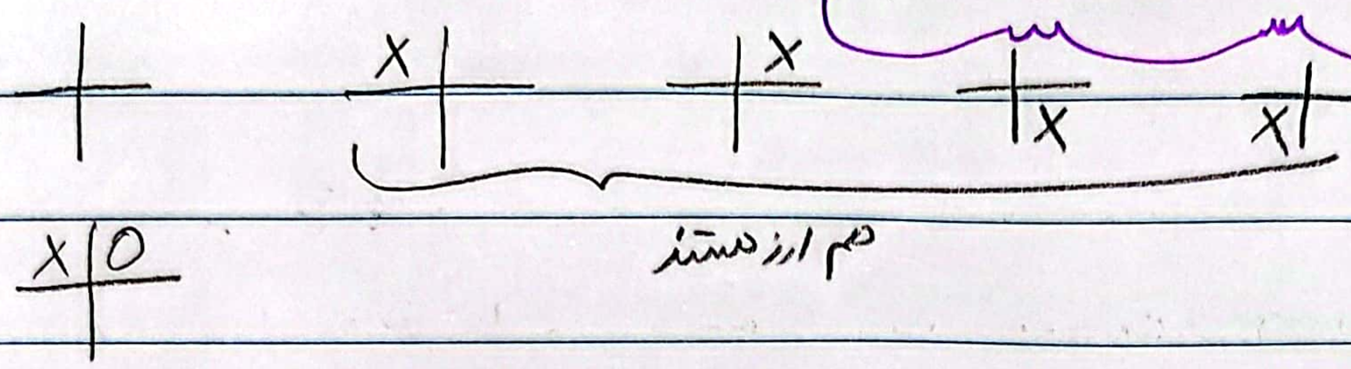
Subject: Year: Month: Day:

تمرین کلاسی ۱ :
سپیده شاه‌خسروی ۹۹۴۱۱۴۲۵

تعداد حالات بازی دوز 4×4

برای راحتی کار ابتدا دوز ۲×۲ را بررسی می‌کنیم:



هم ارز هستند

به طور کلی هر خانه می‌تواند X و O و یا خالی باشد. برای 2×2 داریم:

که این کل حالات است $\longrightarrow$ $3^4 = 81$

که در میان آنها حالات بازی غیر valid داریم و

نیستند یا اگر هستند هم ارزی باشند.

در واقع این 3^4 تعداد ما از شی‌هایی که گفته شد بازی است می‌تواند باشد که باید از این تعداد حالات ها حالات غیر valid و هم ارز حذف شوند.

← Burnside's lemma

طبق این لم باید بدانیم حالات هم ارز چگونه رخ می‌دهد.

به طور کلی 4 حالت rotation و 4 حالت reflection داریم.

در 2×2 شروع کننده برنده است.

در ۲×۲ حالات مجاز این است: کاملا خالی : 1 $\binom{4}{0}$

۱ خانه پر : 4 $\binom{4}{1}$

۲ خانه پر : 12 $\binom{4}{1}\binom{3}{1}$

۳ خانه پر : 12 حالت مجزا $\binom{4}{2}\binom{2}{1}$

تعداد کل حالات : 29 که بین آنها هم ارز هم داریم

King

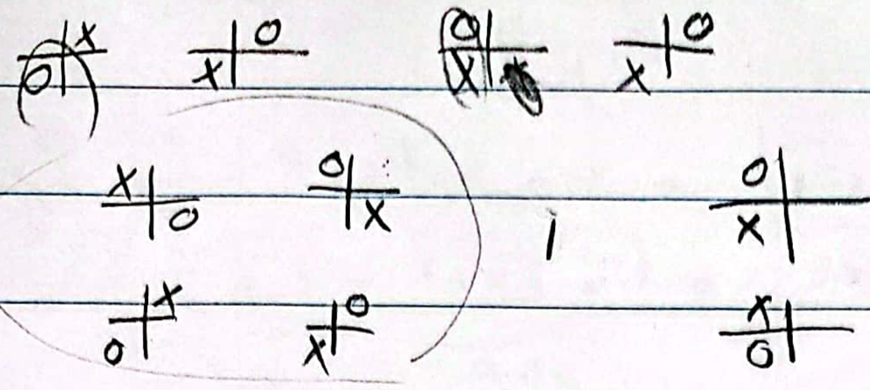
سعیده ستاره خردی ۹۹۲۱۴۲۵

Subject: Year: Month: Day:

2-

۱ خانه پر ← همه هم ارز ← ۱ حالت.

۲ خانه پر ← ۲ حالت غیرهم ارز



۳ خانه پر ← ۲ حالت

مجموعا: 2+2+1 حالت مجزا ← 5 (با ثابت rotation و reflection)

بدون ثابت اینها می‌شود 29 حالت.

برای 3x3 :

کل حالات 3^9 یا $3^{(3^2)}$

$3^9 = 19683$

که از بین اینها تعداد زیادی غیر قابل قبول داریم.

خانه خالی : ۱ حالت

۱ خانه پر : 9 حالت

2 خانه پر : $\binom{9}{1}\binom{8}{1} = 72$ حالت.

3 خانه پر : $\binom{9}{2}\binom{7}{1} = 252$

4 خانه پر : $\binom{9}{2}\binom{7}{2} = 756$

5 خانه پر : $\binom{9}{3}\binom{6}{2} = 1260$

6 خانه پر : $\underbrace{\binom{9}{3}\binom{6}{3}}_{1680} - \underbrace{\binom{6}{3}\times 8}_{\text{تعداد حالت‌هایی که نفر شروع کننده برده است و حرکت ششم بی‌معناست.}} = 1520$

سیده ستاره خسروی ۹۹۲۱۴۲۵

Subject: 126 10 Year: Month: Day:

۷ خانه پر:

$$\underbrace{\binom{9}{4}\binom{5}{3}}_{1260} - \underbrace{\binom{6}{4}\times 8}_{120} = 1140$$

۸ خانه پر:

$$\underbrace{\binom{9}{4}\binom{5}{4}}_{126 \cdot 5 = 630} - \underbrace{\binom{5}{4}\times 8\times\binom{6}{1}}_{240} = 390$$

۹ خانه پر:

$$\underbrace{\binom{9}{5}\binom{4}{4}}_{126} - \underbrace{8\times\binom{6}{1}\binom{5}{5}}_{48} = 78$$

کل حالات:

$$1+9+72+252+756+1260+1520+1140+390+78 = 5478$$

که در تئوری Game complexity و براساس تئوری گروه اگر حالات هم ارز هم حذف شوند در نهایت 765 حالت خواهیم داشت ولی بدون حذف حالات هم ارز 5478 حالت valid داریم.

برای 4×4:

تعداد کل حالات: $3^{(4^2)} = 3^{16} = 43\,046\,721$

که از این تعداد، تعداد زیادی حالت invalid داریم.

حالت خالی: ۱ حالت

حالت ۱ خانه پر: $\binom{16}{1} = 16$

حالت ۲ خانه پر: $\binom{16}{1}\binom{15}{1} = 240$

حالت 3 خانه پر: $\binom{16}{2}\binom{14}{1} = 1680$

حالت 4 خانه پر: $\binom{16}{2}\binom{14}{2} = 10920$

سیده ستاره خزری ۹۹۲۱۱۴۵

Subject: Year: Month: Day:

حالت 5 تا نفره: $\binom{16}{3}\binom{13}{2} = 43680$

حالت 6 تا نفره: $\binom{16}{3}\binom{13}{3} = 160160$

حالت 7 تا نفره: $\binom{16}{4}\binom{12}{3} = 400400$

حالت 8 تا نفره: $\underbrace{\binom{16}{4}\binom{12}{4}}_{900900} - \underbrace{10\times\binom{12}{4}}_{4950} = 895950$

حالت 9 تا نفره: $\underbrace{\binom{16}{5}\binom{11}{4}}_{1441440} - 10\times\binom{12}{5} = 1433520$

حالت 10 تا نفره: $\underbrace{\binom{16}{5}\binom{11}{5}}_{2018016} - \underbrace{10\times\binom{12}{1}\binom{11}{5}}_{55440} = 1962576$

حالت 11 تا نفره: $\underbrace{\binom{16}{6}\binom{10}{5}}_{2018016} - \underbrace{10\times\binom{12}{6}\binom{6}{1}}_{55440} = 1962576$

حالت 12 تا نفره: $\underbrace{\binom{16}{6}\binom{10}{6}}_{1681680} - \underbrace{10\times\binom{12}{2}\underbrace{\binom{10}{6}}_{\binom{10}{4}}}_{138600} = 1543080$

حالت 13 تا نفره: $\underbrace{\binom{16}{7}}_{11440}\underbrace{\binom{9}{6}}_{84} - 10\times\underbrace{\binom{12}{2}}_{66}\underbrace{\binom{10}{7}}_{\binom{10}{3}=120} = 881760$

حالت 14 تا نفره: $\underbrace{\binom{16}{7}}_{11440}\underbrace{\binom{9}{7}}_{36} - 10\times\underbrace{\binom{12}{3}}_{220}\underbrace{\binom{9}{7}}_{36} = 332640$

King

سیده ستاره خیری ۹۹۴۱۴۲۵

Subject: Year: Month: Day:

15 خانه‌ای:

$$\underbrace{\binom{16}{8}\underbrace{\binom{8}{7}}_{8}}_{102960} - \binom{12}{3}\binom{9}{8}\times 10 = 83160$$

16 خانه‌ای:

$$\underbrace{\binom{16}{8}}_{12870}\underbrace{\binom{8}{8}}_{1} - 10\times \underbrace{\binom{12}{4}\binom{8}{8}}_{4950} = 7920$$

اگر اینجا هم جابجایی رخ نداده باشد یعنی رنگ‌ها 9319879 حالت.

که در این مجموعه ممکن است حالاتی وجود داشته باشد که هم ارز یکدیگر هستند اگر rotation

و reflection را هم ارزی حساب کنیم.

در حالت 14 خانه‌ای به بعد هم ممکن است ایراد باشد.