoda *konverguje*, tj. platí

$$(11.7.4) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \|e^{(N)}\|_V = 0,$$

případně odhadnout normu chyby metody. Jde tu o problém jiného charakteru než u diferenčních metod a také důkazová technika je jiná. Věty o konvergenci jsou založeny na tvrzení, které se často nazývá *Céaovo lemma*. Toto tvrzení umožňuje převést otázku konvergence přibližného řešení na otázku, jak přesně lze funkcemi z prostorů $V^{(N)}$ aproximovat funkce z prostoru V . Zároveň umožňuje získat odhad chyby metody. Céaovo lemma tvoří obsah následující věty.

11.8. Věta (*Céaovo lemma*). *Nechť $a(u, v)$ je omezená eliptická bilineární forma na V , tj. nechť pro $u, v \in V$ platí (viz odst. 6.2.8)*

$$|a(u, v)| \leq C_1 \|u\|_V \|v\|_V, \quad a(v, v) \geq C_2 \|v\|_V^2, \quad C_1 > 0, \quad C_2 > 0.$$

Nechť $F(v)$ je omezená lineární forma na V , tj. nechť $|F(v)| \leq C_3 \|v\|_V$ pro $v \in V$. Dále nechť u je řešení úlohy (11.7.1), $u^{(N)}$ řešení úlohy (11.7.2), tj. přibližné Galerkinovo řešení.

Potom platí odhad

$$(11.8.1) \quad \|u - u^{(N)}\|_V \leq \frac{C_1}{C_2} \inf_{v^{(N)} \in V^{(N)}} \|u - v^{(N)}\|_V.$$

Je-li navíc forma $a(u, v)$ symetrická, platí

$$(11.8.2) \quad \|u - u^{(N)}\|_V \leq \left(\frac{C_1}{C_2}\right)^{1/2} \inf_{v^{(N)} \in V^{(N)}} \|u - v^{(N)}\|_V.$$

Důkaz věty není složitý a lze jej nalézt např. v [1], [6].

11.9. Konvergence Galerkinovy a Ritzovy metody. Z věty 11.8 vidíme, že k tomu, abychom získali odhad chyby Galerkinovy nebo Ritzovy metody, stačí nalézt pro obecné $u \in V$ odhad veličiny

$$(11.9.1) \quad \inf_{v^{(N)} \in V^{(N)}} \|u - v^{(N)}\|_V.$$

Vidíme tedy, že čím lépe jsme schopni aproximovat libovolný prvek prostoru V prvky z prostoru $V^{(N)}$, tím menší bude norma chyby přibližného řešení získaného konkrétní aplikací Galerkinovy nebo Ritzovy metody.

Chceme-li dokázat konvergenci Galerkinovy nebo Ritzovy metody při $N \rightarrow \infty$, stačí díky větě 11.8 zaručit, že posloupnost podprostorů $\{V^{(N)}\}_{N=1}^{\infty}$ je taková, že pro každé $u \in V$ je

$$(11.9.2) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \inf_{v^{(N)} \in V^{(N)}} \|u - v^{(N)}\|_V = 0.$$

Bude tomu tak např. tehdy, budou-li použité báze funkce splňovat podmínky, kladené na ně v odst. 4.3.1 a 8.4.

Z toho, co jsme uvedli, je vidět, že důkaz konvergence Galerkinovy nebo Ritzovy metody se provádí ve dvou krocích:

1. Ověření toho, že řešená úloha splňuje předpoklady věty 11.8.
2. Důkaz toho, že uvažovaná realizace Galerkinovy nebo Ritzovy metody splňuje aproximační podmínku (11.9.2).

Některé konkrétní požadavky zaručující, že standardní okrajová úloha splňuje předpoklady věty 11.8, jsou pro parciální diferenciální rovnice uvedeny v odst. 6.2.9 a tvoří část předpokladů věty 4.2.5 pro obyčejné diferenciální rovnice. Splnění aproximační podmínky (11.9.2) je v metodě konečných prvků zaručeno větami o aproximaci v odst. 5.1.5, 5.1.6, 5.1.8 a 9.5. Podrobné důkazy konvergence a odhady chyby přibližného řešení i pro $V \neq V_g$ najde čtenář např. v [6] a pro některé případy v [19].

11.10. Diferenční metody a metoda konečných prvků. Klasická Galerkinova nebo Ritzova metoda může dát inženýrovi vcelku levně a snadno získatelnou představu o řešení dané okrajové úlohy, a to zejména tehdy, dokáže-li výstižně charakterizovat prostor přípustných funkcí, tj. zvolit báze funkce. Typickou metodou Galerkinova typu určenou pro používání na počítači je však metoda konečných prvků (MKP). Během posledních asi dvaceti let si MKP získala řadu nadšených příznivců a úspěšně soutěží s diferenčními metodami (DM), které stále zůstávají jejím životaschopným konkurentem. Pokusíme se porovnat hlavní výhody a nevýhody obou těchto metod.

Mezi DM a MKP je řada podobností a řada rozdílů. Především, DM vycházejí přímo z diferenciální rovnice, kdežto MKP se opírá o slabou nebo variační formulaci, ve které často vystupují veličiny, mající bezprostřední fyzikální význam (např. energie). To může vést k tomu, že se MKP snáze aplikuje.

Obě metody nakonec vedou na soustavu algebraických rovnic. Sestavení těchto rovnic je u DM poměrně jednoduché, kdežto u MKP je to teoreticky i algoritmicky složitější záležitost. Programy pro MKP jsou proto také složitější než programy pro DM. Je však třeba mít na paměti, že moderní programové systémy MKP jsou vytvářeny tak, aby jimi bylo možné řešit poměrně široké třídy úloh. Programy založené na DM mívají podle našeho názoru méně obecný charakter, což přispívá k jejich jednoduchosti.

Tvar oblasti (zakřivené hranice) působí u DM často větší problémy než u MKP, kde lze k aproximaci hranice snadno použít jak např. trojúhelníkové prvky, tak prvky s křivočarou hranicí. Triangulaci oblasti lze provádět v MKP s větší flexibilitou a přizpůsobením řešenému problému než umožňuje volba sítě v DM. Pokud jde o vlastnosti popisovaného materiálu, mohou být u MKP v každém použitém prvku jiné. U metody konečných diferencí činí rozhraní jisté potíže, metoda integrálních identit však umožňuje tyto potíže vyřešit. Nehomogenní Dirichletovy podmínky se snáze zpracovávají DM, Neumannovy a Newtonovy podmínky naproti tomu MKP.

U diferenčních metod se mnohem snáze pracuje s aproximacemi vyšších řádů. Chceme-li takové aproximace použít u MKP, znamená to používat v každém prvku polynomy vyšších stupňů, a to vede k velkému počtu parametrů a pracnosti algoritmu. Naproti tomu se nám zdá, že teoretické zkoumání konvergence je u MKP méně pracné. Důkaz konvergence tu může být proveden obecně pro celou třídu úloh (vychází se z Céaova lemmatu a aproximačních vlastností zvolených bázeových funkcí). U diferenčních metod se konzistence a stabilita musí analyzovat pro každý konkrétní typ úlohy zvlášť.

Na otázku, které z uvedených dvou metod dát přednost, je tedy těžké odpovědět. Výběr metody je často ovlivněn osobním vkusem uživatele, jeho zkušenostmi a také programovým vybavením, které má k dispozici. Zdá se nám, že MKP se preferuje především u stacionárních úloh, kdežto DM u úloh evolučních. Mnozí uživatelé obě metody užívají ve vzájemné kombinaci a snaží se výhody jedné z nich spojit s výhodami druhé. Tak se např. u evolučních úloh MKP používá k diskretizaci prostorových proměnných, kdežto integrace v čase se provádí DM (místo toho, aby se užily „časoprostorové“ konečné prvky). Variační přístup MKP se na druhé straně často aplikuje při odvozování symetrických diferenčních rovnic pro DM. Na závěr poznamenejme, že u jednoduchých okrajových úloh s Dirichletovými okrajovými podmínkami mohou obě metody vést na zcela stejnou soustavu síťových rovnic, takže mezi nimi není žádný rozdíl.

Kapitola III

Numerické řešení počátečně-okrajových úloh pro parciální diferenciální rovnice parabolického a hyperbolického typu (evoluční rovnice)

12. Úlohy pro parciální diferenciální rovnice parabolického typu

12.1. Parciální diferenciální rovnice parabolického typu. Rovnice parabolického typu se vyskytují při řešení úloh z oblasti vedení tepla, chemické difúze a četných jiných oborů. Nejčastěji se setkáme s rovnicemi tvaru

$$(12.1.1) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + L(u) = f,$$

kde t je proměnná, označující čas, L je (lineární či nelineární) eliptický parciální diferenciální operátor druhého řádu v prostorových proměnných (viz [26]; příkladem je třeba $L(u) = -\Delta u$, kde Δ je Laplaceův operátor), f je daná funkce popisující hustotu rozložení zdrojů a u je funkce hledaná. Numerické metody, které vyložíme v čl. 13 a 14, budou určeny zejména pro rovnici tvaru (12.1.1) s lineárním operátorem L . O metodách pro řešení nelineárních úloh se zmíníme v některých poznámkách. V přehledu teorie se nadále zaměříme na lineární úlohy. Všimněme si ještě toho, že na rozdíl od rovnic eliptického typu je (12.1.1) *evoluční rovnice*. Má totiž nestacionární charakter, popisuje průběh jistého procesu v čase.

Typickým příkladem lineární parabolické rovnice tvaru (12.1.1) je rovnice (srov. (6.1.6))

$$(12.1.2) \quad u_t - \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) = f,$$

kteřá se používá při modelování celé řady fyzikálních jevů. Rovnici (12.1.2) se zpravidla říká *rovnice pro vedení tepla*, *teplotní rovnice* nebo také *rovnice difúze*. Koeficient p může být konstanta nebo funkce prostorových proměnných, může také záviset na u , na $\operatorname{grad} u$ nebo na obou těchto veličinách.

O teorii parciálních diferenciálních rovnic parabolického typu se lze podrobněji poučit v [54].

12.2. Rovnice pro vedení tepla. Úloha vedení tepla v tenké tyči, jejíž teplota závisí jen na souřadnici x a čase t a v níž se teplo šíří pouze ve směru osy x , vede na rovnici ([54])

$$(12.2.1) \quad \rho c \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial u}{\partial x} \right) + f(x, t).$$

Přitom $u = u(x, t)$ je teplota, λ je součinitel tepelné vodivosti, c je měrná tepelná kapacita, ρ hustota a $f(x, t)$ popisuje rozložení tepelných zdrojů v tyči. Pokud c a λ závisí

na teplotě, jde o nelineární rovnici. Rovnice (12.2.1) se nazývá *nehomogenní rovnice pro vedení tepla*.

V případě, že λ je konstanta, můžeme rovnici (12.2.1) upravit na tvar

$$(12.2.2) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x, t),$$

kde $a^2 = \lambda/(\rho c)$ a $F = f/(\rho c)$. Koeficient a^2 se někdy nazývá *tepelná difuzivita* nebo *součinitel teplotní vodivosti*. Pokud nejsou v tyči zdroje tepla, máme *homogenní rovnici pro vedení tepla*

$$(12.2.3) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Obdobou rovnice (12.2.2) v \mathbb{R}^3 je rovnice

$$(12.2.4) \quad u_t = a^2 \Delta u + F(x, y, z, t),$$

kde nyní $u = u(x, y, z, t)$ a Δ je Laplaceův operátor, tj. $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$.

12.3. Obecná lineární rovnice parabolického typu. Rovnice z odst. 12.2 a další lineární parabolické rovnice, kterými se budeme zabývat, jsou vesměs speciální případy *obecné lineární rovnice parabolického typu* v \mathbb{R}^n , která má tvar

$$(12.3.1) \quad c(\mathbf{x}, t) \frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(p_{ij}(\mathbf{x}, t) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) - \sum_{i=1}^n \gamma_i(\mathbf{x}, t) \frac{\partial u}{\partial x_i} - q(\mathbf{x}, t)u + f(\mathbf{x}, t),$$

a kde $u = u(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]$. V oboru, na němž rovnici (12.3.1) uvažujeme, přitom předpokládáme, že matice $[p_{ij}]$ je symetrická a pozitivně definitní (srov. (6.2.3)) a že $c(\mathbf{x}, t) \geq c_0 > 0$, kde c_0 je jistá konstanta.

Rovnice (12.3.1) není ovšem ještě nejobecnější rovnicí parabolického typu, neboť její eliptická část má speciální, *divergentní tvar* ([26]). Pro $\gamma_i \equiv 0$, $i = 1, 2, \dots, n$, je příslušný eliptický operátor v *samoadjungovaném tvaru*.

12.4. Příklady. Ukážeme některé modifikace rovnice pro vedení tepla v \mathbb{R} mající tvar (12.3.1).

12.4.1. Předpokládejme, že boční plochy tyče nejsou tepelně izolovány, ale že přes ně probíhá výměna tepla s okolním prostředím o teplotě $u = u_0$, která se řídí Newtonovým zákonem [54]. Pak místo rovnice (12.2.1) máme rovnici

$$(12.4.1) \quad \rho c \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial u}{\partial x} \right) + f(x, t) - \alpha(u - u_0),$$

kde $\alpha > 0$ je součinitel přestupu tepla.

12.4.2. Uvažíme-li konvektivní přenos tepla v tyči, resp. pohyb tyče rychlostí γ ve směru osy x , dospíváme od (12.2.3) k rovnici

$$(12.4.2) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \gamma \frac{\partial u}{\partial x},$$

kteřá je opět speciálním případem (12.3.1).

12.4.3. Rovnice

$$(12.4.3) \quad \frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D(x) \frac{\partial C}{\partial x} \right) - \gamma \frac{\partial C}{\partial x} - \alpha C$$

popisuje chemickou difúzi (v jednorozměrném případě) v situaci, kdy součinitel difúze $d = D(x)$ je funkcí polohy, prostředí se pohybuje ve směru osy x rychlostí γ a částice difundující látky se buď rozpadají nebo rozmnožují rychlostí úměrnou koncentraci $C = C(x, t)$.

12.5. Počátečně-okrajové úlohy pro parabolické rovnice.

Vzhledem k výjimečnému charakteru časové proměnné t se v úlohách pro rovnice parabolického typu zadává p o č á t e č n í p o d m í n k a v čase $t = t_0$ a d á l e o k r a j o v é p o d m í n k y, které mají být splněny na hranici oblasti, kde úlohu uvažujeme, a které jsou obdobné jako u rovnic eliptického typu. Takto formulovaným úlohám pro parabolické rovnice pak říkáme *počátečně-okrajové úlohy*. Tyto úlohy se řeší pro $t \geq t_0$ a mají vůči proměnné t charakter počáteční úlohy, kdežto vzhledem k prostorovým proměnným jde o úlohy okrajové.

Typická počátečně-okrajová úloha pro rovnici parabolického typu je dána následovně. Budiž $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ omezená regulární oblast s hranicí $\partial\Omega$ a označme $Q = \Omega \times (0, T)$, kde $T > 0$ je konstanta. Máme stanovit funkci $u = u(\mathbf{x}, t)$, která v Q vyhovuje parciální diferenciální rovnici (12.3.1), splňuje pro $t = 0$ *počáteční podmínku*

$$(12.5.1) \quad u(\mathbf{x}, 0) = \phi(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega,$$

kde ϕ je daná funkce definovaná na Ω , a pro $\mathbf{x} \in \partial\Omega$ *okrajovou podmínku*

$$(12.5.2) \quad \alpha(\mathbf{x}, t)u + \beta(\mathbf{x}, t) \frac{\partial u}{\partial \nu} = g(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega, \quad 0 < t \leq T,$$

kde (viz též odst. 6.2.1 v druhé části této série učebních textů) α , β a g jsou dané funkce definované na $\partial\Omega \times (0, T)$ a

$$(12.5.3) \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = \sum_{i,j=1}^n p_{ij} n_i \frac{\partial u}{\partial x_j},$$

kde $\mathbf{n} = [n_i]$ je jednotkový vektor vnější normály k $\partial\Omega$. O koeficientech α a β v (12.5.2) je rozumné předpokládat, že $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$ a že $\alpha(\mathbf{x}, t) + \beta(\mathbf{x}, t) \geq c > 0$, kde c je jistá konstanta.

Podobně jako u eliptických rovnic hovoříme i zde o *Dirichletově podmínce* ($\beta = 0$), *Neumannově podmínce* ($\alpha = 0$) a *Newtonově podmínce* ($\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$).

Při formulaci počátečně-okrajových úloh pro parabolické rovnice je velmi podstatné, že řešení hledáme pro $t \geq 0$ (resp. pro $t \geq t_0$, je-li počáteční podmínka předepsána pro $t = t_0$). Dá se totiž ukázat, že počátečně-okrajová úloha s počáteční podmínkou zadanou při $t = 0$, jejíž řešení se hledá pro $z \text{ á p o r n á } t$ (např. pro $0 > t \geq -T$), je **n e k o r e k t n í**. V tomto textu se takovými úlohami zabývat nebudeme.

Poznamenejme ještě, že množinu $Q = \Omega \times (0, T)$ si lze představovat jako „časový válec“, jehož podstavu tvoří oblast Ω , plášť je $\partial\Omega \times (0, T)$ a časová osa t je „kolmá na rovinu podstavy“.

12.6. Příklad. V jednorozměrném případě je Q obdélník v rovině (x, t) . Položíme $Q = (0, 1) \times (0, T)$, $t > 0$. Počátečně-okrajová úloha pro rovnici pro vedení tepla (12.2.3) pak může být zadána např. následujícími podmínkami (viz obr. 38).

V čase $t = 0$ se zadá počáteční podmínka

$$(12.6.1) \quad u(x, 0) = \phi(x), \quad x \in (0, 1),$$

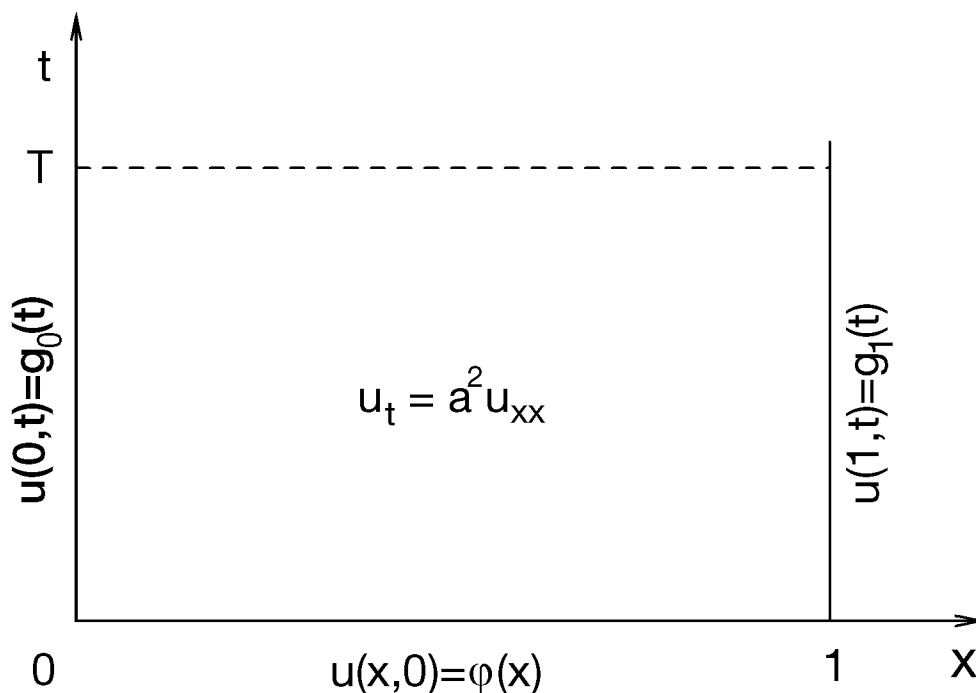
popisující počáteční rozložení teploty v tyči, tj. na intervalu $(0, 1)$. Pro $x = 0$ a $x = 1$ přistupují např. Dirichletovy okrajové podmínky

$$(12.6.2) \quad u(0, t) = g_0(t), \quad u(1, t) = g_1(t), \quad t \in (0, T),$$

kterými se zadává teplota, na níž se udržují oba konce tyče. Neumannovy okrajové podmínky

$$(12.6.3) \quad u_x(0, t) = g_0(t), \quad u_x(1, t) = g_1(t), \quad t \in (0, T),$$

popisují zadaný tok tepla přes oba konce tyče. Obecné Newtonovy podmínky (viz např. odst. 1.2.4 první části tohoto textu) se v daném případě vyskytují např. tehdy, dochází-li na koncích tyče k výměně tepla s okolím, která se řídí Newtonovým zákonem [54].



Obr. 38. Počátečně-okrajová úloha pro rovnici vedení tepla.

Je samozřejmé, že okrajové podmínky zadané v bodech $x = 0$ a $x = 1$ mohou být různých typů. Podobně mohou být ve vícerozměrném případě zadány různé okrajové podmínky na různých částech hranice $\partial\Omega$ (viz též čl. 6 o eliptických úlohách).

12.7. Vlastnosti rovnice pro vedení tepla. Řešení parciálních diferenciálních rovnic parabolického typu mají některé pozoruhodné vlastnosti, které se využívají jak v teorii těchto rovnic, tak při jejich řešení v praxi. V dalších několika odstavcích se zaměříme především na lineární rovnici pro vedení tepla v jedné prostorové proměnné jako na poměrně typického reprezentanta parabolických rovnic. Popsané vlastnosti této rovnice zůstávají v platnosti i pro mnohé rovnice obecnější (viz [54]).

12.7.1 Princip maxima. Uvažujme obdélník $Q = (0, 1) \times (0, T)$ v rovině (x, t) a označme S lomenou čáru složenou z jeho spodní základny $t = 0$ a bočních stran $x = 0$, $x = 1$. Dá se dokázat [54], že každá funkce $u = u(x, t)$, která je spojitá na \bar{Q} , má spojitě derivace u_t a u_{xx} na Q a pro $(x, t) \in Q$ splňuje homogenní tepelnou rovnici (12.2.3), nabývá své maximální a minimální hodnoty v některém bodě lomené čáry S . Platí tedy

$$(12.7.1) \quad \max_{(x,t) \in \bar{Q}} |u(x, t)| = \max_{(x,t) \in S} |u(x, t)|.$$

Tomuto tvrzení se říká *princip maxima*.

Fyzikálně je smysl principu maxima zřejmý a jeho platnost očividná. Ve fyzikální interpretaci totiž jde pouze o to, že teplota tepelně vodivé tyče, v níž nejsou vnitřní zdroje tepla, nemůže nikde být vyšší než maximální teplota, kterou tyč má na krajích nebo v počátečním okamžiku.

Princip maxima má řadu důležitých důsledků. Dá se použít např. k dokazování vět o jednoznačnosti řešení počátečně-okrajových úloh a o spojitě závislosti řešení na počátečních a okrajových podmínkách. Všimněme si například, že pro spojitě řešení Dirichletovy počátečně-okrajové úlohy z příkl. 12.6 podle principu maxima platí

$$\max_{(x,t) \in \bar{Q}} |u(x,t)| = \max\left\{ \max_{x \in \langle 0,1 \rangle} |\phi(x)|, \max_{x \in \langle 0,T \rangle} |g_0(t)|, \max_{x \in \langle 0,T \rangle} |g_1(t)| \right\}.$$

Diskrétní obdoby principu maxima se používají i v teoretické analýze numerických metod pro řešení parabolických rovnic.

Je zřejmé, že pro nehomogenní rovnici pro vedení tepla nemusí princip maxima ve tvaru (12.7.1) již platit. Jeho platnost však lze dokázat pro řadu obecnějších rovnic uvažovaných na obecnějších oblastech (viz [54]). Jako příklad uvádíme rovnici

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(p(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \gamma \frac{\partial u}{\partial x},$$

kde p je funkce spojitě diferencovatelná a kladná na $\langle 0,1 \rangle$ a γ je reálná konstanta.

12.7.2. Podmínky kompatibility. K tomu, aby řešením u počátečně-okrajové úlohy (12.2.1), (12.6.1), (12.6.2) byla funkce spojitá na \bar{Q} , je nutné, aby funkce ϕ z počáteční podmínky a funkce g_0, g_1 z okrajových podmínek byly spojitě na intervalech $\langle 0,1 \rangle$, resp. $\langle 0,T \rangle$ a v bodech $(0,1)$ a $(1,0)$ na sebe „spojitě navazovaly“, tj. aby platilo

$$(12.7.2) \quad \phi(0) = g_0(0), \quad \phi(1) = g_1(0).$$

Podmínkám (12.7.2) se říká *podmínky kompatibility*.

12.7.3. Rychlost šíření tepla a oblast vlivu. Položme si otázku, jak rychle se hodnota funkce ϕ z počáteční podmínky (12.6.1) v bodě x projeví v hodnotách řešení rovnice pro vedení tepla při $t > 0$. Pro tuto úvahu nejsou okrajové podmínky podstatné a stačí uvažovat *počáteční úlohu* pro homogenní rovnici pro vedení tepla, tj. úlohu

$$(12.7.3) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad -\infty < x < +\infty, \quad 0 < t < +\infty,$$

$$(12.7.4) \quad u(x,0) = \phi(x), \quad -\infty < x < +\infty,$$

kde ϕ je spojitá a omezená funkce. Řešením počáteční úlohy (12.7.3), (12.7.4) rozumíme funkci u , spojitou a omezenou v $\mathbb{R} \times \langle 0, +\infty \rangle$, která má spojitě derivace u_t a u_{xx} pro $-\infty < x < +\infty, t > 0$ a splňuje (12.7.3) a (12.7.4).

Dá se dokázat (viz [54]), že takto formulovaná úloha má právě jedno řešení, které je dáno vzorcem

$$(12.7.5) \quad u(x, t) = \frac{1}{2a(\pi t)^{1/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}\right) \phi(\xi) d\xi.$$

Předpokládejme nyní, že na jistém konečném (libovolně malém) intervalu (a, b) platí $\phi(x) > 0$ a že $\phi(x) = 0$ pro $x \in \mathbb{R} - (a, b)$. Ze vzorce (12.7.5) vidíme, že nezávisle na velikosti intervalu (a, b) je při libovolně malém $t > 0$ již hodnota $u(x, t)$ kladná pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Tato vlastnost rovnice pro vedení tepla se dá vyjádřit slovy, že teplo se šíří nekonečnou rychlostí. To ovšem odporuje fyzikální realitě; je to dáno tím, že rovnice pro vedení tepla představuje pouze jistý idealizovaný model skutečného procesu vedení tepla.

Skutečnost, že hodnota řešení rovnice pro vedení tepla v bodě (x, t) , $t > 0$, závisí podle (12.7.5) na hodnotách funkce ϕ z počáteční podmínky na celé ose x , vyjadřujeme také slovy, že *oblast závislosti* bodu (x, t) , $t > 0$, tvoří celá osa x . Protože změna funkce ϕ na libovolně malém intervalu (a, b) na ose x změní hodnoty řešení $u(x, t)$ při $t > 0$ ve všech bodech $x \in \mathbb{R}$, říkáme, že *oblast vlivu* bodu $(x, 0)$ je celá polorovina $t > 0$. Tyto skutečnosti je třeba brát v úvahu i při konstrukci numerických metod pro řešení parabolických rovnic, jak ostatně uvidíme v čl. 13.

Přes paradox s nekonečnou rychlostí šíření tepla se v praxi rovnice pro vedení tepla běžně používá a dobře se osvědčuje. Důvodem je zřejmě skutečnost, že — jak je vidět z tvaru vzorce (12.7.5) — vliv hodnot funkce ϕ v bodech ξ vzdálených od x na hodnoty $u(x, t)$, $t > 0$, je při malých t sice nenulový, ale velmi malý.

12.7.4. Zhlazovací jev. Rovnice parabolického typu (na rozdíl od evolučních rovnic hyperbolického typu) při $t > 0$ zhlazují nespojitosti v počáteční podmínce zadané pro $t = 0$. Lze ukázat [54], že pro spojitou a omezenou funkci ϕ je funkce u daná vztahem (12.7.5) při $t > 0$ nekonečněkrát spojitě diferencovatelná, a to nezávisle na tom, má-li funkce ϕ nějaké derivace či nikoliv. Hladkost řešení počáteční úlohy pro nehomogenní rovnici (12.2.2) je pak určována hladkostí pravé strany F . Tomuto jevu se říká *zhlazovací* nebo *regularizační jev*.

12.8. Klasické řešení počátečně-okrajové úlohy. Pojem klasického řešení osvětlíme opět na Dirichletově úloze pro jednorozměrnou rovnici pro vedení tepla. Mějme tedy počátečně-okrajovou úlohu pro nehomogenní rovnici

$$(12.8.1) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x, t)$$

na $(0, 1) \times (0, T)$, $T > 0$, s počáteční podmínkou

$$(12.8.2) \quad u(x, 0) = \phi(x), \quad x \in (0, 1),$$

a okrajovými podmínkami

$$(12.8.3) \quad u(0, t) = g_0(t), \quad u(1, t) = g_1(t), \quad t \in (0, T).$$

Řešením počátečně-okrajové úlohy (12.8.1) až (12.8.3) rozumíme funkci u proměnných x a t , která je spojitá na $\bar{Q} = \langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, t \rangle$, má na $Q = (0, 1) \times (0, t)$ spojitě derivace u_t a u_{xx} , v Q splňuje rovnici (12.8.1) a vyhovuje počáteční podmínce (12.8.2) a okrajovým podmínkám (12.8.3).

Z definice tohoto *klasického řešení* ihned vyplývá, že pro (klasickou) řešitelnost počátečně-okrajové úlohy je nezbytné, aby funkce ϕ , g_0 a g_1 z počáteční podmínky a okrajových podmínek byly spojitě a splňovaly podmínky kompatibility (12.7.2). Předpokládáme-li kromě toho, že pravá strana rovnice pro vedení tepla F je spojitá na Q a spojitě diferencovatelná podle x v Q , dá se ukázat [54], že počátečně-okrajová úloha (12.8.1) až (12.8.3) má p r á v ě j e d n o ř e š e n í ve smyslu uvedené definice. Toto řešení přitom spojitě závisí na hodnotách zadaných na části S hranice obdélníka Q (úloha je k o r e k t n í).

Požadavky kladené na pravou stranu F lze ještě dále zeslabit. Podobné věty o existenci a jednoznačnosti klasického řešení se dokazují i pro jiné okrajové úlohy a ve více dimenzích.

Při úvahách o h l a d k o s t i řešení počátečně-okrajových úloh se berou v úvahu také podmínky kompatibility vyšších řádů, které v bodech $(0, 0)$ a $(1, 0)$ svazují hodnoty derivací funkce ϕ a funkcí g_0 , g_1 . Hladkost řešení dané úlohy pak závisí na hladkosti pravé strany rovnice, funkcí ϕ , g_0 a g_1 a na splnění podmínek kompatibility vyšších řádů.

12.9. Zobecněná řešení počátečně-okrajové úlohy. Pozměníme-li poněkud definici řešení a nebudeme žádat jeho spojitost až do hranice \bar{Q} , zjistíme, že existenci a jednoznačnost řešení omezeného na \bar{Q} lze dokázat i tehdy, jsou-li podmínky zadané na S např. v konečném počtu bodů nespojitě. Podmínky kompatibility pak tedy také nemusí být splněny.

Jedna z možností smysluplného a přitom jednoduchého zobecnění pojmu řešení počátečně-okrajové úlohy (12.8.1)–(12.8.3) spočívá např. v tom, že se za řešení této úlohy považuje funkce u , která je spojitá na \bar{Q} s výjimkou bodů $(0, 0)$ a $(1, 0)$ a je omezená na celém \bar{Q} . Za vhodných předpokladů se pak dá opět dokázat jednoznačná řešitelnost dané úlohy ve smyslu této definice.

Přesnější rozbor i definice zobecněných řešení počátečně-okrajové úlohy lze nalézt opět v [54]. Lze přitom oslabit nejen požadavky kladené na počáteční a okrajové podmínky, ale i požadavky kladené na funkce vystupující v rovnici samé. Zobecněné řešení lze také definovat pomocí integrálních identit podobně, jako se to provádí u rovnic eliptického typu.

12.10. Cvičení.

12.10.1. Na obdélníku $Q' = (l_0, l_1) \times (0, T)$ je dána Dirichletova počátečně-okrajová úloha pro homogenní rovnici pro vedení tepla (12.2.3). Ukažte, že vhodnou transformací souřadnic lze tuto úlohu transformovat na počátečně-okrajovou úlohu na obdélníku $Q = (0, 1) \times (0, T)$. [Označíme-li $d = l_1 - l_0$, je hledaná transformace $x = (x' - l_0)/d$. Koeficient a^2 v rovnici pro vedení tepla přejde po transformaci v a^2/d^2 .]

12.10.2. Nechť funkce v splňuje rovnici $v_t = a^2 v_{xx} - \gamma v_x - qv$, kde $a^2 > 0$, γ a q jsou reálné konstanty. Ukažte, že funkce u daná vztahem

$$u(x, t) = v(x, t) \exp \left(-\frac{\gamma}{2a^2}x + \left(\frac{\gamma^2}{4a^2} + q \right)t \right)$$

splňuje homogenní rovnici pro vedení tepla (12.2.3). [Návod: Vyjádřete u_t a u_{xx} pomocí funkce v a jejích derivací.]

12.10.3. Formulujte a dokažte tvrzení o tom, že malé poruchy v počáteční podmínce a okrajových podmínkách úlohy z příkl. 12.6 nemohou způsobit velké změny v hodnotách jejích řešení. [Návod: Využijte linearitu úlohy a napište počátečně-okrajovou úlohu pro rozdíl řešení původní a porušené úlohy. Pak použijte princip maxima z odst. 12.7.1.]

12.10.4. Ukažte, že vhodnou transformací časové proměnné t lze homogenní rovnici pro vedení tepla (12.2.3) dále zjednodušit na rovnici tvaru $u_t = u_{xx}$. [Položte $t' = a^2 t$.]

13. Diferenční metody pro parabolické rovnice

13.1. Explicitní metoda. Na příkladu Dirichletovy počátečně-okrajové úlohy pro rovnici pro vedení tepla seznámíme čtenáře s typickými diferenčními metodami pro řešení parciálních diferenciálních rovnic parabolického typu. Tyto metody v určitém smyslu kombinují vlastnosti diferenčních metod pro řešení počátečních úloh pro obyčejné diferenciální rovnice, známých čtenáři např. z [37], a diferenčních metod pro řešení okrajových úloh z čl. 3 a čl. 7. Budeme se nejprve zabývat úlohami v jedné prostorové proměnné.

Mějme počátečně-okrajovou úlohu pro rovnici pro vedení tepla

$$(13.1.1) \quad u_t = a^2 u_{xx}, \quad x \in (0, 1), \quad t \in (0, T), \quad a^2 > 0,$$

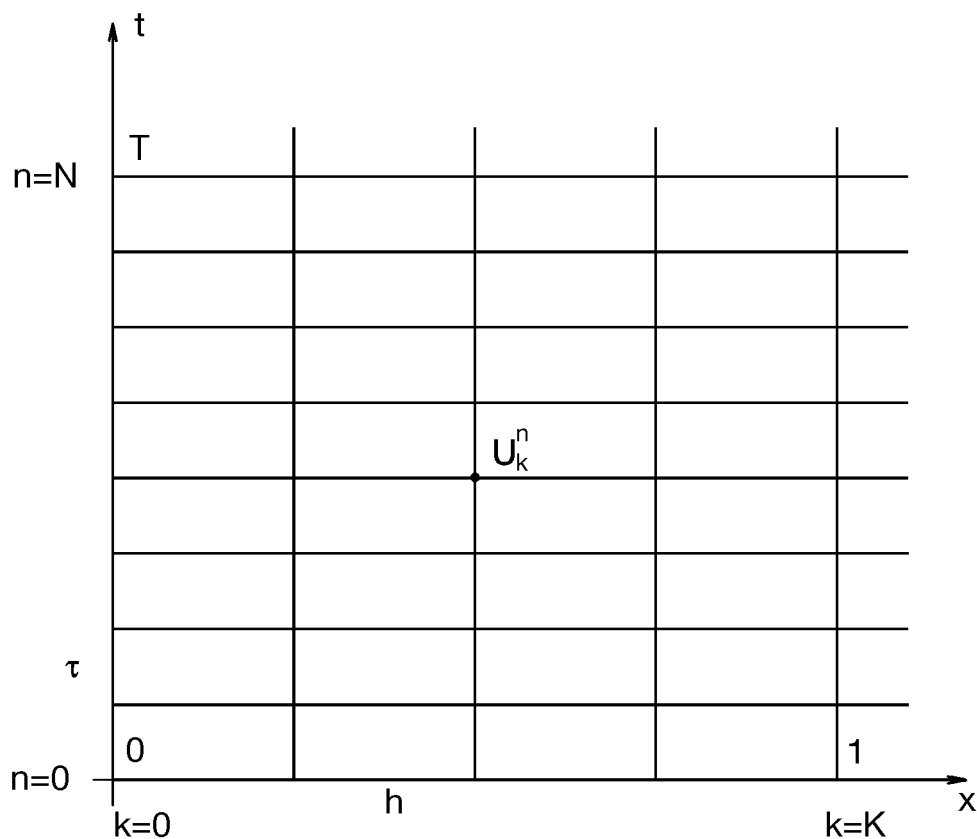
$$(13.1.2) \quad u(x, 0) = \phi(x), \quad x \in \langle 0, 1 \rangle,$$

$$(13.1.3) \quad u(0, t) = g_0(t), \quad u(1, t) = g_1(t), \quad t \in (0, T),$$

z odst. 12.6 (viz též obr. 38). Předpokládejme, že funkce ϕ , g_0 a g_1 splňují podmínky kompatibility (12.7.2) a že úloha (13.1.1) až (13.1.3) má právě jedno klasické řešení (viz odst. 12.8). Na této úloze vyložíme základní numerické metody používané k řešení počátečně-okrajových úloh pro parabolické rovnice v jedné prostorové proměnné. Principy uvedených metod lze vcelku snadno aplikovat i na složitější rovnice a na úlohy pro vícerozměrné rovnice parabolického typu.

Úlohu (13.1.1) až (13.1.3) budeme aproximovat metodou konečných diferencí (viz čl. 3). Nejprve na obdélníku $\bar{Q} = \langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, T \rangle$ sestrojíme síť \mathcal{S} s uzly (x_k, t_n) , $k = 0, 1, \dots, K$, $n = 0, 1, \dots, N$. Pro jednoduchost budeme uvažovat pouze *r o v n o m ě r n ě* síť s kroky h v proměnné x a τ v proměnné t . Bude tedy $x_k = kh$, $k = 0, 1, \dots, K$, $h = 1/K$, a $t_n = n\tau$, $n = 0, 1, \dots, N$, $\tau = T/N$. Hranice intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ odpovídají indexům $k = 0$ a $k = K$, kdežto časový okamžik $t = 0$ je označen $n = 0$ (viz obr. 39).

Všem uzlům (x_k, t_n) sítě \mathcal{S} , které odpovídají pevnému t_n a $k = 0, 1, \dots, K$, budeme říkat *časová vrstva* t_n nebo n -tá časová vrstva. Hodnoty řešení na nulté časové vrstvě ($n = 0$) jsou tedy známy, jsou dány počáteční podmínkou (13.1.2). Hodnotu přibližného řešení, která aproximuje hodnotu přesného řešení u v uzlu (x_k, t_n) , budeme značit U_k^n . Označíme ještě $u(x_k, t_n) = u_k^n$. Předpokládáme, že přesné řešení uvažované počátečně-okrajové úlohy je dvakrát spojitě diferencovatelné podle t a čtyřikrát podle x (to proto, abychom mohli odhadnout diskretizační chyby diferenčních aproximací, jež použijeme).



Obr. 39. Síť pro řešení počátečně-okrajové úlohy metodou konečných diferencí.

Na nulté časové vrstvě s přihlédnutím k (13.1.2) a podmínkám kompatibility (12.7.2) klademe

$$(13.1.4) \quad U_k^0 = \phi(x_k), \quad k = 0, 1, \dots, K.$$

Další postup založíme na tom, že daná počátečně-okrajová úloha má v proměnné t charakter úlohy počáteční, a hodnoty přibližného řešení U_k^n budeme počítat postupně po jednotlivých časových vrstvách t_n , $n = 1, 2, \dots, N$. Předpokládáme-li, že již známe hodnoty přibližného řešení až po časovou vrstvu t_n , potřebujeme nyní sestavit numerickou metodu, která nám na základě známých hodnot umožní vypočítat hodnoty U_k^{n+1} , $k = 0, 1, \dots, K$. Hodnoty U_k^{n+1} pro $k = 0$ a $k = K$ stanovíme tak, aby byly splněny okrajové podmínky, tj. klademe

$$(13.1.5) \quad U_0^{n+1} = g_0(t_{n+1}), \quad U_K^{n+1} = g_1(t_{n+1}).$$

Hodnoty U_k^{n+1} pro $0 < k < K$ získáme tím způsobem, že parciální diferenciální rovnici (13.1.1) metodou konečných diferencí aproximujeme vhodnou diferenční rovnicí.

Nejjednodušší taková aproximace spočívá v tom, že v uzlu (x_k, t_n) aproximujeme druhou derivaci podle x druhou poměrnou diferencí (viz (7.3.5)) a derivaci podle t nahradíme diferenčním podílem

$$(13.1.6) \quad \frac{\partial u(x_k, t_n)}{\partial t} \approx \frac{u(x_k, t_{n+1}) - u(x_k, t_n)}{\tau}$$

(viz (7.3.4), kde nyní $y = t$, $k = \tau$). Výsledkem takového postupu je diferenční rovnice

$$(13.1.7) \quad \frac{U_k^{n+1} - U_k^n}{\tau} = a^2 \frac{U_{k+1}^n - 2U_k^n + U_{k-1}^n}{h^2}, \quad k = 1, 2, \dots, K-1,$$

která za našich předpokladů o hladkosti přesného řešení aproximuje diferenciální rovnici (13.1.1) s diskretizační chybou velikosti $O(\tau + h^2)$ (viz údaje o chybách aproximace v odstavci 7.3.2). Vypočítáme-li z rovnice (13.1.7) U_k^{n+1} , obdržíme *e x p l i c i t n í* v z t a h, umožňující z hodnot přibližného řešení na n -té časové vrstvě počítat hodnoty na $(n+1)$ -ní časové vrstvě. Vyjde

$$(13.1.8) \quad U_k^{n+1} = rU_{k-1}^n + (1 - 2r)U_k^n + rU_{k+1}^n, \quad k = 1, \dots, K-1,$$

kde jsme označili

$$(13.1.9) \quad r = \frac{a^2 \tau}{h^2} > 0.$$

Protože rekurence (13.1.8) svazuje hodnoty přibližného řešení na dvou sousedních časových vrstvách, nazýváme příslušnou numerickou metodu *dvouvrstvová explicitní metoda*. Často se také užívá název dvouvrstvové explicitní *diferenční schéma*. Výpočetní šablona schématu (13.1.8), která znázorňuje použité uzly sítě a koeficienty u funkčních hodnot v těchto uzlech, má tvar

$$(13.1.10) \quad \begin{array}{c} \boxed{1} \\ | \\ \boxed{r} \text{---} \boxed{1 - 2r} \text{---} \boxed{r} \end{array}$$

Všimněme si ještě, že pro $r = \frac{1}{2}$ je rekurence (13.1.8) obzvlášť jednoduchá. Dá se také ukázat, že pro $r = \frac{1}{6}$ se řád diskretizační chyby zvětšuje a chyba je velikosti $O(\tau^2 + h^4)$.

13.2. Algoritmus explicitní metody. Výpočet podle explicitní metody z odst. 13.1 je algoritmicky velice prostý. Dá se přehledně zapsat v následujících čtyřech krocích.

Krok 1. Zvolíme parametry h a τ a sestojíme síť $\mathcal{S} = \{(x_k, t_n), k = 0, 1, \dots, K, n = 0, 1, \dots, N\}$. Položíme $r = a^2\tau/h^2$.

Krok 2. Na základě počáteční podmínky stanovíme podle (13.1.4) hodnoty přibližného řešení $U_k^0, k = 0, 1, \dots, K$, na nulté časové vrstvě. Položíme $n = 0$.

Krok 3. Podle (13.1.5) a (13.1.8) vypočítáme z hodnot $U_k^n, k = 0, 1, \dots, K$, hodnoty přibližného řešení na $(n + 1)$ -ní časové vrstvě, tj. $U_k^{n+1}, k = 0, 1, \dots, K$. Zvětšíme n o jedničku.

Krok 4. Pokud $n < N$, opakujeme krok 3, v opačném případě výpočet ukončíme.

Je zřejmé, že algoritmus není náročný na paměť počítače. Pokud získané výsledky vytiskneme ihned po jejich výpočtu, stačí ukládat do paměti pouze hodnoty přibližného řešení na dvou časových vrstvách.

13.3. Příklad. Řešme explicitní metodou z odst. 13.1 počátečně-okrajovou úlohu (13.1.1) až (13.1.3), kde $a^2 = 1$, počáteční podmínka je $\phi(x) = \cos \frac{1}{2}\pi x$ a Dirichletovy okrajové podmínky jsou dány funkcemi $g_0(t) = \exp(-\frac{1}{4}\pi^2 t)$ a $g_1(t) \equiv 0$. Přesné řešení této úlohy je $u(x, t) = \exp(-\frac{1}{4}\pi^2 t) \cdot \cos \frac{1}{2}\pi x$.

Volíme $h = 0,2$ a $\tau = 0,02$, takže $r = \tau/h^2 = \frac{1}{2}$. Rekurence (13.1.8) explicitní metody se nám v tomto případě zjednoduší na $U_k^{n+1} = \frac{1}{2}(U_{k-1}^n + U_{k+1}^n)$. Výsledky výpočtu (na 5D) jsou pro prvních 5 časových vrstev (tj. až do $t = 0,1$) uvedeny v tab. 7. Pro pátou časovou vrstvu uvádíme v prvním řádku tabulky také hodnoty přesného řešení v uzlech sítě (na 5D).

n	k	0	1	3	3	4	5	
		0,78134	0,74310	0,63212	0,45926	0,24145	0	
	5	0,78134	0,74157	0,63013	0,45754	0,24049	0	0,1
	4	0,82087	0,77927	0,66227	0,48099	0,25282	0	0,08
	3	0,86239	0,81889	0,69615	0,50564	0,26583	0	0,06
	2	0,90602	0,86064	0,73177	0,53167	0,27951	0	0,04
	1	0,95185	0,90451	0,76943	0,55902	0,29390	0	0,02
	0	1	0,95106	0,80902	0,58779	0,30902	0	0
		0	0,2	0,4	0,6	0,8	1	$x \quad t$

Tab. 7. Řešení počátečně okrajové úlohy explicitní metodou.

13.4. Konvergence a oblast závislosti. Jak již víme z čl. 11, vyšetřování konvergence diferenční metody pro řešení úlohy (13.1.1) až (13.1.3) spočívá v nalezení podmínek, za nichž norma chyby metody, tj. $\|u_k^n - U_k^n\|$, při zjemňování sítě, tj. při $h \rightarrow 0, \tau \rightarrow 0$ a $K \rightarrow \infty, N \rightarrow \infty$, konverguje k nule.

Dříve než se analýzou konvergence explicitní metody z odst. 13.1 budeme zabývat podrobněji, bude instruktivní podívat se na to, jak se v této metodě projevuje o b l a s t z á v i s l o s t i na počáteční podmínce, kterou jsme pro rovnici pro vedení tepla popsali v odst. 12.7.3. Ukázali jsme tam, že hodnota řešení počáteční úlohy v bodě (x, t) , $t > 0$, závisí na hodnotách funkce ϕ z počáteční podmínky na c e l é ose x .

Zapomeňme nyní na okamžik na okrajové podmínky a posuďme závislost hodnoty U_k^n přibližného řešení v uzlu (x_k, t_n) na počáteční podmínce. Snadno se zjistí (uvědomte si tvar šablony diferenčního schématu explicitní metody), že oblast závislosti přibližného řešení v uzlu (x_k, t_n) tvoří u explicitní metody interval $\langle x_k - (h/\tau)t_n, x_k + (h/\tau)t_n \rangle$ na ose x . Explicitní diferenční schéma tedy vystihuje při $h, \tau \rightarrow 0$ oblast závislosti pro rovnici vedení tepla pouze tehdy, platí-li zároveň $h/\tau \rightarrow +\infty$, a je logické očekávat, že tato podmínka, resp. podmínka $\tau/h \rightarrow 0$, bude nutnou podmínkou konvergence metody.

Pokud pro parametr $r = a^2\tau/h^2$ z (13.1.9) při $h, \tau \rightarrow 0$ platí $r \leq \text{konst.}$, bude jistě podmínka $\tau/h \rightarrow 0$ splněna, neboť $\tau/h = hr/a^2$ a a^2 je konstanta. Podmínka $r \leq \text{konst.}$ však ještě ke konvergenci metody nestačí, konstanta omezující r nemůže být zcela libovolná. Ukážeme to na příkladě.

13.5. Příklad. Řešme explicitní metodou počáteční úlohu (13.1.1) až (13.1.3), kde $a^2 = 1$, okrajové podmínky jsou nulové, $g_0(t) \equiv g_1(t) \equiv 0$, $t > 0$, a počáteční podmínku volíme tak, že je rovněž rovna nule všude s výjimkou jediného uzlu sítě, kde je rovna jedné (viz tab. 8). Klademe $h = \frac{1}{6}$, $\tau = \frac{1}{36}$, takže $r = \tau/h^2 = 1$. Rekurence (13.1.8) má nyní tvar $U_k^{n+1} = U_{k-1}^n - U_k^n + U_{k+1}^n$.

U_k^5	0	-25	44	-51	44	-25	0
U_k^4	0	9	-16	19	-16	9	0
U_k^3	0	-3	6	-7	6	-3	0
U_k^2	0	1	-2	3	-2	1	0
U_k^1	0	0	1	-1	1	0	0
U_k^0	0	0	0	1	0	0	0
k	0	1	2	3	4	5	6

Tab. 8. Explicitní metoda (13.1.8) s $r = 1$.

Získané výsledky (tab. 8) jasně ukazují, že přibližné řešení nesplňuje princip maxima, platný pro přesné řešení dané počátečně-okrajové úlohy, a chová se nestabilně. Při zmenšování h a τ tak, že $r = 1$, bude rekurence metody stále stejná, chování přibližného řešení se nezmění a pro $r = 1$ tedy nelze očekávat konvergenci metody. Naproti tomu pro $r = \frac{1}{2}$ obdržíme řešení, které již splňuje princip maxima (cvičení 13.17.1).

Na základě výsledků z tab. 8 zároveň vidíme, jak se v hodnotách přibližného řešení budou projevovat chyby v počátečních datech. Je-li např. hodnota $\phi(x_3)$ zatížena chybou velikosti ϵ , bude hodnota U_4^5 zatížena chybou 44ϵ , atp.

13.6. Stabilita explicitní metody. V příkl. 13.5 jsme viděli, že přibližné řešení dané počátečně-okrajové úlohy explicitní metodou se při $r = 1$ chová nestabilně. Pokusíme se odvodit na základě jednoduché heuristické úvahy podmínku, kterou musí splňovat r , aby schéma bylo *stabilní vzhledem k počáteční podmínce*, tj. aby při pevných h a τ a rostoucím n se existující poruchy v počátečních datech nezesilovaly a jejich vliv zůstal ohraničený.

Uvažujme stejnou počátečně-okrajovou úlohu jako v odst. 13.5, ale s $h = \frac{1}{2}$ a obecným τ , a položme si otázku, jaké podmínky musí splňovat parametr $r = \tau/h^2$, aby pro hodnoty přibližného řešení platilo $0 \leq U_k^n \leq 1$, $k = 0, 1, 2$, $n = 0, 1, 2, \dots$, tj. aby zůstaly omezené maximální a minimální hodnotou počáteční podmínky.

V každé časové vrstvě našeho zjednodušeného schématu leží pouze 3 uzly; v krajních uzlech na základě okrajových podmínek máme $U_0^n = U_2^n = 0$. Rekurence explicitní metody (13.1.8) se proto redukuje na vztah

$$(13.6.1) \quad U_1^{n+1} = (1 - 2r)U_1^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Opakovaným použitím (13.6.1) vypočítáme

$$(13.6.2) \quad U_1^n = (1 - 2r)U_1^{n-1} = \dots = (1 - 2r)^n U_1^0 = (1 - 2r)^n.$$

Aby platilo $0 \leq U_1^n \leq 1$, $n = 0, 1, 2, \dots$, musí být $0 \leq (1 - 2r)^n \leq 1$ neboli ($r > 0$!)

$$(13.6.3) \quad 0 < r \leq \frac{1}{2}.$$

Dá se ukázat, že při splnění podmínky (13.6.3) je explicitní schéma skutečně stabilní vzhledem k počáteční podmínce i v obecném případě a že (13.6.3) je dokonce postačující podmínkou stability explicitní metody ve smyslu čl. 11 ([14], [18]). Je to ostatně vidět také z důkazu následující věty o konvergenci. Explicitní metoda je tedy příkladem *podmíněně stabilní metody*, tj. její stabilita závisí na splnění podmínky, která vzájemně svazuje velikost kroků h a τ .

13.7. Věta o konvergenci. *Nechť má počátečně-okrajová úloha (13.1.1) až (13.1.3) řešení u , které je čtyřikrát spojitě diferencovatelné podle x a dvakrát podle t . Označme U_k^n , $k = 0, 1, \dots, K$, $n = 0, 1, \dots, N$, přibližné řešení této úlohy získané explicitní metodou (13.1.8), kde $r = a^2\tau/h^2$. Nechť platí $0 < r \leq \frac{1}{2}$.*

Pak pro normu chyby přibližného řešení platí odhad (při $\tau, h \rightarrow 0$)

$$(13.7.1) \quad \|u_k^n - U_k^n\| \equiv \max_S |u_k^n - U_k^n| = O(\tau + h^2).$$

Za uvedených předpokladů je tedy explicitní metoda konvergentní a je prvního řádu v τ , druhého v h .

Důkaz se podobá důkazu konvergence metody konečných diferencí z odst. 3.2, jeho hlavní myšlenka (princip maxima) je stejná. Hodnoty přesného řešení u_k^n splňují

za předpokladů věty diferenční rovnici (13.1.7) s chybou $O(\tau + h^2)$. Protože rekurence (13.1.8) explicitní metody vznikla z (13.1.7) vynásobením τ , splňuje přesné řešení u_k^n rovnici (13.1.8) s chybou velikosti $\tau \cdot O(\tau + h^2)$, tj. platí

$$(13.7.2) \quad \begin{aligned} u_k^{n+1} &= ru_{k-1}^n + (1 - 2r)u_k^n + ru_{k+1}^n + \tau \cdot O(\tau + h^2), \\ k &= 1, 2, \dots, K - 1. \end{aligned}$$

Odečtením (13.1.8) od (13.7.2) dostaneme pro chybu přibližného řešení $e_k^n = u_k^n - U_k^n$ vztah

$$(13.7.3) \quad \begin{aligned} e_k^{n+1} &= re_{k-1}^n + (1 - 2r)e_k^n + re_{k+1}^n + \tau \cdot O(\tau + h^2), \\ k &= 1, 2, \dots, K - 1. \end{aligned}$$

Na hranici obdélníka $\langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, T \rangle$ máme zřejmě

$$(13.7.4) \quad \begin{aligned} e_k^0 &= 0, \quad k = 0, 1, \dots, K, \\ e_0^n &= e_K^n = 0, \quad n = 0, 1, \dots, N. \end{aligned}$$

Pokud $0 < r \leq \frac{1}{2}$, jsou všechny tři koeficienty na pravé straně vztahu (13.7.3) nezáporné a jejich součet je roven jedné. Je proto *)

$$(13.7.5) \quad \begin{aligned} |e_k^{n+1}| &\leq r|e_{k-1}^n| + (1 - 2r)|e_k^n| + r|e_{k+1}^n| + \tau \cdot O(\tau + h^2) \leq \\ &\leq \|e^n\| + \tau \cdot O(\tau + h^2), \quad k = 1, 2, \dots, K - 1, \end{aligned}$$

kde jsme označili

$$\|e^n\| = \max_{k=0, \dots, K} |e_k^n|.$$

Vzhledem k okrajovým podmínkám (13.7.4) platí (13.7.5) i pro $k = 0$ a $k = K$, takže také

$$(13.7.6) \quad \|e^{n+1}\| \leq \|e^n\| + \tau \cdot O(\tau + h^2), \quad n = 0, 1, \dots, N - 1.$$

Protože (viz opět (13.7.4)) $\|e^0\| = 0$, dostáváme podle (13.7.4) snadno

$$(13.7.7) \quad \begin{aligned} \|e^n\| &\leq \|e^{n-1}\| + \tau \cdot O(\tau + h^2) \leq \dots \leq \|e^0\| + n\tau \cdot O(\tau + h^2) = \\ &= T \cdot O(\tau + h^2) = O(\tau + h^2) \end{aligned}$$

(neboť T je konstanta a nezávisí na τ a h). Tím je věta dokázána.

*) Symboly $O(\tau + h^2)$ v dalších úvahách neoznačují nutně stále stejnou funkci proměnných τ a h . Mají však společné to, že pro dostatečně malá τ a h lze absolutní hodnotu každého z nich odhadnout shora výrazem $A(\tau + h^2)$, kde A je nějaká konstanta.

13.8. Vyšetřování stability diferenčních schémat. Existují a používají se dvě poměrně jednoduché teoretické metody pro studium stability diferenčních schémat pro numerické řešení evolučních rovnic vzhledem k počáteční podmínce. Obě metody se ale dají přímo aplikovat pouze na lineární rovnice, v nelineárním případě je jejich užití složitější [14]. Jde o Fourierovu metodu a o maticovou analýzu stability. Stručně popíšeme hlavní rysy obou postupů. Podrobnější výklad spolu s příklady vyšetřování stability konkrétních schémat nalezne čtenář v literatuře [5], [10], [14], [27].

13.8.1. Fourierova metoda vyšetřování stability spočívá v tom, že se studuje šíření poruchy zadané v hodnotách přibližného řešení na časové vrstvě $t = 0$ při rostoucím t . Porucha se přitom vyjadřuje ve tvaru konečné Fourierovy řady, např. jako $\sum_{m=0}^M c_m \exp(i\lambda_m x)$, kde $i = \sqrt{-1}$. Analýza šíření poruchy se provádí pro jediný člen $\exp(i\lambda x)$, kde λ je libovolné reálné číslo. Celkový efekt dané poruchy se pak dá získat lineární superpozicí.

Předpokládejme tedy, že na nulté časové vrstvě sítě máme zadánu poruchu tvaru $Z_k^0 = \exp(i\lambda x_k) = \exp(i\lambda kh)$, $k = 0, 1, \dots, K$. Vzhledem k linearitě řešení počátečně okrajové úlohy platí pak pro poruchu Z_k^n při $n > 0$ stejné diferenční rovnice jako pro přibližné řešení U_k^n uvažované úlohy (viděli jsme to již v důkazu věty 13.7). Postupujeme nyní stejně jako u Fourierovy metody pro řešení diferenciálních rovnic a hledáme Z_k^n ve tvaru $Z_k^n = X_n Y_k$, kde $X_0 = 1$, $Y_k = Z_k^0$ (separace proměnných; na okrajové podmínky nebereme zřetel). Je zřejmé, že pokud bude platit $|X_n| \leq 1$, $n = 0, 1, \dots$, bude při $n \rightarrow \infty$ platit $|Z_k^n| \leq |Y_k| = |Z_k^0|$ a vliv poruchy v počáteční podmínce zůstane ohraničený.

Pro explicitní metodu z odst. 13.1, ale i pro jiná diferenční schémata, lze X_n hledat ve tvaru $X_n = q^n$, $n = 0, 1, \dots$, kde $q = q(\lambda)$ je obecně komplexní číslo, které závisí na reálné konstantě λ vystupující v Z_k^0 . Nutnou podmínkou stability vzhledem k počáteční podmínce je pak splnění nerovnosti

$$(13.8.1) \quad |q(\lambda)| \leq 1, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Dá se ukázat [27], že pro dvouvrstvou schémata pro parabolické rovnice je (13.8.1) rovněž postačující podmínkou stability. Nerovnosti (13.8.1) se říká *von Neumannova podmínka stability*.

Pro explicitní metodu z odst. 13.1 dává Fourierova analýza (viz např. [27] a cvičení 13.17.8)

$$q(\lambda) = 1 - 4r \sin^2 \frac{1}{2} \lambda h$$

a von Neumannova podmínka stability je tvaru ($q(0) = 1$)

$$(13.8.2) \quad r \leq \frac{1}{2 \sin^2 \frac{1}{2} \lambda h}, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0,$$

odkud ihned dostáváme podmínku $0 < r \leq \frac{1}{2}$ z odst. 13.6 (cvičení 13.17.2).

Fourierova metoda ignoruje vliv okrajových podmínek a přímo se dá aplikovat jen tehdy, jsou-li koeficienty lineární rekurence dané diferenční metody konstantní. Přesto

však je velmi užitečná a dává dobrou představu o tom, jak se při výpočtu šíří vliv chyb v datech. Umožňuje nám také předem zavrhnout diferenční schémata, která z hlediska stability nevyhovují. Tak např. aproximace rovnice pro vedení tepla (13.1.1) diferenční rovnicí

$$(13.8.3) \quad \frac{U_k^{n+1} - U_k^{n-1}}{2\tau} = a^2 \frac{U_{k+1}^n - 2U_k^n + U_{k-1}^n}{h^2}, \quad k = 1, 2, \dots, K-1,$$

která pro dostatečně hladká řešení má diskretizační chybu velikosti $O(\tau^2 + h^2)$ (viz odst. 7.3.2), nevede ke konvergentní numerické metodě. Fourierovou metodou se totiž dá ukázat, že diferenční schéma (13.8.3) je nezávisle na hodnotě $r = a^2\tau/h^2$ nestabilní a nedává proto použitelné výsledky. Schéma (13.8.3) by mělo čtenáře varovat před tím, co se může stát, nevěnuje-li se dostatečná pozornost matematickým vlastnostem aproximací sestrojovaných diferenčními metodami.

13.8.2. *Maticová analýza stability* automaticky bere ohled také na okrajové podmínky. Bereme-li v úvahu dvouvrstvová diferenční schémata, pak každé takové schéma pro řešení úlohy (13.1.1) až (13.1.3) lze napsat v maticovém tvaru

$$(13.8.4) \quad \mathbf{A}_n \mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{B}_n \mathbf{U}^n + \mathbf{F}^n,$$

kde \mathbf{U}^s , $s = n, n+1$, jsou sloupcové vektory hodnot přibližného řešení ve vnitřních uzlech s -té časové vrstvy, tj. $\mathbf{U}^s = [U_1^s, U_2^s, \dots, U_{K-1}^s]^T$, \mathbf{A}_n a \mathbf{B}_n jsou čtvercové matice řádu $K-1$, které mohou záviset na n , a \mathbf{F}^n je vektor o $K-1$ složkách, rovněž případně závislý na n (analýzu lze tudíž provádět i pro úlohy s proměnnými koeficienty^{*)}). U explicitní metody z odst. 13.1 je $\mathbf{A}_n = \mathbf{I}$, \mathbf{B}_n je třídiagonální symetrická matice tvaru

$$\mathbf{B}_n = \begin{bmatrix} 1-2r & r & 0 & \dots & 0 \\ r & 1-2r & r & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & r \\ 0 & \dots & 0 & r & 1-2r \end{bmatrix}$$

a \mathbf{F}^n nulový vektor.

Aby bylo z (13.8.4) možné počítat \mathbf{U}^{n+1} , musí být \mathbf{A}_n regulární. Vztah (13.8.4) pak lze přepsat na

$$(13.8.5) \quad \mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{C}_n \mathbf{U}^n + \mathbf{A}_n^{-1} \mathbf{F}^n,$$

kde $\mathbf{C}_n = \mathbf{A}_n^{-1} \mathbf{B}_n$. Nechť nyní v přibližném řešení \mathbf{U}^n na n -té časové vrstvě vznikne porucha \mathbf{Z}^n , takže další výpočet vychází nikoli z \mathbf{U}^n , nýbrž z $\mathbf{U}^n + \mathbf{Z}^n$. Na následující

^{*)} V případě, že jedna nebo dvě okrajové podmínky zahrnují hodnoty derivací, se zápis (13.8.4) v zásadě nemění. Pouze vektory mají o jednu či dvě složky navíc a řád matic se zvětší.

časové vrstvě pak nevypočítáme \mathbf{U}^{n+1} , ale porušené řešení $\mathbf{U}^{n+1} + \mathbf{Z}^{n+1}$, pro které bude platit

$$(13.8.6) \quad \mathbf{U}^{n+1} + \mathbf{Z}^{n+1} = \mathbf{C}_n(\mathbf{U}^n + \mathbf{Z}^n) + \mathbf{A}_n^{-1}\mathbf{F}^n.$$

Odečtením (13.8.5) od (13.8.6) dostaneme pro předpokládanou poruchu \mathbf{Z}^n na n -té časové vrstvě a z ní vzniklou poruchu \mathbf{Z}^{n+1} na $(n+1)$ -ní časové vrstvě vztah

$$\mathbf{Z}^{n+1} = \mathbf{C}_n\mathbf{Z}^n,$$

z něhož plyne nerovnost

$$\|\mathbf{Z}^{n+1}\| \leq \|\mathbf{C}_n\| \cdot \|\mathbf{Z}^n\|,$$

kde $\|\cdot\|$ označuje vhodně zvolené normy. Tak např. pro symetrické matice \mathbf{C}_n lze volit

$$\|\mathbf{C}_n\| = \max_k |\lambda_k|,$$

kde λ_k , $k = 1, 2, \dots, K-1$, jsou vlastní čísla matice \mathbf{C}_n , a za vektorovou normu lze brát obvyklou euklidovskou normu.

Stabilita diferenční metody bude zajištěna tehdy, bude-li platit

$$(13.8.7) \quad \|\mathbf{C}_n\| \leq 1, \quad n = 0, 1, \dots,$$

neboť v takovém případě se poruchy v počátečních datech nebudou během výpočtu při $n \rightarrow \infty$ zesilovat. Pro explicitní metodu se dá ukázat, že vlastní čísla symetrické matice $\mathbf{C}_n = \mathbf{B}_n$ jsou $\lambda_k = 1 - 4r \sin^2(k\pi/2K)$. Požadavek $|\lambda_k| \leq 1$ pak vede k nerovnosti $0 < r \leq \frac{1}{2}$, což je stejná podmínka stability jako ta, kterou jsme získali Fourierovou metodou (cvičení 13.17.3).

V čl. 11 jsme se zabývali souvislostí stability a konvergence diferenčních schémat. Abychom mohli Laxovu větu 11.5.1 o tom, že pro konzistentní aproximace je stabilita také postačující podmínkou konvergence, aplikovat na obecné úrovni i zde, potřebovali bychom zavést pojem stability vzhledem k pravé straně, který nezávisí na velikostech kroků sítě a charakterizuje chování metody nikoli při pevných h a τ a $n \rightarrow \infty$, nýbrž při h a $\tau \rightarrow 0$. Podrobnější analýza této problematiky přesahuje rámec našeho úvodního výkladu. Lze se o ní poučit např. v [14], [40].

13.9. Implicitní metoda. Explicitní metoda z odst. 13.1 je koncepčně i algoritmiicky velmi jednoduchá, ale její nevýhodou je nízký řád přesnosti v τ a podmíněná stabilita. Pozornost, kterou jsme jí věnovali, byla motivována v prvé řadě tím, že jsme na ní snadno mohli ukázat základní vlastnosti diferenčních schémat pro evoluční rovnice. Praktické použití explicitní metody k výpočtům na delších časových intervalech může být limitováno právě její podmíněnou stabilitou. Předpokládejme například, že chceme provést výpočet pro $T = 100$ a vzhledem k požadavkům na přesnost musíme volit $h = \frac{1}{100}$. Podmínka stability (13.6.3) nás pak při $a^2 = 1$ nutí volit $\tau \leq \frac{1}{2}h^2 = 0,00005$.

Abychom získali přibližné řešení pro $t = 100$, musíme tak vypočítat jeho hodnoty ve dvou miliónech vrstvách. Přitom průběh řešení v čase nemusí vůbec volbu tak malého kroku τ vyžadovat (a zpravidla také nevyžaduje).

Je proto žádoucí mít k dispozici metodu, která by byla *bezpodmínečně stabilní*, tj. stabilní nezávisle na poměru kroků, a umožňovala nezávislou volbu kroků h a τ pouze na základě požadované přesnosti. Je vcelku zajímavé, že se taková metoda pro řešení úlohy (13.1.1) až (13.1.3) dá snadno sestavit postupem, který se od odvození explicitní metody z odst. 13.1 liší pouze tím, že se hodnota derivace u_t v bodě (x_k, t_n) neaproximuje diferenčním podílem (13.1.6), ale diferenčním podílem

$$(13.9.1) \quad \frac{\partial u(x_k, t_n)}{\partial t} \approx \frac{u(x_k, t_n) - u(x_k, t_{n-1})}{\tau}$$

(viz opět (7.3.4)). Výsledkem je diferenční rovnice

$$(13.9.2) \quad \frac{U_k^n - U_k^{n-1}}{\tau} = a^2 \frac{U_{k+1}^n - 2U_k^n + U_{k-1}^n}{h^2}, \quad k = 1, 2, \dots, K-1,$$

jejíž diskretizační chyba je stejně jako u explicitní metody řádové velikosti $O(\tau + h^2)$. Vztah pro výpočet hodnot přibližného řešení na časové vrstvě t_n z hodnot na předchozí časové vrstvě je však nyní *implicitní*, ztrácí explicitní charakter a algoritmus výpočtu se komplikuje.

Po úpravě tentokrát dostáváme z (13.9.2) pro výpočet hodnot U_k^n , $k = 0, 1, \dots, K$, vztah

$$(13.9.3) \quad -rU_{k-1}^n + (1 + 2r)U_k^n - rU_{k+1}^n = U_k^{n-1}, \quad k = 1, 2, \dots, K-1,$$

kde r je opět dáno vztahem (13.1.9). Rovnic (13.9.3) je o dvě méně než neznámých, ale z okrajových podmínek máme

$$(13.9.4) \quad U_0^n = g_0(t_n), \quad U_K^n = g_1(t_n).$$

Vyloučíme-li tyto hodnoty z (13.9.3) a označíme $\mathbf{U}^n = [U_1^n, U_2^n, \dots, U_{K-1}^n]^T$, počítáme pak vektor hodnot přibližného řešení na n -té časové vrstvě ze soustavy lineárních algebraických rovnic

$$(13.9.5) \quad \mathbf{A}\mathbf{U}^n = \mathbf{U}^{n-1} + \mathbf{F}^n,$$

kde \mathbf{A} je třídiagonální symetrická matice řádu $K-1$

$$(13.9.6) \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1+2r & -r & 0 & \dots & 0 \\ -r & 1+2r & -r & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -r & 1+2r & -r \\ 0 & \dots & 0 & -r & 1+2r \end{bmatrix}$$

a $\mathbf{F}^n = [rg_0(t_n), 0, \dots, 0, rg_1(t_n)]^T$. Vektor \mathbf{U}^0 je dán počáteční podmínkou, platí (podobně jako u explicitní metody) $U_k^0 = \phi(x_k)$, $k = 1, 2, \dots, K-1$. Soustava rovnic (13.9.5) má pro každé $n = 1, 2, \dots, N$ a každé $r > 0$ právě jedno řešení \mathbf{U}^n , neboť matice \mathbf{A} je ostře diagonálně dominantní, a tudíž regulární (viz odst. 3.5.1).

Popsané metodě se říká *dvouvrstvá implicitní metoda* (někdy také *ryze implicitní metoda*), protože vztah mezi hodnotami přibližného řešení na dvou po sobě následujících vrstvách má implicitní charakter, při výpočtu musíme na každé časové vrstvě vyřešit soustavu lineárních algebraických rovnic, abychom získali hodnoty přibližného řešení na vrstvě následující. Výpočetní šablona implicitní metody (13.9.3) je tvaru

$$(13.9.7) \quad \begin{array}{ccccc} \boxed{-r} & \text{---} & \boxed{1+2r} & \text{---} & \boxed{-r} \\ & & \downarrow & & \\ & & \boxed{1} & & \end{array}$$

Podstatnou praktickou výhodou popsané implicitní metody je to, že je *bezpodmínečně stabilní* vzhledem k počáteční podmínce. Dá se také dokázat [10], [14], [18], že implicitní metoda (13.9.3) pro řešení úlohy (13.1.1) až (13.1.3) je *konvergentní* a je prvního řádu v τ a druhého v h . Není přitom třeba klást žádné požadavky na parametr r (na rozdíl od věty 13.7). Ryze implicitní metoda se dá bez problémů použít i v případě, že nejsou splněny podmínky kompatibility.

13.10. Algoritmus implicitní metody. Výpočet podle implicitní metody z odst. 13.9 je podobný algoritmu explicitní metody (odst. 13.2), liší se pouze způsobem, jímž se z hodnot přibližného řešení na vrstvě t_n počítají hodnoty na vrstvě t_{n+1} .

Krok 1. Zvolíme kroky h a τ a sestojíme síť $\mathcal{S} = \{(x_k, t_n), k = 0, 1, \dots, K, n = 0, 1, \dots, N\}$. Položíme $r = a^2\tau/h^2$.

Krok 2. Na základě počáteční podmínky vypočítáme $U_k^0 = \phi(x_k)$, $k = 1, 2, \dots, K-1$. Položíme $n = 1$.

Krok 3. Vyřešíme soustavu lineárních algebraických rovnic (13.9.5) a stanovíme tak U_k^n , $k = 1, 2, \dots, K-1$. (Hodnoty U_0^n , U_K^n jsou dány okrajovými podmínkami). Zvětšíme n o jedničku.

Krok 4. Pokud $n \leq N$, opakujeme krok 3, v opačném případě výpočet ukončíme.

Třetí krok algoritmu realizujeme nejlépe metodou faktorizace z odst. 3.5. Vzhledem k tomu, že matice \mathbf{A} je ostře diagonálně dominantní, je takový postup proveditelný a algoritmus metody faktorizace je numericky stabilní. Nároky na paměť jsou minimální, v našem případě dokonce matici \mathbf{A} nemusíme vůbec ukládat do paměti počítače (viz cvičení 13.17.4). Počet aritmetických operací potřebných k realizaci kroku 3 je zhruba $3K$ u explicitní metody, $8K$ u metody implicitní (užívající metodu faktorizace). Protože ale implicitní metoda neklade žádná omezení typu (13.6.3) na velikost časového kroku τ , bývá výpočet implicitní metodou na intervalu $\langle 0, T \rangle$ pro větší T podstatně rychlejší než výpočet metodou explicitní (při stejných požadavcích na přesnost).

13.11. Crankova-Nicolsonova metoda. Implicitní metoda z odstavce 13.9 nás zbavila omezujících požadavků na časový krok τ , ale je pouze prvního řádu v τ . Položíme si proto otázku, jak by měla vypadat numerická metoda pro řešení úlohy (13.1.1) až (13.1.3), která by byla řádu 2 v h i τ . Jak jsme viděli v odst. 3.3.1 a 7.3.2, jsou symetrické diferenční aproximace derivací řádově přesnější než aproximace, jejichž šablona je vůči bodu, v němž aproximujeme derivaci, nesymetrická. Tak např. chyba aproximace $u_x(M)$ podle prvních řádků (7.3.3) je velikosti $O(h)$, kdežto symetrická aproximace podle třetího řádku má chybu velikosti $O(h^2)$. Pokusme se této skutečnosti využít.

Přímočarý postup, totiž aproximace u_t v bodě (x_n, t_n) podle (13.8.3), dává sice diskretizační chybu řádové velikosti $O(\tau^2 + h^2)$, což je naším cílem, ale výsledné schéma je nestabilní, a tudíž nepoužitelné (viz odst. 13.8). Musíme proto postupovat poněkud důmyslněji. Vyjdeme z toho, že diferenční podíl $[u(x_k, t_n) - u(x_k, t_{n-1})]/\tau$ aproximuje sice derivace $u_t(x_k, t_n)$ a $u_t(x_k, t_{n-1})$ s chybou řádové velikosti $O(\tau)$, ale pro dostatečně hladké funkce u dává aproximaci derivace $u_t(x_k, t_n - \frac{1}{2}\tau)$ s chybou $O(\tau^2)$ (viz odst. 7.3.2), neboť jde o hodnotu derivace ve středu intervalu $\langle t_{n-1}, t_n \rangle$. Nebudeme proto diferenciální rovnici (13.11) aproximovat v uzlu (x_k, t_n) , ani v uzlu (x_k, t_{n-1}) , ale sestojíme její aproximaci v bodě $(x_k, t_n - \frac{1}{2}\tau)$. Aproximaci derivace u_t v tomto bodě s chybou $O(\tau^2)$ tedy již máme k dispozici, získáme ji postupem, který jsme právě popsali. Pokud jde o aproximaci druhé derivace u_{xx} , je třeba uvážít, že chceme získat takové diferenční schéma, v němž figurují pouze hodnoty řešení v uzlech sítě \mathcal{S} . Protože $u_{xx}(x_k, t_n)$ a $u_{xx}(x_k, t_{n-1})$ umíme na příslušných časových vrstvách aproximovat druhou poměrnou diferencí s chybami řádové velikosti $O(h^2)$, zdá se rozumné vzít za aproximaci $u_{xx}(x_k, t_n - \frac{1}{2}\tau)$ průměr obou těchto diferenčních podílů. Dostáváme tak diferenční rovnici

$$(13.11.1) \quad \frac{U_k^n - U_k^{n-1}}{\tau} = \frac{1}{2} \left[a^2 \frac{U_{k+1}^n - 2U_k^n + U_{k-1}^n}{h^2} + a^2 \frac{U_{k+1}^{n-1} - 2U_k^{n-1} + U_{k-1}^{n-1}}{h^2} \right],$$

$$k = 1, 2, \dots, K-1.$$

Užitím Taylorova rozvoje se dá ukázat, že diskretizační chyba této aproximace je pro dostatečně hladké funkce skutečně velikosti $O(\tau^2 + h^2)$, o což jsme se snažili. Metodami pro vyšetřování stability z odst. 13.8 se dá ukázat, že diferenční schéma založené na (13.11.1) je b e z p o d m í n ě s t a b i l n í vzhledem k počáteční podmínce ([10], [14], [18]). Z tvaru rovnice (13.11.1) je ihned vidět, že vztah mezi hodnotami přibližného řešení na n -té a $(n-1)$ -ní časové vrstvě má opět i m p l i c i t n í charakter.

Jednoduchou úpravou obdržíme z (13.11.1) vztah

$$(13.11.2) \quad -\frac{1}{2}rU_{k-1}^n + (1+r)U_k^n - \frac{1}{2}rU_{k+1}^n = \frac{1}{2}rU_{k-1}^{n-1} + (1-r)U_k^{n-1} + \frac{1}{2}rU_{k+1}^{n-1},$$

$$k = 1, 2, \dots, K-1.$$

Další postup je stejný jako u ryze implicitní metody. Rovnice (13.11.2) doplníme z okrajových podmínek o vztahy

$$(13.11.3) \quad \begin{aligned} U_0^n &= g_0(t_n), & U_K^n &= g_1(t_n), \\ U_0^{n-1} &= g_0(t_{n-1}), & U_K^{n-1} &= g_1(t_{n-1}) \end{aligned}$$

a dosadíme do (13.11.2) pro $k = 1$ a $k = K - 1$. Vektor hodnot přibližného řešení na n -té časové vrstvě $\mathbf{U}^n = [U_1^n, U_2^n, \dots, U_{K-1}^n]^T$ pak stanovíme ze soustavy lineárních algebraických rovnic

$$(13.11.4) \quad \mathbf{A}\mathbf{U}^n = \mathbf{B}\mathbf{U}^{n-1} + \mathbf{F}^n,$$

kde tentokrát \mathbf{A} je třídiagonální symetrická matice řádu $K - 1$ a tvaru

$$(13.11.5) \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1+r & -\frac{1}{2}r & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{1}{2}r & 1+r & -\frac{1}{2}r & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -\frac{1}{2}r & 1+r & -\frac{1}{2}r \\ 0 & \dots & 0 & -\frac{1}{2}r & 1+r \end{bmatrix},$$

\mathbf{B} je třídiagonální matice řádu $K - 1$ tvaru

$$(13.11.6) \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1-r & \frac{1}{2}r & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{2}r & 1-r & \frac{1}{2}r & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \frac{1}{2}r & 1-r & \frac{1}{2}r \\ 0 & \dots & 0 & \frac{1}{2}r & 1-r \end{bmatrix}$$

a $\mathbf{F}^n = [\frac{1}{2}r(g_0(t_n) + g_0(t_{n-1})), 0, \dots, 0, \frac{1}{2}r(g_1(t_n) + g_1(t_{n-1}))]^T$. Vektor \mathbf{U}^0 je opět dán počáteční podmínkou $U_k^0 = \phi(x_k)$, $k = 1, 2, \dots, K - 1$. Soustava rovnic (13.11.4) je pro každé n jednoznačně řešitelná, protože matice \mathbf{A} z (13.11.5) je ostře diagonálně dominantní.

Popsané dvouvrstvové metodě, která má stejně jako metoda z odst. 13.9 implicitní charakter, se říká *Crankova-Nicolsonova metoda*. Její výpočtová šablona je tvaru

$$(13.11.7) \quad \begin{array}{ccccc} \boxed{-\frac{1}{2}r} & \text{---} & \boxed{1+r} & \text{---} & \boxed{-\frac{1}{2}r} \\ & & | & & \\ \boxed{\frac{1}{2}r} & \text{---} & \boxed{1-r} & \text{---} & \boxed{\frac{1}{2}r} \end{array}$$

Crankova-Nicolsonova metoda je k o n v e r g e n t n í, řádu 2 v τ i h (pro dostatečně hladké funkce). Její algoritmus je prakticky stejný jako algoritmus ryze implicitní metody popsany v odst. 13.10. Soustavu (13.11.4) s ostře diagonálně dominantní maticí \mathbf{A} řešíme opět bez problémů metodou faktorizace z odst. 3.5. U Crankovy-Nicolsonovy metody je oproti ryze implicitní metodě pouze poněkud pracnější výpočet pravé strany této soustavy.

V literatuře ([14], [55]) se studují také *obecné dvouvrstvé metody*, které se odvozují stejně jako Crankova-Nicolsonova metoda, ale druhá derivace u_{xx} se v nich aproximuje nikoli průměrem, nýbrž v á ž e n ý m p r ů m ě r e m druhých centrálních diferencí na vrstvách t_n a t_{n-1} s vahami θ a $1 - \theta$, $0 \leq \theta \leq 1$. Místo (13.11.1) tak dostaneme diferenční rovnici

$$(13.11.8) \quad \frac{U_k^n - U_k^{n-1}}{\tau} = \theta a^2 \frac{U_{k+1}^n - 2U_k^n + U_{k-1}^n}{h^2} + (1 - \theta) a^2 \frac{U_{k+1}^{n-1} - 2U_k^{n-1} + U_{k-1}^{n-1}}{h^2},$$

$$k = 1, 2, \dots, K - 1.$$

Pro $\theta = \frac{1}{2}$ dostáváme právě Crankovu-Nicolsonovu metodu, volba $\theta = 1$ vede k ryze implicitní metodě, $\theta = 0$ dává explicitní metodu z odst. 13.1.

13.12. Příklad. Řešme Crankovou-Nicolsonovou metodou stejnou počátečně-okrajovou úlohu, jakou jsme v příkl. 13.3 řešili explicitní metodou. Stejně jako u explicitní metody volíme prostorový krok $h = 0,2$, ale využijeme toho, že Crankova-Nicolsonova metoda je bezpodmínečně stabilní a druhého řádu v τ , a časový krok τ zvolíme pětikrát větší, tj. $\tau = 0,1$. Bude tudíž $r = \tau/h^2 = 2,5$. Hodnoty přibližného řešení na časové vrstvě $t = 0,1$ nyní dostaneme provedením jednoho časového kroku metody.

Matice **A** z (13.11.5) má v našem případě na diagonále číslo 3, 5 a nenulové prvky mimo diagonálu jsou rovny $-1, 25$. Matice **B** z (13.11.6) má na diagonále číslo $-1, 5$ a její nenulové nediagonální prvky jsou rovny $1, 25$. Obě matice **A** i **B** jsou čtvrtého řádu. Vektor **F**¹ má všechny složky s výjimkou první rovny nule. Jeho první složka je (na 5D, srov. tab. 7) $0,5 \cdot 2,5 \cdot 1,78134 = 2,22668$.

Hodnoty **U**⁰ jsou dány v tab. 7. Nejprve z nich vypočítáme pravou stranu soustavy rovnic (13.11.4), tj. **BU**⁰ + **F**¹. Přibližné řešení **U**¹ na časové vrstvě $t = 0,1$ pak stanovíme jako řešení soustavy rovnic **AU**¹ = **BU**⁰ + **F**¹ s třídiagonální maticí **A**. Tuto soustavu rovnic vyřešíme metodou faktorizace z odst. 3.5, kde klademe $n = 4$, $a_i = -1, 25$, $i = 2, 3, 4$, $b_i = 3, 5$, $i = 1, 2, 3, 4$, a $c_i = -1, 25$, $i = 1, 2, 3$.

Jako výsledek obdržíme (na 5D) **U**¹ = [0,74343; 0,63251; 0,45958; 0,24162]^T. Porovnáme-li složky tohoto vektoru s hodnotami přesného řešení z tab. 7 (jsou tištěny kurzívou), vidíme, že jsme s pětikrát větším časovým krokem získali přesnější hodnoty než při výpočtu explicitní metodou. Pracnost jednoho kroku Crankovy-Nicolsonovy metody přitom není větší než pracnost pěti kroků explicitní metody (cvičení 13.17.5).

13.13. Monotónnost přibližného řešení. Dá se ukázat, že je-li počáteční podmínka ϕ monotónní funkce x a okrajové podmínky jsou konstanty $g_0(t) \equiv \phi(0)$, $g_1(t) \equiv \phi(1)$, bude přesné řešení úlohy (13.1.1) až (13.1.3) v libovolném časovém okamžiku opět monotónní funkcí x . Explicitní metoda, kterou jsme popsali v tomto článku, monotónnost řešení zachovává, je-li splněna podmínka stability (13.6.3). U implicitních metod typu (13.11.8) s $\theta \neq 1$ (např. u Crankovy-Nicolsonovy metody) se monotónnost zachovává pouze tehdy, je-li časový krok τ dostatečně malý ve srovnání s h . Konkrétní

podmínky monotónnosti mají tvar $\tau = O(h^2)$ a kladou tedy na τ podobná omezení jako podmínka stability u explicitní metody. Ryze implicitní metoda z odst. 13.9 zachovává monotónnost vždy, nezávisle na poměru τ a h . To je také důvod, proč se této metodě někdy (zejména při nespojitých datech a u nelineárních úloh) dává přednost před Crankovou-Nicolsonovou metodou.

13.14. Okrajové podmínky obsahující derivace. Uvažme nyní počátečně-okrajovou úlohu pro rovnici pro vedení tepla (13.1.1) s počáteční podmínkou (13.1.2), ale s okrajovými podmínkami, v nichž vystupují derivace u_x v bodech $x = 0$ a $x = 1$. Místo (13.1.3) tedy budeme mít např. podmínky (srov. odst. 12.5, 12.6)

$$(13.14.1) \quad \begin{aligned} \sigma_0 u(0, t) - u_x(0, t) &= g_0(t), \\ \sigma_1 u(1, t) + u_x(1, t) &= g_1(t). \end{aligned}$$

Nechť jsou funkce g_0, g_1 spojité a ohraničené pro $t \geq 0$ a nechť $\sigma_0 \geq 0, \sigma_1 \geq 0$. Chceme-li sestavit diferenční aproximaci úlohy (13.1.1), (13.1.2), (13.14.1), postupujeme stejně jako v předchozích odstavcích tohoto článku až na to, že okrajové podmínky (13.14.1) přepíšeme podobným způsobem, jako u standardních okrajových úloh pro obyčejné diferenciální rovnice (viz čl. 3). Skutečnost, že okrajové podmínky nyní nebudou splněny přesně, ovlivní jak řád konzistence, tak stabilitu (a případně konvergenci) uvažovaného schématu. Ukážeme to na dvou příkladech.

Předpokládejme nejprve, že k řešení dané úlohy použijeme explicitní metodu z odstavce 13.1 a že derivace u_x v podmínkách (13.14.1) aproximujeme s přesností $O(h)$ pomocí vztahů

$$(13.14.2) \quad u_x(0, t_n) \approx \frac{U_1^n - U_0^n}{h}, \quad u_x(1, t_n) \approx \frac{U_K^n - U_{K-1}^n}{h}.$$

Algoritmus explicitní metody se prakticky nezmění, pouze při přechodu od vrstvy t_n k vrstvě t_{n+1} musíme navíc vypočítat hodnoty U_0^{n+1}, U_K^{n+1} z diferenčních aproximací okrajových podmínek (13.14.1), tj. z rovnic

$$(13.14.3) \quad \begin{aligned} \sigma_0 U_0^{n+1} - \frac{U_1^{n+1} - U_0^{n+1}}{h} &= g_0(t_{n+1}), \\ \sigma_1 U_K^{n+1} + \frac{U_K^{n+1} - U_{K-1}^{n+1}}{h} &= g_1(t_{n+1}) \end{aligned}$$

(hodnoty U_1^{n+1}, U_{K-1}^{n+1} jsme již stanovili ze vzorce (13.1.8) stejně, jako v případě Dirichletových podmínek). Dá se ukázat, že diskretizační chyba metody bude nyní obecně pouze velikosti $O(\tau + h)$, tj. řád metody v h se sníží (bude stejný jako řád aproximace okrajových podmínek).

Snížení řádu metody v prostorovém kroku h lze zabránit např. tím, že zcela stejně jako v odst. 3.3.2 zavedeme fiktivní hodnoty $U_{-1}^{n+1}, U_{K+1}^{n+1}$ a derivace v okrajových podmínkách aproximujeme symetrickými diferenčními podíly (viz řádek 3 tabulky 3 v první

části této série učebních textů). Platnost diferenčních rovnic (13.1.8) pak žádáme i pro $k = 0$ a $k = K$ a do těchto dvou rovnic dosadíme za U_{-1}^{n+1} a U_{K+1}^{n+1} z aproximací okrajových podmínek. Je-li v tomto případě v podmínkách (13.14.1) $g_0(t) = \text{konst.}$ a $g_1(t) = \text{konst.}$, dá se maticovou analýzou ukázat, že podmínka stability výsledné explicitní metody vzhledem k počáteční podmínce nebude (13.6.3), ale

$$(13.14.4) \quad 0 < r \leq \min \left(\frac{1}{2 + \sigma_0 h}, \frac{1}{2 + \sigma_1 h} \right).$$

Crankova-Nicolsonova metoda pro úlohu (13.1.1), (13.1.2), (13.14.1) je popsána v [27]. Derivace v okrajových podmínkách se aproximují pomocí fiktivních hodnot. Maticová analýza stability ukazuje, že pro $\sigma_0 > 0$, $\sigma_1 > 0$ je metoda i nadále bezpodmínečně stabilní.

13.15. Počátečně-okrajové úlohy pro obecné parabolické rovnice. Je-li rovnice (13.1.1) nehomogenní, tj. tvaru $u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t)$, pak v duchu odvození obecné dvouvrstvé metody se na pravé straně diferenční rovnice (13.11.8) objeví navíc člen $\theta f(x_k, t_n) + (1 - \theta)f(x_k, t_{n-1})$. Postup, který jsme použili k odvození diferenčních aproximací rovnice pro vedení tepla v odst. 13.1 až 13.11, lze bez podstatných změn přenést na obecnou parabolickou rovnici tvaru $u_t + L(u) = f$, kde $L(u)$ je nějaký eliptický diferenciální operátor. Stačí k tomu zkombinovat poznatky získané v čl. 3 a čl. 7 s poznatky z předchozích odstavců tohoto článku. Zvláštní pozornost je třeba věnovat okrajovými podmínkám s derivacemi.

Jako příklad uvedeme diferenční aproximaci obecné samoadjungované lineární rovnice parabolického typu v \mathbb{R} (tj. v jedné prostorové proměnné) z odst. 12.3 Crankovou-Nicolsonovou metodou. Konkrétně budeme aproximovat rovnici

$$(13.15.1) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(p(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) - q(x, t)u + f(x, t).$$

Eliptickou část rovnice (13.15.1), tj.

$$(13.15.2) \quad -\frac{\partial}{\partial x} \left(p(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + q(x, t)u - f(x, t)$$

aproximujeme metodou integrálních identit z odst. 3.4. Pro jednoduchost předpokládáme, že koeficienty p , q i pravá strana f jsou spojitě funkce a síť je rovnoměrná, takže v (3.4.10) je $h_i = h_{i-1} = h$, $q_i^- = q_i^+ = q(x_i, t)$, $f_i^- = f_i^+ = f(x_i, t)$ a $\gamma_i^- = \gamma_i^+ = 0$. Sestrojíme-li nyní diferenční aproximace výrazů (13.15.2) podle (3.4.10) pro $t = t_n$ a $t = t_{n-1}$ a jinak postupujeme obdobně jako při odvození Crankovy-Nicolsonovy metody v odst. 13.11, dospějeme nakonec k diferenční aproximaci rovnice (13.15.1), která bude

mít tvar (viz cvičení 13.17.6)

$$(13.15.3) \quad \frac{U_k^n - U_k^{n-1}}{\tau} = \frac{1}{2}h^{-2}\{p(x_{k-1/2}, t_n)U_{k-1}^n - [p(x_{k-1/2}, t_n) + p(x_{k+1/2}, t_n)]U_k^n + p(x_{k+1/2}, t_n)U_{k+1}^n\} + \frac{1}{2}h^{-2}\{p(x_{k-1/2}, t_n)U_{k-1}^{n-1} - [p(x_{k-1/2}, t_{n-1}) + p(x_{k+1/2}, t_{n-1})]U_k^{n-1} + p(x_{k+1/2}, t_{n-1})U_{k+1}^{n-1}\} - \frac{1}{2}[q(x_k, t_n)U_k^n + q(x_k, t_{n-1})U_k^{n-1}] + \frac{1}{2}[f(x_k, t_n) + f(x_k, t_{n-1})].$$

Dá se ukázat [2], že diskretizační chyba má pro dostatečně hladké funkce opět řádovou velikost $O(\tau^2 + h^2)$ a že v případě Dirichletových okrajových podmínek je vzniklá metoda stabilní a konvergentní s řádem 2 v τ i h . Postup v případě rovnic s nespojitostmi v koeficientech a u okrajových podmínek obsahujících derivace je obdobný, ale technicky složitější. Vždy je třeba si klást otázku, zda odvozené diferenční schéma je konzistentní s aproximovanou úlohou, stabilní a konvergentní. Podrobnosti lze nalézt ve speciální literatuře [2], [10], [14], [18], [27].

13.16. Počátečně-okrajové úlohy ve více prostorových proměnných. Diferenční metody pro řešení parabolických rovnic v několika prostorových proměnných lze rozdělit v zásadě na dvě kategorie. První z nich tvoří zobecnění metod vyložených v odst. 13.1 až 13.15 tohoto článku. Do druhé kategorie patří metody střídavých směrů, které v jednorozměrném případě nemají obdobu. Omezíme se v dalším výkladu na typickou počátečně-okrajovou úlohu ve dvou prostorových proměnných, totiž na Dirichletovu úlohu pro rovnici

$$(13.16.1) \quad u_t = u_{xx} + u_{yy},$$

která má být řešena pro $0 < t \leq T$ na čtverci $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$. Počáteční podmínka je $u(x, y, 0) = \phi(x, y)$ a okrajová podmínka zadaná na $\partial\Omega$ je $u(x, y, t) = g(x, y, t)$. Předpokládáme rovnoměrnou síť s kroky $\Delta x, \Delta y, \tau$ a v dalším používáme značení $u_{i,j}^n = u(i\Delta x, j\Delta y, n\tau)$. Příslušnou hodnotu přibližného řešení značíme $U_{i,j}^n$.

Stejným postupem jako při odvození explicitní metody v odst. 13.1 dospějeme k diferenční aproximaci rovnice (13.16.1), která je tvaru

$$(13.16.2) \quad \frac{U_{i,j}^{n+1} - U_{i,j}^n}{\tau} = \frac{U_{i+1,j}^n - 2U_{i,j}^n + U_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} + \frac{U_{i,j+1}^n - 2U_{i,j}^n + U_{i,j-1}^n}{\Delta y^2}.$$

Diskretizační chyba je $O(\tau + \Delta x^2 + \Delta y^2)$, podmínka stability má tvar

$$(13.16.3) \quad \frac{\tau}{\Delta x^2} + \frac{\tau}{\Delta y^2} \leq \frac{1}{2}.$$

Vzhledem k tomuto omezení časového kroku se metoda (13.16.2) v praxi používá málokdy. Implicitní metodu z odst. 13.9 můžeme zobecnit zcela obdobným způsobem, ale matice soustavy rovnic pro výpočet $U_{i,j}^n$ z $U_{i,j}^{n-1}$ již není *t ř í d i a g o n á l n í* (cvičení 13.17.7) a vzniká tak otázka, jak tuto soustavu efektivně řešit. Metoda je opět bezpodmínečně stabilní. Totéž se týká zobecnění Crankovy-Nicolsonovy metody.

Hlavním charakteristickým rysem *metody střídavých směrů* je to, že se tu implicitní diferenční rovnice formulují tak, aby přechod od časové vrstvy t_n k vrstvě t_{n+1} spočíval v řešení souboru soustav lineárních algebraických rovnic, jejichž matice jsou *vesměs t ř í d i a g o n á l n í* (srov. též odst. 10.3). Tím dosáhneme toho, že výpočet hodnot $U_{i,j}^{n+1}$ z $U_{i,j}^n$ bude „ekonomický“. Celý postup ukážeme opět na Dirichletově počátečně-okrajové úloze pro rovnici (13.16.1) na jednotkovém čtverci.

Základní myšlenka spočívá v tom, že se při výpočtu přibližného řešení $U_{i,j}^{n+1}$ na $(n+1)$ -ní časové vrstvě z hodnot $U_{i,j}^n$ na n -té časové vrstvě zavede (a počítá) ještě pomocné přibližné řešení $U_{i,j}^{n+1/2}$. Toto přibližné řešení nemusí nutně aproximovat přesné řešení pro žádnou hodnotu t a zavádí se čistě z algoritmických důvodů. Výpočet podle algoritmu metody střídavých směrů probíhá tak, že se nejprve z hodnot $U_{i,j}^n$ vypočítají hodnoty $U_{i,j}^{n+1/2}$ a pak se z těchto hodnot vypočítají hodnoty $U_{i,j}^{n+1}$. Přitom se v každém tomto „půlkroku“ použije jiné diferenční schéma a úlohy prostorových souřadnic se střídají. V prvním půlkroku se u_{xx} aproximuje implicitně, tedy poměrnou diferencí ve vrstvě $t = t_{n+1/2} = t_n + \frac{1}{2}\tau$, kdežto u_{yy} se aproximuje explicitně, tedy poměrnou diferencí ve vrstvě $t = t_n$ užívající známé hodnoty $U_{i,j}^n$. V druhém půlkroku je tomu obráceně. Fyzikálně si můžeme celý proces představit tak, jako by v časových krocích se zlomkovými indexy transport tepla probíhal pouze ve směru osy x a v krocích s celočíselnými indexy pouze ve směru osy y .

Uvedeným postupem dostaneme diferenční schéma (součinitel $\frac{1}{2}$ na pravé straně je dán tím, že jednotlivé půlkroky mají velikost $\frac{1}{2}\tau$)

(13.16.4)

$$\begin{aligned} \frac{U_{i,j}^{n+1/2} - U_{i,j}^n}{\tau} &= \frac{1}{2} \left[\frac{U_{i-1,j}^{n+1/2} - 2U_{i,j}^{n+1/2} + U_{i+1,j}^{n+1/2}}{\Delta x^2} + \frac{U_{i,j-1}^n - 2U_{i,j}^n + U_{i,j+1}^n}{\Delta y^2} \right], \\ \frac{U_{i,j}^{n+1} - U_{i,j}^{n+1/2}}{\tau} &= \frac{1}{2} \left[\frac{U_{i-1,j}^{n+1/2} - 2U_{i,j}^{n+1/2} + U_{i+1,j}^{n+1/2}}{\Delta x^2} + \frac{U_{i,j-1}^{n+1} - 2U_{i,j}^{n+1} + U_{i,j+1}^{n+1}}{\Delta y^2} \right], \\ i &= 1, 2, \dots, I-1, \quad j = 1, 2, \dots, J-1, \quad n = 0, 1, \dots, N-1. \end{aligned}$$

Z (13.16.4) ihned vidíme, že při každém pevném $j = 1, 2, \dots, J-1$ dostaneme z $U_{i,j}^n$ hodnoty přibližného řešení $U_{1,j}^{n+1/2}, U_{2,j}^{n+1/2}, \dots, U_{I-1,j}^{n+1/2}$ řešením soustavy $I-1$ lineárních rovnic o $I-1$ neznámých s *třídiagonální* maticí. Hodnoty $U_{i,j}^{n+1/2}$ v mezivrstvě tedy počítáme postupně na přímkách $y = j\Delta y$, $j = 1, 2, \dots, J-1$ a přechod od n k $n + \frac{1}{2}$ tak představuje vyřešení $J-1$ soustav lineárních algebraických rovnic s *třídiagonální* maticí řádu $I-1$ (např. metodou faktorizace). Při přechodu od $n + \frac{1}{2}$ k n obdobně vypočítáme $U_{1,j}^{n+1}$ postupně na přímkách $x = i\Delta x$, $i = 1, 2, \dots, I-1$, tak, že vyřešíme $I-1$ soustav

lineárních rovnic s třídiagonální maticí řádu $J-1$. Dá se ukázat, že matice všech řešených soustav jsou regulární a uvedený postup je tedy proveditelný (cvičení 13.17.9).

Teoretická analýza metody střídavých směrů ukazuje, že vyloučením hodnot se zlomkovými indexy dostaneme z (13.16.4) dvouvrstvé schéma, jehož diskretizační chyba je velikosti $O(\tau^2 + \Delta x^2 + \Delta y^2)$ a které je bezpodmínečně stabilní. Aproximace okrajových podmínek na mezivrstvách představuje určitý problém, a to i v případě Dirichletovy okrajové podmínky $u(x, y, t) = g(x, y, t)$. Zdánlivě přirozená volba $U_{m,j}^{n+1/2} = g(x_m, y_j, t_n + \tau/2)$ v uzlech sítě na hranici čtverce ($m = 0, I$) totiž naruší řád chyby metody v τ . V literatuře se lze poučit o způsobu aproximace okrajových podmínek na mezivrstvách, který zajistí, že výsledná metoda bude druhého řádu jak v prostorových krocích, tak v časovém kroku (viz [14], [27], [55]).

Metoda střídavých směrů patří k nejlepším diferenčním metodám pro řešení počátečně-okrajových úloh pro parabolické rovnice ve více dimenzích. Na závěr poznamenáváme, že u oblastí s hranicí obecného tvaru vznikají obdobné problémy jako u rovnic eliptického typu a numerické řešení počátečně-okrajových úloh se dále komplikuje. Zde pouze odkazujeme na literaturu [2], [10], [14], [17], [27], [28], [55].

13.17. Cvičení

13.17.1. Řešte explicitní metodou úlohu z příkl. 13.5. Volte $h = \frac{1}{6}$, $\tau = \frac{1}{72}$, takže bude $r = \frac{1}{2}$. [Pro $n = 4$ dostáváme $U_1^4 = U_5^4 = \frac{3}{16}$, $U_3^4 = \frac{3}{8}$, ostatní hodnoty budou nulové.]

13.17.2. Ukažte, že podmínka (13.8.2), která má být splněna pro všechna $\lambda \in \mathbb{R}$, je ekvivalentní s podmínkou $0 < r \leq \frac{1}{2}$. [Návod: Je $0 \leq \sin^2 z \leq 1$ a při $z \in \mathbb{R}$ nabývá funkce $\sin^2 z$ všech hodnot z intervalu $\langle 0, 1 \rangle$.]

13.17.3. Ukažte, že podmínka $|1 - 4r \sin^2(k\pi/2K)| \leq 1$, $k = 1, 2, \dots, K-1$, je splněna, pokud platí $0 < r \leq \frac{1}{2}$. [Návod: Uvedená podmínka je ekvivalentní s podmínkou $0 \leq 4r \sin^2(k\pi/2K) \leq 2$.]

13.17.4. Popište metodu faktorizace pro řešení soustavy lineárních algebraických rovnic (13.9.5). [Návod: Užijte výsledky odst. 3.5.3. Je nyní $n = K-1$, $a_i \equiv -r$, $b_i \equiv 1 + 2r$, $c_i \equiv -r$.]

13.17.5. Porovnejte pracnost jednoho kroku Crankovy-Nicolsonovy metody a pěti kroků explicitní metody z odst. 13.1. [Návod: Vyjděte z toho, že k řešení soustavy lineárních algebraických rovnic (13.11.4) je zapotřebí zhruba $8K$ aritmetických operací.]

13.17.6. Odvoďte diferenční aproximaci (13.15.3). [Návod: Užijte postup naznačený v odst. 13.15.]

13.17.7. Odvoďte implicitní diferenční aproximaci rovnice (13.16.1). [Jako (13.16.2), ale na levé straně $(U_{i,j}^n - U_{i,j}^{n-1})/\tau$.]

13.17.8. Fourierovou metodu vyšetřete stabilitu explicitní metody z odst. 13.1. [Návod: Položte $Z_k^n = q^n \exp(i\lambda k h)$, dosadte do rekurence (13.1.8) a vypočítejte q jako funkci λ . Použijte von Neumannovu podmínku stability (13.8.1) a vztah $1 - \cos z = 2 \sin^2(z/2)$.]

13.17.9. Vyšetřete vlastnosti soustav lineárních algebraických rovnic vznikajících při numerickém řešení počátečně-okrajové úlohy z odst. 13.16 metodou střídavých směrů. [Návod: Předpokládejte, že hodnoty přibližného řešení na hranici jsou známy. Postupujte obdobně jako u Crankovy-Nicolsonovy metody v odst. 13.11. Matice soustav jsou ostře diagonálně dominantní.]

14. Semidiskrétní metody pro parabolické rovnice

14.1. Metoda přímek. Dostupnost důmyslných a spolehlivých algoritmů a programů pro automatickou integraci počátečních úloh pro obyčejné diferenciální rovnice [37] vedla ke snaze využít tyto programy k řešení počátečně-okrajových úloh pro evoluční rovnice. *Metoda přímek* je koncepčně zcela jednoduchá. Pro danou parciální diferenciální rovnici či soustavu parciálních diferenciálních rovnic (nikoli nutně evolučních) se diskretizují všechny nezávisle proměnné s výjimkou jediné. Tato semidiskrétní procedura vede pak k počáteční či okrajové úloze pro soustavu obyčejných diferenciálních rovnic, která se řeší na počítači. Proměnnou, která se nediskretizuje, je u evolučních úloh časová proměnná t a metoda přímek zde vede na počáteční úlohy. Metoda se snadno realizuje i v případě nelineárních diferenciálních rovnic.

Mějme např. počátečně-okrajovou úlohu pro rovnici

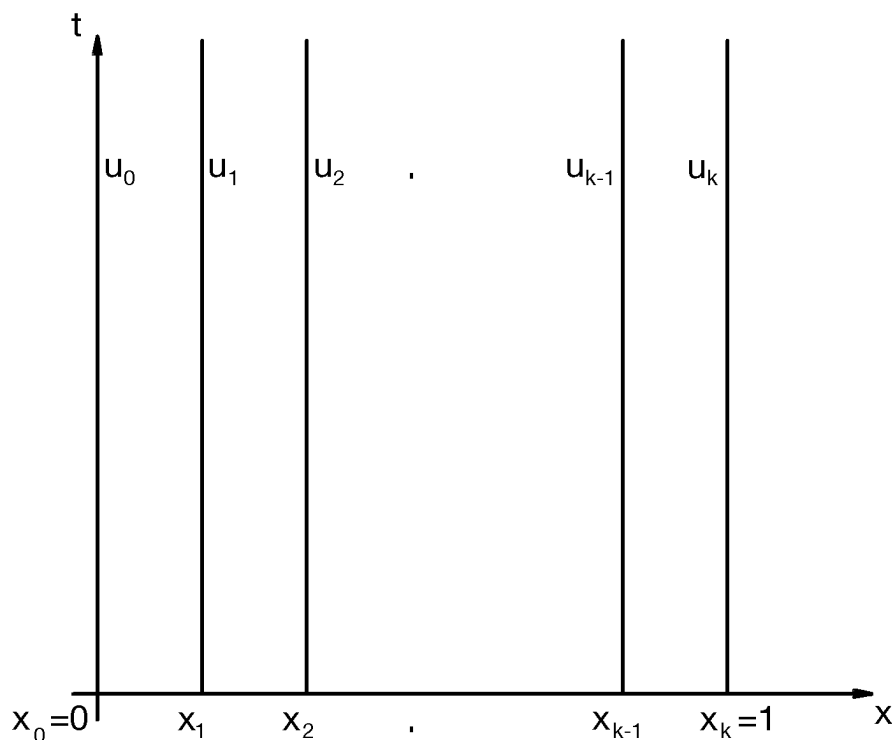
$$(14.1.1) \quad u_t = f(x, t, u_x, u_{xx}), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0,$$

s okrajovými podmínkami

$$(14.1.2) \quad u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad t > 0,$$

a s počáteční podmínkou

$$(14.1.3) \quad u(x, 0) = \phi(x), \quad x \in (0, 1).$$



Obr. 40. Metoda přímek v čase.

Diskretizujeme prostorovou proměnnou x , časovou proměnnou t ponecháme spojitou. Sestrojíme proto na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ rovnoměrnou síť \mathcal{S} s krokem h , $\mathcal{S} = \{x_k = kh, k = 0, 1, \dots, K\}$, $h = 1/K$. Označíme $u_k(t) = u(x_k, t)$ restrikcí funkce u na polopřímku $x = x_k, t \geq 0$ (odtud název metoda přímek, viz obr. 40).

Na každé z vnitřních přímek $x = x_k, k = 1, 2, \dots, K-1$, aproximujeme derivace u_x a u_{xx} v rovnici (14.1.1) poměrnými diferencemi z hodnot funkce u na sousedních přímkách. Výsledkem bude soustava obyčejných diferenciálních rovnic

$$(14.1.4) \quad \begin{aligned} \frac{dU_k}{dt} &= f\left(x_k, t, \frac{U_{k+1} - U_{k-1}}{2h}, \frac{U_{k-1} - 2U_k + U_{k+1}}{h^2}\right) = \\ &= F_k(t, U_{k-1}, U_k, U_{k+1}), \quad k = 1, 2, \dots, K-1, \end{aligned}$$

pro funkce $U_k = U_k(t), k = 0, 1, \dots, K$, aproximující funkce $u_k = u_k(t), k = 0, 1, \dots, K$. Z okrajových podmínek (14.1.2) máme

$$(14.1.5) \quad U_0(t) = U_K(t) = 0, \quad t > 0,$$

a tyto hodnoty z (14.1.4) vyloučíme. Tím je počet rovnic stejný jako počet neznámých funkcí. Počáteční podmínka (14.1.3) nám pro soustavu (14.1.4) dá počáteční podmínky

$$(14.1.6) \quad U_k(0) = \phi(x_k), \quad k = 1, 2, \dots, K-1.$$

Tím jsme počátečně-okrajovou úlohu (14.1.1) až (14.1.3) aproximovali počáteční úlohou (14.1.4), (14.1.6), kterou můžeme řešit vhodným souborem programů pro integraci takových počátečních úloh [37]. Popsané metodě se někdy říká *klasická metoda přímek* nebo *metoda přímek v čase*.

14.2. Semidiskrétní Galerkinova metoda. Není vůbec nutné provádět prostorovou diskretizaci právě metodou konečných diferencí. Dají se využít i jiné diferenční metody a také metoda konečných prvků [30], [55]. V takovém případě jako Galerkinovu aproximaci řešení hledáme funkci tvaru

$$(14.2.1) \quad u^{(N)}(x, t) = \sum_{n=1}^N c_n(t) v_n(x),$$

kde známé funkce $\{v_n\}$ tvoří bázi vhodného podprostoru (viz čl. 4). Koeficienty lineární kombinace (14.2.1) nyní z á v í s e j í n a č a s e a výsledkem diskretizační procedury je počáteční úloha pro soustavu obyčejných diferenciálních rovnic s neznámými funkcemi $c_n, 1, 2, \dots, N$, kterou integrujeme v čase.

14.3. Numerické řešení vzniklých počátečních úloh. Počáteční úlohy vznikající v metodě přímek jsou často úlohy s velkým tlumením (viz [37]) a k jejich numerickému řešení je třeba přistupovat s ohledem na tuto skutečnost. Ukážeme to na příkladu úlohy (14.1.1) až (14.1.3), kde (14.1.1) je lineární rovnice pro vedení tepla

$$(14.3.1) \quad u_t = u_{xx}.$$

Metoda přímek v takovém případě vede na počáteční úlohu

$$(14.3.2) \quad \mathbf{U}' = h^{-2}\mathbf{A}\mathbf{U}, \quad \mathbf{U}(0) = \boldsymbol{\Phi},$$

kde $\mathbf{U}(t) = [U_1(t), U_2(t), \dots, U_{K-1}(t)]^T$, $\boldsymbol{\Phi} = [\phi(x_1), \phi(x_2), \dots, \phi(x_{K-1})]^T$ a matice \mathbf{A} je třídiagonální matice, která má diagonální prvky rovné -2 a jedničky nad a pod diagonálou.

Vlastní čísla λ_k matice $h^{-2}\mathbf{A}$ jsou (viz [53])

$$(14.3.3) \quad \lambda_k = -\frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{k\pi h}{2}, \quad k = 1, 2, \dots, K-1,$$

a je $\lambda_{K-1} < \lambda_{K-2} < \dots < \lambda_1 < 0$. Protože (máme $Kh = 1$)

$$|\lambda_1| = \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{\pi h}{2}, \quad |\lambda_{K-1}| = \frac{4}{h^2} \cos^2 \frac{\pi h}{2},$$

má při $h \rightarrow 0$ podíl $|\lambda_{K-1}|/|\lambda_1|$ limitu $+\infty$ a pro malá h tudíž bude (14.3.2) typický stiff-systém (viz [37]).

Při řešení počátečních úloh vznikajících v metodě přímek tedy můžeme být nuceni užít software pro řešení stiff-systémů. Příkladem použitelného souboru programů je soubor GEARM, stručně popsáný v [37], a různé jeho varianty. Při numerickém řešení stiff-systémů $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y})$ bývá třeba počítat hodnoty Jacobiovy matice $\partial \mathbf{f} / \partial \mathbf{y}$. U systémů získaných metodou přímek tato matice má v každém řádku pouze několik nenulových prvků, popř. je pásová. Toho obecné programové soubory pro řešení stiff-systémů nedokáží využít. Konstruují a používají se proto speciální programy pro řešení takových počátečních úloh.

Řešíme-li lineární počátečně-okrajovou úlohu semidiskrétní Galerkinovou metodou, vzniká další komplikace, neboť výsledná soustava obyčejných diferenciálních rovnic je tvaru ([30], [55])

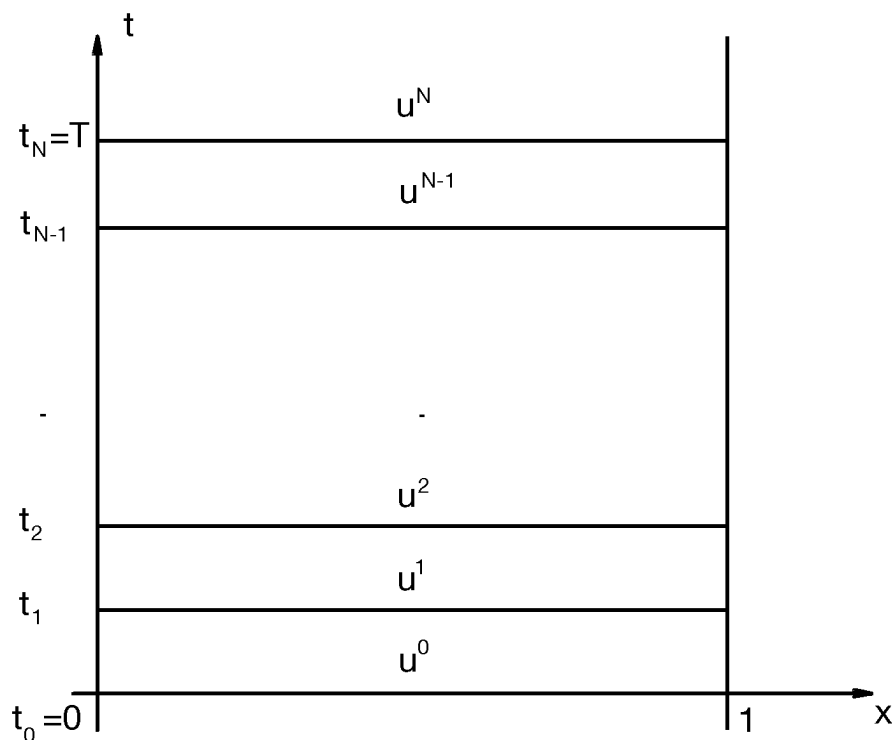
$$(14.3.4) \quad \mathbf{B}\mathbf{y}' = \mathbf{G}\mathbf{y} + \mathbf{f},$$

přičemž matice \mathbf{B} nemusí být jednotková (ani diagonální). Řešení soustav diferenciálních rovnic typu (14.3.4) ovšem vyžaduje speciální programové vybavení. To je dnes ve světě vcelku běžně k dispozici a metoda přímek tvoří základ mnoha souborů programů pro řešení poměrně obecných nelineárních počátečně-okrajových úloh pro rovnice parabolického typu, především v jedné prostorové proměnné.

14.4. Metoda časové diskretizace. V této metodě d i s k r e t i z u j e m e časovou proměnnou t , prostorové proměnné ponecháváme spojitě. Předvedeme ji na příkladu lineární počátečně-okrajové úlohy pro parabolickou rovnici v samoadjungovaném tvaru (odst. 12.3)

$$(14.4.1) \quad \begin{aligned} u_t &= \frac{\partial}{\partial x} \left[p(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right] - q(x, t)u + f(x, t), \\ 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq T, \\ u(x, 0) &= \phi(x), \quad x \in (0, 1), \\ u(0, t) &= g_0(t), \quad u(1, t) = g_1(t), \quad t \in (0, T). \end{aligned}$$

Předpokládáme, že všechny funkce vystupující ve (14.4.1) jsou ve svých definičních oborech spojitě, že funkce p je spojitě diferencovatelná podle x a že na obdélníku $\langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, T \rangle$ platí $p(x, t) > 0$, $q(x, t) \geq 0$. Na intervalu $0 \leq t \leq T$ sestrojíme rovnoměrnou síť $\mathcal{S} = \{t_n = n\tau, n = 0, 1, \dots, N\}$ s krokem $\tau = T/N$. Označíme $u^n(x) = u(x, t_n)$ restrikcí funkce u na úsečku $t = t_n$, $0 \leq x \leq 1$ (viz obr. 41).



Obr. 41. Metoda časové diskretizace.

Prostorové derivace nyní ponecháme beze změny a derivaci u_t ve (14.4.1) aproximujeme v bodě (x, t_n) metodou konečných diferencí vztahem

$$(14.4.2) \quad u_t(x, t_n) \approx \frac{u(x, t_n) - u(x, t_{n-1})}{\tau} = \frac{u^n(x) - u^{n-1}(x)}{\tau}.$$

Z (14.4.1) tak pro funkce $U^n = U^n(x)$, $n = 0, 1, \dots, N$, aproximující na jednotlivých vrstvách funkce u^n , $n = 0, 1, \dots, N$, dostaneme vztahy

$$(14.4.3) \quad \frac{U^n(x) - U^{n-1}(x)}{\tau} = [p^n(x)(U^n)']' - q^n(x)U^n + f^n(x),$$

$$n = 1, 2, \dots, N,$$

$$U^0(x) = \phi(x), \quad 0 \leq x \leq 1,$$

$$U^n(0) = g_0(t_n), \quad U^n(1) = g_1(t_n),$$

kde jsme označili $p^n(x) = p(x, t_n)$, $q^n(x) = q(x, t_n)$ a $f^n(x) = f(x, t_n)$. Diferenciální rovnice ve (14.4.3) ještě upravíme na tvar

$$(14.4.4) \quad -[p^n(x)(U^n)']' + [q^n(x) + \tau^{-1}]U^n = f^n(x) + \tau^{-1}U^{n-1}(x),$$

$$n = 1, 2, \dots, N.$$

Vidíme, že počátečně-okrajová úloha (14.4.1) přešla v posloupnost okrajových úloh pro obyčejné diferenciální rovnice druhého řádu. Funkce U^0 je dána počáteční podmínkou, takže z těchto okrajových úloh můžeme postupně stanovit funkce U^1, U^2, \dots, U^N . Všimněme si ještě, že funkce U^{n-1} , kterou jsme vypočítali jako řešení okrajové úlohy na časové vrstvě t_{n-1} , vystupuje na následující časové vrstvě t_n v pravé straně rovnice (14.4.4). Popsané metodě pro přibližné řešení úlohy (14.4.1) se říká *metoda časové diskretizace* nebo *Rotheova metoda*.

14.5. Numerické řešení vzniklých okrajových úloh. Okrajové úlohy získané Rotheovou metodou řešíme numerickými metodami popsány v prvním svazku této třídílné série učebních textů. Použijeme-li k řešení úlohy (14.4.3) metodu konečných diferencí, dostaneme opět implicitní diferenční metodu popsanou v čl. 13. Díky linearitě úlohy (14.4.3) a jejímu samoadjungovanému tvaru však můžeme s výhodou použít metodu přesunu okrajových podmínek z odst. 2.3 a řešení okrajových úloh v konečné fázi opět převést na řešení úloh počátečních.

Pokud jsou splněny předpoklady o úloze (14.4.1) uvedené v odst. 14.4, mají okrajové úlohy (14.4.3) řešení, a to jediné. Zároveň z odst. 2.3 víme, že v takovém případě je algoritmus metody normalizovaného přesunu vždy proveditelný, tj. řešení příslušných počátečních úloh existují na celém intervalu $\langle 0, 1 \rangle$. Pro speciální počátečně-okrajové úlohy tvaru (14.4.1) apod. v jedné prostorové proměnné vede Rotheova metoda v kombinaci s metodou normalizovaného přesunu na spolehlivé a rychlé algoritmy pro výpočet přibližného řešení. Příkladem takové úlohy je úloha (14.4.1) s $p(x, t)$ a $q(x, t)$ nezávislými na x .

Vzniklé okrajové úlohy je rovněž možné řešit metodami Galerkinova typu. Podrobný výklad metody časové diskretizace v takovém případě nalezne čtenář např. v [39].

14.6. Cvičení

14.6.1. Metodou přímek z odst. 14.1 řešte počátečně-okrajovou úlohu (13.1.1) až (13.1.3) pro rovnici pro vedení tepla. Vzniklou počáteční úlohu řešte a) explicitní Eulerovou metodou ([37], odst. 17.3); b) implicitní Eulerovou metodou ([37], odst. 19.7); c) lichoběžníkovým pravidlem ([37], odst. 19.7). Porovnejte výsledné algoritmy s algoritmy metod z čl. 13. [Postup je ekvivalentní aplikaci a) explicitní metody z odst. 13.1; b) ryze implicitní metody z odst. 13.9; c) Crankovy-Nicolsonovy metody z odst. 13.11.]

14.6.2. Metodou přímek řešte počátečně-okrajovou úlohu (13.1.1) až (13.1.3) a prostorovou diskretizaci proveďte metodou kolokace z odst. 4.1.1. Jaký bude tvar vzniklé počáteční úlohy? [Návod: Přibližné řešení hledejte ve tvaru (14.2.1), kde báze funkce zvolíte tak, aby $v_n(0) = v_n(1) = 0$, $n = 1, 2, \dots, N$. Koeficienty $c_n(t)$, $n = 1, 2, \dots, N$, určíte z požadavku, aby přibližné řešení (14.2.1) v bodech (x_n, t) , $n = 1, 2, \dots, N$, splňovalo diferenciální rovnici (13.1.1). Pro koeficienty $c_n(t)$ tak dostanete soustavu diferenciálních rovnic tvaru (14.3.4).]

14.6.3. Popište metodu časové diskretizace pro řešení nelineární počátečně-okrajové úlohy (14.1.1) až (14.1.3), kde $f(x, t, u_x, u_{xx}) = a^2 u_{xx} + u_x^2 + F(x, t)$, $a^2 > 0$. Navrhněte metodu pro řešení vzniklých okrajových úloh. [Návod: Postupujte stejně jako v odst. 14.4. Vzniklé okrajové úlohy lze řešit metodou střelby (odst. 2.2) nebo metodou konečných diferencí (odst. 3.3.6).]

14.6.4. Popište algoritmus metody normalizovaného přesunu pro řešení okrajových úloh (14.4.3). [Návod: Postupujte stejně jako v odst. 2.3.6, kde nyní $p(x) = p^n(x)$, $q(x) = q^n(x) + \tau^{-1}$, $f(x) = f^n(x) + \tau^{-1}U^{n-1}(x)$ atd.]

15. Úlohy pro parciální diferenciální rovnice hyperbolického typu

15.1. Rovnice zákonů zachování v mechanice. Zákony zachování hmotnosti, hybnosti a energie lze psát ve tvaru (viz [13], [54])

$$(15.1.1) \quad \begin{aligned} \rho_t + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) &= 0, \\ (\rho \mathbf{v})_t + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} - \boldsymbol{\sigma}) &= \rho \mathbf{f}, \\ (\rho w)_t + \operatorname{div}(\rho w \mathbf{v} - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{q}) &= \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}. \end{aligned}$$

Vektorové funkce \mathbf{v} , \mathbf{f} a \mathbf{q} mají význam rychlosti hmotnostní částice, vnějších sil a tepelného toku, skalární funkce ρ a w mají význam hustoty a celkové energie ($w = e + \frac{1}{2}v^2$, e je vnitřní energie) a $\boldsymbol{\sigma}$ je tenzor napětí. Proměnná t má význam času a symbol $\operatorname{div}(\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} - \boldsymbol{\sigma})$ chápeme jako vektor o složkách $\sum_j \partial[(\rho v_i v_j) - \sigma_{ij}]/\partial x_j$, kde v_i jsou složky vektoru \mathbf{v} , σ_{ij} jsou složky tenzoru $\boldsymbol{\sigma}$ a x_j jsou souřadnice bodu \mathbf{x} . Člen $\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v}) = \sum_i \partial[\sum_j \sigma_{ij} v_j]/\partial x_i$ charakterizuje účinky plošných (tlakových) sil v bodě \mathbf{x} .

Analýza soustavy (15.1.1) je složitá. Proto se studují jednodušší podoby této soustavy při konkrétních fyzikálních a geometrických předpokladech. Předpokládáme-li např., že se uvažované funkce mění pouze ve směru jedné prostorové proměnné $x \in \mathbb{R}$, nahradíme-li $\boldsymbol{\sigma} \equiv -p$, kde p je tlak, a zanedbáme-li teplotní změny a vliv vnějších sil ($\mathbf{q} = 0$, $\mathbf{f} = 0$), dostaneme soustavu rovnic

$$(15.1.2) \quad \begin{aligned} \rho_t + (\rho v)_x &= 0, \\ (\rho v)_t + (\rho v^2 + p)_x &= 0, \\ (\rho w)_t + (\rho w v + p v)_x &= 0, \end{aligned}$$

kde v nyní značí složku vektoru rychlosti ve směru x . Rovnicím soustavy (15.1.2) se říká *rovnice jednorozměrného proudění*.

Označíme-li

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho v \\ \rho w \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho v^2 + p \\ v(\rho w + p) \end{bmatrix},$$

můžeme soustavu (15.1.2) psát ve tvaru

$$(15.1.3) \quad \mathbf{u}_t + [\mathbf{F}(\mathbf{u})]_x = \mathbf{0}.$$

Protože i (15.1.3) je jistým zápisem zákonů zachování, hovoří se v této souvislosti o rovnici v *konzervativním tvaru* (conservare = zachovat (lat.)).

Nedochází-li v proudící tekutině ke změnám energie (resp. lze-li tyto změny zanedbat), stačí uvažovat pouze první dvě rovnice soustavy (15.1.2). Provedeme-li ve druhé

rovnici soustavy (15.1.2) naznačené derivování a dosadíme sem za ρ_t z první rovnice, dostaneme po jednoduché úpravě *soustavu rovnic akustiky*

$$(15.1.4) \quad \begin{aligned} \rho_t + v\rho_x + \rho v_x &= 0, \\ v_t + vv_x + \rho^{-1}p_x &= 0. \end{aligned}$$

V této soustavě však vystupují tři neznámé funkce ρ , v a p . Aby tato soustava mohla být základem rozumně formulované úlohy, připojujeme k ní dodatečnou, tzv. *stavovou podmínku*. Totéž lze ovšem říci už pro soustavu (15.1.1). Pro soustavu (15.1.4) se stavová podmínka bere ve tvaru $p = p(\rho)$, tj. předpokládá se, že tlak závisí na hustotě. Potom $p_x = (dp/d\rho)\rho_x$ a při označení $c^2 = dp/d\rho$ můžeme funkci p_x ze soustavy (15.1.4) formálně vyloučit. Dostaneme tak soustavu

$$(15.1.5) \quad \begin{aligned} \rho_t + v\rho_x + \rho v_x &= 0, \\ v_t + c^2\rho^{-1}\rho_x + vv_x &= 0. \end{aligned}$$

Jestliže můžeme předpokládat, že ρ , p a v se málo liší od konstant ρ_0 , p_0 a v_0 , potom pro malé změny $\bar{\rho} = \rho - \rho_0$, $\bar{p} = p - p_0$, $\bar{v} = v - v_0$ při zanedbání členů vyšších řádů a volbě $v_0 = 0$ dostaneme z nelineární soustavy (15.1.5) *linearizovanou soustavu rovnic akustiky* (srov. [54], odst. 3.3)

$$(15.1.6) \quad \begin{aligned} \bar{\rho}_t + c^2\rho_0\bar{v}_x &= 0, \\ \bar{v}_t + \rho_0^{-1}\bar{p}_x &= 0. \end{aligned}$$

Zde $c^2 = (dp/d\rho)|_{\rho=\rho_0}$ je konstanta a představuje rychlost šíření zvuku v prostředí charakterizovaném stavovou podmínkou (stavovou rovnicí) $p = c^2\rho$. V ideálním plynu je např. $p = RT\rho$.

Poznamenejme, že derivováním první rovnice v (15.1.6) podle t a druhé rovnice podle x a vyloučením smíšené derivace $\bar{v}_{xt} = \bar{v}_{tx}$ dostaneme parciální diferenciální rovnici druhého řádu pro neznámou funkci \bar{p} ve tvaru

$$(15.1.7) \quad \bar{p}_{tt} = c^2\bar{p}_{xx},$$

kteří se říká *vlnová rovnice*. Funkce \bar{p} v rovnici (15.1.7) se nazývá *tlaková vlna*.

15.2. Lineární hyperbolická rovnice prvního řádu

15.2.1. Rovnice v jedné prostorové proměnné. Budeme se nyní zabývat parciální diferenciální rovnicí tvaru

$$(15.2.1) \quad a_0(x, t)u_t + a_1(x, t)u_x + b(x, t)u = f(x, t),$$

v níž a_0 , a_1 , b a f jsou reálné spojité funkce proměnných x a t . Předpokládáme ještě, že $a_0^2 + a_1^2 \neq 0$. Diferenciální rovnici typu (15.2.1) nazýváme *lineární hyperbolickou rovnicí prvního řádu*.

Pro analýzu úloh pro rovnici (15.2.1) je důležitý pojem charakteristiky. Nechť funkce $x = x(\tau)$, $t = t(\tau)$, $t \in I \subset \mathbb{R}$ jsou řešením soustavy obyčejných diferenciálních rovnic

$$(15.2.2) \quad \frac{dx}{d\tau} = a_1(x, t), \quad \frac{dt}{d\tau} = a_0(x, t).$$

Potom křivku

$$(15.2.3) \quad \Gamma = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 : x = x(\tau), t = t(\tau), \tau \in I\}$$

nazýváme *charakteristikou rovnice* (15.2.1) a rovnice (15.2.2) *rovnícemi charakteristik*. Nepřipojíme-li k rovnicím (15.2.2) počáteční podmínky pro $\tau = \tau_0$

$$(15.2.4) \quad x(\tau_0) = x_0, \quad t(\tau_0) = t_0,$$

je rovnicemi (15.2.2) určen jednoparametrický systém křivek, tzv. *systém charakteristik*. Vektoru $[a_1, a_0]$ se říká *charakteristický směr* v bodě (x, t) (tečný vektor charakteristiky). Chceme-li zdůraznit, že máme na mysli charakteristiku určenou podmínkami (15.2.4), tj. charakteristiku procházející bodem $M = (x_0, t_0)$, uijeme k jejímu označení symbolu Γ_M .

Je-li $a_0(x, t) \equiv 1$, a tedy $dt/d\tau = 1$, lze za parametr křivky Γ vzít proměnnou t a rovnici charakteristik psát ve tvaru

$$(15.2.4) \quad \frac{dx}{dt} = a_1(x, t).$$

Na charakteristice Γ , tj. pro $(x, t) \in \Gamma$, lze užitím rovnic (15.2.2) přepsat rovnici (15.2.1) na tvar obyčejné diferenciální rovnice

$$(15.2.5) \quad \frac{du}{d\tau} + b(x, t)u = f(x, t),$$

v níž $u = u(x(\tau), t(\tau))$ a $du/d\tau = a_1u_x + a_0u_t$ je derivace u podle charakteristického směru v bodě charakteristiky. Rovnici (15.2.5) se také říká *vztah na charakteristice*.

15.2.2. Počáteční úloha. Pro $x \in \mathbb{R}$ a $t \in (0, T)$, $T > 0$, uvažujme rovnici

$$(15.2.6) \quad u_t + a(x, t)u_x + b(x, t)u = f(x, t).$$

Počáteční úlohou pro rovnici (15.2.6) rozumíme úlohu stanovit funkci $u = u(x, t)$, která vyhovuje této rovnici a pro $t = 0$ splňuje *počáteční podmínku*

$$(15.2.7) \quad u(x, 0) = \phi(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

O daných funkcích a , b , f a ϕ předpokládáme obvykle, že jsou spojité.

Podstatné pro řešitelnost naší počáteční úlohy je, aby každá charakteristika z jedno-parametrického systému charakteristik rovnice (15.2.6) protínala přímku $t = 0$ v jednom bodě. Potom totiž charakteristika Γ_M procházející bodem $M = (x_0, 0)$, $x_0 \in \mathbb{R}$, je určena podmínkami

$$(15.2.8) \quad \frac{dx}{dt} = a(x, t), \quad x(0) = x_0,$$

jednoznačně a funkce $u = u(x, t)$, která je řešením počáteční úlohy (15.2.6), (15.2.7), bude na charakteristice Γ_M řešením počáteční úlohy (*úloha na charakteristice* Γ_M)

$$(15.2.9) \quad \frac{du}{dt} + b(x(t), t)u = f(x(t), t), \quad u(x(0), 0) = \phi(x(0)).$$

Zde ovšem proměnnou t chápeme jako parametr charakteristiky Γ_M .

Uvedené souvislosti nám dovolují dělat závěry o řešitelnosti počáteční úlohy (15.2.6), (15.2.7) na základě řešitelnosti úlohy (15.2.9) a případně řešení určit. Takovému postupu se říká *metoda charakteristik*.

V [54] je uvedeno, že když funkce ϕ je spojitě diferencovatelná pro $x \in \mathbb{R}$, funkce a , b a f jsou spojitě diferencovatelné pro $x \in \mathbb{R}$, $t \in \langle 0, T \rangle$ a každým bodem $M = (x, t) \in \mathbb{R} \times \langle 0, T \rangle$ prochází jediná charakteristika Γ_M a tato charakteristika protíná osu x v jednom bodě, potom existuje jediné řešení u úlohy (15.2.6), (15.2.7) a toto řešení je spojitě diferencovatelné. Takovému řešení se říká *klasické řešení*.

Poznamenejme ještě, že pokud charakteristiky osu x neprotínají, počáteční úloha s počáteční podmínkou pro $t = 0$ řešitelná není, i když všechny dané funkce vystupující v úloze jsou dostatečně hladké. Říkáme, že taková počáteční úloha je *nekorektně formulovaná*.

15.2.3. Příklad. Mějme počáteční úlohu

$$(15.2.10) \quad u_t + au_x = f(x, t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \in (0, T),$$

$$(15.2.11) \quad u(x, 0) = \phi(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

kde a je daná konstanta, ϕ a f jsou dané spojitě diferencovatelné funkce svých proměnných.

Snadno vypočteme, že libovolným bodem $M = (x_0, t_0) \in \mathbb{R} \times (0, T)$ prochází charakteristika Γ_M (přímka o rovnici $x = x_0 + a(t - t_0)$), která protíná osu x v bodě $(x_1, 0) = (x_0 - at_0, 0)$. Úloha na charakteristice (15.2.9) má zde tvar

$$(15.2.12) \quad \frac{du}{dt} = f(x_0 + a(t - t_0), t), \quad u(x_0 - at_0, 0) = \phi(x_0 - at_0).$$

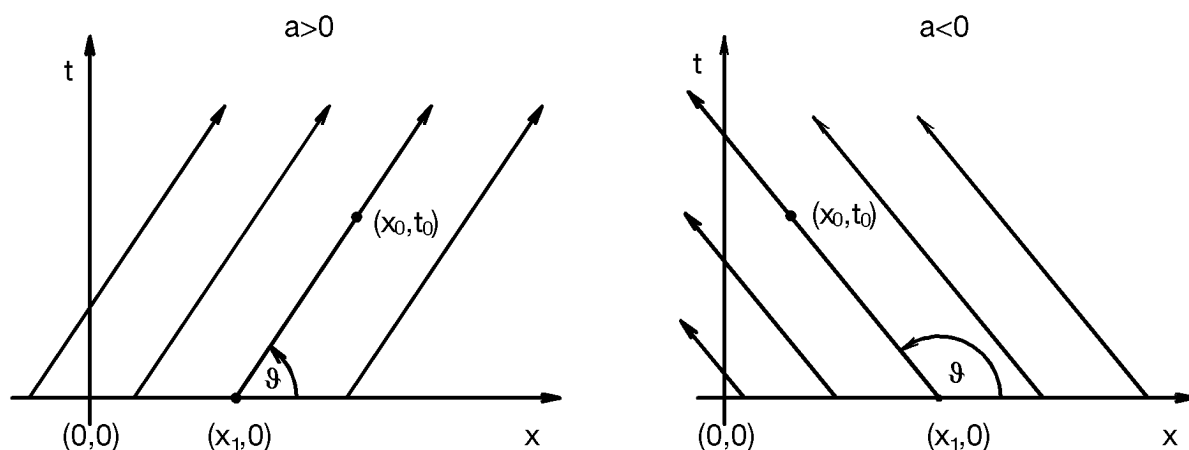
Protože na Γ_M je $u = u(x_0 + a(t - t_0), t)$, dostaneme integrováním rovnice (15.2.12) přes interval $\langle 0, t_0 \rangle$ výsledek

$$u(x_0, t_0) - u(x_0 - at_0, 0) = \int_0^{t_0} f(x_0 + a(t - t_0), t) dt.$$

Přeznačením (x_0, t_0) na (x, t) dostaneme řešení naší počáteční úlohy ve tvaru

$$(15.2.13) \quad u(x, t) = \phi(x - at) + \int_0^t f(x + a(s - t), s) ds.$$

Vidíme, že řešení úlohy (15.2.10), (15.2.11) je v bodě (x_0, t_0) jednoznačně určeno hodnotou funkce ϕ v bodě $(x_1, 0)$ a hodnotami funkce f v úseku charakteristiky mezi body $(x_1, 0)$ a (x_0, t_0) . Úhel $\vartheta = \arctg(1/a)$ určuje sklon charakteristik (viz obr. 42). Dále ze vzorce (15.2.13) vidíme, že když $f \equiv 0$, bude řešení u v bodě (x_0, t_0) rovné hodnotě $\phi(x_1)$, tj. řešení bude na charakteristice konstantní. Snadno se dokáže obecnější tvrzení: Diferencovatelná funkce $u = u(x, t)$ je konstantní na charakteristice Γ rovnice $u_t + au_x = 0$ právě tehdy, když je řešením této rovnice.



Obr. 42. Jednparametrický systém charakteristik rovnice $u_t + au_x = 0$. Charakteristikami jsou přímky o rovnici $x - at = C$, $\vartheta = \arctg(1/a)$.

15.2.4. Poznámky. V závěru odst. 15.2.2 jsme uvedli postačující podmínky existence klasického řešení počáteční úlohy (15.2.6), (15.2.7). Pro méně hladké funkce ϕ , f vzorce typu (15.2.13), které se dají odvodit i pro obecnější počáteční úlohy (viz [54]), neztrácejí svoji platnost, dávají však řešení méně hladké (tzv. *zobecněné řešení*). Když např. bude funkce ϕ v nějakém bodě $x_1 \in \mathbb{R}$ nespojitá, bude se tato nespojitost přenášet (šířit) podél příslušné charakteristiky a řešení u úlohy (15.2.10), (15.2.11) tvaru (15.2.13) bude nespojité při přechodu přes charakteristiku.

Řešení, která jsou nespojitá, se nazývají *silně nespojitá* a řešení spojitá s nespojitými derivacemi se nazývají *slabě nespojitá*.

15.2.5. Rovnice ve dvou prostorových proměnných. Na množině $\mathbb{R}^2 \times (0, T)$ budeme nyní uvažovat rovnici

$$(15.2.14) \quad u_t + a_1(x, y, t)u_x + a_2(x, y, t)u_y + b(x, y, t)u = f(x, y, t),$$

kde a_1 , a_2 , b a f jsou dané reálné funkce. Připojením počáteční podmínky

$$(15.2.15) \quad u(x, y, 0) = \phi(x, y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

máme opět počáteční úlohu, jejíž vyšetřování se provádí podobně jako u rovnice v jedné prostorové proměnné.

Charakteristiky rovnice (15.2.14) jsou určeny rovnicemi

$$(15.2.16) \quad \frac{dx}{dt} = a_1(x, y, t), \quad \frac{dy}{dt} = a_2(x, y, t)$$

a jsou to křivky v prostoru proměnných (x, y, t) . Integrováním vztahu na charakteristice

$$(15.2.17) \quad \frac{du}{dt} + b(x, y, t)u = f(x, y, t)$$

lze opět dostat vzorce pro řešení počáteční úlohy (15.2.14), (15.2.15) (viz [54], odst. 5.1). Například, když a_1 , a_2 jsou konstanty a $b \equiv 0$, $f \equiv 0$, potom funkce

$$(15.2.18) \quad u(x, y, t) = \phi(x - a_1 t, y - a_2 t)$$

je řešením dané počáteční úlohy (prověřte!).

Rovnice typu (15.2.14) zapisujeme nezávisle na počtu prostorových proměnných ve tvaru

$$(15.2.19) \quad u_t + \mathbf{a} \cdot \text{grad } u + bu = f,$$

kde počet složek vektorové funkce \mathbf{a} je roven počtu prostorových proměnných. Pro rovnici tvaru (15.2.19) se užívá termín *transportní rovnice*.

15.3. Kvazilineární hyperbolické rovnice prvního řádu. Příkladem kvazilineární rovnice prvního řádu je rovnice tvaru

$$(15.3.1) \quad u_t + a(x, t, u)u_x = f(x, t, u),$$

nebo tvaru

$$(15.3.2) \quad u_t + a_1(x, y, t, u)u_x + a_2(x, y, t, u)u_y = f(x, y, t, u).$$

Zde koeficienty rovnice i pravá strana f závisejí na řešení u , ale nezávisejí na jeho derivacích. Pojmy a postupy z předcházejících odstavců se dají adaptovat i pro rovnice tohoto typu (viz [22], [54]), problematika je zde však poněkud složitější. *Rovnice charakteristik* mají i nyní tvar

$$(15.3.3) \quad \frac{dx}{dt} = a(x, t, u)$$

resp.

$$(15.3.4) \quad \frac{dx}{dt} = a_1(x, y, t, u), \quad \frac{dy}{dt} = a_2(x, y, t, u),$$

ale na rozdíl od lineární hyperbolické rovnice je zde charakteristika vázána také na funkci u . Proto rovnice (15.3.3), resp. (15.3.4) k určení charakteristiky nestačí. Musíme je doplnit o *vztah na charakteristice*, který zde definujeme předpisem

$$(15.3.5) \quad \frac{du}{dt} = f(x, t, u),$$

resp.

$$(15.3.6) \quad \frac{du}{dt} = f(x, y, t, u),$$

v němž $u = u(x(t), y(t), t)$, $x = x(t)$, $y = y(t)$. *Charakteristikou* zde rozumíme křivku v prostoru (x, t, u) , resp. (x, y, t, u) , určenou uvedenými dvěma, resp. třemi rovnicemi. Současně je těmito rovnicemi určeno řešení u . Nelze tedy samostatně určit charakteristiky a posléze řešení jako u lineárních rovnic.

Připojením podmínky (15.2.7), resp. (15.2.15) k rovnici (15.3.1), resp. (15.3.2) dostaneme počáteční úlohu. Metodou charakteristik lze odvodit vzorec pro řešení počáteční úlohy (viz [54]), ale takový vzorec má spíše teoretickou cenu.

15.4. Příklad. Uvažujeme počáteční úlohu

$$(15.4.1) \quad \begin{aligned} u_t + uu_x &= 0, & x \in \mathbb{R}, \quad t \in (0, T), \\ u(x, 0) &= \phi(x), & x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

kde ϕ je daná funkce. Rovnice charakteristik a vztah na charakteristice zde mají tvar

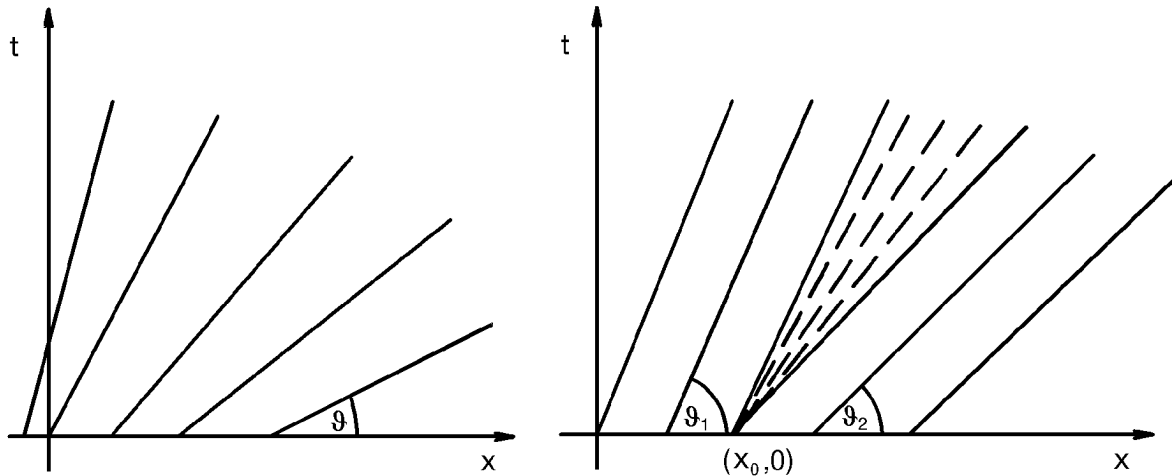
$$(15.4.2) \quad \frac{dx}{dt} = u(x, t), \quad \frac{du}{dt} = 0.$$

Funkce u je tedy na charakteristice konstantní. Proto z první rovnice (15.4.2) plyne, že charakteristikami jsou přímky o rovnici $x - ut = C$.

Řešení u úlohy (15.4.1) je proto dáno (implicitně) vztahem

$$(15.4.3) \quad u(x, t) = \phi(x - ut).$$

Např. pro $\phi(x) = x$ je $u = x - ut$, tj. $u = x/(t + 1)$, pro $\phi(x) = \sin x$ je $u = \sin(x - ut)$. Chceme-li určit hodnotu řešení u např. v bodě (x_0, t_0) , musíme pro nelineární funkci ϕ řešit rovnici $\xi = \phi(x_0 - \xi t_0)$. Jejím kořenem je pak $\xi = u(x_0, t_0)$. Z těchto poznámek je patrné, že na řešitelnost počáteční úlohy (15.4.1) mají ještě vliv vlastnosti funkce ϕ . Popíšeme tři nejjednodušší, leč typické situace. Využijeme přitom toho, že u je na charakteristikách konstantní, charakteristiky budeme uvažovat jako přímky $x - ut = C$ v rovině $u = \text{konst.}$ a znázorňovat je (podobně jako v lineárním případě) v prostoru proměnných x, t .



Obr. 43. Charakteristiky rovnice $u_t + uu_x = 0$ pro rostoucí funkci ϕ . a) ϕ je spojitá, b) ϕ je nespojitá v bodě x_0 , po částech konstantní.

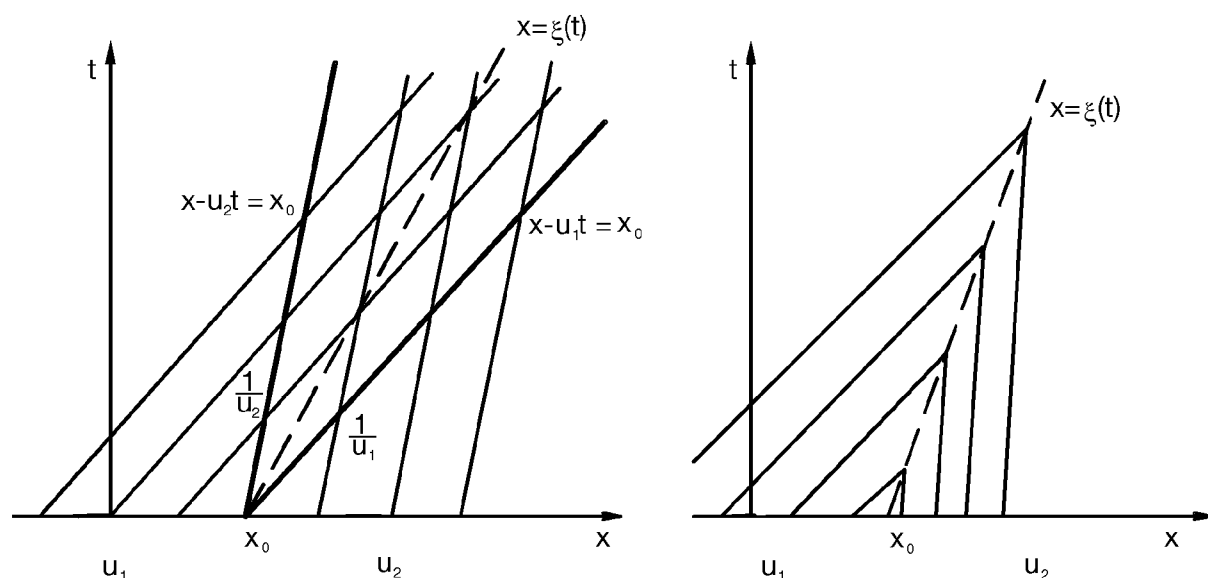
Případ 1. Je-li funkce ϕ spojitá a rostoucí, je sklon charakteristik $\vartheta(x) = \arctg[1/\phi(x)]$ (obr. 43a) klesající funkcí x . Každým bodem poloroviny $\mathbb{R} \times (0, +\infty)$

prochází právě jedna charakteristika a řešení u je vztahem (15.4.3) určeno jednoznačně. Hladkost řešení závisí na hladkosti funkce ϕ .

Příklad 2. Mějme nyní opět funkci ϕ rostoucí, avšak nespojitou. Potom se sklon charakteristik $\vartheta(x)$ mění v bodě nespojitosti skokem. Na obr. 43b je znázorněna situace pro ϕ po částech konstantní s bodem nespojitosti x_0 . V tomto případě je řešení u určeno jednoznačně v celé polorovině kromě klínu (tzv. *oblast zředění*) s vrcholem v bodě $(x_0, 0)$, kde řešení neexistuje. V tomto klínu lze řešení spojitým způsobem dodefinovat (viz [54], odst. 4.11) a tomuto dodefinovanému řešení v uvedeném klínu se říká *vlna zředění*.

Příklad 3. Bude-li funkce ϕ klesající a kladná, bude se sklon charakteristik $\vartheta(x)$ zvětšovat. Na obr. 44 je znázorněna situace pro ϕ po částech konstantní s bodem nespojitosti x_0 , tj. pro

$$\phi(x) = \begin{cases} u_1, & x < x_0, \\ u_2, & x > x_0, \end{cases} \quad u_1 > u_2, \quad \frac{1}{u_1} < \frac{1}{u_2}.$$



Obr. 44. Charakteristiky rovnice $u_t + uu_x = 0$ pro funkci ϕ klesající a po částech konstantní ($u_1 > u_2$). Řešení je nespojité na křivce $x = \xi(t)$ (rázová vlna).

V klínu, v němž se charakteristiky protínají, řešení neexistuje, neboť každá charakteristika „donese“ do tohoto klínu svoji hodnotu počáteční funkce. Pripustíme-li však existenci nespojitého řešení, můžeme určit křivku nespojitosti $x = \xi(t)$, která rozdělí polorovinu $\mathbb{R} \times (0, +\infty)$ na dvě části, v nichž je řešení (15.4.3) určeno jednoznačně počáteční podmínkou. Na křivce nespojitosti $x = \xi(t)$ však uvažovaná rovnice ztrácí smysl a musíme ji nahradit nějakým vztahem, který bude představovat vazbu mezi hodnotami řešení na obou stranách nespojitosti. Pro rovnice typu

$$u_t + [F(u)]_x = 0$$

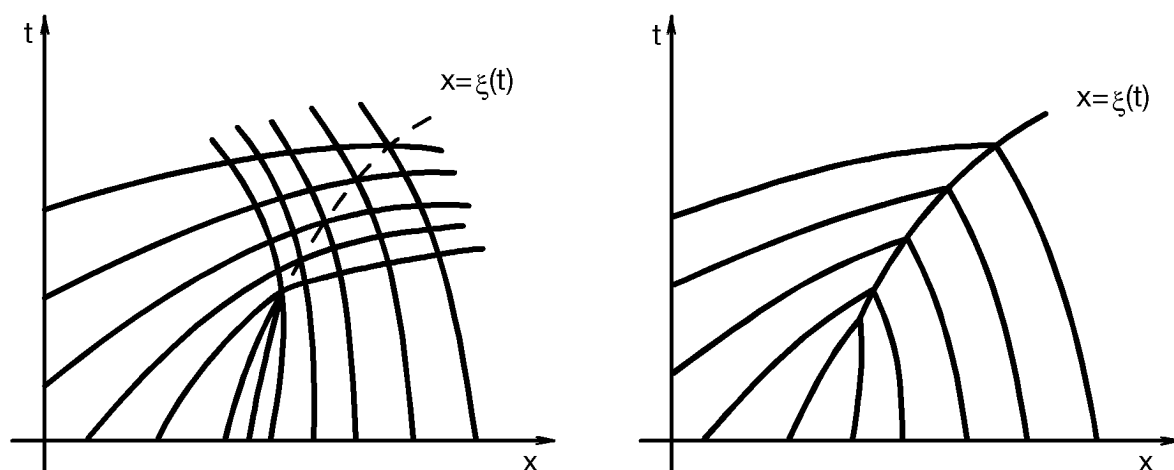
má požadovaný vztah na křivce nespojitosti (při zvolené funkci ϕ) tvar

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{F(u_2) - F(u_1)}{u_2 - u_1}$$

a dovoluje nám křivku nespojitosti stanovit (v našem případě je $F(u) = \frac{1}{2}u^2$).

V kontextu s fyzikální skutečností se křivce nespojitosti říká *rázová vlna* a $d\xi/dt$ pak určuje tzv. *rychlost rázové vlny*.

Obecně jsou myslitelné i situace z obr. 45, kdy vznik rázové vlny není podmíněn nespojitostí počáteční funkce. Nespojitě řešení může mít i taková úloha pro nelineární rovnici, u níž všechny dané funkce jsou hladké. Zde tedy *n e n a s t á v á z h l a z o v a c í j e v* jako u rovnic parabolického typu. Na tyto skutečnosti zde upozorňujeme proto, že mají svůj odraz i při výběru numerických metod pro řešení úloh s kvazilineární hyperbolickou rovnicí.



Obr. 45. Obecnější případ rázové vlny při spojitě počáteční funkci.

15.5. Počátečně-okrajová úloha. K lineární hyperbolické rovnici

$$(15.5.1) \quad u_t + a(x, t)u_x + b(x, t)u = f(x, t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \in (0, T),$$

připojujeme kromě počáteční podmínky

$$(15.5.2) \quad u(x, 0) = \phi(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

ještě *okrajovou podmínku* pro $x = \bar{x}$, kde $\bar{x} \in \mathbb{R}$ je pevně dáno. Typickou okrajovou podmínkou je podmínka

$$(15.5.3) \quad u(\bar{x}, t) = g(t), \quad t \in \langle 0, T \rangle.$$

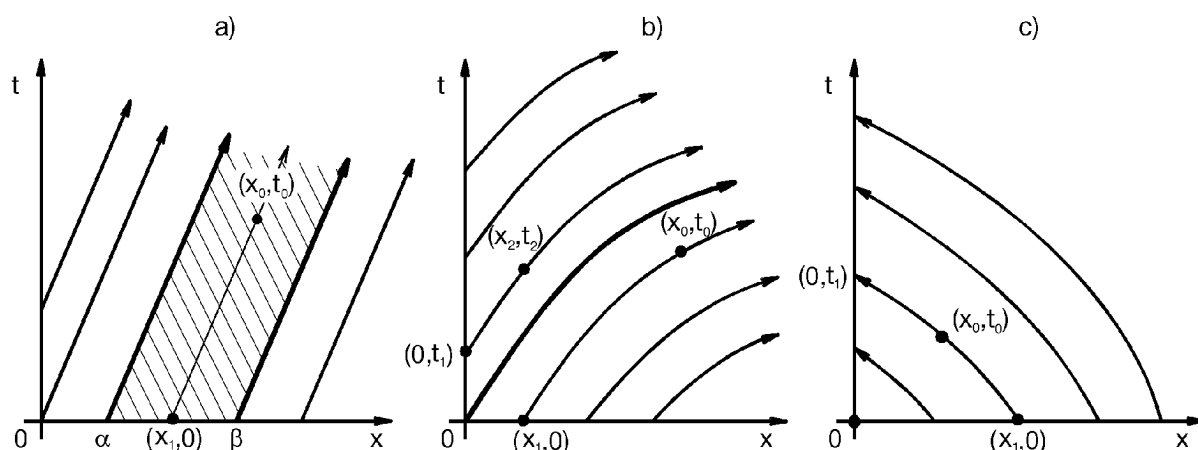
Počátečně-okrajovou úlohou pak rozumíme úlohu stanovit funkci $u = u(x, t)$, která vyhovuje v jedné z oblastí $(\bar{x}, +\infty) \times (0, T)$, $(-\infty, \bar{x}) \times (0, T)$ parciální diferenciální rovnici (15.5.1), splňuje pro $t = 0$ počáteční podmínku (15.5.2) na jednom z intervalů $(\bar{x}, +\infty)$, $(-\infty, \bar{x})$ a pro $x = \bar{x}$, $t \in (0, T)$ splňuje okrajovou podmínku (15.5.3).

Základní kritérium řešitelnosti počátečně-okrajové úlohy dostaneme podobně jako u počáteční úlohy na základě charakteristik rovnice (15.5.1). Můžeme je vyslovit takto: Dodatečné podmínky lze zadat pouze na takových křivkách, které jsou charakteristikami protnutý pouze v jednom bodě.

Existence klasického řešení počátečně-okrajové úlohy je pak podobně jako u počáteční úlohy zaručena dostatečnou hladkostí daných funkcí. Navíc zde, stejně jako u parabolických rovnic, musí být splněna *podmínka kompatibility* v bodě $(\bar{x}, 0)$. Například podmínka kompatibility

$$(15.5.4) \quad \phi(\bar{x}) = g(0), \quad \bar{x} \in \mathbb{R},$$

při spojitých funkcích ϕ a g a při dostatečně hladkých funkcích a , b a f zaručuje spojitost řešení uvažované úlohy pro $x \geq \bar{x}$, $t \in (0, T)$. Nesplnění podmínky kompatibility (15.5.4) způsobí, že řešení počátečně-okrajové úlohy bude nespojité na charakteristice procházející bodem $(\bar{x}, 0)$.



Obr. 46. Příklady systémů charakteristik pro jednu rovnici.

Počátečně-okrajová úloha (15.5.1) až (15.5.3) s $\bar{x} = 0$ s charakteristikami z obr. 46 a funkcí ϕ danou pro $x \in (0, +\infty)$ je řešitelná pouze v případech a), b), neboť hodnota funkce ϕ v bodě $(x_1, 0)$ určí jednoznačně řešení rovnice v libovolném bodě (x_0, t_0) na příslušné charakteristice, resp. hodnota funkce g v bodě $(0, t_1)$ určí jednoznačně řešení rovnice v bodě (x_2, t_2) . V případě c) je úloha obecně *n e ř e š i t e l n á*, neboť zde je řešení rovnice jednoznačně určeno již *p o č á t e č n í f u n k c í* ϕ . Hodnota funkce ϕ v bodě $(x_1, 0)$ určí jednoznačně hodnotu řešení rovnice i v bodě $(0, t_1)$ polopřímky $x = 0$, $t \geq 0$. Pro rovnici s tímto systémem charakteristik nelze okrajovou podmínku (15.5.3) pro $\bar{x} = 0$ klást. Situace je obdobná té, kterou známe z obyčejných diferenciálních

rovníc 1. řádu. Zadání dodatečných podmínek ve dvou různých bodech vede obecně na neřešitelnou úlohu.

15.6. Soustavy rovnic prvního řádu hyperbolického typu.

15.6.1. Soustavy lineárních hyperbolických rovnic. Soustavu lineárních parciálních diferenciálních rovnic pro neznámé funkce $u_i = u_i(x, t)$, $i = 1, 2, \dots, N$, budeme psát ve tvaru

$$(15.6.1) \quad \mathbf{u}_t + \mathbf{A}(x, t)\mathbf{u}_x + \mathbf{B}(x, t)\mathbf{u} = \mathbf{f}(x, t),$$

kde $\mathbf{u} = [u_1, u_2, \dots, u_N]^T$, $\mathbf{f} = [f_1, f_2, \dots, f_N]^T$. Dané matice $\mathbf{A}(x, t)$, $\mathbf{B}(x, t)$ s prvky $a_{ij}(x, t)$, $b_{ij}(x, t)$, $i, j = 1, 2, \dots, N$, jsou čtvercové a řádu N .

Soustava (15.6.1) se nazývá *hyperbolická v oblasti* Ω proměnných x a t , jestliže vlastní čísla $\lambda_i = \lambda_i(x, t)$, $i = 1, 2, \dots, N$, matice $\mathbf{A}(x, t)$ jsou reálná v každém bodě $(x, t) \in \Omega$.

Jestliže existuje regulární matice $\mathbf{S} = \mathbf{S}(x, t)$, $(x, t) \in \Omega$, s hladkými prvky taková, že platí

$$(15.6.2) \quad \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S} = \mathbf{\Lambda},$$

kde $\mathbf{\Lambda}(x, t) = \text{diag}[\lambda_1(x, t), \lambda_2(x, t), \dots, \lambda_N(x, t)]$ (diagonální matice s vlastními čísly na diagonále), říkáme, že soustava (15.6.1) je *silně hyperbolická v oblasti* Ω . Je-li matice \mathbf{A} konstantní a všechna její vlastní čísla jsou navzájem různá, bude maticí \mathbf{S} taková matice, jejíž sloupce jsou lineárně nezávislé vlastní vektory matice \mathbf{A} .

Označíme-li $\mathbf{u} = \mathbf{S}\mathbf{v}$, můžeme pomocí (15.6.2) převést soustavu (15.6.1) na *kanonický tvar*

$$(15.6.3) \quad \mathbf{v}_t + \mathbf{\Lambda}(x, t)\mathbf{v}_x + \mathbf{C}(x, t)\mathbf{v} = \mathbf{g}(x, t),$$

kde $\mathbf{C} = \mathbf{S}^{-1}(\mathbf{S}_t + \mathbf{A}\mathbf{S}_x + \mathbf{B}\mathbf{S})$, $\mathbf{g} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{f}$. Složky $v_i = v_i(x, t)$, $i = 1, 2, \dots, N$, vektoru $\mathbf{v} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{u}$ se nazývají *Riemannovy invarianty*.

Protože i -tá rovnice soustavy (15.6.3) má tvar

$$(15.6.4) \quad \frac{\partial v_i}{\partial t} + \lambda_i(x, t) \frac{\partial v_i}{\partial x} + \sum_{j=1}^N c_{ij}(x, t) v_j = g_i(x, t),$$

můžeme definovat *charakteristiky* Γ_i soustavy (15.6.1) pomocí soustavy obyčejných diferenciálních rovnic

$$(15.6.5) \quad \frac{dx}{dt} = \lambda_i(x, t), \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Máme zde tedy analogickou situaci jako v odst. 15.2.1. Charakteristiky nám dovolují dělat závěry o přípustnosti té které dodatečné podmínky k soustavě (15.6.1). Na charakteristikách Γ_i určených rovnicemi (15.6.5) totiž platí (plyne to z (15.6.4) a (15.6.5))

$$(15.6.6) \quad \frac{dv_i}{dt} + \sum_{j=1}^N c_{ij}(x, t)v_j = g_i(x, t), \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

a funkce v_i , $i = 1, 2, \dots, N$, můžeme z (15.6.6) stanovit. Postup, kterým se určí $u_i = u_i(x, t)$ a který je na tomto principu založen, se opět nazývá *metoda charakteristik*.

15.6.2. Soustavy kvazilineárních rovnic. Příkladem je soustava

$$(15.6.7) \quad \mathbf{u}_t + \mathbf{A}(x, t, \mathbf{u})\mathbf{u}_x = \mathbf{f}(x, t, \mathbf{u}).$$

Všimneme si konkrétní soustavy tohoto typu z odst. 15.1. Máme na mysli soustavu (15.1.5), v níž $\mathbf{f} = 0$, $\mathbf{u} = [\rho, v]^T$,

$$\mathbf{A}(x, t, \rho, v) = \begin{bmatrix} v & \rho \\ c^2/\rho & v \end{bmatrix}.$$

Vlastní čísla $\lambda_1 = v - c$, $\lambda_2 = v + c$ matice $\mathbf{A}(x, t, \rho, v)$ závisí tedy na hledané funkci v . Z rovnic charakteristik

$$(15.6.8) \quad \frac{dx}{dt} = v - c, \quad \frac{dx}{dt} = v + c$$

dostaneme vztahy na charakteristikách (analogie k (15.6.6))

$$(15.6.9) \quad \begin{aligned} \rho \frac{dv}{dt} - c \frac{d\rho}{dt} &= 0, \\ \rho \frac{dv}{dt} + c \frac{d\rho}{dt} &= 0. \end{aligned}$$

Z těchto vztahů vycházíme při numerické realizaci metody charakteristik pro soustavu (15.1.5).

15.7. Úlohy pro hyperbolické soustavy

15.7.1. Počáteční úloha pro hyperbolické soustavy. Připojíme-li k hyperbolické soustavě (15.6.1) nebo (15.6.7) počáteční podmínku

$$\mathbf{u}(x, 0) = \boldsymbol{\varphi}(x),$$

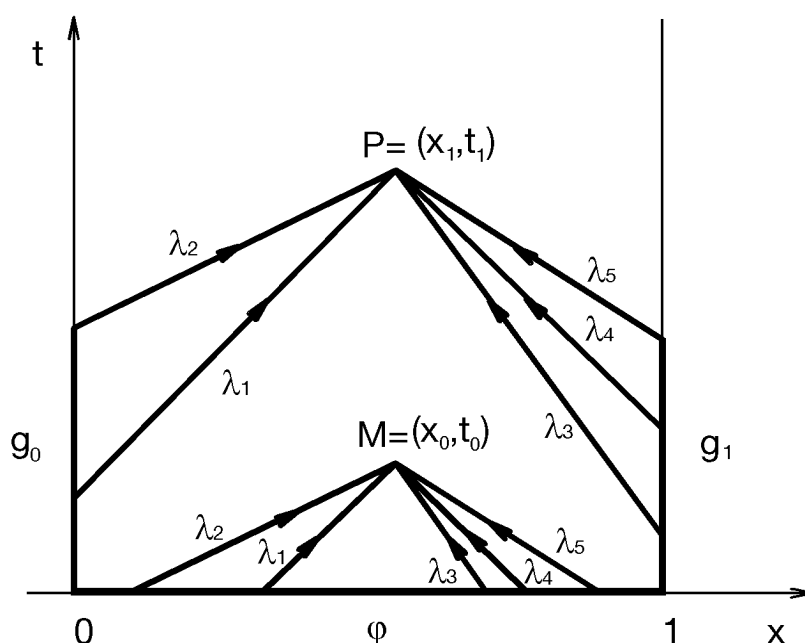
kde $\boldsymbol{\varphi} = [\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N]^T$ je daná vektorová funkce, dostaneme počáteční úlohu pro příslušnou soustavu. Její řešení \mathbf{u} hledáme obvykle na množině $\mathbb{R} \times (0, T)$. U lineárních soustav můžeme pomocí kanonického tvaru (15.6.3) dělat závěry o řešitelnosti počáteční úlohy v duchu odst. 15.2.2.

15.7.2. Počátečně-okrajová úloha. Uvažujme počátečně-okrajovou úlohu

$$(15.7.1) \quad \begin{aligned} \mathbf{u}_t + \mathbf{A}(x, t)\mathbf{u}_x + \mathbf{B}(x, t)\mathbf{u} &= \mathbf{f}(x, t), \quad x \in (0, 1), \quad t \in (0, T), \\ \mathbf{u}(x, 0) &= \boldsymbol{\varphi}(x), \quad x \in \langle 0, 1 \rangle, \\ \mathbf{H}_0\mathbf{u}(0, t) &= \mathbf{g}_0(t), \quad \mathbf{H}_1\mathbf{u}(1, t) = \mathbf{g}_1(t), \quad t \in (0, T). \end{aligned}$$

Oproti počáteční úloze máme zde navíc okrajové podmínky s obdélníkovými maticemi $\mathbf{H}_0, \mathbf{H}_1$; $\mathbf{g}_0, \mathbf{g}_1$ jsou dané vektorové funkce.

Analýzu řešitelnosti opět provádíme pomocí kanonického tvaru soustavy a opíráme se o poznatky z odst. 15.5. Hodnota matice \mathbf{H}_0 musí být rovna počtu kladných vlastních čísel matice \mathbf{A} a hodnota matice \mathbf{H}_1 musí být rovna počtu záporných vlastních čísel matice \mathbf{A} . Násobná vlastní čísla přitom počítáme tolikrát, kolik činí jejich násobnost. Pokud tedy všechna vlastní čísla matice \mathbf{A} jsou např. kladná, klademe okrajové podmínky pouze pro $x = 0$ a pro $x = 1$ žádnou okrajovou podmínku klást nesmíme.



Obr. 47. Charakteristiky pro soustavu pěti rovnic typu $\mathbf{u}_t + \mathbf{A}\mathbf{u}_x = \mathbf{f}(x, t)$ s konstantní maticí \mathbf{A} ($\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 < 0, \lambda_4 < 0, \lambda_5 < 0$).

15.7.3. Příklad. Pro soustavu pěti rovnic s konstantní maticí \mathbf{A} a se dvěma kladnými a třemi zápornými vlastními čísly bude každým bodem $(x, t) \in (0, 1) \times (0, T)$ procházet pět charakteristik (přímky o směrnících $1/\lambda_1, 1/\lambda_2, 1/\lambda_3, 1/\lambda_4, 1/\lambda_5$, viz obr. 47). Řešení v bodě M je závislé pouze na hodnotách počáteční funkce $\boldsymbol{\varphi}$ a funkce \mathbf{f} v oblasti vymezené charakteristikami o směrnících $1/\lambda_2$ a $1/\lambda_5$, kdežto řešení v bodě P je závislé jak na hodnotách funkce $\boldsymbol{\varphi}$, tak i na hodnotách okrajových funkcí $\mathbf{g}_0, \mathbf{g}_1$.

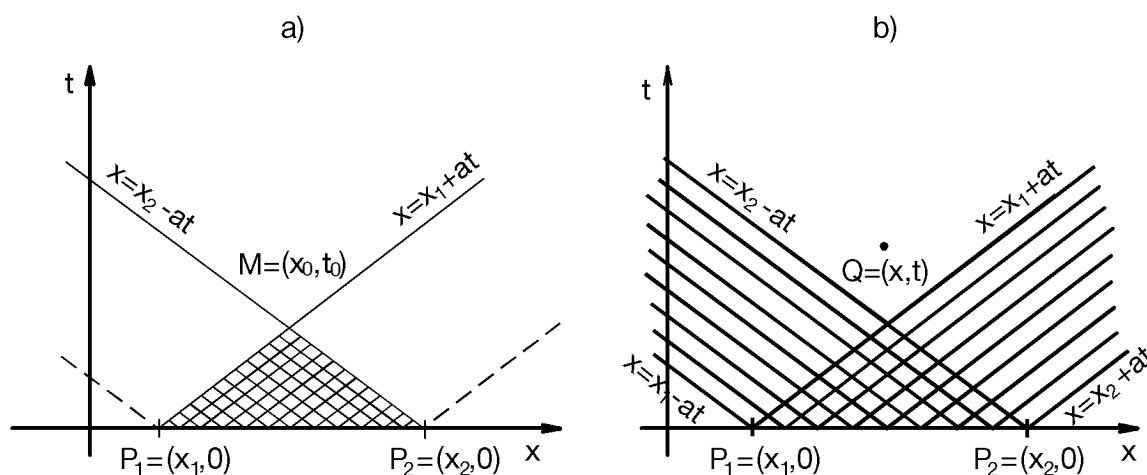
v silně vytažených částech hranice uvažované oblasti. Dále vidíme, že pro $x = 0$ musíme klást dvě lineárně nezávislé okrajové podmínky a pro $x = 1$ tři lineárně nezávislé okrajové podmínky. Pokud tyto zásady nedodržíme, nebudeme mít zaručenou jednoznačnou řešitelnost úlohy, tj. úloha může mít nekonečně mnoho řešení nebo může být neřešitelná.

15.7.4. Příklad. Zásady z odst. 15.7.2 a 15.7.3 dodržujeme i pro kvazilineární soustavy. V odst. 15.6.2 jsme uvedli, že matice soustavy rovnic akustiky (15.1.5) má vlastní čísla

$$\lambda_1 = v - c, \quad \lambda_2 = v + c.$$

Protože v znamená místní rychlost proudící tekutiny a c rychlost zvuku v tekutině, potom když $v < c$ (podzvukové proudění), bude $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 > 0$, a když $v > c$ (nadzvukové proudění), bude $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$.

Řešíme-li zmíněnou soustavu pro $x \in (0, 1)$, pak kromě zadání počáteční rychlosti a počáteční hustoty musíme ještě zadat v případě podzvukového proudění na každém kraji po jedné okrajové podmínce. V případě nadzvukového proudění klademe dvě okrajové podmínky pro $x = 0$ a pro $x = 1$ neklademe žádnou podmínku.



Obr. 48. a) Počáteční podmínka na intervalu $\langle x_1, x_2 \rangle$ má vliv na řešení v bodech trojúhelníka P_1P_2M . Hodnota řešení v bodě M závisí na hodnotách počáteční funkce v intervalu $\langle x_1, x_2 \rangle$. b) Na hodnotu řešení v bodě Q nemá počáteční podmínka z intervalu $\langle x_1, x_2 \rangle$ vliv.

15.8. Oblast vlivu a oblast závislosti. Uvažujme počáteční úlohu pro rovnici nebo soustavu rovnic v jedné prostorové proměnné.

Množina bodů $(x, t) \in \mathbb{R} \times (0, +\infty)$, v nichž je hodnota řešení u ovlivněna počáteční podmínkou, se nazývá *oblast vlivu počáteční podmínky*. Například pro soustavu dvou rovnic s charakteristikami na obr. 48 hodnoty počáteční funkce na intervalu $\langle x_1, x_2 \rangle$ ovlivňují řešení v trojúhelníku P_1P_2M ; proto tento trojúhelník je oblastí vlivu intervalu

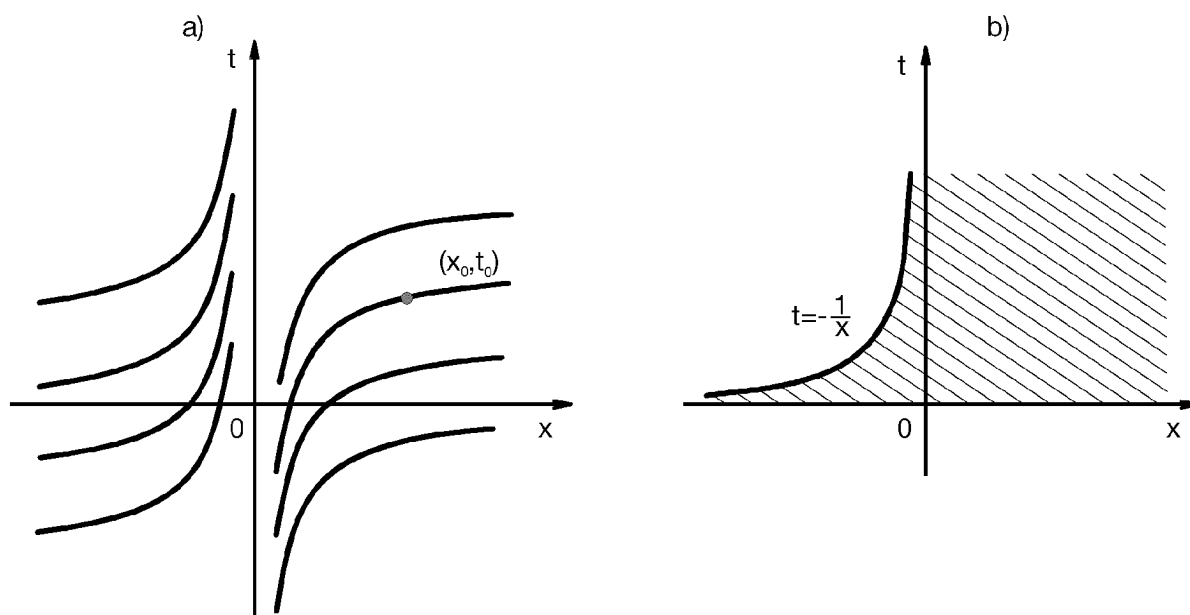
$\langle x_1, x_2 \rangle$. Pro jednu rovnici tvoří oblast vlivu bodu $(x_1, 0)$ body charakteristiky procházející tímto bodem.

Obráceně hodnota řešení u soustavy dvou rovnic v bodě (x_0, t_0) (obr. 48) závisí na hodnotách počáteční funkce v intervalu $\langle x_1, x_2 \rangle$. Říkáme, že interval $\langle x_1, x_2 \rangle$ je *oblastí závislosti* bodu (x_0, t_0) na počáteční podmínce.

V analogickém smyslu hovoříme o oblasti vlivu a závislosti vzhledem k okrajovým podmínkám (viz také obr. 46 a obr. 47).

15.9. Cvičení

15.9.1. Určete systém charakteristik rovnice $u_t + au_x = 0$, kde a je konstanta. Ukažte, že pro každou spojitě diferencovatelnou funkci φ jedné proměnné je funkce $u(x, t) = \varphi(x - at)$ řešením dané rovnice, že toto řešení je na každé charakteristice konstantní a obráceně, že každá spojitě diferencovatelná funkce $u(x, t)$, která je konstantní na každé charakteristice, je řešením dané diferenciální rovnice. [$dx/dt = a$, $\Gamma: x - at = c$, kde c je libovolná konstanta.]



Obr. 49. a) Systém charakteristik $t + 1/x = c$ pro rovnici $u_t + x^2 u_x = f(x, t)$.

b) Oblast řešitelnosti počáteční úlohy (oblast vlivu počáteční podmínky).

15.9.2. Vyšetřete řešitelnost počáteční úlohy $u_t + x^2 u_x = 0$, $u(x, 0) = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$, a v kladném případě stanovte řešení. [Charakteristiky jsou hyperboly $t + 1/x = c$ pro $x \neq 0$ a kladná poloosa t (obr. 49a). Řešení existuje v každém bodě (x, t) oblasti z obr. 49b (vyšrafováno) a je dáno funkcí $u(x, t) = \cos(t + 1/x)$ pro $x \neq 0$, $u(x, t) = 1$ pro $x = 0$.]

15.9.3. Stanovte kanonický tvar soustavy $(u_1)_t + a(u_2)_x = 0$, $(u_2)_t + a(u_1)_x = 0$ (a je nenulová konstanta), Riemannovy invarianty a řešení počáteční úlohy s podmínkami $u_1(x, 0) = \phi_1(x)$, $u_2(x, 0) = \phi_2(x)$, $x \in \mathbb{R}$. $[(v_1)_t + a(v_1)_x = 0, (v_2)_t - a(v_2)_x = 0; v_1 = \frac{1}{2}(u_1 + u_2), v_2 = \frac{1}{2}(u_1 - u_2); u_1(x, t) = \frac{1}{2}[\phi_1(x - at) + \phi_1(x + at)] + \frac{1}{2}[\phi_2(x - at) - \phi_2(x + at)], u_2(x, t) = \frac{1}{2}[\phi_1(x - at) - \phi_1(x + at)] + \frac{1}{2}[\phi_2(x - at) + \phi_2(x + at)].]$

15.9.4. Ukažte, že jak funkce u_1 , tak funkce u_2 z cvičení 15.9.3 jsou řešením vlnové rovnice $u_{tt} = a^2 u_{xx}$.

15.9.5. Užijte metodu charakteristik k řešení počáteční úlohy $u_t + a_1 u_x + a_2 u_y = 0$, $u(x, y, 0) = xy^2$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $t \in \langle 0, T \rangle$; a_1, a_2 jsou nenulové konstanty. [Dva systémy charakteristik $x - a_1 t = C_1$, $y - a_2 t = C_2$, $du/dt = 0$; $u(x, y, t) = (x - a_1 t)(y - a_2 t)^2$.]

16. Metoda charakteristik

16.1. Úvodní informace. Metoda charakteristik je specifickou metodou pro řešení hyperbolických úloh, především úloh nelineárních. Půjde nám nyní o to vyložit numerickou realizaci metody charakteristik. Výchozími vztahy jsou diferenciální rovnice charakteristik a diferenciální rovnice, které jsme nazývali vztahy na charakteristikách.

Podle způsobu diskretizace dělíme metodu charakteristik na dva typy: a) metoda s pevnou sítí, b) metoda s proměnnou sítí (Massauova metoda). V tomto článku se soustředíme na Massauovu metodu. Její hlavní předností je především to, že při její realizaci lze využít numerických metod (a především dostupného programového vybavení) pro řešení počátečních úloh pro obyčejné diferenciální rovnice (viz [37]). Metoda s pevnou sítí obvykle představuje jistou kombinaci Massauovy metody a diferenční metody. Zmíníme se o ní v odst. 17.8.

16.2. Massauova metoda pro řešení lineární počátečně-okrajové úlohy. Uvažujme počátečně-okrajovou úlohu

$$(16.2.1) \quad \begin{aligned} a_0(x, t)u_t + a_1(x, t)u_x + b(x, t)u &= f(x, t), & (x, t) \in (0, 1) \times (0, T), \\ u(x, 0) &= \phi(x), & x \in \langle 0, 1 \rangle, \\ u(0, t) &= g(t), & t \in \langle 0, T \rangle. \end{aligned}$$

Předpokládejme, že úloha je jednoznačně řešitelná. V intervalech $\langle 0, 1 \rangle$ a $\langle 0, T \rangle$ zvolíme dostatečně hustou množinu bodů a označíme $P_0 = (x_0, t_0)$ jeden z bodů této množiny. Charakteristiku vycházející z tohoto bodu označíme Γ_P (obr. 50). Parametrické rovnice charakteristiky Γ_P neznáme, ale označíme-li je $x = x(\tau)$, $t = t(\tau)$, můžeme bodu P_0 přiřadit hodnotu τ_0 proměnné (parametru) τ . Označíme dále $u_0 = u(x_0, t_0)$ hodnotu řešení v bodě P_0 (danou buď počáteční podmínkou nebo okrajovou podmínkou).

Napišeme nyní rovnice charakteristik a rovnici na charakteristikách pro úlohu (16.2.1):

$$(16.2.2) \quad \begin{aligned} \frac{dt}{d\tau} &= a_0(x, t), \\ \frac{dx}{d\tau} &= a_1(x, t), \\ \frac{du}{d\tau} + b(x, t)u &= f(x, t) \end{aligned}$$

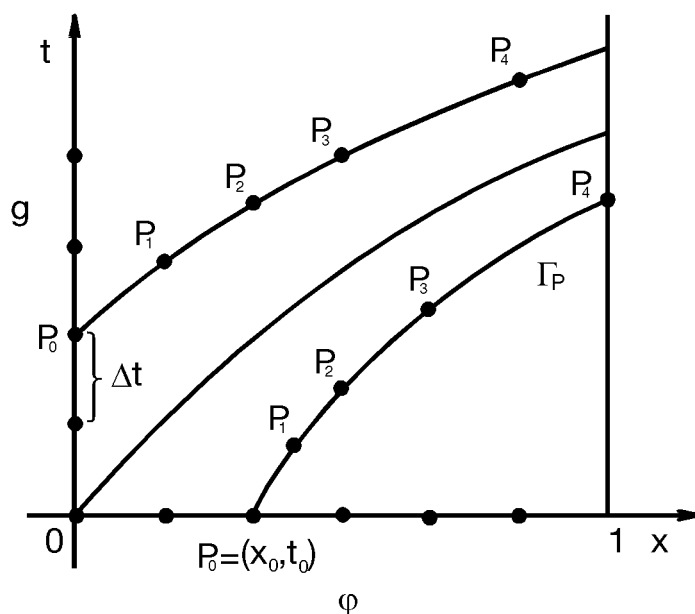
a k této soustavě obyčejných diferenciálních rovnic pro neznámé funkce $t(\tau)$, $x(\tau)$, $u(\tau) = u(x(\tau), t(\tau))$ připojíme počáteční podmínky

$$(16.2.3) \quad t_0 = t(\tau_0), \quad x_0 = x(\tau_0), \quad u_0 = u(\tau_0).$$

Souřadnice bodů $Q_k \in \Gamma_P$, $k = 1, 2, \dots$, označíme $x_k^P = x(\tau_k)$, $t_k^P = t(\tau_k)$ (obr. 50); $\Delta\tau_k = \tau_{k+1} - \tau_k$. Aproximováním (16.2.2) v bodě Q_k dostaneme (pro dostatečně hladké funkce a_0 , a_1 , b , f)

$$(16.2.4) \quad \begin{aligned} t(\tau_{k+1}) &= t(\tau_k) + \Delta\tau_k a_0(x(\tau_k), t(\tau_k)) + O(\Delta\tau_k^2), \\ x(\tau_{k+1}) &= x(\tau_k) + \Delta\tau_k a_1(x(\tau_k), t(\tau_k)) + O(\Delta\tau_k^2), \\ u(\tau_{k+1}) &= u(\tau_k) + \Delta\tau_k [f(x(\tau_k), t(\tau_k)) - b(x(\tau_k), t(\tau_k))u(\tau_k)] + O(\Delta\tau_k^2). \end{aligned}$$

Je patrné, že při této aproximaci je metoda charakteristik Eulerovou metodou pro řešení počáteční úlohy (16.2.2), (16.2.3).



Obr. 50. Schématické znázornění realizace algoritmu (16.2.5).

Označíme-li

$$T_k^P \approx t_k^P, \quad X_k^P \approx x_k^P, \quad U_k^P \approx u(\tau_k),$$

můžeme sestavit algoritmus (viz [37], odst. 17.4) s pevným krokem ($\Delta\tau_k \equiv \Delta\tau$), který zapíšeme následovně:

- (16.2.5) 1. Zvolíme $\Delta\tau$, bod $P_0 = (x_0^P, t_0^P) \in \Gamma_P$ a přiřadíme mu hodnotu τ_0 (např. $\tau_0 = 0$); dále označíme $X_0^P = x_0^P$, $T_0^P = t_0^P$.
2. Určíme U_0^P (buď $U_0^P = \phi(x_0^P)$ nebo $U_0^P = g(t_0^P)$).
3. Pro $k = 0, 1, \dots, K$:

$$\begin{aligned} T_{k+1}^P &= T_k^P + \Delta\tau a_0(X_k^P, T_k^P); \\ X_{k+1}^P &= X_k^P + \Delta\tau a_1(X_k^P, T_k^P); \\ U_{k+1}^P &= U_k^P + \Delta\tau [f(X_k^P, T_k^P) - b(X_k^P, T_k^P)U_k^P]. \end{aligned}$$

Číslo K volíme dostatečně velké. Výpočty se provádějí, pokud $0 \leq X_k^P \leq 1$, $0 \leq T_k^P \leq T$. V opačném případě výpočet ukončíme. Body $P_k = (X_k^P, T_k^P)$ (tj. lomená čára $P_0P_1P_2 \dots$) určí přibližně charakteristiku Γ_P (obr. 50) a čísla U_k^P určují přibližně hledané řešení u v bodech $P_k \in \Gamma_P$. Přesnost *Massauovy metody charakteristik* je srovnatelná s přesností Eulerovy metody. Přesnější výsledky dostaneme užitím numerické metody vyššího řádu (metody Rungova-Kuttova typu). Také se užívá extrapolacních postupů. Podrobnosti v tomto ohledu lze nalézt v [37].

16.3. Příklad. Massauovou metodou řešme úlohu

$$(16.3.1) \quad \begin{aligned} 2xu_t + u_x &= t, & x \in (0, 1), & t \in (1, 3), \\ u(0, t) &= 1 + t^2, & t \in \langle 1, 2 \rangle. \end{aligned}$$

Pro tuto úlohu máme

$$(16.3.2) \quad \begin{aligned} \frac{dt}{d\tau} &= 2x, \\ \frac{dx}{d\tau} &= 1, \\ \frac{du}{d\tau} &= t. \end{aligned}$$

1. Volíme $\Delta\tau = 0,1$; $x_0^P = 0$, $t_0^P = 2$; $P_0 = (0, 2)$; $U_0^P = 1 + (t_0^P)^2 = 5$; $\tau_0 = 0$.
2. Pro $k = 0, 1, \dots, K$:

$$\begin{aligned} T_{k+1}^P &= T_k^P + 0,2X_k^P; \\ X_{k+1}^P &= X_k^P + 0,1; \\ U_{k+1}^P &= U_k^P + 0,1T_k^P. \end{aligned}$$

Vypočteme: $P_1 = (0, 1; 2)$, $P_2 = (0, 2; 2,02), \dots$, $U_1^P = 5,2$, $U_2^P = 5,4, \dots$

V tomto případě umíme stanovit přesné řešení; charakteristiky jsou paraboly $t = x^2 + c$ a $u(x, t) = 1 + (t - x^2)^2 + \frac{1}{3}x^3 + x(t - x^2)$. Porovnáme např.: $U_2^P \approx u(0, 2; 2,02) \doteq 5,319$.

16.4. Massauova metoda pro kvazilineární rovnici. Pro úlohu s kvazilineární rovnicí

$$(16.4.1) \quad u_t + a(x, t, u)u_x = f(x, t, u)$$

se na algoritmu (16.2.5) v zásadě nic nezmění. Protože $a_0 = 1$, volíme za parametr charakteristiky přímo proměnnou t . Rovnici systému charakteristik a vztah na charakteristice píšeme tedy ve tvaru

$$(16.4.2) \quad \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a(x, t, u), \\ \frac{du}{dt} &= f(x, t, u). \end{aligned}$$

Je-li U_0 hodnota řešení u v bodě (x_0, t_0) daná počáteční či okrajovou podmínkou, zapíšeme algoritmus takto:

$$(16.4.3) \quad \begin{aligned} &1. \text{ Volíme } \Delta t, x_0, t_0, U_0, (T_0 = t_0, X_0 = x_0). \\ &2. \text{ Pro } k = 0, 1, \dots, K : \\ &\quad T_{k+1} = T_k + \Delta t; \\ &\quad X_{k+1} = X_k + \Delta t \cdot a(X_k, T_k, U_k); \\ &\quad U_{k+1} = U_k + \Delta t \cdot f(X_k, T_k, U_k). \end{aligned}$$

16.5. Massauova metoda pro kvazilineární soustavu rovnic.

Těžiště užití Massauovy metody je u kvazilineární soustavy

$$(16.5.1) \quad \mathbf{u}_t + \mathbf{A}(x, t, \mathbf{u})\mathbf{u}_x = \mathbf{f}(x, t, \mathbf{u}).$$

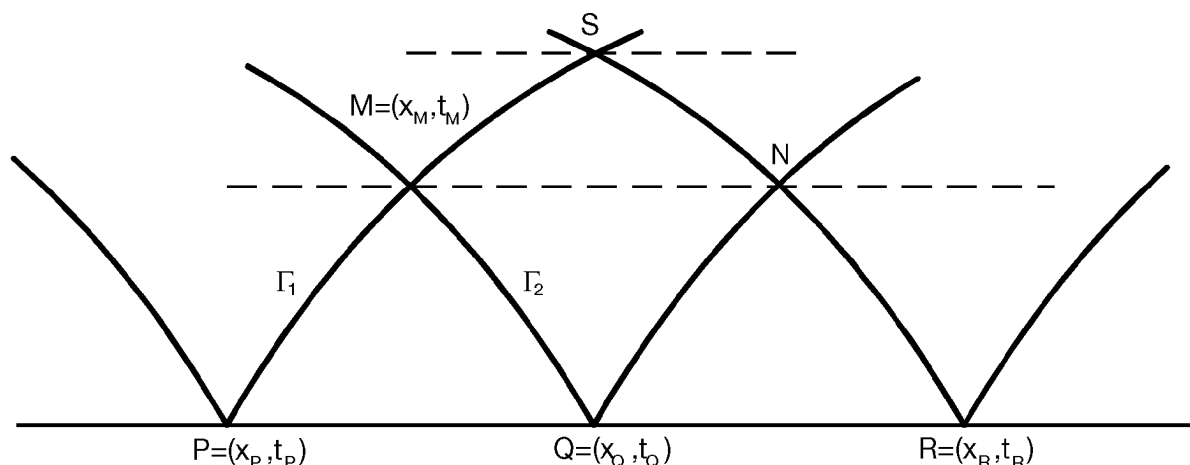
Při výkladu se omezíme na soustavu dvou rovnic a předpokládáme, že $\lambda_1 = \lambda_1(x, t, \mathbf{u})$, $\lambda_2 = \lambda_2(x, t, \mathbf{u})$ jsou dvě různá (reálná) vlastní čísla matice \mathbf{A} (v bodě (x, t) a pro řešení $\mathbf{u} = [u_1(x, t), u_2(x, t)]^T$). Dva systémy charakteristik Γ_1 a Γ_2 jsou dány diferenciálními rovnicemi (srov. s (15.6.5))

$$(16.5.2) \quad \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \lambda_1(x, t, u_1, u_2), \\ \frac{dx}{dt} &= \lambda_2(x, t, u_1, u_2). \end{aligned}$$

Předpokládáme dále, že na charakteristikách Γ_1 a Γ_2 platí

$$(16.5.3) \quad \begin{aligned} \frac{dv_1}{dt} &= g_1(x, t, v_1, v_2) \quad \text{na } \Gamma_1, \\ \frac{dv_2}{dt} &= g_2(x, t, v_1, v_2) \quad \text{na } \Gamma_2 \end{aligned}$$

jako důsledek (16.5.1) a (16.5.2) a že v_1, v_2 (Riemannovy invarianty) známým způsobem závisejí na $\mathbf{u} = [u_1, u_2]^T$, tj. předpokládáme, že známe g_1, g_2 . Pro lineární soustavu z odst. 15.6.1 je (16.5.3) reprezentováno vztahy (15.6.6). Podobu vztahů (16.5.3) pro konkrétní kvazilineární soustavu si uvedeme v následujícím odstavci.



Obr. 51. Grafické znázornění realizace Massauovy metody pro soustavu dvou rovnic (dva systémy charakteristik).

Nechť $P = (x_P, t_P)$, $Q = (x_Q, t_Q)$ jsou dva různé body čáry, na níž je zadána počáteční nebo okrajová podmínka. Bodem P vedme charakteristiku Γ_1 , bodem Q charakteristiku Γ_2 a označme $M = (x_M, t_M)$ průsečík těchto charakteristik (obr. 51). První z dvojice rovnic (16.5.2), (16.5.3) budeme aproximovat v bodě P , druhou v bodě Q . Charakteristiky Γ_1, Γ_2 budeme aproximovat úseky přímek o směrnících $1/\lambda_1(P)$, $1/\lambda_2(Q)$ (označujeme $\lambda_1(P) = \lambda_1(x_P, t_P, u_1(x_P, t_P), u_2(x_P, t_P))$, $\lambda_2(Q)$ analogicky). Máme tedy diferenční vztahy

$$(16.5.4) \quad \begin{aligned} \frac{x_M - x_P}{t_M - t_P} &\approx \lambda_1(P), \\ \frac{x_M - x_Q}{t_M - t_Q} &\approx \lambda_2(Q), \end{aligned}$$

$$(16.5.5) \quad \begin{aligned} \frac{v_1(M) - v_1(P)}{t_M - t_P} &\approx g_1(P), \\ \frac{v_2(M) - v_2(Q)}{t_M - t_Q} &\approx g_2(Q). \end{aligned}$$

Výpočet organizujeme následujícím způsobem:

1. krok: Určíme $v_1(P)$, $v_2(P)$, $\lambda_1(P)$, $v_1(Q)$, $v_2(Q)$, $\lambda_2(Q)$.
2. krok: Přibližné vztahy (16.5.4) chápeme jako rovnice pro výpočet souřadnic x_M , t_M průsečíku M charakteristik Γ_1 a Γ_2 :

$$t_M = \frac{1}{\lambda_1(P) - \lambda_2(Q)} [x_Q - x_P + t_P \lambda_1(P) - t_Q \lambda_2(Q)],$$

$$x_M = x_P + (t_M - t_P) \lambda_1(P) \text{ nebo } x_M = x_Q + (t_M - t_Q) \lambda_2(Q).$$

3. krok: Přibližné vztahy (16.5.5) chápeme jako rovnice pro výpočet hodnot funkcí v_1 , v_2 v bodě M :

$$v_1(M) = v_1(P) + (t_M - t_P) g_1(P),$$

$$v_2(M) = v_2(Q) + (t_M - t_Q) g_2(Q).$$

4. krok: Provedeme případně zpřesnění souřadnic bodu M :

a) určíme $\lambda_1(M)$, $\lambda_2(M)$,

b) přesnější aproximace souřadnic bodu M určíme řešením rovnic

$$\frac{x_M - x_P}{t_M - t_P} = \frac{1}{2} [\lambda_1(P) + \lambda_1(M)], \quad \frac{x_M - x_Q}{t_M - t_Q} = \frac{1}{2} [\lambda_2(Q) + \lambda_2(M)].$$

V uvedeném zpřesňování lze iteračně pokračovat.

5. krok: Zvolíme nyní další dvojici sousedních bodů (např. Q , R (obr. 51)), v nichž je dána počáteční či okrajová podmínka. Určíme průsečík N charakteristik o směrnících $1/\lambda_1$, $1/\lambda_2$ (krok 2) a stanovíme $v_1(N)$, $v_2(N)$ (krok 3).

6. krok: Máme-li vypočtenou první vrstvu průsečíků charakteristik M, N, \dots a v nich hodnoty λ_1 , λ_2 , v_1 , v_2 , opakujeme kroky 1 až 4, nyní pro $P = M$, $Q = N$. Dostaneme bod S (obr. 51) ve druhé vrstvě průsečíků charakteristik a v něm hodnoty $v_1(S)$, $v_2(S)$. Tímto způsobem pokračujeme a určíme všechny průsečíky 2. vrstvy atd.

16.6. Příklad. Navážeme na výklad z odst. 15.6.2 a 15.7.4. Pro kvazilineární soustavu rovnic akustiky (viz (15.1.5))

$$(16.6.1) \quad \begin{aligned} \rho_t + v \rho_x + \rho v_x &= 0, \\ v_t + c^2 \rho^{-1} \rho_x + v v_x &= 0 \end{aligned}$$

mají rovnice dvou systémů charakteristik tvar (viz (16.5.2))

$$(16.6.2) \quad \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= v - c, \\ \frac{dx}{dt} &= v + c. \end{aligned}$$

Na charakteristikách pak z (16.6.1) dostaneme (konkrétní podoba vztahů (16.5.3))

$$(16.6.3) \quad \begin{aligned} \rho \frac{dv}{dt} - c \frac{d\rho}{dt} &= 0 \quad \text{na } \Gamma_1, \\ \rho \frac{dv}{dt} + c \frac{d\rho}{dt} &= 0 \quad \text{na } \Gamma_2. \end{aligned}$$

V algoritmu z odst. 16.5 realizujeme 2. krok na základě formulí

$$\frac{x_M - x_P}{t_M - t_P} = v(P) - c(P), \quad \frac{x_M - x_Q}{t_M - t_Q} = v(Q) - c(Q),$$

a 3. krok podle formulí

$$\begin{aligned}\rho(P)[v(M) - v(P)] - c(P)[\rho(M) - \rho(P)] &= 0, \\ \rho(Q)[v(M) - v(Q)] + c(Q)[\rho(M) - \rho(Q)] &= 0.\end{aligned}$$

Odtud pak počítáme $v(M)$, $\rho(M)$.

16.7. Cvičení

16.7.1. Massauovou metodou řešte úlohu $2xu_t + u_x = t$, $u(x, 0) = \cos x$, $x \in \langle 0, 1 \rangle$. Při numerické realizaci vycházejte z formulí prvního řádu (Eulerova metoda) a také z formulí druhého řádu (RK 2, Heun, Adams-Moulton — viz [37]). Výsledky porovnejte s přesným řešením úlohy, které je dáno vzorcem $u(x, t) = \cos \sqrt{x^2 - t} + (t - x^2)x + x^3/3 + 2(x^2 - t)\sqrt{x^2 - t}/3$.

16.7.2. Massauovou metodou řešte úlohu $t^2u_t + uu_x = 1$, $u = 0$ na přímce $\omega: t + x = 1$ (tj. s podmínkou $u(1 - t, t) = 0$). [$dx/d\tau = u$, $dt/d\tau = t^2$; $du/d\tau = 1$; přesné řešení u je dáno rovnicí $x = 1 - t/(1 + tu) + \frac{1}{2}u^2$. Body P, Q, \dots z odst. 16.5 volte na přímce ω .]

16.7.3. Massauovou metodou řešte počátečně-okrajovou úlohu $u_t + (2x)^{-1}u_x = t$, $u(x, 0) = x - 1$, $u(1, t) = \sqrt{t}$, $1 < x < 2$, $0 < t < 1$. Na ose x integrujte po charakteristikách vycházejících z bodů $(1 + k\Delta x, 0)$ a na přímce $x = 1$ integrujte po charakteristikách vycházejících z bodů $(1, n\Delta t)$. Volte např. $\Delta x = 0, 1$; $k = 1, 2, \dots, 10$; $\Delta t = 0, 1$; $n = 0, 1, \dots, 10$. Určete oblast vlivu počáteční a okrajové podmínky. [Při realizaci algoritmu vycházejte z rovnic $dx/dt = (2x)^{-1}$, $du/dt = t$. Přesné řešení:

$$u(x, t) = \begin{cases} \sqrt{t + 1 - x^2} + \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}(t + 1 - x^2)^2, & t + 1 < x^2, \\ \sqrt{x^2 - t - 1} + \frac{1}{2}t^2, & t + 1 < x^2. \end{cases}$$

17. Diferenční metody pro hyperbolické rovnice prvního řádu

17.1. Principy diferenčních metod pro hyperbolické rovnice.

Diferenční metody pro hyperbolické a parabolické rovnice mají řadu společných rysů. Budeme předpokládat, že se čtenář seznámil s obsahem čl. 13 a budeme se snažit o maximální stručnost výkladu.

Konstrukci diferenčních rovnic lze v zásadě provádět dvěma způsoby: a) *metodou konečných diferencí*, kdy derivace v diferenciální rovnici aproximujeme poměrnými diferencemi; b) *metodou integrálních identit*, kdy vycházíme z jistých integrálních vztahů, které pro řešení diferenciální rovnice platí a aproximujeme integrály v těchto vztazích. Tyto vztahy mají často hlubší fyzikální smysl. Výsledkem užití obou metod je vždy soustava diferenčních rovnic, které mají obvykle rekurentní charakter a dovolují postupně vypočítávat hodnoty přibližného řešení. Při aproximaci derivací se budeme opírat o vzorce z odst. 7.3.2.

17.2. Explicitní metody

17.2.1. Diskretizace počáteční úlohy. Uvažujme počáteční úlohu pro hyperbolickou rovnici prvního řádu.

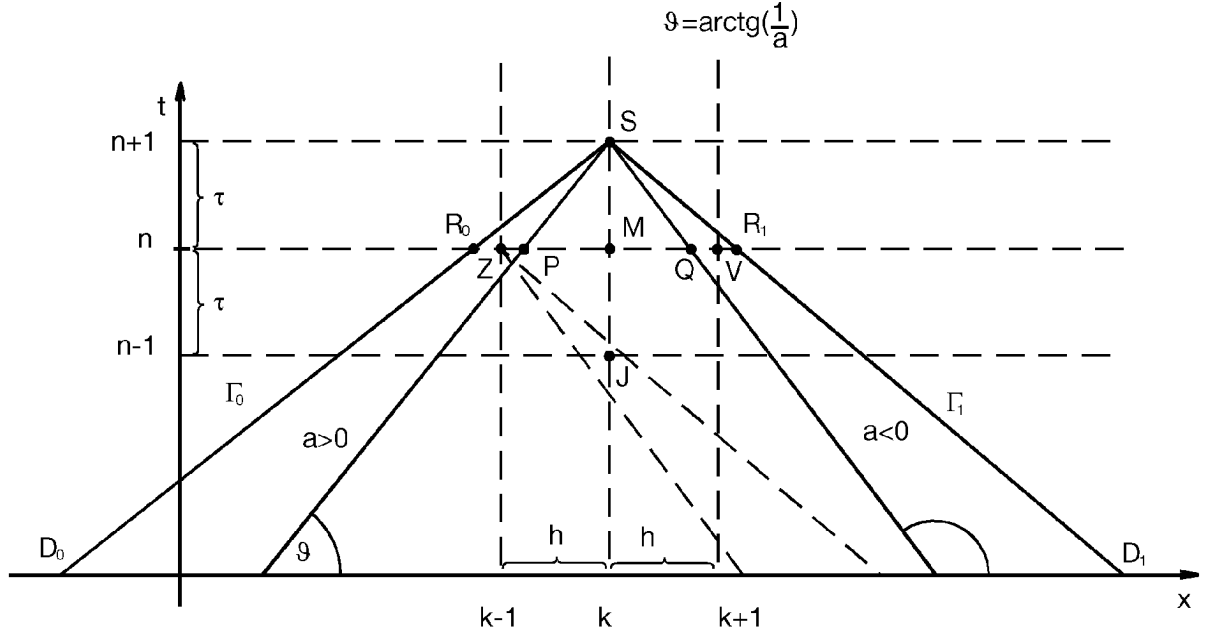
$$(17.2.1) \quad u_t + au_x = f(x, t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \in (0, T),$$

$$(17.2.2) \quad u(x, 0) = \phi(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

kde a je konstanta a f a ϕ jsou spojité funkce. Na množině $\mathbb{R} \times \langle 0, T \rangle$ sestrojíme síť \mathcal{S} s uzly (x_k, t_n) , $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, $n = 0, 1, \dots, N$. Pro jednoduchost budeme uvažovat pouze rovnoměrné sítě s krokem h v proměnné x a krokem τ v proměnné t . Bude tedy $x_k = kh$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, $t_n = n\tau$, $n = 0, 1, 2, \dots, N$.

Označíme $U_k^n \approx u(x_k, t_n)$ hodnotu přibližného řešení v uzlu (x_k, t_n) . Předpokládáme, že daná počáteční úloha má řešení, které je dostatečně hladké ($u \in C^2$). Potom v bodě $M = (x_k, t_n)$ (viz obr. 52) lze rovnici (17.2.1) nahradit diferenčním vztahem

$$(17.2.3) \quad \frac{1}{\tau}[u(x_k, t_{n+1}) - u(x_k, t_n)] + \frac{a}{h}[u(x_{k+1}, t_n) - u(x_k, t_n)] = \\ = f(x_k, t_n) + O(\tau + h).$$



Obr. 52. Část sítě pro aproximaci hyperbolické rovnice diferenční metodou.

Obě derivace jsme aproximovali dopřednou poměrnou diferencí. Pro hodnoty přibližného řešení odtud obdržíme diferenční rovnici

$$(17.2.4) \quad \frac{1}{\tau} [U_k^{n+1} - U_k^n] + \frac{a}{h} [U_{k+1}^n - U_k^n] = f(x_k, t_n),$$

která aproximuje diferenciální rovnici (17.2.1) na hladkých řešeních v bodě $M = (x_k, t_n)$ s diskretizační chybou velikosti $O(\tau + h)$.

Označíme

$$(17.2.5) \quad r = \frac{\tau}{h}$$

a vztah (17.2.4) přepíšeme na tvar

$$(17.2.6) \quad U_k^{n+1} = (1 + ar)U_k^n - arU_{k+1}^n + \tau f_k^n, \\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N,$$

kde jsme označili $f_k^n = f(x_k, t_n)$.

Rekurence (17.2.6) umožňuje počítat hodnoty přibližného řešení na $(n+1)$ -ní časové vrstvě pomocí hodnot na n -té vrstvě. Stejně jako u parabolických rovnic nazýváme příslušnou numerickou metodu *dvouvrstvá explicitní metoda*. Hodnoty

$$(17.2.7) \quad U_k^0 = \phi(x_k)$$

určujeme z počáteční podmínky. Při konkrétním výpočtu zadáme rozsah změny indexu k a číslo N .

Z mnemotechnických důvodů učiníme následující dohodu na základě obr. 52. Rovnici budeme i v dalších případech aproximovat vždy v uzlu $M = (x_k, t_n)$. Hodnotu přibližného řešení v tomto uzlu budeme značit U_k^n nebo U_M . Podobně U_{k+1}^n , resp. U_{k-1}^n značíme U_V , resp. U_Z . Hodnotu přesného řešení v uzlu M značíme buď $u(x_k, t_n)$ nebo $u(M)$. Podobně v ostatních uzlech značíme uzly „zeměpisně“ (viz také odst. 7.3.2); proto budeme rekurenci (17.2.6) psát také ve tvaru

$$(17.2.8) \quad U_S = (1 + ar)U_M - arU_V + \tau f(M)$$

a nazývat ji „severovýchodní“.

Jestliže v rovnici (17.2.1) aproximujeme v bodě M derivaci u_t dopřednou a u_x zpětnou poměrnou diferencí, dostaneme „severozápadní“ rekurenci

$$(17.2.9) \quad \begin{aligned} U_k^{n+1} &= (1 - ar)U_k^n + arU_{k-1}^n + \tau f_k^n, \\ k &= 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N, \end{aligned}$$

resp.

$$(17.2.10) \quad U_S = (1 - ar)U_M + arU_Z + \tau f(M),$$

která aproximuje danou diferenciální rovnici také s diskretizační chybou $O(\tau + h)$.

Opět jsme dostali dvouvrstvou explicitní metodu. Algoritmus je jednoduchý a v zásadě se neliší od algoritmu explicitní metody pro parabolickou rovnici. Zde počítáme hodnotu přibližného řešení na $(n + 1)$ -ní časové vrstvě pomocí pouze dvou hodnot na n -té vrstvě.

Čtenář si nyní jistě položí otázku, zda nejsou obě odvozené explicitní formule rovnocenné. Musíme odpovědět, že nikoliv. Jejich použitelnost je závislá na průběhu charakteristik dané diferenciální rovnice. Konkrétně, bude-li v našem případě $a < 0$, bude použitelná „severovýchodní“ formule (17.2.6), v případě $a > 0$ „severozápadní“ formule (17.2.9). Tyto podmínky ještě samy o sobě nezaručí konvergenci metody, ale uplatní se v situaci, kdy řešíme počátečně-okrajovou úlohu. Ukážeme to na příkladě.

17.2.2. Příklad. Chceme řešit počáteční úlohu

$$(17.2.11) \quad \begin{aligned} u_t + 2u_x &= 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \in (0, +\infty), \\ u(x, 0) &= \phi(x), \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Charakteristikami rovnice jsou přímky $x - 2t = c$ a směrnice těchto přímek je kladná (rovna $\frac{1}{2}$).

Zvolme čtvercovou síť \mathcal{S} s kroky $\tau = h$ (tj. $r = 1$) a uvažme dvě explicitní metody z předcházejícího odstavce, které jsou nyní dány rekurencemi

$$(17.2.12) \quad U_k^{n+1} = 3U_k^n - 2U_{k+1}^n,$$

$$(17.2.13) \quad U_k^{n+1} = -U_k^n + 2U_{k-1}^n.$$

Funkci ϕ volme tak, že je rovna nule všude s výjimkou jediného uzlu, v němž je rovna ε . Výsledky výpočtů na několika časových vrstvách podle formule (17.2.12) jsou v tabulce 9 a analogické výpočty podle (17.2.13) v tab. 10. Vidíme, že v obou případech se porucha ε v hodnotě počáteční funkce zesiluje a obě metody se tedy chovají *n e s t a b i l n ě*.

...	-8ε	30ε	-45ε	27ε	0	0	0	...
...	0	4ε	-9ε	9ε	0	0	0	...
...	0	0	-2ε	3ε	0	0	0	...
...	0	0	0	ε	0	0	0	... vrstva $t = 0$

Tab. 9. Explicitní metoda (17.2.12) pro $r = 1$.

...	0	0	0	$-\varepsilon$	6ε	-12ε	8ε	...
...	0	0	0	ε	-4ε	4ε	0	...
...	0	0	0	$-\varepsilon$	2ε	0	0	...
...	0	0	0	ε	0	0	0	... vrstva $t = 0$

Tab. 10. Explicitní metoda (17.2.13) pro $r = 1$.

Pro $r = \frac{1}{4}$ má „severovýchodní“ rekurence (17.2.6) tvar

$$(17.2.14) \quad U_k^{n+1} = \frac{3}{2}U_k^n - \frac{1}{2}U_{k+1}^n$$

a „severozápadní“ rekurence (17.2.9) má tvar

$$(17.2.15) \quad U_k^{n+1} = \frac{1}{2}U_k^n + \frac{1}{2}U_{k-1}^n.$$

...	0	0	0	$\varepsilon/8$	$3\varepsilon/8$	$3\varepsilon/8$	$\varepsilon/8$...
...	0	0	0	$\varepsilon/4$	$\varepsilon/2$	$\varepsilon/4$	0	...
...	0	0	0	$\varepsilon/2$	$\varepsilon/2$	0	0	...
...	0	0	0	ε	0	0	0	... vrstva $t = 0$

Tab. 11. Explicitní metoda (17.2.15) pro $r = 1/4$.

Z tab. 11 vidíme, že metoda (17.2.15) se chová *s t a b i l n ě*. Naproti tomu rekurence (17.2.14) vede opět k *n e s t a b i l n í m u* procesu.

17.3. Konvergence explicitní metody.

17.3.1. Věta. *Nechť má počáteční úloha (17.2.1), (17.2.2) řešení u , které je dvakrát spojitě diferencovatelné podle obou proměnných. Nechť dále U_k^n , $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm K$, $n = 0, 1, 2, \dots, N$, je přibližné řešení této úlohy získané na síti \mathcal{S} explicitní metodou (17.2.6), resp. (17.2.9), kde $r = \tau/h$. Když platí*

$$(17.3.1) \quad 0 < r \leq \frac{1}{|a|}$$

a když v (17.2.6) je $a < 0$ a v (17.2.9) je $a > 0$, pak pro normu chyby přibližného řešení platí odhad (při τ a $h \rightarrow 0$)

$$(17.3.2) \quad \|u_k^n - U_k^n\| = \max_{\mathcal{S}} |u_k^n - U_k^n| = O(\tau + h), \quad u_k^n = u(x_k, t_n),$$

tj. za uvedených předpokladů obě metody konvergují. Podmínce (17.3.1) se říká podmínka stability.

D ů k a z. Omezíme se na metodu

$$(17.3.3) \quad U_k^{n+1} = (1 + ar)U_k^n - arU_{k+1}^n + \tau f_k^n, \quad a < 0.$$

Z předpokladů o hladkosti řešení plyne konzistence metody; platí totiž (viz odst. 11.2)

$$u_t + au_x \mid_{(x_k, t_n)} = \frac{1}{\tau}[u_k^{n+1} - u_k^n] + \frac{a}{h}[u_{k+1}^n - u_k^n] + O(\tau + h).$$

Přesné řešení u_k^n splňuje tedy rekurenci (17.3.3) s chybou $\tau \cdot O(\tau + h)$, neboť platí

$$(17.3.4) \quad u_k^{n+1} = (1 + ar)u_k^n - aru_{k+1}^n + \tau f_k^n + \tau \cdot O(\tau + h).$$

Odečtením (17.3.3) od (17.3.4) dostaneme pro chybu přibližného řešení $e_k^n = u_k^n - U_k^n$ vztah

$$(17.3.5) \quad e_k^{n+1} = (1 + ar)e_k^n - are_{k+1}^n + \tau \cdot O(\tau + h).$$

Jestliže pro $a < 0$ platí (17.3.1), tj. $0 < -ar \leq 1$, jsou oba koeficienty v (17.3.5) nezáporné a platí

$$(17.3.6) \quad |e_k^{n+1}| \leq (1 + ar)|e_k^n| + (-ar)|e_{k+1}^n| + \tau \cdot O(\tau + h).$$

Označíme-li $\|e^n\| = \max_k |e_k^n|$ na vrstvě $t_n = n\tau$, pak z (17.3.6) obdržíme

$$(17.3.7) \quad \|e^{n+1}\| \leq \|e^n\| + \tau \cdot O(\tau + h), \quad n = 0, 1, \dots, N-1.$$

Protože $\phi(x_k) = u_k^0 = U_k^0$, je $e^0 = 0$ a indukcí dostaneme

$$(17.3.8) \quad \|e^n\| \leq n\tau \cdot O(\tau + h) \leq T \cdot O(\tau + h), \quad n = 0, 1, \dots, N,$$

kde T je konstanta a nezávisí na τ a h . Tím je věta dokázána.

17.3.2. Courantova-Friedrichsova-Lewyova podmínka. K analýze stability diferenčních metod pro lineární hyperbolické rovnice se stejně jako u parabolických rovnic používá jak Fourierova metoda, tak maticová metoda. Zde se však zmíníme o specifickém postupu na základě charakteristik. Jeho výhodou je geometrická názornost. Vyjdeme z obr. 52 v odst. 17.2.1.

Nechť v rovnici (17.2.1) je $a > 0$. Veďme bodem S charakteristiky o směrnici $1/a$. Dvě z nich (pro různá a) protínají časovou vrstvu $t = t_n$ v bodech R_0 a P . Hodnota přesného řešení v bodě S s charakteristikou procházející bodem R_0 závisí na hodnotě řešení v bodě R_0 . Avšak diferenční explicitní metoda využívající bodů M , Z , S tuto hodnotu neregistruje a taková metoda bude obecně divergovat. Bude-li však charakteristika procházející bodem S protínat časovou vrstvu $t = t_n$ mezi body Z a M , např. v bodě P , bude diferenční formule (17.2.10) hodnotu v bodě P registrovat. Říkáme pak, že daná diferenční metoda splňuje *Courantovu-Friedrichsovu-Lewyovu podmínku (CFL-podmínku)*. Respektování CFL-podmínky vede k nerovnosti

$$(17.3.9) \quad 0 < \frac{\tau}{h} \leq \frac{1}{a}, \quad a > 0.$$

Uvažujeme-li podobně explicitní diferenční metodu (17.2.8), pak tato metoda vzhledem k charakteristice protínající časovou vrstvu t_n v bodě R_1 (viz obr. 52) nesplňuje CFL-podmínku. Respektování této podmínky metodou (17.2.8) vede k nerovnosti

$$(17.3.10) \quad 0 < \frac{\tau}{h} \leq -\frac{1}{a}, \quad a < 0.$$

Nerovnosti (17.3.9), (17.3.10) jsou však podmínkami stability (viz (17.3.1)). Obecně je CFL-podmínka nutnou podmínkou stability; v našem případě je i podmínkou postačující. Metody, jejichž stabilitu je třeba zaručit omezující podmínkou na volbu kroků, nazýváme *podmíněně stabilní*.

17.4. Implicitní metody. Mějme opět diferenciální rovnici

$$(17.4.1) \quad u_t + au_x = f(x, t)$$

a síť \mathcal{S} jako v odst. 17.2.1.

Aproximujeme-li derivaci u_t v bodě M sítě \mathcal{S} (viz obr. 52) zpětnou diferencí a derivaci u_x dopřednou diferencí, dostaneme pro přibližné řešení diferenční rovnici

$$(17.4.2) \quad \frac{1}{\tau}[U_k^n - U_k^{n-1}] + \frac{a}{h}[U_{k+1}^n - U_k^n] = f(x_k, t_n),$$

která aproximuje rovnici (17.4.1) na hladkých řešeních s diskretizační chybou $O(\tau + h)$ a je konzistentní s rovnicí (17.4.1). Aproximujeme-li derivaci u_x zpětnou diferencí, dostaneme diferenční rovnici

$$(17.4.3) \quad \frac{1}{\tau}[U_k^n - U_k^{n-1}] + \frac{a}{h}[U_k^n - U_{k-1}^n] = f(x_k, t_n)$$

konzistentní s danou diferenciální rovnicí a s diskretizační chybou opět $O(\tau + h)$. U obou diferenčních rovnic je vztah mezi hodnotami přibližného řešení na časové vrstvě t_n a hodnotami na vrstvě t_{n-1} implicitní.

Situace je formálně obdobná té, kterou jsme popsali u implicitní metody pro parabolické rovnice. Ovšem hlavní důvody používání implicitních metod jsou u hyperbolických rovnic odlišné. U parabolických rovnic stabilní explicitní metody vyžadují, aby časový krok τ byl řádově menší než prostorový krok h ($\tau \approx h^2$). U hyperbolických rovnic tento důvod nemáme. Volba časového kroku je zde určena s k l o n e m c h a r a k t e r i s t i k. Předností implicitních metod je zde to, že potlačují závislost na směru charakteristik a některé z metod jsou na směru charakteristik zcela nezávislé. Přesněji řečeno, tato závislost je zahrnuta v úloze samotné a v diferenční aproximaci již na ni nemusíme brát zřetel. Takové metody se nazývají *bezpodmínečně stabilní*.

Po úpravě diferenční rovnice (17.4.2) dostaneme ($r = \tau/h$)

$$(17.4.4) \quad U_M = \frac{1}{1 - ar} U_J - \frac{ar}{1 - ar} U_V - \frac{\tau}{1 - ar} f(M).$$

Analogicky úpravou (17.4.3) dostaneme

$$(17.4.5) \quad U_M = \frac{ar}{1 + ar} U_Z + \frac{1}{1 + ar} U_J + \frac{\tau}{1 + ar} f(M).$$

Tyto metody se nedají užít k řešení počáteční úlohy s počáteční podmínkou pro $t = 0$. Jsou však dobře použitelné pro p o č á t e č n ě - o k r a j o v é ú l o h y. Vzorci (17.4.4), (17.4.5) mají pak explicitní charakter.

Pro $a < 0$ jsou koeficienty vzorce (17.4.4) u U_J a U_V kladné a jejich součet je roven jedné. Proto je možné stanovit odhad

$$(17.4.6) \quad \min\{U_J, U_V\} - \frac{\tau}{1 - ar} f(M) \leq U_M \leq \max\{U_J, U_V\} - \frac{\tau}{1 - ar} f(M)$$

a využít jej k odhadu chyby $e(M) = u(M) - U_M$ přibližného řešení a posléze k důkazu konvergence metody. Žádnou podmínku na r není třeba klást, metoda (17.4.4) je při $a < 0$ bezpodmínečně stabilní. Řád chyby metody je $O(\tau + h)$.

Obdobným způsobem dojdeme ke stejnému závěru u metody (17.4.5), v níž $a > 0$. Přehled explicitních a implicitních metod je v tab. 12.

Schéma	Vzorec	Typ	Podmínka použitelnosti	Stabilita	Omezení na časový krok
	$U_s = (1 + ar)U_M - arU_v + \tau f(M)$	explicitní	$a < 0$	$0 < r \leq -\frac{1}{a}$	$\tau \leq -\frac{h}{a}$
	$U_S = (1 - ar)U_M + arU_Z + \tau f(M)$	explicitní	$a > 0$	$0 < r \leq \frac{1}{a}$	$\tau \leq \frac{h}{a}$
	$U_M = \frac{1}{1-ar}U_J - \frac{ar}{1-ar}U_V - \frac{\tau}{1-ar}f(M)$	implicitní		$a < 0$	
	$U_V = \frac{ar-1}{ar}U_M + \frac{1}{ar}U_J + \frac{\tau}{ar}f(M)$	implicitní	$a > 0$	$r \geq \frac{1}{a}$	$\tau \geq \frac{h}{a}$
	$U_M = \frac{ar}{1+ar}U_Z + \frac{1}{1+ar}U_J + \frac{\tau}{1+ar}f(M)$	implicitní		$a > 0$	
	$U_Z = \frac{1+ar}{ar}U_M - \frac{1}{ar}U_J - \frac{\tau}{ar}f(M)$	explicitní	$a < 0$	$r \leq -\frac{1}{a}$	$\tau \leq -\frac{h}{a}$
	$U_S = (1 - a^2r^2)U_M + \frac{ar}{2}(1 + ar)U_Z - \frac{ar}{2}(1 - ar)U_V$	$f = 0$, explicitní (Lax-Wendroff)	a libov.	$-1 \leq ra \leq 1$	$\tau \leq \frac{h}{ a }$

Tab. 12. Základní explicitní a implicitní metody pro rovnici $u_i + au_x = f(x, t)$.

17.5. Rovnice s proměnnými koeficienty. Pro úlohu s hyperbolickou rovnicí

$$(17.5.1) \quad u_t + a(x, t)u_x + b(x, t)u = f(x, t)$$

se na principech diskretizace z předcházejících odstavců nic nezmění. Na zvolené síti (viz odst. 17.2.1) lze metodou končených diferencí odvodit vzorce analogické vzorcům z tab. 12. Například, aproximujeme-li u_t a u_x dopřednými diferencemi, dostaneme explicitní metodu

$$(17.5.2) \quad U_S = (1 + \bar{a}r + b(M))U_M - \bar{a}rU_V + \tau f(M).$$

Zde \bar{a} je vhodná aproximace hodnoty $a(M) = a(x_k, t_n)$. Můžeme např. přímo klást $\bar{a} = a(x_k, t_n)$, případně $\bar{a} = a(x_k, t_n + \frac{1}{2}\tau)$. Pro dostatečně hladkou funkci $a(x, t)$ je diskretizační chyba metody (17.5.2) opět $O(\tau + h)$.

P o d m í n k u s t a b i l i t y odvodíme geometrickou úvahou. Požadavek stability a použitelnosti metody (17.5.2) vede k závěru, že charakteristika rovnice procházející bodem S musí protínat úsečku MV (obr. 52). Tento průsečík Q je oblastí vlivu (na časové vrstvě t_n) na řešení v bodě S . Na rozdíl od konstantního a se zde $a(x, t)$ podél charakteristiky mění a tedy se také mění směrnice tečny $1/a(x, t)$ této charakteristiky. Bod Q bude ležet mezi uzly M a V , pokud bude platit nerovnost

$$(17.5.3) \quad \frac{\tau}{h} \leq \min \left| \frac{1}{a(x, t)} \right| \leq \frac{1}{\max |a(x, t)|}.$$

Zde minimum či maximum bereme přes všechny body (x, t) charakteristiky mezi časovými vrstvami t_n, t_{n+1} . Pro zvolenou síť píšeme podmínky stability a podmínku použitelnosti metody (17.5.2) např. ve tvaru

$$(17.5.4) \quad r \leq \frac{1}{\max\{|a(M)|, |a(S)|, |a(V)|\}}.$$

Je zřejmé, že při výpočtu jsme obecně nuceni měnit časový krok (při pevném h) v závislosti na $a(x, t)$.

17.6. Metody druhého řádu.

17.6.1. Laxova-Wendroffova metoda. Nechť řešení $u = u(x, t)$ rovnice

$$(17.6.1) \quad u_t + au_x = 0 \quad (a = \text{konst.})$$

je dostatečně hladké. V bodě M (obr. 52) můžeme aproximovat derivaci u_x pomocí centrální difference (využívající hodnoty $u(V)$ a $u(Z)$) s chybou $O(h^2)$. Odvodíme aproximaci derivace u_t v bodě M také druhého řádu. Užijeme Taylorův vzorec a píšeme

$$(17.6.2) \quad u_t(M) = \frac{u(S) - u(M)}{\tau} - u_{tt}(M)\frac{\tau}{2} + O(\tau^2).$$

Z rovnice (17.6.1) plyne $u_t = -au_x$ a také $(u_t)_t = -a(-au_x)_x$. Dosadíme-li za u_{tt} do (17.6.2), dostaneme aproximaci u_t druhého řádu

$$(17.6.3) \quad u_t(M) = \frac{u(S) - u(M)}{\tau} - \frac{a^2\tau}{2h^2}[u(V) - 2u(M) + u(Z)] + O(\tau^2) + O(h^2).$$

Užijeme-li této aproximace a aproximujeme-li u_x centrální diferencí, dostaneme *Laxovu-Wendroffovu explicitní diferenční metodu*

$$(17.6.4) \quad U_S = (1 - a^2r^2)U_M - \frac{ar}{2}(1 - ar)U_V + \frac{ar}{2}(1 + ar)U_Z, \\ r = \frac{\tau}{h},$$

která patří k nejoblíbenějším metodám pro řešení hyperbolických rovnic.

Algoritmus Laxovy-Wendroffovy metody realizujeme obvykle ve dvou krocích (dvoukroková metoda):

$$\begin{aligned} 1. \quad \bar{U} &= \frac{U_V + U_M}{2} - \frac{ar}{2}[U_V - U_M], \\ \bar{\bar{U}} &= \frac{U_M + U_Z}{2} - \frac{ar}{2}[U_M - U_Z], \\ 2. \quad U_S &= U_M - ar[\bar{U} - \bar{\bar{U}}]. \end{aligned}$$

Pomocné hodnoty \bar{U} , $\bar{\bar{U}}$ interpretujeme jako $\bar{U} \approx u(x_k + \frac{1}{2}h, t + \frac{1}{2}\tau)$, $\bar{\bar{U}} \approx u(x_k - \frac{1}{2}h, t + \frac{1}{2}\tau)$. Dá se ukázat, že Laxova-Wendroffova metoda je podmíněně stabilní s podmínkou stability $|ar| \leq 1$.

17.6.2. MacCormackova metoda. Dalším typem explicitní podmíněně stabilní dvoukrokové metody druhého řádu je MacCormackova metoda. Uplatňuje se především v úlohách proudění, v nichž rychlost proudění je srovnatelná s rychlostí zvuku, při výpočtu jak nespojitých řešení, tak rázových vln. Zde si uvedeme příslušné vzorce pro rovnici

$$(17.6.5) \quad u_t + au_x = f(x, t).$$

MacCormackova metoda vychází z metod (17.2.6), (17.2.9) a užívá, podobně jako Laxova-Wendroffova metoda, pomocné hodnoty $\bar{U}_k \approx u(x_k + \frac{1}{2}h, t_n + \frac{1}{2}\tau)$, $\bar{\bar{U}}_k \approx u(x_k - \frac{1}{2}h, t_n + \frac{1}{2}\tau)$ na časové vrstvě $t = t_n + \frac{1}{2}\tau$. Prostřednictvím těchto hodnot se určí $U_k^{n+1} \approx u(x_k, t_n + \tau)$. Algoritmus je dán formulí

$$(17.6.5) \quad \begin{aligned} \bar{U}_k &= U_k^n - ar(U_{k+1}^n - U_k^n) + \tau f_k^n, \\ \bar{\bar{U}}_k &= \bar{U}_k - ar(\bar{U}_k - \bar{U}_{k-1}) + \tau f_k^{n+1}, \\ U_k^{n+1} &= \frac{1}{2}[U_k^n + \bar{\bar{U}}_k]. \end{aligned}$$

Podmínka stability má zde opět tvar

$$|ar| \leq 1.$$

Je-li $a = a(x, t)$, pak při výpočtu \bar{U}_k se klade $a = a_{k+1/2}^n = a(x_k + \frac{1}{2}h, t_n)$ a při výpočtu $\bar{\bar{U}}_k$ se klade $a = a_{k-1/2}^n = a(x_k - \frac{1}{2}h, t_n)$.

17.6.3. Dvoustupňová metoda pro nelineární rovnici. Pro odvození diferenční aproximace rovnice

$$(17.6.6) \quad u_t + [F(u)]_x = 0$$

se obvykle užívá metoda integrálních identit, která dává návod, jak aproximovat integrální vztah

$$\int_{\Omega_{k,n}} [u_t + (F(u))_x] dx dt = 0.$$

Volíme-li např. $\Omega_{k,n} = \langle x_k - \frac{1}{2}h, x_k + \frac{1}{2}h \rangle \times \langle t_n, t_{n+1} \rangle$, dostaneme

$$\begin{aligned} & \int_{x_k + \frac{1}{2}h}^{x_k - \frac{1}{2}h} [u(x, t_{n+1}) - u(x, t_n)] dx + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left[F\left(u\left(x_k + \frac{1}{2}h, t\right)\right) - \right. \\ & \left. - F\left(u\left(x_k - \frac{1}{2}h, t\right)\right) \right] dt = 0. \end{aligned}$$

Aproximováním integrálů v této rovnosti pak můžeme dostat vhodné diferenční aproximace. Např. Laxova-Wendroffova dvoustupňová metoda je dána vzorci

$$\begin{aligned} (17.6.7) \quad \bar{U}_k &= \frac{1}{2}[U_k^n + U_{k+1}^n] - \frac{r}{2}[F_{k+1}^n - F_k^n], \\ \bar{\bar{U}}_k &= \frac{1}{2}[U_k^n + U_{k-1}^n] - \frac{r}{2}[F_k^n - F_{k-1}^n], \\ U_k^{n+1} &= U_k^n - r[\bar{F}_k - \bar{\bar{F}}_k], \end{aligned}$$

kde $F_k^n = F(U_k^n)$, $\bar{F}_k = F(\bar{U}_k)$, $\bar{\bar{F}}_k = F(\bar{\bar{U}}_k)$. MacCormackova metoda je dána vzorci

$$\begin{aligned} (17.6.8) \quad \bar{U}_k &= U_k^n - r[F_{k+1}^n - F_k^n], \\ \bar{\bar{U}}_k &= \bar{U}_k - r[\bar{F}_k - \bar{F}_{k-1}], \\ U_k^{n+1} &= \frac{1}{2}[U_k^n + \bar{\bar{U}}_k]. \end{aligned}$$

17.6.4. Poznámka. Aproximujeme-li v rovnici $u_t + au_x = 0$ derivace centrálními diferencemi (aproximace druhého řádu), dostaneme diferenční rovnici

$$(17.6.9) \quad U_k^{n+1} = U_k^{n-1} - ar(U_{k+1}^n - U_{k-1}^n),$$

která je základem třívrstvé metody druhého řádu, stabilní, pokud platí $0 < |a|r \leq 1$. Její nevýhodou ovšem je, že vyžaduje zadání počáteční podmínky na dvou sousedních časových vrstvách.

Aproximujeme-li však analogickým způsobem kvazilineární diferenciální rovnici $u_t + uu_x = 0$, potom třívrstvá metoda určená odpovídající diferenční rovnicí

$$(17.6.10) \quad U_k^{n+1} = U_k^{n-1} - rU_k^n(U_{k+1}^n - U_{k-1}^n)$$

bude nestabilní i v případě, že krok τ volíme tak, aby byla splněna podmínka $0 < r|U_k^n| \leq 1$. Na tomto případě je v [28] ukázáno, že metoda, která je stabilní pro lineární rovnici, nemusí být stabilní pro nelineární rovnici. Analogická metoda prvního řádu (srov. s (17.2.10))

$$(17.6.11) \quad U_k^{n+1} = (1 - rU_k^n)U_k^n + rU_k^n U_{k-1}^n$$

je stabilní s podmínkou stability

$$r \leq \frac{1}{\max_k |U_k^n|}$$

pouze pro hladká řešení kvazilineární rovnice $u_t + uu_x = 0$. Jestliže tato rovnice bude mít nespojitá řešení (viz odst. 15.4), nebude metoda (17.6.11) konvergentní.

Ukazuje se, že diferenční aproximaci nelineární rovnice musíme konstruovat tak, aby odpovídala příslušnému zákonu zachování, z něhož byla rovnice odvozena. V našem případě musíme vycházet z rovnice (viz (17.6.6))

$$u_t + \left(\frac{1}{2}u^2\right)_x = 0.$$

Přípustná diskretizace prvního řádu pak bude mít tvar

$$(17.6.12) \quad \frac{U_k^{n+1} - U_k^n}{\tau} + \frac{1}{2h}[(U_k^n)^2 - (U_{k-1}^n)^2].$$

17.7. Diferenční metoda pro řešení hyperbolické soustavy.

17.7.1. Aproximace prvního řádu. Principy diskretizace z předcházejících odstavců zůstávají zachovány i v případě hyperbolických soustav. Máme např. soustavu J rovnic

$$(17.7.1) \quad \mathbf{u}_t + \mathbf{A}\mathbf{u}_x = \mathbf{0}.$$

Uvažujme konkrétní úlohu

$$(17.7.2) \quad p_t + \varrho_0 c^2 u_x = 0,$$

$$u_t + \frac{1}{\varrho_0} p_x = 0, \quad x \in (0, 1), \quad t \in (0, T),$$

$$(17.7.3) \quad u(x, 0) = \phi_1(x), \quad p(x, 0) = \phi_2(x), \quad x \in \langle 0, 1 \rangle,$$

$$u(0, t) = g_0(t), \quad p(1, t) = g_1(t) \quad t \in \langle 0, T \rangle.$$

Předpokládáme, že dané funkce ϕ_1, ϕ_2, g_0, g_1 jsou spojité a že konstanty ϱ_0, c^2 jsou kladné. Snadno zjistíme, že vlastní čísla matice soustavy jsou $\lambda_1 = c, \lambda_2 = -c$. Protože $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$, je naše úloha korektně formulovaná (na každém konci intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ musí být zadána jedna okrajová podmínka).

Na množině $\langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, T \rangle$ sestrojíme rovnoměrnou síť \mathcal{S} s uzly (x_k, t_n) , $k = 0, 1, \dots, K, n = 0, 1, \dots, N$, a s kroky h a τ . Soustavu aproximujeme diferenčními rovnicemi

$$(17.7.4) \quad \frac{V_k^{n+1} - V_k^n}{\tau} + c \frac{V_k^n - V_{k-1}^n}{h} = 0$$

a

$$(17.7.5) \quad \frac{W_k^{n+1} - W_k^n}{\tau} - c \frac{W_{k+1}^n - W_k^n}{h} = 0,$$

kde $V_K^n = U_K^n + \frac{P_K^n}{\varrho_0 c}, W_K^n = U_K^n - \frac{P_K^n}{\varrho_0 c}$ Algoritmus bude proto dán vzorci ($V_k^0 = \phi_1(x_k) + \frac{\phi_2(x_k)}{\varrho_0 c}, W_k^0 = \phi_1(x_k) - \frac{\phi_2(x_k)}{\varrho_0 c}, k = 0, 1, \dots, K$)

$$(17.7.6) \quad V_k^{n+1} = V_k^n - cr(V_k^n - V_{k-1}^n),$$

$$k = 1, \dots, K, \quad n = 0, 1, \dots, N-1;$$

$$(17.7.7) \quad W_k^{n+1} = W_k^n + cr(W_{k+1}^n - W_k^n),$$

$$k = 0, 1, \dots, K-1; \quad n = 0, 1, \dots, N-1.$$

Pro $x = 0$ klademe

$$(17.7.8) \quad V_0^n = g_0(t_n) + \frac{P_0^n}{\varrho_0 c}, \quad n = 0, 1, \dots, N,$$

a pro $x = 1$ klademe

$$(17.7.9) \quad W_K^n = U_K^n + \frac{g_1(t_n)}{\varrho_0 c}, \quad n = 0, 1, \dots, N.$$

Hodnoty P_0^n a U_K^n se určují způsobem, který je podrobněji popsán v odstavci (17.7.2).

Vyšetříme podmínku stability. K tomu účelu uvážíme CFL-podmínku, která říká, že charakteristika o směrnici $1/\lambda_1$ vedená bodem (x_k, t_{n+1}) musí protnout časovou vrstvu t_n mezi uzly (x_{k-1}, t_n) a (x_k, t_n) . Podobně charakteristika o směrnici $1/\lambda_2$ vedená bodem (x_k, t_{n+1}) musí protnout časovou vrstvu t_n mezi uzly (x_k, t_n) a (x_{k+1}, t_n) . Musí tedy být

$$\frac{\tau}{h} \leq \frac{1}{|\lambda_1|}, \quad \frac{\tau}{h} \leq \frac{1}{|\lambda_2|},$$

neboli

$$\frac{\tau}{h} \leq \frac{1}{\max(|\lambda_1|, |\lambda_2|)}.$$

Protože $|\lambda_i| = c$, můžeme požadavek na volbu kroku τ psát ve tvaru

$$\tau \leq \frac{h}{c}.$$

17.7.2. Užití aproximací druhého řádu. Laxova-Wendroffova metoda pro soustavu rovnic

$$(17.7.10) \quad \mathbf{u}_t + \mathbf{A}(x, t)\mathbf{u}_x = 0$$

má tvar (srov. s (17.6.4))

$$(17.7.11) \quad \begin{aligned} \mathbf{U}_k^{n+1} = & [\mathbf{I} - r^2(\mathbf{A}_k^n)^2]\mathbf{U}_k^n - \frac{r}{2}\mathbf{A}_k^n[\mathbf{I} - r\mathbf{A}_k^n]\mathbf{U}_{k+1}^n + \\ & + \frac{r}{2}\mathbf{A}_k^n[\mathbf{I} + r\mathbf{A}_k^n]\mathbf{U}_{k-1}^n. \end{aligned}$$

Zde $\mathbf{A}_k^n = \mathbf{A}(x_k, t_n)$ je matice s prvky $a_{ij}(x_k, t_n)$, $i, j = 1, 2, \dots, J$, \mathbf{I} je jednotková matice řádu J , \mathbf{U}_k^n vektor o J složkách. Podmínka stability má zde tvar

$$r = \frac{\tau}{h} \leq \frac{1}{\max_j |\lambda_j(\mathbf{A})|},$$

kde $\lambda_j(\mathbf{A})$, $j = 1, 2, \dots, J$, jsou (reálná) vlastní čísla matice \mathbf{A} a určují směr charakteristik soustavy (17.7.10) (viz odst. 15.6.1).

Uvažujme nyní konkrétní počátečně-okrajovou úlohu

$$(17.7.12) \quad v_t - w_x = 0,$$

$$w_t - v_x = 0, \quad x \in (0, 1), \quad t \in (0, T),$$

$$(17.7.13) \quad \begin{aligned} w(x, 0) &= \phi_1(x), \quad w(x, 0) = \phi_2(x), \quad x \in \langle 0, 1 \rangle, \\ v(0, t) &= g_0(t), \quad w(1, t) = g_1(t), \quad t \in \langle 0, T \rangle. \end{aligned}$$

Z maticového tvaru soustavy (17.7.12)

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix},$$

určíme, že vlastní čísla dané konstantní matice \mathbf{A} jsou $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$. Jako v odst. 17.7.1 sestojíme na množině $\langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, T \rangle$ síť \mathcal{S} . Označíme-li $\mathbf{U}_k^n = [V_k^n, W_k^n]^T$, $V_k^n \approx v(x_k, t_n)$, $W_k^n \approx w(x_k, t_n)$, dostaneme z (17.7.11) následující soustavu diferenčních rovnic ($\mathbf{A}^2 = \mathbf{I}$)

$$(17.7.14) \quad \begin{bmatrix} V_k^{n+1} \\ W_k^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - r^2 & 0 \\ 0 & 1 - r^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_k^n \\ W_k^n \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} r^2 & r \\ r & r^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{k+1}^n \\ W_{k+1}^n \end{bmatrix} + \\ + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} r^2 & -r \\ -r & r^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{k-1}^n \\ W_{k-1}^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Z počátečních podmínek jsou dány hodnoty $V_k^0 = \phi_1(x_k)$, $W_k^0 = \phi_2(x_k)$, $k = 0, 1, \dots, K$. Známe-li tedy hodnoty V_k^n , W_k^n , $k = 0, 1, \dots, K$, na časové vrstvě $t = t_n$, můžeme pomocí (17.7.14) počítat hodnoty V_k^{n+1} , W_k^{n+1} na vrstvě $t = t_{n+1}$, ovšem pouze pro $k = 1, 2, \dots, K - 1$. Z okrajových podmínek určíme $V_0^{n+1} = g_0(t_{n+1})$, $W_K^{n+1} = g_1(t_{n+1})$, $n = 0, 1, 2, \dots, N - 1$. Hodnoty W_0^{n+1} , V_K^{n+1} , $n = 0, 1, 2, \dots, N - 1$, však musíme nějakým vhodným způsobem dopočítat. Vyložíme postup opírající se o metodu charakteristik.

Pro soustavu (17.7.12) snadno určíme Riemannovy invarianty (viz odst. 15.6.1)

$$(17.7.15) \quad v_1 = \frac{1}{2}(v - w), \quad v_2 = \frac{1}{2}(v + w).$$

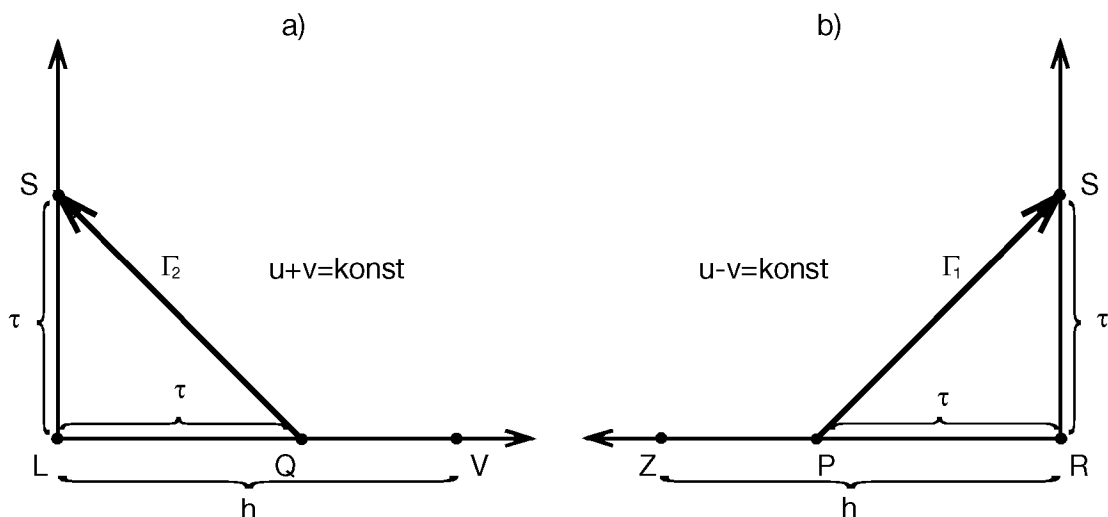
Sečtením a odečtením obou rovnic v (17.7.12) totiž dostaneme

$$\begin{aligned} (v - w)_t + (v - w)_x &= 0, \\ (v + w)_t + (v + w)_x &= 0, \end{aligned}$$

což je kanonický tvar soustavy (17.7.12) (viz také (15.6.3)). Jsou-li Γ_1 a Γ_2 dva systémy charakteristik (přímky $x - t = c_1$, $x + t = c_2$) naší soustavy, potom z (17.7.12) plynou diferenciální rovnice na charakteristikách

$$(17.7.16) \quad \begin{aligned} \frac{d(v - w)}{dt} &= 0 \quad \text{na } \Gamma_1, \\ \frac{d(v + w)}{dt} &= 0 \quad \text{na } \Gamma_2. \end{aligned}$$

V dalším výkladu se budeme opírat o situaci na obr. 53. Chceme dopočítat hodnotu $V_K^{n+1} = V_S$ na pravém konci intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ (obr. 53b) a hodnotu $W_0^{n+1} = W_S$ na levém konci (obr. 53a).



Obr. 53. Dopočítávání okrajových hodnot v úloze (17.7.12), (17.7.13).

Diferenciální rovnice (17.7.16) budeme aproximovat diferenčními rovnicemi

$$(17.7.17) \quad \frac{V_S - W_S - (V_P - W_P)}{\sqrt{2}\tau} = 0 \quad \text{na } \Gamma_1,$$

$$(17.7.18) \quad \frac{V_S + W_S - (V_Q + W_Q)}{\sqrt{2}\tau} = 0 \quad \text{na } \Gamma_2.$$

Bod P je průsečík charakteristiky Γ_1 s úsečkou ZR (obr. 53b) a bod Q je průsečík charakteristiky Γ_2 s úsečkou LV (obr. 53a). Podmínka stability

$$\frac{\tau}{h} \leq \frac{1}{\max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|\}} = 1$$

opravňuje polohu bodů P a Q .

Všimneme si podrobněji situace na charakteristice Γ_1 . Charakteristika Γ_1 „vychází“ z bodu P a „dones“ hodnotu invariantu $v - w$ do bodu S ($v - w$ je na Γ_1 konstantní). Hodnotu V_S můžeme určit z (17.7.17), tj. ze vztahu

$$(17.7.19) \quad V_S = W_S + [V_P - W_P],$$

pokud dokážeme stanovit V_P a W_P , neboť $W_S = W_K^{n+1}$ je hodnota daná okrajovou podmínkou.

Hodnoty V_P a W_P určíme lineární interpolací. Z poměrů

$$\frac{V_R - V_P}{V_R - V_Z} = \frac{W_R - W_P}{W_R - W_Z} = \frac{\tau}{h} = \xi$$

určíme

$$\begin{aligned} V_P &= \xi V_Z + (1 - \xi) V_R, \\ W_P &= \xi W_Z + (1 - \xi) W_R, \end{aligned}$$

takže nakonec z (17.7.19) máme

$$(17.7.20) \quad V_S = W_S + \xi(V_Z - W_Z) + (1 - \xi)(V_R - W_R).$$

Zcela analogicky postupujeme při určování $W_S = W_0^{n+1}$ na levém konci intervalu $\langle 0, 1 \rangle$.

17.7.3. Poznámka. Postup při dopočítávání okrajových hodnot je poněkud komplikovanější, jsou-li okrajové podmínky dány ve tvaru

$$(17.7.21) \quad \alpha_0(t)v(0, t) + \beta_0(t)w(0, t) = g_0(t),$$

$$(17.7.22) \quad \alpha_1(t)v(1, t) + \beta_1(t)w(1, t) = g_1(t).$$

Tyto podmínky budou přípustné, nebude-li lineární kombinace $\alpha_0 v + \beta_0 w$ úměrná invariantu $v + w$ přicházejícímu k levému konci (mluvíme stále o soustavě (17.7.12)) a lineární kombinace $\alpha_1 v + \beta_1 w$ nebude úměrná invariantu $v - w$ přicházejícímu k pravému konci. Tyto invarianty si totiž svoji hodnotu na konec donesou a nelze je tedy zadat. Jinými slovy, pro přípustnost okrajových podmínek (17.7.21), (17.7.22) je nutné, aby

$$\det \begin{bmatrix} \alpha_0 & \beta_0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \neq 0, \quad \det \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \neq 0.$$

Chybějící hodnoty V_S a W_S určíme ze soustavy rovnic (na příslušné časové vrstvě $t = t_{n+1}$)

$$\left. \begin{aligned} \alpha_0 V_S + \beta_0 W_S &= g_0, \\ V_S + W_S &= V_Q + W_Q \end{aligned} \right\} \text{ na levém konci}$$

nebo

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 V_S + \beta_1 W_S &= g_1, \\ V_S - W_S &= V_P - W_P \end{aligned} \right\} \text{ na pravém konci.}$$

Druhá rovnice v těchto soustavách je důsledkem toho, že invariant je na příslušné charakteristice konstantní. Hodnoty v bodech Q , P se opět určí interpolací.

17.7.4. Nelineární soustavy. O nelineární soustavě prvního řádu jsme se zmínili v odst. 15.1. V jedné prostorové proměnné ji píšeme ve tvaru

$$(17.7.24) \quad \mathbf{u}_t + [\mathbf{F}(\mathbf{u})]_x = 0, \quad \mathbf{F} : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N,$$

ve dvou prostorových proměnných pak ve tvaru

$$(17.7.25) \quad \mathbf{u}_t + [\mathbf{F}(\mathbf{u})]_x + [\mathbf{G}(\mathbf{u})]_y = 0, \quad \mathbf{G} : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N.$$

Speciálním případem nelineární soustavy je kvazilineární soustava

$$(17.7.26) \quad \mathbf{u}_t + \mathbf{A}(x, t, \mathbf{u})\mathbf{u}_x = \mathbf{f}(x, t, \mathbf{u}).$$

případně kvazilineární soustava (ve dvou prostorových proměnných)

$$(17.7.27) \quad \mathbf{u}_t + \mathbf{A}_1(x, y, t, \mathbf{u})\mathbf{u}_x + \mathbf{A}_2(x, y, t, \mathbf{u})\mathbf{u}_y = \mathbf{f}(x, y, t, \mathbf{u}).$$

Vzorce (17.6.7) nebo (17.6.8) z odst. 17.6.3 lze použít i pro nelineární soustavy. Protože $\mathbf{u} = [u_1, u_2, \dots, u_N]^T$, $\mathbf{F} = [F_1, F_2, \dots, F_N]^T$, příp. $\mathbf{G} = [G_1, G_2, \dots, G_N]^T$, potom \mathbf{U}_k^n , $\mathbf{F}_k^n = \mathbf{F}(\mathbf{U}_k^n)$, příp. \mathbf{U}_{ij}^n , $\mathbf{F}_{ij}^n = \mathbf{F}(\mathbf{U}_{ij}^n)$ ve zmíněných vzorcích z odst. 17.6.3 jsou vektory o N složkách ($\mathbf{U}_{ij}^n \approx \mathbf{u}(x_i, y_j, t_n)$).

Existuje celá řada modifikací metod typu (17.6.7), (17.6.8) (viz [28], [41]). Uvedme za všechny MacCormackovu metodu pro soustavu (17.7.25). Volíme $h = \Delta x = \Delta y$:

$$(17.7.28) \quad \begin{aligned} \bar{\mathbf{U}}_{ij} &= \mathbf{U}_{ij}^n - r[\mathbf{F}_{i+1,j}^n - \mathbf{F}_{ij}^n + \mathbf{G}_{i,j+1}^n - \mathbf{G}_{ij}^n], \\ \bar{\bar{\mathbf{U}}}_{ij} &= \bar{\mathbf{U}}_{ij} - r[\bar{\mathbf{F}}_{ij} - \bar{\mathbf{F}}_{i-1,j} + \bar{\mathbf{G}}_{ij} - \bar{\mathbf{G}}_{i,j-1}], \\ \mathbf{U}_{ij}^{n+1} &= \frac{1}{2}[\mathbf{U}_{ij}^n + \bar{\bar{\mathbf{U}}}_{ij}], \end{aligned}$$

kde

$$\bar{\mathbf{F}}_{ij} = \mathbf{F}(\bar{\mathbf{U}}_{ij}), \quad \bar{\mathbf{G}}_{ij} = \mathbf{G}(\bar{\mathbf{U}}_{ij}).$$

17.8. Problematika diferenčních metod. Z toho, co bylo v předcházejících odstavcích řečeno, by čtenář mohl možná nabýt dojmu, že řešení hyperbolických rovnic diferenčními metodami je v zásadě bez problémů. Chceme zde upozornit, že tomu tak zdaleka být nemusí. Například metody prvního řádu použité již k nejjednodušší rovnici $u_t + au_x = 0$ mají tu „nectnost“, že silně „rozmazávají“ řešení. U kvazilineárních rovnic pak silně „rozmazávají“ případné silné nespojitosti v řešení. Metody druhého řádu mají slabinu v tom, že nezachovávají monotónnost řešení. V současné době se doporučuje celá řada metod, které mají uvedené slabiny klasických metod odstranit či alespoň zmírnit. Jednu z těchto metod zde ve stručnosti naznačíme. Užijeme v ní metodu integrálních identit kombinovanou s metodou charakteristik.

Uvažujme jednoduchou počátečně-okrajovou úlohu

$$(17.8.1) \quad \begin{aligned} u_t + u_x &= 0, & x \in (0, +\infty), & t \in (0, T), \\ u(x, 0) &= \phi(x), & x \in \langle 0, +\infty \rangle, \\ u(0, t) &= g(t), & t \in \langle 0, T \rangle. \end{aligned}$$

Na množině $\langle 0, +\infty \rangle \times \langle 0, T \rangle$ zvolíme síť \mathcal{S} s kroky h a τ a uvažujeme obdélníkový sektor Ω_M s vrcholy $M = (x_k, t_n)$, $V = (x_{k+1}, t_n)$, $SV = (x_{k+1}, t_{n+1})$, $S = (x_k, t_{n+1})$ (viz obr. 52). Označíme

$$(17.8.2) \quad \begin{aligned} W_{12} &= \int_{x_k}^{x_{k+1}} u(x, t_n) dx, & W_{43} &= \int_{x_k}^{x_{k+1}} u(x, t_{n+1}) dx, \\ W_{23} &= \int_{t_n}^{t_{n+1}} u(x_{k+1}, t) dt, & W_{14} &= \int_{t_n}^{t_{n+1}} u(x_k, t) dt. \end{aligned}$$

Tyto integrály představují toky veličiny u stranami obdélníku Ω_M . Integrováním rovnice (17.8.1) přes Ω_M dostaneme

$$(17.8.3) \quad \iint_{\Omega_M} [u_t(x, t) + u_x(x, t)] dx dt = W_{12} + W_{14} - W_{23} - W_{43} = 0.$$

Chceme nyní odvodit metodu, která nám umožní vypočítat hodnotu u v uzlu $SV = (x_{k+1}, t_{n+1})$ pomocí hodnot $u(M)$, $u(V)$, $u(S)$ a hodnot W_{12} a W_{14} .

Když $r = \tau/h \leq 1$, pak charakteristika $x - t = c$ procházející uzlem SV protíná časovou vrstvu $t = t_n$ v bodě $A = (x_A, t_A)$, který leží mezi uzly M a V , tj. $x_A = x_{k+1} - \tau$, $t_A = t_n$. Potom platí $u(SV) = u(A)$. Hodnota $u(A)$ se určí interpolací z hodnot $u(M)$ a $u(V)$ s přihlédnutím k hodnotě toku W_{12} . Diferenciální rovnici (17.8.1) aproximujeme v bodě $u(SV)$ diferenční rovnicí

$$(17.8.4) \quad \frac{1}{\tau}[U_{SV} - U_V] + \frac{1}{x_{k+1} - x_A}[U_V - U_A] = 0, \quad r \leq 1.$$

Jestliže však zmíněná charakteristika protíná úsečku MS v bodě $B = (x_k, t_{n+1} - h)$, tj. když $r > 1$, obdržíme

$$(17.8.5) \quad \frac{1}{t_{n+1} - t_B}[U_S - U_B] + \frac{1}{h}[U_{SV} - U_S] = 0, \quad r > 1.$$

Vraťme se ještě k metodě (17.8.4). Označíme $\xi = x - x_k$. Potom pro $x \in \langle x_k, x_{k+1} \rangle$ označíme $u(x, t_n) = u(\xi)$, $\xi \in \langle 0, h \rangle$. Víme, že $u(0) = U_M$, $u(h) = U_V$ a že $W_{12} = \int_0^h u(\xi) d\xi$. Chceme sestavit interpolující funkci $\tilde{u}(\xi)$, která splňuje podmínky

$$(17.8.6) \quad \begin{aligned} \tilde{u}(0) &= U_M, & \tilde{u}(h) &= U_V, \\ \int_0^h \tilde{u}(\xi) d\xi &= W_{12}. \end{aligned}$$

W_{12} se určuje z hodnot U_M a U_V pomocí některé kvadraturní formule. Požadavek na monotonii $u(\xi)$ vede však k jistým komplikacím v určování funkce $\tilde{u}(\xi)$. V odborné literatuře lze nalézt návody, jak takovou funkci konstruovat a určit $U_{SV} = U_A$. Dá se pak dokázat, že metoda (17.8.4) je druhého řádu a bezpodmínečně stabilní. Známe-li U_{SV} , určíme W_{23} , W_{43} , W_{14} (lze užít (17.8.3)) a přejdeme k dalšímu sektoru, nyní pro $x \in \langle x_{k+1}, x_{k+2} \rangle$, $t \in \langle t_n, t_{n+1} \rangle$. Připomeňme zde, že na začátku výpočtu W_{12} určíme z počáteční podmínky a W_{14} z okrajové podmínky. Z toho, co bylo řečeno, je patrné, že výpočty přibližného řešení podle vzorců (17.8.4), (17.8.5) jsou komplikovanější ve srovnání se základními explicitními či implicitními metodami.

Touto zmínkou jsme chtěli čtenáři naznačit, že v numerické analýze úloh pro hyperbolické rovnice, a to především pro rovnice nelineární, je celá řada problémů, které v tomto našem stručném přehledu nemohly být ani zmíněny. Nezbyvá nám nic jiného, než zvědavějšímu čtenáři doporučit některou z publikací ze seznamu literatury.

17.9. Cvičení

17.9.1. Diferenční metodou $U_k^{n+1} = (1+r)U_k^n - rU_{k+1}^n$, $r = \tau/h$ řešte počátečně-okrajovou úlohu $u_t + u_x = 0$, $u(x, 0) = \phi(x)$, $u(0, t) = 0$, $x \in \langle 0, 1 \rangle$, $t \in \langle 0, 1 \rangle$. Volte $h = 0, 1$, $\phi(\frac{1}{2}) = 1$, $\phi(x) = 0$, $x \neq \frac{1}{2}$. Prověřte konzistenci, stabilitu a konvergenci metody. [Návod: Ukažte, že $U_5^{n+1} = (1+r)U_5^n$, $U_k^{n+1} = 0$, $k \neq 5$. Metoda je konzistentní, ale nestabilní pro libovolné $r > 0$, neboť $U_5^n = (1+r)^n$ roste s růstem n .]

17.9.2. Některou diferenční metodou řešte počátečně-okrajovou úlohu $u_t + (2x)^{-1}u_x = t$, $u(x, 0) = x - 1$, $u(1, t) = \sqrt{t}$, $x \in \langle 1, 2 \rangle$, $t \in \langle 0, 1 \rangle$. Užijte metodu prvního řádu i druhého řádu a stanovte CFL-podmínku. Výsledky porovnejte s přesným řešením a s výsledky získanými Massauovou metodou (viz cvičení 16.7.3). [Podmínka stability je $\tau \leq 2h$.]

17.9.3. Některou diferenční metodou řešte počáteční úlohu $u_t + u_x = 0$, $u(x, 0) = \exp(-x^2/4)$, $x \in \mathbb{R}$, $t \in \langle 0, 60 \rangle$. Volte $h = 1$, $\tau = 0, 1$. Výsledky porovnejte s přesným řešením $u(x, t) = \exp(-(x-t)^2/4)$.

Literatura

- [1] Axelsson, O. – Barker, V. A.: Finite Element Solution of Boundary Value Problems. Orlando, Fla., Academic Press 1984.
- [2] Babuška, I. – Práger, M. – Vitásek, E.: Numerical Processes in Differential Equations. Praha, SNTL; London, Interscience 1966. (Překlad do ruštiny: Moskva, Mir 1969.)
- [3] Bachvalov, N. S.: Číslennyje metody I. Moskva, Nauka 1975.
- [4] Becker, E. B. – Carey, G. F. – Oden, J. T.: Finite Elements. Englewood Cliffs, N. J., Prentice-Hall 1981.
- [5] Berezin, I. S. – Židkov, N. P.: Metody vyčíslení II. 2. vyd. Moskva, Fizmatgiz 1962.
- [6] Ciarlet, P.: The Finite Element Method for Elliptic Problems. Amsterdam, North-Holland 1978. (Překlad do ruštiny: Moskva, Mir 1980.)
- [7] Dahlquist, G. – Björck, Å.: Numerical Methods. Englewood Cliffs, N. J., Prentice-Hall 1974.
- [8] Descloux, J.: Méthode des éléments finis. Lausanne, Ecole Polytechnique Fédérale 1973. (Překlad do ruštiny: Moskva, Mir 1976.)
- [9] D'jačenko, V. F.: Osnovnyje poňatija vyčísliťelnoj matematiki. Moskva, Nauka 1972.
- [10] Forsythe, G. E. – Wasow, W. R.: Finite-Difference Methods for Partial Differential Equations. New York, J. Wiley and Sons 1960. (Překlad od ruštiny: Moskva, IIL 1963.)
- [11] Fried, I.: Numerical Solution of Differential Equations. New York, Academic Press 1979.
- [12] Godunov, S. K.: Uravňenija matematičeskoj fiziki. Moskva, Mir 1979.
- [13] Godunov, S. K., a j.: Číslennoje rešeníje mnogomernych zadač gazovoj dinamiki. Moskva, Nauka 1976.
- [14] Kalitkin, N. N.: Číslennyje metody. Moskva, Nauka 1978.
- [15] Kamke, E.: Differentialgleichungen. Lösungsmethoden und Lösungen. Leipzig, Akademische Verlagsgesellschaft 1959. (Překlad do ruštiny: Moskva, Nauka 1965.)
- [16] Lambert, J. D.: Computational Methods in Ordinary Differential Equations. London, J. Wiley and Sons 1973.
- [17] Laurie, D. P., a j.: Numerical Solutions of Partial Differential Equations. Basel, Birkhäuser Verlag 1983.
- [18] Marčuk, G. I.: Metody numerické matematiky. Praha, Academia 1987.
- [19] Marčuk, G. I. – Agoškov, V. I.: Vveděnije v projekcionno-setočnyje metody. Moskva, Nauka 1981.
- [20] Marčuk, G. I. – Šajdurov, V. V.: Povyšěnije točnosti rešeníj raznostnyh schem. Moskva, Nauka 1979.
- [21] Meinardus, G. – Merz, G.: Praktische Mathematik I, II. Mannheim, B. I.-Wissenschaftsverlag 1979, 1982.
- [22] Meis, T. – Marcowitz, U.: Numerical Solution of Partial Differential Equations. New York, Springer-Verlag 1981.

- [23] Meyer, G. H.: Initial Value Methods for Boundary Value Problems. New York, Academic Press 1973.
- [24] Míka, S. – Brandner, M.: Numerické metody I. Plzeň, ZČU 2000.
- [25] Míka, S. – Kufner, A.: Okrajové úlohy pro obyčejné diferenciální rovnice. Praha, SNTL 1981.
- [26] Míka, S. – Kufner, A.: Parciální diferenciální rovnice I. Stacionární rovnice. Praha, SNTL 1983.
- [27] Mitchell, A. R.: Computational Methods in Partial Differential Equations. London, J. Wiley and Sons 1969.
- [28] Mitchell, A. R. – Griffiths, D. F.: The Finite Difference Method in Partial Differential Equations. Chichester, J. Wiley and Sons 1980.
- [29] Mitchell, A. R. – Wait, R.: The Finite Element Method in Partial Differential Equations. Chichester, J. Wiley and Sons 1977. (Překlad do ruštiny: Moskva, Mir 1981.)
- [30] Modern Numerical Methods for Ordinary Differential Equations. Red. G. Hall, J. M. Watt. Oxford, Clarendon Press 1976. (Překlad do ruštiny: Moskva, Mir 1979.)
- [31] Nagy, J.: Elementární metody řešení obyčejných diferenciálních rovnic. Praha, SNTL 1978.
- [32] Nagy, J.: Soustavy obyčejných diferenciálních rovnic. Praha, SNTL 1980.
- [33] Nagy, J.: Stabilita řešení obyčejných diferenciálních rovnic. Praha, SNTL 1980.
- [34] Nagy, J. – Nováková, E. – Vacek, M.: Lebesgueova míra a integrál. Praha, SNTL 1985.
- [35] Ortega, J. M. – Rheinboldt, W. C.: Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables. New York, Academic Press 1970. (Překlad do ruštiny: Moskva, Mir 1975.)
- [36] Pissanetzky, S.: Sparse Matrix Technology. London, Academic Press 1984. (Překlad do ruštiny: Moskva, Mir 1988.)
- [37] Příkryl, P. – Brandner, M.: Numerické metody II. Plzeň, ZČU 2000.
- [38] Rektorys, K.: Variační metody v inženýrských problémech a v problémech matematické fyziky. Praha, SNTL 1974.
- [39] Rektorys, K.: Metoda časové diskretizace a parciální diferenciální rovnice. Praha, SNTL 1985.
- [40] Richtmyer, R. D. – Morton, K. W.: Difference Methods for Initial Value Problems. 2. vyd. New York, Interscience 1967. (Překlad do ruštiny: Moskva, Mir 1972.)
- [41] Roache, P. J.: Computational Fluid Dynamics. Albuquerque, Hermosa Publishers 1976. (Překlad do ruštiny: Moskva, Mir 1980.)
- [42] Roberts, S. M. – Shipman, J. S.: Two-Point Boundary Value Problems: Shooting Methods. New York, American Elsevier 1972.
- [43] Rožděstvenskij, B. L. – Janěko, N. N.: Sistemy kvazilinějnyh uravnenij. Moskva, Nauka 1978.
- [44] Samarskij, A. A.: Teorija raznostnyh schem. Moskva, Nauka 1983.
- [45] Samarskij, A. A. – Andrejev, V. V.: Raznostnyje metody dlja elliptičeskich uravnenij. Moskva, Nauka 1976.

- [46] Samarskij, A. A. – Nikolajev, J. S.: Numerické řešení velkých řídkých soustav. Praha, Academia 1984.
- [47] Samarskij, A. A. – Popov, J. P.: Raznostnyje schemy gazovoj dinamiki. Moskva, Nauka 1975.
- [48] Sauljev, V. K.: Integrirovanije uravnenij parabolického tipa metodom setok. Moskva, Fizmatgiz 1960.
- [49] Stoer, J. – Bulirsch, R.: Introduction to Numerical Analysis. New York, Springer-Verlag 1980.
- [50] Strang, G. – Fix, G. J.: An Analysis of the Finite Element Method. Englewood Cliffs, N. J., Prentice-Hall 1973. (Překlad do ruštiny: Moskva, Mir 1977.)
- [51] Taufer, J.: Rešeníje graničnych zadač dlja sistem linějnych differencialnych uravnenij. Moskva, Nauka 1981.
- [52] Thomasset, F.: Implementation of Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations. New York, Springer-Verlag 1982.
- [53] Varga, R. S.: Matrix Iterative Analysis. Englewood Cliffs, N.J., Prentice-Hall 1962.
- [54] Vejvoda, O., a j.: Parciální diferenciální rovnice II. Evoluční rovnice. Praha, SNTL 1988.
- [55] Vitásek, E.: Numerické metody. Praha, SNTL 1987.
- [56] Vitásek, E.: Základy teorie numerických metod pro řešení diferenciálních rovnic. Praha, Academia 1994.
- [57] Zienkiewicz, O. C. – Morgan, K.: Finite Elements and Approximation. New York, J. Wiley and Sons 1983. (Překlad do ruštiny: Moskva, Mir 1986.)

Dodatek

- [58] Míka, S. – Přikryl, P.: Numerické metody řešení obyčejných diferenciálních rovnic. Plzeň, ZČU 1994.
- [59] Míka, S. – Přikryl, P.: Numerické metody řešení parciálních diferenciálních rovnic. Plzeň, ZČU 1995.
- [60] Míka, S. – Přikryl, P.: Numerické metody řešení parciálních diferenciálních rovnic. Evoluční rovnice. Plzeň, ZČU 1996.

Speciální numerické metody

**Numerické metody řešení okrajových úloh
pro diferenciální rovnice**

S. Míka, P. Přikryl, M. Brandner

Tisk: TYPOS – Digital printing, spol. s. r. o.
Podnikatelská 1 160/14, Plzeň

Vydavatel: Vydavatelský servis,
Republikánská 28, Plzeň

1. vydání

Plzeň 2006