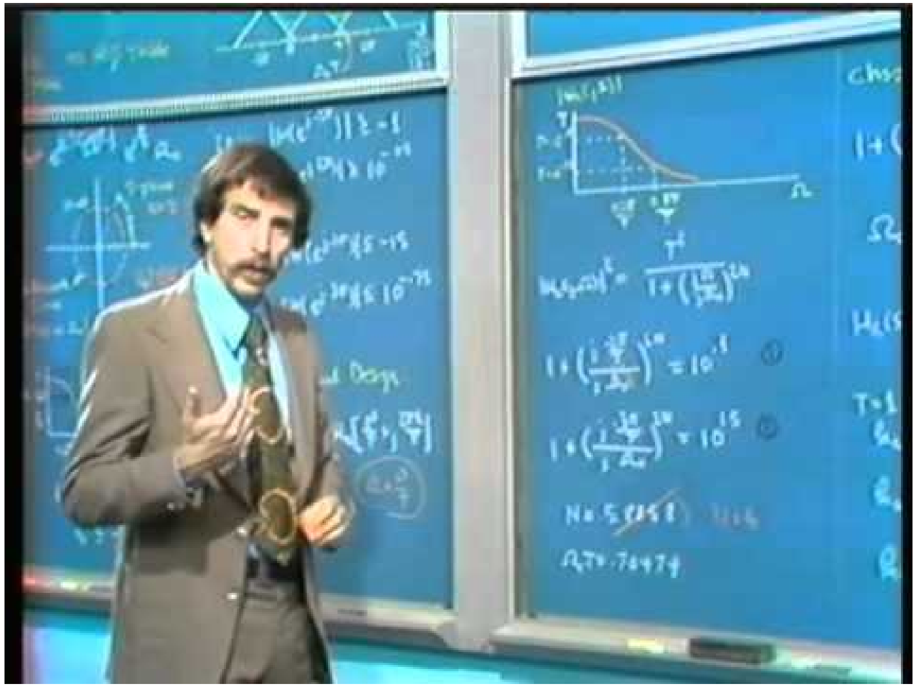
فصل دوم: مقدمات سیگنال

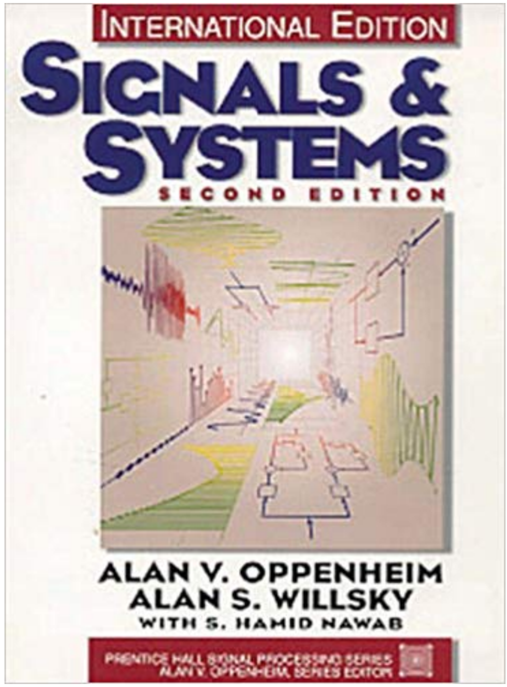
ابوالفضل دیانت

آخرین ویرایش: ۲۷ آبان ۱۴۰۲ در ساعت ۱۹ و ۱۵ دقیقه - نسخه 2.2.1

فهرست مطالب

[1] A. V Oppenheim, A. S. Willsky, and S. H. Nawab, *Signals and systems.* Prentice Hall, 1997.





معرفی سیگنال

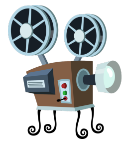
معرفی سیگنال

تعریف ۱ به هر تابع ریاضی، اصطلاحا سیگنال گفته می‌شود. هر تابع ریاضیاتی (سیگنال)، یک سری متغیرهای وابسته (Dependent Variable) و متغیرهای مستقل (Independent Variable) دارد.

$$y = f(x_1, x_2)$$

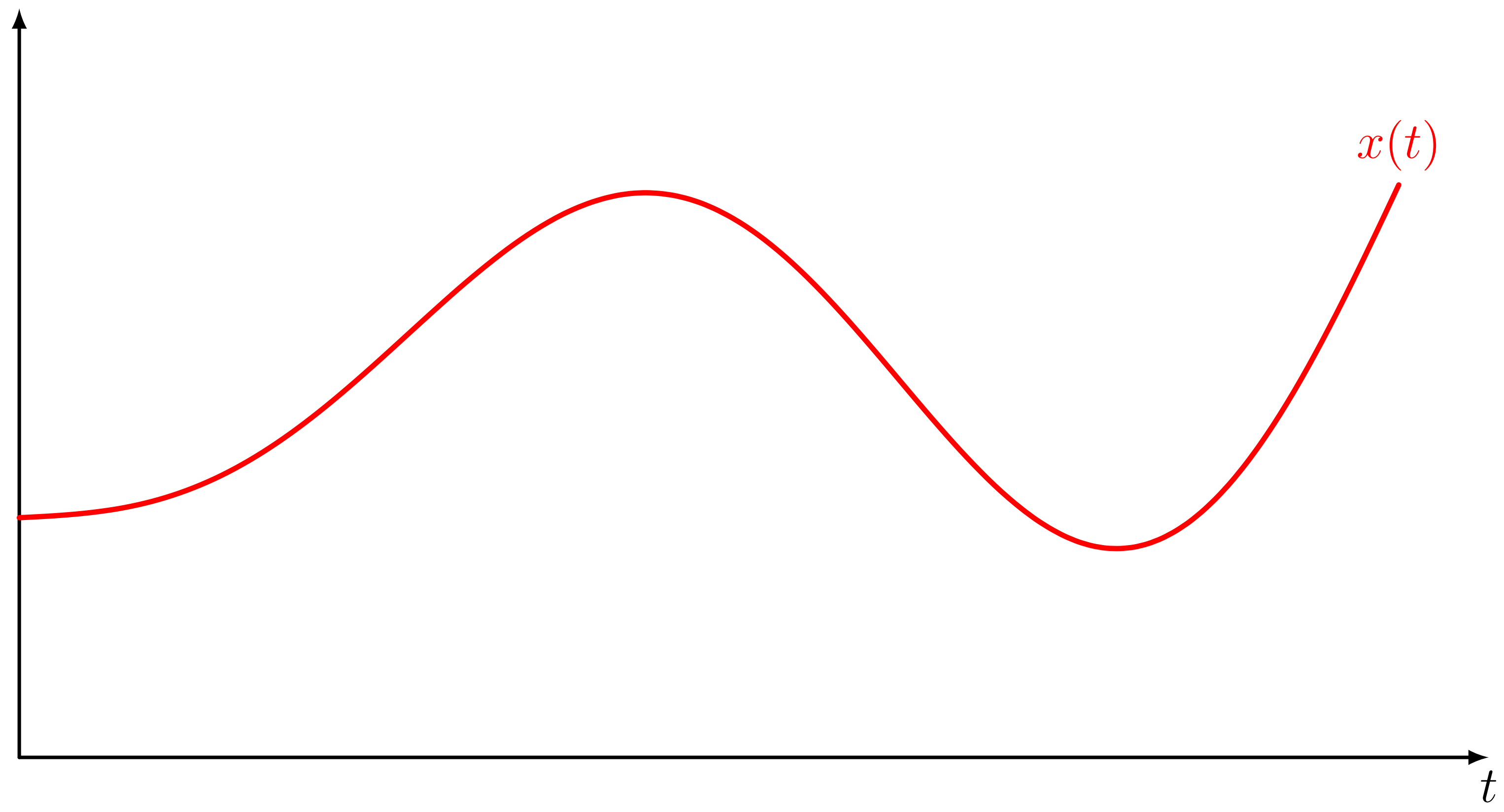

صوت یک سیگنال زمانی یک بعدی است، که متغیر مستقل آن زمان و متغیر وابسته آن سطح صدا


تصویر یک سیگنال دوبعدی است. هر پیکسل متغیر مستقل و رنگ متغیر وابسته $f(x, y)$


ویدئو یک سیگنال سه بعدی است، که دو بعد آن را مکان و بعد سوم آن نیز زمان است. یعنی $f(x, y, t)$

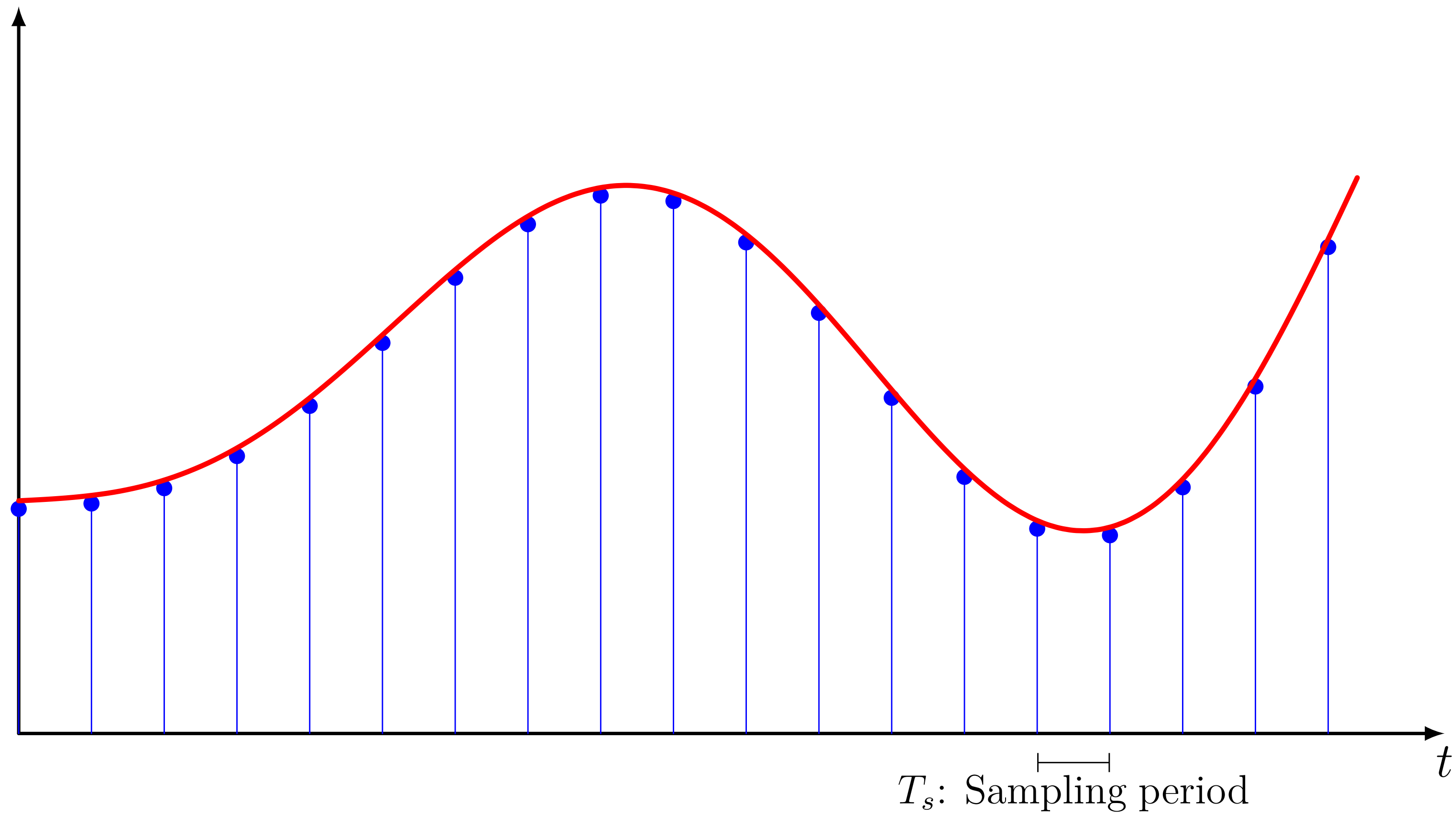
انواع سیگنال

✍ **سیگنال پیوسته** $x(t)$: این سیگنال‌ها، در مقدار و زمان پیوسته هستند. سیگنال‌هایی که در طبیعت وجود دارند، همگی از نوع پیوسته هستند: به طور مثال سرعت ماشین، صدای انسان و لرزش‌های زمین.



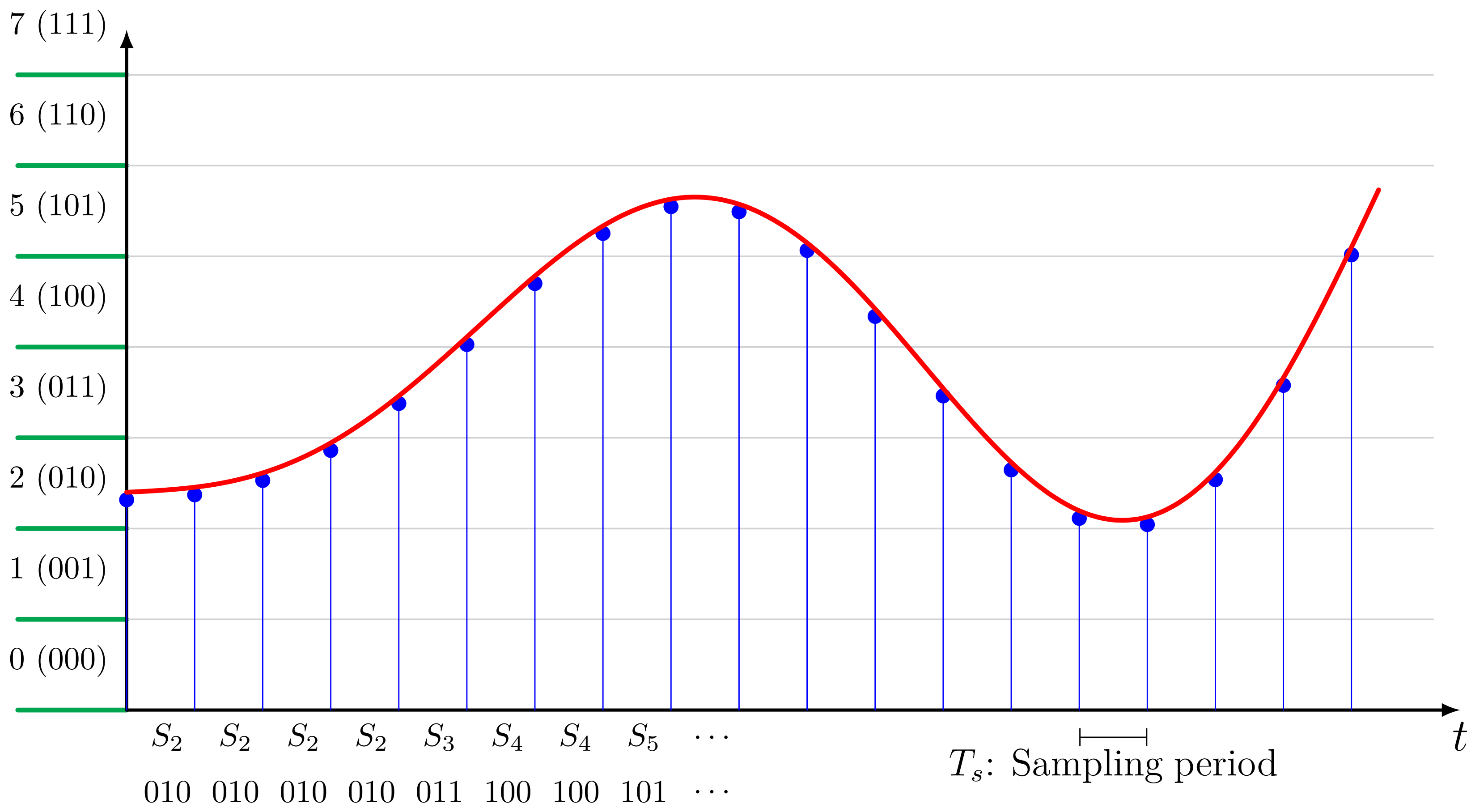
انواع سیگنال (ادامه)

✍ **سیگنال گسسته** $x[n]$: سیگنال‌های گسسته از نظر مقدار پیوسته هستند، ولی از جهت زمانی گسسته، یعنی فقط در زمان‌های خاصی، مقدار سیگنال تعریف شده است (فرکانس نمونه‌برداری $f_s = \frac{1}{T_s}$).

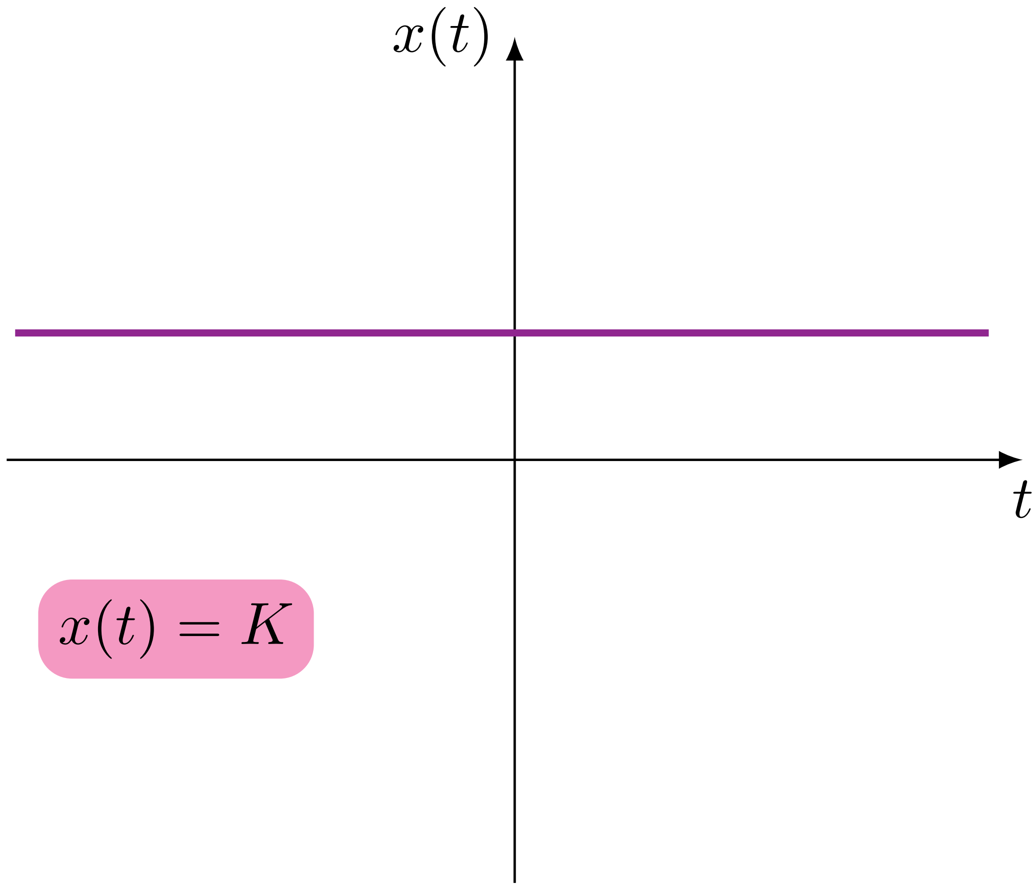


انواع سیگنال (ادامه)

✍ **سیگنال رقمی** $x[n]$: سیگنال‌های رقمی از نظر مقدار و زمان، گسسته هستند. بسیاری از سیگنال‌هایی که در پردازش‌های رایانه‌ای با آن مواجه هستیم، از این دست سیگنال‌ها هستند.

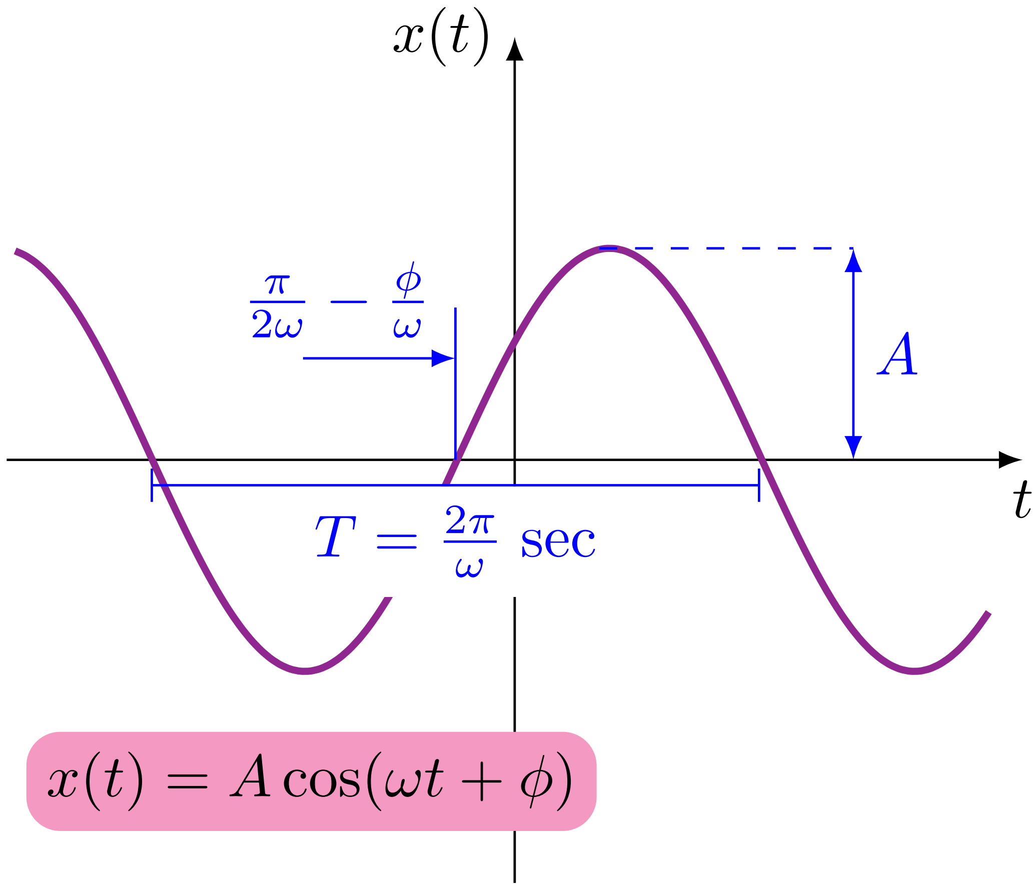


سیگنال - مقدار ثابت



$x(t) = K$

✍ مقدار ثابت، ساده‌ترین سیگنال است.



✍ ویژگی‌های سیگنال سینوسی:

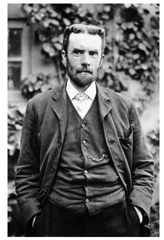
- A: دامنه (Amplitude)
- ω: فرکانس زاویه‌ای برحسب رادیان بر ثانیه ($2\pi f$) و f همان فرکانس با واحد هرتز است.
- ϕ: ثابت فاز سیگنال.

✍ برق AC یک موج سینوسی با فرکانس 50Hz.

تابع پله واحد (Unit Step Function):

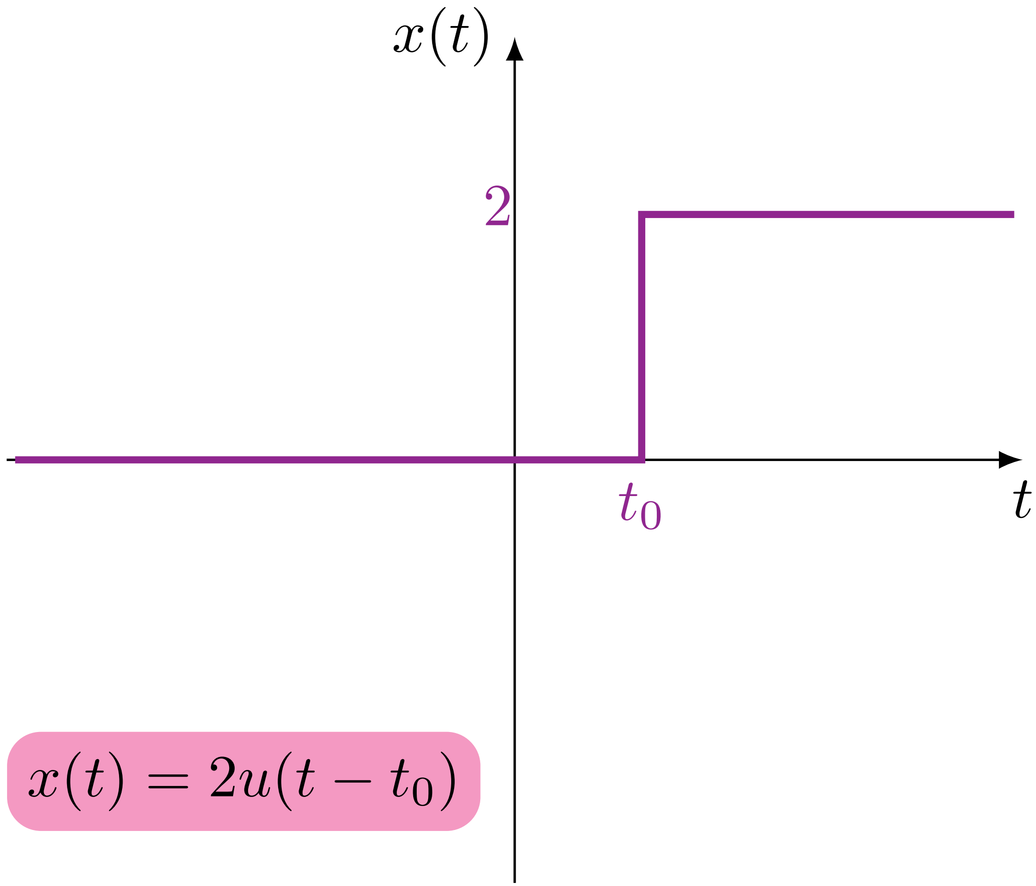
$$u(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ 1 & t>0\end{cases}$$

در $t=0$، مقدار تابع را می‌توان 0، $\frac{1}{2}$ و 1 در نظر گرفت. ولی بهتر است $u(0)=\frac{1}{2}$ را در نظر بگیریم.



به این تابع گاه Heaviside نیز گفته می‌شود به یاد بود مبدع $\mathbf{1}(t)$.

تفاوت بین Discontinuous و Discrete.



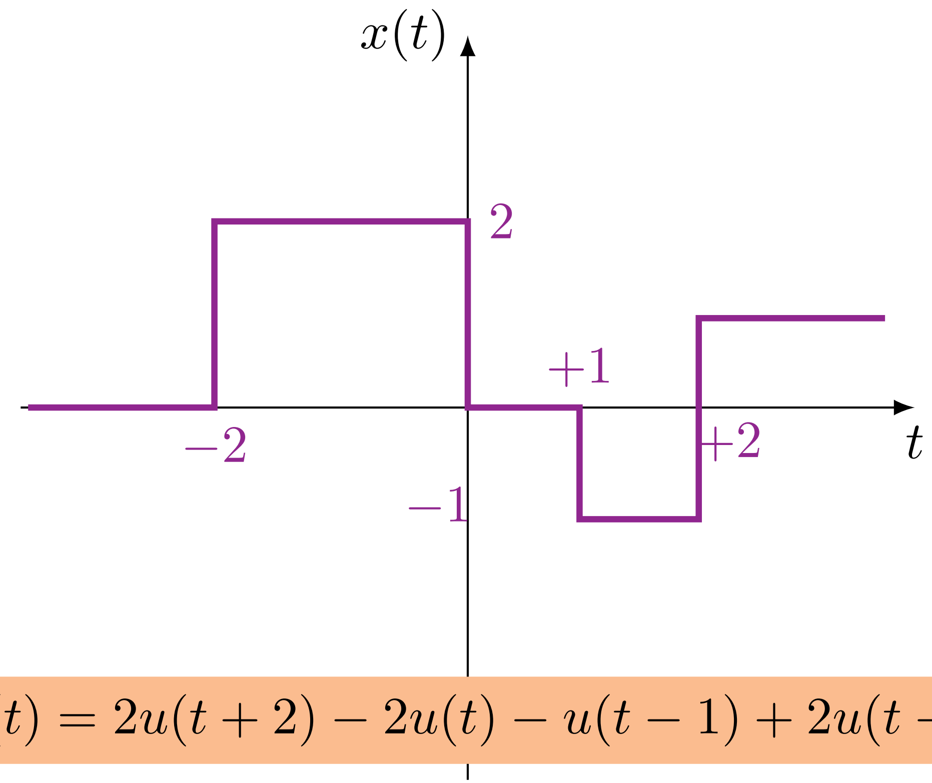
$$x(t)=2u(t-t_0)$$

تابع پیوسته f در نقطه t تابعی است که در نقطه t تعریف شده، و هم چنین حد تابع در آن نقطه موجود و برابر $f(t)$ باشد. در تعریف هندسی می گوییم، تابعی پیوسته است که بتوان نمودار آن را بدون برداشتن قلم از روی کاغذ رسم کرد.

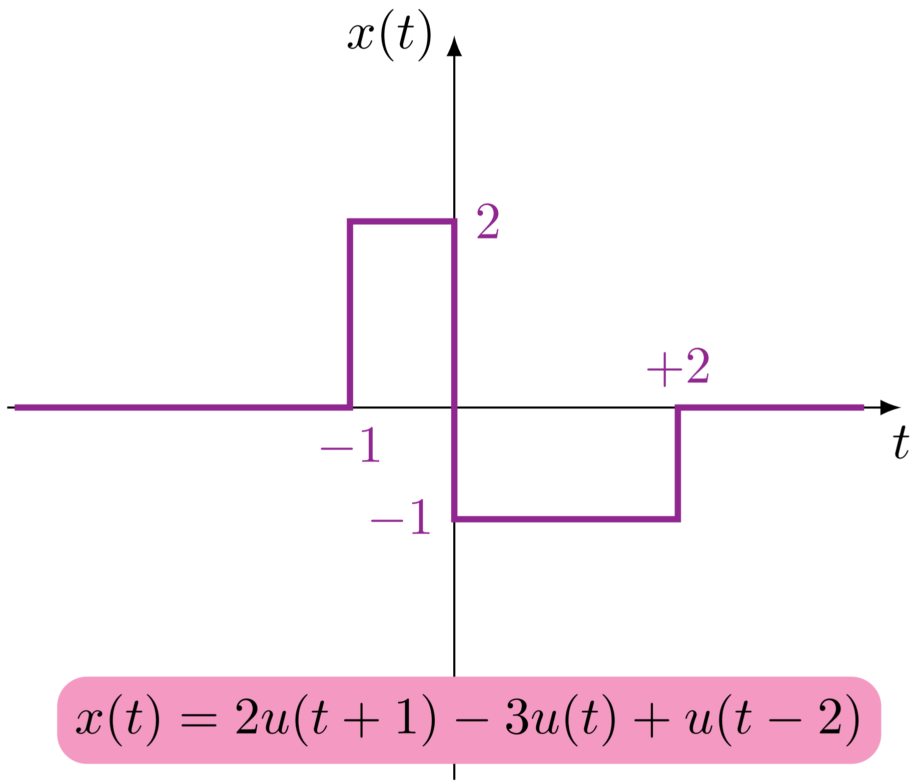
موضوع پیوستگی و ناپیوستگی یک مفهوم در بحث توابع ریاضیاتی است و نباید با مفهوم سیگنال پیوسته و سیگنال گسسته اشتباه گرفته شود. در تعریف تابع پیوسته داریم که حد چپ و راست آن با مقدار خود تابع در یک نقطه برابر و متناهی باشد. در همین‌جا دقت کنید که به عنوان مثال یک سیگنال پالسی شکل، یک سیگنال پیوسته (سیگنال آنالوگ) است ولی تابع پالسی شکل، عملا یک تابع ناپیوسته (Discontinuous Function) است.

تمرین در خانه

✍ توابع زیر را به صورت مجموعه‌ای از تابع $u(t)$ بنویسید؟



$$x(t) = 2u(t+2) - 2u(t) - u(t-1) + 2u(t-2)$$

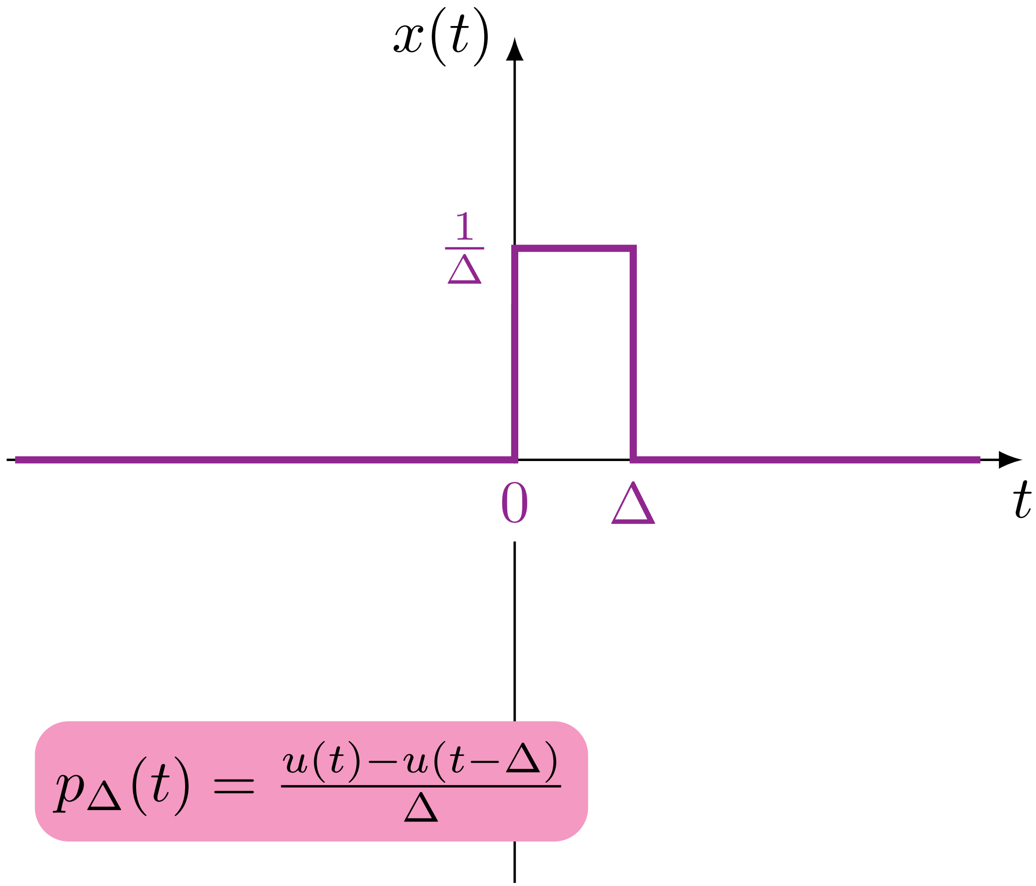


$$x(t) = 2u(t+1) - 3u(t) + u(t-2)$$

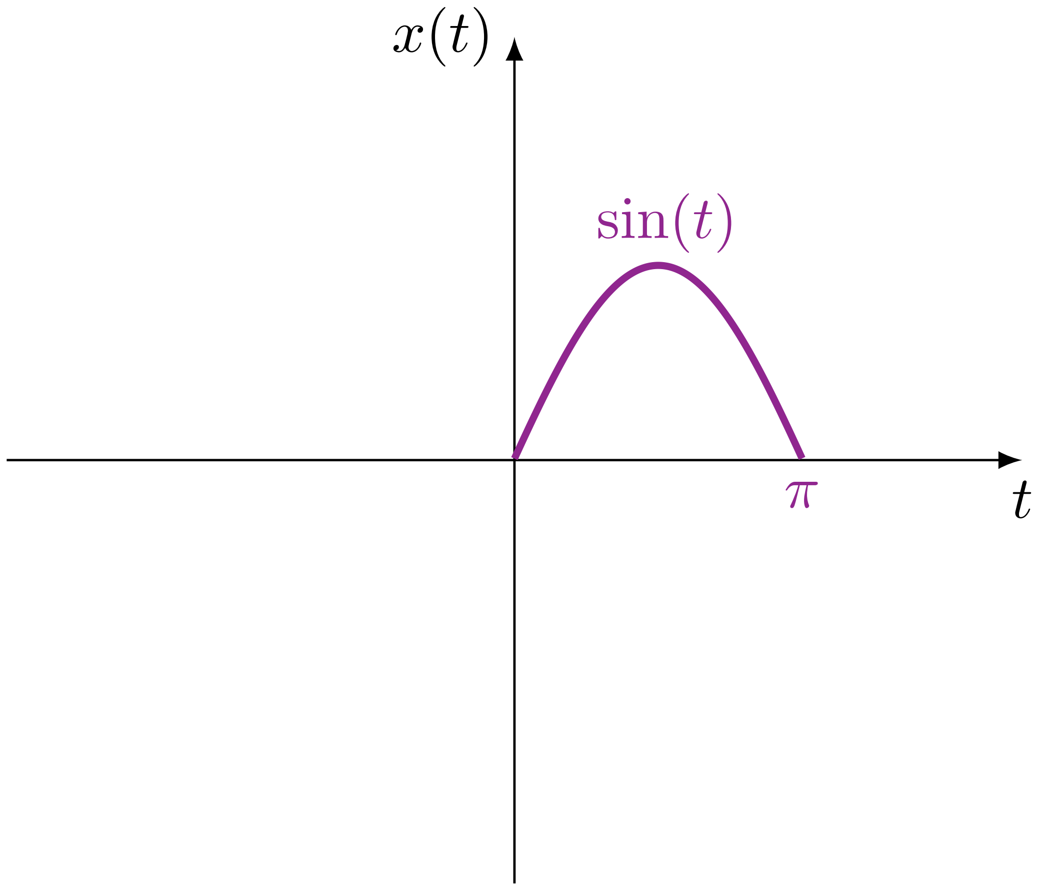
✍ تابع پالس تابع پالس واحد (Unit Pulse Function):

$$p_\Delta(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{1}{\Delta} & 0 < t < \Delta \\ 0 & t > \Delta \end{cases}$$

✍ به ازای تمام مقادیر t سطح زیر نمودار برابر با یک است.



$$p_\Delta(t) = \frac{u(t) - u(t-\Delta)}{\Delta}$$



✍ به مانند یک سیگنال سینوسی که در یک سیگنال دیگر ضرب شده:

$$f(t) = \sin(t) \times (u(t) - u(t - \pi))$$

✍ تابع ضربه واحد (Unit Impulse Function) یا همان تابع دلتا دیراک (Dirac Delta Function):

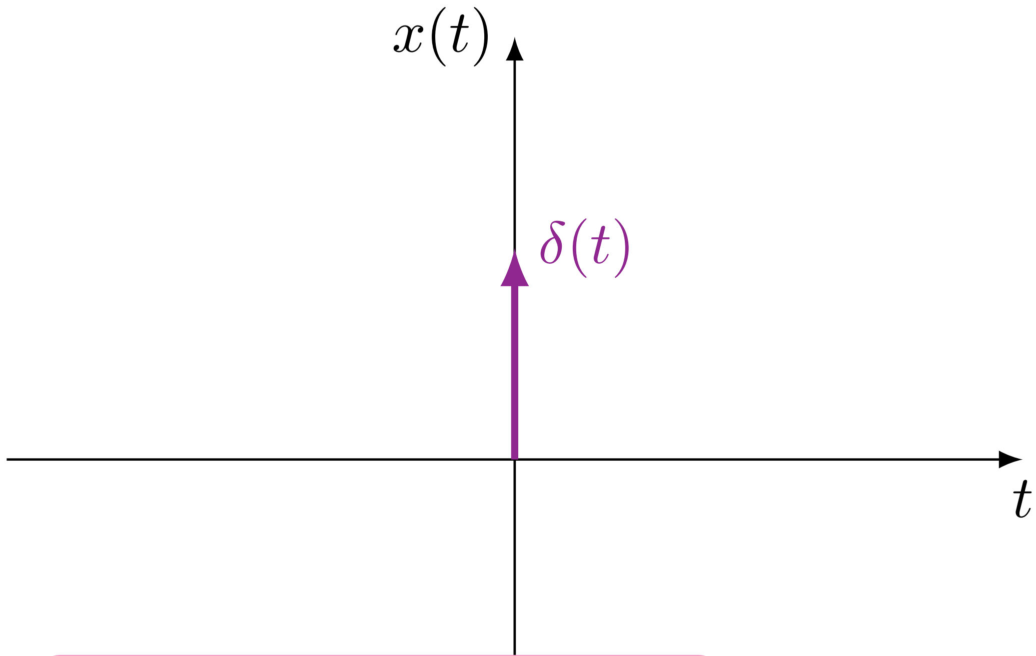
تابع پالس واحد که در آن $\Delta \longrightarrow 0$ میل کرده.

$$\int_{-\xi}^{+\xi} \delta(t)\mathrm{d}t = 1$$

✍ ویژگی‌ها:

$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(t')\mathrm{d}t' \qquad \delta(t) = \frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}$$

$$x(0) = \int_{-\xi}^{+\xi} x(t)\delta(t)\mathrm{d}t$$

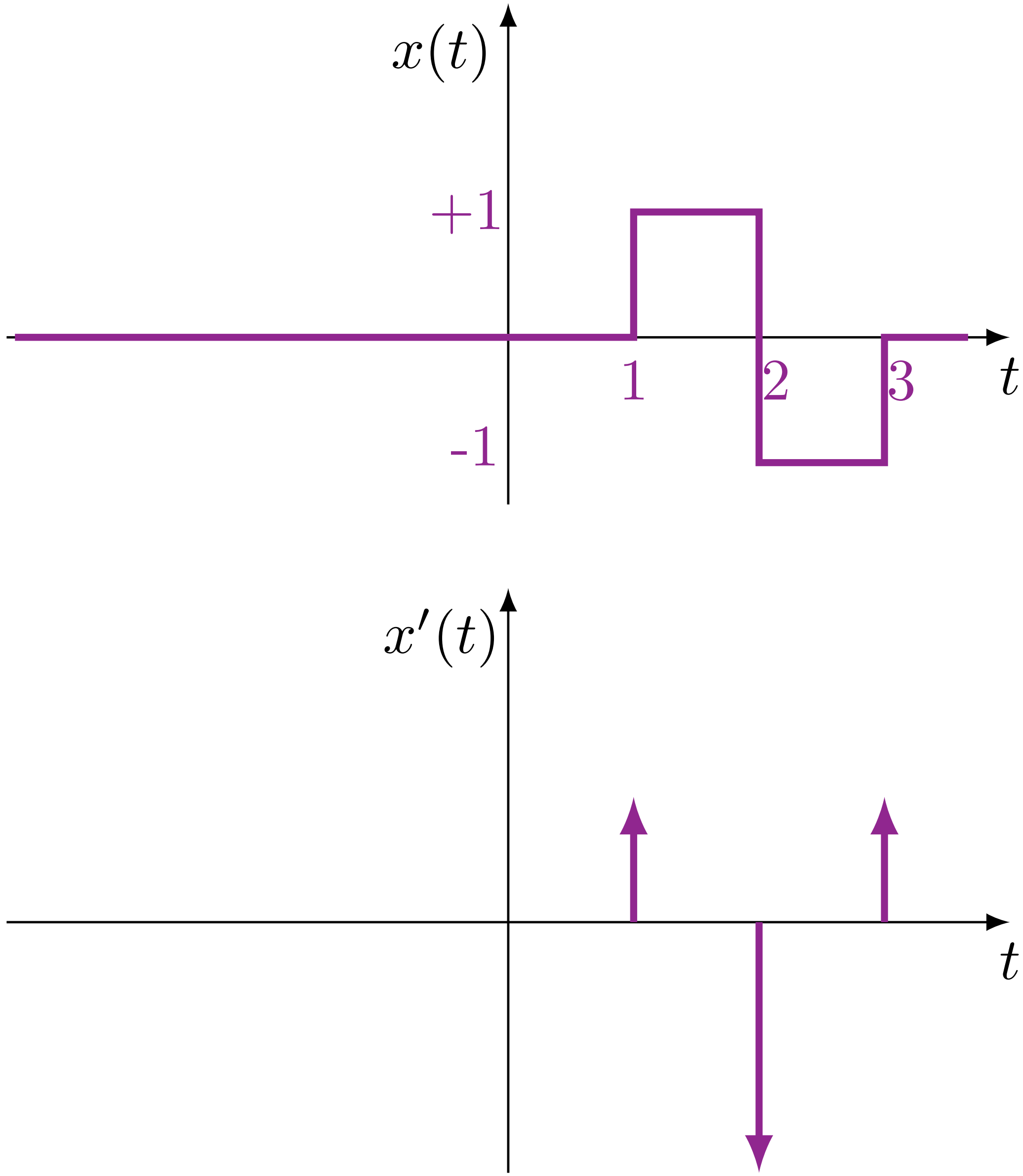


$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & t \neq 0 \\ \text{Special} & t = 0 \end{cases}$$

به ویژگی

$$x(0) = \int_{-\xi}^{+\xi} x(t)\delta(t)\mathrm{d}t$$

اصطلاحا خاصیت غربالی (Sifting Property) گفته می‌شود.



✍ تابع سمت چپ:

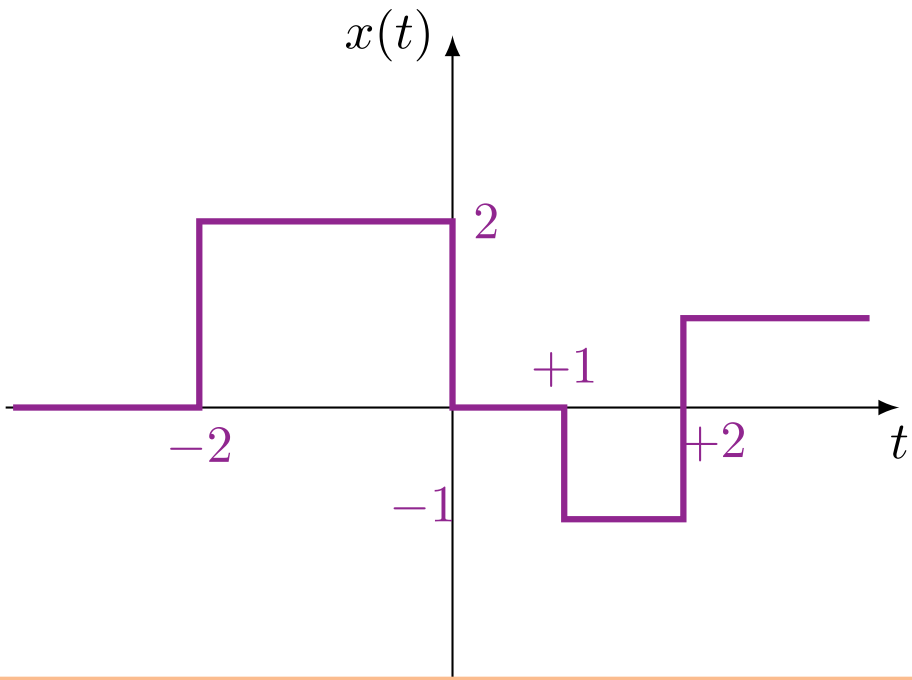
$$x(t) = u(t-1) - 2u(t-2) + u(t-3)$$

✍ مشتق $x(t)$:

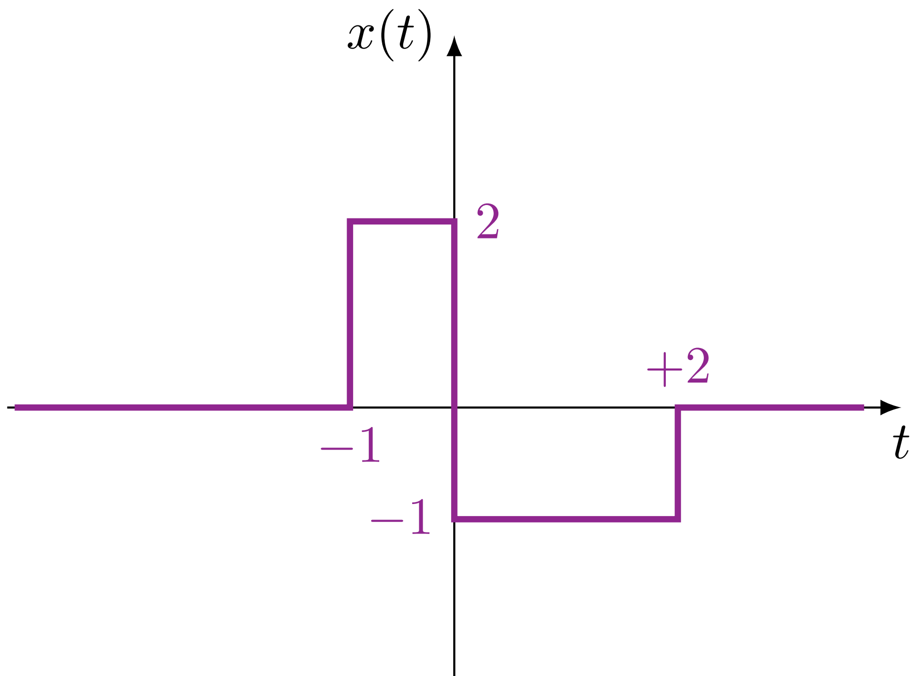
$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = \delta(t-1) - 2\delta(t-2) + \delta(t-3)$$

تمرین در خانه

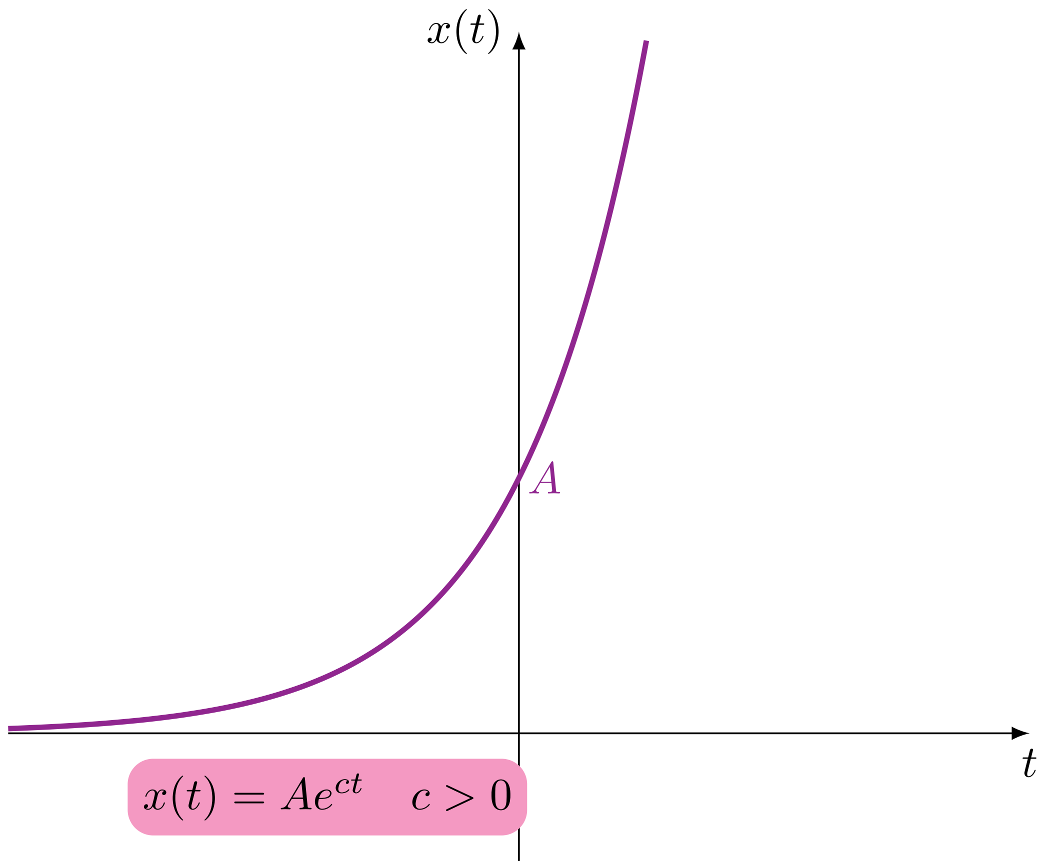
✍ مشتق توابع زیر را حساب کنید؟



$$x(t) = 2u(t+2) - 2u(t) - u(t-1) + 2u(t-2)$$



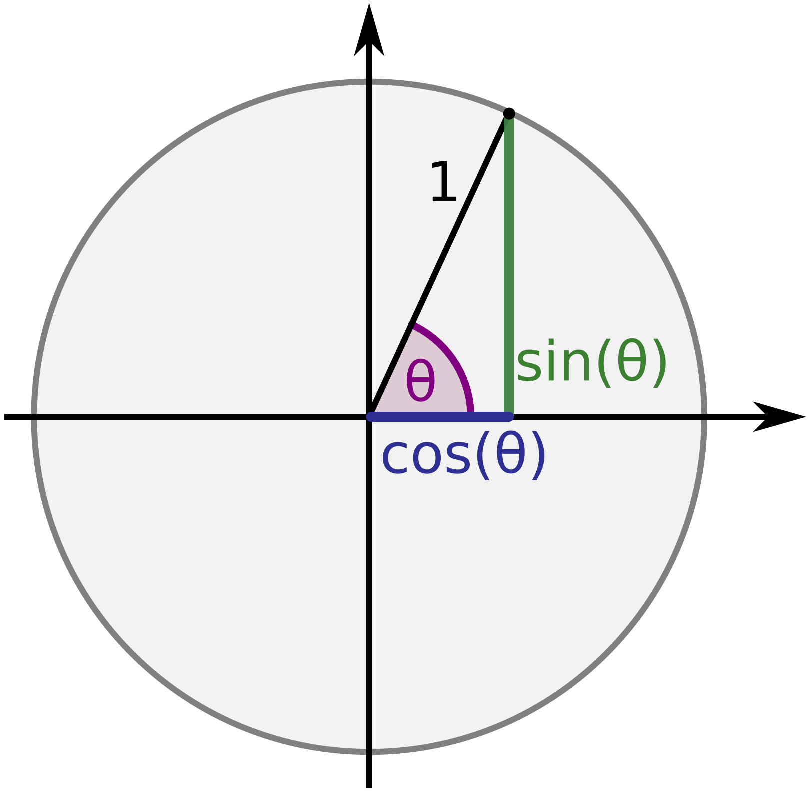
$$x(t) = 2u(t+1) - 3u(t) + u(t-2)$$



✍ سیگنال نمایی به دو صورت حقیقی ومختلط می‌تواند باشد.

✍ در سیگنال نمایی حقیقی c یک عدد حقیقی خواهد بود ($c \in \mathbb{R}$) و در نمایی مختلط یک عدد مختلط ($c \in \mathbb{C}$) .

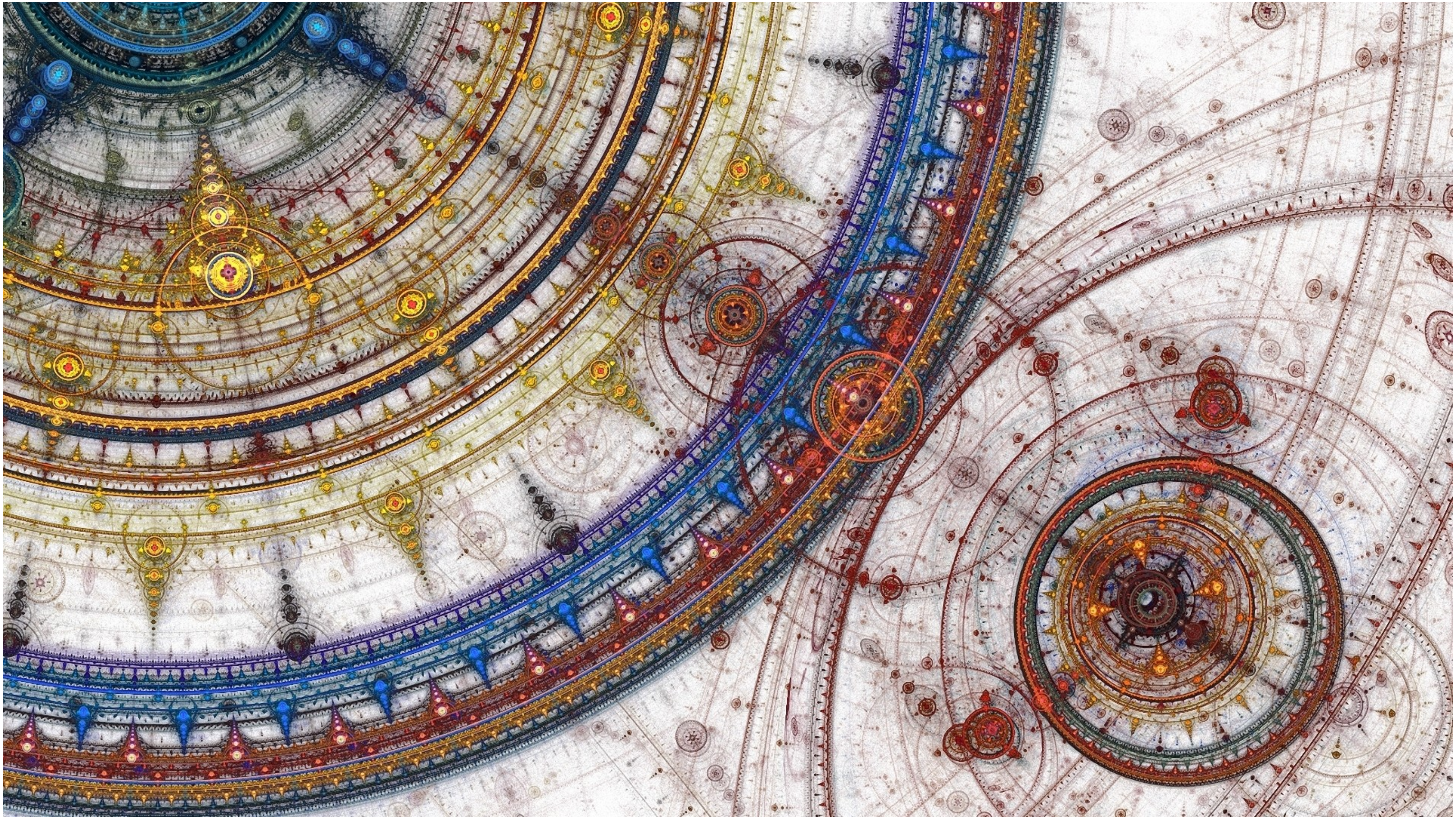
✍ در نمایی حقیقی اگر $c \in \mathbb{R}^{++}$ باشد، با یک سیگنال اکیدا صعودی (Strictly Increasing) و اگر $c \in \mathbb{R}^{--}$ باشد، با سیگنال اکیدا نزولی (Strictly Decreasing) سروکار خواهیم داشت.



✍ سینوس و کسینوس از مجموع دو تابع نمایی مختلط تشکیل شده‌اند.

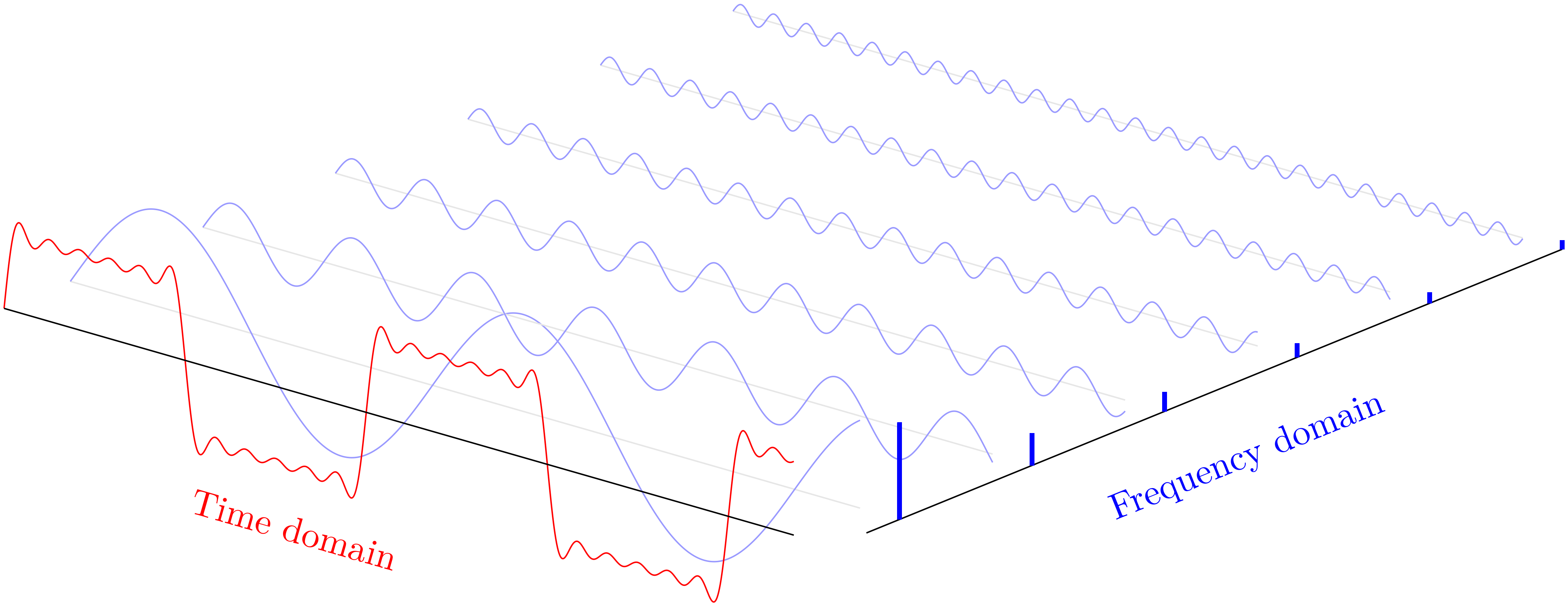
$$\sin(t) = \frac{e^{jt} - e^{-jt}}{2j}$$
$$\cos(t) = \frac{e^{jt} + e^{-jt}}{2}$$

تبدیل فوریه



تبدیل فوریه

Joseph Fourier ریاضیدان و فیزیکدان فرانسوی متولد ۱۷۶۸م. پدر خیاطش در ۸ سالگی، از دنیا رفت. در مدرسه نظامیِ زادگاه‌اش تحصیل کرد. او در زمینه فیزیک بر روی انتقال گرما تحقیق و کاربردهای سری فوریه در این زمینه و نیز ارتعاشات را معرفی کرد.



Joseph Fourier یکی از بزرگترین و برترین ریاضی‌دانان و فیزیک‌دانان تاریخ است که در ۱۷۶۸ به دنیا آمد. پدرش را که به شغل خیاطی مشغول بود، خیلی زود در سن ۸ سالگی از دست می‌دهد. تحصیلاتش را در مدرسه نظامی زادگاهش به اتمام می‌رساند و در ۱۸ سالگی در همان‌جا به تدریس ریاضی مشغول می‌شود.

او که یک فعال سیاسی نیز بود در انقلاب فرانسه در نقش موثری داشت. با ناپلئون به مصر رفت و برای مدت زمانی در آن‌جا فرماندار ایزر بود. او به شدت به مباحث انتقال گرما و ارتعاشات علاقه‌مند بود و کارهای خوبی از او در این زمینه به جا مانده است. یکی از مهم‌ترین این کارها، مقاله او در ۱۸۲۷ بود که در آن ادعا کرد که جو زمین، بسان یک عایق عمل می‌کند و باعث افزایش حرارت کره زمین و جلوگیری از خروج انرژی می‌گردد، که این موضوع را امروزه ما با عنوان "اثر گلخانه‌ای" می‌شناسیم. در واقع سوال اصلی برای او این‌جا این بود که اگر زمین تنها با نور خورشید گرم می‌شود، باید دمای آن کمتر از وضع فعلی باشد (حدود ۱۸- سانتی‌گراد). وقتی نور خورشید به سطح کره زمین تابیده می‌شود، مقداری از آن جذب و مابقی بازتابانده می‌شود. در هنگام بازتابش طول موج بالا می‌رود و گازهای گلخانه‌ای موجود در جو کره زمین، مقداری از این موج را جذب می‌کنند و بسان

یک پتو بر دور کره زمین موجب ایجاد گرما می‌شوند.

یکی از مهم‌ترین کارهای فوریه، مبحث سری‌های فوریه بود. فوریه معتقد بود که یک تابع پیچیده در حوزه زمان را می‌توان با برهم‌نهی بی‌نهایت تابع سینوسی و کسینوسی ساده با ضرایب مختلف به صورت کامل ایجاد کرد. ضرایب تولیدکننده تشکیل حوزه فرکانس یک تابع را می‌دهند. بدیهی است که انتظار داریم با داشتن اطلاعات در حوزه فرکانس به صورت یکتا به تابع در حوزه زمان دست پیدا نماییم.

✍ تبدیل فوریه به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \boxed{X(f)}\, e^{+2\pi f t j} \mathrm{d}f$$

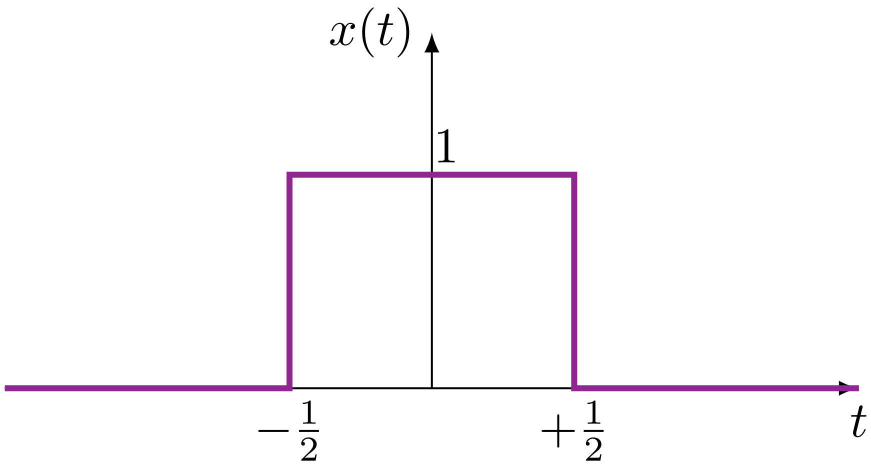
$$\boxed{X(f)} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-2\pi f t j} \mathrm{d}t$$

- $x(t)$ سیگنال در حوزه زمان
- $X(f)$ سیگنال در حوزه فرکانس

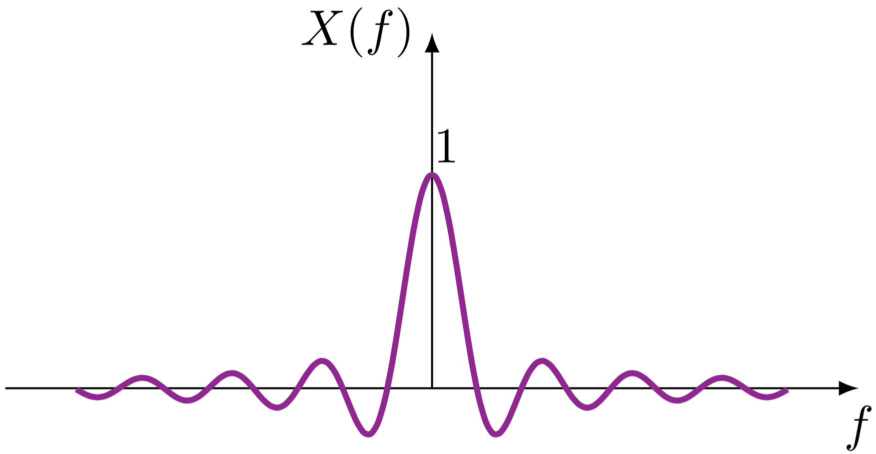
مثال ۱ تبدیل فوریه سیگنال $x(t) = \mathrm{rect}(t)$

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-2\pi ftj}\mathrm{d}t = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} e^{-2\pi ftj}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2\pi fj}\left(e^{2\pi fj\frac{1}{2}} - e^{-2\pi fj\frac{1}{2}}\right) = \frac{sin(\pi f)}{\pi f} = \mathrm{sinc}(f)$$



$x(t) = \mathrm{rect}(t) = u(t+\frac{1}{2}) - u(t-\frac{1}{2})$



$X(f) = \frac{sin(\pi f)}{\pi f} = \mathrm{sinc}(f)$

- خاصیت خطی‌بودن در تبدیل فوریه:

$$\text{If} \quad x_1(t), x_2(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X_1(f), X_2(f) \qquad \text{Then} \quad \alpha x_1(t) + \beta x_2(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \alpha X_1(f) + \beta X_2(f)$$

- خاصیت معکوس‌سازی زمانی

$$\text{If} \quad x(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(f) \qquad \text{Then} \quad x(-t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X^*(f)$$

- خاصیت مزدوج

$$\text{If} \quad x(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(f) \qquad \text{Then} \quad x^*(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X^*(-f)$$

- خاصیت دوگانی در تبدیل فوریه:

$$\text{If} \quad x(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(f) \qquad \text{Then} \quad X(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} x(-f)$$

تبدیل فوریه - ویژگی‌ها (ادامه)

- اندازه تبدیل فوریه سیگنال‌های حقیقی ($x(t) = x^*(t)$)، همواره نسبت به محور عمودی متقارن است یعنی با یک تابع زوج سروکار داریم ($|X(f)| = |X^*(-f)| = |X(-f)|$).
- فاز تبدیل فوریه سیگنال‌های حقیقی، همواره یک تابع فرد است ($\measuredangle X(f) = \measuredangle X^*(-f) = -\measuredangle X(-f)$).
- تبدیل فوریه یک سیگنال زوج همواره سیگنالی زوج و تبدیل فوریه یک سیگنال فرد همواره فرد خواهد بود.

$x(t)$	$X(f)$
Even & Real	Even & Real
Odd & Real	Odd & Imaginary
Even & Imaginary	Even & Imaginary
Odd & Imaginary	Odd & Real

- خاصیت Shift در تبدیل فوریه:

$$\text{If} \quad x(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(f) \qquad\qquad \text{Then} \quad x(t-t_0) \xrightarrow{\mathcal{F}} e^{-2\pi j f t_0} X(f)$$

- خاصیت Scale در تبدیل فوریه:

$$\text{If} \quad x(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(f) \qquad\qquad \text{Then} \quad x(at) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{|a|} X(\frac{f}{a})$$

- خاصیت دوگانی در تبدیل فوریه:

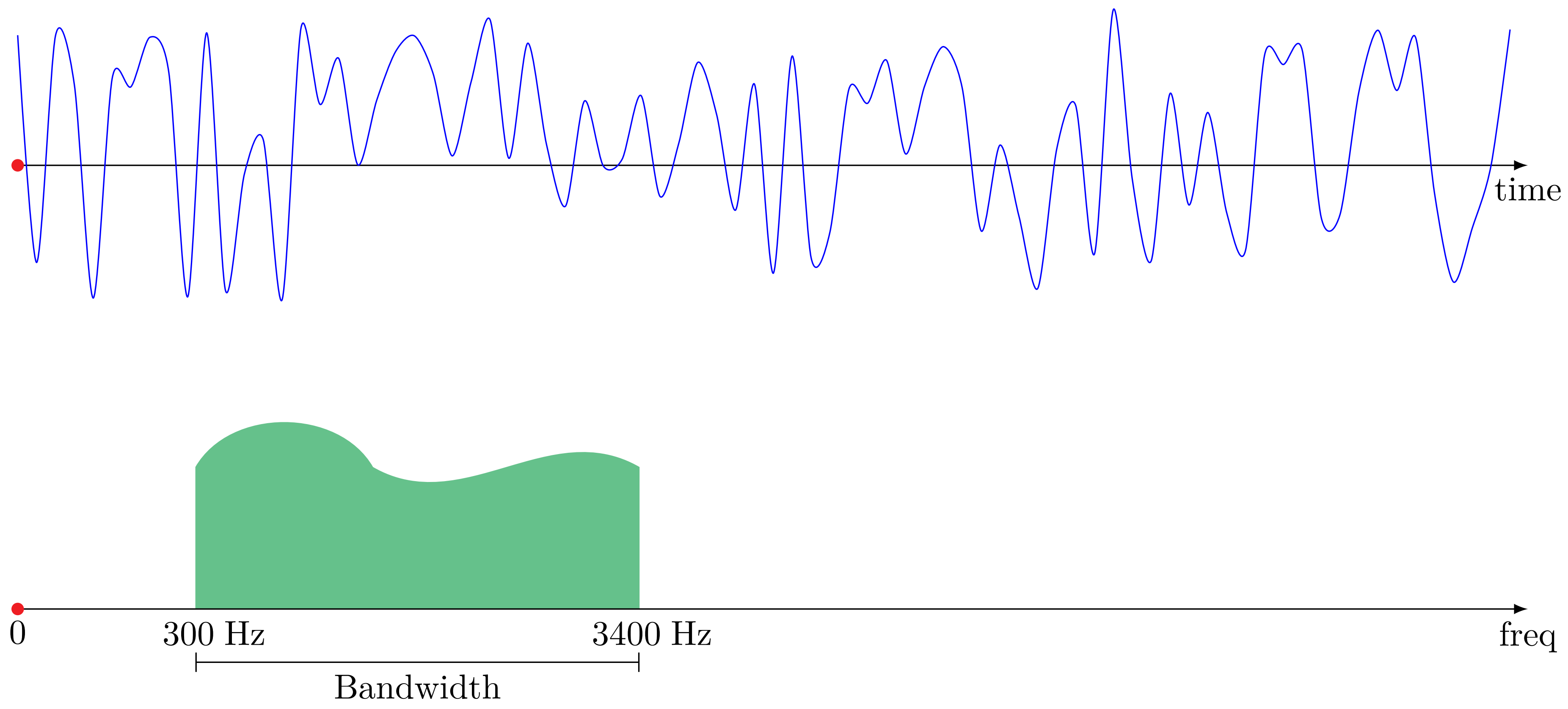
$$\text{If} \quad x(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(f) \qquad\qquad \text{Then} \quad e^{j2\pi t f_0} x(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(f-f_0)$$

- خاصیت مشتق در تبدیل فوریه:

$$\text{If} \quad x(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(f) \qquad\qquad \text{Then} \quad \frac{\mathrm{d}^n x(t)}{\mathrm{d}t^n} \xrightarrow{\mathcal{F}} (j2\pi f)^n X(f)$$

تبدیل فوریه - ویژگی‌ها (ادامه)

✍ شرط لازم برای این‌که تبدیل فوریه یک سیگنال محدود شود این است که سیگنال در حوزه زمان نامحدود باشد. یعنی تبدیل فوریه یک سیگنال محدود در زمان، حتما نامحدود در فرکانس خواهد شد.

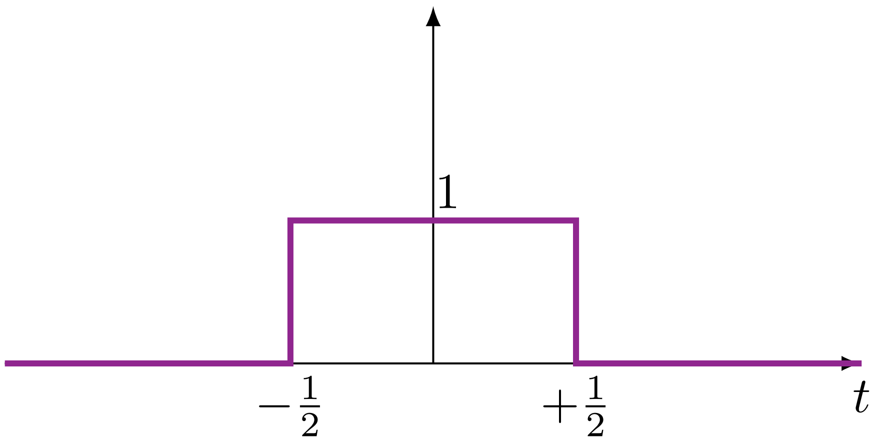


تبدیل فوریه -مثال (ادامه)

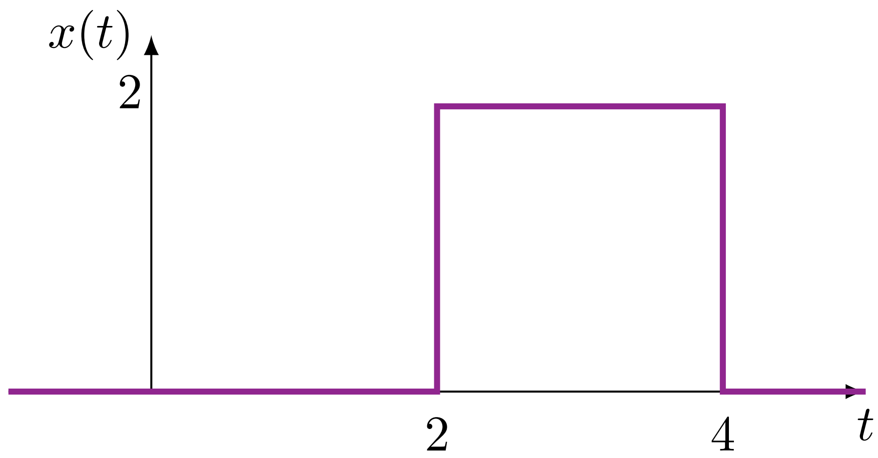
مثال ۲

تبدیل فوریه سیگنال $x(t) = \boxed{2}\,\mathrm{rect}(\boxed{\tfrac{1}{2}}\,t - \boxed{\tfrac{3}{2}})$ را بدست آورید؟

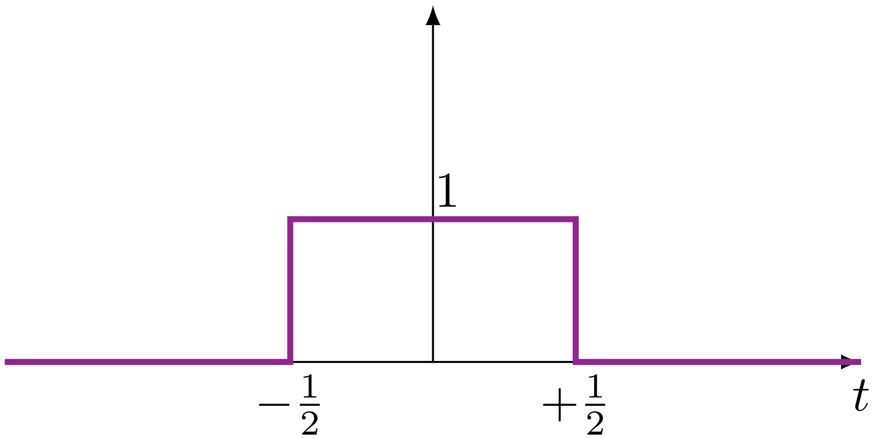
اول Shift دهیم و یا اول Scale کنیم؟ $\frac{1}{2}t - \frac{3}{2} = t' \implies t = 2t' + 3$



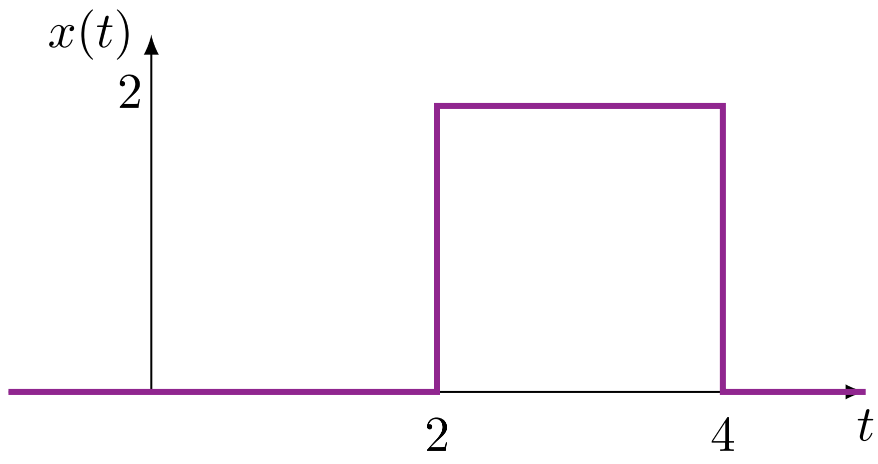
$\mathrm{rect}(t)$



$x(t) = 2\mathrm{rect}(\frac{1}{2}t - \frac{3}{2})$



$\mathrm{rect}(t)$



$x(t) = 2\mathrm{rect}(\frac{1}{2}t - \frac{3}{2})$

✍ برای محاسبه تبدیل فوریه این تابع می‌توانید از ویژگی‌های تبدیل فوریه استفاده کرد:

$$\mathcal{F}\{kx(at+b)\} = k\frac{e^{2\pi j f \frac{b}{a}}}{|a|}X\left(\frac{f}{a}\right) \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{F}\{2\mathrm{rect}(\frac{1}{2}t - \frac{3}{2})\} = 4e^{-6\pi j f}X(2f)$$

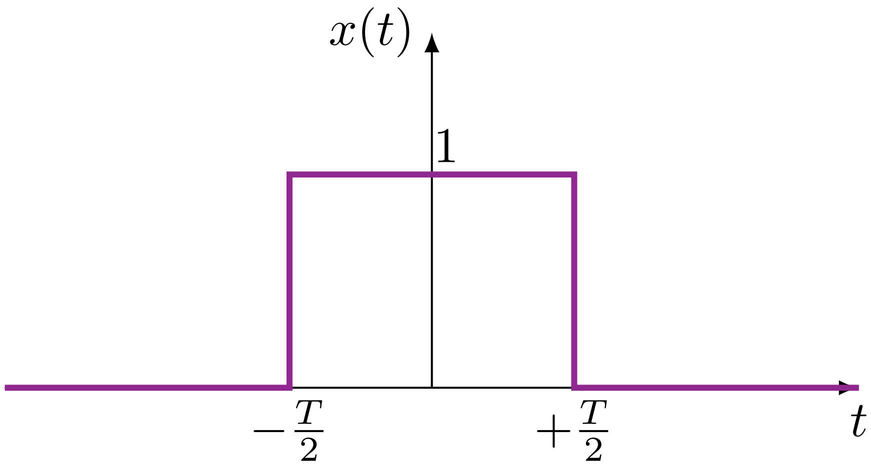
اگر یک سیگنال به مانند $x(t)$ در اختیار داشته‌باشیم و بخواهیم سیگنال $x(at+b)$ را رسم کنیم، می‌بایست نخست سیگنال $x(t)$ را به اندازه b شیفت دهیم و سپس به اندازه a scale کنیم.

مثال ۳

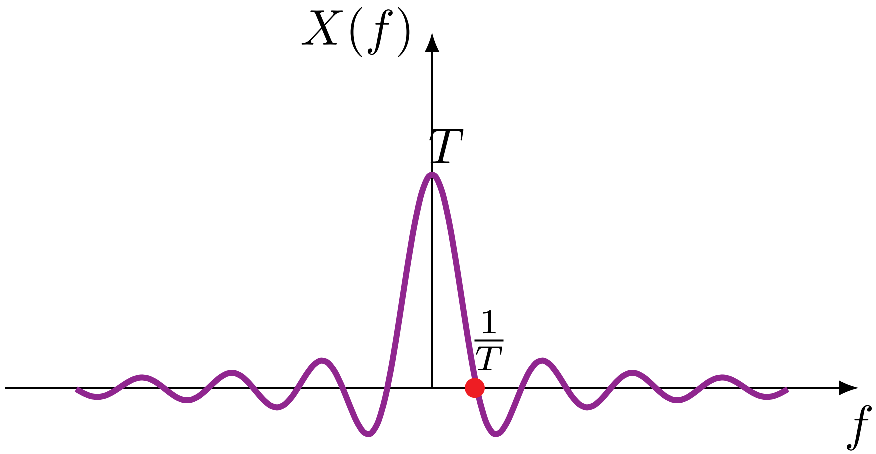
تبدیل فوریه سیگنال ثابت $x(t) = 1$؟

این تبدیل فوریه را می‌توان از حد تبدیل فوریه $x(t) = \text{rect}(\frac{t}{T})$ بدست آورد:

$$x(t) = 1 \qquad \xrightarrow{\mathcal{F}} \qquad X(f) = \delta(f)$$



$x(t) = \text{rect}(\frac{t}{T}), \quad T > 0$



$X(f) = T\text{sinc}(Tf)$

مثال ۴ اگر a یک عدد حقیقی مثبت باشد، آن‌گاه تبدیل فوریه سیگنال $x(t) = e^{-at}u(t)$ به صورت زیر خواهد شد.

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-2\pi ftj}\mathrm{d}t = \int_{0}^{+\infty} e^{-at}e^{-2\pi ftj}\mathrm{d}t = \frac{1}{a+2\pi fj} = \frac{a-2\pi fj}{a^2+(2\pi f)^2}$$

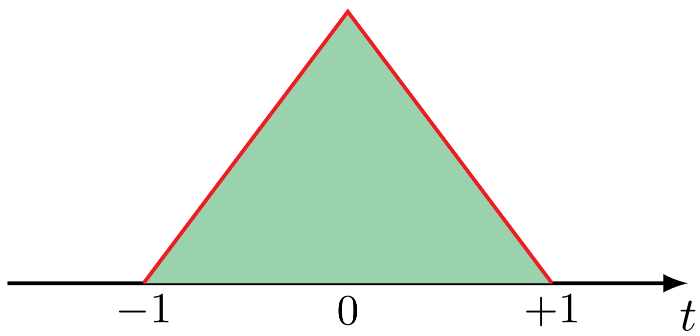
✍ در حالت کلی $X(f)$ یک تابع مختلط است. پس دارای اندازه $|X(f)|$ و فاز $\angle X(f)$ خواهد بود.

$$|X(f)| = \left|\frac{1}{a+2\pi fj}\right| = \frac{1}{\sqrt{a^2+(2\pi f)^2}}$$

$$\angle X(f) = \mathrm{atan}(\frac{-2\pi f}{a})$$

مثال ۵

تبدیل فوریه تابع مثلثی $\left(\mathrm{tri}(t) = \Lambda(t) \overset{\text{def}}{=} \max\big(1 - |t|, 0\big)\right)$ را بدست آورید؟



✍ می‌دانیم که $\mathrm{tri}(t)$ حاصل کانولوشن دو $\mathrm{rect}(t)$ است، پس در نهایت تبدیل فوریه برابر با $\mathrm{sinc}^2(f)$ خواهد شد. چراکه می‌دانیم که یکی از ویژگی‌های مهم تبدیل فوریه این است که ضرب در حوزه زمان می‌شود کانولوشن در حوزه فرکانس و دوگان آن نیز معتبر است.

$$\Lambda(t) = \mathrm{rect}(t) * \mathrm{rect}(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(f) = \mathrm{sinc}^2(f)$$

مثال ۶ تبدیل فوریه $x(t) = \cos(2\pi f_c t)$ را بدست آورید؟

پاسخ: همان‌طور که می‌دانید، می‌توانیم این سیگنال را به صورت زیر بنویسیم:

$$x(t) = \cos(2\pi f_c t) = \frac{e^{2\pi f_c t} + e^{-2\pi f_c t}}{2}.$$

از دو شیوه می‌توان این مثال را حل کرد. در شیوه نخست، مشخص است که تابع $x(t) = e^{2\pi f_c t}$ تنها یک فرکانس و آن هم در $f = f_c$ دارد. به همین دلیل تبدیل فوریه آن، بیانگر همان تک فرکانس است.

$$e^{2\pi f_c t} = \int_{-\infty}^{+\infty} \boxed{X(f)}\, e^{+2\pi f t j} \mathrm{d} f$$

اما در شیوه دوم، پیشتر مثالی داشتیم که در آن گفته شد که تبدیل فوریه یک سیگنال ثابت برابر با

$$x(t) = 1 \qquad \xrightarrow{\mathcal{F}} \qquad X(f) = \delta(f)$$

اگر خاصیت دوگانی و خاصیت شیفت را ترکیب کنیم به ویژگی زیر خواهیم رسید:

$$\text{If} \quad x(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(f) \qquad\qquad \text{Then} \quad e^{-2\pi t f_0} X(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} x(f + f_0)$$

$$\text{If} \quad x(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(f) \qquad\qquad \text{Then} \quad e^{+2\pi t f_0} X(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} x(f - f_0)$$

باتوجه به مطلب فوق، خواهیم داشت:

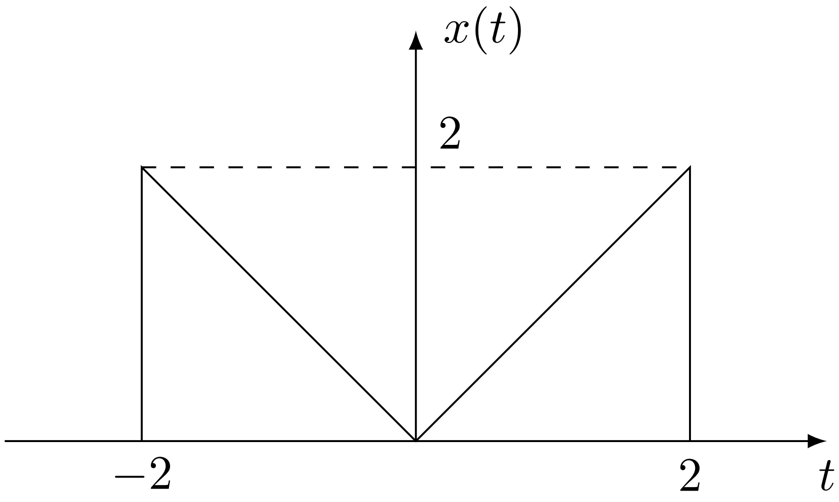
$$x(t) = e^{2\pi f_c t} \qquad \xrightarrow{\mathcal{F}} \qquad X(f) = \delta(f - f_c),$$

$$x(t) = e^{-2\pi f_c t} \qquad \xrightarrow{\mathcal{F}} \qquad X(f) = \delta(f + f_c).$$

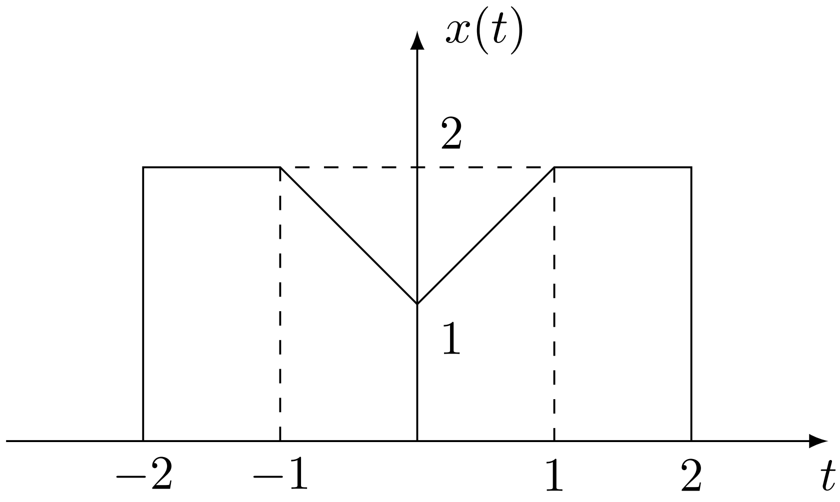
پس در نهایت باید گفت که تبدیل فوریه به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$x(t) = \cos(2\pi f_c t) = \frac{e^{j2\pi f_c t} + e^{-j2\pi f_c t}}{2} \qquad \xrightarrow{\mathcal{F}} \qquad X(f) = \frac{\delta(f - f_c) + \delta(f + f_c)}{2}.$$

مثال ۷ تبدیل فوریه دو تابع زیر را بدست آورید؟



(a)



(b)

پاسخ: نخست لازم به ذکر است که تابع $x(t) = \Lambda\left(t\right)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$x(t) = \Lambda\left(t\right) = \begin{cases} 1 - |x| & |x| < 1 \\ 0 & ow \end{cases}$$

تبدیل فوریه این تابع براحتی با استفاده از ویژگی‌های تبدیل فوریه قابل حصول است، چراکه می‌دانیم در حقیقت این تابع از کانولوشن دو تابع $\mathrm{rect}(t)$ بدست آمده است.

$$x(t) = \Lambda\left(t\right) = \mathrm{rect}(t) * \mathrm{rect}(t)$$

از سوی‌دیگر برطبق ویژگی‌های تبدیل فوریه می‌دانیم که کانولوشن در حوزه زمان معادل ضرب در حوزه فرکانس است، پس خواهیم داشت:

$$\mathcal{F}\left\{\Lambda\left(t\right)\right\} = \left\{\mathrm{rect}(t) * \mathrm{rect}(t)\right\} = \mathrm{sinc}(f) \times \mathrm{sinc}(f) = \mathrm{sinc}^2(f)$$

با دانستن این نکته به سراغ مثال یاد شده می‌رویم، برای شکل (a) داریم:

$$x(t) = 2\Pi\left(\frac{t}{4}\right) - 2\Lambda\left(\frac{t}{2}\right) = 2(4sinc(4f) - 2sinc^2(2f))$$

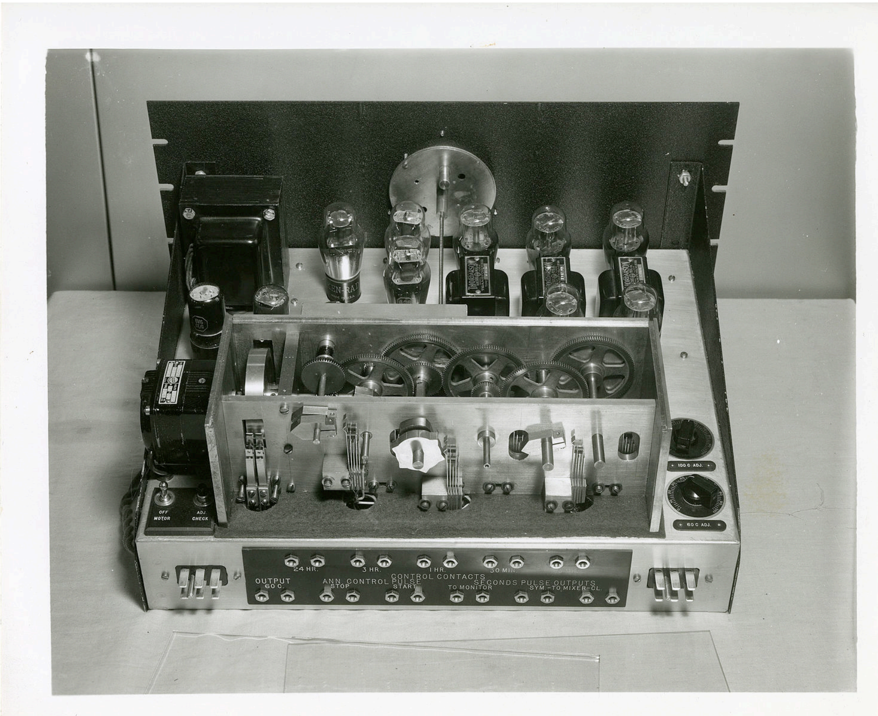
برای شکل (b) داریم:

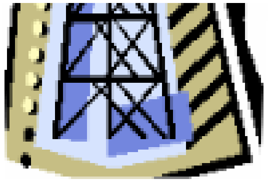
$$x(t) = 2\Pi\left(\frac{t}{4}\right) - \Lambda\left(t\right) = 8sinc(4f) - sinc^2(f)$$

رادیو AM

✍ رادیو AM (Amplitude Modulation) جزو اولین سامانه‌های همه پخشی (Broadcasting).

✍ نقطه تولد آن به دهه ۱۹۰۰ باز می‌گردد، گرچه گسترده شدن آن تا زمان اختراع Vacuum tube در دهه ۱۹۲۰ به تعویق افتاد.



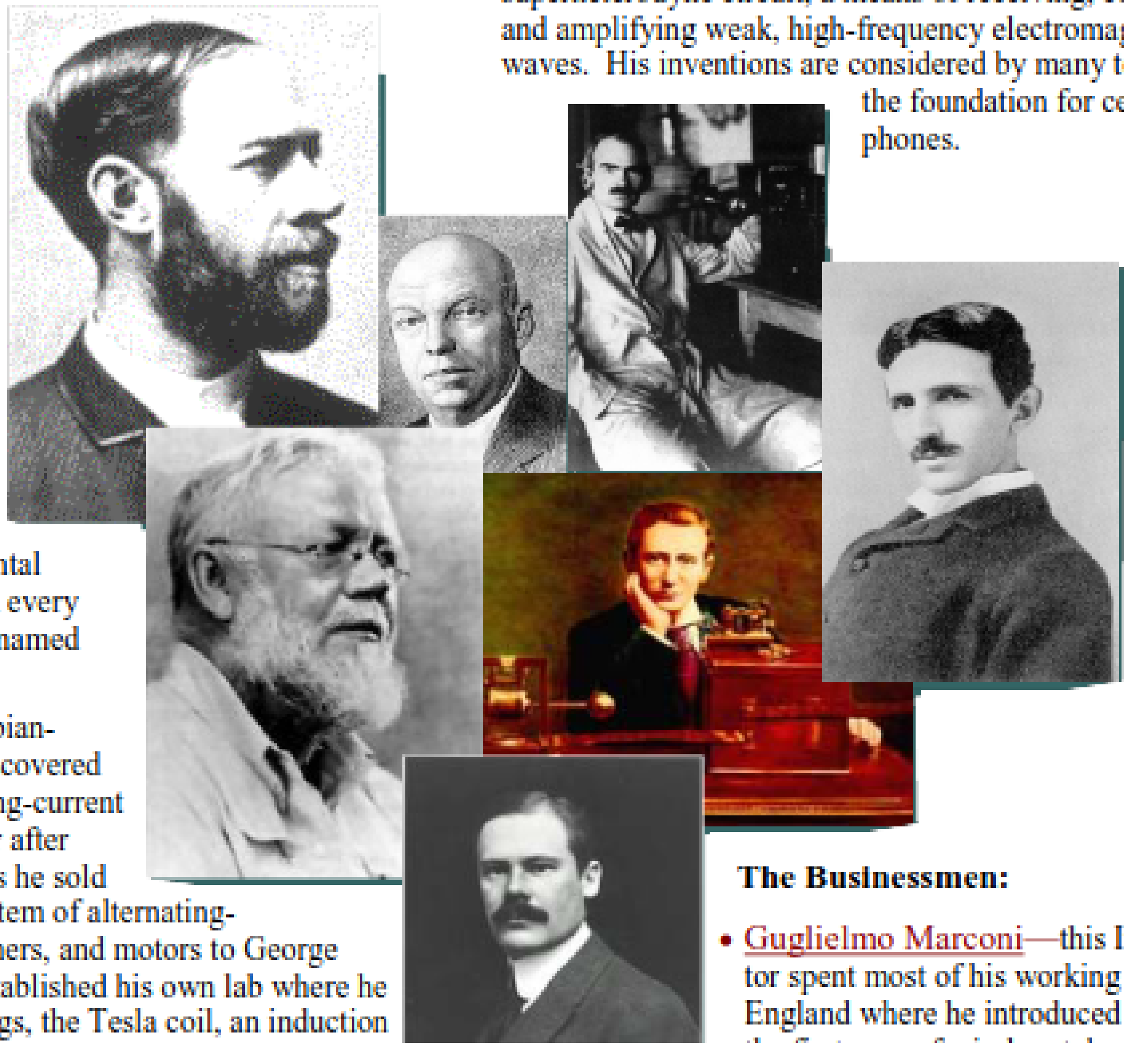


PIONEERS OF RADIO

If success has many fathers, then radio is one of the world's greatest successes. Perhaps one simple way to sort out this multiple parentage is to place those who have been given credit for "fathering" radio into groups.

The Scientists:

- Henirich Hertz—this German physicist, who died of blood poisoning at age 37, was the first to prove that you could transmit and receive electric waves wirelessly. Although Hertz originally thought his work had no practical use, today it is recognized as the fundamental building block of radio and every frequency measurement is named after him (the Hertz).
- Nikola Tesla—was a Serbian-American inventor who discovered the basis for most alternating-current machinery. In 1884, a year after coming to the United States he sold the patent rights for his system of alternating-current dynamos, transformers, and motors to George Westinghouse. He then established his own lab where he invented, among other things, the Tesla coil, an induction
- Edwin Armstrong—this WWI Army officer, Columbia University engineering professor, and creator of FM radio invented the regenerative circuit, the first amplifying receiver and reliable continuous-wave transmitter; and the superheterodyne circuit, a means of receiving, converting and amplifying weak, high-frequency electromagnetic waves. His inventions are considered by many to provide the foundation for cellular phones.

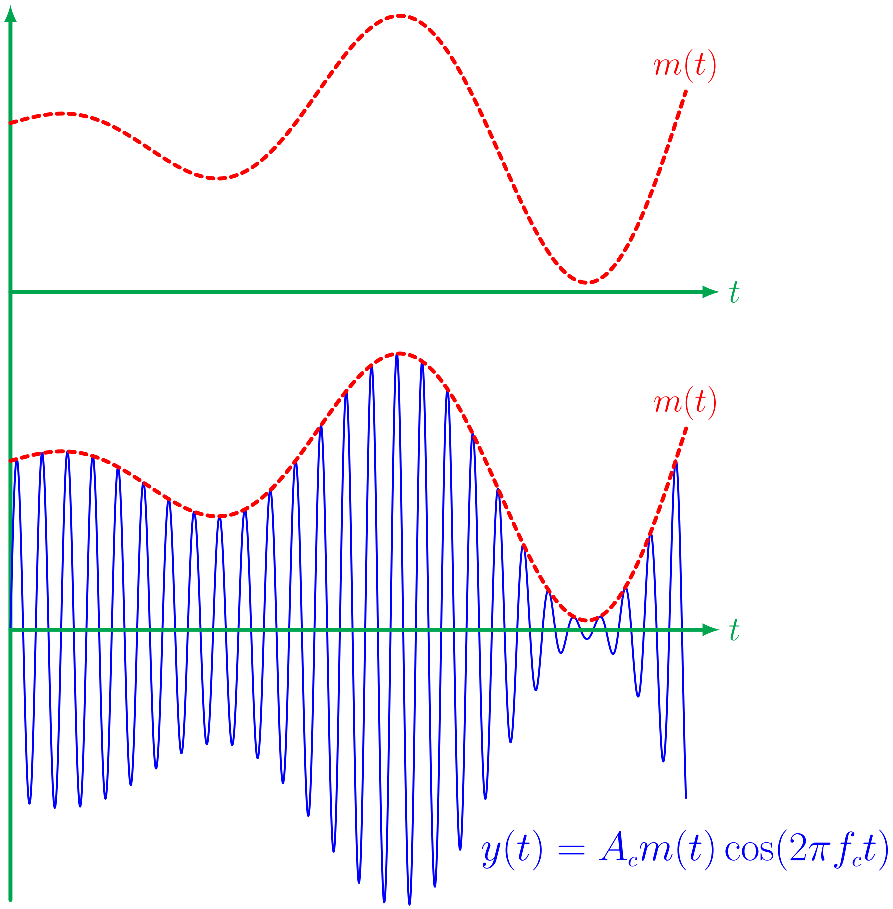


Clockwise from bottom-Ernst Alexanderson (1878-1975), Reginald Fessinden (1866-1932), Heinrich Hertz (1857-1894), Edwin Armstrong (1890-1954), Lee DeForest (1873-1961), and Nikola Tesla (1856-1943). Center color photo is Guglielmo Marconi (1874-1937).

The Businessmen:

- Guglielmo Marconi—this Italian creator spent most of his working life in England where he introduced many of

✍ ایده کار ساده است. سیگنال $m(t)$ به عنوان پیام در یک سیگنال سینوسی با فرکانس f_c ضرب می‌شود.



تبدیل فوریه سیگنال AM

✍ وقتی $m(t)$ در سیگنال $c(t) = A_c\cos(2\pi f_c t)$ ضرب می‌شود در حوزه فرکانس چه اتفاقی می‌افتد؟

$$y(t) = m(t) \times c(t) = A_c m(t)\cos(2\pi f_c t), \qquad Y(f) = ?$$

- استفاده از خاصیت ضرب در تبدیل فوریه

$$\text{If}\ \ x_1(t), x_2(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X_1(f), X_2(f) \qquad \text{Then}\ \ x_1(t)x_2(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X_1(f) * X_2(f)$$

یعنی خواهیم داشت:

$$y(t) = m(t) \times c(t) = A_c m(t)\cos(2\pi f_c t), \qquad Y(f) = M(f) * C(f)$$

تبدیل فوریه سیگنال AM (ادامه)

✍ می‌خواهیم تبدیل فوریه سیگنال AM را پیدا کنیم.

$$y(t) = m(t) \times c(t) = A_c m(t) \cos(2\pi f_c t), \qquad Y(f) = M(f) * C(f)$$

✍ اول باید بفهمیم که تبدیل فوریه سیگنال حامل (Carrier Signal) ($C(f)$) چیست؟

$$\begin{aligned} C(f) &= \mathcal{F}\left\{A_c \cos(2\pi f_c t)\right\} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} A_c \cos(2\pi f_c t) e^{-2\pi j f t} \mathrm{d}t \\ &= \frac{A_c}{2}\delta(f - f_c) + \frac{A_c}{2}\delta(f + f_c) \end{aligned}$$

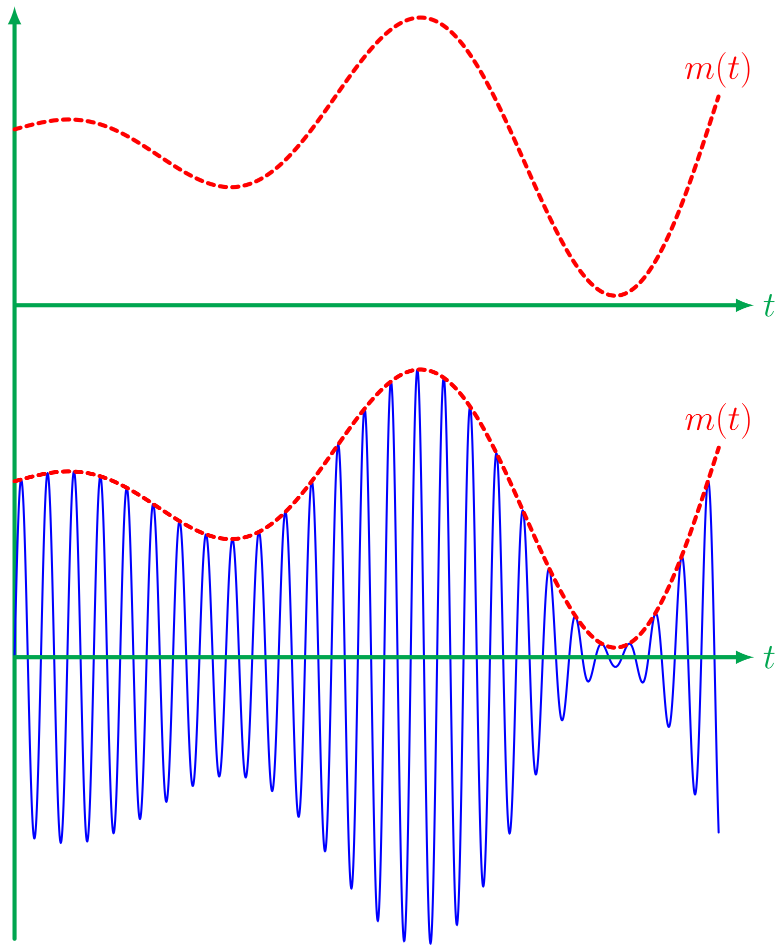
✍ می‌دانیم که:

$$x(t) * \delta(t-t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t-t_0-\tau)\mathrm{d}\tau = x(t-t_0).$$

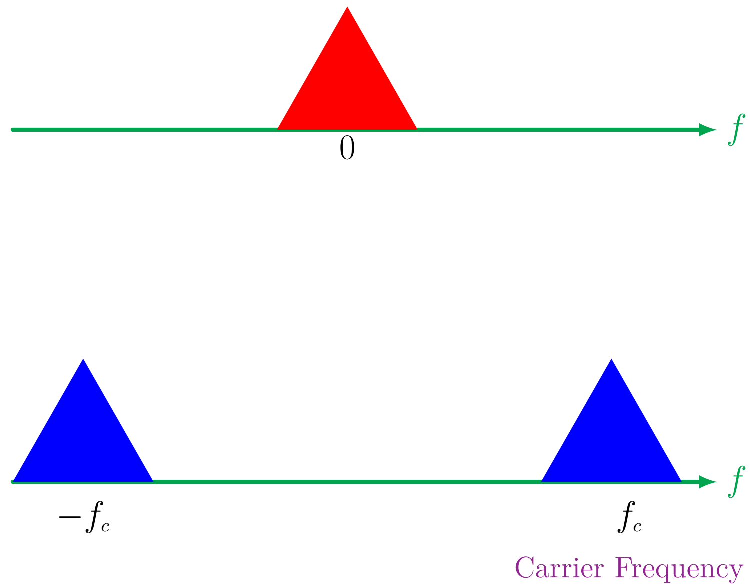
✍ در نهایت:

$$\begin{aligned} Y(f) &= M(f) * C(f) \\ &= M(f) * \left(\frac{A_c}{2}\delta(f-f_c) + \frac{A_c}{2}\delta(f+f_c)\right) \\ &= \frac{A_c}{2}M(f) * \delta(f-f_c) + \frac{A_c}{2}M(f) * \delta(f+f_c) \\ &= \frac{A_c}{2}M(f-f_c) + \frac{A_c}{2}M(f+f_c) \end{aligned}$$

✍ سیگنال $m(t)$ به عنوان پیام و $c(t) = A_c \cos(2\pi f_c t)$ به عنوان سیگنال حامل.

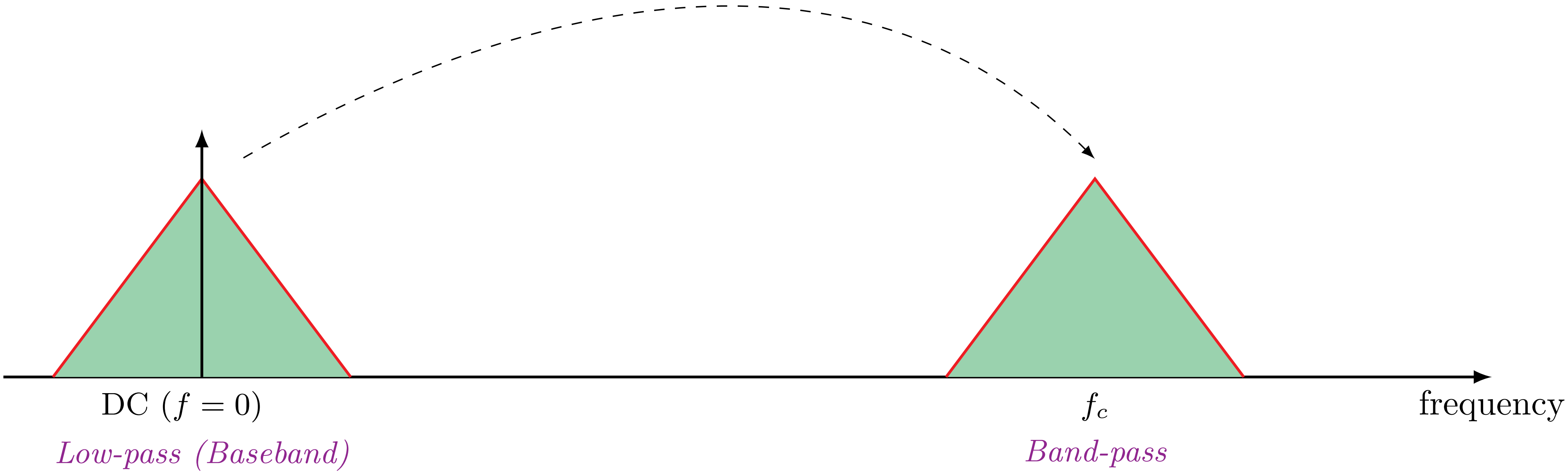


$$y(t) = A_c m(t) \cos(2\pi f_c t)$$



$$Y(f) = \frac{A_c}{2} M(f - f_c) + \frac{A_c}{2} M(f + f_c)$$

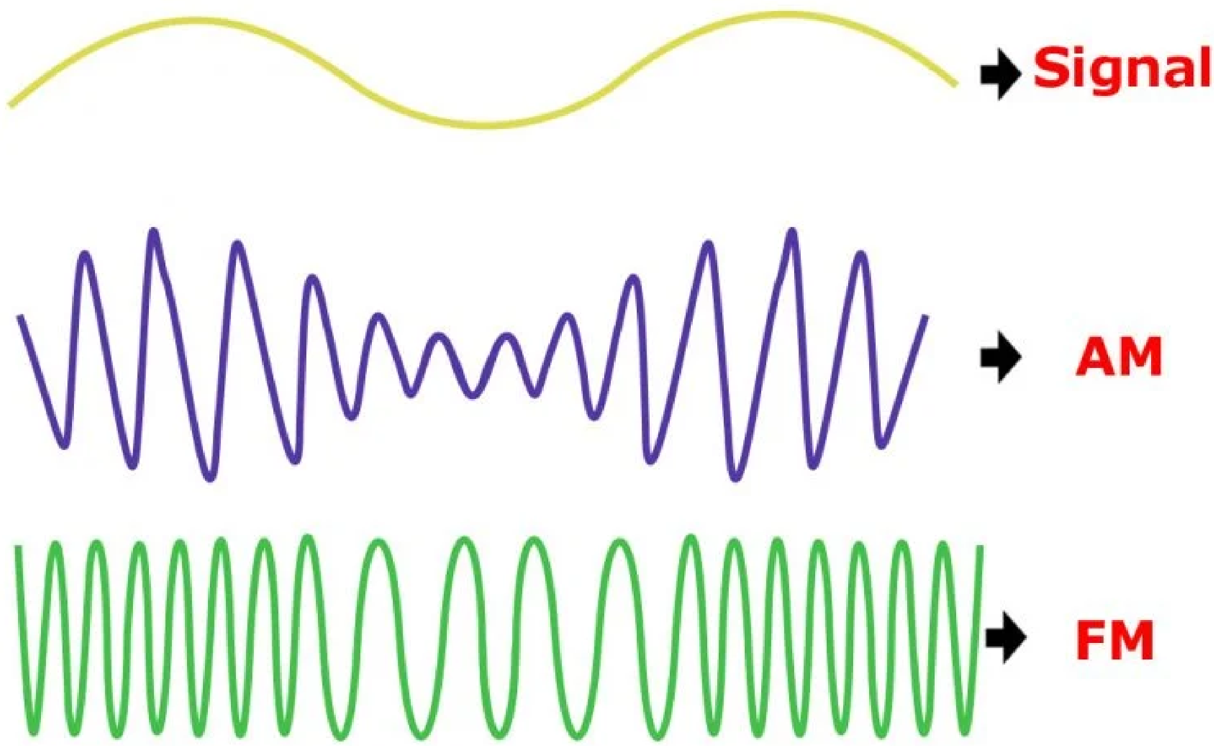
مفاهیم Baseband و Bandpass



بحث کلاسی

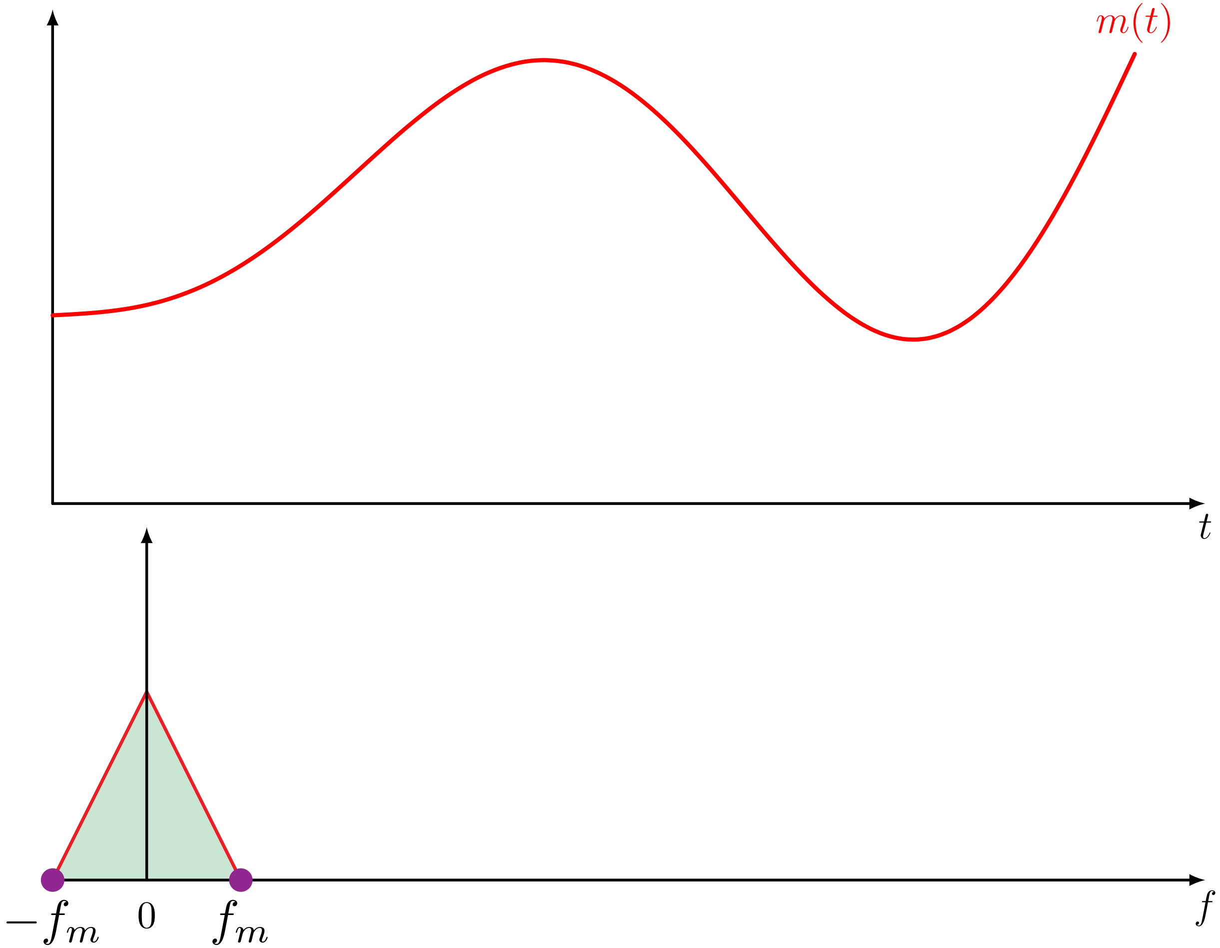
✍ رادیو AM با کیفیت‌تر است یا FM؟

✍ رادیو AM به نویز حساس‌تر است یا FM؟



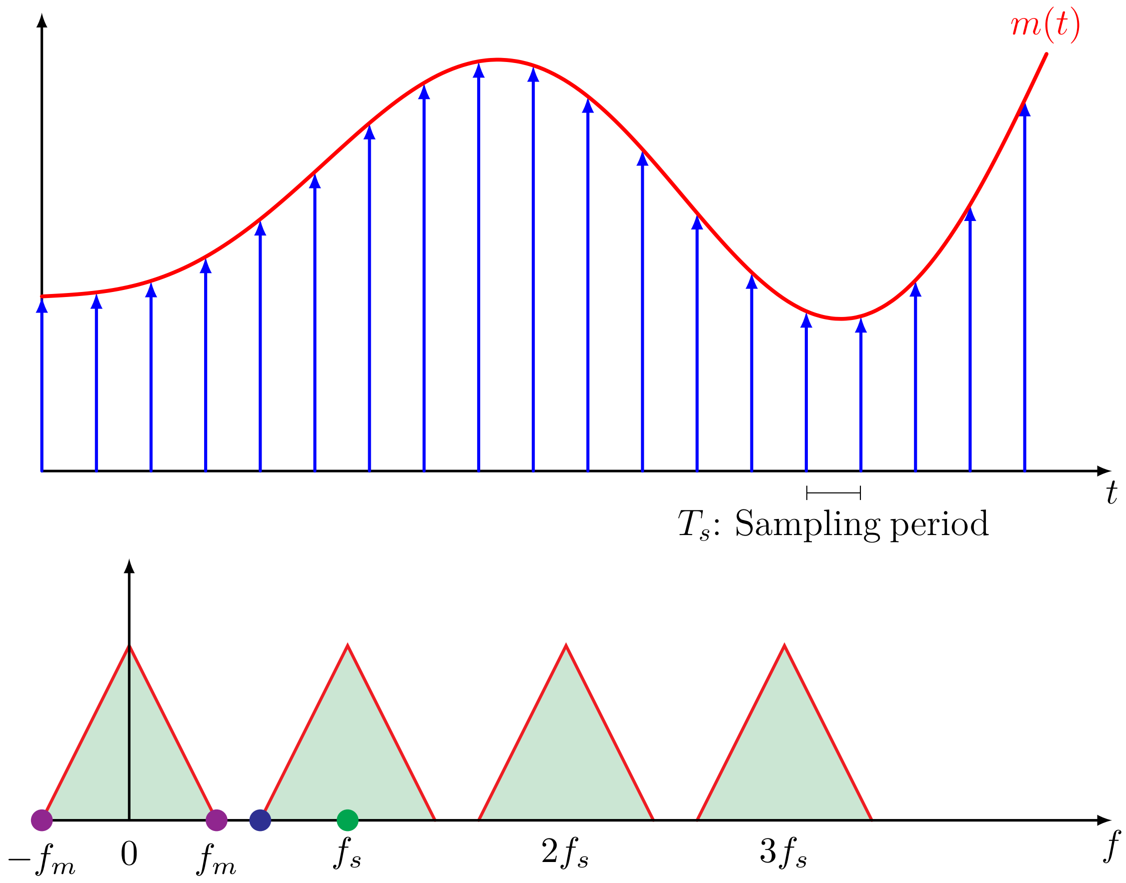
نمونه‌برداری

✍ ابتدا سیگنال آنالوگ (سیگنال پیوسته) زیر را در نظر بگیرید، هم در دنیای زمان و هم دنیای فرکانس.



نمونه‌برداری

✍ در نمونه‌برداری (Sampling) ابتدا سیگنال پیوسته در یک قطار ضربه ضرب خواهد شد.



فرض کنید که سیگنال پیوسته $x(t)$ را داریم. قصد داریم تا از آن نمونه‌برداری انجام دهیم. این بدان معنا است که باید $x(t)$ را در یک سیگنال قطار ضربه (Impulse Train) که به آن سیگنال Dirac comb نیز گفته می‌شود، ضرب بکنیم. اجازه دهید سیگنال قطار ضربه را با $p(t)$ نشان دهیم. پس خواهیم داشت:

$$p(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_s). \tag{۱}$$

سیگنال $p(t)$ یک سیگنال متناوب با دوره تناوب T_s است. سیگنال بعد از نمونه‌برداری، خواهد شد:

$$y(t) = x(t) \times p(t) = x(t) \times \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_s) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_s)\delta(t - kT_s) \tag{۲}$$

اجازه دهید در این مجال تلاش کنیم تبدیل فوریه سیگنال $y(t)$ را محاسبه کنیم. برای این کار از ویژگی‌های تبدیل فوریه استفاده می‌کنیم. همان‌طور که پیشتر گذشت، می‌دانیم که تبدیل فوریه ضرب دو سیگنال برابر با کانولوشن تبدیل فوریه‌های سیگنال‌ها خواهد شد.

$$\text{If} \quad x(t), p(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(f), P(f) \qquad\qquad \text{Then} \quad x(t)p(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(f) * P(f) \tag{۳}$$

در اولین گام به سراغ $p(t)$ می‌رویم، و سعی می‌کنیم که تبدیل فوریه آن را حساب کنیم. می‌دانیم که سیگنال قطار ضربه یک تابع متناوب است و برای یک تابع متناوب، می‌توانیم یک سری فوریه بنویسیم:

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{\frac{j2\pi nt}{T_s}} \tag{۴}$$

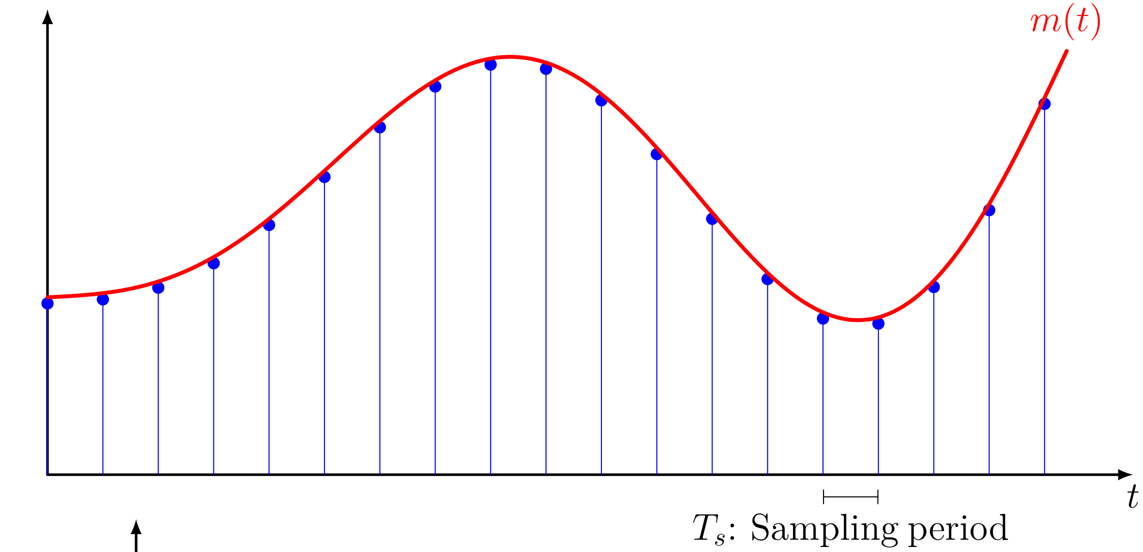
که پارامتر T_s برابر با دوره تناوب تابع $x(t)$ است. اکنون به دو طرف (۴) عملگر تبدیل فوریه را اعمال می‌کنیم.

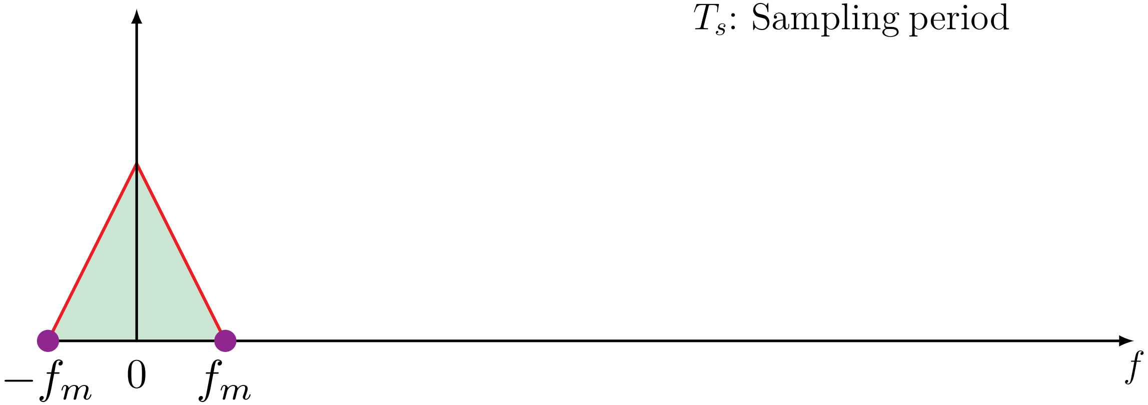
$$P(f) = \mathcal{F}\left\{x(t)\right\} = \mathcal{F}\left\{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{\frac{j2n\pi t}{T_s}}\right\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \mathcal{F}\left\{e^{\frac{j2n\pi t}{T_s}}\right\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \delta(f - \frac{n}{T_s})$$

تنها یک گام باقی‌مانده است، و آن این است که بدانیم ضرایب سری فوریه برای قطار ضربه برابر با یک $(a_n = 1)$ است. پس می‌توان گفت که تبدیل فوریه قطار ضربه برابر با قطار ضربه خواهد شد. ادامه راه ساده به نظر می‌رسد، به نظر شما برطبق ویژگی‌های تبدیل فوریه تبدیل فوریه $Y(f)$ چه می‌شود؟!

$$Y(f) = X(f) * P(f) = X(f) * \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f - \frac{n}{T_s}) =? \tag{۵}$$

نرخ نمونه‌برداری باید چقدر باشد؟ اگر از یک سیگنال باند محدود، با دو برابر نرخ نایکویست نمونه‌برداری کنیم، می‌توانیم به طور کامل از روی نمونه‌ها سیگنال پیوسته را بازیابی کنیم.



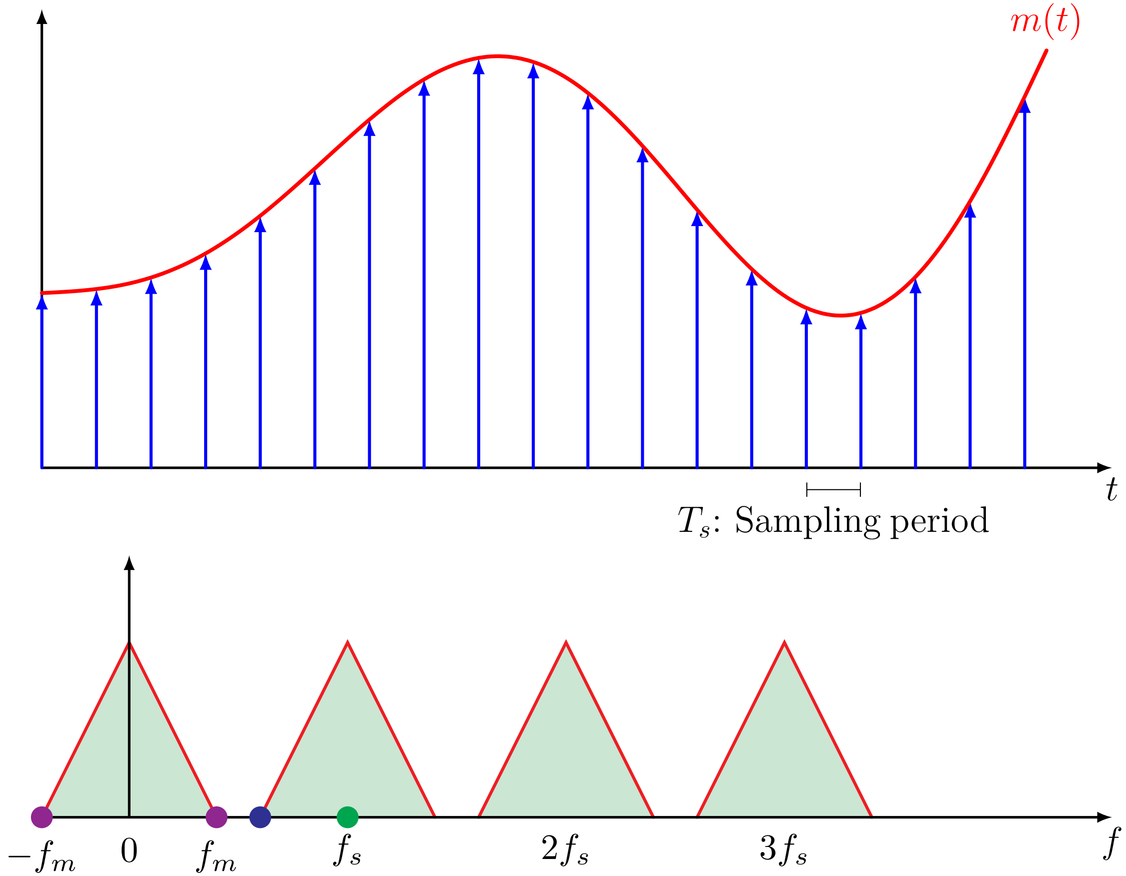


Harry Nyquist

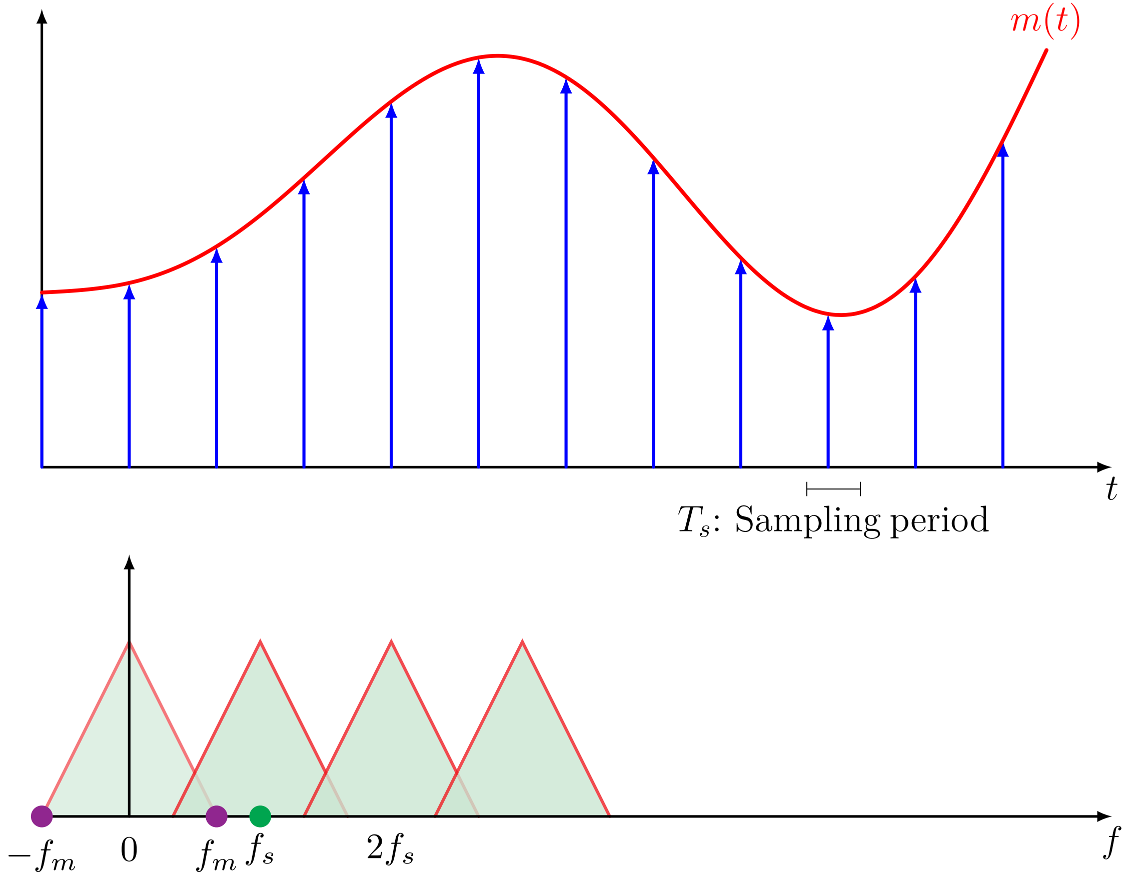
$$f_s > 2 \times f_m$$

$$f_s = \frac{1}{T_s}$$

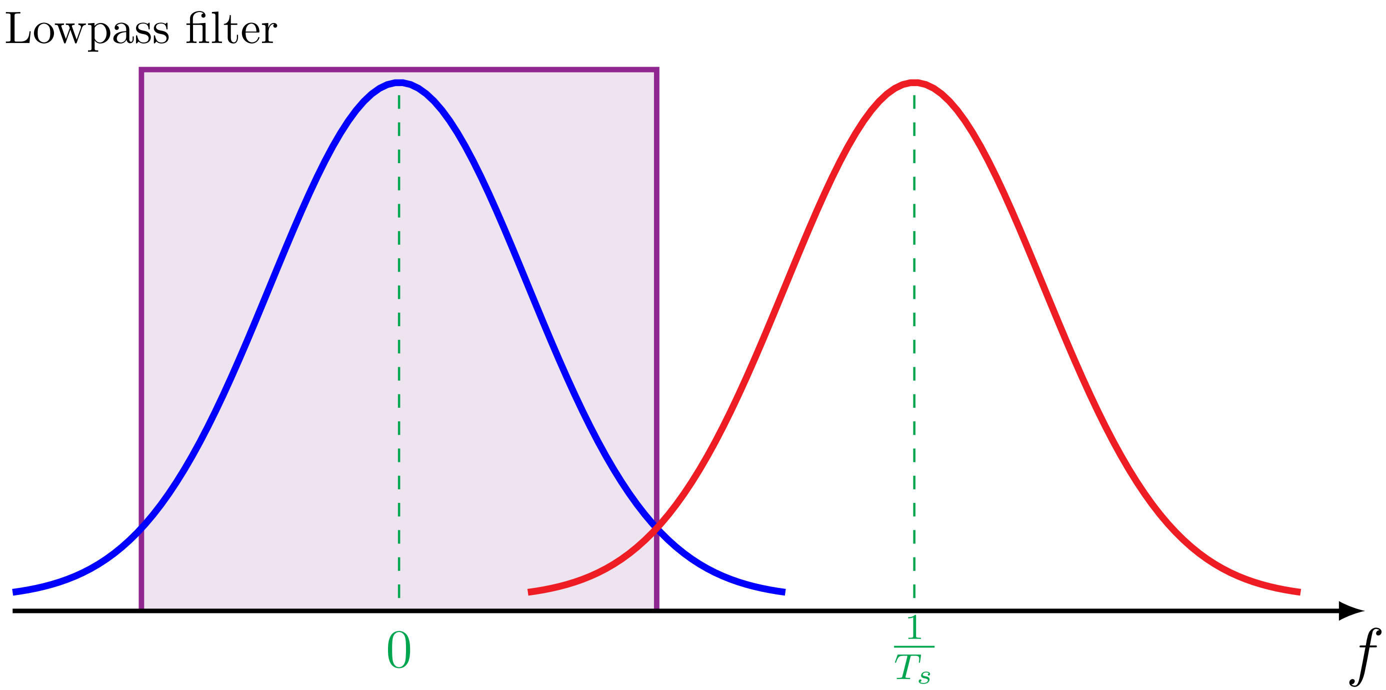
✍ در نمونه‌برداری (Sampling) ابتدا سیگنال پیوسته در یک قطار ضربه ضرب خواهد شد.



✍ اگر این فرکانس رعایت نشود؟!



✍ پیش‌شرط قضیه نایکویست، باند محدود بودن (Band limited) سیگنال است؟؟!! پس عملا راه فراری از Aliasing نیست.



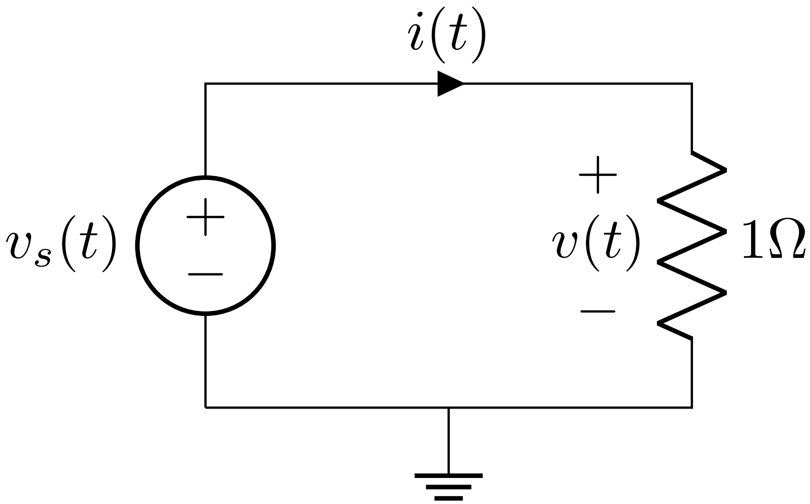
نمونه‌برداری - Aliasing (ادامه)

تصویر را بعد از گذر از یک فیلتر پایین‌گذر (Low Pass Filter)

تصویر با مشکل Aliasing

انرژی و توان سیگنال

مفهوم انرژی و توان سیگنال



✍ مقدار توان تحویل داده شده در زمان t به مقاومت $R = 1\Omega$ برابر است با:

$$\mathrm{P}_i(t) = \frac{\mathrm{dE}_x(t)}{\mathrm{d}t} = i(t)v(t) = i(t)(Ri(t)) = i^2(t), \qquad \mathrm{P}_i^{\mathrm{avg}} = \lim_{T \longrightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} i^2(t)\mathrm{d}t.$$

✍ برای محاسبه انرژی مصرفی در مقاومت $R = 1\Omega$ نیز خواهیم داشت:

$$\mathrm{E}_i(t) = \int_{-\infty}^{t} \mathrm{P}_i(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{t} i^2(t)\mathrm{d}t, \qquad \mathrm{E}_i^{\mathrm{tot}} = \int_{-\infty}^{+\infty} i^2(t)\mathrm{d}t.$$

در یک مدار الکتریکی و یا در حالت کلی در علم فیزیک، توان به معنای نرخ تبادل و یا مصرف انرژی است. به همین دلیل توان را به عنوان مشتق انرژی، تعریف می‌کنیم. نکته جالب این است که توان مفهومی است که وضعیت را در لحظه برای ما توصیف می‌کند، اما انرژی به وضعیت کلی سیستم اشاره دارد. به عنوان مثال در همین عکسی که قرار داده شده است، انرژی بسان مقدار حجم آبی است که در ظرف قرار دارد و توان به نرخ ریختن آب از ظرف اشاره دارد. در علم انتقال داده، شاید توان مفهوم بهتر و قابل استفاده‌تری نسبت به انرژی برای ما باشد. برای ما اهمیت ندارد که یک gNodeB در یک شبکه 5G در چندین روزی که روشن بوده چقدر انرژی برای انتقال امواج الکترومغناطیسی مصرف کرده، اما برای ما اهمیت دارد که بدانیم چقدر توان در لحظه دارد برای (User Equipment) UEها ارسال می‌کند.

تعریف انرژی و توان سیگنال

✍ توان لحظه‌ای سیگنال $x(t)$:

$$\mathrm{P}_x(t) = |x(t)|^2$$

✍ انرژی در لحظه t سیگنال $x(t)$:

$$\mathrm{E}_x(t) = \int_{-\infty}^{t} |x(t)|^2 \mathrm{d}t$$

✍ مجموع انرژی سیگنال $x(t)$:

$$\mathrm{E}_x^{\mathrm{tot}} = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 \mathrm{d}t$$

✍ میانگین توان سیگنال $x(t)$:

$$\mathrm{P}_x^{\mathrm{avg}} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} |x(t)|^2 \mathrm{d}t$$

تعریف انرژی و توان سیگنال

✍ مجموع انرژی سیگنال $x(t)$:

$$\mathrm{E}_x^{\mathrm{tot}} = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 \mathrm{d}t \qquad (۶)$$

✍ میانگین توان سیگنال $x(t)$:

$$\mathrm{P}_x^{\mathrm{avg}} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} |x(t)|^2 \mathrm{d}t \qquad (۷)$$

- سیگنال‌های انرژی: سیگنال‌هایی هستند که انرژی محدود دارند (یعنی انتگرال (۶) مقدار محدودی دارد) و توان آن ها برابر صفر می‌باشد (یعنی انتگرال (۷) مقدارش برابر صفر می‌باشد).
- سیگنال توان: سیگنال‌هایی هستند که انرژی آن ها نامحدود می‌باشد (یعنی مقدارانتگرال (۶) برابر با بی نهایت می‌باشد) و توان آن‌ها محدود.
- سیگنال نه توان و نه انرژی: سیگنال‌هایی هستند که هم انرژی و هم توان آن ها نامحدود هستند.

مثال ۸

هر کدام از سیگنال‌های زیر جزو کدام دسته می‌باشد:

$x(t)=\sin(5t)$، $x(t)=u(t)$، $x(t)=rect(t)$، $x(t)=t^2u(t)$ و $x(t)=e^{-2t}u(t)$.

مثال ۹

به نظر شما تمامی سیگنال‌های متناوب با دامنه محدود، جزو کدام دسته می‌باشند؟

مثال ۱۰

به نظر شما تمامی سیگنال‌های محدود در زمان با دامنه محدود، جزو کدام دسته می‌باشند؟

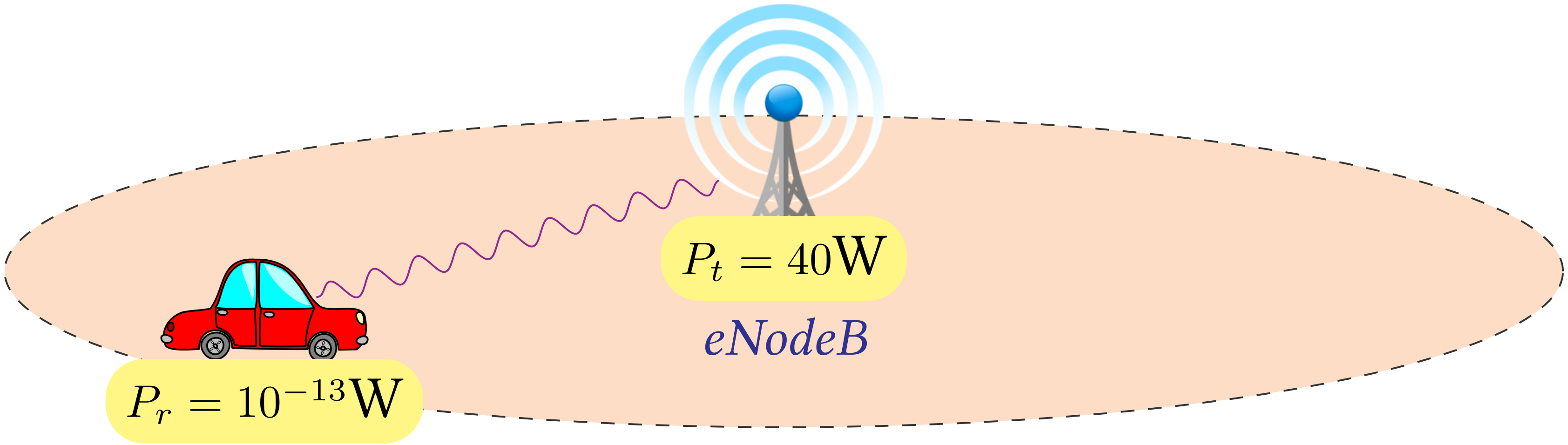
- برای محاسبه میزان انرژی و توان یک سیگنال می‌توان از روابط (۶) و (۷) استفاده کرد. به عنوان مثال سیگنال $x(t) = e^{-2t}u(t)$ را در نظر بگیرید. بدین‌سان برای محاسبه انرژی خواهیم داشت:

$$\mathrm{E}_x^{\mathrm{tot}} = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 \mathrm{d}t = \int_{0}^{+\infty} e^{-4t} \mathrm{d}t = \frac{e^{-4\times 0}}{4} - \frac{e^{-\infty}}{4} = \frac{1}{4} < \infty$$

پس سیگنال مذکور یک سیگنال انرژی است.

- یک سیگنال متناوب (به مانند $x(t) = \sin(5t)$)، حتما یک سیگنال توان می باشد. همچنین، برای محاسبه توان کافی است تنها یک دوره تناوب سیگنال، در نظر گرفته شود.

- یک سیگنال محدود در زمان (به مانند $x(t) = rect(t)$) همواره یک سیگنال انرژی خواهد بود. البته باید دقت داشت که $|x(t)| < \infty$.



✍ فرض کنید که توان ارسال شده توسط یک eNodeB (P_t) برابر با 40 وات است یک UE (User Equipment) سیگنال با توان $P_r = 10^{-13}\text{W}$ را از شبکه دریافت می‌کند. کار کردن با این اعداد کمی سخت است.

✍ در حوزه مخابرات دسی‌بل یک واحد لگاریتمی است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$P[\mathrm{dB}] = 10\log_{10}(P[\mathrm{W}]), \qquad P[\mathrm{W}] = 10^{\frac{P[\mathrm{dB}]}{10}}$$

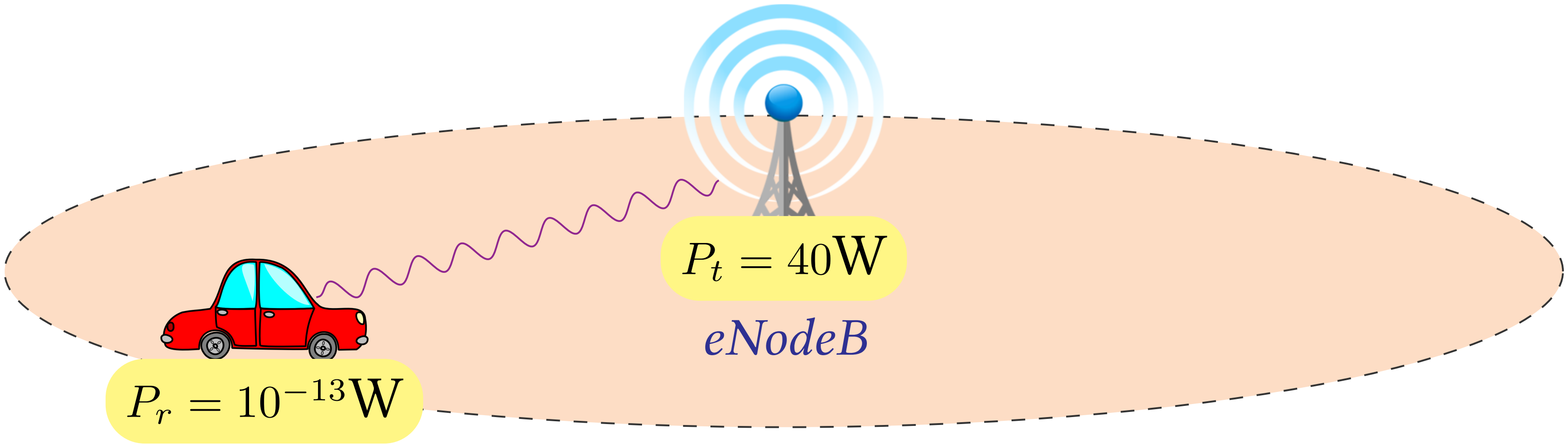
✍ واحد dBm نیز به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$P[\mathrm{dBm}] = 10\log_{10}(P[\mathrm{mW}]) \qquad P[\mathrm{mW}] = 10^{\frac{P[\mathrm{dBm}]}{10}}$$

✍ رابطه بین dB و dBm:

$$P[\mathrm{dBm}] = 30 + P[\mathrm{dB}]$$

مفهوم dB و dBm (ادامه)



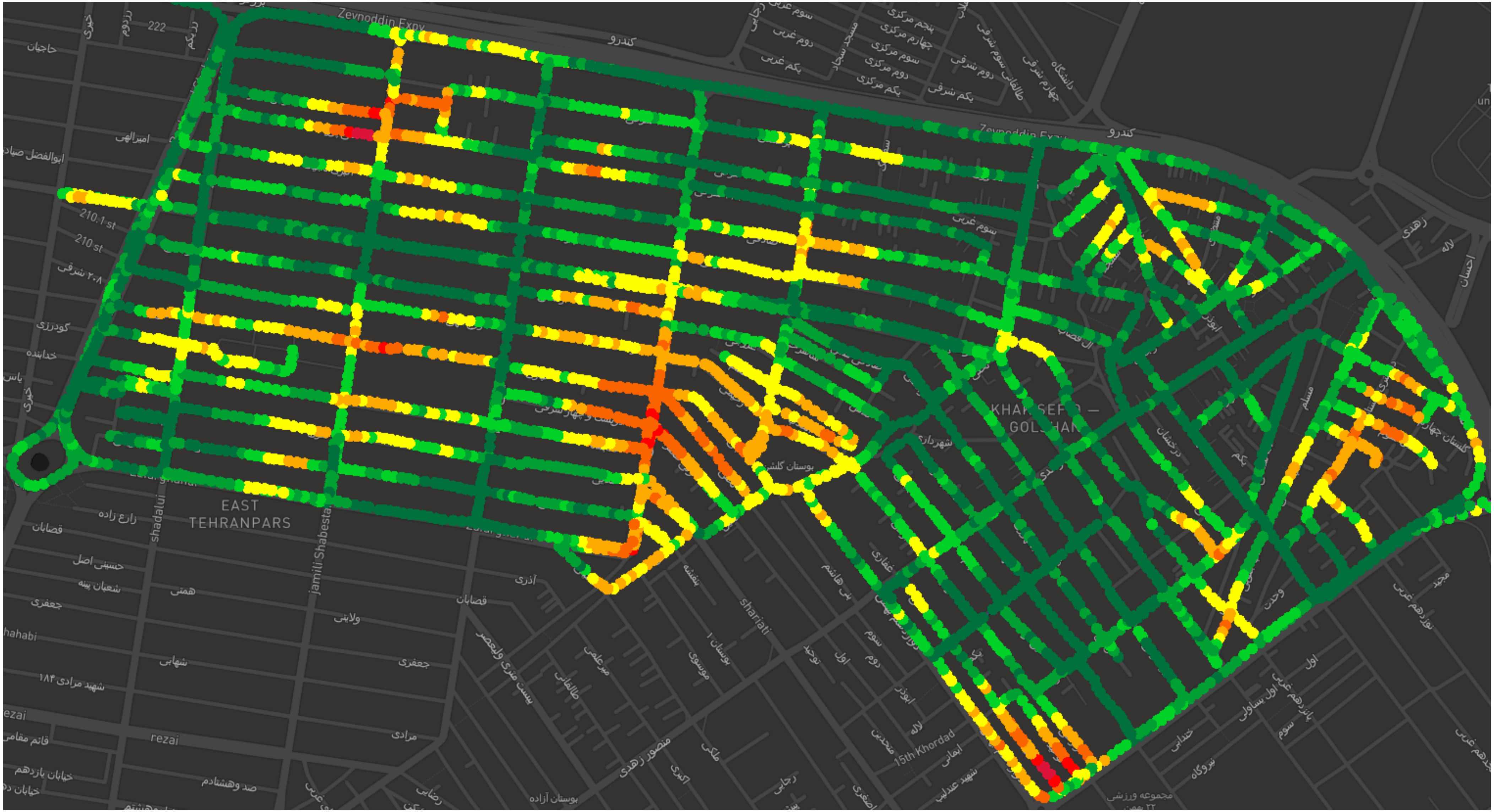
$$P_t[\mathrm{dB}] = 10\log_{10}(P_t[\mathrm{W}]) = 10\log_{10}(40) = 16.02 \text{ dB}$$

$$P_r[\mathrm{dB}] = 10\log_{10}(P_r[\mathrm{W}]) = 10\log_{10}(10^{-13}) = -130 \text{ dB}$$

$$P_t[\mathrm{dBm}] = 30 + P_t[\mathrm{dB}] = 30 + 16.02 = 46.02 \text{ dBm}$$

$$P_r[\mathrm{dBm}] = 30 + P_r[\mathrm{dB}] = 30 - 130 = -100 \text{ dBm}$$

توان دریافتی (Received Power) توسط UE



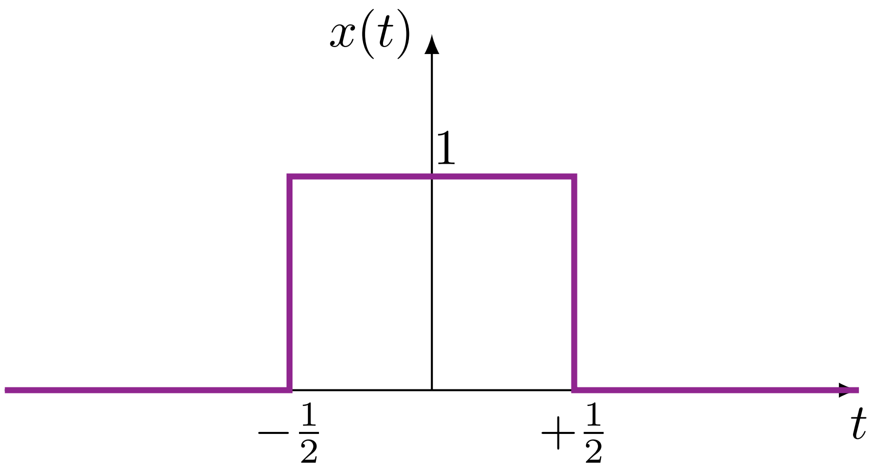
✍ یک UE در طول یک مسیر حرکت کرده و به طور مداوم توان دریافتی دریافتی از سلول خدمتگزار (Serving Cell) را در یک پایگاه داده ثبت می‌کند. همان‌طور که مشاهده می‌شود، تقریبا در چهار بخش از مسیر، اوضاع توانی مناسب نیست، و همین امر موجب کاهش QoE (Quality of Experience) کاربر خواهد شد.

Color	Name	Range [dBm]
	Excellent	$-80 \leq X$
	Very Good	$-85 \leq X < -80$
	Good	$-90 \leq X < -85$
	Fair	$-95 \leq X < -90$
	Poor	$-100 \leq X < -95$
	Very Poor	$-105 \leq X < -100$
	Bad	$-110 \leq X < -105$
	Very Bad	$-115 \leq X < -110$
	Awful	$-120 \leq X < -115$
	No Coverage	$X < -120$

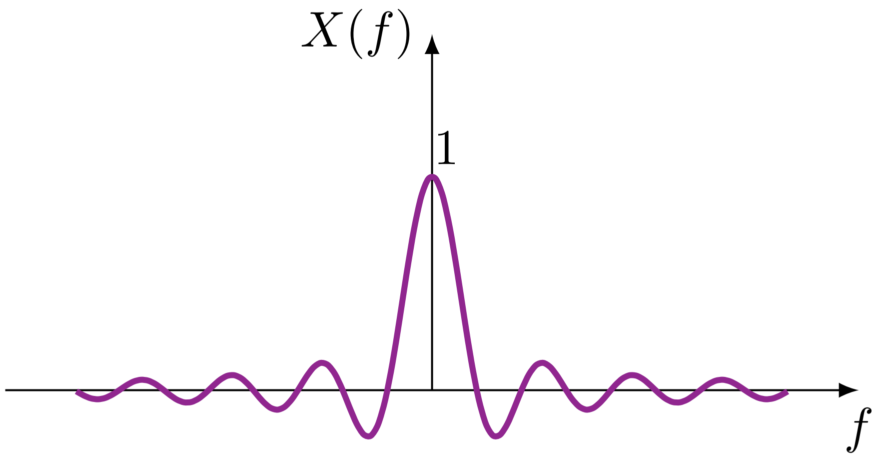
رابطه انرژی سیگنال با تبدیل فوریه

✍ رابطه پارسوال برای تبدیل فوریه، در حقیقت از یک رابطه کلی که توسط Marc-Antoine Parseval کشف شده، استخراج شده است.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 \mathrm{d}f$$



$$x(t) = \mathrm{rect}(t) = u(t + \tfrac{1}{2}) - u(t - \tfrac{1}{2})$$



$$X(f) = \frac{sin(\pi f)}{\pi f} = \mathrm{sinc}(f)$$

مثال ۱۱ مقدار انرژی سیگنال $x(t) = e^{-t}u(t)$ را پیدا کنید؟

- برای یافتن میزان انرژی این تابع می‌توان از دو طریق عمل کرد. در روش نخست انتگرال زیر را بدست می‌آوریم:

$$\mathrm{E}_x^{\mathrm{tot}} = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 \mathrm{d}t = \int_{0}^{+\infty} e^{-2t} \mathrm{d}t = \frac{1}{2}$$

- در راه‌کار دوم از رابطه پارسوال استفاده می‌کنیم. نخست آن‌که می‌دانیم:

$$x(t) = e^{-t}u(t) \qquad \xrightarrow{\mathcal{F}} \qquad X(f) = \frac{1}{1 + 2\pi f j}$$

بدین‌سان داریم:

$$\mathrm{E}_x^{\mathrm{tot}} = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 \mathrm{d}f = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}f}{1 + (2\pi f)^2} = \frac{1}{2\pi} \mathrm{atan}(2\pi f)|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{1}{2}$$

مثال ۱۲ مقدار انرژی سیگنال $x(t)=\mathrm{sinc}(2t)$ را پیدا کنید؟

پاسخ: مطمئن باشید این انتگرال را به روش‌های معمول نمی‌توانید حل کنید. در ابتدا سعی کنید ببینید تبدیل فوریه چه تابعی $\mathrm{sinc}(2t)$ می‌شود.

$$\textit{If}\ \mathrm{rect}(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \mathrm{sinc}(f) \qquad\qquad \textit{Then}\ \mathrm{sinc}(2t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2}\mathrm{rect}(\frac{f}{2})$$

سپس کافی است در رابطه پارسوال جایگزین کنید.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 \mathrm{d}f \quad \Longrightarrow \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{sinc}^2(2t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{rect}(\frac{f}{2})^2 \mathrm{d}f = \frac{1}{2}$$

مثال ۱۳ انرژی سیگنال زیر را محاسبه کنید:

$$X(t) = \frac{2}{1+4\pi^2t^2}$$

راهنمایی: بازهم مطمئن باشید که با یک انتگرال مواجه هستید که حل آن بسیار دشوار است. برای حل سوال ابتدا به جداول تبدیلات فوریه رجوع کنید. ببینید که تبدیل فوریه چه تابعی تابع داده شده می‌شود. سپس به سراغ رابطه پارسوال بروید. یعنی:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |X(t)|^2 \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} |\frac{2}{1+4\pi^2t^2}|^2 \mathrm{d}t = \dots$$

پاسخ ضربه کانال

سامانه‌های LTI (Linear Time Invariant)

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\text{LTI Sys}} \longrightarrow y(t)$$

✍ یک سامانه LTI باید دو شرط داشته‌باشد:

- خطی باشد،

$$x_1(t), x_2(t) \longrightarrow y_1(t), y_2(t) \qquad \alpha x_1(t) + \beta x_2(t) \longrightarrow \alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$$

- تغییرناپذیر با زمان (Time-invariant) باشد.

$$x(t) \longrightarrow y(t) \qquad x(t-\tau) \longrightarrow y(t-\tau)$$

سامانه‌های LTI (Linear Time Invariant) (ادامه)

$$x(t) = \delta(t) \longrightarrow \boxed{\text{LTI Sys}} \longrightarrow y(t) = h(t)$$

تعریف ۲ پاسخ یک سامانه LTI، به ورودی تابع ضربه واحد ($x(t) = \delta(t)$) را پاسخ ضربه کانال (Channel Impulse Response) می‌نامیم، و آن را با $h(t)$ نمایش می‌دهیم.

رابطه زیر را براحتی می‌توان بدست آورد:

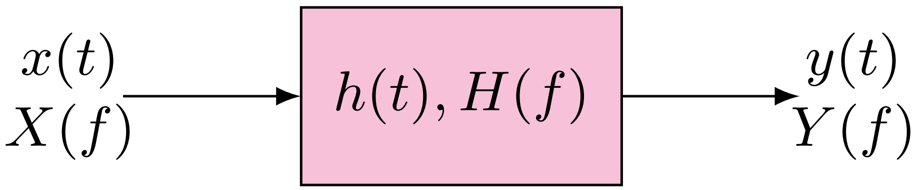
$$\delta(t) \longrightarrow h(t)$$

$$x(t) \longrightarrow y(t)$$

$$x(t) = x(t) * \delta(t) \longrightarrow y(t) = x(t) * h(t)$$

$$X(f) \longrightarrow Y(f) = X(f)H(f)$$

سامانه‌های LTI (Linear Time Invariant) – مثال



$$y(t) = x(t) * h(t)$$
$$Y(f) = X(f)H(f)$$

✍ سیگنال $x(t)$ وارد کانال می‌شود، در صورتی‌که کانال ایده‌آل باشد، انتظار داریم $h(t) = \alpha_0\delta(t-\tau_0)$ باشد.

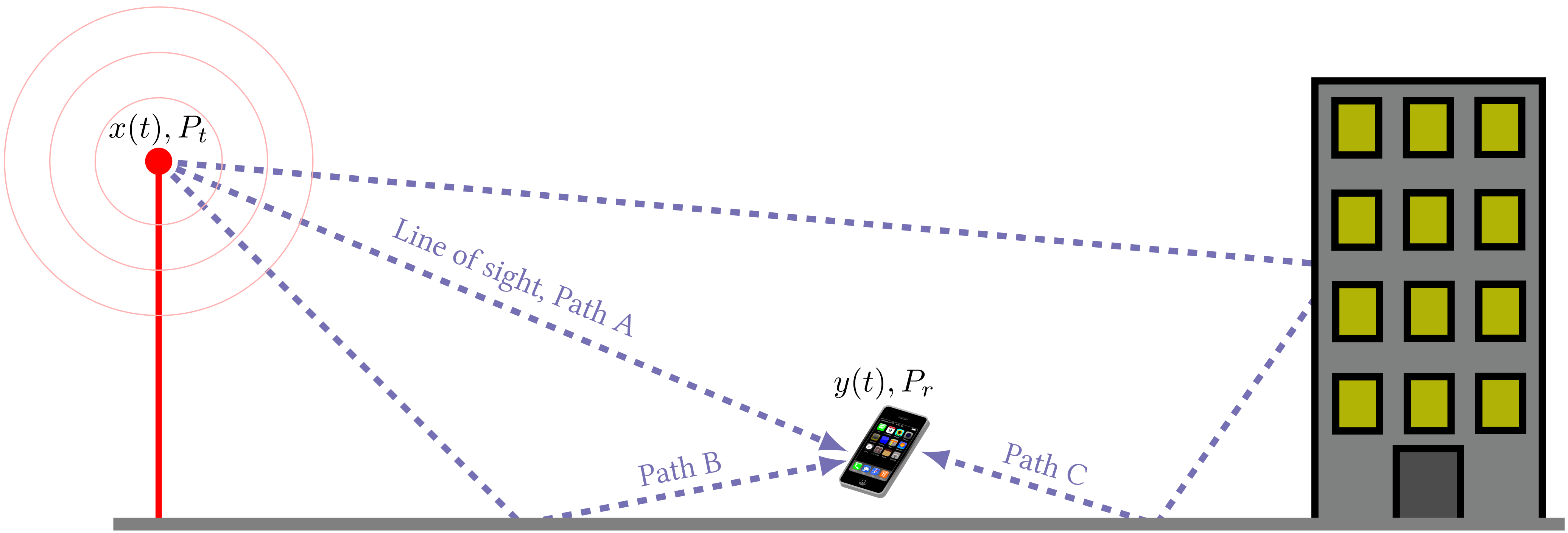
✍ تنها یک نسخه تضعیف‌شده و با تاخیر سیگنال بدست گیرنده خواهد رسید، یعنی

$$y(t) = x(t) * h(t) = x(t) * \alpha_0\delta(t-\tau_0) = \alpha_0 x(t-\tau_0)$$

✍ $h(t)$ در حوزه فرکانس یک خط صاف خواهد بود.

✍ $y(t)$ برابر با حاصل جمع کپی‌های تضعیف‌شده سیگنال $x(t)$ تا یک آستانه (Threshold) معین.

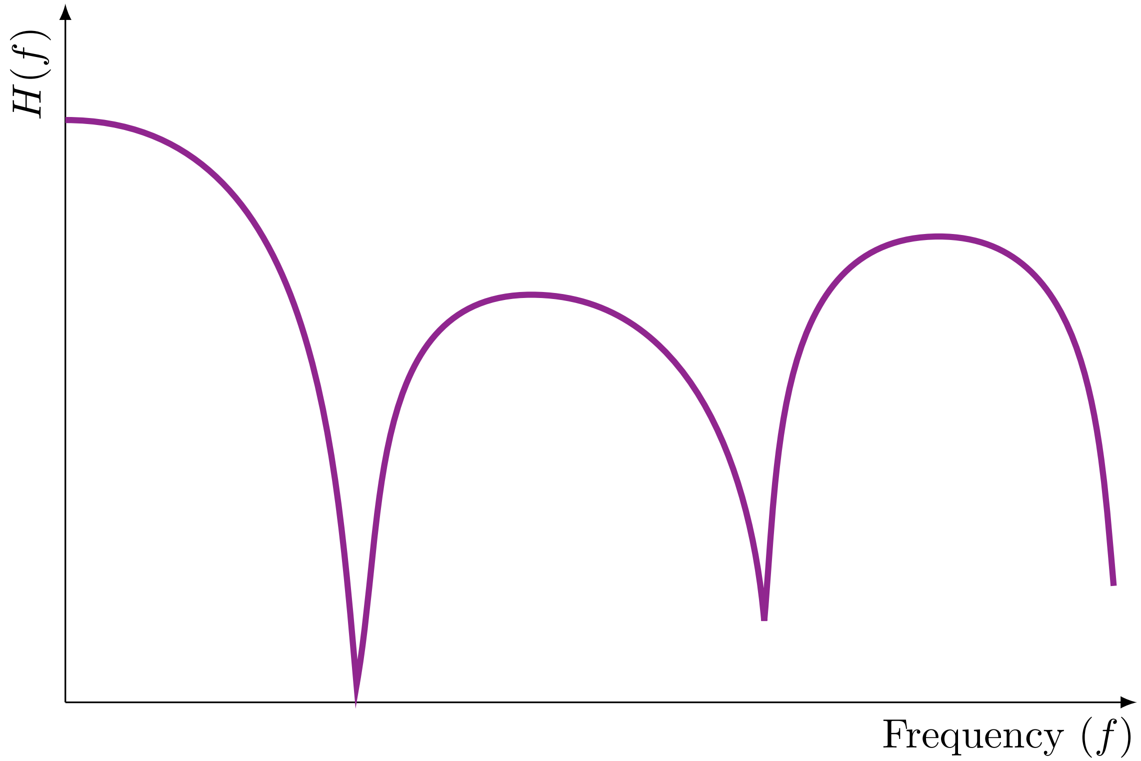
$$y(t) = \alpha_0 x(t-\tau_0) + \alpha_1 x(t-\tau_1) + \ldots + \alpha_N x(t-\tau_N), \quad \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_N$$



✍ اما با آمدن پدیده چندمسیری به میدان، با رابطه زیر سروکار داریم:

$$y(t) = \alpha_0 x(t-\tau_0) + \alpha_1 x(t-\tau_1) + \ldots + \alpha_N x(t-\tau_N), \qquad \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_N$$

$$h(t) = \alpha_0 \delta(t-\tau_0) + \alpha_1 \delta(t-\tau_1) + \ldots + \alpha_N \delta(t-\tau_N)$$



سیگنال $x(t)$ وارد کانال می‌شود، در صورتی‌که کانال ایده‌آل باشد (بدون وجود اثر چندمسیری)، انتظار داریم $h(t)=\alpha_0\delta(t-\tau_0)$ باشد. در این حالت تنها یک نسخه تضعیف‌شده و با تاخیر سیگنال بدست گیرنده خواهد رسید، یعنی

$$y(t)=x(t)*h(t)=x(t)*\alpha_0\delta(t-\tau_0)=\alpha_0 x(t-\tau_0)$$

در این حالت اگر به حوزه فرکانس $h(t)$ به عنوان پاسخ ضربه کانال نگاهی بیاندازیم، خواهیم دید که با یک خط صاف مواجه هستیم. در این حالت سیگنال با هر پهنای‌باندی، در هر فرکانس یک اثر یکسان از کانال تجربه می‌کند. اما با آمدن پدیده چندمسیری به میدان، با رابطه زیر سروکار داریم:

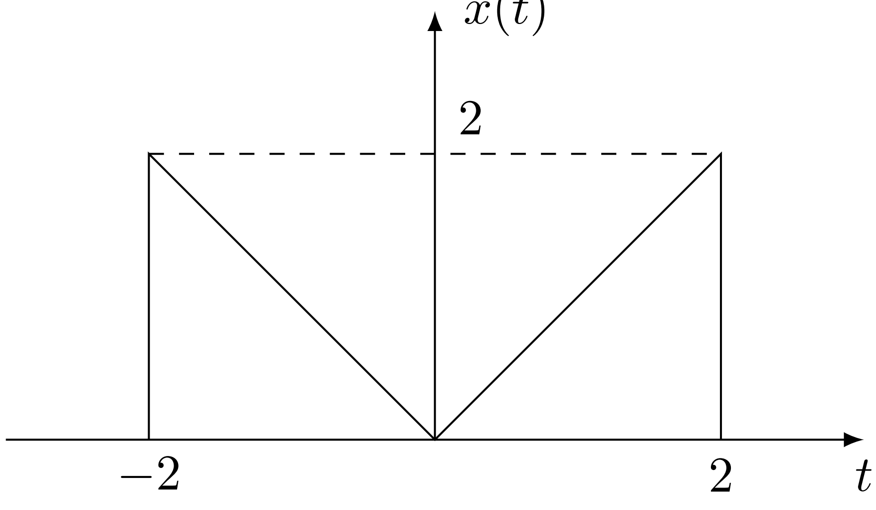
$$y(t)=\alpha_0 x(t-\tau_0)+\alpha_1 x(t-\tau_1)+\ldots+\alpha_N x(t-\tau_N), \quad \tau_0<\tau_1<\ldots<\tau_N$$

$$h(t)=\alpha_0\delta(t-\tau_0)+\alpha_1\delta(t-\tau_1)+\ldots+\alpha_N\delta(t-\tau_N)$$

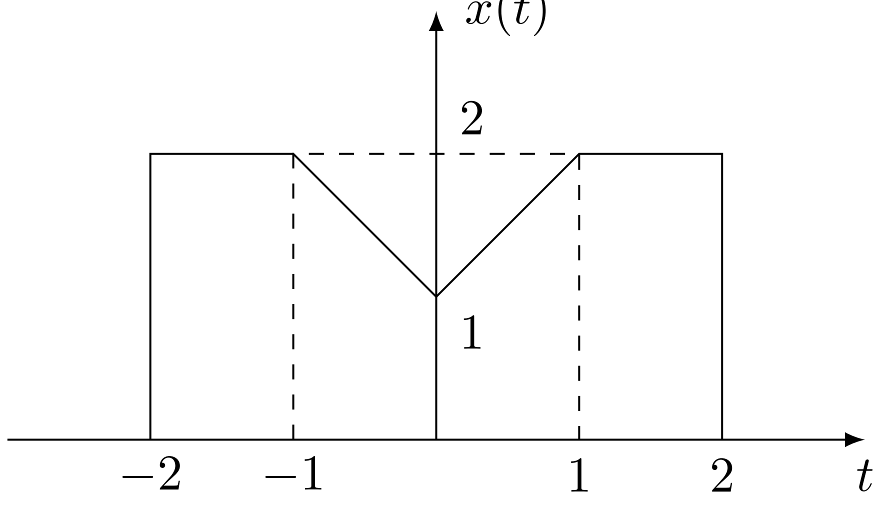
در این حالت پاسخ ضربه کانال، به مانند شکلی است که در اسلاید قبلی مشاهده کردید. در این حالت دیگر همه فرکانس‌ها به یک میزان تحت تاثیر قرار نمی‌گیرند.

تمرین اول

سوال اول: تبدیل فوریه سیگنال‌های نشان داده شده در شکل زیر را بدست آورید. راهنمایی: نیازی نیست سراغ انتگرال‌های سخت تبدیل فوریه بروید، کافی است از ویژگی‌های تبدیل فوریه استفاده کنید.



(a)



(b)

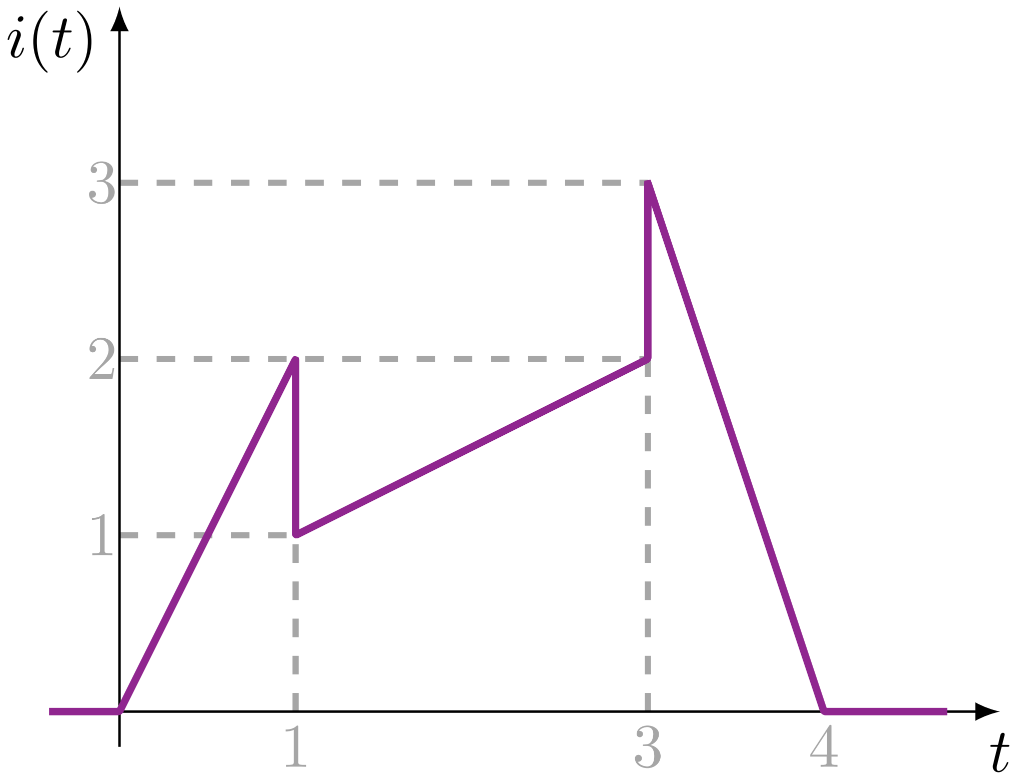
سوال دوم: تبدیل فوریه تابع $4\Lambda\left(-2t+3\right)+\mathrm{sinc}(2t-3)$ را با استفاده از ویژگی‌های تبدیل فوریه بدست آورید؟

سوال سوم: فرض کنید که ورودی یک سامانه به صورت $x(t) = e^{-3t}u(t)$ و تابع پاسخ ضربه سامانه مذکور نیز برابر $h(t) = \mathrm{rect}(4t+6)$ است. مطلوب است محاسبه $y(t)$؟

سوال چهارم: کدام یک از سیگنال‌های زیر انرژی، توان و یا نه انرژی و نه توان است؟

$$x_1(t) = \tan(\pi t + \tfrac{\pi}{4}),\ x_2(t) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\delta(t-4k),\ x_3(t) = e^{3\pi jt}.$$

سوال پنجم: سیگنال $i(t)$ را برحسب توابع $u(t)$ و $r(t)$ توصیف کنید؟ سپس مشتق سیگنال مذکور را بدست آورید؟ راهنمایی: تابع $r(t) = tu(t)$.



سوال ششم: با استفاده از ویژگی‌های تبدیل فوریه نشان دهید که تبدیل فوریه یک سیگنال حقیقی و زوج یک سیگنال حقیقی و زوج است؟

سوال هفتم: اثبات کنید که

$$x(t) * \delta(t-\tau) = x(t-\tau)$$

پروژه اول

در این پروژه از شما خواسته شده است که یک فایل تصویری را وارد نرم‌افزار MATLAB کرده، به آن نویز اضافه کنید، و سپس تلاش کنید تا نویز را حذف کنید. بدین‌سان گام‌های زیر را برای اجرای این پروژه بردارید:

✍ **گام اول**: نرم‌افزار MATLAB را نصب بر روی سیستم‌عامل خود نصب کنید. دقت کنید که این نرم‌افزار را براحتی می‌توانید در انواع سیستم‌عامل‌ها از Windows گرفته تا Linux و macOS نصب کنید. سعی کنید نسخه جدید این نرم‌افزار را نصب کنید و یا حداقل نسخه MATLAB 2018b.

✍ **گام دوم**: یک تصویر به صورت رنگی را وارد نرم‌افزار MATLAB کنید. دقت کنید که Help این نرم‌افزار واقعا کامل و جامع است. اما برای استفاده از Help آن به صورت برخط (Online) باید فیلترشکن نصب کنید و یا از شکن استفاده کنید. به عنوان مثال این صفحه را نگاه کنید.

✍ **گام سوم**: فایل وارد شده را از دنیای RGB به یک فایل Gray-Scale 8 bit تبدیل کنید. دستور rgb2gray می‌تواند در این زمینه شما را یاری برساند.

نکته ۱ در این زمینه حتما تلاش کنید تا با انواع تصاویر و تفاوت‌های آن‌ها با یکدیگر آشنا شوید، به ویژه تصاویر از نوع RGB و تصاویر Gray-Scale 8 bit.

(آ) تصویر رنگی

(ب) تصویر خاکستری

✍ **گام چهارم**: با دستور imshow و imwrite سعی کنید تصویر Gray-Scale 8 bit تولید شده در گام قبلی را مشاهده و در کامپیوتر خود ذخیره کنید.

نکته ۲ اگر بخواهید این تصویر به صورت کامل و بدون هیچ‌گونه فشرده‌سازی با اتلاف در کامپیوتر شما ذخیره شود از چه فرمتی (.jpg, .png, .bmp, ...) باید استفاده کنید؟

✍ **گام پنجم**: تصویر rgb ذخیره شده را دوباره با دستور imread بخوانید و به یک تصویر خاکستری تبدیل کنید. این تصویر چه نوع سیگنالی است؟ سیگنال انرژی است یا توان؟ انرژی یا قدرت این سیگنال را بدست آورید. اگر کمی جستجو کنید پاسخ به این سوالات را خیلی راحت می‌توانید بیابید.

✍ **گام ششم**: سعی کنید به تصویر یک نویز گاوسی با میانگین صفر و پراش (Variance) دلخواه مثلا 0.01 اضافه کنید. برای این‌کار می‌توانید از دستور imnoise استفاده کنید. در ضمن میزان SNR (Signal Noise Ratio) تصویر را قبل و بعد از اضافه شدن نویز بدست آورید؟

نکته ۳ سعی کنید درک خوبی راجع به مفهوم SNR پیدا کنید.

(آ) تصویر خاکستری

(ب) تصویر نویزی شده

✍ **گام هفتم**: تصویر Gray-Scale 8 bit نویزی شده را به حوزه فرکانس برده و آن را نمایش دهید. به عنوان مثال برای همان تصویر قبلی براحتی من با استفاده از کد زیر حوزه فرکانس تصویر را رسم کردم.

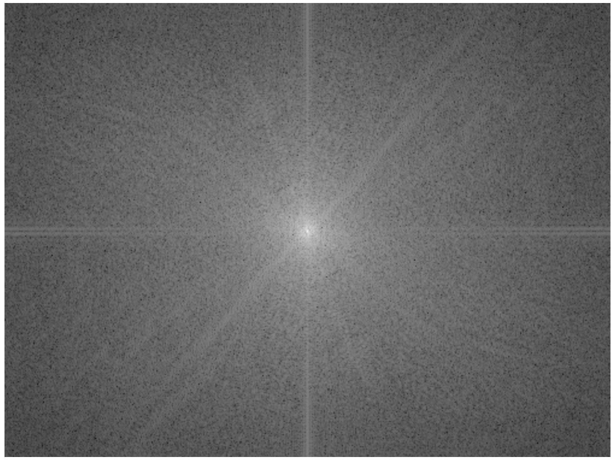
```
clc
clear

% Read an image
grayImage = rgb2gray(imread('rgb.png'));

% Frequency domain
ft = fftshift(log(abs(fft2(grayImage))));
imshow(ft, []);
```

نکته ۴ در این گام حتما باید با مفاهیمی به مانند تبدیل FFT (Fast Fourier Transform) آشنا شوید. باید بتوانیم عکس حاصل شده را توصیف کنید. مرکز تصویر چرا از همه نقاط دیگر نورانی‌تر است؟ چرا هرچه از مرکز دور می‌شویم نقاط کم‌نور تر می‌شوند؟ بالاترین و پایین‌ترین فرکانس‌ها در کدام بخش تصویر فرکانسی وجود دارد؟

(آ) تصویر خاکستری



(ب) تبدیل فوریه تصویر

✍ **گام هشتم**: روش‌های مختلفی برای حذف نویز از یک تصویر وجود دارد. در این تمرین از شما خواسته شده است با استفاده مفاهیمی که از حوزه فرکانس تصویر در می‌یابید و همچنین دانشی که در مورد نویز می‌دانید، سعی کنید تصویر نویزدار شده را رفع نویز کنید. با کمی جستجو در دنیای اینترنت مفاهیم و مطالب خوبی را راجع به این موضوع می‌توانید پیدا کنید.

نکته ۵ می‌توانید با یک معیار کمی نشان دهید چه چقدر در این روند خوب عمل کردید؟ مفهوم PSNR (Peak Signal to Noise Ratio) شاید در این زمینه بتواند به شما کمک کند.

✍ چند نکته تکمیلی:

- محتوای فایل‌های پروژه:

الف تصاویر rgb، grayscale، تصویر نویزی شده و همچنین تصویر بعد از حذف نویز

ب کدهای MATLAB

ج یک گزارش تفصیلی که در آن به تمامی سوالات مطرح شده پاسخ داده شده باشد.

- به کسانی که گزارش تحویلی آن‌ها با LaTeX باشد نمره اضافی تعلق می‌گیرد.
- حتما تصاویر انتخابی دانشجویان با یکدیگر متفاوت باشد.
- محل بارگذاری پروژه نیز در سایت `lms.iust.ac.ir` است.
- ممکن است پروژه تحویل برخط (Online) نیز داشته باشد.

مراجع

[1] S. T. Karris, A. V. Oppenheim, A. S. Willsky, and S. H. Nawab. *Signals and systems.* Prentice Hall, 1997.

فهرست اختصارات

A

F

L

LTI . . . . Linear Time Invariant

P

PSNR . . . . Peak Signal to Noise Ratio

Q

QoE . . . . Quality of Experience

S

SNR . . . . Signal Noise Ratio

U

UE . . . . User Equipment

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

A

Amplitude .... دامنه

B

Bandwidth .... پهنای‌باند

Broadcasting .... همه پخشی

C

Carrier Signal .... سیگنال حامل

Channel Impulse Response ... پاسخ ضربه کانال

Continuous Signal .... سیگنال پیوسته

D

Database .... پایگاه داده

Dependent Variable . . . . متغیر وابسته

Digital Signal . . . . سیگنال رقمی

Dirac Delta Function . . . . تابع دلتا دیراک

Discrete Signal . . . . سیگنال گسسته

I

Impulse Train . . . . قطار ضربه

Independent Variable . . . . متغیر مستقل

L

Low Pass Filter . . . . فیلتر پایین‌گذر

Lossy Compression . . . . فشرده‌سازی با اتلاف

M

Message . . . . پیام

Multipath . . . . چندمسیری

O

Online . . . برخط

Operating System . . . سیستم‌عامل

Operator . . . عملگر

P

Periodic Function . . . تابع متناوب

R

Received Power . . . توان دریافتی

S

Sampling . . . نمونه‌برداری

Serving Cell . . . سلول خدمتگزار

Strictly Decreasing . . . اکیدا نزولی

Strictly Increasing . . . اکیدا صعودی

T

Threshold . . . . آستانه

Time-invariant . . . . تغییرناپذیر با زمان

U

Unit Impulse Function . . . . تابع ضربه واحد

Unit Pulse Function . . . . تابع پالس واحد

Unit Step Function . . . . تابع پله واحد

V

Variance . . . . پراش

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

ا

آستانه . . . . Threshold

اکیدا صعودی . . . . Strictly Increasing

اکیدا نزولی . . . . Strictly Decreasing

ب

برخط . . . . Online

پ

پاسخ ضربه کانال . . . Channel Impulse Response

پایگاه داده . . . . Database

پراش . . . . Variance

پهنای‌باند . . . . Bandwidth

پیام . . . . Message

ت

تابع پالس واحد .... Unit Pulse Function

تابع پله واحد .... Unit Step Function

تابع دلتا دیراک .... Dirac Delta Function

تابع ضربه واحد .... Unit Impulse Function

تابع متناوب .... Periodic Function

تغییرناپذیر با زمان .... Time-invariant

توان دریافتی .... Received Power

چ

چندمسیری .... Multipath

د

دامنه .... Amplitude

س

سلول خدمتگزار .... Serving Cell

سیستم‌عامل .... Operating System

سیگنال پیوسته .... Continuous Signal

سیگنال حامل . . . . Carrier Signal

سیگنال رقمی . . . . Digital Signal

سیگنال گسسته . . . . Discrete Signal

ع

عملگر . . . . Operator

ف

فشرده‌سازی با اتلاف . . . . Lossy Compression

فیلتر پایین‌گذر . . . . Low Pass Filter

ق

قطار ضربه . . . . Impulse Train

م

متغیر مستقل . . . . Independent Variable

متغیر وابسته . . . . Dependent Variable

ن

ه