بسم الله الرحمن الرحیم

گذری بر احتمال

نسخه 2.0 - اردیبهشت ۱۴۰۲

فهرست مطالب

فهرست تصاویر

۱ مقدمات احتمال

۱.۱ تاریخچه

شانس و عدم‌قطعیت از دیرباز نقش بی‌بدیلی در زندگانی انسان‌ها ایفا می‌کرده. گرچه پیدایش رسمی علم احتمال به قرن هفدهم باز می‌گردد. پاسکال [۱] و فرما [۲] اولین کسانی هستند که مسایل مربوط به بازی‌های شانسی را مورد مطالعه قرار دادند و به همین دلیل به عنوان بنیان‌گذاران علم ریاضی احتمال لقب گرفته‌اند. در سال ۱۶۵۴ پاسکال تحت تأثیر یکی از دوستانش که به مسائل قمار و شرط بندی علاقه داشت، با فرما در این باب مکاتبه کرد و نتیجه آن مکاتبات عل احتمالات در ریاضی بود. مشکل وی این بود که دو بازیکن قمار که بازی را زودتر ترک می‌کنند، با توجه به وضعیت موجود بازی، می‌خواهند با توجه به شانسشان برای بردن بازی، سهام را عادلانه تقسیم کنند. از این مبحث نظر امید ریاضی [۳] بوجود آمد.

(آ) Blaise Pascal

(ب) Pierre de Fermat

(ج) Christiaan Huygens

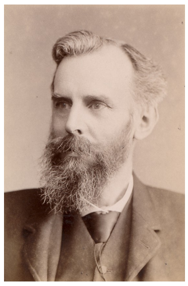
(د) Jacob Bernoulli

دانشمندانی از قبیل هویگنس [۴] کارهای این دو را ادامه داد. احتمالات نخستین نقطه اوج خود را در اثر کارهای برنولی [۵] به دست آورد. برنولی در کتاب مشهور خود به نام Ars Conjectandi، علاوه بر تعریف کلاسیک احتمال ریاضی، اساس خاصی از SLLN[6] و کاربردهای احتمال در آمارهای اجتماعی نیز کرد.

تعریف کلاسیک احتمال که توسط پاسکال در قرن ۱۷ بیان شد، این‌گونه بود که در یک آزمایش تصادفی، اگر تعداد کل نتایج برابر با N باشد، احتمال رخداد پیشامد A برابر است با:

$$\mathrm{P}(A) = \frac{N_A}{N} = \frac{\text{تعداد نتایج مطلوب}}{\text{تعداد حالت‌های هم‌شانس}} \qquad (۱.۱)$$

[1] Blaise Pascal
[2] Pierre de Fermat
[3] Expectation
[4] Christiaan Huygens
[5] Jacob Bernoulli
[6] strong law of large numbers


John Venn (آ)


Vonn Mises (ب)


Pierre-Simon Laplace (ج)


Thomas Bayes (د)

به نظر می‌رسد که این تعریف کار را در آن زمان راه می‌انداخت. اما به مرور زمان مشاهده شد که این تعریف در برخی مواقع با اشکال روبه‌رو می‌شود. یکی از اصلی‌تر ین مشکلاتی که از تفسیر کلاسیک احتمال ناشی می‌شود، تعبیر اصطلاح پیشامدهای هم‌شانس است. به عنوان مثال فرض کنید که دو سکه را پرتاب می‌کنیم. احتمال این‌که هر دو سکه شیر بیاید چقدر است؟ شاید شخصی این‌گونه تفسیر کند که به احتمال $\frac{1}{3}$ این رویداد رخ می‌دهد. چراکه سه حالت وجود دارد، یا هر دو شیر بیاید، یا هر دو خط و یا یکی شیر یکی خط. در این مثال روشن نبودن مفهوم هم‌شانس بودن پیشامدها مشکل‌ساز بود. برای حل این مشکلات، در سال ۱۸۸۶ یک ریاضی‌دان انگلیسی به نام جان ون [۷] تعریفی از احتمال مبتنی بر فراوان نسبی رخدادها مطرح کرد که بعدها به تعریف بسامدی از احتمال نامگذاری شد. میزز [۸] در سال ۱۹۲۸ این تعریف را گسترش داد. برطبق این تعریف، اگر آزمایش تصادفی را N بار انجام دهیم، برای N های بزرگ داریم:

$$\mathrm{P}(A) = \lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{N_A}{N} \tag{۲.۱}$$

به عبارت‌بهتر در رشته‌ای از حوادث که تعداد اعضایش N است، N_A بار رویداد A اتفاق افتاده باشد، در این صورت احتمال رخ‌دادن A برابر با $\frac{N_A}{N}$ است.

در قرن هجدهم متفکران بزرگی چون دی مور، دانیل برنولی [۹]، آلمبرت، اویلر، لاگرانژ، بیز [۱۰]، لاپلاس [۱۱] و گاوس قسمتی از وقت خود را به این علم جدید اختصاص دادند. بیز [۱۲] در سال ۱۷۶۳ قانون معروف بیز را ارایه می‌دهد و لاپلاس در نوشته‌ای تمام موضوع علم احتمال را جمع‌آوری می‌کند. مهم‌ترین قضایای حدی که در محاسبات احتمالی به کار می‌رفته و تاثیر احتمال در ریاضی، فیزیک، علوم طبیعی، آمار، فلسفه و جامعه‌شناسی در این اثر جمع‌آوری شده است.

اجازه دهید قبل از ادامه سخن، چند واژه در علم احتمال را به صورت دقیق‌تر تعریف کنیم. در علم احتمال ما همواره با یک آزمایش تصادفی سروکار داریم. فضای نمونه [۱۳] یک آزمایش تصادفی عبارت‌است از مجموعه کل نتایج ممکن برای آن آزمایش تصادفی. اجازه دهید از این به بعد ما نماد S را برای بیان فضای نمونه انتخاب کنیم. مثلا در آزمایش انداختن یک سکه فضای نمونه ما به صورت زیر خواهد شد:

$$S = \{H, T\}$$

[7] John Venn
[8] Von Mises
[9] Daniel Bernoulli
[10] ThomasBayes
[11] Pierre-Simon Laplace
[12] ThomasBayes
[13] Sample Space

و یا در پرتاب یک تاس و یک سکه، فضای نمونه مجموعه زیر خواهد بود:

$$S = \{(H,1),(H,2),(H,3),(H,4),(H,5),(H,6),(T,1),(T,2),(T,3),(T,4),(T,5),(T,6)\}$$

فضای نمونه می‌تواند مجموعه‌ای پیوسته یا گسسته باشد. دو مثال قبلی، نمونه‌هایی از فضای نمونه گسسته بود. اما مثلا در طول عمر یک عنصر الکترونیکی در مدار فضای نمونه به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$S = \{T : 0 \leq T < \infty\}$$

به هر زیرمجموعه‌ای از فضای نمونه، یک پیشامد[۱۴] گفته می‌شود، و به هر نتیجه یک آزمایش تصادفی، که عضوی از یک پیشامد است، اصطلاحا خروجی[۱۵] گفته می‌شود. مثلا در پرتاب یک تاس، فضای نمونه به صورت زیر تشکیل می‌شود:

$$S = \{1,2,3,4,5,6\}$$

پیشامد A هنگامی رخ می‌دهد که عدد آمده، زوج باشد. پس A به صورت زیر تعیین می‌شود.

$$S = \{2,4,6\}$$

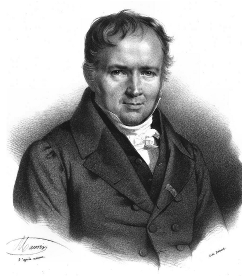
و پیشامد B را بدین‌صورت تعیین می‌کنیم که عدد آمده کمتر از ۵ باشد. اکنون فرض کنید که تاس را می‌اندازیم و عدد ۴ می‌آید، در این حالت گفته می‌شود که خروجی 4 شده است و بدین‌سان پیشامد A و B روی داده است. یعنی با رخداد یک خروجی ممکن است چندین پیشامد به صورت همزمان روی دهد.

تعریف ۱.۱ S را پیشامد حتمی[۱۶] می‌گوییم، چراکه نتیجه آزمایش تصادفی مسلما عضوی از S است. همچنین ϕ را پیشامد خنثی[۱۷] یا پیشامد ناممکن می‌گوییم.

تعریف ۲.۱ دو پیشامد در فضای نمونه S را ناسازگار[۱۸] گوییم، هرگاه اشتراک آن‌ها تهی باشد، و یا به عبارت‌بهتر رخدادن همزمان آن‌ها محال است. به عنوان مثال اگر پیشامد A زوج آمدن اعداد بر روی یک تاس باشد، و B فرد آمدن آن، آن‌گاه این دو ناسازگار هستند.

کولوموگروف[۱۹] در سال ۱۹۹۳ تعریفی از احتمال را مبتنی بر نظریه اندازه‌گیری ارایه داد. در این تعریف به هر واقعه عددی که احتمال آن واقعه نامیده می‌شود تخصیص داده می‌شد، که این عدد می‌بایست در اصول موضوعه سه‌گانه کولوموگروف صدق می‌کرد.

[14] Event
[15] Outcome
[16] Sure Event
[17] Null Event
[18] Disjoint
[19]



Simeon Poisson (آ)

Vonn Mises (ب)

Augustus De Morgan (ج)

Daniel Bernoulli (د)

تمام آن‌چه که به نام علم احتمال می‌شناسیم، از این اصول سه‌گانه قابل استنتاج است. اگر عدد نسبت داده شده به عنوان احتمال رویداد A را با $\mathrm{P}(A)$ نشان دهیم، آن‌گاه اصول سه‌گانه احتمال به صورت زیر بیان می‌شود:

- $\mathrm{P}(A)$ همواره عددی است بزرگتر و یا مساوی صفر، یعنی $\mathrm{P}(A) \geq 0$.
- احتمال پیشامد حتمی[۲۰] برابر با یک است $\mathrm{P}(S) = 1$.
- اگر A و B دو پیشامد ناسازگار[۲۱] باشد، آن‌گاه داریم:

$$\mathrm{P}(A + B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B).$$

با مرگ لاپلاس در سال ۱۸۷۲ اوج پیشرفت این علم به اتمام رسید و علی‌رغم برخی تلاش‌های فردی که ماحصل آن‌ها کشف قضایایی چون قضیه اعداد بزرگ پواسون و یا نظریه خطاهای گاوس بود، به طور کلی احتمال کلاسیک ارتباط خود را با مسایل تجربی و علمی از دست می‌دهد. اما جریان های متقابل ظاهر می‌شوند. به موازات پیشرفت نظریه ریاضی یک نظریه آمار به عنوان کاربردهایی از احتمال به وجود می‌آید. این نظریه در رابطه با مسایل مهم اجتماعی از قبیل اداره داده‌های آماری، مطالعه جمعیت و مسایل بیمه به کار می‌رفته است. اساس کار توسط افرادی چون کوتلت و لکسیز ریخته شده و توسط دانشمندانی چون فشنر (روانشناس)، تیله و برانز (منجم)، گالتون و پیرسون (زیست‌شناس) پیشرفت نموده است. این کارها در اواخر قرن نوزدهم در جریان بوده و در انگلستان و برخی دیگر از کشورها حرفه حسابگری، به مفهوم آماردانی که از اقتصاد و ریاضی هم اطلاعاتی دارد و در جمعیت‌شناسی و بیمه خبره می‌شود، رونق می‌یابد. از طرف دیگر فرمول‌های کلاسیک ایده‌های احتمال میز مسیر پیشرفت و کاربردی خود را ادامه می دادند. در این قرن در تلاش برای روشن‌سازی پایه منطقی کاربردهای احتمال، وان میزز یک فرمول‌بندی جدید برای محاسبات احتمالی ارایه می‌دهد که نه تنها از نظر منطقی سازگار بوده بلکه نظریه ریاضی و تجربی پدیده‌های آماری در علوم فیزیکی و اجتماعی را پایه گذاری می‌کند.

۲.۱ قضایای مستخرج از اصول کولوموگروف

[20] Sure Event

[21] Disjoint

قضیه ۱.۱

احتمال رخداد پیشامد خنثی یا پیشامد ناممکن برابر با صفر است، یعنی:

$$P(\phi) = 0 \tag{۳.۱}$$

اثبات.

■

قضیه ۲.۱

احتمال مکمل یک پیشامد برابر است با

$$P(A^c) = 1 - P(A) \tag{۴.۱}$$

اثبات.

■

قضیه ۳.۱

احتمال هر پیشامد مقداری است بین صفر تا یک.

$$0 \leq P(A) \leq 1 \tag{۵.۱}$$

اثبات.

■

قضیه ۴.۱

اگر $A \subseteq B$ باشد، آن‌گاه داریم:

$$P(B) \leq P(A) \tag{۶.۱}$$

اثبات.

■

قضیه ۵.۱

در حالت کلی احتمال اجتماع دو پیشامد به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B) \qquad (۷.۱)$$

اثبات. ■

۳.۱ سوالات مربوط به آنالیز ترکیبی

مثال ۱.۱ فرض کنید شما برای انجام کاری، در بیرون از خانه هستید و مجبورید ناهار خود را از بیرون تهیه کنید. در اطراف شما یک رستوران ایرانی با ۵ نوع غذا و یک فست‌فود با ۳ نوع غذا وجود دارد. شما به چند طریق می‌توانید غذای امروز خود را تهیه کنید؟

پاسخ: برطبق اصل جمع به هشت طریق می‌توانید.

نکته ۱.۱ اصل جمع: اگر کاری را بتوان به m طریق و کار دیگری را بتوان به n طریق انجام داد، و اگر این دو کار را نتوان همزمان انجام داد، آنگاه این یا آنگاه را می‌توان به $m+n$ طریق انجام داد.

مثال ۲.۱ اگر یک سکه را ۱۰ بار پرتاب کنیم، احتمال این‌که حداکثر ۳ بار شیر بیاید چقدر است؟

پاسخ:

برطبق تعریف احتمال می‌بایست تعداد رخدادهای مطوب را بر کل رخدادها تقسیم کنیم. در ۱۰ بار پرتاب یک سکه، تعداد کل حالات ممکنه برابر با 2^{10} خواهد بود. از سوی دیگر منظور از این‌که حداکثر سه بار شیر بیاید، یعنی یا هیچ بار شیر نیاید، یا یک بار، یا دو بار و در نهایت یا سه بار. در این‌جا کافی است که تعداد حالت را برای هر یک از چهار حالت بیان شده، محاسبه کنیم، پس خواهیم داشت:

$$\mathrm{P}(A) = \frac{\binom{10}{0} + \binom{10}{1} + \binom{10}{2} + \binom{10}{3}}{2^{10}}$$

مثال ۳.۱ چند عدد ۲ رقمی زوج با ارقام متمایز داریم؟

پاسخ:

مساله را به دو قسمت تقسیم می‌کنیم، رقم یکان صفر باشد، در این حالت رقم دهگان ۹ حالت دارد. در حالت دوم رقم یکان صفر نباشد، در این حالت رقم یکان ۴ حالت دارد و رقم دهگان ۸ حالت دارد. پس با استفاده از اصل ضرب تعداد این اعداد برابر با $8 \times 4 = 32$ خواهد بود. برطبق اصل جمع نیز پاسخ کلی برابر با 41 خواهد بود.

نکته ۲.۱ اصل‌ضرب: اگر عملی به دو مرحله اول و دوم تقسیم شود و اگر در مرحله اول m نتیجه ممکن و برای هر یک از این نتایج، n نتیجه ممکن در مرحله دوم وجود داشته باشد، آنگاه کل عمل نامبرده می‌تواند با ترتیب یاد شده، به mn طریق انجام شود. گاهی این قاعده را اصل انتخاب نیز می‌نامند.

مثال ۴.۱ چه تعداد عدد پنج‌رقمی وجود دارد که در آن دقیقا یک رقم ۳ وجود داشته‌باشد؟

پاسخ:

مساله را با استفاده از اصل جمع و در دو حالت محاسبه می‌کنیم. فرض کنید رقم اول از سمت چپ عدد سه باشد، آن‌گاه تعداد کل ارقام دارای تنها یک رقم سه برابر با 9^4 خواهد بود. از سوی دیگر اگر رقم اول از سمت چپ، سه نباشد، آن‌گاه تعداد ابتدا باید یک جایگاه برای رقم سه پیدا نمود که می‌شود، چهار جایگاه، سپس از میان ارقام باقی‌مانده باید جایگاه‌های دیگر را پر نمود. اما به این نکته دقت کنید که رقم اول از سمت چپ نمی‌تواند صفر باشد، پس در این حالت تعداد کل حالات برابر با $4 \times 8 \times 9^3$ خواهد بود.
جواب نهایی طبق اصل جمع: $4 \times 8 \times 9^3 + 9^4$.

مثال ۵.۱ هفت توپ سفید و سه توپ قرمز داریم. به چند طریق می‌توان این ۱۰ توپ را در ۱۰ جعبه قرار داد؟

پاسخ:

دقت کنید که در این حالت توپ‌های سفید از یکدیگر متمایز نیستند، و همین‌طور توپ‌های قرمز نیز از همدیگر متمایز نیستند، ولی جعبه‌ها متمایز هستند. در واقع می‌توان مساله را بدین‌گونه نگاه کرد که چگونه می‌توان سه جعبه را برای قرار گرفتن توپ‌های قرمز انتخاب کنید، پر واضح است که در مابقی جعبه‌ها توپ‌های سفید واقع خواهد شد. پس پاسخ $120 = \binom{10}{7} = \binom{10}{3}$.

مثال ۶.۱ چه تعداد اعداد باینری N بیتی داریم که m رقم یک و $N-m$ رقم صفر داشته‌باشند؟ با فرض تکرار ارقام و بدون تکرار ارقام.

پاسخ: اگر تکرار مجاز باشد، با توجه به سوال قبل پاسخ واضح است، و پاسخ برابر با $\binom{N}{m}$ خواهد شد. اما اگر تکرار مجاز باشد، به جای ترکیب[22]، می‌بایست از جایگشت[23] استفاده کنیم.

[22] Combination
[23] Permutation

نکته ۳.۱ در حالت کلی اگر N شی داشته‌باشیم که آن‌ها را به دو گروه متمایز m تایی و $N-m$ تایی تقسیم‌بندی کنیم، با این فرض که اعضای هر گروه با یکدیگر مشابه هستند، تعداد حالت‌های قرار دادن این N شی در N جعبه (یا به خط کردن آن‌ها) برابر با $\binom{N}{m}$ خواهد بود.

مثال ۷.۱ هفت توپ سفید، سه توپ قرمز و پنج توپ آبی داریم. به چند طریق می‌توان این ۱۵ توپ را در ۱۵ جعبه قرار داد؟

پاسخ:

این سوال نیز مشابه سوال قبل است با این تفاوت که این بار باید توپ‌ها را در سه گروه تقسیم‌بندی کنیم. می‌توان این‌گونه در نظر گرفت که ابتدا از ۱۵ جعبه، پنج جایگاه را برای توپ‌های آبی در نظر می‌گیریم. از ۱۰ جعبه باقیمانده، سه جایگاه برای قرمز و مابقی نیز برای توپ‌های سفید باقی خواهد ماند. پس خواهیم داشت: $\binom{15}{5,3,7} = \binom{15}{5}\binom{10}{3}\binom{7}{7}$

مثالی که ذکر شد، نمونه‌ای از ترکیب تعمیم‌یافته است. در ترکیب ساده، ما می‌خواهیم از بین N شی متمایز تا k را انتخاب کنیم، در واقع N شی را به دو گروه k تایی و $N-k$ تایی تقسیم‌بندی کنیم، تعداد حالت‌های این کار را می‌توان به صورت

$$C_k^N = \binom{N}{k} = \frac{N!}{(N-k)!k!}$$

حال اگر N شی داشته‌باشیم و بخواهیم آن‌ها را به r گروه A_1، A_2 تا A_r که به ترتیب m_1، m_2 تا m_r عضو دارید به قسمی که $m_1 + m_2 + \ldots + m_r = N$. تعداد حالات ممکن برابر است با:

$$\binom{N}{m_1, m_2, \ldots, m_r} = \frac{N!}{m_1!m_2!\ldots m_r!}.$$

اثبات این موضوع نیز ساده است، کافی است ابتدا کل N شی را در نظر بگیرید، از این تعداد m_1 شی انتخاب می‌کنیم. از $N-m_1$ شی باقیمانده m_2 شی انتخاب می‌کنیم، و همین‌طور الی آخر. پس داریم:

$$\binom{N}{m_1, m_2, \ldots, m_r} = \binom{N}{m_1}\binom{N-m_1}{m_2}\binom{N-m_1-m_2}{m_3}\ldots\binom{N-m_1-_m 2-\ldots-m_{r-1}}{m_r} = \frac{N!}{m_1!m_2!\ldots m_r!}.$$

نکته ۴.۱ در سوالی که ذکر شد، اشیا مشابه بودند، اما چون گروه‌ها و جعبه‌ها متمایز بودند، به مانند این است که خود اشیا متمایز باشند.

مثال ۸.۱ اگر N شی مشابه داشته‌باشیم، به چند حالت می‌توان آن را در k جعبه متمایز قرار داد؟

پاسخ:

پاسخ این سوال در کلاس داده شد. این مساله بدین صورت است که N شکل مشابه را در یک ردیف کنار همدیگر می‌چینیم، و می‌خواهیم در بین آن‌ها تعدادی جداساز قرار دهیم. دقت کنید که ما برای تقسیم‌بندی این N شی در k جعبه تنها کافی است $k-1$ جداساز در میان آن‌ها قرار دهیم. اگر اشیا را با • نشان دهیم و جداسازها را با |، برخی از حالت‌های ممکن برای $N=5$ و $k=3$ در ادامه ذکر شده است:

•|••|••

••||•••

•|•••|•

|•••|••

•••••||

••|•|••

|•|••••

با کمی فکر کردن می‌توانید به این نتیجه برسید که این مساله به مانند آن است که دو گروه داریم، یک گروه N تایی و یک گروه $k-1$ تایی که اعضای هر گروه با یکدیگر مشابه هستند، اکنون می‌خواهیم این‌ها را در $N+k-1$ جایگاه کنار هم بچینیم. تعداد حالت‌ها را می‌توان از ترکیب براحتی بدست آورد، پس خواهیم داشت: $\binom{N+k-1}{N} = \binom{N+k-1}{k-1}$.

نکته ۵.۱ در حالت کلی، اگر بخواهیم N شی مشابه را در k ظرف متمایز بچینیم، به طوری که هیچ محدودیتی در مورد نحوه چیدمان نداشته‌باشیم، به $\binom{N+k-1}{N} = \binom{N+k-1}{k-1}$ طریق می‌توان این کار را انجام داد.

مثال ۹.۱ تعداد ۱۵ تخته سیاه مشابه داریم. به چند طریق می‌توان این ۱۵ تخته سیاه را بین ۵ مدرسه تقسیم کرد، به شرطی که به هر مدرسه حداقل یک تخته سیاه برسد؟

پاسخ:

این سوال را نیز می‌توان باتوجه به سوال قبلی حل نمود. فقط چون در سوال گفته شده است که به هر مدرسه حداقل یک تخته سیاه داده شود، ابتدا یک تخته سیاه به هر مدرسه می‌دهیم. سپس می‌ماند ۱۰ تخته سیاه که می‌بایست بین ۵ مدرسه تقسیم شود.

باز نیز دقت کنید، اشیا در این جا مشابه هستند و می‌خواهیم ۱۰ شی مشابه را در ۵ جایگاه (مدرسه) متمایز تقسیم کنیم، پس خواهیم داشت: $\binom{10+5-1}{5-1}=\binom{14}{4}$.

مثال ۱۰.۱ تعداد جواب‌های معادله $x+y+z=15$ را در مجموعه اعداد صحیح و نامنفی با شرایط $x\leq 3$ و $y\leq 4$ را بیابید؟

پاسخ:

قبل از حل این سوال این مورد را یادآوری می‌کنم که اگر معادله‌ای به صورت زیر داشته‌باشیم،

$$x_1+x_2+x_3+\ldots+x_k=N, \tag{۸.۱}$$

آن‌گاه تعداد جواب‌های این معادله در مجموعه اعداد صحیح و نامنفی، برابر است با $\binom{N+k-1}{N}=\binom{N+k-1}{k-1}$. چراکه واضح است که در این‌جا نیز می‌خواهیم N شی مشابه را در k ظرف متمایز بچینیم. برای این سوال نیز اگر فرض خاصی در نظر گرفته نمی‌شد، تعداد جواب‌های معادله مذکور برابر با $\binom{15+3-1}{3-1}$ بود. برای حل سوال مذکور با فرض‌های ذکر شده، کافی است که ابتدا حالت متمم آن‌را در نظر بگیریم، یعنی این که تعداد جواب‌های معادله $x+y+z=15$ را در مجموعه اعداد صحیح و نامنفی با شرایط $x\geq 4$ و $y\geq 5$. برای یافتن تعداد جواب‌های این معادله کافی مثل سوال تخته سیاه‌ها عمل کنیم، یعنی ابتدا ۴ تا ۱۵ را به x بدهیم و ۵ تا از ۱۵ را نیز به y می ماند ۶ شی که باید در سه گروه تقسیم‌بندی شود، که جواب خواهد بود: $\binom{6+3-1}{3-1}$. در نهایت نیز بر طبق اصل متمم داریم: $\binom{15+3-1}{3-1}-\binom{6+3-1}{3-1}$.

مثال ۱۱.۱ تعداد عبارت‌های $(a+b+c+d)^{10}$؟

پاسخ:

می‌دانیم که هر عبارت تجزیه $(a+b+c+d)^{10}$ به صورت $a^xb^yc^zd^w$ است، به‌گونه‌ای که $x+y+z+w=10$. با بیان این نکته حل این سوال ساده به نظر می‌رسد.

مثال ۱۲.۱ رابطه زیر را در نظر بگیرید:

$$\sum_{k=1}^{N}k\binom{N}{k}=N2^{N-1}$$

با استفاده از یک مثال ترکیبیاتی نشان دهید که این رابطه درست است.

پاسخ:

فرض کنید که تمام زیرمجموعه‌های مجموعه $\{1,2,\ldots,n\}$ را در اختیار داریم، می‌خواهیم حاصل جمع اندازه تمامی این زیر مجموعه‌ها را از دو روش محاسبه کنیم. مثلا فرض کنید مجموعه ما $\{1,2\}$ است، تمام زیر مجموعه‌های آن عبارت‌اند از $\phi,\{1\},\{2\},\{1,2\}$ که حاصل جمع اندازه تمام زیرمجموعه‌های مجموعه یاد شده برابر است با $0+1+1+2=4$.

در روش نخست، می‌دانیم که در مجموعه‌ی تمام زیرمجموعه‌ها تعداد $\binom{N}{k}$ زیرمجموعه با اندازه k وجود دارد، به همین‌دلیل حاصل‌جمع اندازه تمام زیرمجموعه‌ها به صورت $\sum_{k=1}^{N} k\binom{N}{k}$ حاصل خواهد شد. از سوی دیگر، می‌توان این مقدار را به یک روش دیگر نیز محاسبه نمود. براحتی می‌توانید دریابید که هر عنصر در 2^{N-1} زیر مجموعه قرار دارد، و چون مجموعه ما تعداد N عنصر دارد، پس خواهیم داشت، $N2^{N-1}$. اثبات این‌که هر عنصر در 2^{N-1} زیرمجموعه قرار دارد نیز کار ساده‌ای است. کافی است که از مجموعه N عضوی یک عضو مشخص را کنار بگذارید. اکنون مجموعه ما به یک مجموعه $N-1$ عضوی تبدیل شده است که تعداد 2^{N-1} زیرمجموعه دارد. در تمامی این 2^{N-1} عنصر مشخص ما حضور ندارد و در ضمن تمامی زیرمجموعه‌های این مجموعه $N-1$عضوی زیرمجموعه مجموعه اصلی نیز هست. اکنون عضو مورد نظر را به تمامی 2^{N-1} اضافه کنید و در این صورت 2^{N-1} زیرمجموعه جدید خواهید داشت. در ضمن می‌دانید که تعداد کل زیرمجموعه‌های یک مجموعه N عضوی برابر با 2^N است. پس می‌توان نتیجه گرفت که عنصر موردنظر در دقیقا 2^{N-1} زیرمجموعه قرار دارد.

مثال ۱۳.۱ رابطه زیر را با استفاده از یک مثال ترکیبیاتی اثبات کنید:

$$\binom{N}{r}\binom{r}{k} = \binom{N}{k}\binom{N-k}{r-k}$$

پاسخ:

می‌دانیم که $\binom{N}{r}$ برابر است با تعداد حالت‌های انتخاب r شی از میان N شی. اکنون فرض‌کنید ابتدا می‌خواهیم از بین N دانشجو تعداد r نفر را انتخاب کنیم و از بین r دانشجوی انتخاب شده، تعداد k نفر را برای یک کار مشخص برگزینیم. واضح است که بر اساس اصل ضرب تعداد این حالت‌های انتخاب برابر با $\binom{N}{r}\binom{r}{k}$ خواهد شد. به این مساله به صورت دیگری نیز می‌توان نگاه کرد. فرض کنید این‌بار ابتدا k نفر را از N نفر بر می‌گزینیم. در ادامه از بین $N-k$ نفر باقیمانده $r-k$ نفر را انتخاب می‌کنیم، چرا که قرار بود در کل r نفر را انتخاب کنیم. تعداد کل این حالت‌ها نیز برابر با $\binom{N}{k}\binom{N-k}{r-k}$ خواهد شد. پرواضح است که با توجه به معادل بودن روش‌های حل، دو عبارت بدست‌آمده می‌بایست با یکدیگر مساوی باشند.

مثال ۱۴.۱ رابطه زیر را با استفاده از یک مثال ترکیبیاتی اثبات کنید:

$$k\binom{N}{k} = N\binom{N-1}{k-1}$$

پاسخ:

این رابطه نیز به مانند مثال قبل است، یعنی می‌خواهیم از بین N دانشجو تعداد k دانشجو را انتخاب کنیم و آن‌گاه از بین k نفر انتخاب شده یکی را به عنوان رییس برگزینیم، یعنی در این حالت $r=1$ است.

مثال ۱۵.۱ رابطه زیر را با استفاده از یک مثال ترکیبیاتی اثبات کنید:

$$\binom{N}{k} = \binom{N-1}{k} + \binom{N-1}{k-1}$$

پاسخ:

تعداد حالت‌های انتخاب k شی از N شی برابر است با $\binom{N}{k}$. از سوی دیگر می‌توان این کار را به صورت دیگری نیز انجام داد. فرض کنید یک شی مشخص را کنار می‌گزینم. آن‌گاه دو حالت داریم، یا شی مورد نظر در انتخاب ما وجود دارد یا وجود ندارد. اگر وجود دارد که می‌بایست از $N-1$ عنصر باقیمانده تعداد $k-1$ شی دیگر را برگزینیم، اما اگر در انتخاب ما وجود ندارد، می‌بایست از $N-1$ عنصر باقیمانده تعداد k شی را انتخاب کنیم.

مثال ۱۶.۱ رابطه زیر را با استفاده از یک مثال ترکیبیاتی اثبات کنید:

$$\sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} = 2^N$$

پاسخ:

می‌دانیم که یک مجموعه N عضوی تعداد 2^{N-1} زیرمجموعه دارد. از سوی دیگر تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه را نیز می‌توان به صورت دیگری محاسبه کرد. می‌دانیم که تعداد زیرمجموعه‌های k عضوی از یک مجموعه N عضوی برابر با $\binom{N}{k}$ است. اکنون یا زیرمجموعه‌های ما صفر عضو (مجموعه تهی)، یا یک عضوی، یا دوعضوی و ... هستند. حاصل‌جمع تمام این زیرمجموعه‌ها برابر است با تعداد کل زیرمجموعه‌ها.

مثال ۱۷.۱ رابطه زیر را با استفاده از یک مثال ترکیبیاتی اثبات کنید:

$$\binom{m+n}{r} = \sum_{k=0}^{r} \binom{m}{k}\binom{n}{r-k}$$

پاسخ:

اثبات این رابطه نیز ساده به نظر می‌رسد، فرض کنید تعداد $m+n$ شی داریم که می‌خواهیم از آن r شی را انتخاب کنیم. واضح است که تعداد کل حالت‌ها برابر است با $\binom{m+n}{r}$. از سوی دیگر یک راه دیگر این است که این $m+n$ شی را به دو گروه m شی و n شی تقسیم‌بندی کنیم. برای انتخاب r شی می‌توان کل آن را از گروه اول انتخاب کرد. می‌توان یکی را از گروه دوم و مابقی را از گروه اول انتخاب کرد. یا این‌که دو تا را از گروه دوم انتخاب کرد و مابقی را از گروه اول. حاصل‌جمع تمامی این‌حالت‌ها برابر است با $\sum_{k=0}^{r} \binom{m}{k}\binom{n}{r-k}$.

مثال ۱۸.۱ رابطه زیر را با استفاده از یک مثال ترکیبیاتی اثبات کنید:

$$\binom{n}{0}^2+\binom{n}{1}^2+\binom{n}{2}^2+\ldots+\binom{n}{n}^2=\binom{2n}{n}$$

پاسخ:

این مورد را نیز به راحتی با استفاده از سوال قبلی می‌توانید پاسخ دهید، فقط دقت کنید که در این حالت $m=n$ است و همچنین $\binom{n}{k}\binom{n}{n-k}=\binom{n}{k}^2$.

مثال ۱۹.۱ رابطه زیر را با استفاده از یک مثال ترکیبیاتی اثبات کنید:

$$\sum_{i=k}^{n}\binom{i}{k}=\binom{n+1}{k+1}$$

پاسخ:

این رابطه به Hockey-stick identity مشهور است. فرض کنید که اعداد یک تا $n+1$ را بر روی $n+1$ کارت نوشته‌ایم و به شما گفته‌ایم که $k+1$ تا این کارت‌ها را بردارید. پرواضح است که این کار را می‌توان به $\binom{n+1}{k+1}$ حالت انجام داد. اما این مساله را می‌توان به صورت دیگری نیز حل کرد. بدین‌صورت که شما ابتدا یک عدد را انتخاب کنید، اجازه دهید این عدد را با i نشان دهیم. آن‌گاه هنوز شما باید k کارت دیگر بردارید. فرض کنیم که فقط این اجازه را دارید که این k کارت را از بین کارت‌های کوچکتر از i انتخاب کنید. پرواضح است که تعداد $\binom{i-1}{k}$ حالت وجود دارد. از سوی دیگر شماره‌ای که شما برمی‌دارید می‌تواند از یک تا n باشد. پس در حالت کلی تعداد حالات برابر خواهد بود با $\sum_{i=0}^{n}\binom{i}{k}$ و چون مقادیر کوچکتر از k برابر با صفر است، داریم $\sum_{i=k}^{n}\binom{i}{k}$.

مثال ۲۰.۱ با استفاده از یک مثال ترکیبیاتی نشان دهید که حاصل جمع اعداد از یک تا n برابر با $\binom{n+1}{2}$ است.

پاسخ:

این مثال را به سادگی با استفاده از مثال قبل می‌توانید حل کنید. فقط دقت کنید که در این حالت $k=1$ است.

مثال ۲۱.۱ رابطه زیر را با استفاده از یک مثال ترکیبیاتی اثبات کنید:

$$\binom{n+1}{r+1}=\sum_{k=r}^{n}\binom{k}{r}$$

پاسخ:

$\binom{n+1}{r+1}$ بیانگر تعداد دنباله‌های باینری به طول $n+1$ است که در آن تعداد $r+1$ یک وجود دارد. اکنون می‌توان همین مساله را به گونه‌ای دیگر حل نمود. آخرین یک (یعنی $r+1$ امین) از سمت راست در یک دنباله، را در نظر بگیرید. r یک قبلی یا در r بیت

اول از سمت چپ قرار دارد، یا در $r+1$ بیت اول از سمت چپ تا آخر. تعداد حالت‌های وجود r یک در k بیت اول سمت چپ، برابر با $\binom{k}{r}$ است، و طبق اصل جمع خواهیم داشت: $\sum_{k=r}^{n}\binom{k}{r}$.

مثال ۲۲.۱ به چند طریق می‌توان ۱۰ دختر و ۵ پسر را در یک ردیف چید؛ طوری که هیچ ۲ پسری کنار هم نباشند؟

پاسخ:

ابتدا اجازه دهید جای دخترها که بیشتر هستند را مشخص کنیم، ابتدا ۱۰ دختر را در یک ردیف قرار می‌دهیم، ۱۱ فضای خالی بین دخترها و در کنار آن‌ها وجود دارد، که پسرها می‌توانند در آن جایگاه‌ها قرار گیرند. در هر فضای خالی حداکثر می‌تواند یک پسر قرار گیرد، تا هیچ دو پسری در کنار همدیگر نباشد. پس به تعداد $\binom{11}{5}$ حالت می‌توان این کار را انجام داد. از سوی دیگر خود دخترها به تعداد $10!$ و پسرها به تعداد $5!$ می‌توانند بین همدیگر جابه‌جا شوند. پس در کل تعداد حالت‌ها برابر با $10!5!\binom{11}{5}$ خواهد شد.

مثال ۲۳.۱ $2N$ نفر داریم، به چند طریق آن‌ها را می‌توانی در N گروه متمایز دو نفره تقسیم کرد؟ اگر گروه‌ها متمایز نباشند چه طور؟

پاسخ:

گروه‌ها متمایز هستند. پس می‌توانیم آن‌ها را با شماره‌های 1 تا N نشان دهیم. برای افراد گروه اول تعداد $\binom{2N}{2}$ انتخاب داریم. برای گروه دوم $\binom{2N-2}{2}$ و همین‌طور تا آخر. پس در کل خواهیم داشت: $\binom{2N}{2}\binom{2N-2}{2}\binom{2N-4}{2}\dots\binom{2}{2}$

در قسمت دوم، اگر گروه‌ها متمایز نباشند، باید تعداد حالت‌های با گروه متمایز را بر جایگشت گروه‌ها با یکدیگر تقسیم کنیم. یعنی:

$$\frac{\binom{2N}{2}\binom{2N-2}{2}\binom{2N-4}{2}\dots\binom{2}{2}}{n!}$$

مثال ۲۴.۱ N زن و شوهر وجود دارند که می‌خواهیم این $2N$ نفر دور یک میز بنشینند به گونه‌ای که زن و شوهر کنار یکدیگر بنشینند؟

پاسخ:

هر زن و شوهر را به صورت یک زوج در نظر می‌گیریم. پس تعداد N زوج داریم که بر طبق قاعده ترکیب دوری تعداد $(N-1)!$ برای چیدن این زوج‌ها بر دور یک میز وجود دارد. از سوی دیگر، هر زن و شوهر به $2!$ می‌توانند بین یکدیگر جایگشت شوند، پس در کل 2^N حالت نیز در اثر این جایگشت بوجود می‌آید. پس در کل تعداد حالت‌ها برابر با $2^N(N-1)!$ است.

نکته ۶.۱ تعداد حالات چیدن N شی متمایز در دور یک میز دایره‌ای، برابر با $(N-1)!$ است.

مثال ۲۵.۱ به چند طریق می‌توان N شی متمایز را در k گروه غیرمتمایز قرار داد؟

پاسخ:

این مساله، معادل مساله تعداد افراز مجموعه‌ها است. فرض کنید که یک مجموعه ۴ عضوی به صورت $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ داریم. به عنوان مثال، افرازهای دوتایی از این مجموعه برابر است با تمام حالت‌هایی که بتوان این مجموعه را به دو گروه مجزا از هم افراز نمود. در ادامه برخی از این افرازها را مشاهده می‌کنید:

$$\{\{a_1, a_2\}, \{a_3, a_4\}\}$$
$$\{\{a_1, a_2, a_3\}, \{a_4\}\}$$
$$\{\{a_1, a_3\}, \{a_2, a_4\}\}$$
$$\{\{a_1\}, \{a_2, a_3, a_4\}\}$$
$$\{\{a_2, a_3\}, \{a_1, a_4\}\}$$
$$\dots$$

در واقع مساله ذکر شده، معادل تعداد افرازهای k عضوی یک مجموعه N عضوی است. تعداد افرازهای k عضوی یک مجموعه Nعضوی را با $\left\{ {N \atop k} \right\}$ نشان می‌دهیم. به $\left\{ {N \atop k} \right\}$ اعداد استرلینگ نوع دوم می‌گوییم. چند ویژگی این اعداد:

$$\begin{aligned}
&\left\{ {0 \atop 0} \right\} = 1 \\
&\left\{ {N \atop 0} \right\} = 0 \\
&\left\{ {N \atop k} \right\} = 0 \quad N < k \\
&\left\{ {N \atop N} \right\} = 1 \\
&\left\{ {N \atop k} \right\} = k\left\{ {N-1 \atop k} \right\} + \left\{ {N-1 \atop k-1} \right\}
\end{aligned}$$

مثال ۲۶.۱ با حروف کلمه SKENWESS چند کلمه چهار حرفی می‌توان نوشت؟ مساله را با این فرض حل کنید که جایگذاری نداریم.

پاسخ:

دقت کنید که کلمه SKENWESS از پنج حرف متمایز S، K، N، W و E تشکیل شده است، که برخی حروف در آن چندین بار تکرار شده است. پس مساله این‌گونه می‌شود که با دو تا حرف E، سه تا حرف S و یک حرف K، N، W، چند کلمه چهار حرفی می‌توان ساخت. مساله یاد شده را در چهار حالت ناسازگار حل می‌کنیم و در نهایت با استفاده از اصل جمع، مجموع آن‌ها جواب ما خواهد شد.

- هیچ حرف تکراری انتخاب نشود. یعنی از بین دو حرف E و سه حرف S تنها یک حرف انتخاب شود. پس از مجموعه $\{S, E, K, W, N\}$ باید چهار حرف را انتخاب کنیم، که تعداد کل این حالت‌ها با در نظر گرفتن جایگشت حرف‌ها برابر با $4!\binom{5}{4}$ خواهد بود.
- یک حرف دقیقا دوبار تکرار شده باشد و دو حرف دیگر یک بار. یعنی یک بار مثلا E را انتخاب می‌کنیم، و از آن دوبار استفاده می‌کنیم و از مجموعه $\{S, K, W, N\}$ دو حرف دیگر را انتخاب می‌کنیم. همین‌کار را با S نیز می‌توانیم انجام دهیم. تعداد حالت‌ها در این سناریو برابر است با: $2 \times \frac{4!}{2} \times \binom{4}{2}$. علت تقسیم‌بر دو کردن $4!$ به علت مشابهت دو حرف در کلمه چهار حرفی مذکور است.
- دوتا حرف داشته باشیم که هرکدوم دقیقاً دوبار تکرار بشوند. در این حالت می‌دانیم که فقط S و E می‌تواند تکرار شود، پس مجبوریم همین دو حرف را انتخاب کنیم. پس داریم: $\frac{4!}{2!2!}$
- در نهایت S را انتخاب کنیم که سه بار تکرار داشته باشد و از ۴ حرف باقی‌مانده یکی را انتخاب کنیم، که می‌شود $\frac{4!}{3!}\binom{4}{1}$

مجموع این چهار حالت یعنی ۲۸۶ پاسخ مساله است.

نکته ۷.۱ اگر مساله به ما می‌گفت که با حروف کلمه SKENWESS چند کلمه هشت حرفی می‌توانستیم بسازیم، آن‌گاه پاسخ خیلی راحت می‌شد $\frac{8!}{2!3!}$. چرا؟

مثال ۲۷.۱ با حروف کلمه MAHARAT چند کلمه چهار حرفی می‌توان نوشت؟ مساله را با این فرض حل کنید که جایگذاری نداریم.

پاسخ:

این سوال نیز به مانند سوال قبلی حل خواهد شد.

مثال ۲۸.۱ تعداد رشته‌هایی به طول ۱۰ متشکل از A,T,C,G را بیابید که در آن‌ها A و T مجاور نباشد، و C و G نیز مجاور هم نباشد؟

پاسخ:

در جایگاه اول چهار حرف می‌توانید بگذارید، اما در جایگاه دوم سه حرف بیشتر نمی‌توانید بگذارید، چرا که هر حرفی را انتخاب کنید، یک حرف وجود دارد که نباید کنار او قرار گیرد. از سوی دیگر در جایگاه سوم نیز مجبور هستید از میان سه حرف انتخاب

داشته‌باشید چون قطعا یک حرف وجود دارد که نمی‌تواند در کنار حرف دوم قرار گیرد، و همین الی‌اخر. پس پاسخ خواهد شد 4×2^9.

مثال ۲۹.۱ چه تعداد دنباله پنج بیتی داریم که دارای حداقل دو یک باشد؟

پاسخ:

این مساله را می‌توان با توجه به اصل متمم براحتی حل کرد. تعداد کل دنباله‌های پنج بیتی برابر با 2^5. یک دنباله وجود دارد که در آن هیچ یکی وجود ندارد، و در ضمن $\binom{5}{1}$ دنباله وجود دارد که تنها یک، بیت یک دارد. پس در کل پاسخ برابر با: $2^5 - 5 - 1$ خواهد بود.

مثال ۳۰.۱ به چند طریق میتوان از بین ۷ نفر، سه نفر را برای پستهای رییس، معاون و منشی انتخاب کرد؟

پاسخ:

بدیهی است که در این انتخاب ترتیب اهمیت دارد. زیرا اگر شخصی به عنوان رییس انتخاب شود و شخص دیگری به عنوان معاون انتخاب شود، با جابجایی این دو نفر در پستها، حالت جدیدی ایجاد می‌شود. بنابراین از فرمول جایگشت باید استفاده کرد. پس خواهیم داشت: $P_3^7 = \binom{7}{3}3!$

نکته ۸.۱ تعداد حالت‌هایی که k شی از میان N شی متمایز را در یک ردیف چیند، را تعداد جایگشت این اشیا می‌گوییم، و به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$P_k^N = \binom{N}{k}k! = \frac{N!}{(N-k)!} \tag{۹.۱}$$

مثال ۳۱.۱ تعداد m توپ و n جعبه داریم، به‌گونه‌ای که تعداد توپ‌ها کمتر از تعداد جعبه‌ها است. به طور تصادفی m را در n جعبه قرار می‌دهیم، احتمال این‌که m توپ در m جعبه خاص قرار گیرد، چقدر است؟ فرض کنید که در هر جعبه تنها یک توپ می‌تواند قرار گیرد.

پاسخ:

نشان خواهیم داد که در محاسبه این احتمال فرض این‌که توپ‌ها متمایز باشند و یا نباشند، تاثیری در جواب نخواهد داشت. اگر توپ‌ها متمایز نباشد، آن‌گاه می‌دانید تعداد حالت‌های قرار گرفتن m توپ در m جعبه خاص برابر با یک است، و تعداد حالت‌های کل نیز برابر با انتخاب m از n است. پس داریم:

$$\mathrm{P}(A) = \frac{1}{\binom{n}{m}} = \frac{m!(n-m)!}{n!}$$

از سوی دیگر اگر توپ‌ها متمایز باشند، آن‌گاه تعداد حالت‌های کل برابر با جایگشت m شی از n شی خواهد بود، و از سوی دیگر تعداد حالت‌های مطلوب نیز برابر با $m!$ خواهد بود. باز نیز داریم:

$$\mathrm{P}(A)=\frac{m!}{P_m^n}=\frac{m!(n-m)!}{n!}$$

مثال ۳۲.۱ احتمال این‌که در یک گروه ۲۵ نفری حداقل ۲ نفر تاریخ تولد یکسانی داشته‌باشند، چقدر است؟

پاسخ:
این مساله متمم حالتی است که هیچ دو نفری تاریخ تولد یکسانی نداشته‌باشند. پس خواهیم داشت:

$$\mathrm{P}=\frac{P_{25}^{365}}{365^{25}}=\frac{365\times 364\times\ldots\times(365-25+1)}{365^{25}}$$

مثال ۳۳.۱ فرض کنید n شی متمایز را به صورت تصادفی درون n جعبه متمایز قرار می‌دهیم. هیچ محدودیتی هم در نحوه قرار گیری وجود ندارد، یعنی می‌توان در هر جعبه بیش از یک شی نیز قرار داد.

الف) احتمال این‌که هیچ جعبه‌ای خالی نباشد؟

ب) احتمال این‌که فقط یک جعبه خالی باشد؟

پاسخ:
در هر دو قسمت مساله می‌دانیم که تعداد کل حالت‌ها برابر با n^n است، چرا که بر روی هر شی می‌تواند برچسب یکی از جعبه‌ها را زد. در حالت الف، یعنی ما در هر جعبه یک شی گذاشته‌ایم، و تعداد کل حالت‌ها برابر با تعداد جایگشت این n شی است. یعنی خواهیم داشت:

$$\mathrm{P}=\frac{n!}{n^n}$$

اما در حالت دوم، به تعداد n جعبه داریم، پس با n حالت می‌توانیم انتخاب کنیم که کدام جعبه خالی باشد. از سوی دیگر به ناچار مجبور هستیم که در یکی از جعبه‌ها دو شی قرار دهیم. به تعداد $n-1$ انتخاب برای جعبه‌ای داریم که در آن قرار است دو شی قرار گیرد. از سوی دیگر ابتدا باید دو شی را انتخاب کنیم به گونه‌ای که ترتیب نیز مهم باشد که در این حالت تعداد حالت‌ها برابر با P_2^n.
در نهایت خواهیم داشت:

$$\mathrm{P}=\frac{n\times(n-1)\times P_2^n}{n^n}$$

مثال ۳۴.۱ احتمال این‌که عدد k کوچکترین عدد در بین زیرمجموعه‌های چهار عضوی از مجموعه اعداد بین یک تا ۲۰ باشد، چقدر است؟ فرض کنید که $k \leq 17$.

پاسخ:

واضح است که تعداد زیرمجموعه‌های چهارعضوی از مجموعه اعداد بین یک تا ۲۰ برابر با $\binom{20}{4}$. از سوی دیگر فرض کنید یک عدد k به ما داده شده است، تعداد حالت‌های مطلوب برابر با با این است که از بین اعداد باقیمانده $20-k$ که از k بزرگتر هستند، ۳ عدد انتخاب کنیم. پس داریم:

$$\mathrm{P} = \frac{\binom{20-k}{3}}{\binom{20}{4}}$$

مثال ۳۵.۱ وقتی یک سکه را n بار پرتاب می‌کنیم، احتمال این‌که اولین شیر بعد از دقیقا m خط رخ دهد، چیست؟ احتمال این‌که i امین شیر دقیقا بعد از m بار خط رخ دهد؟

پاسخ:

کل حالت‌های ممکن در پرتاب n بار یک سکه برابر با 2^n است. از سوی دیگر برای $m+1$ پرتاب اول، تنها یک حالت وجود دارد و آن m خط و یک شیر است. پس در کل این احتمال به صورت زیر حاصل می‌گردد:

$$\mathrm{P} = \frac{2^{n-(m+1)}}{2^n}$$

برای قسمت دوم مساله، می دانیم که از بین $m+(i-1)$ بار قبل از i امین شیر باید فقط و فقط m خط بیاید. که این خود به تعداد $\binom{m+(i-1)}{m}$ حالت رخ می‌دهد. از سوی دیگر مابقی $n-(m+i)$ پرتاب بعدی هیچ‌گونه شرطی ندارد. پس در کل تعداد حالت‌های مطلوب برابر است با $\binom{m+(i-1)}{m}2^{n-(m+i)}$ و احتمال نهایی:

$$\mathrm{P} = \frac{\binom{m+(i-1)}{m}2^{n-(m+i)}}{2^n}$$

مثال ۳۶.۱ به چند طریق می توان در خانه های یک جدول 5×3 تعداد پنج ستاره گذاشت طوری که در هر خانه حداکثر یک ستاره قرار بگیرد و در هر سطر و ستون ۱ یا ۲ ستاره قرار بگیرد؟ (راهنمایی: ابتدا سعی کنید حداقل و حداکثر تعداد ستاره هایی که می توانیم بگذاریم را بیابید.)

پاسخ: با توجه به راهنمایی سوال می‌فهمیم که برای این‌که در هر ستونی حداقل یک ستاره باشد باید حداقل ۵ ستاره داشته باشیم از طرفی برای این‌که همه سطرها دو ستاره داشته باشند باید ۶ ستاره داشته باشیم پس یا ۵ ستاره داریم یا ۶ ستاره. پس این دو حالت را جدا می‌کنیم و با اصل جمع تعداد کل حالت هارا به‌دست می آوریم.

تعداد حالت‌ها با ۵ ستاره: ابتدا سطری را که قرار است در آن یک ستاره باشد را انتخاب می‌کنیم، سپس در آن یک ستاره می‌گذاریم و سپس در اولین سطر باقی‌مانده دو ستاره قرار می‌دهیم طوری که این دو ستاره با ستاره‌ی قبل هم ستون نشوند و در نهایت در تنها سطر باقی‌مانده نیز به طور یکتا باید دو ستاره را قرار دهیم. پس می‌شود: $\binom{2}{2} \times \binom{4}{2} \times 5 \times \binom{3}{1}$

حال برای ۶ ستاره هم باید یکی از ستون‌ها دو ستاره‌ای شوند، پس ابتدا آن ستون را انتخاب می‌کنیم و در آن دو ستاره قرار می‌دهیم. سپس در سطری که ستاره‌ای ندارد دو ستاره قرار می‌دهیم و در دو سطر باقی‌مانده هم در هر سطر یک ستاره دیگر قرار می‌دهیم. پس می‌شود: $\binom{1}{1} \times \binom{2}{1} \times \binom{4}{2} \times \binom{3}{2} \times \binom{5}{1}$

مثال ۳۷.۱ می خواهیم آهنگی با نت های موسیقی بسازیم با این شرط ها که فقط از نت های «سل» ، «لا» و «سی» استفاده کنیم، بعد از هیچ نت «سل»ای بلافاصله نت «سی» نیاید و طول آهنگ دقیقا سه نت باشد. با فرض اینکه می توان از نت تکراری استفاده کرد به چند طریق می توان چنین آهنگی ساخت؟

پاسخ:

در صورتی که نت اول سل نباشد، برای نت بعدی سه حالت و در صورتی که سل باشد دو حالت داریم. به همین ترتیب نت دوم را تقسیم‌بندی می‌کنیم تا به نتیجه‌ی زیر برسیم: $2 \times (2 \times 3 + 1 \times 2) + 1 \times (1 \times 3 + 1 \times 2) = 21$

مثال ۳۸.۱ فرض کنید که یک شبکه با تعداد N کاربر داریم. هر کاربر در ۱۰ درصد موارد فعال است و در ۹۰ درصد موارد در مُد بیکار قرار دارد. به چه احتمالی در این شبکه در هر بازه زمانی بیش از ۱۰ (۱۱ یا بیشتر) کاربرفعال نخواهیم داشت؟ محاسبه به صورت پارامتری کافی است؟

پاسخ: می‌دانیم که احتمال این‌که در هر بازه زمانی دقیقا m کاربر فعال باشد، برابر است با $\binom{N}{m}(0.1)^m(0.9)^{N-m}$. پس احتمال موردنظر برابر با احتمال فعال نبودن تمام کاربران، احتمال این که یک کاربرفعال باشد، احتمال فعال بودن ۲ کاربر تا احتمال فعال بودن 10 کاربر. پس خواهیم داشت:

$$\sum_{i=0}^{10} \binom{N}{i} (0.1)^i (0.9)^{N-i}$$

مثال ۳۹.۱ چهار موش از یک مجموعه موش انتخاب می‌شوند. دو تا از موش‌های این مجموعه سفید است. احتمال وجود هر دو موش سفید در انتخاب‌های ما دو برابر احتمال انتخاب نشدن هر دوی آن‌ها است. در این مجموعه چند موش وجود دارد؟

پاسخ: برای حل مسئله تعداد کل موش ها را n فرض می کنیم. همانطور که صورت مسئله گفته ما تنها دو موش سفید داریم پس به تعداد n-2 موش غیر سفید داریم.

حال به محاسبه انتخاب چهار موش که دو تا از آنها سفید است می پردازیم:

$$\frac{\binom{2}{2}\binom{n-2}{2}}{\binom{n}{4}}$$

حالت دوم محاسبه احتمال چهار موش که هیچ کدام از آنها سفید نباشند :

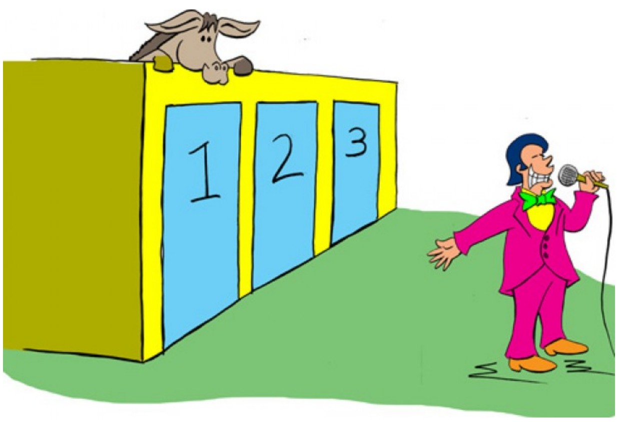
$$\frac{\binom{n-2}{4}}{\binom{n}{4}}$$

حال طبق خواسته مسئله احتمال حالت اول دو برابر حالت دوم است. با مساوی قرار دادن این رابطه می توانیم تعداد n را محاسبه کنیم :

$$\frac{\binom{2}{2}\binom{n-2}{2}}{\binom{n}{4}} = 2 \times \frac{\binom{n-2}{4}}{\binom{n}{4}} \qquad \longrightarrow \begin{cases} n=2 \\ n=7 \end{cases}$$

چون ما از مجموعه موش ها تعداد ۴ تا انتخاب می کنیم پس تعداد کل موش ها ۲ تا نمی تواند جواب ما باشد. پس تعداد کل موش ها برابر ۷ تا می شود.

مثال ۴۰.۱ فرض کنید که شما در یک مسابقه تلوزیونی شرکت کرده‌اید. در این مسابقه سه در وجود دارد. پشت یکی از این سه در یک ماشین و پشت دو در دیگر بزغاله وجود دارد. هر یک از درها با یک شماره شناسایی می‌شود. فرض کنید شما یک در مثلا در شماره یک را انتخاب کرده‌اید. در همین زمان مجری مسابقه با فرض دانستن این که پشت هر در چه چیزی نهفته است به شما می‌گوید پشت در شماره سه یک بزغاله وجود دارد، آیا شما می‌خواهید درب شماره دو را انتخاب کنید؟ به نظر شما این اتفاق کمکی می‌تواند به انتخاب شما بکند؟ احتمال پیروزی در صورت باقی ماندن و تغیر انتخاب را بدست آورید.



پاسخ: این مساله به مساله Monty Hall مشهور است که شما با یک جستجوی ساده در اینترنت می‌توانید پاسخ آن را بیابید؟

۴.۱ احتمال شرطی و قضیه احتمال کل

۱.۴.۱ احتمال شرطی

دو پیشامد A و B را در نظر بگیرید. احتمال پیشامد A به شرط رخداد B بیانگر احتمال وقوع پیشامد A است به شرطی که بدانیم B اتفاق افتاده است. احتمال شرطی[۲۴] را با نماد $\mathrm{P}(A|B)$ نشان می‌دهیم و به صورت زیر آن را تعریف می‌کنیم.

$$\mathrm{P}(A|B) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)} \tag{۱۰.۱}$$

در حقیقت همان‌طور که مشاهده می‌کنید با آمدن شرط فضای نمونه ما نیز کوچکتر می‌شود. به عبارت بهتر با آمدن شرط فضای نمونه از Sبه B تقلیل می‌یابد. چراکه در اینجا دانستن B موجب میشود که فضای نمونه به B کاهش یابد. با توجه به اینکه میدانیم غیر B اتفاق نمیافتد قسمتهای غیر B رخ نخواهند داد و در نتیجه در محاسبه احتمال A صرفا قسمتهای مشترک A و B در نظر گرفته میشوند.

مثال ۴۱.۱ دو تاس سالم را پرتاب می‌کنیم، احتمال آن‌که حداقل یک شش ظاهر شود به شرط آن‌که نتیجه دو تاس متفاوت باشد؟

پاسخ:

پیشامد A ظاهر شدن حداقل یک شش در بین دو تاس است، و پیشامد B متفاوت بودن نتیجه دو تاس است. این مساله را به دو روش حل می‌کنیم، در روش اول از رابطه تعریف احتمال شرطی یعنی (۱.۱) استفاده می‌کنیم. بدین‌منظور می‌دانیم که $\mathrm{P}(B) = \frac{30}{36}$. از سوی دیگر $\mathrm{P}(A \cap B) = 2 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{10}{36}$. یعنی در تعداد ۱۰ حالت ممکن است هم پیشامد A رخ دهد و هم B. پس خواهیم داشت:

$$\mathrm{P}(A|B) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)} = \frac{\frac{10}{36}}{\frac{30}{36}} = \frac{1}{3}$$

البته از روش دیگری نیز می‌توان این سوال را حل کرد. ابتدا فضای نمونه جدید را در نظر بگیرید. یعنی فرض کنید پیشامد B رخ داده است، که در این صورت ۳۰ حالت داریم. از بین نمونه‌های پیشامد B تنها ۱۰ حالت مطلوب ما است. با تقسیم این دو بر هم به همان پاسخ قبلی خواهیم رسیم.

مثال ۴۲.۱ پادشاهی دو فرزند دارد. احتمال این‌که ولیعهد (فرزند پسر)، خواهر داشته باشد؟

پاسخ: اگر پادشاه دو فرزند داشته باشد چیدمان پسر یا دختر بودن آن‌ها در مجموعه $\{bb, gg, bg, gb\}$ خلاصه می‌شود. می خواهیم احتمال داشتن فرزند دختر برای شاه را با شرط داشتن فرزند پسر بیابیم. پس اگر پیشامد B بیانگر داشتن فرزند پسر باشد،

[24] Conditional Probability

خواهیم داشت:

$$\mathrm{P}(G|B) = \frac{\mathrm{P}(G \cap B)}{\mathrm{P}(B)} = \frac{\frac{2}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{2}{3}$$

با استفاده از قاعده زنجیره‌ای[25] می‌توانیم احتمال توام چندین پیشامد را برحسب ضرب چند احتمال شرطی بنوسیم. قاعده زنجیره‌ای برای دو پیشامد A و B به صورت زیر است:

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A|B) \times \mathrm{P}(B)$$

مثال ۴۳.۱ جعبه‌ای حاوی سه مهره سفید و دو مهره قرمز است. یک مهره را به طور تصادفی از ظرف خارج می‌کنیم و بدون برگرداندن آن مهره دیگری را خارج می‌کنیم. احتمال آن‌که مهره اول سفید باشد و مهره دوم قرمز؟

پاسخ:

این سوال را با قاعده زنجیره‌ای خیلی ساده می‌توان حل کرد. پیشامد W_1 سفید بودن مهره اول را نشان می‌دهد و R_2 قرمز بودن مهره دوم. طبق قاعده زنجیره‌ای داریم:

$$\mathrm{P}(W_1 \cap R_2) = \mathrm{P}(R_2|W_1) \times \mathrm{P}(W_1) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{5}$$

قاعده زنجیره‌ای را می‌توان به بیش از دو پیشامد نیز گسترش داد.

$$\mathrm{P}(A \cap B \cap C) = \mathrm{P}(A|B \cap C) \times \mathrm{P}(B|C) \times \mathrm{P}(C)$$

$$\mathrm{P}(A_4, A_3, A_2, A_1) = \mathrm{P}(A_4 \mid A_3, A_2, A_1) \cdot \mathrm{P}(A_3 \mid A_2, A_1) \cdot \mathrm{P}(A_2 \mid A_1) \cdot \mathrm{P}(A_1)$$

$$\mathrm{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) = \prod_{k=1}^{n} \mathrm{P}\left(A_k \,\middle|\, \bigcap_{j=1}^{k-1} A_j\right)$$

مثال ۴۴.۱ ثابت کنید که $\mathrm{P}(A-B) = \mathrm{P}(A) - \mathrm{P}(A \cap B)$؟

پاسخ:

می دانیم که دو پیشامد $A \cap B$ و $A \cap B^c$ ناسازگار هستند. در ضمن می‌دانیم که اجتماع دو پیشامد $A \cap B$ و $A \cap B^c$ می‌شود خود A پس داریم:

$$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}((A \cap B) \cup (A \cap B^c)) = \mathrm{P}(A \cap B) + \mathrm{P}(A \cap B^c) = \mathrm{P}(A \cap B) + \mathrm{P}(A - B)$$

[25] Chain Rule

با یک جابه‌جایی در رابطه فوق، رابطه مثال اثبات خواهد شد.

مثال ۴۵.۱ در یک امتحان دو کلاس A و B حضور دارند. فرض کنید که احتمال قبولی B برابر با $\frac{2}{3}$ و احتمال قبولی A در امتحان مذکور نیز برابر با $\frac{1}{2}$ باشد. از سوی دیگر احتمال این‌که حداقل یکی از دو کلاس قبول شوند، برابر با $\frac{3}{4}$ است. اگر بدانیم دقیقا یکی از دو تیم قبول شده است، احتمال قبولی A چقدر است؟

پاسخ:

پیشامد E_A را قبولی کلاس A و پیشامد E_B را قبولی کلاس B در نظر بگیرید. در اصل به دنبال $\mathrm{P}(E_A|E_A \cup E_B - E_A \cap E_B)$ هستیم. این معادل آن است که بگوییم احتمال این‌که A قبول شده باشد، به شرط این‌که بدانیم B قبول نشده است. با این توصیف خواهیم داشت:

$$\mathrm{P}(E_A|E_B^c) = \frac{\mathrm{P}(E_A \cap E_B^c)}{\mathrm{P}(E_B^c)} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{4}{12}} = \frac{1}{4}$$

دقت کنید که $\mathrm{P}(E_A \cap E_B^c)$ نیز به صورت زیر محاسبه شد.

$$\mathrm{P}(E_A \cap E_B^c) = \mathrm{P}(E_A \cup E_B) - \mathrm{P}(E_B) = \frac{3}{4} - \frac{2}{3} = \frac{1}{12}$$

مثال ۴۶.۱ پزشکی از تجارب گذشته در مورد بیماران، این اطلاعات را جمع آوری کرده است. پنج درصد بیماران احساس می کنند سرطان دارند و سرطان هم دارند. ۴۵ درصد فکر می کنند که سرطان دارند ولی ندارند. ۱۰ درصد فکر نمی کنند که سرطان دارند ولی سرطان دارند و بالاخره ۴۰ درصد احساس می کنند که سرطان ندارند و واقعا هم ندارند.

الف- احتمال اینکه بیماری سرطان داشته باشد به فرض اینکه خود او احساس کند که سرطان دارد را محاسبه کنید.

ب- احتمال اینکه فرد سرطان داشته باشد به فرض اینکه فکر نکند که سرطان دارد را حساب کنید.

ج- احتمال اینکه فکر کند سرطان دارد به فرض اینکه سرطان نداشته باشد را حساب کنید.

د- احتمال اینکه او احساس کند سرطان دارد به فرض اینکه سرطان هم داشته باشد.

پاسخ:

دو پیشامد A و B را در نظر بگیرید. A بیانگر پیشامد این است که بیمار احساس می کند که سرطان دارد و B بیانگر این است که بیمار واقعا سرطان دارد. در نتیجه

$$\mathrm{P}(A \cap B) = 0.05 \qquad \mathrm{P}(A \cap B') = 0.45$$

$$\mathrm{P}(A' \cap B) = 0.1 \qquad \mathrm{P}(A' \cap B') = 0.4$$

با توجه به روابط بدست آمده در مثال‌های قبلی داریم:

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B') = 0.5$$

$$P(B) = P(A \cap B) + P(A' \cap B) = 0.15$$

قسمت الف، در واقع همان $P(B|A) = \frac{0.05}{0.5}$ است. قسمت ب همان $0.2 = \frac{0.1}{0.5} = P(B|A')$ و قسمت‌های ج و د به ترتیب $P(A|B') = \frac{0.45}{0.85}$ و $P(A|B) = \frac{0.05}{0.15}$.

۲.۴.۱ پیشامد مستقل

تعریف شهودی دو پیشامد مستقل[۲۶]: دو پیشامد که معلوم بودن یکی تأثیری روی احتمال دیگری نداشته باشد را دو پیشامد مستقل از یکدیگر می گویند. اما به صورت ریاضیاتی دو پیشامد A و B را مستقل گوییم اگر و فقط اگر $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$. که نتیجه این عبارت می‌شود: $P(A|B) = P(A)$ و $P(B|A) = P(B)$.

مثال ۴۷.۱ دو سکه را پرتاب می‌کنیم، اگر A نشان‌دهنده این باشد که اولین سکه شیر بیاید و B نشان‌دهنده این باشد که سکه دوم خط بیاید، نشان دهید این دو پیشامد مستقل از هم هستند؟

پاسخ:

برای اثبات کافی است ثابت کنیم که $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$. می‌دانیم که $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$ است و $P(A \cap B)$ نیز برابر با $\frac{1}{4}$ است. به صورت شهودی هم می توان گفت این دو پیشامد از هم مستقلند. چون دانستن شیر آمدن اولی به ما کمکی و اطلاعاتی در مورد دانستن خط آمدن دومی نمی کند.

مثال ۴۸.۱ اگر دو پیشامد A و B مستقل باشند، نشان دهید که دو پیشامد A و B' نیز مستقل هستند؟

پاسخ:

چون دو پیشامد A و B مستقل هستند، پس داریم: $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$. از سوی دیگر می‌دانیم که

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B')$$

$$P(A) = P(A|B)P(B) + P(A \cap B')$$

[26] Independent

پس خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} P(A\cap B') &= P(A) - P(A|B)P(B) = P(A) - P(A)P(B) \\ &= P(A)[1-P(B)] = P(A)P(B') \end{aligned}$$

به سادگی نیز می‌توانید نشان دهید که A' و B' نیز از هم مستقل هستند.

مثال ۴۹.۱ ثابت کنید که اگر دو پیشامد A و B از یکدیگر مستقل باشند، آن‌گاه A' و B' نیز مستقل هستند؟

پاسخ: برطبق نظریه مجموعه‌ها می‌دانیم که

$$\begin{aligned} P(A'\cap B') &= P((A\cup B)') = 1 - P(A\cup B) \\ &= 1 - P(A) - P(B) + P(A\cap B) \\ &= 1 - P(A) - P(B) + P(A)P(B) \\ &= 1 - P(A) - P(B)[1-P(A)] \\ &= [1-P(A)][1-P(B)] \end{aligned}$$

مثال ۵۰.۱ شما با پرتاب سکه بازی شیر یا خط و "شیر" سه بار ظاهر شده... چه قدر شانس است که شیر یا خط بعدی نیز "شیر" خواهد شد ؟

پاسخ:

به دلیل استقلال آزمایش‌ها، پاسخ باز همان $\frac{1}{2}$ است. در واقع آن چه را در گذشته انجام دادید و سکه راپرتاب کردیددر شیر یا خط فعلی تاثیر نمی گذارد!

مثال ۵۱.۱ فرض کنید دو تاس همگن را یک مرتبه پرتاب کنیم.

الف. اگر E نشان دهنده پیشامد ۶ بودن مجموع دو تاس و F نشان دهنده پیشامدی باشد که عدد تاس اول ۴ شود وضعیت استقلال Eو F را بررسی کنید.

ب. اگر E نشان دهنده پیشامد ۷ بودن مجموع دو تاس و F نشان دهنده پیشامدی باشد که عدد تاس اول ۴ شود وضعیت استقلال E و F را بررسی کنید.

پاسخ:

مجموعه پیشامد E، F و $E \cap F$:

$$E = \{(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)\} \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{P}(E) = \frac{5}{36}$$
$$E = \{(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6)\} \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{P}(F) = \frac{6}{36}$$
$$\mathrm{P}(E \cap F) \neq \mathrm{P}(E) \cap \mathrm{P}(F)$$

به صورت شهودی هم می توان وابستگی E و F را دریافت. زمانی E و F مستقل از یکدیگرند که دانستن یا ندانستن E تأثیری در احتمال F نداشته باشد (و بالعکس). اما در اینجا: اگر بدانیم عدد تاس اول ۴ آمده پیشامد E یک احتمال غیر صفر دارد. اما اگر ندانیم عدد تاس اول ۴ آمده این عدد می تواند ۶ باشد. در این صورت احتمال پیشامد E صفر می شود. پس دانستن یا ندانستن ۴ آمدن عدد اول تأثیر در احتمال دارد. یعنی E و F مستقل از هم نیستند.

در ادامه به سراغ قسمت دوم مساله می‌رویم. در این حالت داریم:

$$E = \{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\} \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{P}(E) = \frac{6}{6}$$
$$E = \{(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6)\} \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{P}(F) = \frac{6}{36}$$
$$\mathrm{P}(E \cap F) = \mathrm{P}(E) \cap \mathrm{P}(F)$$

در نگاه نخست این دو پیشامد مستقل نیستند. دقت کنید که در بسیاری موارد استدلال شهودی برای استقلال مشکل است و استدلال ریاضی آسان تر است.

در ادامه سعی می‌کنیم تا مفهوم استقلال را به بیش از دو پیشامد توسعه دهیم. سه پیشامد A، B و C را در نظر بگیرید. گوییم این سه پیشامد متقابلا مستقل هستند، اگر و تنها اگر هر چهار رابطه زیر برقرار باشد:

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A) \times \mathrm{P}(B)$$
$$\mathrm{P}(A \cap C) = \mathrm{P}(A) \times \mathrm{P}(C)$$
$$\mathrm{P}(B \cap C) = \mathrm{P}(B) \times \mathrm{P}(C)$$
$$\mathrm{P}(A \cap B \cap C) = \mathrm{P}(A) \times \mathrm{P}(B) \times \mathrm{P}(C)$$

در رابطه با این تعریف سؤال مهمی ممکن است مطرح شود. سوال این‌گونه است که به نظر می رسد برای وجود استقلال سه پیشامد سه رابطه اول کافی باشد. در پاسخ باید گفت که برقرار بودن سه شرط اول، این نتیجه را می‌دهد که خود سه پیشامد دو بدو مستقل از یکدیگر هستند. اما باز استقلال کامل برقرار نیست. به این معنی که ممکن است بین یک پیشامد و اشتراک یا اجتماع دو پیشامد دیگر وابستگی برقرار باشد. اما برقراری شرط چهارم موجب وجود استقلال کامل پیشامدها از یکدیگر خواهد شد.

نکته ۹.۱ دو خاصیت استقلال و ناسازگاری با یکدیگر به صورت کامل متفاوت است. پیشامد A و B به شرطی ناسازگارند که اشتراک A و B تهی شود. اما اگر این دو مستقل باشند، آن‌گاه باید در شرط $\mathrm{P}(A\cap B) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$ صدق کنند. مثلا پیشامد A و A' با یکدیگر ناسازگارند، اما به وضوح وابسته به همدیگر هستند. تنها در صورتی دو پیشامد ناسازگار، مستقل نیز هستند که یکی از آن‌ها پیشامد خنثی باشد.

مثال ۵۲.۱ تعداد روابط لازم برای اثبات استقلال n پیشامد چه تعداد است؟

پاسخ:

تعداد روابط برابر با

$$\binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n - (n+1)$$

مثال ۵۳.۱ اگر A مستقل از B باشد، و B نیز مستقل از C باشد، آیا می‌توان نتیجه گرفت که A مستقل از C است؟

پاسخ:

پرواضح است که خیر. مثلا احتمال سرمای هوا در تهران مستقل از ترافیک در شهر شیراز است. از سوی دیگر ترافیک در شهر شیراز مستقل از احتمال برف باریدن در تهران است. اما آیا احتمال سرمای هوا در تهران مستقل از باریدن برف در تهران است؟!

مثال ۵۴.۱ فرض کنید که سه زندانی به نام‌های احمد، رضا و بهرام داریم. از میان این سه تن یک نفر به اعدام محکوم شده است. احمد می‌خواهد نامه‌ای برای خانواده‌اش بفرستد. به زندان‌بان می‌گوید به من بگو بهرام آزاد می‌شود و یا رضا تا من نامه را به او بدهم که به دست خانواده‌ام برساند. زندان‌بان شک دارد که آیا با این‌کار احتمال محکومیت احمد تغییر خواهد کرد یا نه؟

پاسخ:

نخست این‌که می‌دانیم احتمال محکومیت این سه قبل از سخن زندان‌بان برابر با $\frac{1}{3}$ است. اکنون فرض کنید که زندان‌بان پاسخ سوال احمد را بدهد. می‌خواهیم احتمال محکومیت احمد بعد از این پاسخ را محاسبه کنیم. چهار حالت زیر را در نظر بگیرید:

- احمد محکوم است و زندان‌بان رضا را معرفی می‌کند. دقت کنید که به احتمال یک سوم احمد محکوم است و همچنین زندان‌بان دو انتخاب دارد که یا رضا را معرفی کند و یا بهرام را پس به احتمال یک دوم زندان‌بان، رضا را معرفی می‌کند. حاصل ضرب این دو در همدیگر می‌شود یک ششم. با نماد ab این سناریو را نشان می‌دهیم.
- احمد محکوم است و زندان‌بان بهرام را معرفی می‌کند. مثل حالت قبلی قابل حل است. با نماد ar این سناریو را نشان می‌دهیم.
- رضا محکوم باشد و زندان‌بان بهرام را معرفی می‌کند. دقت کنید که در این حالت رضا به احتمال یک سوم محکوم است، و زندان‌بان چاره‌ای جز انتخاب بهرام را ندارد پس با احتمال یک مجبور است رضا را انتخاب کند. پس حاصل ضرب این دو

احتمال می‌شود یک سوم. با نماد rb این سناریو را نشان می‌دهیم.

- بهرام محکوم باشد، و زندان‌بان رضا را معرفی کند. این نیز مانند حالت قبلی قابل حل است. با نماد br این سناریو را نشان می‌دهیم.

پس فضای نمونه ما خواهد شد: $\{ab, ar, rb, br\}$. از سوی دیگر می‌دانیم که:

$$\mathrm{P}(ab) = \frac{1}{3} \quad \mathrm{P}(rb) = \frac{1}{3} \quad \mathrm{P}(ab) = \frac{1}{6} \quad \mathrm{P}(ar) = \frac{1}{6}$$

Z را پیشامد این در نظر می‌گیریم که زندان‌بان رضا را معرفی کند و A را پیشامد محکومیت احمد. انتروپی شرطی [۲۷] به صورت زیر محاسبه می‌شود:

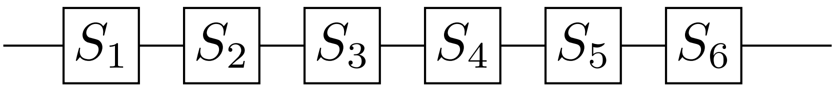
$$\mathrm{P}(A|Z) = \frac{\mathrm{P}(A \cap Z)}{\mathrm{P}(Z)} = \frac{\frac{1}{6}}{frac13 + frac16} = frac13$$

همان‌طور که مشاهده می‌کنید احتمال مورد نظر تغییر نکرد.

مثال ۵۵.۱ فرض کنید که N سامانه در اختیار داریم. در صورتی‌که احتمال خرابی هر یک از این سامانه‌ها در طول یک سال را با p_i نشان دهیم که i مقداری است بین یک تا N. آن‌گاه در صورتی‌که این N سامانه را به صورت سری ببندیم، احتمال خرابی کل سامانه در طول یک سال چقدر خواهد شد؟ اگر به صورت موازی ببندیم احتمال خرابی چقدر خواهد شد؟

پاسخ:

ابتدا حالت سری را در نظر بگیرید.



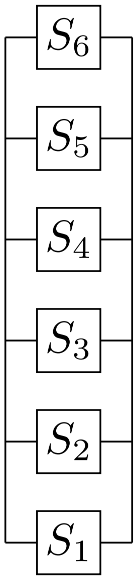
در حالت سری، هرگاه یکی از سامانه‌ها خراب شود، کل سامانه از کار خواهد افتاد. بدین‌سان احتمال درست‌کار کردن یک سامانه در حالت سری برابرا با این است که همه سامانه‌ها درست کار کند. به عبارت بهتر اگر D_i بیانگر درست کار کردن زیرسامانه i ام باشد، آن‌گاه برای احتمال درست کار کردن سامانه خواهیم داشت:

$$\mathrm{P}(D) = 1 - \mathrm{P}(D_1' \cap D_2' \cap D_3' \cap \ldots \cap D_N') = 1 - \prod_{i=1}^{N}(1 - p_i)$$

پس احتمال درست کار نکردن سامانه خواهد شد، $1 - \prod_{i=1}^{N}(1 - p_i)$.

اکنون حالت موازی را در نظر بگیرید.

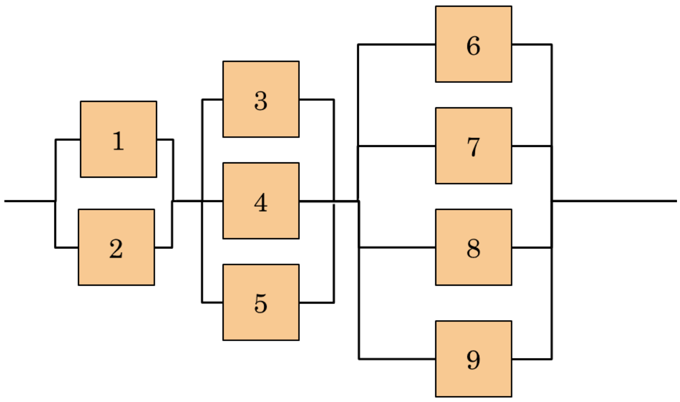
[27] Conditional Entropy



در این حالت تا تمامی زیرسامانه‌ها از کار نیافتد، سامانه اصلی از کار نخواهد افتاد. بنابراین برای احتمال خرابی داریم:

$$\mathrm{P}(D) = \mathrm{P}(D_1 \cap D_2 \cap D_3 \cap \ldots \cap D_N) = \prod_{i=1}^{N} p_i$$

مثال ۵۶.۱ سامانه زیر را در نظر بگیرید.

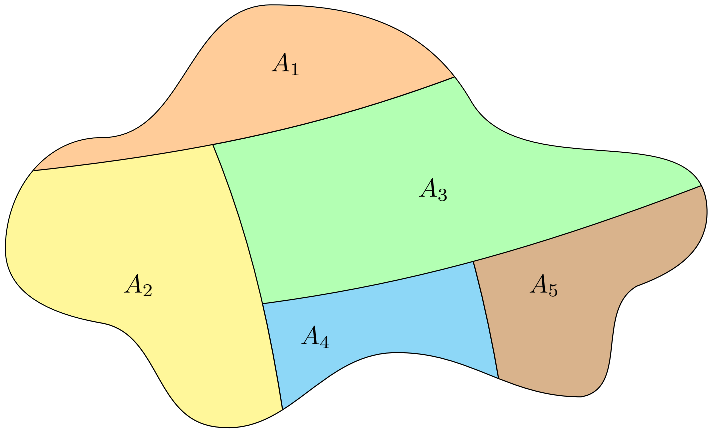


اگر هر زیرسامانه به احتمال p خراب شود، و تمامی این زیرسامانه‌ها به صورت مستقل از هم عمل کنند، آن‌گاه احتمال خرابی کل سامانه چقدر خواهد بود؟

پاسخ: این سوال در کلاس حل خواهد شد.

۳.۴.۱ قانون احتمال کل

ما می‌توانیم یک فضای نمونه را به تعدادی پیشامد افراز کنیم. البته دقت کنید که در افراز فضای نمونه به تعدادی پیشامد، می‌بایست این پیشامدها با یکدیگر ناسازگار باشند، و در ضمن اجتماع آن‌ها کل فضای نمونه را تشکیل دهد. به عنوان نمونه در شکل زیر افرازی از فضای نمونه به پنج پیشامد A_1 تا A_5 نشان داده شده است.



شکل ۴.۱: افراز فضای نمونه به پنج پیشامد A_1 تا A_5

قانون احتمال کل[۲۸] بدین‌صورت بیان می‌شود که پیشامدهای A_i که i از است تا n یک افراز برای فضای نمونه S باشد، آن‌گاه برای هر پیشامد مثل B در فضای نمونه S داریم:

$$\mathrm{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(A_i)\mathrm{P}(B|A_i)$$

اهمیت رابطه فوق این است که در آن احتمال یک پیشامد به رخ دادن یا ندادن پیشامدی دیگر مربوط شده است. بسیاری از مواقع هست که ما احتمال یک پیشامد را نمی دانیم. اما احتمال رخ دادن آن را نسبت به رخ دادن یا ندادن پیشامدی دیگر می دانیم.

مثال ۵۷.۱ دو جعبه داریم. جعبه اول شامل دو ترانزیستور خراب و ۸ ترانزیستور سالم است. جعبه دوم شامل ۹ ترانزیستور خراب و ۶ ترانزیستور سالم است. به تصادف یک از جعبه‌ها را انتخاب کرده و یک ترانزیستور را بر می‌داریم. احتمال خراب بودن ترانزیستور؟

پاسخ:

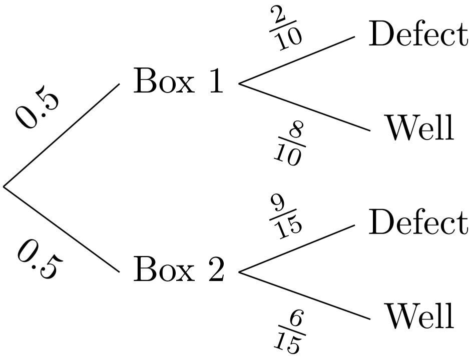
در واقع افراز ما می‌شود A_1 و A_2 که بیانگر انتخاب جعبه اول یا دوم است. با توجه به این نکته داریم:

$$\mathrm{P}(D) = \mathrm{P}(D|B_1)\mathrm{P}(B_1) + \mathrm{P}(D|B_2)\mathrm{P}(B_2) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{10} + \frac{1}{2} \times \frac{9}{15} = 0.4$$

در ضمن لازم به ذکر است که یک روش بسیار مناسب برای برخورد با مسایل قانون احتمال کل رسم درخت انتخاب مساله است.

[28]Total Probability Theorem

درخت مذکور برای این مثال در شکل زیر رسم شده است.



در این درخت کافی است که شما شاخه‌های مطلوب خود را انتخاب کنید و احتمال آن‌ها را با یکدیگر جمع کنید. دقت کنید که وقوع هر شاخه ناسازگار با وقوع شاخه‌های دیگر است. در ضمن در حرکت بر روی شاخه نیز باید احتمال را در عمق‌های مختلف درخت در هم ضرب کنید.

مثال ۵۸.۱ به دنبال شیوع بیماری جنون گاوی (Bovine Spongiform Encephalopathy) اتحادیه اروپا یک تست پزشکی برای تشخیص جنون گاوی ارائه کرد و کشورهای اروپایی را ملزم به انجام آن نمود. می دانیم که در عمل هیچ تستی دقت صددرصد ندارد و با درصدی خطا همراه است. به این معنی که ممکن است گاوی مریض باشد و این تست آن را سالم معرفی کند و ممکن است گاوی سالم باشد و این تست آن را مریض نشان دهد. محققان با انجام نمونه برداری های مختلف به سه نکته زیر پی بردند:

- یک گاو مریض به احتمال ۷۰ درصد توسط تست مورد نظر به درستی مریض تشخیص داده می شود.
- یک گاو سالم به احتمال ۱۰ درصد توسط تست مورد نظر به نادرستی مریض تشخیص داده می شود.
- احتمال اینکه گاو انتخاب شده سالم باشد ۹۸ درصد است.

با توجه به معلومات مسئله

الف: احتمال اینکه تست مورد نظر روی یک گاو که به تصادف انتخاب شده درست کار کند را به دست آورید.

ب: احتمال اینکه نتیجه آزمایش مثبت باشد را به دست آورید.

ج. احتمال اینکه نتیجه آزمایش منفی باشد را به دست آورید.

پاسخ:

پیشامد T را به عنوان پیشامد این‌که تست درست جواب دهد، تعریف می‌کنیم. با توجه به مسئله می فهمیم که درست کار کردن تست بستگی به این دارد که گاو انتخاب شده سالم باشد یا نباشد. اگر سالم نباشد (مریض باشد) به احتمال 0.7 درست کار می کند و اگر گاو سالم باشد به احتمال $0.9 = 1 - 0.1$. سالم‌بودن گاو را با F و سالم‌نبودن آن را با F' نشان می‌دهیم. در نتیجه خواهیم

داشت:

$$\mathrm{P}(T) = \mathrm{P}(T|F)\mathrm{P}(F) + \mathrm{P}(T|F')\mathrm{P}(F') = 0.9 \times 0.98 + 0.7 \times 0.02 = 0.896$$

دو قسمت بعدی این سوال را به همین شیوه می‌توانید حل کنید.

مثال ۵۹.۱ شرکت بیمه‌ای بر این باور است که افراد را می‌توان به دو گروه تقسیم‌بندی کرد. گروهی مستعد تصادف هستند و گروهی نیستند. آمارهای این شرکت نشان می‌دهد که یک فرد مستعد تصادف با احتمال 0.4 تصادفی در مدت زمان یک سال خواهد داشت، در صورتی‌که این احتمال برای یک فرد فاقد این استعداد به 0.1 کاهش پیدا خواهد کرد. اگر فرض کنیم که ۲۰ درصد جامعه مستعد تصادف هستند، احتمال این‌که بیمه‌گذار جدیدی ظرف مدت یک سال تصادف کند، چقدر است؟

پاسخ: این سوال را نیز براحتی می‌توان توسط قضیه احتمال کل حل نمود. اگر T را پیشامد این در نظر بگیریم که فرد مستعد تصادف است، آن‌گاه A' بیانگر این است که فرد مستعد تصادف نباشد. از سوی دیگر A را پیشامد این در نظر می‌گیریم که فرد در طول یک سال تصادف داشته‌باشد، پس خواهیم داشت:

$$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(A|T)\mathrm{P}(T) + \mathrm{P}(A|T')\mathrm{P}(T') = 0.4 \times 0.2 + 0.1 \times 0.80 = 0.16$$

۴.۴.۱ قضیه بیز

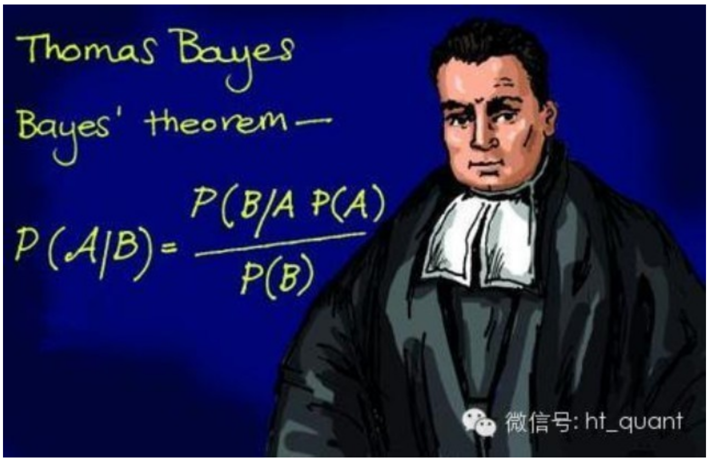
توماس بیز (۱۷۰۲-۱۷آوریل ۱۷۶۱میلادی) ریاضیدان انگلیسی است که بدلیل فرمول‌بندی حالت خاصی از قضیه بیز، معروف گشته‌است. البته قضیه بیز پس از مرگ وی ارائه شد. او در سال ۱۷۱۹ وارد دانشگاه ادینبرو شد که در رشته منطق و الهیات تحصیل کند. در بازگشت به سال ۱۷۲۲ در کنار پدر خود در کلیسای کوچکی بود تا در حدود ۱۷۳۴ به تانبریج ولز در کنت (انگلستان) رفت.

قضیه بیز[۲۹] روشی برای دسته بندی پدیده‌ها، بر پایه احتمال وقوع یا عدم وقوع یک پدیده‌است و در نظریه احتمالات با اهمیت و پرکاربرد است. اگر برای فضای نمونه مفروضی بتوانیم چنان افرازی انتخاب کنیم که با دانستن اینکه کدامیک از پیشامدهای افراز شده رخ داده‌است، بخش مهمی از عدم اطمینان تقلیل یابد. این قضیه از آن جهت مفید است که می‌توان از طریق آن احتمال یک پیشامد را با مشروط کردن نسبت به وقوع و یا عدم وقوع یک پیشامد دیگر محاسبه کرد. در بسیاری از حالت‌ها، محاسبهٔ احتمال یک پیشامد به صورت مستقیم کاری دشوار است. با استفاده از این قضیه و مشروط کردن پیشامد مورد نظر نسبت به پیشامد دیگر، می‌توان احتمال مورد نظر را محاسبه کرد.

فرض می‌کنیم $B_1, \ldots, B_k$ یک افراز برای فضای نمونه S تشکیل دهند. طوری که به ازای هر $j = 1, \ldots, k$، داشته باشیم $\mathrm{P}(B_j) > 0$ و فرض کنید A پیشامدی با فرض $\mathrm{P}(A) > 0$ باشد، در اینصورت به ازای $i = 1, \ldots, k$، داریم:

$$\mathrm{P}(B_i|A) = \frac{\mathrm{P}(B_i)\, P(A|B_i)}{\sum_{j=1}^{k} \mathrm{P}(B_j)\, \mathrm{P}(A|B_j)} \tag{۱۱.۱}$$

[29] Bayes' theorem



شکل ۵.۱: Thomas Bayes (1701 – 7 April 1761)

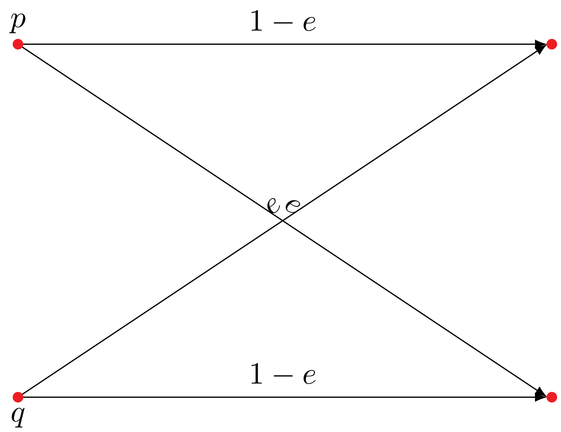
مثال ۶۰.۱ فرض کنید که یک سامانه دیجیتالی با احتمال p بیت 1 را ارسال می‌کند و با احتمال $q = 1 - p$ بیت 0 را ارسال می‌کند. بیت‌های ارسالی با احتمال e در کانال دچار خطا می‌شوند، و با احتمال $1 - e$ سالم به گیرنده می‌رسند.

الف) احتمال خطا را بدست آورید؟

ب) احتمال دریافت بیت یک را محاسبه کنید.

ب) اگر بیت یک دریافت شده باشد، احتمال این‌که واقعا یک ارسال شده باشد؟

پاسخ: شکل زیر نمایی از سامانه مخابراتی در نظر گرفته شده را نشان می‌دهد.



برای هر این سوال فرض کنید که T_0 پیشامد ارسال صفر و T_1 پیشامد ارسال یک باشد. از سوی دیگر، R_0 و R_1 به ترتیب بیانگر دریافت صفر و یک باشد. احتمال خطا در حالت کلی به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$\mathrm{P}(E) = \mathrm{P}(R_1|T_0)\mathrm{P}(T_0) + \mathrm{P}(R_0|T_1)\mathrm{P}(T_1) = ep + e(1-p) = e$$

برای احتمال دریافت بیت یک نیز بر طبق قانون احتمال کل داریم:

$$\mathrm{P}(R_1) = \mathrm{P}(R_1|T_0)\mathrm{P}(T_0) + \mathrm{P}(R_1|T_1)\mathrm{P}(T_1) = ep + (1-e)(1-p)$$

برای قسمت ج از قانون بیز استفاده می‌کنیم.

$$\mathrm{P}(T_1|R_1) = \frac{\mathrm{P}(R_1|T_1)\mathrm{P}(T_1)}{\mathrm{P}(R_1)}$$

مثال ۶۱.۱ سه سکه داریم. سکه C_1 هر دو طرفش شیر، سکه C_2 هر دو طرفش خط و سکه C_3 یک طرفش شیر و یک طرفش خط است. یکی از این سه سکه را به تصادف انتخاب کرده و پرتاب می‌کنیم. اگر شیر بیاید، احتمال این‌که طرف دیگرش خط باشد، چیست؟

پاسخ: فرض کنید که H به معنای شیر آمدن باشد. احتمال این‌که طرف دیگر خط باشد،

$$\mathrm{P}(C_3|H) = \frac{\mathrm{P}(H|C_3)\mathrm{P}(C_3)}{\mathrm{P}(H)}$$

که $\mathrm{P}(H)$ برطبق رابطه قانون احتمال کل، از رابطه زیر محاسبه می‌شود.

$$\mathrm{P}(H) = \mathrm{P}(H|C_1)\mathrm{P}(C_1) + \mathrm{P}(H|C_2)\mathrm{P}(C_2) + \mathrm{P}(H|C_3)\mathrm{P}(C_3) = \frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}}{\frac{1}{1}\times\frac{1}{3} + 0\times\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\times\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$$

مثال ۶۲.۱ یک فروشنده آثار هنری مجموعه‌ای شامل ۵ تابلوی از خارج کشور دریافت می‌مند. او برمبنای تجربه گذشته‌اش می‌داند احتمال این‌که صفر، یک دو سه چهاریا هر ۵ تابلو تقلبی باشند به ترتیب ۶۰، ۳،۵،۱۰،۲۰ و ۲ درصد باسد. چون هزینه تایید اصالت تابلو خیلی زیاد است. فروشنده تصمیم می‌گیرد یکی از ۵ تابلو را به تصادف انتخاب کرده برای تایید اصالت بفرستد. اگر دریابد این تابلو تقلبی است احتمال تقلبی بودن همگی ۴ تابلوی دیگر چقدر است؟

پاسخ:

E را پیشامد تقلبی بودن تابلوی انتخاب شده در نظر می‌گیریم. F_i پیشامد تقلبی بودن تابلوی i ام. هدف یافتن $\mathrm{P}(F_5|E)$ است. داریم:

$$\mathrm{P}(F_0) = 0.6 \quad \mathrm{P}(F_1) = 0.2 \quad \mathrm{P}(F_2) = 0.1 \quad \mathrm{P}(F_3) = 0.05 \quad \mathrm{P}(F_4) = 0.003 \quad \mathrm{P}(F_5) = 0.02$$

از سوی دیگر داریم:

$$P(E|F_0) = 0 \quad P(E|F_1) = \frac{1}{5} \quad P(E|F_2) = \frac{2}{5} \quad P(E|F_3) = \frac{3}{5} \quad P(E|F_4) = \frac{4}{5} \quad P(E|F_5) = 1$$

با استفاده از قانون بیز خواهیم داشت:

$$P(F_5|E) = \frac{P(E|F_5)P(F_5)}{\sum_{i=0}^{5} P(E|F_i)P(F_i)}$$

مثال ۶۳.۱ فرض کنید دو سکه ناسالم داریم که احتمال شیر برای سکه اول برابر با 0.1 و برای سکه دوم برابر با 0.9 است. یکی از سکه‌ها را به تصادف انتخاب می‌کنیم و آن را n بار پرتاب می‌کنیم. اگر نتیجه همه این n پرتاب، شیر باشد، چقدر احتمال دارد که سکه انتخاب شده، سکه دوم باشد.

پاسخ:

A_1 و A_2 را به ترتیب پیشامد انتخاب سکه اول و سکه دوم در نظر می‌گیریم. از سوی دیگر احتمال شیر آمدن در پرتاب i ام را نیز با H_i نشان می دهیم. برای رسیدن به پاسخ این مساله از قانون بیز استفاده می‌کنیم. یعنی داریم:

$$P(A_2|H_1H_2\dots H_n) = \frac{P(H_1H_2\dots H_n|A_2)P(A_2)}{P(H_1H_2\dots H_n|A_1)P(A_1) + P(H_1H_2\dots H_n|A_2)P(A_2)} = \frac{(0.9)^n \times \frac{1}{2}}{(0.9)^n \times \frac{1}{2} + (0.1)^n \times \frac{1}{2}} = \frac{9^n}{9^n+1}$$

پر واضح است که اگر n به سمت بی‌نهایت میل کند، آن‌گاه این احتمال به سمت یک میل خواهد کرد، که این پاسخ به صورت شهودی نیز قابل درک بود.

مثال ۶۴.۱ مجلس نمایندگان کشوری از دو گروه از نمایندگان تشکیل شده اند. $100p$ درصد از نمایندگان عضو حزب لیبرال هستند و در تمام رای‌گیری‌های برای یک موضوع هیچ‌گاه نظرشان عوض نمی‌شود و رای‌اشان تغییر نمی‌کند. از سوی دیگر $100(1-p)$ درصد از نمایندگان عضو حزب محافظه‌کار هستند که به صورت تصادفی و با احتمال r نظرشان در رای‌گیری مربوط به یک موضوع مشخص تغییر خواهد کرد. بر سر یک موضوعی دوبار رای‌گیری انجام می‌شود. یکی از نمایندگان در مصاحبه خود می‌گوید که در هر دوبار به لایحه مورد نظر رای مثبت داده است. احتمال این‌که او جزو نمایندگان حزب لیبرال باشد چقدر است؟

پاسخ: پیشامد A_1 و A_2 را به ترتیب عضویت در حزب لیبرال و حزب محافظه کار تعریف می‌کنیم. پیشامد B را نیز بدین‌گونه تعریف می‌کنیم که نماینده مزبور در هر دوبار یک رای را داده باشد. می‌دانیم که

$$P(A_1) = p \quad P(A_2) = 1-p \quad P(B|A_1) = 1 \quad P(B|A_1) = 1-r$$

آن‌چه که به دنبال آن هستیم، $P(A_1|B)$ است. براحتی با نوشتن یک قاعده بیز می‌توان این احتمال را بدست آورد.

مثال ۶۵.۱ فرض کنید شما هنگام سفر، از همسایه تان بخواهید که در نبود شما به گلدان شما آب بدهد. گل درون گلدان با احتمال ۸۰ درصد بدون آب از بین می رود اما ۱۵ درصد هم احتمال دارد با وجود آبیاری از بین برود. همسایه تان نیز با احتمال ۹۰ درصد فراموش نمی کند به گل ها آب بدهد.

الف) چقدر احتمال دارد که موقع بازگشت از سفر، گلدانتان سالم باشد؟

ب) اگر گلدان از بین رفته باشد، چقدر احتمال دارد که همسایه تان یادش رفته باشد که به آن آب بدهد؟

پاسخ:

الف) بر اساس قانون احتمال کل می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}
P(\text{سالم بودن گلدان}) &= P(\text{سالم بودن گلدان} \cap \text{آب‌دادن به گلدان}) + P(\text{سالم بودن گلدان} \cap \text{آب‌ندادن به گلدان}) \\
&= 0.85 \times 0.9 + 0.2 \times 0.1 = 0.785
\end{aligned}$$

ب) برای قسمت دوم سوال می‌توان براحتی از قانون بیز پاسخ را داد.

$$\begin{aligned}
P(\text{فراموش کردن} \mid \text{از بین رفتن گلدان}) &= \frac{P(\text{از بین رفتن گلدان} \cap \text{فراموش کردن همسایه})}{P(\text{از بین رفتن گلدان} \cap \text{فراموش کردن}) + P(\text{از بین رفتن گلدان} \cap \text{فراموش نکردن})} \\
&= \frac{P(\text{از بین رفتن گلدان} \mid \text{فراموش کردن}) \times P(\text{فراموش کردن})}{P(\text{از بین رفتن گلدان} \cap \text{فراموش کردن}) + P(\text{از بین رفتن گلدان} \cap \text{فراموش نکردن})}
\end{aligned}$$

مراجع

فهرست اختصارات

S

SLLN . . . . Strong law of large numbers

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

C

Chain Rule . . . . قاعده زنجیره‌ای

Combination . . . . ترکیب

Conditional Entropy . . . . انتروپی شرطی

Conditional Probability . . . . احتمال شرطی

D

Disjoint . . . . ناسازگار

E

Event . . . . پیشامد

Expectation . . . . امید ریاضی

I

Idle Mode . . . . مُد بیکار

Independent . . . . مستقل

N

Null Event . . . . پیشامد خنثی

O

Outcome . . . . خروجی

P

Permutation . . . . جایگشت

S

Sample Space . . . . فضای نمونه

Sure Event . . . . پیشامد حتمی

T

Total Probability Theorem . . . . قانون احتمال کل

U

User . . . . کاربر

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

ا

احتمال شرطی .... Conditional Probability

امید ریاضی .... Expectation

انتروپی شرطی .... Conditional Entropy

پ

پیشامد .... Event

پیشامد حتمی .... Sure Event

پیشامد خنثی .... Null Event

ت

ترکیب .... Combination

ج

جایگشت .... Permutation

خ

خروجی .... Outcome

ف

فضای نمونه .... Sample Space

ق

قاعده زنجیره‌ای .... Chain Rule

قانون احتمال کل .... Total Probability Theorem

ک

کاربر .... User

م

مُد بیکار .... Idle Mode

مستقل .... Independent

ن