Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики

Отчет по заданию №6

«Сборка многомодульных программ. Вычисление корней уравнений и определенных интегралов.»

Вариант 10 / 2 / 2

Выполнил:
студент 119 группы
Трубецкой С. А.

Преподаватель:
Сковорода Н. А.

Москва
2020

Содержание

Постановка задачи

В данном проекте мне нужно было реализовать численный метод, позволяющий вычислять площадь плоской фигуры, ограниченной тремя заданными функциями. Поиск приближенного значения точек пересечения заданных функций требовалось выполнить методом хорд. Отрезки, на которых осуществлялся посик корней, вычисляются аналитически. Вычисление определенного интеграла осуществляется с помощью формулы трапеций.

Математическое обоснование

1. Выведем ε_1 и ε_2. Для этого обозначим c - числовая константа, т.ч. $\forall x \in$ (-2, 2) каждая функция $f_i(x) < c$, i=1,2,3**(*)**. Рассмотрим функцию $f_1(x) = 1 + \frac{4}{x^2+1}$. Она положительная на интервале (-2, 2).Пусть a', b' - точки пересечения кривых, вычисленные с погрещностью ε_1. Обозначим a, b - точные точки пересечения кривых, а следовательно $a' \in (a-\varepsilon_1, a+\varepsilon_1), b' \in (b-\varepsilon_1, b+\varepsilon_1)$. Мы ограничили функции на вычисляемом интервале, значит можно ограничить максимальную погрешность так, что:

$$max\left(\int\limits_{a-\varepsilon_1}^{a} f_1(x)dx, \int\limits_{a}^{a+\varepsilon_1} f_1(x)dx\right) + max\left(\int\limits_{b-\varepsilon_1}^{b} f_1(x)dx, \int\limits_{b}^{b+\varepsilon_1} f_1(x)dx\right) < 2\varepsilon_1 c + \varepsilon_2 \tag{1}$$

где ε_2 - точность вычисления интеграла. Так как такая погрешность возникает при вычислении интеграла для каждой из трех заданных функций, то ε_1 и ε_2 должны удовлетворять неравенству $2\varepsilon_1 c + \varepsilon_2 < \frac{\varepsilon}{3}$ (2). Теперь подберем такие ε_1 и ε_2. Для того, чтобы найти константу с, построим графики функций $f_1(x), f_2(x), f_3(x)$:

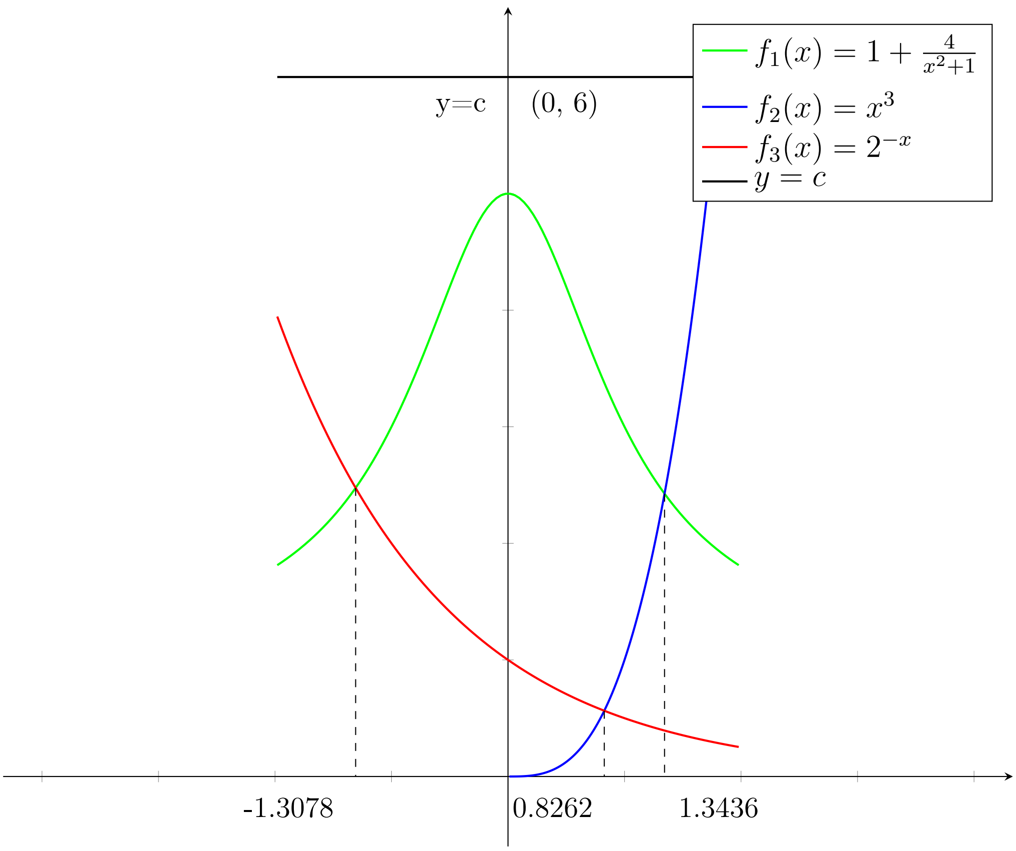


Рис. 1: Графики заданных функций

По графику видно, что для соблюдения условия **(*)**(см. стр. 3), в качестве константы можно взять число c=6. В силу того, что ε=0.001 по условию, в качестве ε_1 и ε_2 можно взять следующие числа:

$$\varepsilon_1 = 0.00001, \varepsilon_1 = 0.0001$$

В этом можно убедиться, подставив их в неравенство (2):

$$2\varepsilon_1 c + \varepsilon_2 = 2 * 0.00001 + 0.0001 = 0.00012 < 0.000(3) = \frac{\varepsilon}{3}$$

2. Найдем отрезки для поиска точек пересечения.
   Для предложенного мне метода хорд достаточно, чтобы функции f_{12}, f_{13}, f_{23} были строго монотонны на выбранных отрезках, и произведения значений каждой функции на концах своего отрезкабыли меньше нуля, где

$$f_{12} = f_1 - f_2 = 1 + \frac{4}{x^2+1} - x^3$$

$$f_{13} = f_1 - f_3 = 1 + \frac{4}{x^2+1} - 2^{-x}$$

$$f_{23} = f_2 - f_3 = x^3 - 2^{-x}$$

Построим графики этих функций:

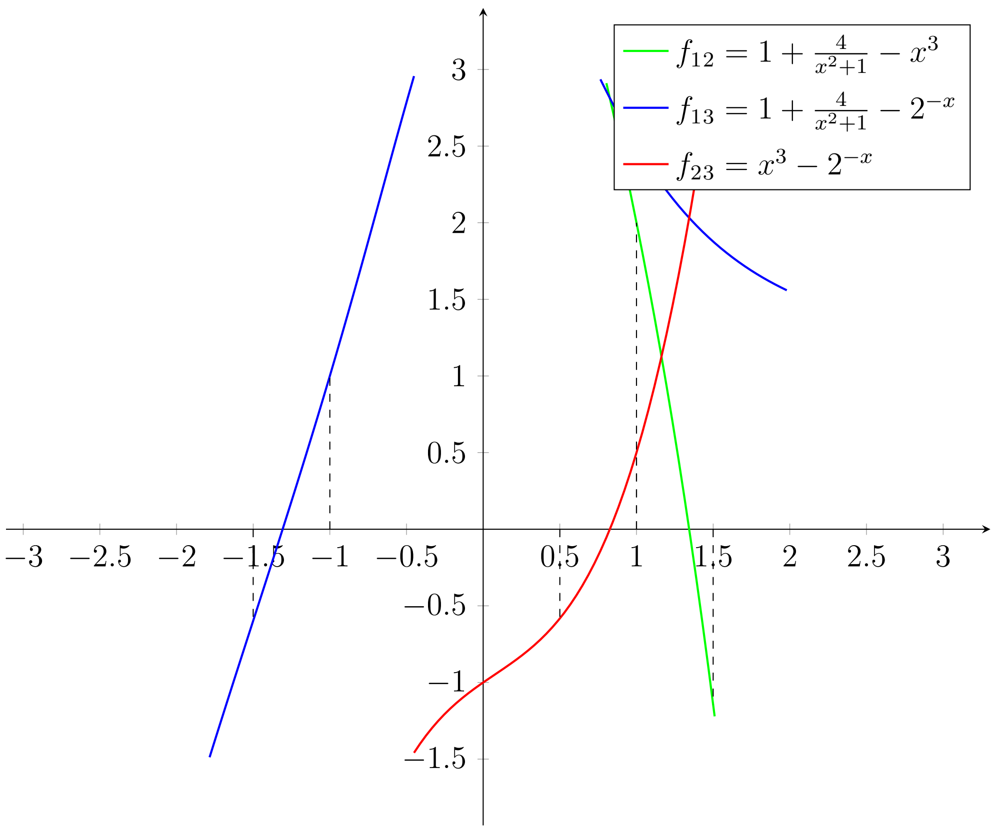


Рис. 2: Графики функций f_{12}, f_{13}, f_{23}

По графикам этих функций видно, что на отрезках [1, 1.5], [-1.5, -1], [0.5, 1] функции f_{12}, f_{13}, f_{23}, соответственно, удовлетворяют вышесказаным условиям.

Результаты экспериментов

Кривые	x	y
1 и 2	1.3436	2.4258
2 и 3	0.8262	0.5640
1 и 3	-1.3078	2.4757

Таблица 1: Координаты точек пересечения

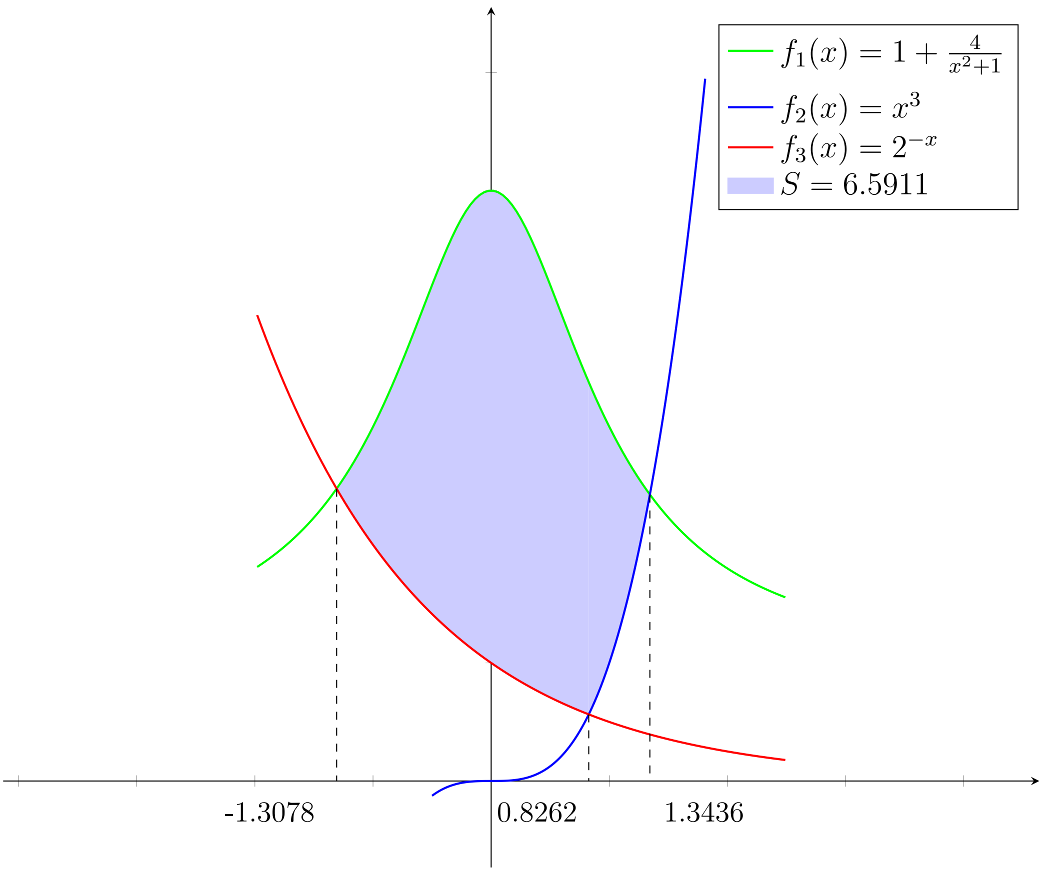


Рис. 3: Плоская фигура, ограниченная графиками заданных уравнений

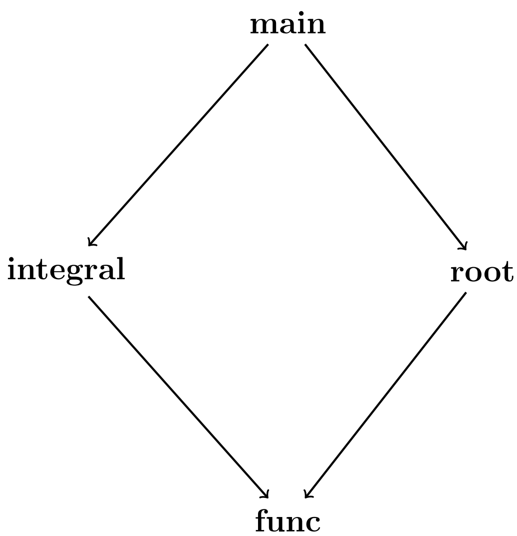
Структура программы и спецификация функций

- 1) double f1(double x), double f2(double x), double f3(double x) - функции, возвращающие значение заданных функций f_1, f_2, f_3, соответственно, в какой-либо точке их области определения. Эти функции реализованы в ассемблерном модуле.
  2) double f1test(double x), double f2test(double x), double f3test(double x) - функции, возвращающие значение специально выбранных для тестировки функций $f_1 test$, $f_2 test$, $f_3 test$, соответстветственно, в какой либо точке их области определения. Эти функции реализованы в Си модуле.
  В графе обозначим все эти шесть функций одним именем **func**, так как их вызов зависит от заданного в программе теста.

- double root(double f(double x), double g(double x), double a, double b, double eps1) - возвращает абсциссу точки пересечения функций f_i и f_j на определенном отрезке [a, b] с заданной точностью ϵ_1. Эта функция реализована в Си модуле.

- double integral(double f(double x), double a, double b, double eps2) - возвращает значение определленного интеграла от функции f_i, вычисленного по формуле трапеций с пределами интегрирования a и b и точностью ϵ_2. Эта функция реализована в Си модуле.

Граф зависемости функций:



Сборка программы (Make-файл)

В данном разделе необходимо описать зависимости между модулями программы и привести текст Make-файла. Зависимости проще всего описать диаграммой.

```
all: program

a2.o: project6.asm
	nasm -f elf32 project6.asm -o a2.o

a1.o: project6.c
	gcc -c -m32 project6.c -o a1.o

program: a2.o a1.o
	gcc -m32 a1.o a2.o -o a

clean:
	rm -f a1.o a2.o
```

Граф модулей Make-файл:

$$\begin{tikzcd}
\textbf{project6.asm} \arrow[r] & \textbf{a2.o} \arrow[dr] & \\
 & & \textbf{program} \\
\textbf{project6.c} \arrow[r] & \textbf{a1.o} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Отладка программы, тестирование функций

Сначала проведем тестирование функции root()

1. Первый тест:
$$f_1(x) = 5x + 3, f_2(x) = \frac{2}{x}$$
Рассмотрим отрезок [-2, -0.5]. Так как функция $f_1 - f_2 = 5x + 3 - \frac{2}{x}$ возрастает на всей своей области определения, то она возрастает и на выбронном нами отрезке, а следовательно удовлетворяет всем условиям для метода хорд. Тогда найдем точку пересечения функций f_1 и f_2:
$$5x + 3 - \frac{2}{x} = \frac{5(x+1)(x-\frac{2}{5})}{x} = 0$$
Единственный корень, лежащий на выбранном отрезке [-2, -0.5] - это -1.
Вывод программы:
```
test function 'root'
1: 5x + 3
2: 2 / x
3: x^3 + 5x
enter function numbers:
1 2
enter the segment [a, b] where the supposed root is:
-2 -0.5
enter epsilon:
0.00001
Function result: -1.000003
```

2. Второй тест:
$$f_1(x) = 5x + 3, f_3(x) = x^3 + 5x$$
Рассмотрим отрезок [-3, 0]. Так как функция $f_1 - f_3 = 5x + 3 - x^3 - 5x = 3 - x^3$ убывает на всей своей области определения, то она убывает и на выбронном нами отрезке, а следовательно удовлетворяет всем условиям для метода хорд. Тогда найдем точку пересечения функций f_1 и f_3:
$$3 - x^3 = 0$$
У этого уравнения существует единственный корень $x = \sqrt[3]{3} \approx 1.44224957$, и он лежит на выбранном нами отрезке [-3, 0].
Вывод программы:
```
test function 'root'
1: 5x + 3
2: 2 / x
3: x^3 + 5x
enter function numbers:
1 3
```

```
enter the segment [a, b] where the supposed root is:
-3 0
enter epsilon:
0.00001
Function result: 1.442240
```

3. Третий тест

$$\frac{2}{x}, f_3(x) = x^3 + 5x$$

Рассмотрим отрезок [0.1, 2]. Так как функция $f_1 - f_3 = \frac{2}{x} - x^3 - 5x$ убывает на всей своей области определения, то она убывает и на выбранном нами отрезке, а следовательно удовлетворяет всем условиям для метода хорд. Тогда найдем точку пересечения функций f_2 и f_3:

$$\frac{2}{x} - x^3 - 5x = -\frac{(x^2 + \frac{5+\sqrt{33}}{2})(x^2 + \frac{5-\sqrt{33}}{2})}{x} = 0$$

Единственный корень, лежащий на выбранном отрезке [0.1, 2] - это $x = \sqrt{\frac{-5+\sqrt{33}}{2}} \approx 0.610149$.
Вывод программы:

```
test function 'root'
1: 5x + 3
2: 2 / x
3: x^3 + 5x
enter function numbers:
2 3
enter the segment [a, b] where the supposed root is:
0.1 2
enter epsilon:
0.00001
Function result: 0.610158
```

Теперь проведем тестирование функции integral()

1. Первый тест:
Найдем определенный интеграл функции $f_1 = 5x + 3$, пределы интегрирования которого равны 1 и 5.

$$\int_1^5 (5x+3)dx = (\frac{5x^2}{2} + 3x)\Big|_1^5 = (\frac{125}{2} + 15) - (\frac{5}{2} + 3) = 72$$

Вывод программы:

```
test function 'integral'
1: 5x + 3
2: 2 / x
3: x^3 + 5x
```

```
enter function number:
1
enter integration limits x1, x2:
1 5
enter epsilon:
0.0001
Function result: 71.999973
```

2. Второй тест:
   Найдем определенный интеграл функции $f_2 = \frac{2}{x}$, пределы интегрирования которого равны 3 и 7.

$$\int_3^7 \frac{2}{x}dx = 2ln(x)\Big|_3^7 = 2ln7 - 2ln3 \approx 1.694596$$

   Вывод программы:

```
test function 'integral'
1: 5x + 3
2: 2 / x
3: x^3 + 5x
enter function number:
2
enter integration limits x1, x2:
3 7
enter epsilon:
0.0001
Function result: 1.6945783
```

3. Третий тест:
   Найдем определенный интеграл функции $f_2 = x^3 + 5x$, пределы интегрирования которого равны 3 и 5.

$$\int_3^5 (x^3 + 5x)dx = (\frac{x^4}{4} + \frac{5x^2}{2})\Big|_3^5 = (\frac{625}{4} + \frac{125}{2}) - (\frac{81}{4} + \frac{45}{2}) = 176$$

   Вывод программы:

```
test function 'integral'
1: 5x + 3
2: 2 / x
3: x^3 + 5x
enter function number:
3
enter integration limits x1, x2:
3 5
enter epsilon:
```

```
0.0001
Function result: 175.999982
```

Программа на Си и на Ассемблере

Исходные тексты программы лежат в архиве, который приложен к этому отчету. (точнее, на платформе Github).

Анализ допущенных ошибок

Основные ошибки были допущенны только при написании Make-файла и почти сразу же выявлены. Все остальные ошибки были связаны с невнимательностью и не являлись критическими.

Список литературы

[1] Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Бл. Х. Математический анализ. Т. 1 — Москва: Наука, 1985.