Subject: Year: Month: Day:

تمرین کلاسی ۶:

سیده ستاره مهروی
۹۹۲۱۱۴۲۵

$\dot{x} = Ax + Bu$

$$J = \int_0^{+\infty} x^TQx + u^TRu \, dt$$

کنترل کننده فیدبک حالت $u = kx$ پایدارساز و J را minimize کند.

روش مربع کامل:
$$J = J_0 + \int_0^{\infty} (u-u_0)^T R (u-u_0) \, dt$$

Feedback Invariant

(1) $V(x) = x^TPx$

$$\dot{V}(x) = \dot{x}^TPx + x^TP\dot{x}$$
$$= (Ax+Bu)^TPx + x^TP(Ax+Bu)$$
$$= x^T(A^TP + PA)x + 2x^TPBu$$

(2) $\int_0^{\infty} \dot{V}(x) = V(\infty) - V(0) = -x(0)^TPx(0)$

با فرض پایداری: $V(\infty) = 0$

(3) J را می‌توان به فرم زیر نوشت

$$J = x(0)^TPx(0) + \int_0^{\infty} [x^T(A^TP + PA + Q)x + u^TRu + 2x^TPBu]$$

$\int_0^{\infty} \dot{V}(x) + -x(0)^TPx(0)$

(4) $u_0 = -R^{-1}B^TPx$ اگر جای‌گذاری شود

$$J_0 = x^T(0)Px(0) + \int_0^{\infty} x^T(A^TP + PA + Q - PBR^{-1}B^TP)x \, dt$$

(5) $A^TP + PA + Q - PBR^{-1}B^TP = 0$ معادله ریکاتی

$u_0 = -R^{-1}B^TPx$ کنترل بهینه

King

Subject: Year: Month: Day:

۹۹۴۱۱۴۵۸ سیده ستاره خسروی

حل خودمان:

$$J = \int_0^\infty (x^T Q x + u^T R u)\,dt$$

به

$$J = J_0 + \int_0^\infty (u(t) - u_0(t))^T R\,(u(t) - u_0(t))\,dt$$

$$J = x_0^T P x_0 + \int_0^\infty \left(\frac{d}{dt}(x^T P x) + x^T Q x + u^T R u\right) dt$$

داریم $\frac{d}{dt}(x^T P x) = \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x}$

و چون می‌دانیم $\dot{x} = Ax+B$ در معادله J به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$J = x_0^T P x_0 + \int_0^\infty \left(\underbrace{(Ax+Bu)^T P x + x^T P (Ax+Bu) + x^T Q x + u^T R u}_{\text{یک } u \text{ باید بذاریم برای این را جایگزین کند}}\right) dt$$

$$= x_0^T P x_0 + \int_0^\infty \left(x^T \underbrace{(A^T P + PA + Q)}_{\text{"}Q\text{"}} x + 2x^T P B u + u^T R u\right) dt$$

$$J = \underbrace{x_0^T P x_0}_{\text{به } u \text{ کلا بستگی نداره.}} + \int_0^\infty \left[\underbrace{x^T (A^T P + PA + Q - PBR^{-1}B^T P) x}_{\text{صفر کردن این قسمت سؤاله}} + \underbrace{(u + R^{-1}B^T P x)^T R (u + R^{-1}B^T P x)}_{\text{این بخش هم می‌تونه صفر بشه}}\right] dt$$

چطور ترم ۱/ دوم را صفر کنیم؟

$$(u + R^{-1}B^T P x)^T R (u + R^{-1}B^T P x) = 0$$

$u = -R^{-1}B^T P x \Leftarrow$ در این صورت ترم بالا صفر است.

King

Subject: Year: Month: Day:

سعید گلستانه مزروعی ۹۹٤۱۱٤۲۵

حال باید ترم اول صفر بشود: $A^TP+PA+Q-PBR^{-1}B^TP=0$

که یک معادله ریکاتی است بر حسب P و P را باید بدست آوریم.

در نهایت ببینیم آیا Optimal Solution در اینجا برابر $u=-R^{-1}B^TPx$ است یا خیر؟

نکته دیگری هم که هست اینه این u که الان بدست اومد نیست بالکه.

یک تئوری نیز هست که می‌گوید اگر $Q\geq0$ و $P>0$ باشد و A,B هم پایدارپذیر باشند و A,Q هم آشکارپذیر باشند این معادله ریکاتی که گفتیم یک حل یکتا دارد که مثبت معین است (PD) و $P=P^T>0$ و $\dot{x}=(A-BR^{-1}B^TP)x$ می‌شود.

در نهایت پاسخ بهینه و کنترلر بهینه که بهش LQR می‌گویند $u=-Kx$ با $K=R^{-1}B^TP$ تعیین می‌شود. در نهایت هم بر اساس تئوری بالا $A-BK$ پایدار است و با LQR کنترلر $u=-Kx$ یک سیستم حلقه بسته پایدار داریم و J برای هر $x(0)$ ای Min می‌شود $\rightarrow J_{min}=x(0)^TPx(0)$

حال اگر $K=R^{-1}B^TP$ درنظر بگیریم، در معادله ریکاتی که داشتیم جایگذاری می‌کنیم

$$A^TP+PA+Q-PBR^{-1}B^TP=0$$

$$(A-BK)^TP+P(A-BK)+(Q+K^TRK)=0$$

که این یک معادله لیاپانوف است. با اینکه $P>0$، اگر بخواهیم ثابت کنیم $A-BK$ پایدار است $\rightarrow$ مقدار ویژه λ و x را لحاظ می‌کنیم:

$$(A-BK)x=\lambda x$$

$$\rightarrow x^T\left[(A-BK)^TP+P(A-BK)+(Q+K^TRK)\right]x=0$$

King

۹۹۴۱۱۴۲۵ سعیده سادات فخروی

$$\Rightarrow (\lambda + \bar{\lambda})\, x^T P x + (x^T Q x + u^T R u) = 0$$

$$2\,Re(\lambda)\, x^T P x + (x^T Q x + u^T R u) = 0$$

$x \neq 0$ و $P > 0$ و $x^T P x > 0$ فقط باید بگیم $Re(\lambda)$ کمتر از صفر است.

حالت برعکسش که رخ نمیده یعنی $Re(\lambda)$ نمیتونه از صفر بیشتر باشه چون $x^T P x > 0$ ، $x^T Q x \geq 0$ ، $u^T R u \geq 0$ است

حالا اگر $Re(\lambda)$ برابر با صفر شود، چون فرض کردیم Q و A تشخیص پذیر هستند، $Re(\lambda)$ برابر با صفر هم ممکن نیست.

پس $Re(\lambda) < 0$ است و $A-BK$ پایدار است.