Digital Talent Scholarship 2022

Math for ML - 2

Lead a sprint through the Machine Learning Path

Agenda

- Matrik pada Linear Algebra
- Matrik dan Linear Mappings
- Next Steps

Are your students ML-ready?

Quick Recap :
Apa yang telah kita pelajari pada pertemuan sebelumnya ?

Matriks Pada Linear Aljabar

Matrix merupakan array dari m x n dimana m merepresentasikan row/baris dan n merepresentasikan kolom

$$m \times n$$

number of rows number of columns

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

rows

columns

KOMINFO digitalent

Apa hasil dari B transpose ?

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

Jawaban

$$B^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Apa hasil dari Matrix Transpose dibawah ini

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

Jawaban

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{bmatrix}$$

Determinants

Rumus (ordo 2 x 2)

$$\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

[Source: Ruangguru]

Contoh

Tentukanlah determinan matriks berikut!

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

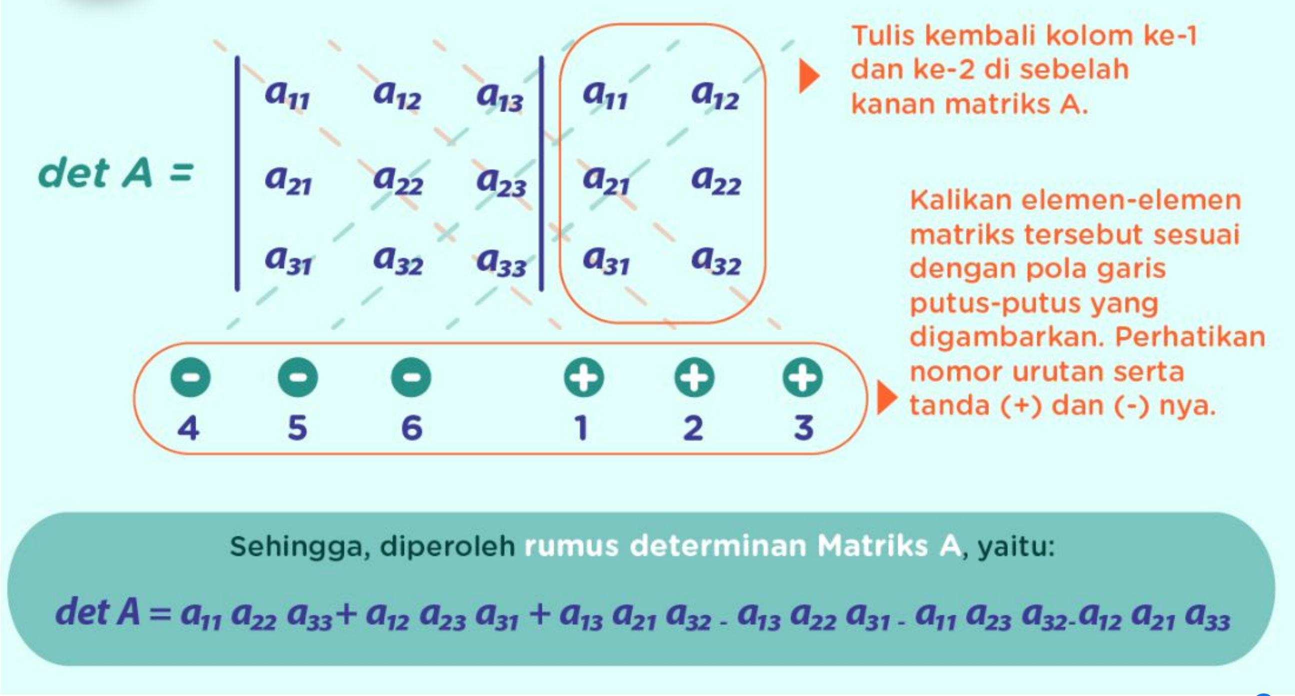
Jawaban

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = (2 \times 3) - (5 \times 4)$$

$$= 6 - 20$$

$$= -14$$

1. Aturan Sarrus



[Source: Ruangguru]

Contoh

Tentukan determinan matriks berikut ini menggunakan aturan *Sarrus*!

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 8 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Solusi

kita tulis kembali elemen-elemen pada kolom ke-1 dan ke-2 di sebelah kanan matriks A sebagai berikut:

$$A = \left|\begin{array}{ccc|cc} 4 & 2 & 8 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 5 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 3 & 2 \end{array}\right.$$

Kemudian, kita tarik garis putus-putus seperti gambar di atas. Kalikan elemen-elemen yang terkena garis putus-putus tersebut. Hasil kali elemen yang terkena garis putus-putus berwarna biru diberi tanda positif (+), sedangkan hasil kali elemen yang terkena garis putus-putus berwarna oranye diberi tanda negatif (-)

Solusi

Sehingga hasil determinan matriks A sebagai berikut:

$$\det A = 4 \cdot 1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 \cdot 3 + 8 \cdot 2 \cdot 2 - 8 \cdot 1 \cdot 3 - 4 \cdot 5 \cdot 2 - 2 \cdot 2 \cdot 4$$

$$\det A = 16 + 30 + 32 - 24 - 40 - 16 = -2$$

2. Metode Minor-Kofaktor

Misalkan, A_{ij} merupakan matriks bagian dari matriks A yang diperoleh dengan cara menghilangkan baris ke-i dan kolom ke-j.

Minor matriks A_{ij} diberi notasi M_{ij}, dengan $M_{ij} = \det A_{ij}$.

Kofaktor matriks A_{ij} diberi notasi C_{ij}, dengan $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$

Sehingga, diperoleh rumus determinan Matriks A, yaitu:

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot C_{ij}$$, untuk sembarang kolom j $(j = 1, 2, \ldots, n)$

Atau

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot C_{ij}$$, untuk sembarang baris i $(i = 1, 2, \ldots, n)$

dengan a_{ij} = elemen matriks A_{ij}

[Source: Ruangguru]

Contoh

Tentukan determinan matriks berikut ini menggunakan metode minor-kofaktor!

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 8 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Solusi

pertama, kita pilih salah satu baris atau kolom matriks A untuk mendapatkan nilai determinannya. Misalnya, kita pilih baris ke-1. Elemen-elemen matriks baris ke-1, yaitu a_{11}, a_{12}, dan a_{13}.

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{4 \quad 2 \quad 8} \\ 2 \quad 1 \quad 5 \\ 3 \quad 2 \quad 4 \end{pmatrix}$$

Solusi

Selanjutnya, karena kita pilih elemen-elemen pada baris ke-1, rumus determinan matriks yang kita gunakan adalah sebagai berikut:

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot C_{ij}$$

$$\det A = \sum_{i=1}^{3} a_{ij} \cdot C_{ij} = a_{11} \cdot C_{11} + a_{12} \cdot C_{12} + a_{13} \cdot C_{13}$$

Langkah kedua, kita cari kofaktor matriks bagian dari matriks A (C_{ij}). Cij = $(-1)^{i+j}$ M_{ij} dan M_{ij} = det A_{ij} dengan A_{ij} merupakan matriks bagian dari matriks A yang diperoleh dengan menghilangkan baris ke-i dan kolom ke-j. Sebelumnya, kita telah memilih elemen-elemen pada baris ke-1, yaitu a11, a12, dan a13. Oleh karena itu, matriks bagian dari matriks A nya adalah A11, A12, dan A13.

Solusi

- A_{11} diperoleh dengan menghilangkan elemen-elemen pada baris ke-1 dan kolom ke-1.

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 8 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad maka \quad M_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$$

- A_{12} diperoleh dengan menghilangkan elemen-elemen pada baris ke-1 dan kolom ke-2.

$$A_{12} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 8 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad maka \quad M_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$$

- A_{13} diperoleh dengan menghilangkan elemen-elemen pada baris ke-1 dan kolom ke-3.

$$A_{13} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 8 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad maka \quad M_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$A = \begin{matrix} 4 & 2 & 8 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 3 \\ 2 & 5 & 4 & 7 \end{matrix} \qquad M31 = \begin{matrix} 2 & 8 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 5 & 4 & 7 \end{matrix}$$

$$A = \begin{matrix} 4 & 2 & 8 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 3 \\ 2 & 5 & 4 & 7 \end{matrix} \qquad M31 = \begin{matrix} 4 & 8 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 7 \end{matrix}$$

$$A = \begin{matrix} 4 & 2 & 8 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 3 \\ 2 & 5 & 4 & 7 \end{matrix} \qquad M31 = \begin{matrix} 2 & 8 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 5 & 4 & 7 \end{matrix}$$

$$A = \begin{matrix} 4 & 2 & 8 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 3 \\ 2 & 5 & 4 & 7 \end{matrix} \qquad M31 = \begin{matrix} 4 & 2 & 8 \\ 3 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \end{matrix}$$

Solusi

Sehingga hasil dari determinan matriks A adalah

$$\det A = a_{11} \cdot C_{11} + a_{12} \cdot C_{12} + a_{13} \cdot C_{13}$$

$$= 4 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + 8 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 4 \cdot (4 - 10) - 2 \cdot (8 - 15) + 8 \cdot (4 - 3)$$

$$= -24 + 14 + 8 = -2$$

KOMINFO digitalent

Sifat - sifat Determinan Matriks

1 Misalkan, A matriks persegi berordo nxn dengan determinan $|A|$, B matriks persegi berordo nxn dengan determinan $|B|$, dan k suatu konstanta.

a. $|AB| = |A||B|$.

b. $|A^T| = |A|$, (A^T merupakan transpose dari matriks A).

c. $|kA| = k^n|A|$, dengan $n =$ ordo matriks A.

d. $|A^{-1}| = \dfrac{1}{ad - bc}$, (A^{-1} merupakan invers dari matriks A).

2 Jika semua elemen pada salah satu baris atau kolom matriks A sama dengan 0, maka $|A| = 0$.

Contoh : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow |A| = 0$

Source: Ruangguru

Sifat - sifat Determinan Matriks

3 Jika semua elemen pada salah satu baris atau kolom matriks A sama dengan elemen pada baris atau kolom yang lain, maka $|A| = 0.$

Contoh : $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow |A| = 0$

4 Jika semua elemen pada salah satu baris atau kolom matriks A merupakan kelipatan dari elemen pada baris atau kolom yang lain, maka $|A| = 0.$

Contoh : $A = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 8 \\ 7 & 2 & 9 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow |A| = 0$

Source: Ruangguru

Inverse Matrix

Invers dapat juga diartikan sebagai lawan dari sesuatu (kebalikan). Invers matriks adalah kebalikan (invers) dari sebuah matriks. Jadi, apabila matriks tersebut dikalikan dengan inversnya, maka akan menjadi matriks identitas.

Contoh :

Carilah invers dari $f(x) = 2x$

maka jawabannya adalah $f^{-1}(x) = \frac{1}{2} x$

Inverse Matrix

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Inverse = (1/determinant)*Adjoint

Contoh

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$$

Pembahasan :

$$A^{-1} = \frac{1}{(4 \cdot 2) - (1 \cdot 7)} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -7 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{8-7} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -7 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -7 & 4 \end{pmatrix}$$

Inverse

Misalkan, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ merupakan matriks berordo 3x3.

Adjoin matriks A dinotasikan adj (A), dengan $adj\ (A) = (kof\ (A))^T$

Invers matriks A dapat dicari dengan:

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\, adj(A) = \frac{1}{\det A}\, adj\ (A)$$

Source: Ruangguru

Contoh

Tentukan invers matriks berikut dengan menggunakan adjoin!

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 8 & 7 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Penyelesaian

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\, adj\,(A)$$

Pertama, kita cari terlebih dahulu determinan matriks A menggunakan metode yang sudah dijelaskan sebelumnya. Bisa dengan cara aturan Sarrus ataupun metode minor-kofaktor. Misalnya, kita akan menggunakan metode Sarrus, sehingga:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 8 & 7 \\ 1 & 5 & 6 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & 8 \\ 1 & 5 \end{matrix}$$

$$\det A = 1\cdot 8\cdot 6 + 2\cdot 7\cdot 1 + 3\cdot 2\cdot 5 - 3\cdot 8\cdot 1 - 1\cdot 7\cdot 5 - 2\cdot 2\cdot 6$$

$$= 48 + 14 + 30 - 24 - 35 - 24 = 9$$

Penyelesaian

Kemudian, kita tentukan adjoin matriks dengan mencari kofaktor matriks A tersebut.

$$\text{kof}(A) = \left((-1)^{i+j} M_{ij}\right)$$

$$\text{kof}(A) = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 8 & 7 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 7 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & -5 & 2 \\ 3 & 3 & -3 \\ -10 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Penyelesaian

Oleh karena itu,

$$\operatorname{adj}(A) = (\operatorname{kof}(A))^T = \begin{pmatrix} 13 & 3 & -10 \\ -5 & 3 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

Jadi,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\, adj\,(A) = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 13 & 3 & -10 \\ -5 & 3 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{13}{9} & \frac{1}{3} & -\frac{10}{9} \\ -\frac{5}{9} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{9} \\ \frac{2}{9} & -\frac{1}{3} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}$$

Sifat - sifat Invers Matriks

Misalkan, A^{-1} merupakan invers matriks A_{nxn}, B^{-1} merupakan invers matriks B_{nxn}, C^{-1} merupakan invers matriks C_{nxn}, dan I merupakan matriks identitas.

a. $A \cdot A^{-1} = I$ *atau* $A^{-1} \cdot A = I$

b. $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$ *atau* $(A \cdot B \cdot C)^{-1} = C^{-1} \cdot B^{-1} \cdot A^{-1}$

Source: Ruangguru

Sudah Pusing?

Mathematics for Machine Learning: Linear Algebra

Formula Sheet

Vector operations

$$\mathbf{r} + \mathbf{s} = \mathbf{s} + \mathbf{r}$$
$$2\mathbf{r} = \mathbf{r} + \mathbf{r}$$
$$\|\mathbf{r}\|^2 = \sum_i r_i^2$$

- *dot or inner product*:

$$\mathbf{r}.\mathbf{s} = \sum_i r_i s_i$$

commutative $\mathbf{r}.\mathbf{s} = \mathbf{s}.\mathbf{r}$

distributive $\mathbf{r}.(\mathbf{s} + \mathbf{t}) = \mathbf{r}.\mathbf{s} + \mathbf{r}.\mathbf{t}$

associative $\mathbf{r}.(a\mathbf{s}) = a(\mathbf{r}.\mathbf{s})$

$$\mathbf{r}.\mathbf{r} = \|\mathbf{r}\|^2$$

$$\mathbf{r}.\mathbf{s} = \|\mathbf{r}\|\|\mathbf{s}\| \cos\theta$$

- *scalar and vector projection*:

scalar projection: $\dfrac{\mathbf{r}.\mathbf{s}}{\|\mathbf{r}\|}$

vector projection: $\dfrac{\mathbf{r}.\mathbf{s}}{\mathbf{r}.\mathbf{r}}\mathbf{r}$

Change of basis

Change from an original basis to a new, primed basis. The columns of the transformation matrix B are the new basis vectors in the original coordinate system. So

$$B\mathbf{r}' = \mathbf{r}$$

where r' is the vector in the B-basis, and r is the vector in the original basis. Or;

$$\mathbf{r}' = B^{-1}\mathbf{r}$$

If a matrix A is *orthonormal* (all the columns are of unit size and orthogonal to eachother) then:

$$A^T = A^{-1}$$

Gram-Schmidt process for constructing an orthonormal basis

Start with n linearly independent basis vectors $\mathbf{v} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n\}$. Then

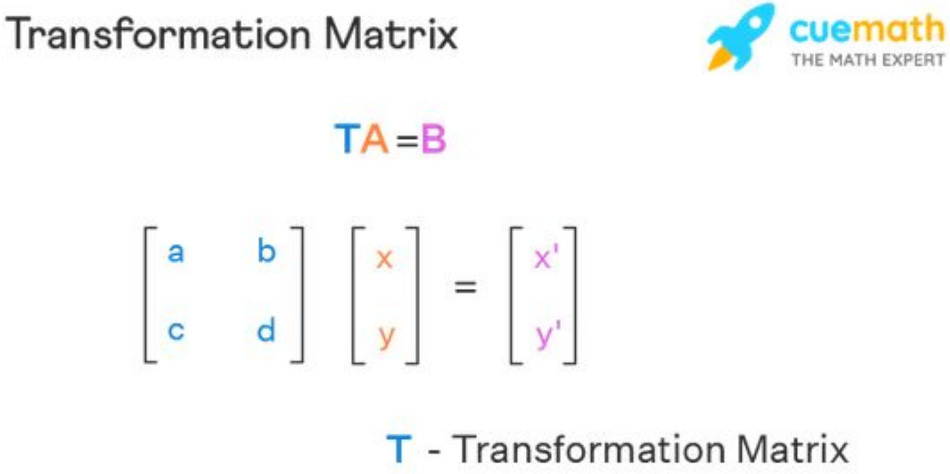
$$\mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{v}_1}{||\mathbf{v}_1||}$$

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - (\mathbf{v}_2.\mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1 \quad \text{so} \quad \mathbf{e}_2 = \frac{\mathbf{u}_2}{||\mathbf{u}_2||}$$

... and so on for $\mathbf{u}_3$ being the remnant part of $\mathbf{v}_3$ not composed of the preceding $\mathbf{e}$-vectors, etc. ...

Types of matrix transformation

Transformation matrix is a matrix that transforms one vector into another vector. The positional vector of a point is changed to another positional vector of a new point, with the help of a transformation matrix. The position vector of a point A = xi + yj, on multiplying with a matrix T = (abcd) is transformed to another vector B = x'i + y'j. Here the vector A = xi + yj is represented as a column matrix A = [xy], and the matrix B = x'i + y'j is another column matrix B = [x′y′].



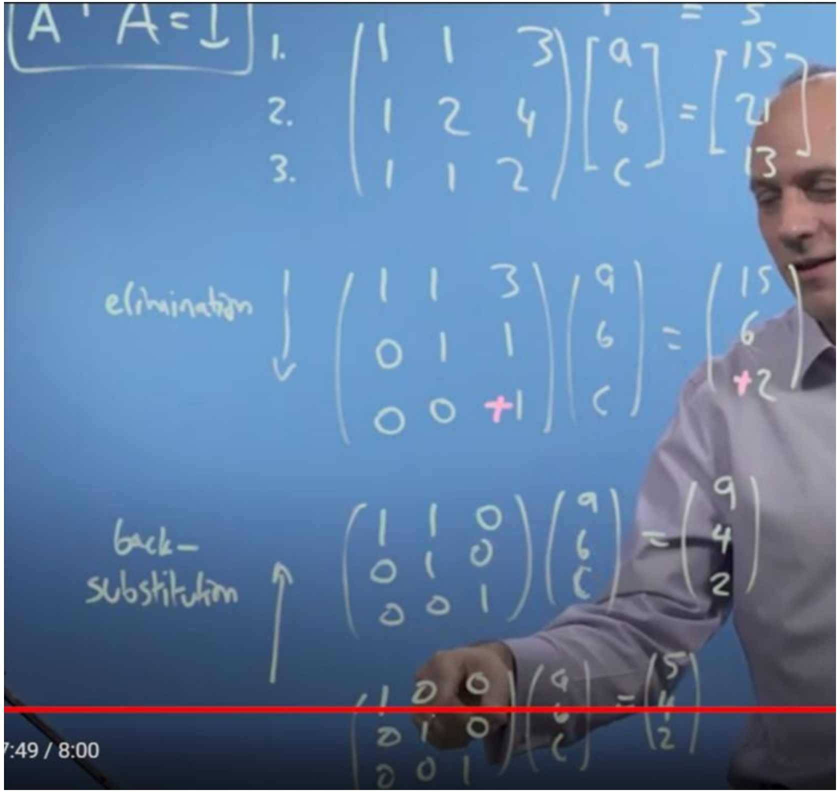
Types of Transformation

Transformation Type	Transformation Matrix	Pixel Mapping Equation
Identity	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$x' = x$ $y' = y$
Scaling	$\begin{bmatrix} c_x & 0 & 0 \\ 0 & c_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$x' = c_x * x$ $y' = c_y * y$
Rotation*	$\begin{bmatrix} cos\Theta & sin\Theta & 0 \\ -sin\Theta & cos\Theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$x' = x * cos\Theta - y * sin\Theta$ $y' = x * cos\Theta + y * sin\Theta$

Transformation Type

Translation	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$x' = x + t_x$ $y' = y + t_y$
Horizontal Shear	$\begin{bmatrix} 1 & s_h & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$x' = x + s_v * y$ $y' = y$
Vertical Shear	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ s_v & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$x' = x$ $y' = x * s_h + y$

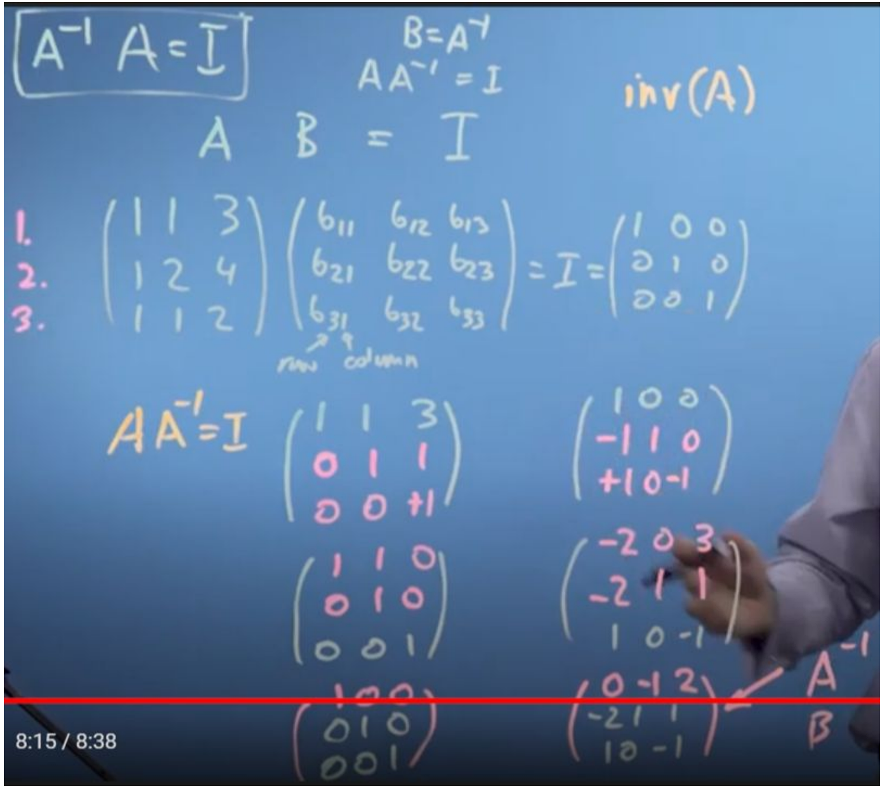
Gaussian elimination



Gaussian elimination

System of equations	Row operations	Augmented matrix
$\begin{aligned} 2x + y - z &= 8 \\ -3x - y + 2z &= -11 \\ -2x + y + 2z &= -3 \end{aligned}$		$\left[\begin{array}{ccc\|c} 2 & 1 & -1 & 8 \\ -3 & -1 & 2 & -11 \\ -2 & 1 & 2 & -3 \end{array}\right]$
$\begin{aligned} 2x + y - z &= 8 \\ \tfrac{1}{2}y + \tfrac{1}{2}z &= 1 \\ 2y + z &= 5 \end{aligned}$	$\begin{aligned} L_2 + \tfrac{3}{2}L_1 &\to L_2 \\ L_3 + L_1 &\to L_3 \end{aligned}$	$\left[\begin{array}{ccc\|c} 2 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \end{array}\right]$
$\begin{aligned} 2x + y - z &= 8 \\ \tfrac{1}{2}y + \tfrac{1}{2}z &= 1 \\ -z &= 1 \end{aligned}$	$L_3 + -4L_2 \to L_3$	$\left[\begin{array}{ccc\|c} 2 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right]$
The matrix is now in echelon form (also called triangular form)		
$\begin{aligned} 2x + y &= 7 \\ \tfrac{1}{2}y &= \tfrac{3}{2} \\ -z &= 1 \end{aligned}$	$\begin{aligned} L_2 + \tfrac{1}{2}L_3 &\to L_2 \\ L_1 - L_3 &\to L_1 \end{aligned}$	$\left[\begin{array}{ccc\|c} 2 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right]$
$\begin{aligned} 2x + y &= 7 \\ y &= 3 \\ z &= -1 \end{aligned}$	$\begin{aligned} 2L_2 &\to L_2 \\ -L_3 &\to L_3 \end{aligned}$	$\left[\begin{array}{ccc\|c} 2 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$
$\begin{aligned} x &= 2 \\ y &= 3 \\ z &= -1 \end{aligned}$	$\begin{aligned} L_1 - L_2 &\to L_1 \\ \tfrac{1}{2}L_1 &\to L_1 \end{aligned}$	$\left[\begin{array}{ccc\|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$

From Gaussian E to Finding the inverse matrix



Orthogonal Matrices

$$column\ vectors\ v_1, v_2, \ldots, v_n\ of\ Q\ are\ orthogonal:$$

$$v_i^T v_j = \begin{cases} 0 & if\ i \neq j \\ 1 & if\ i = j \end{cases}$$

$$The\ orthogonal\ matrix\ Q = [v_1, v_2, \ldots, v_n]$$

$$Q^T \cdot Q = \begin{bmatrix} v_1^T \\ v_2^T \\ \ldots \\ v_n^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \ldots & v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1^T v_1 & v_1^T v_2 & \ldots & v_1^T v_n \\ v_2^T v_1 & v_2^T v_2 & \ldots & v_2^T v_n \\ \ldots & & & \\ v_n^T v_1 & v_n^T v_2 & \ldots & v_n^T v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & & & \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$\therefore Q^{-1} = Q^T$$

KOMINFO digitalent

Orthogonal Matrices

Orthogonal Matrix

cuemath THE MATH EXPERT

A Square matrix ‘A’ is orthogonal if

$$A^T = A^{-1}$$

(OR)

$$AA^T = A^TA = I\text{, where}$$

- A^T = Transpose of A
- A^{-1} = Inverse of A
- I = Identity matrix of same order as ‘A’

Orthogonal Matrices

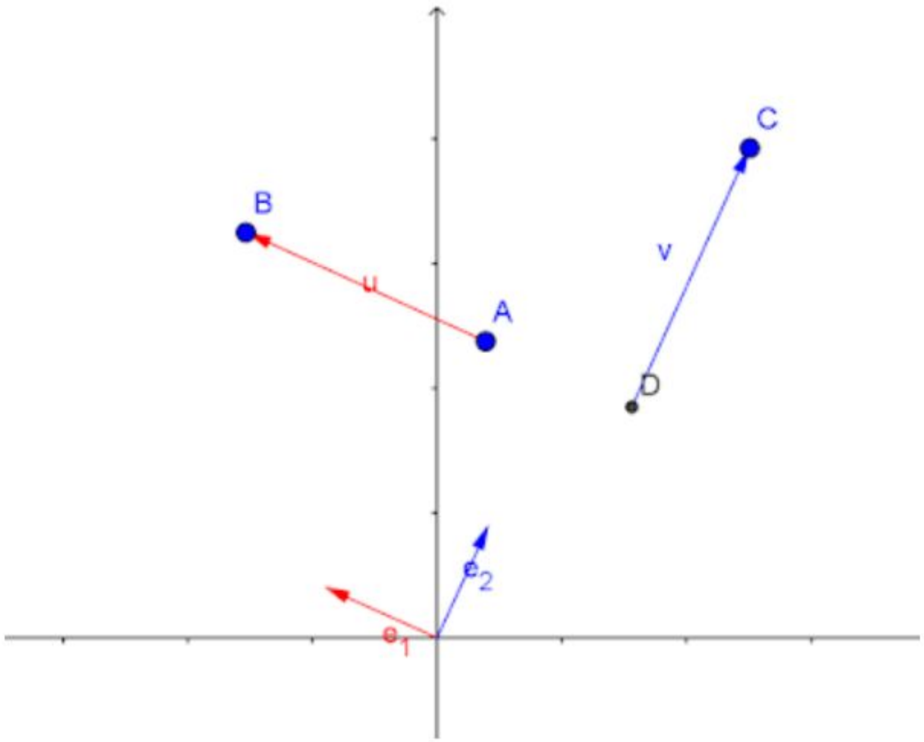
- Himpunan vektor-vektor dalam ruang hasilkali dalam disebut sebagai **Himpunan Ortogonal**, jika setiap pasangan vektor yang berbeda dalam himpunan tersebut saling ortogonal.
- Himpunan ortogonal yang setiap vektornya memiliki norma 1 disebut **Ortonormal**.
- Dengan kata lain, {v1 , v2 , … , vn} dari vektor-vektor di **V** adalah ortonormal apabila:
  - $\langle vj , vk \rangle = 0, j != k$
  - $\langle vj , vk \rangle = 1, j = k$
  - j, k = 1 , 2 , … , n

Orthogonal Matrices

Suatu himpunan **V** = {**v**1, **v**2, **v**3} dapat dikatakan ortonormal apabila berlaku

- <**v**1, **v**2> = 0
- <**v**1, **v**3> = 0
- <**v**2, **v**3> = 0
- |**v**1| = |**v**2| = |**v**3| = 1

Orthogonal Matrices



Ortonormal harus memenuhi dua syarat, yaitu panjang vektornya 1 dan saling tegak lurus. Dua vektor yang saling tegak lurus **belum bisa** dikatakan saling ortonormal jika ada vektor yang **panjangnya** tidak sama dengan 1.

Orthogonal Matrices

Example

Diberikan himpunan $\mathbf{V} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ dengan

$$\mathbf{v}_1 = (0, 1, 0), \quad \mathbf{v}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad \mathbf{v}_3 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

adalah vektor-vektor di R^3 yang dilengkapi hasilkali dalam euclid. Tunjukkan bahwa himpunan $\mathbf{V}$ ortonormal.

KOMINFO digitalent

Orthogonal Matrices

Solution

- *Himpunan* $\mathbf{V}$ *dikatakan ortonormal apabila memenuhi*

$$\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle = 0, \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3 \rangle = 0, \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \rangle = 0 \text{ } dan \text{ } \|\mathbf{v}_1\| = \|\mathbf{v}_2\| = \|\mathbf{v}_3\| = 1$$

- *Perhatikan bahwa*

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle &= 0 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + 1 \cdot 0 + 0 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 0 \\
\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3 \rangle &= 0 \cdot -\frac{1}{\sqrt{2}} + 1 \cdot 0 + 0 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 0 \\
\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot -\frac{1}{\sqrt{2}} + 0 \cdot 0 + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 0
\end{aligned}$$

Orthogonal Matrices

Solution

- *Selanjutnya diperoleh*

$$
\begin{aligned}
\|\mathbf{v}_1\| &= \sqrt{0^2 + 1^2 + 0^2} = 1 \\
\|\mathbf{v}_2\| &= \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 0^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = 1 \\
\|\mathbf{v}_3\| &= \sqrt{\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 0^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = 1
\end{aligned}
$$

- *Dengan demikian* $\mathbf{V}$ *ortonormal.*

Quick Recap