

**VORLESUNG
RIEMANNSCHE GEOMETRIE
WS 18/19**

KARSTEN GROSSE-BRAUCKMANN

INHALTSVERZEICHNIS

Literatur	iv
Einführung	v
Teil 1. Mannigfaltigkeiten und differenzierbare Abbildungen	1
1. Differenzierbare Mannigfaltigkeiten	1
1.1. Etwas Topologie	1
1.2. Differenzierbare Mannigfaltigkeiten	2
1.3. Differenzierbare Abbildungen	4
2. Tangentialraum	5
2.1. Tangentialraum in einem Punkt	5
2.2. Lie-Ableitung	6
2.3. Tangentialbündel	7
2.4. Differential	9
3. Vektorfelder und Kommutator	10
3.1. Vektorfelder auf Mannigfaltigkeiten	10
3.2. Vektorfelder als Derivationen	11
3.3. Lie-Klammer zweier Vektorfelder	12
Teil 2. Semi-Riemannsche Metriken und Zusammenhänge	15
1. Metriken	15
1.1. Semi-Riemannsche Metriken	15
1.2. Räume der Relativitätstheorie	17
1.3. Länge, Winkel, Volumen	17
1.4. Konforme Metriken	18
1.5. Isometrien	19
1.6. Existenz Riemannscher Metriken	21

1.7. Gruppenoperationen	22
1.8. Operation von Lie-Gruppen	23
2. Parallelität und kovariante Ableitung für immersierte Flächen	26
2.1. Parallelverschiebung: Definition und Eigenschaften	27
2.2. Parallelität als Differentialgleichung	29
2.3. Kovariante Ableitung längs Kurven	31
2.4. Kovariante Ableitung von Vektorfeldern	32
3. Zusammenhänge	34
3.1. Zusammenhänge	35
3.2. Parallelverschiebung eines Zusammenhangs	36
3.3. Torsionsfreiheit und Verträglichkeit von Zusammenhängen	38
3.4. Indizes heben und senken ist Musik	40
3.5. Levi-Civita-Zusammenhang und Koszul-Formel	41
4. Geodätische und Exponentialabbildung	42
4.1. Geodätische	43
4.2. Exponentialabbildung	45
4.3. Kovarianter Satz von Schwarz	48
4.4. Erste Variation der Energie	49
4.5. Stückweise differenzierbare Kurven	52
4.6. Kürzeste	53
4.7. Gauß-Lemma	54
5. Riemannsche Mannigfaltigkeiten als metrische Räume	56
5.1. Normale Bälle	56
5.2. Radiale Geodätische sind Kürzeste	57
5.3. Abstandsmetrik	59
5.4. Vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeiten	60
6. Hyperbolischer Raum	63
6.1. Modelle des hyperbolischen Raums	64
6.2. Isometrien im Hyperboloid-Modell	65
6.3. Geodätische	68
6.4. Parallelenaxiom	71
6.5. Kompakte hyperbolische Flächen	71
Teil 3. Krümmung	74
1. Krümmungsbegriffe	74
1.1. Gauß-Krümmung von Flächen	74

1.2. Krümmungstensor	76
1.3. Schnittkrümmung	78
1.4. Mannigfaltigkeiten konstanter Krümmung	81
1.5. Geometrische Eigenschaften des Krümmungstensors	84
2. Tensoren	86
2.1. Multilineare Algebra	86
2.2. Tensorfelder	88
2.3. Riemannsche Tensorkonstruktionen	90
2.4. Kovariante Ableitung von Tensorfeldern	92
2.5. Riemannsche Differentialoperatoren div und Δ	94
2.6. Ricci- und Skalkrümmung	95
3. Zweite Variation und Satz von Myers	97
3.1. Zweite Variation der Energie	97
3.2. Satz von Myers	98
3.3. Anhang: Überlagerungen	100
4. Jacobifelder	103
4.1. Jacobi-Gleichung	103
4.2. Krümmungsberechnung für \mathbb{S}^n und \mathbb{H}^n	106
4.3. Jacobifelder in Räumen konstanter Krümmung oder in Dimension 2	107
5. Konjugierte Punkte und Satz von Cartan-Hadamard	110
5.1. Kritische Punkte von $d\exp$	110
5.2. Konjugierte Punkte und Kürzeste	111
5.3. Satz von Cartan-Hadamard	112
5.4. Ausblick auf Sätze zu Topologie und Krümmung	114
6. Riemannsche Untermannigfaltigkeiten	116
6.1. Zweite Fundamentalform	117
6.2. Gauß-Gleichung	120
6.3. Krümmungsgrößen für Hyperflächen	122
6.4. Codazzi-Gleichung für Hyperflächen	124
6.5. Hauptsatz der Flächentheorie	126
6.6. Höhere Kodimension	128
Teil 4. Anhang: Übungsaufgaben	129
1. Mannigfaltigkeiten	129
2. Semi-Riemannsche Metriken und Zusammenhänge	131
3. Krümmung	154

Literatur

- [dC] Do Carmo: Riemannian Geometry, Birkhäuser 1992 (didaktisch gut; Kapitel 1 ist allerdings nicht gut durchgearbeitet und Karten gehen in umgekehrte Richtung)
- [GHL] Gallot, Hulin, Lafontaine: Riemannian Geometry, 3. Aufl., Springer 04 (guter Überblick, viele Themen und Beispiele)
- [L] Lee: Riemannian Manifolds, Springer 1997 (Empfohlen: Entspricht ziemlich dem Vorlesungsstoff, ausgezeichnet präsentiert mit Konzentration auf die Hauptideen.)
- [ON] O’Neill: Semi-Riemannian Geometry, with applications to relativity
(Behandelt durchgängig den semi-Riemannschen Fall. Konkret und gut geschrieben. Auch für Physiker empfohlen wegen Stil und mathematischer Behandlung relativistischer Themen.)
- [P] Petersen: Riemannian Geometry, Springer 2006 (Enthält viele Ergebnisse und neuere Entwicklungen, dargestellt auf höherem Niveau.)
- [Sh] Sharpe: Differential Geometry (Behandelt den Differentialformenkalkül.)
- [Sp] Spivak: Differential Geometry, 5 Bände, Publish or Perish 1979.
(Alles was man wissen möchte und noch mehr!)

Literatur zu Grundlagen:

- [Bär] Bär: Elementare Differentialgeometrie, de Gruyter 2010
- [H] Hatcher: Algebraic Topology, Cambridge 2002, pdf im Internet.
- [L2] Lee: Introduction to smooth manifolds, Springer 2003

Literatur zu speziellen Themen:

- [A] Anderson, J.W.: Hyperbolic geometry, Springer, 2005.
- [Be] Besse: Einstein manifolds, Springer.
- [B] Benedetti, Petronio: Hyperbolic geometry, Springer 1992, 2003
- [Fl] Fließbach: Allgemeine Relativitätstheorie, Spektrum-Verlag (lesbares Physik-Buch)
- [HE] Hawking, Ellis: The Large Scale Structure of Space-Time, Cambridge UP
(Klassiker der Relativitätstheorie: Physik, aber mathematisch präsentiert)
- [MC] McCleary: Geometry from a differentiable viewpoint, Cambridge 1995, 2013
(insbesondere zum Parallelenaxiom und seiner Geschichte)
- [R] Riemann: Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen, 1854
<http://www.maths.tcd.ie/pub/HistMath/People/Riemann/Geom/>
- [Th] Thurston: Three-Dimensional Geometry and Topology, Vol. 1, Princeton UP 1997 (Der Fields-Medaillist hat eine eigene Perspektive, sehr konkret geometrisch. Lesenswert, ganz besonders für hyperbolische Geometrie.)
- [W] Wolf: Spaces of constant curvature, McGraw-Hill 1967. (Vollständige Klassifikation der Mannigfaltigkeiten mit konstanter, nicht-negativer Krümmung. Behandelt den semi-Riemannschen Fall.)

Einführung

Die Vorlesung führt in die Riemannsche Differentialgeometrie ein. Sie wendet sich an Studenten der Mathematik und Physik ab dem 5. Semester. Ich versuche, die grundlegenden Konzepte von Metrik, Geodätischen und Krümmung umfassend einzuführen, und anhand charakteristischer Sätze und vieler Beispiele diese Begriffe zu erläutern.

Die Riemannsche Geometrie führt die Begriffe der inneren Differentialgeometrie axiomatisch und in beliebiger Dimension ein. Die Kenntnis der Vorlesung Differentialgeometrie, in der die klassische Kurven- und Flächentheorie behandelt wird, ist daher sinnvoll, auch wenn Inhalte nicht direkt zitiert werden. Anders sieht es mit Kenntnissen über differenzierbare Mannigfaltigkeiten aus: Zwar wird auf sie zurückgegriffen, jedoch sollte es problemlos sein, mit den hier in Kapitel 1 vorgestellten Fakten auszukommen.

Die eigentliche Riemannsche Geometrie beginnt in Kapitel 2 mit Metriken und dem Begriff der kovarianten Ableitung. Letztere wird als Tangentialprojektion der Richtungsableitung von Hyperflächen motiviert. Geodätische und die Exponentialabbildung treten hinzu. Als interessantestes Beispiel einer Riemannschen Mannigfaltigkeit wird abschließend der hyperbolische Raum diskutiert.

Kapitel 3 widmet sich der Krümmung und Sätzen über Krümmung und Topologie. Erst in diesem Zusammenhang werden auch Tensoren behandelt, um Spurbildungen adäquat einzuführen. Anschließend gibt es einen Einblick in die Theorie der Jacobifelder und konjugierten Punkte. Eine Diskussion von Riemannschen Untermannigfaltigkeiten und ihren Integrabilitätsbedingungen im Falle von Hyperflächen bildet das letzte Kapitel.

Ich behandle wenn möglich den semi-Riemannschen Fall. Dadurch kann der hyperbolische Raum schlüssig im Hyperboloid-Modell präsentiert werden, und natürlich habe ich auch die Bedeutung dieses Konzepts für die Relativitätstheorie im Kopf. Für weite Teile der Vorlesung ist es aber durchaus empfehlenswert, sich zuerst auf den Riemannschen Fall zu konzentrieren. Weiterhin arbeite ich mit der Energie statt mit der Bogenlänge.

In Kleindruck erscheinende Teile habe ich in der Vorlesung ausgelassen.

Ein Sammlung von Übungsaufgaben ist separat verfügbar. Sie stammen unter anderen von Steffen Fröhlich, Julia Plehnert, Dominik Kremer, Tristan Alex, Miroslav Vrzina und Arthur Windemuth. Bei Sebastian Bechtel und vielen weiteren Hörern und Lesern bedanke ich mich für die Mitteilung zahlreicher Korrekturen.

Darmstadt, Februar 2019

1. Vorlesung, 17.10.18

Teil 1. Mannigfaltigkeiten und differenzierbare Abbildungen

In diesem Abschnitt geben wir einen Überblick über diejenigen Eigenschaften von Mannigfaltigkeiten, die wir in den folgenden Kapiteln benötigen. Diese Dinge werden eingehender in der Vorlesung Mannigfaltigkeiten besprochen; dort werden auch die hier ausgelassenen Beweise ausgeführt.

1. DIFFERENZIERBARE MANNIGFALTIGKEITEN

Grob gesagt ist eine Mannigfaltigkeit ein Raum, dessen lokale Struktur dadurch bestimmt ist, dass wir fordern, dass er wie \mathbb{R}^n aussieht. Die globale Struktur bleibt damit aber offen. Wir werden am Ende der Vorlesung Eigenschaften wie positive Krümmung einsetzen, um globale topologische Eigenschaften, wie z.B. Kompaktheit zu zeigen.

1.1. Etwas Topologie. Untermannigfaltigkeiten M kann man durch eine Menge von Karten

$$\{x_\alpha: U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n, U_\alpha \subset M \subset \mathbb{R}^{n+k}, \alpha \in A\},$$

definieren, die Homöomorphismen auf ihr Bild sind. Hierbei ist A eine Indexmenge. Entsprechendes wollen wir nun für abstrakte Mannigfaltigkeiten fordern. Dazu müssen wir aber zuerst spezifizieren, welchen Typ die Menge M haben soll.

M heißt *topologischer Raum*, wenn es ein System offener Mengen \mathcal{O} gibt, so dass:

- beliebige Vereinigungen und endliche Durchschnitte von Mengen in \mathcal{O} wieder in \mathcal{O} liegen,
- so dass zu \mathcal{O} die leere Menge und ganz M gehören.

Stetige Abbildungen zwischen topologischen Räumen werden dann dadurch erklärt, dass die Urbilder offener Mengen offen sind und Kompaktheit ist durch die Überdeckungseigenschaft definiert.

Metrische Räume M sind ein Beispiel topologischer Räume. Eine Teilmenge $U \subset M$ ist genau dann ein Element von \mathcal{O} , wenn es zu jedem Punkt $p \in U$ einen Abstandsball $\{q \in M : d(p, q) < \varepsilon(p)\}$ gibt, der ganz in U liegt. Prüfen Sie die genannten Eigenschaften bitte nach.

Ein topologischer Raum M heißt

(i) *Hausdorffsch*, wenn je zwei verschiedene Punkte auch disjunkte offene Umgebungen besitzen.

(ii) Er erfüllt das *zweite Abzählbarkeitsaxiom*, wenn es eine abzählbare Umgebungsbasis gibt, d.h. es gibt abzählbar viele offene Mengen $\{V_\beta\} \subset \mathcal{O}$ mit der Eigenschaft, dass für

jedes $p \in M$ und jede Umgebung U von p eine Menge V_β mit $p \in V_\beta \subset U$ existiert. Diese Eigenschaft wird uns eine Partition der 1 erlauben.

(iii) Er heißt *lokal euklidisch von Dimension n* , wenn jeder Punkt von M eine Umgebung besitzt, die homöomorph zu \mathbb{R}^n ist. Genauer heißt dies: Für jedes $p \in M$ existieren offene Mengen $U \subset M$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mit $p \in U$, und ein Homöomorphismus $x: U \rightarrow \Omega$. Man nennt (x, U) oder kurz x eine *Karte* von M um p , manchmal auch *lokale Koordinaten*.

Definition. Eine *topologische Mannigfaltigkeit* der Dimension n ist ein Hausdorffscher Raum M , der das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt und lokal euklidisch von Dimension n ist.

Jede Karte respektiert also die durch die Topologien von M und \mathbb{R}^n gegebenen offenen Mengen, und Kartenwechsel der Form $y \circ x^{-1}$ sind, wo definiert, Homöomorphismen zwischen Teilmengen von \mathbb{R}^n .

Eine *Überdeckung* von M ist eine Familie offener Mengen $\{U_\alpha \subset M : \alpha \in A\}$, für die gilt $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = M$. Eine Menge $\mathcal{A} = \{(x_\alpha, U_\alpha) : \alpha \in A\}$ von Karten, deren Definitionsgebiete M überdecken, nennt man einen *Atlas*.

Bemerkung. Alle topologischen Mannigfaltigkeiten, die wir betrachten werden, sind metrische Räume. Metrische Räume sind immer Hausdorffsch.

1.2. Differenzierbare Mannigfaltigkeiten. Anders als beim Stetigkeitsbegriff können wir für den Differenzierbarkeitsbegriff auf topologischen Mannigfaltigkeiten nicht eine vorgegebene differenzierbare Struktur benutzen, sondern müssen sie erst erklären. Wir erklären Differenzierbarkeit dadurch, dass wir sie durch Karten vom Urbild aus auf M induzieren. Dies wird aber nur dann unabhängig von der gewählten Karte, wenn alle Kartenwechsel differenzierbar sind.

Definition. (i) Zwei Karten (x, U) und (y, V) heißen (*differenzierbar*) *verträglich*, wenn der *Kartenwechsel*

$$y \circ x^{-1}: x(U \cap V) \rightarrow y(U \cap V)$$

ein Diffeomorphismus ist.

(ii) Ein Atlas $\mathcal{A} = \{(x_\alpha, U_\alpha) : \alpha \in A\}$ heißt *differenzierbarer Atlas*, wenn für alle $\alpha, \beta \in A$ die *Kartenwechsel* $x_\beta^{-1} \circ x_\alpha$ differenzierbar verträglich sind.

(iii) Ist \mathcal{A} Atlas, so ist $\mathcal{S} \supset \mathcal{A}$ ein *maximaler differenzierbarer Atlas* oder eine *differenzierbare Struktur*, wenn \mathcal{S} alle zu allen Karten von \mathcal{A} verträglichen Karten enthält.

Beachten Sie, dass zwei Karten (x, U) und (y, V) immer verträglich sind, falls $U \cap V = \emptyset$.

Anschaulich gesprochen legt eine differenzierbare Struktur fest, welche stetigen Kurven auf M differenzierbar sind, d.h. was man als gerade, und was man als Ecke betrachten möchte.

Satz 1. Eine differenzierbare Struktur \mathcal{S} ist Atlas, und sie wird eindeutig durch \mathcal{A} bestimmt.

Beweis. Der Beweis wird über folgende Behauptung geführt: Ist sowohl die Karte (x, U) wie die Karte (y, V) verträglich zu \mathcal{A} , so sind x und y auch miteinander verträglich.

Um dies zu zeigen, betrachten wir für ein beliebiges $p \in M$ zwei Karten (x, U) , (y, V) , so dass $p \in U \cap V$. Da \mathcal{A} Atlas ist, gibt es eine Karte (x_α, U_α) um p . Es gilt lokal:

$$x \circ y^{-1} = \underbrace{\underbrace{(x \circ x_\alpha^{-1})}_{\text{diff.bar, da vertr. zu } \mathcal{A}} \circ \underbrace{(x_\alpha \circ y^{-1})}_{y \text{ vertr. zu } \mathcal{A}}}_{\text{diff.bar laut Kettenregel}} \quad \square$$

Beispiele. 1. Durch (id, \mathbb{R}) und (x^3, \mathbb{R}) werden zwei verschiedene differenzierbare Strukturen auf \mathbb{R} gegeben.

2. Zwei verschiedene differenzierbare Strukturen auf der offenen Kreisscheibe: Erstens die Standardstruktur (Karte = id), zweitens eine Struktur, die durch eine auf dem offenen Quadrat definierte Karte, die 1-homogen ist, definiert wird.

Definition. Eine (differenzierbare) *Mannigfaltigkeit* ist eine topologische Mannigfaltigkeit M zusammen mit einer differenzierbaren Struktur \mathcal{S} . Wir sagen von nun an *Karte* zu einer Karte der differenzierbaren Struktur \mathcal{S} . Wir schreiben oft kurz M^n für eine differenzierbare Mannigfaltigkeit der Dimension n .

Dabei wollen wir unter *differenzierbar* stets C^∞ verstehen. Wenn man alternativ nur k -fache Differenzierbarkeit voraussetzt, so erhält man eine C^k -Mannigfaltigkeit; setzt man, stärker, analytisch voraus, so erhält man eine analytische oder C^ω -Mannigfaltigkeit.

Beispiele. 1. Trivial: \mathbb{R}^n mit einer Karte $\mathcal{A} = \{(\text{id}, \mathbb{R}^n)\}$. Die differenzierbare Struktur ist $\mathcal{S} = \{(f, U) : U \text{ offen, } f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ Diffeomorphismus auf Bild}\}$.

2. Jede offene Teilmenge O in einer Mannigfaltigkeit M ist selbst Mannigfaltigkeit. Dabei ist $\mathcal{O} = \{\text{offene Teilmengen von } O\}$, die sogenannte *Relativtopologie*. Die Struktur \mathcal{S} wird durch diejenigen Karten (x, U) der differenzierbaren Struktur von M gegeben, deren Bilder $x(U)$ offene Teilmengen von O sind.

3. *Sphären* $\mathbb{S}^n := \{p \in \mathbb{R}^{n+1} : p_1^2 + \dots + p_{n+1}^2 = 1\}$. Mithilfe der sogenannten stereographischen Projektion kann man zwei Karten definieren.

4. *Projektive Räume* $\mathbb{R}P^n$ oder $\mathbb{C}P^n$.

Bemerkungen. 1. Wie kann man überhaupt Mannigfaltigkeiten konstruieren? Wie in den Beispielen sind Untermannigfaltigkeiten des \mathbb{R}^n eine Möglichkeit, insbesondere Graphen von Funktionen und Niveaumengen. Weiter kann man Produktmannigfaltigkeiten $M \times N$ nehmen (Übung) und, wichtiger, Quotientenmannigfaltigkeiten (später, Übungen: Torus?).

2. Andere gebräuchliche Typen von Mannigfaltigkeiten erhält man, wenn man die geforderte Differenzierbarkeit von Kartenwechseln durch andere (stärkere oder schwächere) Eigenschaften ersetzt:

<i>Disziplin</i>	<i>Mannigfaltigkeitstyp</i>	<i>Kartenwechsel</i>
Topologie	topologische Mannigfaltigkeit	Homöomorphismen
Differentialtopologie	diff.bare Mannigfaltigkeit	Diffeomorphismen
2d komplexe Analysis	Riemannsche Flächen	winkeltreue, biholomorphe, Diffeo.men
Differentialgeometrie	Riemannsche Mannigfaltigkeit	längentreue Diffeo.men (Isometrien)

1.3. Differenzierbare Abbildungen. Wir erklären die Differenzierbarkeit von Abbildungen zwischen Mannigfaltigkeiten, indem wir den Umweg der Komposition mit Karten nehmen.

Definition. Seien M und N differenzierbare Mannigfaltigkeiten. Dann heißt $f: M \rightarrow N$ *differenzierbar* in $p \in M$, falls $y \circ f \circ x^{-1}$ differenzierbar in p ist, wobei $x: U \rightarrow \Omega_1$ eine Karte von M um p ist und $y: V \rightarrow \Omega_2$ eine Karte von N um $f(p)$.

Da Kartenwechsel differenzierbar sind, ist unsere Definition unabhängig von den gewählten Karten: Bezüglich anderer Karten \tilde{x} um p und \tilde{y} um $f(p)$ kann man (auf geeigneten offenen Mengen) schreiben:

$$\tilde{y} \circ f \circ \tilde{x}^{-1} = (\tilde{y} \circ y^{-1}) \circ (y \circ f \circ x^{-1}) \circ (x \circ \tilde{x}^{-1})$$

Da die äußeren beiden Abbildungen als Kartenwechsel differenzierbar sind, ist nach der Kettenregel die Differenzierbarkeit von $\tilde{y} \circ f \circ \tilde{x}^{-1}$ und $(y \circ f \circ x^{-1})$ äquivalent.

Analog zeigt man, dass Differenzierbarkeit unter der Komposition von Abbildungen erhalten bleibt: In diesem Fall schreibt man $z \circ f \circ g \circ x^{-1} = (z \circ f \circ y^{-1}) \circ (y \circ g \circ x^{-1})$ und benutzt die Kettenregel.

Beispiele. 1. Trivial: Die Identität auf M ist differenzierbar (denn Kartenwechsel von M sind differenzierbar)

2. Wir wollen \mathbb{R}^n immer mit der differenzierbaren Struktur betrachten, die der Atlas $(\mathbb{R}^n, \text{id})$ erzeugt. Dann wird jede Karte $x_\alpha: U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n$ einer Mannigfaltigkeit (M, \mathcal{A}) zu einer differenzierbaren Abbildung, denn für alle $x_\beta \in \mathcal{A}$ ist die Komposition $\text{id} \circ x_\alpha \circ x_\beta^{-1}$ als ein Kartenwechsel differenzierbar.

Definition. Ein Homöomorphismus $f: M \rightarrow N$ zwischen Mannigfaltigkeiten heißt *Diffeomorphismus*, wenn f und f^{-1} differenzierbar sind.

Ist M diffeomorph zu N , so gilt $\dim M = \dim N$ (warum?).

- Beispiele.* 1. \mathbb{R}^n und $B^n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$ sind mittels $x \mapsto \frac{x}{|x|} \operatorname{arctanh} |x|$ diffeomorph.
 2. T^2 und Rotationstorus sind diffeomorph (vermittels?).
 3. Ist $x_\alpha: U_\alpha \rightarrow \Omega_\alpha$ Karte, so ist auch x_α^{-1} differenzierbar, denn $x_\beta \circ x_\alpha^{-1} \circ (\operatorname{id}|_{\Omega_\alpha})^{-1}$ ist als Kartenwechsel differenzierbar. Also ist jede Karte sogar Diffeomorphismus auf ihr Bild.

2. TANGENTIALRAUM

2.1. Tangentialraum in einem Punkt. Im Euklidischen stellt für jeden Punkt $p \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ der Raum \mathbb{R}^n den Tangentialraum dar. Wenn wir einen Tangentialraum $T_p M$ einer abstrakten Mannigfaltigkeit erklären wollen, so haben wir das Problem, dass ein Tangentialvektor von der gewählten Karte abhängt. Wir wollen daher die Tangentialvektoren verschiedener Karten identifizieren, indem wir eine Äquivalenzrelation erklären:

Satz 2. Sei M eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit, (x, U) , (y, V) zwei Karten um $p \in M$ und $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$. Dann erklärt

$$(1) \quad ((x, U), \xi) \sim ((y, V), \eta) \quad :\Leftrightarrow \quad \eta = d(y \circ x^{-1})_{x(p)} \xi$$

eine Äquivalenzrelation.

Beweis. Die Reflexivität ist klar, Symmetrie folgt aus

$$\eta = d(y \circ x^{-1}) \xi \quad \Leftrightarrow \quad \xi = (d(y \circ x^{-1}))^{-1} \eta = d((y \circ x^{-1})^{-1}) \eta = d(x \circ y^{-1}) \eta.$$

Woraus folgt die Transitivität? □

Definition. Der Tangentialraum von M in p ist der Raum der Äquivalenzklassen

$$T_p M = \{(x, U) \in \mathcal{S} : p \in U\} \times \mathbb{R}^n / \sim.$$

Ein Tangentialvektor $v \in T_p M$ wird durch $((x, U), \xi)$ repräsentiert. Wir nennen ξ den *Hauptteil* des Tangentialvektors v bezüglich der Karte x .

In Matrixschreibweise lautet (1)

$$\eta^j = \sum_{i=1}^n \frac{\partial (y \circ x^{-1})^j}{\partial u^i}(x(p)) \xi^i, \quad j = 1, \dots, n.$$

Physiker sagen daher: Tangentialvektoren transformieren sich mit der Jacobimatrix des Kartenwechsels. Tatsächlich haben wir hier das Transformationsverhalten einfach zur Definition gemacht. (Wie immer in der Mathematik interessiert uns nicht, was ein Objekt ist, sondern was man damit macht!)

Die Vektorraumstruktur der Hauptteile macht $T_p M$ zu einem Vektorraum:

Satz 3. Auf $T_p M$ gibt es eine Vektorraumstruktur, so dass $\xi \mapsto [(x, U), \xi]$ für jede Karte x Isomorphismus von n -dimensionalen Vektorräumen ist.

Beweis. Erklären wir die Vektorraumstruktur auf $T_p M$ bzgl. einer Karte (x, U) um p , so müssen wir zeigen, dass jede andere Karte (y, V) um p dieselbe Struktur ergibt. Dies liegt daran, dass $d(y \circ x^{-1})_{x(p)}$ linear ist.

Explizit: Gilt

$$((x, U), \xi_i) \sim ((y, V), \eta_i) \quad \text{für } i = 1, 2, \quad \text{also } \eta_i = d(y \circ x^{-1})\xi_i,$$

so folgt

$$\lambda\eta_1 + \eta_2 = d(y \circ x^{-1})(\lambda\xi_1 + \xi_2) \quad \text{also } ((x, U), \lambda\xi_1 + \xi_2) \sim ((y, V), \lambda\eta_1 + \eta_2).$$

Ferner ist $d(y \circ x^{-1})_{x(p)}$ bijektiv und daher $\xi \mapsto [(x, U), \xi]$ Isomorphismus. \square

Betrachten wir die Basis $(b_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, b_n = (0, \dots, 0, 1))$ von \mathbb{R}^n . Wir bezeichnen die dadurch gegebenen Äquivalenzklassen $e_i = e_i(p) := [((x, U), b_i)]_{i=1, \dots, n}$ als *Standardbasis* von $T_p M$ bzgl. der Karte (x, U) . Bezüglich einer anderen Karte (y, V) ergibt sich im allgemeinen eine andere Standardbasis $f_i := [((y, V), b_i)]$ von $T_p M$, denn $(d(y \circ x^{-1})e_1, \dots, d(y \circ x^{-1})e_n)$ ist in der Regel von (e_1, \dots, e_n) verschieden. Man sagt, auf dem Tangentialraum $T_p M$ gibt es keine kanonische Basis, d.h. jede Basiswahl ist willkürlich oder kartenabhängig!

Für \mathbb{R}^n verwenden wir stets nur die eine Karte id , identifizieren Hauptteile ξ mit Tangentialvektoren v .

Bemerkung. Es gibt andere Wege, den Tangentialraum einzuführen:

1. Wir erinnern zuerst an den Tangentialraum $T_p M$ an eine Untermannigfaltigkeit $M^n \subset \mathbb{R}^{n+k}$. Dies ist derjenige n -dimensionale Untervektorraum von \mathbb{R}^{n+k} , der aus sämtlichen Tangentialvektoren $c'(0)$ von Kurven c in M durch den Punkt $c(0) = p$ besteht. Ähnlich kann man auch auf abstrakten Mannigfaltigkeiten $T_p M$ als den Raum dieser Kurven-Tangentialvektoren einführen. Wegen der Beschreibung desselben Tangentialvektors durch verschiedene Kurven muss man in diesem Fall eine Äquivalenzrelation zwischen Kurven durch denselben Punkt einführen.

2. Man kann den Tangentialraum auch ohne Zuhilfenahme von Karten und Hauptteilen definieren, über *Funktionskeime*. Ein Tangentialvektor ist dann ein linearer Differentialoperator auf diesen Keimen, der die Produktregel respektiert.

2.2. Lie-Ableitung. Wir ordnen jedem Tangentialvektor einer Mannigfaltigkeit eine Ableitung zu. Im Euklidischen entspricht dies der Richtungsableitung $\partial_\xi f(p) = df_p(\xi)$ einer skalarwertigen Funktion $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Wir ersetzen jetzt \mathbb{R}^n durch eine Mannigfaltigkeit.

Die Menge der glatten Funktionen auf M sei $C^\infty(M) := C^\infty(M, \mathbb{R})$.

Definition. Die *Lie-Ableitung* von $f \in C^\infty(M)$ im Punkt $p \in M^n$ in Richtung $v \in T_p M$ ist

$$(2) \quad \partial_v f(p) := \partial_\xi(f \circ x^{-1})(\rho) = d(f \circ x^{-1})_\rho(\xi) = \sum_{i=1}^n \xi^i \frac{\partial(f \circ x^{-1})}{\partial u_i}(\rho) \in \mathbb{R},$$

wobei (x, U) Karte um p mit $x(p) = \rho$ und $v = [(x, U), \xi]$.

Andere gebräuchliche Bezeichnungen für die Lie-Ableitung sind $v(f)$ und $L_v f$.

Um zu zeigen, dass $\partial_v f$ unabhängig von der Karte x definiert ist, beachten wir eine weitere Karte (y, V) mit $\sigma = y(p)$ und $v = [(y, V), \eta]$:

$$\begin{aligned} d(f \circ x^{-1})_\rho(\xi) &= d(f \circ y^{-1} \circ y \circ x^{-1})_\rho(\xi) \\ &\stackrel{\text{Kettenregel}}{=} d(f \circ y^{-1})_{(y \circ x^{-1})(\rho)}(d(y \circ x^{-1})_\rho(\xi)) = d(f \circ y^{-1})_\sigma(\eta) \end{aligned}$$

Die Lie-Ableitung ist eine Operation mit den *derivativen* Eigenschaften $\partial_\xi(cf + g) = c\partial_\xi f + \partial_\xi g$ (Linearität) und $\partial_\xi(fg) = f\partial_\xi g + (\partial_\xi f)g$ (Produktregel).

Im Spezialfall, dass der Vektor ein Element der Standardbasis e_i bzgl. der Karte x ist, schreiben wir auch als Lie-Ableitung

$$(3) \quad \frac{\partial}{\partial x_i} := \partial_{e_i} \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p f := \partial_i(f \circ x^{-1}) \Big|_{x(p)},$$

bzw. entsprechend $\frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$; dabei haben wir mit $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ die Ableitung nach der i -ten Variablen in \mathbb{R}^n bezeichnet. Mit dieser Notation kann man die Lie-Ableitung auf Mannigfaltigkeiten wörtlich wie die euklidische Richtungsableitung notieren:

$$\partial_v f(p) = \sum_{i=1}^n \left(\xi^i \frac{\partial}{\partial x_i} \right) f \Big|_p = \sum_{i=1}^n \xi^i \frac{\partial f}{\partial x_i}(p).$$

2.3. Tangentialbündel. Ist $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, so ist der Tangentialraum in jedem Punkt $p \in \Omega$ derselbe Raum \mathbb{R}^n . In einer Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^{n+k}$ hat man zu verschiedenen Fußpunkten $p \in M$ aber verschiedene Untervektorräume $T_p M$. Z.B. gilt für \mathbb{S}^n dass $T_p \mathbb{S}^n := \{v \in \mathbb{R}^{n+1} : \langle v, p \rangle = 0\}$.

Es ist daher sinnvoll, Tangentialvektoren in der Form $(p, v) = (\text{Fußpunkt}, \text{Vektor})$ anzugeben. Wir werden weiterhin festlegen müssen, wann ein Vektorfeld differenzierbar ist. Auch hierfür müssen wir die Vektorräume $T_p M$ zusammen mit ihren Fußpunkten p behandeln.

Es sei (x_α, U_α) Karte um $p \in M$ und $v = [(x_\alpha, U_\alpha), \xi_\alpha] \in T_p M$ ein Tangentialvektor. Auf der disjunkten Vereinigung der Tangentialräume definieren wir die Abbildung

$$(4) \quad y_\alpha: \bigcup_{p \in U_\alpha} \{p\} \times T_p M \rightarrow x_\alpha(U_\alpha) \times \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{2n}, \quad y_\alpha(p, v) := (x_\alpha(p), \xi_\alpha),$$

und erklären sie zu einer Karte von TM :

Satz 4. Sei M eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit mit Atlas $\mathcal{A}_M = \{(x_\alpha, U_\alpha) : \alpha \in A\}$. Auf der Menge $TM := \bigcup_{p \in M} \{p\} \times T_p M$ bestimmt dann

$$\mathcal{A}_{TM} := \{(y_\alpha, \bigcup_{p \in U_\alpha} \{p\} \times T_p M) : \alpha \in A\} \quad \text{mit } y_\alpha \text{ wie in (4)}$$

einen Atlas, der TM die Struktur einer $2n$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit gibt, unabhängig vom gewählten Atlas \mathcal{A}_M .

Wir nennen die so erklärte Mannigfaltigkeit TM das *Tangentialbündel* und schreiben Elemente in der Form $[p, (x_\alpha, U_\alpha), \xi_\alpha]$.

Beispiel. Eine Kurve $c: I \rightarrow M$ erklärt eine Kurve $\{(c(t), c'(t)) : t \in I\} \subset TM$.

Beweis. Sicherlich überdeckt \mathcal{A}_{TM} die Menge TM . Wir können hier nur skizzieren, warum TM eine topologische Mannigfaltigkeit ist. Dazu wählen wir auf $TM|U_\alpha := \bigcup_{p \in U_\alpha} \{p\} \times T_p M$ eine Topologie, so dass y_α Homöomorphismus wird, d.h. wir induzieren die Produkttopologie von $U_\alpha \times \mathbb{R}^n$ auf $TM|U_\alpha$. Dies ergibt eine Basis der Topologie für TM .

Wir zeigen nun, dass je zwei Karten $(y_\alpha, TM|U_\alpha)$ und $(y_\beta, TM|U_\beta)$ verträglich sind. Sei dazu $p \in U_\alpha \cap U_\beta$ und

$$(p, v) = \left(p, [(x_\alpha, U_\alpha), \xi_\alpha]\right) = \left(p, [(x_\beta, U_\beta), \xi_\beta]\right), \quad \text{d.h.} \quad \xi_\beta = d(x_\beta \circ x_\alpha^{-1})\xi_\alpha.$$

Setzen wir noch $\rho := x_\alpha(p)$ so erhalten wir

$$(y_\beta \circ y_\alpha^{-1})(\rho, \xi_\alpha) = y_\beta(x_\alpha^{-1}(\rho), v) = ((x_\beta \circ x_\alpha^{-1})(\rho), \xi_\beta) = \left((x_\beta \circ x_\alpha^{-1})(\rho), d(x_\beta \circ x_\alpha^{-1})(\xi_\alpha)\right).$$

Die erste Komponente ist aber ein differenzierbarer Kartenwechsel und die zweite ein Differential einer glatten Funktion, also selbst glatt. Daher ist \mathcal{A}_{TM} ein Atlas und die differenzierbare Struktur unabhängig von den Karten von M . \square

Beispiel. Das Tangentialbündel von \mathbb{S}^1 kann man als Zylinder $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ deuten, d.h. es ist diffeomorph dazu.

Ausblick. Das Tangentialbündel ist Spezialfall eines *Vektorraumbündels*. Nach Definition ist das Tangentialbündel lokal jeweils ein Produkt, und zwar homöomorph zu $U_\alpha \times \mathbb{R}^n$. Jeder Kartenwechsel operiert auf dem \mathbb{R}^n -Faktor als Vektorraumisomorphismus, der differenzierbar vom Fußpunkt abhängt. Allerdings ist nicht jedes Tangentialbündel homöomorph zum Produkt $M \times \mathbb{R}^n$, denn in diesem Fall würde M ein nichtverschwindendes tangentes Vektorfeld besitzen. Dies zeigt, dass $T\mathbb{S}^2$ kein Produkt ist, ebenso für Sphären gerader Dimension.

2.4. Differential.

Definition. Sei $f: M \rightarrow N$ eine differenzierbare Abbildung zwischen zwei Mannigfaltigkeiten. Das *Differential* $df: TM \rightarrow TN$ ist die Abbildung

$$(5) \quad (p, v) = (p, [(x, U), \xi]) \mapsto df(p, v) = \left(f(p), [(y, V), d(y \circ f \circ x^{-1})_{x(p)} \xi] \right),$$

wobei (x, U) eine Karte von M um p und (y, V) eine Karte von N um $f(p)$ ist. Wir benutzen auch die Notation $df(p, v) = (f(p), df_p(v))$, wobei wir schreiben $df_p: T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$.

Andere Bezeichnungen für df sind f_* , f' oder Tf . Dass (5) unabhängig von den verwendeten Karten ist, folgt aus der Kettenregel (Übung).

Beispiel. Betrachten wir eine Kurve $c: I \rightarrow M$ mit $0 \in I$. Weil das Intervall I in \mathbb{R} liegt, und wir $T_p \mathbb{R}$ mit \mathbb{R} identifizieren, können wir den Tangentialvektor $(0, v) := (0, 1) \in TI$ betrachten. Das Differential bildet ihn ab auf $dc(0, 1) = (c(0), dc_0(1)) = (c(0), c'(0))$.

Das Differential in einem Punkt ordnet folgendermaßen Hauptteile einander zu:

$$(6) \quad \xi \mapsto \eta = d(y \circ f \circ x^{-1})_{x(p)} \xi = \sum \xi^i \partial_i (y \circ f \circ x^{-1})(x(p)) =: \sum \xi^i \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$$

Dabei haben wir mit dem letzten Ausdruck erneut eine Kurzschreibweise eingeführt, die die Formel auf Mannigfaltigkeiten mit ihrer euklidischen Version übereinstimmen läßt.

Satz 5. (i) Das Differential $df_p: T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ ist eine lineare Abbildung.

(ii) Es gilt die Kettenregel $d(f \circ g)_p = df_{g(p)} \circ dg_p$.

Proof. Die Linearität ist klar, z.B. aus (6). Wegen der euklidischen Kettenregel gilt, an den richtigen Stellen,

$$d(z \circ f \circ g \circ x^{-1}) = d(z \circ f \circ y^{-1} \circ y \circ g \circ x^{-1}) = d(z \circ f \circ y^{-1}) \circ d(y \circ g \circ x^{-1}),$$

so dass $d(f \circ g)_p$ tatsächlich durch $df_{g(p)} \circ dg_p$ dargestellt wird. \square

Beispiel. Für die bereits betrachtete Kurve $c: I \rightarrow M$ und $f \in C^\infty(M)$ gilt laut Kettenregel

$$\frac{d}{dt}(f \circ c)|_{t=0} := d(f \circ c)(0, 1) = df(c(0), c'(0)) = (f(c(0)), df_{c(0)} c'(0)) = (f(p), df_p v).$$

Wir haben so eine Formel erhalten, die die aus dem Euklidischen bekannte Formel der Richtungsableitung $\frac{d}{dt}(f \circ c) = dfv$ für $c'(0) = v$ verallgemeinert.

Wir werden folgende Terminologie benötigen. Eine differenzierbare Abbildung $f: M \rightarrow N$ zwischen Mannigfaltigkeiten heißt *Immersion*, wenn das Differential $df_p: T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ für alle $p \in M$ injektiv ist.

Beispiel. Eine Kurve $c: I \rightarrow M$ ist Immersion, wenn $dc_t = c'(t) \neq 0$ gilt. Die differenzierbaren Kurven in \mathbb{R}^2 , $t \mapsto (t^2, t^3)$ und $t \mapsto (t^3, t^3)$ sind also keine Immersionen.

Eine injektive Immersion, die Homöomorphismus auf ihr Bild ist, nennt man auch *Einbettung*. Ist speziell die Inklusion $i: M \subset N \rightarrow N$, $i(x) = x$, eine Einbettung, so heißt $M \subset N$ eine *Untermannigfaltigkeit* von N .

Beispiele. 1. $e^{it}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ ist Immersion, aber nicht Einbettung.

2. Eine injektive Kurve $c: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}^2$ habe einen Berührungspunkt $\lim_{t \rightarrow 0} c(t) = c(\frac{1}{2})$. Urbilder genügend kleiner offener Mengen um $c(\frac{1}{2})$ bestehen aus zwei Zusammenhangskomponenten: eine Umgebung von 0 und eine von $\frac{1}{2}$. Homöomorphismen erhalten die Anzahl der Zusammenhangskomponenten; daher ist c kein Homöomorphismus auf sein Bild, also keine Einbettung.

3. VEKTORFELDER UND KOMMUTATOR

Wir werden alle grundlegenden Konzepte der Riemannschen Geometrie mit Hilfe von Vektorfeldern definieren. Genauso wie zu Tangentialvektoren eine Richtungsableitung gehört, so führen auch Vektorfelder ein Doppelleben als Vektoren im Tangentialraum und als Differentialoperatoren erster Ordnung.

3.1. Vektorfelder auf Mannigfaltigkeiten.

Definition. Ein (*differenzierbares*) *Vektorfeld* X auf einer Mannigfaltigkeit M ist eine differenzierbare Abbildung

$$X: M \rightarrow TM, \quad \text{so dass } X(p) \in T_p M.$$

Die Menge der Vektorfelder auf M bezeichnen wir mit $\mathcal{V}(M)$.

Jedem p wird also genau ein $X(p)$ zugeordnet; wir schreiben dafür oft auch X_p oder lassen den Fußpunkt p ganz weg. Bezüglich einer Karte x können wir den repräsentierenden *Hauptteil* des Vektorfeldes nun als eine Funktion $\xi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ schreiben. Benutzen wir die Darstellung von (3), so ergibt das auf U

$$X(p) = \sum_{i=1}^n \xi^i(p) e_i(p).$$

Das Feld X ist differenzierbar genau dann, wenn für alle Karten der dort definierte Hauptteil $p \mapsto \xi(p)$ differenzierbar ist.

Beispiele. 1. Für die Mannigfaltigkeit $M = \mathbb{R}^n$ benutzen wir ausschließlich den Atlas $\{(\text{id}, \mathbb{R}^n)\}$. Dann ist es sinnvoll, den einzigen Repräsentanten $\xi(u)$ mit seinem Vektorfeld $X(u)$ zu identifizieren, das heißt wir unterscheiden in diesem Fall nicht zwischen Hauptteilen und Vektorfeldern.

2. Für die Mannigfaltigkeit $M = \mathbb{S}^n$ können wir Tangentialvektoren mit Tangentialvektoren des \mathbb{R}^{n+1} identifizieren: Ein Vektorfeld ist eine Abbildung in das orthogonale Komplement jeden Punktes,

$$\mathcal{V}(\mathbb{S}^n) = \{X: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} : \langle X(p), p \rangle = 0 \quad \forall p \in \mathbb{S}^n\}.$$

Ist die Dimension der Sphäre ungerade, d.h. $n+1 = 2k$, so definieren wir durch 90-Grad Drehung von Koordinatenpaaren (bzw. Multiplikation mit i in $\mathbb{C}^k = \mathbb{R}^{2k}$) das Vektorfeld

$$V: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}, \quad p = (x_1, y_1, \dots, x_k, y_k) \mapsto V(p) = (-y_1, x_1, \dots, -y_k, x_k).$$

Es hat in \mathbb{R}^{n+1} die konstante Länge 1, insbesondere verschwindet es nirgendwo. Andererseits hat jedes Vektorfeld auf einer geraddimensionalen Sphäre eine Nullstelle (Satz vom gekämmten Igel).

3.2. Vektorfelder als Derivationen. Die punktweise definierte Lie-Ableitung erweitert sich auf eine Lie-Ableitung für Vektorfelder

$$\partial_X: C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M), \quad (\partial_X f)(p) := (\partial_{X(p)} f)(p) = \sum_{i=1}^n \xi^i(p) \frac{\partial f}{\partial x_i}(p),$$

wobei die Summendarstellung lokal, also bezüglich einer Karte x um p ist. Dass diese Definition unabhängig von der Karte ist, hatten wir bereits bestätigt. Wir rechnen dies dennoch noch einmal nach:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \xi^i(p) \partial_i(f \circ x^{-1})|_{x(p)} &= \sum_{i=1}^n \xi^i(p) \partial_i(f \circ y^{-1} \circ y \circ x^{-1})|_{x(p)} \\ &\stackrel{\text{Kettenr.}}{=} \sum_{i,j} \xi^i(p) \partial_j(f \circ y^{-1})|_{y(p)} \partial_i(y \circ x^{-1})^j|_{x(p)} = \sum_{j=1}^n \eta^j(p) \partial_j(f \circ y^{-1})|_{y(p)} \end{aligned}$$

In Kurzschreibweise lautet dieselbe Rechnung:

$$\sum_{i=1}^n \xi^i \frac{\partial f}{\partial x_i} \stackrel{\text{Kettenr.}}{=} \sum_{i,j} \xi^i \left(\frac{\partial f}{\partial y_j} \frac{\partial y_j}{\partial x_i} \right) = \sum_j \left(\sum_i \xi^i \frac{\partial y_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial f}{\partial y_j} = \sum_{j=1}^n \eta^j \frac{\partial f}{\partial y_j}.$$

$\partial_X f$ ist ein Differentialoperator erster Ordnung mit folgenden Eigenschaften:

1. $\partial_X: C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ ist eine \mathbb{R} -lineare Abbildung, die die Produktregel erfüllt.
2. $\partial_X f(p)$ hängt nur von X in p ab, wenn auch von f in einer Umgebung von p .

3. Ist $X: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld, so gilt für die Richtungsableitung: $dfX = \partial_X f$. Entsprechendes behaupten wir für die Lie-Ableitung von skalaren Funktionen auf Mannigfaltigkeiten:

$$(7) \quad dfX = \partial_X f \quad \text{für } X \in \mathcal{V}(M), f \in C^\infty(M).$$

Tatsächlich gilt nach Definition des Differentials $dfX = (f(p), [(id, \mathbb{R}), d(f \circ x^{-1})_{x(p)}\xi]) \in T\mathbb{R}$. Aber für die Bildmannigfaltigkeit \mathbb{R} brauchen wir keine Karte und wir identifizieren ohnehin $T\mathbb{R}$ mit \mathbb{R} . Daher ergibt sich $dfX = d(f \circ x^{-1})_{x(p)}\xi$. Doch das stimmt wörtlich mit der Definition (2) überein.

4. Oft werden wir benutzen: Für zwei Vektorfelder $X, Y \in \mathcal{V}(M)$ gilt

$$X = Y \quad \Longleftrightarrow \quad \partial_X f \equiv \partial_Y f \quad \text{gilt für alle } f \in C^\infty(M).$$

Es sei (x, U) eine Karte und $f^i \in C^\infty(U)$ definiert als i -te Koordinate des Kartenurbilds, $f^i(p) := (\pi^i \circ x)(p) = x^i(p)$. Dann gilt für p

$$\frac{\partial f^i}{\partial x_j}(p) \stackrel{\text{Def. der Lie-Abl.}}{=} \partial_j(f^i \circ x^{-1})|_{x(p)} = \partial_j \pi^i(x(p)) = \delta_j^i.$$

Für $X = \sum \xi^j \frac{\partial}{\partial x_j}$ folgt daraus $\partial_X f^i = \xi^i$. Gilt also $\partial_X f^i = \partial_Y f^i$ für alle $i = 1, \dots, n$, so folgt bereits $X(p) = Y(p) \quad \forall p \in U$.

3.3. Lie-Klammer zweier Vektorfelder. Weil mit $f \in C^\infty(M)$ auch die Lie-Ableitung $\partial_X f \in C^\infty(M)$ ist, können wir Vektorfelder hintereinanderschalten. Dies ergibt eine zweite Richtungsableitung $(\partial_X \partial_Y)(f) = \partial_X(\partial_Y f) \in C^\infty(M)$. Um den Differentialoperator $\partial_X \partial_Y$ bezüglich einer Karte x darzustellen, seien $\partial_X = \sum_i \xi^i \frac{\partial}{\partial x_i}$ und $\partial_Y = \sum_j \eta^j \frac{\partial}{\partial x_j}$. Es folgt

$$\partial_X(\partial_Y f) = \partial_X \left(\sum_j \eta^j \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) = \sum_i \xi^i \left(\sum_j \frac{\partial \eta^j}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} + \eta^j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right).$$

Dies zeigt, dass $\partial_X \partial_Y$ ein Differentialoperator zweiter Ordnung ist, also keine Lie-Ableitung von f bzw. kein Vektorfeld. Erstaunlicherweise kann man daraus aber doch ein Vektorfeld gewinnen:

Satz 6. Seien X und Y Vektorfelder auf einer Mannigfaltigkeit M . Dann wird durch $\partial_Z f := (\partial_X \partial_Y - \partial_Y \partial_X)f$ für alle $f \in C^\infty(M)$ ein Vektorfeld Z eindeutig bestimmt.

Beweis. Es gilt lokal, bezüglich einer Karte (x, U) :

$$\partial_Y \partial_X f = \partial_Y \left(\sum_i \xi^i \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) = \sum_j \eta^j \left(\sum_i \frac{\partial \xi^i}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_i} + \xi^i \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \right)$$

Da nach dem Schwarzschen Lemma zweite Ableitungen vertauschen, folgt

$$(8) \quad \partial_X \partial_Y f - \partial_Y \partial_X f = \sum_{i,k} \left(\xi^i \frac{\partial \eta^k}{\partial x_i} - \eta^i \frac{\partial \xi^k}{\partial x_i} \right) \frac{\partial f}{\partial x_k} \quad \forall f \in C^\infty(M).$$

Betrachten wir nun auf $U \subset M$ das Vektorfeld Z mit Hauptteil $\zeta^k := \sum_i (\xi^i \frac{\partial \eta^k}{\partial x_i} - \eta^i \frac{\partial \xi^k}{\partial x_i})$. Nun beschreibt (8) eine Wirkung auf alle $f \in C^\infty(M)$, die wegen der Kettenregel unabhängig von der gewählten Karte definiert ist, zunächst auf $U \subset M$. Da dies genauso für beliebige Karten (y, V) gilt, ist die Wirkung von (8) auf $f \in C^\infty(M)$ unabhängig von gewählten Karten, d.h. durch (8) wird global ein Vektorfeld Z auf ganz M eindeutig definiert. (Um sich zu überzeugen, sollten Sie zur Übung einmal nachrechnen, dass tatsächlich die ζ^k sich mit der Jacobimatrix des Kartenwechsels transformieren.) \square

2. Vorlesung, 19.10.18

Das Vektorfeld $[X, Y] := Z$, für das die Lie-Ableitung $\partial_{[X, Y]} = \partial_Z$ durch (8) gegeben ist, heißt *Kommutator* oder *Lie-Klammer* von X und Y . Lokal, also bezüglich einer Karte (x, U) , gilt $[X, Y] = \sum_{i,k} \left(\xi^i \frac{\partial \eta^k}{\partial x_i} - \eta^i \frac{\partial \xi^k}{\partial x_i} \right) e_k$.

Beispiele. 1. Es gilt $[e_i, e_j] = 0$ für jede Karte x (nachrechnen!). Insbesondere gilt das für \mathbb{R}^n .

2. Sei $M = \mathbb{R}^2$. Wir identifizieren Tangentialvektoren mit Hauptteilen, und setzen

$$J(u, v) := (-v, u) = (\xi^1(u, v), \xi^2(u, v)), \quad e_1(u, v) := (1, 0) = (\eta^1(u, v), \eta^2(u, v)).$$

Dann sind die einzigen partiellen Ableitungen der Hauptteile ξ^i, η^i , die nicht verschwinden $\frac{\partial}{\partial v} \xi^1 = -1$ und $\frac{\partial}{\partial u} \xi^2 = 1$. Es folgt $[J, e_1] = (-\eta^1 \frac{\partial}{\partial u} \xi^2) e_2 = -(0, 1)$.

Der Kommutator hat folgende anschauliche Interpretation, die wir hier nicht beweisen können. Wir betrachten eine Integralkurve einer Masche, d.h. wir starten in einem Punkt $p \in M$ und laufen zuerst in Richtung X , dann in Richtung Y , dann in Richtung $-X$, dann in Richtung $-Y$, und zwar jeweils für eine Zeit $t > 0$. Der Endpunkt sei $q(t)$. Im allgemeinen ist $p \neq q(t)$ und der Tangentialvektor an die Kurve $q(t)$ erfüllt $\frac{d}{dt} q|_{t=0} = [X, Y]_p$. Speziell für Kartenfelder kommt man jedoch zum Ausgangspunkt zurück, also $q(t) \equiv p$ und damit $\frac{d}{dt} q = 0$, konsistent mit $[X, Y] = 0$.

Der Kommutator hat folgende Eigenschaften:

Satz 7. Für alle $X, Y, Z \in \mathcal{V}(M)$ gilt:

- (i) *Antikommutativität* $[X, Y] = -[Y, X]$
- (ii) *Linearität* $[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$ für $a, b \in \mathbb{R}$,
- (iii) *Jacobi-Identität* $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$,
- (iv) $[fX, gY] = fg[X, Y] + f(\partial_X g)Y - g(\partial_Y f)X$ für alle $f, g \in C^\infty(M)$

Beweis. Aus der Definition des Kommutators ergibt sich (i). Aus (8), oder wegen Linearität der Lie-Ableitung, folgt (ii).

(iii) Zu $\partial_{[[X, Y], Z]} = \partial_{[X, Y]} \partial_Z - \partial_Z \partial_{[X, Y]} = \partial_X \partial_Y \partial_Z - \partial_Y \partial_X \partial_Z - \partial_Z \partial_X \partial_Y + \partial_Z \partial_Y \partial_X$ summieren

wir die beiden zyklischen Vertauschungen. In den drei zu summierenden Zeilen stehen rechts, in den Spalten 1 und 3 gerade Permutationen, die sich paarweise zu 0 aufaddieren; ebenso addieren sich die ungeraden Permutationen von Spalte 2 und 4 zu 0.

(iv) Wir verwenden die Produktregel beim zweiten Gleichheitszeichen:

$$\begin{aligned}\partial_{[fX, gY]} &= \partial_{fX} \partial_{gY} - \partial_{gY} \partial_{fX} = f((\partial_X g) \partial_Y + g \partial_X \partial_Y) - g((\partial_Y f) \partial_X + f \partial_Y \partial_X) \\ &= fg \partial_{[X, Y]} + f(\partial_X g) \partial_Y - g(\partial_Y f) \partial_X\end{aligned}$$

□

Sind allgemein ein Vektorraum \mathfrak{g} und eine Verknüpfung $[\cdot, \cdot]: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ gegeben, die die Eigenschaften (i) bis (iii) des Satzes erfüllt, so nennt man \mathfrak{g} eine *Lie-Algebra*. Der Raum der Vektorfelder $\mathcal{V}(M)$ auf einer Mannigfaltigkeit M bildet also eine unendlich-dimensionale Lie-Algebra. Ein Beispiel einer endlich-dimensionalen Lie-Algebra ist der Vektorraum der $(n \times n)$ -Matrizen mit Kommutator $[A, B] := AB - BA$.

Es gibt zwei wichtige Sätze, die eine Annahme über die Lie-Klammer als Voraussetzung haben: Sind X_1, \dots, X_k Vektorfelder mit $1 \leq k \leq n$ und sind die Felder linear unabhängig in p , so gilt:

1. Verschwinden alle Lie-Klammern paarweise, so kann man in einer Umgebung von p eine Karte finden, so dass die gegebenen Vektorfelder tangential an Parameterlinien sind.
2. Sind alle Lie-Klammern in der linearen Hülle der Vektorfelder enthalten, so kann man in einer Umgebung von p eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit finden, an die die gegebenen Vektorfelder in jedem Punkt tangential sind (Satz von Frobenius).

Teil 2. Semi-Riemannsche Metriken und Zusammenhänge

Unser Ziel ist es, Begriffe der Geometrie auf Mannigfaltigkeiten einzuführen. Dabei denken wir beispielsweise an die Länge von Kurven oder an die Krümmung einer Mannigfaltigkeit. Es wird sich zeigen, dass bereits das Längenelement, genannt Riemannsche Metrik, sämtliche geometrischen Eigenschaften, einschließlich der Krümmung, bestimmt.

Für Längen und Inhalte braucht man offensichtlich nur die erste Fundamentalform axiomatisch einzuführen. Es war Gauß' Entdeckung von 1827, dass dies allein für Flächen bereits einen Krümmungsbegriff bestimmt. Riemann formulierte 1854, wie der Krümmungsbegriff in höherer Dimension auszusehen hätte; seine intuitiven Vorstellungen vom Begriff der Mannigfaltigkeit wurden aber erst 1913 durch Weyl präzise gefasst. Durch die Rückführung auf die Parallelverschiebung und durch die sogenannte kovariante Ableitung von Vektorfeldern gab Levi-Civita 1916 eine elegante Grundlage für den Krümmungsbegriff. Koszul stellte 1950 diese Begriffe in einen neuen Rahmen, indem er Zusammenhänge einführte, die dann von Ehresman verallgemeinert wurden.

1. METRIKEN

1.1. Semi-Riemannsche Metriken. Will man Längen und Winkel in Mannigfaltigkeiten messen, muss man die Längen in jedem Tangentialraum kennen. Wir beginnen daher mit einer Erinnerung an Lineare Algebra.

Wir betrachten eine symmetrische Bilinearform $b: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ auf einem Vektorraum V . Die Form heisst *ausgeartet*, wenn es ein $w \in V \setminus \{0\}$ gibt, so dass $b(v, w) = 0$ für alle $v \in V$. Der *Index* $k \in \{1, \dots, n\}$ von b ist die maximale Dimension eines Unterraums, auf dem $b(v, v) \leq 0$ gilt. Die Form b heißt *positiv definit*, wenn $k = 0$ ist oder, äquivalent dazu, $b(v, v) > 0$ für alle $v \neq 0$; entsprechend für *negativ definit*; eine definite Form ist niemals ausgeartet.

Nun machen wir die Bilinearform punktabhängig:

Definition. Sei M^n eine (differenzierbare) Mannigfaltigkeit. Eine *semi-Riemannsche Metrik* vom Index $0 \leq k \leq n$ auf M ist eine Abbildung

$$g: \mathcal{V}(M) \times \mathcal{V}(M) \rightarrow C^\infty(M), \quad (X, Y) \mapsto g(X, Y),$$

so dass in jedem Punkt $p \in M$ die Einschränkung $g_p: T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ eine nicht-ausgeartete symmetrische Bilinearform mit Index $0 \leq k \leq n$ ist. Die Metrik heißt *Riemannsch*, wenn g_p positiv definit für alle $p \in M$ ist.

Man nennt (M, g) oder kurz $M = M_k^n$ *Riemannsche* bzw. *semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit*. Statt semi-Riemannsch sagt man auch *pseudo-Riemannsch*.

Nach dieser Definition ist $p \mapsto g_p(X, Y)$ für alle $X, Y \in \mathcal{V}(M)$ differenzierbar. Dies ist äquivalent dazu, dass bezüglich jeder Karte (x, U) die Funktionen

$$g_{ij}: U \rightarrow \mathbb{R}, \quad g_{ij}(p) := g_p(e_i(p), e_j(p)), \quad 1 \leq i, j \leq n,$$

differenzierbar sind. Dann erhält man für lokale Darstellungen $X = \sum_i \xi^i e_i$ und $Y = \sum_j \eta^j e_j$ den Ausdruck $g(X, Y) = \sum_{ij} g(\xi^i e_i, \eta^j e_j) = \sum_{ij} \xi^i \eta^j g_{ij}$.

Übung. 1. Warum kann der Index von g_p auf einer zusammenhängenden Mannigfaltigkeit nicht von p abhängen?

2. Zeigen Sie, dass eine Matrix (g^{ij}) existiert, die invers zu (g_{ij}) ist, also $\sum_j g^{ij} g_{jk} = \delta_k^i$.

Beispiele. 1. Der Modellfall sind Vektorräume. Der *semi-euklidische Raum* vom Index $0 \leq k \leq n$ mit konstanter Metrik

$$\mathbb{R}_k^n := \left(\mathbb{R}^n, \langle v, w \rangle_k := - \sum_{i=1}^k v^i w^i + \sum_{i=k+1}^n v^i w^i \right).$$

Speziell ist \mathbb{R}_0^n der *euklidische Raum* und \mathbb{R}_1^n der *Minkowski-Raum*. Im Falle $k = 0$ schreiben wir weiterhin $\langle v, w \rangle$ für $\langle v, w \rangle_0$ und \mathbb{R}^n für \mathbb{R}_0^n .

2. *Klassische Flächen:* Ist $f: M^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Immersion, so wird M Riemannsche Mannigfaltigkeit durch das Zurückziehen der Standardmetrik $g_p(X, Y) := \langle df_p \cdot X, df_p \cdot Y \rangle$. Ist speziell M eine offene Teilmenge des \mathbb{R}^n , so wird hierdurch eine neue Metrik erklärt, die sogenannte erste Fundamentalform der Immersion. Ein Spezialfall sind Graphen in \mathbb{R}^{n+1} , $F(u) = (u, f(u))$ für $f: \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Erklären Sie die Riemannsche Metrik g_{ij} auf Ω für diesen Fall!

3. Allgemein kann man für jede Immersion $f: M \rightarrow (N, h)$ aus einer Riemannschen Metrik h von N eine Riemannsche Metrik für M gewinnen: Durch $g_p(X, Y) := h_{f(p)}(df_p \cdot X, df_p \cdot Y)$ wird die *zurückgezogene [pullback] Metrik* $f^*h := g$ definiert.

Eine traditionelle Notation für g , die wir in dieser Vorlesung nicht verwenden werden, ist

$$ds^2 = \sum_{ij} g_{ij} dx^i dx^j.$$

Dies ist als Tensorprodukt $\sum_{ij} g_{ij} dx^i \otimes dx^j$ gemeint, wobei (dx^i) die zu $e_i = \partial/\partial x_i$ duale Basis ist, d.h. $dx^i(e_k) = \delta_k^i$. Also ist wiederum

$$ds^2(X, Y) = \sum_{ij} g_{ij} dx^i \otimes dx^j = \sum_{ij} g_{ij} dx^i \left(\sum_k \xi^k e_k \right) dx^j \left(\sum_l \eta^l e_l \right) = \sum_{ij} g_{ij} \xi^i \eta^j.$$

Die Schreibweise wird besonders übersichtlich, wenn die Bezeichnung der Koordinaten eine Bedeutung trägt: Z.B. lautet die Metrik von \mathbb{R}^2 in Polarkoordinaten $ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2$.

1.2. Räume der Relativitätstheorie. Wir sehen uns das Beispiel der Minkowski-Räume \mathbb{R}_1^n mit der Metrik $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ an, die wir für $n = 4$ als Raumzeit der *speziellen* Relativitätstheorie auffassen: Wir schreiben $(t, u_1, \dots, u_{n-1}) = (t, u) \in \mathbb{R}_1^n$, wobei die erste Koordinate für die Zeit steht, die u -Koordinaten für den Ort. Unter der in der Relativitätstheorie üblichen Einheitenwahl ist die Lichtgeschwindigkeit gerade $c = 1$. Daher kann man den sogenannten *Lichtkegel*

$$K := \{g((t, u), (t, u)) = 0\} = \{(t, u) : t^2 = u_1^2 + \dots + u_{n-1}^2\} \subset \mathbb{R}_1^n$$

verstehen als alle Punkte der Raumzeit, die Licht vom Ursprung aus erreicht, bzw. die Licht zum Ursprung senden können. Jeder Punkt innerhalb des Kegels, d.h. $g((t, u), (t, u)) = \|u\|^2 - t^2 < 0$, ist vom Ursprung aus mit Geschwindigkeit kleiner als c erreichbar (bzw. umgekehrt), aber jeder Punkt außerhalb des Kegels ($g(\dots, \dots) > 0$) ist unerreichbar.

Wie immer in der Physik stellen Koordinaten eine Wahl dar, die gleichberechtigt zu anderen Wahlen ist. Dies begründet sich aus den Postulaten der speziellen Relativitätstheorie:

1. Alle gleichförmig bewegten Systeme (Inertialsysteme) sind gleichberechtigt, keines ist ausgezeichnet (Relativitätsprinzip).
2. Die Lichtgeschwindigkeit ist in jedem solchen System gleich, und kein Beobachter kann sich schneller als mit Lichtgeschwindigkeit bewegen.

Jede Bahn eines gleichförmig bewegten Beobachters, der sich zur Zeit 0 im Ursprung befindet, ist eine Ursprungsgerade. Nach 2. sind aber nur Ursprungsgeraden innerhalb des Kegels K möglich. Wegen 1. sind alle diese Geraden sogar gleichberechtigt. Es gibt daher eine Koordinatentransformation, die ein Paar dieser Geraden aufeinander abbildet, wobei auch die t -Achse auf eine andere Gerade innerhalb des Kegels abgebildet wird, und der Lichtkegel in sich. Dies sind die sogenannten Lorentz-Transformationen.

Der Raum der *allgemeinen* Relativitätstheorie ist eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit M_1^4 , auch *Lorentz-Mannigfaltigkeit* genannt. In jedem Punkt hat sie als Tangentialraum $T_p M$ einen Minkowskiraum. Die Richtungen aus $T_p M$, die auf dem Lichtkegel liegen, sind physikalisch ausgezeichnet, alle raumartigen Tangentialvektoren sind aber über Koordinatentransformation gleichberechtigt, genauso alle zeitartigen Vektoren. Es gibt also keine kanonischen Koordinaten.

Die gegebene physikalische Interpretation begründet die folgende Sprechweise:

Definition. Ein Tangentialvektor v an eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit M heißt *raumartig* [spacelike], wenn $g_p(v, v) > 0$ oder $v = 0$; *lichtartig* oder *null*, wenn $g_p(v, v) = 0$, aber $v \neq 0$; er heißt *zeitartig* [timelike] wenn $g_p(v, v) < 0$.

1.3. Länge, Winkel, Volumen. Bevor wir weitere Beispiele semi-Riemannscher Mannigfaltigkeiten angeben, wollen wir einen Hauptzweck von Metriken erwähnen.

Für eine Riemannsche Mannigfaltigkeit (M, g) setzen wir als *Länge*

$$(1) \quad \|v\|_p := \sqrt{g_p(v, v)} \quad \text{für } v \in T_p M.$$

Entsprechend der euklidischen Formel $\langle v, w \rangle = |v||w| \cos \angle(v, w)$ definieren wir mithilfe der Länge einen *Riemannschen Winkel* $\angle(v, w)$ durch

$$(2) \quad g_p(v, w) = \|v\|_p \|w\|_p \cos \angle(v, w) \quad \text{für } v, w \neq 0.$$

Für eine differenzierbare Kurve $c: I \rightarrow M$, definiert auf einem offenen Intervall I , sei $c'(t) := dc_t(1) \in T_{c(t)}M$ der Tangentialvektor. Die *Bogenlänge* oder einfach *Länge* von c erhalten wir durch Integration des infinitesimalen Längenbegriffs g :

$$L(c) := \int_I \|c'\| dt = \int_I \sqrt{g_{c(t)}(c'(t), c'(t))} dt \in [0, \infty].$$

Die bisher eingeführten Begriffe kann man im semi-Riemannschen Fall entsprechend für raumartige Vektoren verwenden, beziehungsweise für Kurven mit raumartigem Tangentialvektor (raumartige Kurven).

Im Riemannschen Fall kann man durch das Infimum $d(p, q)$ der Bogenlängen von Kurven zwischen $p, q \in M$ eine (*Abstands-*)*Metrik* auf M erklären, die wir noch genauer untersuchen werden. Weiterhin kann man über M integrieren: Das *Volumen* des Kartenbildes (x, U) ist durch

$$\text{vol}(U) = \int_{x(U)} \sqrt{\det(g_{ij}(x^{-1}(u)))} du_1 \dots du_n$$

gegeben und tatsächlich unabhängig von der gewählten Karte (nach Transformationsformel, siehe Vorlesung Integration). Das Volumen einer beliebigen Menge erhält man entsprechend durch Summation über eine disjunkte Vereinigung von in Karten liegenden Teilmengen. Analog kann man auch Funktionen integrieren.

1.4. Konforme Metriken. Wir betrachten Metriken, für die Winkel übereinstimmen:

Definition. Auf einer Mannigfaltigkeit M heißt eine semi-Riemannsche Metrik h *konform* zur Metrik g , wenn eine Funktion $\lambda \in C^\infty(M, (0, \infty))$ existiert, so dass $h = \lambda g$.

Dies bestimmt natürlich eine Äquivalenzrelation.

Metriken, die zur Riemannschen Standardmetrik $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf offenen Mengen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ konform äquivalent sind, ergeben bereits interessante Beispiele. Wir können dabei Ω als ein inhomogenes Medium mit Dichtefunktion λ verstehen. Tatsächlich braucht eine Kurve mit konstanter Ausbreitungsgeschwindigkeit $\|c'\| = \sqrt{\lambda(c)\langle c', c' \rangle} = \text{const.}$ länger, um durch Gebiete hindurchzukommen, wo λ groß ist. Kurze Verbindungskurven werden also solche Bereiche zu vermeiden versuchen.

3. Vorlesung, 24.10.18

Der *hyperbolische Raum* \mathbb{H}^n ist das prominenteste Beispiel einer Riemannschen Mannigfaltigkeit. Wir werden ihn in einem separaten Kapitel behandeln, geben aber schon jetzt zwei verschiedenen Modelle an:

Beispiel. 1. Das *Halbebenen-Modell* des hyperbolischen Raumes ist

$$(3) \quad M^n := \mathbb{R}^{n-1} \times (0, \infty) \quad \text{mit} \quad g_x(v, w) := \frac{1}{x_n^2} \langle v, w \rangle.$$

Wir haben also die Dichtefunktion $\lambda(x) = 1/x_n^2$, die für $x_n \rightarrow 0$ explodiert. Betrachten wir $n = 2$ und die Kurve $c_\varepsilon(t) := (0, t)$, definiert für $t \in [\varepsilon, 1]$. Ihre Länge ist

$$L(c_\varepsilon) = \int_\varepsilon^1 \sqrt{\frac{1}{t^2} \langle c'(t), c'(t) \rangle} dt = \int_\varepsilon^1 \frac{1}{t} dt = -\log \varepsilon \rightarrow \infty \quad \text{für } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Wegen $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} L(c_\varepsilon) = \infty$ wird die Kurve unendlich lang, wenn wir sie bis nach $(0, 0)$ fortsetzen. Tatsächlich ist jeder Punkt $x \in M$ vom sogenannten *idealen Rand* $\mathbb{R} \times \{0\}$ unendlich weit entfernt. Weiterhin ist eine horizontale Kurve $c(t) = (t, 1)$ nicht die kürzeste Verbindung ihrer Endpunkte, weil die Metrik oberhalb “dünner” als unterhalb ist. Tatsächlich werden wir sehen, dass senkrecht auf den Rand auftreffende Halbkreise kürzeste Kurven sind.

2. Das *Poincaré-Modell*

$$M^n := B^n := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}, \quad g_x(v, w) := \frac{4}{(1 - |x|^2)^2} \langle v, w \rangle.$$

Auch hier explodiert die Dichtefunktion gegen den “idealen Rand” \mathbb{S}^{n-1} .

Das letzte Beispiel hat eine Verallgemeinerung. Sie geht zurück auf Riemanns Inauguralvorlesung von 1854: *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen*. Sei $\kappa \in \mathbb{R}$ und

$$(4) \quad M_\kappa := \begin{cases} \mathbb{R}^n & \kappa \geq 0, \\ B_{1/(-\kappa)}^n \subset \mathbb{R}^n & \kappa < 0, \end{cases} \quad \text{mit} \quad g_x(v, w) := \frac{4}{(1 + \kappa|x|^2)^2} \langle v, w \rangle.$$

Dann ist M_κ eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, die, wie noch zu definieren ist, konstante Krümmung κ besitzt. Für $\kappa = 0$ ist dies \mathbb{R}^n mit der Metrik $4\langle \cdot, \cdot \rangle$, für $\kappa = -1$ das Poincaré-Modell, für $\kappa = 1$ entsteht die Metrik durch stereographische Projektion aus \mathbb{S}^n .

1.5. Isometrien. Mathematische Strukturen wie Menge, Gruppe, Vektorraum, topologischer Raum, Mannigfaltigkeit haben einen natürlichen Äquivalenzbegriff. Im unserem Fall lautet er:

Definition. Seien (M, g) , (N, h) semi-Riemannsche Mannigfaltigkeiten. Ein (lokaler) Diffeomorphismus $\Phi: M \rightarrow N$ heißt *(lokale) Isometrie*, wenn $g = \Phi^*h$ gilt, d.h.

$$g_p(X, Y) = h_{\Phi(p)}(d\Phi_p X, d\Phi_p Y) \quad \text{für alle } p \in M \text{ und } X, Y \in T_p M.$$

M und N sind dann *isometrische Mannigfaltigkeiten*.

Beispiele. 1. Für $c > 0$ ist $(\mathbb{R}^n, c^2 \langle X, Y \rangle_k)$ isometrisch zu $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle_k)$: Wähle $\Phi := \frac{1}{c} \text{id}$.

2. Die obigen Modelle von \mathbb{H}^n sind isometrisch (später).

3. Alle Verformungen eines Blattes Papier sind isometrisch.

4. Die Ebene ist lokal isometrisch zum Zylinder, ebenso \mathbb{S}^n zu $\mathbb{R}P^n$.

5. Der Rotationstorus und der flache Torus $T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ sind zwar diffeomorph, aber nicht isometrisch.

6. Stets wollen wir \mathbb{S}^n mit der durch die Immersion $\text{id}: \mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ induzierten Standardmetrik betrachten. Dann ist die stereographische Projektion $st: \mathbb{S}^n \setminus \{(0, \dots, 0, 1)\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Isometrie in den Raum \mathbb{R}^n mit Metrik (4) für $\kappa = 1$.

7. Wozu sind zusammenhängende Riemannsche 1-Mannigfaltigkeiten isometrisch?

Es sei $\Phi: M \rightarrow N$ Isometrie, und (x, U) Karte von M um p . Die Einschränkung $\Phi|_U$ ist ein Diffeomorphismus auf ihr Bild, und daher können wir auch eine Karte $y = x \circ \Phi^{-1}$ um $\Phi(p)$ definieren. Ist e_i die Standardbasis bzgl. x , so ist $f_i := d\Phi_p(e_i) \in T_{\Phi(p)}N$ die Standardbasis bzgl. y , und es gilt:

$$(5) \quad h_{ij}(\Phi(p)) = h_{\Phi(p)}(f_i, f_j) = h_{\Phi(p)}(d\Phi(e_i), d\Phi(e_j)) \stackrel{\Phi \text{ Isometrie}}{=} g_p(e_i, e_j) = g_{ij}(p)$$

Die lokalen Darstellungen x von M und $y = x \circ \Phi^{-1}$ von N stimmen also überein.

Der Begriff der Isometrie induziert eine Äquivalenzrelation von Mannigfaltigkeiten (anders als der Begriff der lokalen Isometrie!). Semi-Riemannsche Geometrie ist das Studium derjenigen Eigenschaften semi-Riemannscher Mannigfaltigkeiten, die unter Isometrien erhalten bleiben. Natürlich fragt man insbesondere nach *Invarianten*, d.h. nach Größen, die unter Isometrie erhalten bleiben. Wir werden sehen, dass die Krümmung eine Invariante ist. Für $n = 2$ haben wir in der klassischen Differentialgeometrie gezeigt, dass isometrische Flächen dieselbe Gauß-Krümmung besitzen (theorem egregium). Daraus folgt beispielsweise die Behauptung von Beispiel 5.

Die Menge $\text{Isom}(M) := \{\Phi: (M, g) \rightarrow (M, g) \text{ Isometrie}\}$ bilden eine Gruppe, die *Isometriegruppe*; für orientierte Mannigfaltigkeiten M betrachtet man auch die Gruppe der orientierungserhaltenden Isometrien $\text{Isom}_+(M)$. In unsymmetrischen Fällen besteht sie vielleicht nur aus der Identität, in symmetrischen kann sie auch kontinuierlich sein.

Beispiele. 1. $\text{Isom}(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ besteht aus allen Bewegungen, also $O(n)$ komponiert mit Translationen.

2. $\text{Isom}(\mathbb{S}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle) = O(n+1)$, $\text{Isom}_+(\mathbb{S}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle) = SO(n+1)$.

3. Für die hyperbolische obere Halbebene ist $\text{Isom}_+(M^2) = \text{SL}(2, \mathbb{R})$.
4. Die Isometriegruppe eines Ellipsoids in \mathbb{R}^3 mit paarweise verschiedenen Achsen ist diskret (und besteht woraus?).

Bemerkung. Nash zeigte 1956: Für jede Riemannsche Mannigfaltigkeit (M, g) gibt es eine Einbettung $\Phi: M^n \rightarrow \mathbb{R}^k$, die Isometrie ist, d.h. $g = \Phi^*\langle \cdot, \cdot \rangle$. Die Klasse der Untermannigfaltigkeiten von $(\mathbb{R}^k, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ umfasst also bereits alle Riemannschen Mannigfaltigkeiten! Die nötige Dimension ist allerdings hoch, $k = \frac{1}{2}n(3n+1)$ falls M kompakt ist, und sogar $k = \frac{1}{2}n(3n+1)(n+1)$ im nicht-kompakten Fall.

In niedrigen Dimensionen gibt es im allgemeinen keine isometrischen Einbettungen: Z.B. kann man nach einem Satz von Hilbert die hyperbolische Ebene nicht nach \mathbb{R}^3 einbetten; nur lokal existieren solche Einbettungen. Siehe Spivak V, Kap. 11 für eine eingehende Diskussion von Bedingungen, wann isometrische Einbettungen unmöglich sind.

1.6. Existenz Riemannscher Metriken. Wir erinnern an den Begriff der Überdeckung einer Mannigfaltigkeit M durch offene Mengen.

Definition. Eine (differenzierbare) Zerlegung der Eins [partition of unity] relativ zu einer Überdeckung $\{U_\alpha : \alpha \in A\}$ ist eine Familie $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha \in A}$ von Funktionen in $C^\infty(M)$ mit

- (i) $\varphi_\alpha \geq 0$ und $\text{supp } \varphi_\alpha \subset U_\alpha \ \forall \alpha$,
- (ii) $\forall p \in M$ gibt es eine Umgebung, die nur endlich viele $\text{supp } \varphi_\alpha$ trifft,
- (iii) $\sum_\alpha \varphi_\alpha(p) = 1 \ \forall p \in M$.

Bedingung (ii) ist sicher erfüllt, wenn die Überdeckung $\{U_\alpha\}$ lokal endlich ist.

Wir benutzen die folgende Konsequenz aus dem 2. Abzählbarkeitsaxiom, die wir ohne Beweis angeben:

Satz 1. Auf jeder differenzierbaren Mannigfaltigkeit gibt es eine Zerlegung der Eins relativ zu einem Atlas.

Korollar 2. Auf jeder differenzierbaren Mannigfaltigkeit M existiert eine Riemannsche Metrik g .

Beweis. Es sei (x_α, U_α) eine Karte eines Atlases \mathcal{A} von M . Auf $U_\alpha \subset M$ holen wir dann die Standardmetrik von $x(U) \subset \mathbb{R}^n$ zurück. D.h. ist e_i^α die Standardbasis und haben zwei Vektorfelder $X, Y \in \mathcal{V}(M)$ die lokale Darstellung $X(p) = \sum_i \xi_\alpha^i(p) e_i^\alpha$ sowie $Y(p) = \sum_i \eta_\alpha^i(p) e_i^\alpha$, so setzen wir

$$g_p^\alpha(X, Y) := \sum_{i=1}^n \xi_\alpha^i(p) \eta_\alpha^i(p), \quad \text{für } p \in U_\alpha;$$

weiterhin wir setzen g_p^α auf ganz M (unstetig) fort durch 0.

Es sei nun φ_α eine Zerlegung der Eins relativ zu \mathcal{A} . Dann ist

$$g := \sum_{\alpha} \varphi_{\alpha} g^{\alpha}$$

in jedem Punkt p eine endliche Summe, die differenzierbar abhängt von p , und g ist bilinear, symmetrisch, positiv definit. \square

Bemerkung. Trägt eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit auch eine semi-Riemannsche Metrik vom Index k für jedes $1 \leq k \leq n-1$? Erstaunlicherweise ist die Antwort negativ. Hier ist ein Gegenbeispiel für Index $k=1$ und $n=2$: Die Eigenrichtung des negativen Eigenwerts definiert ein *Linienfeld* auf M , d.h. einen eindimensionalen Unterraum jedes Tangentialraums. Aber \mathbb{S}^2 besitzt kein Linienfeld. Tatsächlich gilt das für jede kompakte orientierbare Fläche M mit Euler-Charakteristik $\chi(M) \neq 0$, und daher besitzt allein der Torus ein nicht-verschwindendes Linienfeld. Unter den kompakten orientierbaren zusammenhängenden Flächen besitzt also genau der Torus eine semi-Riemannsche Metrik vom Index 1. Weil auch $\chi(\mathbb{S}^4) = 2$ ist, zeigt das gleiche Argument, dass unsere Raumzeit nicht diffeomorph zu \mathbb{S}^4 sein kann.

1.7. Gruppenoperationen. Mannigfaltigkeiten werden selten über Karten angegeben. Viel häufiger ist die Konstruktion als Quotient einer Mannigfaltigkeit. Dabei kann die Quotientenbildung die Dimension erhalten oder verringern.

Definition. Sei M Mannigfaltigkeit und G eine Gruppe mit neutralem Element e . Man sagt, die Gruppe G *operiert* oder *wirkt* auf *[acts on]* M von links, wenn es eine Abbildung

$$G \times M \rightarrow M, \quad (g, p) \mapsto g \cdot p,$$

gibt mit den Eigenschaften

$$g \cdot (h \cdot p) = (gh) \cdot p, \quad e \cdot p = p \quad \text{für alle } p \in M \text{ und } g, h \in G.$$

Die folgenden Begriffe sind nützlich:

- (i) G operiert *transitiv*, wenn für alle Paare $p, q \in M$ ein $g \in G$ existiert mit $g \cdot p = q$.
- (ii) Die *Bahn* oder der *Orbit* von p ist die Menge $G \cdot p := \{g \cdot p : g \in G\}$.
- (iii) Die *Isotropiegruppe* (der *Stabilisator*) von $p \in M$ ist

$$G_p := \{g \in G : g \cdot p = p\}.$$

Definition. Gilt $G_p = \{e\}$ für alle $p \in M$, so heißt die Operation *frei*.

Beispiele. 1. $(\mathbb{Z}^n, +)$ operiert frei, aber nicht transitiv auf \mathbb{R}^n .

2. Die Gruppe $\mathbb{Z}_2 \sim \{\pm \text{id}\}$ wirkt durch Punktspiegelung in 0 auf \mathbb{R}^n , wegen $G_0 = \mathbb{Z}_2$ operiert sie nicht frei. Auf \mathbb{S}^{n-1} ist die Operation frei.

3. Auf \mathbb{R}^n operiert die Drehgruppe $G = \mathrm{SO}(n)$ nicht frei, denn $G_0 = \mathrm{SO}(n)$. Die Orbits sind die Sphären $G \cdot p = \{q \in \mathbb{R}^n : |q| = |p|\}$. Auf \mathbb{S}^{n-1} ist die Operation sogar transitiv, aber nur für $n = 2$ frei.

4. Vorlesung, 26.10.18

Definition. Durch die Äquivalenzrelation auf M

$$p \sim q \quad : \Longleftrightarrow \quad \exists g \in G : \quad q = g \cdot p$$

wird der Quotientenraum oder *Bahnenraum* [orbit space] $M/G := M/\sim$ eingeführt. Wir schreiben

$$\pi : M \rightarrow M/G, \quad \pi(p) := [p].$$

Durch die Quotienten-Topologie wird M/G zum topologischen Raum: Eine Menge $V \subset M/G$ sei offen genau dann, wenn $\pi^{-1}(V) \subset M$ offen ist.

Wenn G nicht frei operiert, darf man nicht erwarten, dass der Quotientenraum M/G eine topologische Mannigfaltigkeit ist:

Beispiel. Die Operation von \mathbb{Z}_2 auf \mathbb{R} liefert den Raum $\mathbb{R}/\mathbb{Z}_2 = [0, \infty)$.

Allerdings läßt sich der Quotientenraum in Verallgemeinerung des Mannigfaltigkeitsbegriffs als *Orbifaltigkeit* beschreiben.

1.8. Operation von Lie-Gruppen. Wenn wir dimensionsverringende Quotienten behandeln wollen, müssen wir weitere Voraussetzungen an die Gruppe G stellen: Wir verlangen, dass G topologischer Raum ist, der in folgendem Sinne differenzierbar ist:

Definition. Eine Mannigfaltigkeit G heißt *Lie-Gruppe*, wenn sie eine Verknüpfung besitzt, unter der sie Gruppe ist, und die folgenden Abbildungen differenzierbar sind:

$$G \times G \rightarrow G, (g, h) \mapsto gh \quad \text{und} \quad G \rightarrow G, g \mapsto g^{-1}$$

Beispiele. 1. $(\mathbb{R}^n, +)$.

2. Von den Sphären sind nur \mathbb{S}^1 und \mathbb{S}^3 Lie-Gruppen, und zwar unter Multiplikation komplexer Zahlen bzw. Quaternionen.

3. Durch Gleichungen oder Ungleichungen definierte Matrizen Gruppen wie $\mathrm{GL}(n)$, $\mathrm{O}(n)$.

4. Isometriegruppen Riemannscher Mannigfaltigkeiten: Liegruppen sind zuerst als kontinuierliche Symmetriegruppen eingeführt worden.

Beachten Sie, dass auch der Spezialfall $\dim G = 0$ zugelassen ist, der zu einem Quotienten gleicher Dimension führt. In diesem Fall ist G *diskret*, d.h. G hat die diskrete Topologie, und

G hat höchstens abzählbar viele Zusammenhangskomponenten. Beispiele sind die diskreten Lie-Gruppen $G = \mathbb{Z}_2$ oder $G = \mathbb{Z}^n$.

Jede Lie-Gruppe G operiert insbesondere auf sich selbst; diese Operation ist stets frei und transitiv (warum?). Auch jede Untergruppe $H \leq G$ operiert frei auf $M = G$.

Definition. (i) Eine Lie-Gruppe G operiert auf einer Mannigfaltigkeit M , wenn G als Gruppe operiert und die Aktion $G \times M \rightarrow M$ differenzierbar ist.

(ii) Die Operation von G ist *eigentlich* [proper], wenn für jede kompakte Menge $K \subset M$ die Menge

$$G_K := \{g \in G : (g \cdot K) \cap K \neq \emptyset\}$$

kompakt ist.

Lesen Sie bei [L2] nach, warum die Bezeichnung *eigentlich* konsistent mit der üblichen Definition ist, dass Urbilder kompakter Mengen kompakt sind.

Beispiele. 1. $(\mathbb{Z}^n, +)$ operiert eigentlich auf \mathbb{R}^n : Für $K \subset \subset \mathbb{R}^n$ gilt $K \subset B_R$, und für $|a| > 2R$ auch $(a + K) \cap K = \emptyset$; damit ist $(\mathbb{Z}^n)_K \subset B_{2R}$ und $(\mathbb{Z}^n)_K$ ist ohnehin abgeschlossen.

2. Weil G_K stets abgeschlossen ist (Übung), ist für G kompakt die Operation stets eigentlich; ein Beispiel dazu ist $G = \mathrm{SO}(n)$.

3. $G := \mathbb{R}^* \ni t$ wirkt auf $M := \mathbb{R}^n \ni x$ durch $t \cdot x := tx$. Die Operation ist nicht eigentlich, denn die Menge $G_{\{0\}} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist nicht-kompakt. Auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ist die Aktion aber eigentlich.

Satz 3. Die Lie-Gruppe G^k operiere frei und eigentlich auf einer Mannigfaltigkeit M^n . Dann ist M/G eine $(n-k)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit, wobei die differenzierbare Struktur dadurch eindeutig bestimmt ist, dass $\pi : M \rightarrow M/G$ Submersion ist, d.h. π ist differenzierbar vom maximalen Rang, d.h. $\mathrm{Rang}(d\pi_p) = n - k$ für alle $p \in M$.

Beispiele. 1. $\mathbb{R}P^n = \mathbb{S}^n / \{\pm \mathrm{id}\} = (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) / (\mathbb{R} \setminus \{0\})$.

2. $T^n = \mathbb{R}^n / \Gamma$ für Γ ein Gitter [lattice], d.h. es gilt $\Gamma := \{\sum_{i=1}^n k^i v_i : k^i \in \mathbb{Z}\}$ mit (v_1, \dots, v_n) linear unabhängig.

3. Die Operation der Lie-Gruppe $G := \mathbb{R}^k \ni v$ auf $M := \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \ni (x, y)$ durch Translation: $v \cdot (x, y) := (v + x, y)$. Hier ist der Bahnenraum die Mannigfaltigkeit $\mathbb{R}^n / \mathbb{R}^k = \mathbb{R}^{n-k} \ni y$.

4. Ein typisches nicht-triviales Beispiel mit $k > 0$ ist der Grassmann-Raum der l -dimensionalen Unterräume von \mathbb{R}^m , gegeben durch $G(l, m) = \mathrm{O}(m) / (\mathrm{O}(l) \times \mathrm{O}(m-l))$. Viele weitere interessante Räume entstehen als Quotienten von Matrizenräumen.

Beweisidee. Sie finden den vollständigen Beweis in [L2, Thm.9.16]. Es ist für M/G zu zeigen:

1. Existenz einer eindeutig bestimmten differenzierbaren Struktur,
2. Hausdorff,
3. zweites Abzählbarkeits-Axiom,
4. lokal euklidisch.

Um einen Eindruck zu geben, skizzieren wir, wie man Karten von M/G konstruiert. Das Ziel ist, M/G lokal wie in Beispiel 3 zu beschreiben: Hat man auf M Koordinaten (x, y) , so dass y auf den Bahnen konstant ist, dann sind durch y Karten von M/G gegeben.

Wir zeigen dazu, dass jeder Orbit $G \cdot p$ eine Untermannigfaltigkeit von M ist. Sei dazu die Orbitabbildung $\varphi_p: G \rightarrow M$, $\varphi_p(g) := g \cdot p$. Aus der Freiheit der Operation folgt, dass φ_p für jedes p injektiv ist, denn

$$g \cdot p = h \cdot p \quad \Rightarrow \quad (h^{-1}g) \cdot p = p \quad \xrightarrow{\text{frei}} \quad h^{-1}g = e \quad \Rightarrow \quad g = h.$$

Weil G Lie-Gruppe ist und transitiv auf sich selbst operiert, kann man weiterhin zeigen $\text{Rang}(d\varphi_p)_g = \dim G = k$. Folglich immersiert φ_p die Mannigfaltigkeit G^k nach M^n .

Ist die Lie-Gruppe G kompakt, so folgt die Behauptung direkt aus dem Satz, dass jede injektive Immersion einer kompakten Menge Einbettung ist, also ist $G \cdot p$ Untermannigfaltigkeit (siehe Vorlesung Mannigfaltigkeiten). Im nicht-kompakten Fall läßt sich dasselbe aus der Eigentlichkeit der Operation folgern: Ist $K \subset M$ kompakt, so ist $(\varphi_p)^{-1}(K)$ einerseits abgeschlossen in G wegen Stetigkeit. Andererseits ist diese Menge in einer kompakten Menge enthalten:

$$\begin{aligned} (\varphi_p)^{-1}(K) &= \{g : g \cdot p \in K\} \\ &= \{g : \{g \cdot p\} \cap K \neq \emptyset\} \subset \{g : g \cdot (\{p\} \cup K) \cap (\{p\} \cup K) \neq \emptyset\} = G_{\{p\} \cup K} \end{aligned}$$

Damit ist $(\varphi_p)^{-1}(K)$ sogar kompakt und φ_p eine eigentliche Abbildung. Aber auch eine eigentliche injektive Immersion ist Einbettung, siehe [L2, Prop.7.4].

Nun nimmt man eine Karte von M und benutzt den Umkehrsatz, um sie so umzuparametrisieren, dass y konstant auf den Orbits ist; die Einschränkung auf y liefert dann eine Karte von M/G . □

Sofern wir eine Metrik haben, die invariant unter einer Gruppenoperation ist, induziert sie eine Metrik auf dem Quotienten:

Satz 4. *Sei (M^n, g) Riemannsch und eine k -dimensionale Lie-Gruppe G operiere frei und eigentlich durch Isometrien. Dann gibt es auf M/G genau eine Riemannsche Metrik h , bezüglich derer π lokale Isometrie ist. Ist G diskret ($k = 0$), so erweitert sich diese Aussage auch auf den semi-Riemannschen Fall.*

Beweis. Wir benutzen zwei Tatsachen der linearen Algebra für euklidische Vektorräume:

1. Jeder Unterraum $V \subset \mathbb{R}^n$ besitzt ein orthogonales Komplement, und
2. die Einschränkung eines Skalarprodukts auf einen Unterraum definiert ein Skalarprodukt auf dem Unterraum.

Sei $p \in M$. Wie bereits im Beweis von Satz 3 gezeigt, ist jede Bahn $G \cdot p$ eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit von M^n . Also gilt $T_p(G \cdot p) \subset T_p M$. Wir betrachten nun das orthogonale Komplement, also den $(n - k)$ -dimensionalen Unterraum $(T_p(G \cdot p))^\perp \subset T_p M$; speziell für $k = 0$ ist dieser Unterraum ganz $T_p M$. In jedem Fall ist

$$d\pi_p: (T_p(G \cdot p))^\perp \rightarrow T_{\pi(p)}(M/G)$$

ein Isomorphismus $(n - k)$ dimensionaler Vektorräume. Sei nun $q \in M/G$. Wir wählen $p \in M$ mit $\pi(p) = q$. Für zwei Tangentialvektoren $v, w \in \mathcal{V}(M/G)$ ist dann

$$(6) \quad h_q(v, w) := g_p((d\pi_p)^{-1}v, (d\pi_p)^{-1}w)$$

definiert und ein Skalarprodukt. Damit wird die Projektion $(\pi_p)^{-1}$ zur lokalen Isometrie. Die Differenzierbarkeit von h ist klar.

Um zu zeigen, dass unsere Definition unabhängig von der Wahl des Repräsentanten p von q ist, betrachten wir einen weiteren Punkt $p' \in M$ mit $\pi(p') = q$. Es existiert dann ein $g \in G$, so dass $\varphi(p) := g \cdot p = p'$ als Isometrie wirkt. Aus $(\pi \circ \varphi)(p) = \pi(p')$ folgt $(d\pi_{p'})^{-1} = d\varphi_p \circ (d\pi_p)^{-1}$ und daher stimmt (6) für p und p' überein:

$$\begin{aligned} g_p((d\pi_p)^{-1}v, (d\pi_p)^{-1}w) &\stackrel{\varphi \text{ Isometrie}}{=} g_{p'}(d\varphi_p(d\pi_p)^{-1}v, d\varphi_p(d\pi_p)^{-1}w) \\ &= g_{p'}((d\pi_{p'})^{-1}v, (d\pi_{p'})^{-1}w). \end{aligned}$$

□

Zum Beispiel sind $\mathbb{R}P^n = \mathbb{S}^n / \{\pm \text{id}\}$ und die flachen Tori $T^n = \mathbb{R}^n / \Gamma$ Riemannsche Mannigfaltigkeiten.

Bemerkung. Der Tangentialraum einer Lie-Gruppe in einem beliebigen Punkt ist in natürlicher Weise eine Lie-Algebra: Zu jedem Vektor gibt es eine Gruppen-invariante Fortsetzung zu einem Vektorfeld (sogenanntes linksinvariantes Vektorfeld), und die Lie-Algebra ist durch die Lie-Klammer von Vektorfeldern definiert.

5. Vorlesung, 31.10.18

2. PARALLELITÄT UND KOVARIANTE ABLEITUNG FÜR IMMERSIERTE FLÄCHEN

Alle weiteren Riemannschen Begriffe, die wir einführen werden, beruhen auf einer Richtungsableitung von Vektorfeldern, der sogenannten kovarianten Ableitung. Man kann sie

so verstehen, dass sie die Abweichung gegenüber einer zu definierenden Parallelverschiebung misst. Die Parallelverschiebung von Tangentialvektoren längs Kurven ist allerdings wegababhängig, sie hängt also von der Wahl der Kurve ab.

Zur Motivation der axiomatischen Definitionen des nächsten Kapitels betrachten wir zuerst den Fall von immersierten Flächen in \mathbb{R}^m . Hier ergibt sich der Begriff der Parallelverschiebung durch Projektion aus dem umgebenden Raum.

2.1. Parallelverschiebung: Definition und Eigenschaften. Zur Motivation berachten wir die 2-Sphäre \mathbb{S}^2 . Sei $c(t)$ eine Kurve in \mathbb{S}^2 , z.B. ein Großkreis. Wir wollen definieren, dass ein Vektorfeld $X(t) \in T_{c(t)}\mathbb{S}^2$ parallel längs c ist. Dabei soll Parallelität bedeuten, dass sich das Vektorfeld nur so wenig wie nötig ändert. Das Problem hierbei ist, dass das Vektorfeld in der Regel nicht konstant sein kann, wenn es tangential längs c bleiben soll.

Fall 1: Wenn $X(0)$ senkrecht auf $c'(0)$ steht, dann ist das im umgebenden Raum konstante Feld $X(t) := X(0)$ tangential in allen Punkten. Es löst unser Problem, ist also parallele Fortsetzung von $X(0)$.

Fall 2: wollen wir $X(0) = c'(0)$ parallel fortsetzen. Dieser Vektor ist nicht mehr tangential längs c , deshalb kann eine parallele Fortsetzung nicht konstant bleiben. Wir ändern X nur normal zu $T_{c(t)}\mathbb{S}^2$, und zwar so, dass es tangential bleibt. Dies bedeutet, dass wir verlangen

$$(7) \quad X(t) \in T_{c(t)}\mathbb{S}^2 \quad \text{und} \quad X'(t) \in (T_{c(t)}\mathbb{S}^2)^\perp \subset \mathbb{R}^3 \quad \text{für alle } t.$$

Tatsächlich erfüllt $X(t) := c'(t)$ diese Bedingungen, denn $X'(t) = c''(t) = -c(t)$ steht senkrecht auf dem Tangentialraum. Daher ist $X(t) = c'(t)$ die gesuchte Parallelverschiebung. Die Bedingung (7) ist eine natürliche Bedingung, denken Sie nur an ein Flugzeug, das “geradeaus” über die Erdkugel fliegt.

Fall 3: Sei nun $X(0)$ beliebiger Einheitstangentialvektor. Wir verlangen (7) auch in diesem Fall. Um zu verstehen, was das bedeutet, beachten wir, dass Y und $c'(t)$ eine Basis des Tangentialraums in $c(t)$ darstellen. Wir können die Fortsetzung also in der Form $X(t) := a(t)c'(t) + b(t)Y$ angeben. Wir behaupten, dass (7) genau dann erfüllt wird, wenn a und b konstant sind (Übung). Insbesondere bleibt die Länge von X konstant. Für die hier betrachtete geodätische Kurve c bleibt auch der Winkel gegenüber c' konstant.

Das Ergebnis einer Parallelverschiebung hängt vom gewählten Weg ab. Äquivalent dazu ist, dass die Parallelverschiebung eines Vektors entlang eines geschlossenen Weges nicht unbedingt der Startvektor ist. Als Beispiel einer geschlossenen Kurve in \mathbb{S}^2 betrachten wir ein gleichseitiges Dreieck mit Kantenlängen $\frac{\pi}{2}$, z.B. mit dem Nordpol als einer Ecke und der gegenüberliegenden Seite auf dem Äquator. Die Südrichtung definiert ein Einheitsfeld, das parallel ist (warum?), aber am Nordpol um $\frac{\pi}{2}$ springt.

Bemerkung. Man kann den Parallelitätsbegriff (7) auch physikalisch motivieren. Wir betrachten ein *Pendel* auf der Erdoberfläche \mathbb{S}^2 , wobei wir aber, anders als beim Foucaultschen Pendel von

der Erdrotation absehen. Wir bewegen uns nun längs einer gegebenen Kurve $c(t)$ und führen das Pendel mit. Im Punkt $c(t)$ wird die Pendelebene aufgespannt vom Normalenvektor an die Erdoberfläche und einem Einheitstangentialvektor $X(t)$ längs $c(t)$. Weil die Gravitation nur in Normalenrichtung auf das Pendel einwirkt, es in Tangentialrichtung aber kräftefrei beläßt, rotiert die Schwingungsebene nicht um die Normale auf der Erdoberfläche. Dies bedeutet (7) gilt, und $X(t)$ wird parallel verschoben längs c .

Wir ersetzen nun \mathbb{S}^2 durch das Bild einer beliebigen Immersion $F: M^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit Kodimension $m - n \geq 0$. Die Mannigfaltigkeit M^n betrachten wir mit der von $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ zurückgezogenen Riemannschen Metrik

$$(8) \quad g = F^*\langle \cdot, \cdot \rangle, \quad \text{d.h. } g_p(X, Y) := \langle dF_p X, dF_p Y \rangle.$$

Weiter sei Π die orthogonale Projektion auf den Tangentialraum des Bildes der Immersion, $\Pi_{F(p)}: \mathbb{R}^m \rightarrow dF_p(T_p M)$.

Definition. Es sei $F: M \rightarrow \mathbb{R}^m$ Immersion.

(i) Sei $c: I \rightarrow M$ eine Kurve. Ein *Vektorfeld längs c* ist eine differenzierbare Abbildung $X: I \rightarrow T_{c(t)}M$.

(ii) Es heißt *parallel längs c* , wenn seine Tangentialprojektion

$$(9) \quad \Pi_{F(c(t))}((dF_{c(t)} \cdot X)'(t)) = 0 \quad \text{für alle } t$$

erfüllt. Wir nennen $X(t)$ eine *Parallelverschiebung* von $X(t_0)$ längs c .

Die Bedingung (9) sagt, dass $dF(X)$ keine tangentiale Änderung ausführt. So wie im Beispiel von \mathbb{S}^2 gilt auch im allgemeinen, dass ein paralleles Feld dFX weder tangential rotiert noch seine Länge ändert:

Satz 5. Sind X, Y parallel längs c , so ist $g(X, Y) := \langle dF(X), dF(Y) \rangle$ konstant. Insbesondere bleiben konstant: die Länge $\|X\|$ und der für $X, Y \neq 0$ durch (2) definierte Winkel $\angle(X, Y)$.

Beweis. Wir nutzen aus, dass $dF(X)$ und $dF(Y)$ tangential sind (bei (*)):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}g(X, Y) &\stackrel{\text{Produktregel}}{=} \left\langle \frac{d}{dt}dF(X), dF(Y) \right\rangle + \left\langle dF(X), \frac{d}{dt}dF(Y) \right\rangle \\ &\stackrel{(*)}{=} \left\langle \underbrace{\Pi\left(\frac{d}{dt}dF(X)\right)}_{=0}, dF(Y) \right\rangle + \left\langle dF(X), \underbrace{\Pi\left(\frac{d}{dt}dF(Y)\right)}_{=0} \right\rangle = 0 \quad \square \end{aligned}$$

Direkt aus der Definition folgt, dass die Parallelverschiebung von zwei Immersionen längs einer Kurve dann übereinstimmt, wenn die Tangentialräume entlang der Kurve übereinstimmen. Diese Bedingung ist z.B. erfüllt für einen Breitenkreis der Sphäre und einen Kegel, der die Sphäre im Breitenkreis tangential berührt.

Satz 6. Gegeben seien zwei Immersionen $F_1: M_1 \rightarrow \mathbb{R}^m$ und $F_2: M_2 \rightarrow \mathbb{R}^m$. Wenn sie dieselbe Bildkurve $F_1 \circ c_1 = F_2 \circ c_2$ besitzen und die Tangentialräume in allen Kurvenpunkten übereinstimmen, also $dF_1(T_{c_1}M_1) = dF_2(T_{c_2}M_2)$, dann stimmen auch die Parallelverschiebungen längs c_i für beide Flächen überein.

Beweis. Nach Voraussetzung stimmen die beiden Tangentialprojektionen bzgl. F_1 und F_2 überein. Also ist für $Y(t) := dF_1 \cdot X_1(t) = dF_2 \cdot X_2(t)$ die Bedingung $\Pi Y'(t) = 0$ äquivalent bezüglich jeder der beiden Flächen. \square

2.2. Parallelität als Differentialgleichung. Wir wollen nun Parallelverschiebungen berechnen. Dazu benutzen wir lokale Koordinaten des Urbilds M , d.h. wir nehmen an, dass wir eine Karte (x, U) von M haben. Dann ist die Abbildung $F \circ x^{-1}: x(U) \rightarrow \mathbb{R}^m$ ein Flächenstück im Sinne der elementaren Differentialgeometrie mit erster Fundamentalform (8).

Sei c Kurve in M und X Vektorfeld längs c . Wir betrachten von t abhängige Hauptteile bezüglich der Karte (x, U) , und zwar ξ für X , sowie γ' für c' (geringfügiger Notationsmissbrauch); es ist also beispielsweise $X(t) = \sum \xi^i(t) e_i(c(t))$. Die Zeit-Ableitung von $dF(X)$ hat (z.B. nach I(6)) die lokale Darstellung

$$(10) \quad \frac{d}{dt}(dF_c(X)) = \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^n \xi^i \frac{\partial F}{\partial x_i} \circ c \right) = \underbrace{\sum_{i=1}^n \xi'^i \frac{\partial F}{\partial x_i} \circ c}_{\in T_{c(t)}F} + \sum_{i,j=1}^n \gamma'^j \xi^i \frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_i} \circ c.$$

Dabei ist die letzte Summe entstanden durch die Berechnung

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} \circ c \right) \stackrel{I(3)}{=} \frac{d}{dt} \left(\partial_i(F \circ x^{-1}) \circ (x \circ c) \right) = \sum_j \left(\partial_j \partial_i(F \circ x^{-1}) \circ (x \circ c) \right) \frac{d}{dt} (x \circ c)^j,$$

und wir benutzen die Notation $\frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_i}(p) := (\partial_j \partial_i(F \circ x^{-1}))(x(p))$ analog zu I(3).

Wie in der elementaren Differentialgeometrie führen wir Christoffel-Symbole ein, um die Tangentialkomponente der zweiten Ableitungen zu erhalten. Dabei benutzen wir, dass für eine Immersion F die Vektoren $\frac{\partial F}{\partial x_k}(p) \in \mathbb{R}^m$ eine Basis von $dF(T_p M)$ bilden.

Definition. Die *Christoffel-Symbole* zu einer Immersion $F: M \rightarrow \mathbb{R}^m$ bezüglich der Karte (x, U) sind die Funktionen $\Gamma_{ij}^k: U \rightarrow \mathbb{R}$ für $1 \leq i, j, k \leq n$, definiert durch die Tangentialprojektion der zweiten Ableitungen,

$$\Pi_{F(p)} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(p) \right) = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k(p) \frac{\partial F}{\partial x_k}(p).$$

Nach dem Satz von Schwarz ist $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$. Mit Hilfe der Christoffel-Symbole erhalten wir aus (10)

$$(11) \quad \Pi\left((dF_c X)'\right) = \sum_{k=1}^n \left(\xi'^k + \sum_{i,j} (\Gamma_{ij}^k \circ c) \gamma'^i \xi^j \right) \frac{\partial F}{\partial x_k} \circ c,$$

wobei γ' der Hauptteil von c' sei. Wenn X parallel ist, muss diese Linearkombination verschwinden; sie ist eine triviale Linearkombination, weil $\frac{\partial F}{\partial x_k}$ Basis ist. Wir haben gezeigt:

Satz 7. *Das Vektorfeld X längs c mit lokaler Darstellung $X(t) = \sum_{i=1}^n \xi^i(t) e_i(c(t))$ bzgl. (x, U) ist genau dann parallel, wenn ξ folgendes System linearer Differentialgleichungen für alle t mit $c(t) \in U$ erfüllt:*

$$(12) \quad \xi'^k(t) + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k(c(t)) \gamma'^i(t) \xi^j(t) = 0 \quad \text{für } k = 1, \dots, n$$

Beachten Sie, dass nach Definition Γ glatt ist, so dass das System glatte Koeffizienten besitzt.

Satz 8. *Es sei $F: M \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine Immersion und $c: I \rightarrow M$ eine Kurve mit $c(t_0) = p$. Für jedes $X_0 \in T_p M$ existiert dann eine eindeutig bestimmte Parallelverschiebung $X(t)$ längs c mit Anfangswert $X(t_0) = X_0$.*

Beweis. Betrachten wir zunächst $I = [a, b]$ kompakt. Dann ist auch $c([a, b]) \subset M$ kompakt und wird daher von endlich vielen offenen Intervallen überdeckt, deren Bild jeweils in einer Karte liegt.

Der Anfangspunkt $c(a)$ liege in einer Karte (x, U) . Der Existenzsatz für Lösungen linearer Differentialgleichungen liefert dann eine Lösung $X(t)$ von (12), die solange definiert ist wie $c(t)$ in U liegt. Falls das nicht schon ganz I ist, so ist $c(t) \in U$ für $t < T \in (a, b]$, wobei T maximal gewählt sei. (Man kann für diesen Schritt auch mit dem Existenzsatz von Picard-Lindelöf argumentieren, wenn man noch die zusätzliche Tatsache benutzt, dass $\|\xi\|^2 := \sum_{i,j} g_{ij} \xi^i \xi^j$ konstant in t bleibt.)

Es existiert $\varepsilon > 0$, so dass $c(t)$ für $t \in (T - \varepsilon, T)$ auch in einer anderen Karte (y, V) liegt. Auch dafür muss lokal (12) gelten. Wir können daher die Lösung X weiter fortsetzen, solange c in V bleibt. Nach endlich vielen Schritten ist X auf $[a, b]$ fortgesetzt.

Nach dem Eindeutigkeitsatz von Picard-Lindelöf ist jede in einer Karte gefundene Lösung eindeutig bestimmt. Die Lösung ist aber auch von der Karte unabhängig, wie sich zeigt, wenn man die eine Lösung einen Kartenwechsel anwendet und wiederum Picard-Lindelöf zitiert.

Ist I beliebig, so schöpfen kompakte Intervalle I aus. Wegen der Eindeutigkeit ist die Lösung dann auf ganz I , also längs der ganzen Kurve c , ausdehnbar. \square

Eine wichtige Eigenschaft der Koeffizienten der Differentialgleichung (12) beweist man in der elementaren Differentialgeometrie.

Satz 9. Die Christoffel-Symbole Γ_{ij}^k einer Immersion $F: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ sind allein durch die Riemannsche Metrik g aus (8) bestimmt. Tatsächlich gilt mit $g_{ij} := \langle \frac{\partial F}{\partial x_i}, \frac{\partial F}{\partial x_j} \rangle$ und (g^{ij}) , der inversen Matrix von (g_{ij}) :

$$(13) \quad \Gamma_{ij}^l = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n g^{lk} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{ik} - \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij} \right) \quad \text{für } 1 \leq i, j, l \leq n$$

Dies bedeutet, dass Parallelverschiebung bereits auf der Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) definiert ist, d.h. die Immersion F geht allein durch die Definition (8) ein. Also stimmen die Parallelverschiebungen überein, wenn zwei Immersionen F_1 und F_2 lokal isometrisch sind, $g_1 = g_2$. Beispielsweise ist für abwickelbare Flächen die Parallelverschiebung auf dem ebenen Modell ablesbar.

Wir werden (13) durch die Koszul-Formel (27) in einem allgemeineren Rahmen beweisen; siehe die Bemerkungen nach Satz 17. Dabei werden wir die rechte Seite zur Definition der Christoffel-Symbole im semi-Riemannschen Fall verwenden.

2.3. Kovariante Ableitung längs Kurven. Wir suchen einen Ableitungsbegriff für Vektorfelder längs Kurven. In Mannigfaltigkeiten besteht das Problem darin, dass im Differenzenquotienten Vektoren aus verschiedenen Tangentialräumen voneinander abgezogen werden müssten; aber dies sind verschiedene Vektorräume. Die Idee hier ist, die Parallelverschiebung in der Mannigfaltigkeit zu benutzen, um die Tangentialräume aufeinander abzubilden.

Im Falle der Immersion $F: M \rightarrow \mathbb{R}^m$, bei der M mit der Riemannschen Metrik $F^*\langle \cdot, \cdot \rangle$ ausgestattet wird, ergibt die Projektion der Ableitung des Vektorfeldes auf den Tangentialraum der Immersion einen solchen Ableitungsbegriff:

Definition. Sei X ein Vektorfeld längs $c: I \rightarrow M$. Dann ist die *kovariante Ableitung von X längs c* das eindeutig bestimmte Vektorfeld $\frac{D}{dt}X$ längs c mit

$$(14) \quad dF_{c(t)} \left(\frac{D}{dt} X(t) \right) = \Pi_{F(c(t))} \left(\frac{d}{dt} dF_{c(t)} X(t) \right).$$

Nach dieser Definition ist äquivalent: X parallel $\iff \frac{D}{dt}X = 0$. Dies ist sinnvoll, denn parallele Felder sind ja Felder, die sich nur soviel ändern wie nötig, um im Tangentialraum zu bleiben – aus der Mannigfaltigkeit M heraus gesehen, sind sie konstant.

Beispiel. Wir betrachten \mathbb{S}^n als Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^{n+1} . Die Immersion F ist dann die Inklusion $\iota: M := \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, $\iota(p) = p$. Wegen $d\iota = d\text{id} = \text{id}$ stimmt die Metrik g

dann mit dem Skalarprodukt von \mathbb{R}^{n+1} überein. Ist X ein Vektorfeld längs einer Kurve c , so gilt

$$\frac{D}{dt}X(t) = \Pi\left(\frac{dX}{dt}(t)\right) = \frac{dX}{dt}(t) - \left\langle \frac{dX}{dt}(t), c(t) \right\rangle c(t),$$

denn eine Normale im Punkt $c(t)$ ist $c(t)$ selbst.

6. Vorlesung, 2.11.18

Aus (11) folgt als lokale Darstellung der kovarianten Ableitung

$$(15) \quad \frac{D}{dt}X = \frac{D}{dt} \sum_{k=1}^n \xi^k e_k \circ c = \sum_{k=1}^n \left(\xi'^k + \sum_{i,j=1}^n (\Gamma_{ij}^k \circ c) \gamma'^i \xi^j \right) (e_k \circ c).$$

Wir können nun die Aussage präzisieren, dass die kovariante Ableitung die Änderung von X längs c relativ zu parallelen Feldern misst. Betrachten wir dazu eine Kurve $c: I \rightarrow M$ mit $0 \in I$ und wählen in $T_{c(0)}M$ eine orthonormale Basis $(v_1(0), \dots, v_n(0))$; man kann sie z.B. durch das Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren aus der Standardbasis (e_1, \dots, e_n) gewinnen. Sei $(v_1(t), \dots, v_n(t))$ ihre Parallelverschiebung, die nach Satz 5 wiederum orthonormal für jedes t bleibt, und damit insbesondere eine Basis von $T_{c(t)}M$.

Wir schreiben nun $X(t) = \sum \xi^k(t)v_k(t)$ als eine Linearkombination bezüglich dieser Basis und erhalten

$$\begin{aligned} dF\left(\frac{D}{dt}X\right) &= \Pi\left(\frac{d}{dt}dF\left(\sum_{k=1}^n \xi^k v_k\right)\right) = \sum_{k=1}^n \Pi\left(\frac{d}{dt}(\xi^k dF(v_k))\right) \\ &= \sum_{k=1}^n \left[\xi'^k \underbrace{\Pi(dF(v_k))}_{\text{tangential}} + \xi^k \underbrace{\Pi\left(\frac{d}{dt}dF(v_k)\right)}_{=0 \text{ da } v_k \text{ parallel}} \right] = dF\left(\sum_{k=1}^n \xi'^k v_k\right), \end{aligned}$$

d.h. $\frac{D}{dt}X = \sum_{k=1}^n \xi'^k v_k$. Insbesondere ist eine konstante Linearkombination paralleler Felder wieder parallel. Weil durch den Parallelitätsbegriff Vektoren in verschiedenen Tangentialräumen verglichen werden können, ist es dadurch möglich, einen Ableitungsbegriff zu formulieren.

Bemerkung. In der elementaren Differentialgeometrie wird eine Kurve c als *Geodätische* bezeichnet, wenn c' ein paralleles Vektorfeld längs c ist, d.h. wenn die kovariante Ableitung $\frac{D}{dt}c'$ für alle t verschwindet. Wir werden das Thema in Kapitel 4 behandeln.

2.4. Kovariante Ableitung von Vektorfeldern. Die Richtungsableitung eines Vektorfeldes Y in \mathbb{R}^n in Richtung eines Vektors $X \in \mathbb{R}^n$ definiert man üblicherweise dadurch, dass man Y längs einer Kurve mit Tangentialvektor X nach der Zeit ableitet. Genauso leiten wir nun ein Vektorfeld Y in Richtung eines anderen Feldes X kovariant ab:

Definition. Die kovariante Ableitung eines Vektorfeldes $Y \in \mathcal{V}(M)$ in Richtung eines Feldes $X \in \mathcal{V}(M)$ ist im Punkt $p \in M$ durch

$$(16) \quad \nabla_X Y(p) := \frac{D}{dt}(Y \circ c)(0)$$

gegeben, wobei c eine Kurve durch $c(0) = p$ mit $c'(0) = X(p)$ ist.

Beachten Sie, dass $Y \circ c$ ein Vektorfeld längs c ist, so dass man die kovariante Ableitung $\frac{D}{dt}$ bilden kann. Die Ableitung (16) ist unabhängig von der Wahl der Kurve c , weil die lokale Darstellung (15) nur von γ und γ' abhängt, nicht von weiteren Ableitungen. Also geht in $\nabla_X Y(p)$ nur der Punkt $p = c(0)$ und die Richtung $X_p = c'(0)$ ein.

Wir berechnen noch eine Deutung von $dF(\nabla_X Y)$:

$$\begin{aligned} dF_p(\nabla_X Y(p)) &\stackrel{(16)}{=} dF_{c(0)}\left(\frac{D}{dt}(Y \circ c)(0)\right) \stackrel{(14)}{=} \Pi\left(\frac{d}{dt}[dF_{c(t)}(Y \circ c)]_{t=0}\right) \\ &\stackrel{dFY \equiv \partial_Y F}{=} \Pi\left(\frac{d}{dt}[(\partial_Y F) \circ c](0)\right) = \Pi(\partial_X \partial_Y F(p)) \end{aligned}$$

Hierbei ist $\partial_Y F$ die Lie- oder Richtungsableitung des Vektors F . Die kovariante Ableitung ist also Tangentialprojektion der doppelten Richtungsableitung $\partial_X \partial_Y F$!

Wir geben noch die lokale Darstellung der kovarianten Ableitung an. Es sei dazu (x, U) Karte von M und $X = \sum_i \xi^i e_i$ sowie $Y = \sum_j \eta^j e_j$ lokale Darstellungen von Vektorfeldern. Aus

$$dF(\nabla_X Y) = \Pi(\partial_X \partial_Y F) = \Pi\left[\partial_X \left(\sum_{j=1}^n \eta^j \frac{\partial F}{\partial x_j}\right)\right] = \sum_{i,j=1}^n \xi^i \frac{\partial \eta^j}{\partial x_i} \frac{\partial F}{\partial x_j} + \sum_{i,j=1}^n \eta^j \xi^i \Pi\left(\frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial F}{\partial x_i}\right)$$

folgt nach Definition der Christoffel-Symbole

$$(17) \quad \nabla_X Y = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^n \xi^i \frac{\partial \eta^k}{\partial x_i} + \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij}^k \xi^i \eta^j \right) e_k.$$

Beispiel. In $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, also für $F = \text{id}$ gilt $\Gamma_{ij}^k = 0$. Der zweite Summand von (17) verschwindet und wir erhalten für die kovariante Ableitung $\nabla_X Y = \partial_X Y$ gerade die Standard-Richtungsableitung von Y in Richtung X .

Im Allgemeinen verstehen wir den zweiten Summanden von (17) als einen Korrekturterm. Er sorgt dafür, dass die Ableitung relativ zu parallelen Feldern genommen wird und damit Koordinaten-unabhängig ist.

Die folgenden Eigenschaften, von denen man (i) und (ii) direkt aus (17) abliest, werden wir im allgemeinen Fall axiomatisch fordern:

Satz 10. Sei $F: M \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine Immersion, die eine Riemannsche Metrik g auf M induziert. Die kovariante Ableitung ∇ auf M erfüllt für alle $X, Y, Z \in \mathcal{V}(M)$ und $f \in C^\infty(M)$:

- (i) In der Richtung ist sie $C^\infty(M)$ -linear: d.h. $\nabla_{fX+Y}Z = f\nabla_XZ + \nabla_YZ$.
- (ii) Im abzuleitenden Feld ist sie \mathbb{R} -linear, d.h. $\nabla_X(cY + Z) = c\nabla_XY + \nabla_XZ$ für $c \in \mathbb{R}$, und derivativ $\nabla_X(fY) = (\partial_X f)Y + f\nabla_XY$.
- (iii) Weiterhin gilt $\nabla_XY - \nabla_YX = [X, Y]$ und
- (iv) die Produktregel $\partial_Zg(X, Y) = g(\nabla_ZX, Y) + g(X, \nabla_ZY)$.

Beachten Sie, dass (iii) eine weitere Charakterisierung der Lie-Klammer ist – nach Definition gilt lokal $[X, Y] = \partial_XY - \partial_YX$.

Beweis. (iii) Aus (17) folgt wegen $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$:

$$\begin{aligned}\nabla_XY - \nabla_YX &= \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^n \xi^i \frac{\partial}{\partial x_i} \eta^k + \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij}^k \xi^i \eta^j - \sum_{j=1}^n \eta^j \frac{\partial}{\partial x_j} \xi^k - \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ji}^k \xi^i \eta^j \right) e_k \\ &= \sum_{i,k=1}^n \left(\xi^i \frac{\partial}{\partial x_i} \eta^k - \eta^i \frac{\partial}{\partial x_i} \xi^k \right) e_k = [X, Y]\end{aligned}$$

(iv) Sei c Kurve durch p mit $c'(0) = Z$. Wir schreiben $\tilde{X} := X \circ c$ und $\tilde{Y} := Y \circ c$ für die Felder längs c . Mit jeweils in $t = 0$ auszuwertenden t -Ableitungen gilt dann:

$$\begin{aligned}\partial_Zg(X, Y) &= \partial_Z \langle dF(X), dF(Y) \rangle \stackrel{\text{Def. Lie}}{=} \frac{d}{dt} \langle dF(\tilde{X}), dF(\tilde{Y}) \rangle \\ &= \left\langle \frac{d}{dt} dF(\tilde{X}), dF(\tilde{Y}) \right\rangle + \left\langle dF(\tilde{X}), \frac{d}{dt} dF(\tilde{Y}) \right\rangle \\ &\stackrel{\text{Def. kov. Abl.}}{=} \left\langle dF\left(\frac{D}{dt}\tilde{X}\right), dF(\tilde{Y}) \right\rangle + \left\langle dF(\tilde{X}), dF\left(\frac{D}{dt}\tilde{Y}\right) \right\rangle \\ &= g\left(\frac{D}{dt}\tilde{X}, \tilde{Y}\right) + g\left(\tilde{X}, \frac{D}{dt}\tilde{Y}\right) \stackrel{(16)}{=} g_p(\nabla_ZX, Y) + g_p(X, \nabla_ZY)\end{aligned}$$

□

Bemerkung. Die Ergebnisse übertragen sich auf den semi-Riemannschen Fall, sofern das Zurückholen der Metrik $\langle \cdot, \cdot \rangle_k$ von \mathbb{R}_k^m eine semi-Riemannsche Metrik auf der immersierten Mannigfaltigkeit M induziert.

3. ZUSAMMENHÄNGE

Im letzten Abschnitt haben wir eine kovariante Ableitung beschrieben, die durch eine Immersion $F: M \rightarrow \mathbb{R}^m$ einer Mannigfaltigkeit M induziert wird. Sie entspricht der Tangentialprojektion der Richtungsableitung auf M . Diesen Begriff hatten wir eingeführt, indem wir zuerst eine Parallelverschiebung längs Kurven beschrieben hatten, und dann die kovariante Ableitung relativ dazu eingeführt hatten.

Ist keine Immersion gegeben, so können wir immer noch axiomatisch diejenigen Eigenschaften fordern, die wir im letzten Abschnitt für die Tangentialprojektion der Richtungsableitung hergeleitet hatten. Hier definieren wir zuerst die Ableitung und benutzen sie dann, um die Parallelverschiebung einzuführen.

Der Begriff *Zusammenhang* bezieht sich auf die Parallelverschiebung von einem Tangentialraum zu einem anderen. Er hat nichts mit dem topologischen Zusammenhangsbegriff zu tun.

3.1. Zusammenhänge. In einem ersten Schritt benutzen wir zwei der vier Eigenschaften der kovarianten Ableitung, um einen allgemeinen Ableitungsbegriff auf differenzierbaren Mannigfaltigkeiten zu erklären:

Definition. Ein (*linearer*) *Zusammenhang* ∇ auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit M ist eine Abbildung

$$\nabla: \mathcal{V}(M) \times \mathcal{V}(M) \rightarrow \mathcal{V}(M), \quad (X, Y) \mapsto \nabla_X Y,$$

die für alle $X, Y, Z \in \mathcal{V}(M)$, $c \in \mathbb{R}$ und $f \in C^\infty(M)$ erfüllt:

- (i) $\nabla_{fX+Y} Z = f\nabla_X Z + \nabla_Y Z$,
- (ii) $\nabla_X(cY + Z) = c\nabla_X Y + \nabla_X Z$ und $\nabla_X(fY) = (\partial_X f)Y + f\nabla_X Y$.

Die Bezeichnung ∇ wurde in den 1950'er Jahren von Nomizu eingeführt. Um lokal arbeiten zu können, brauchen wir folgende Aussage:

Lemma 11. $(\nabla_X Y)(p)$ hängt nur ab von Y in einer Umgebung von p , sowie von $X(p)$.

Beweis. Wir bemerken zuerst $\nabla_X 0 = \nabla_X(0 \cdot 0) = 0 \cdot \nabla_X 0 = 0$, nach (ii); ebenso gilt $\nabla_0 Y = 0$ nach (i). Nun zeigen wir zuerst $\nabla_X Y^1(p) = \nabla_X Y^2(p)$, falls $Y^1 \equiv Y^2$ in einer Umgebung von p gilt. Nach Differenzbildung reicht es zu zeigen $(\nabla_X Y)(p) = 0$, falls Y auf einer Umgebung U von p identisch verschwindet. Sei φ eine Hutfunktion mit $\text{supp } \varphi \subset U$ und $\varphi(p) = 1$. Dann folgt, wie behauptet,

$$(18) \quad (\nabla_X Y)(p) = (\varphi \nabla_X Y)(p) \stackrel{(ii)}{=} (\nabla_X (\underbrace{\varphi Y}_{\equiv 0}))(p) - (\partial_X \varphi)(p) \underbrace{Y(p)}_{=0} = 0.$$

Nun untersuchen wir die Abhängigkeit von X . Wie zuvor zeigt man zuerst, dass $\nabla_X Y(p)$ nur von X in einer Umgebung von p abhängt, so dass wir eine lokale Darstellung $X = \sum_i \xi^i e_i$ in U einsetzen dürfen. Wie zuvor reicht es, $\nabla_X Y(p) = 0$ für $X(p) = 0$ zu zeigen, d.h. für $\xi^i(p) = 0$. Dies folgt aus (i):

$$(19) \quad (\nabla_X Y)(p) = (\nabla_{\sum \xi^i e_i} Y)(p) \stackrel{(i)}{=} \sum \xi^i(p) (\nabla_{e_i} Y)(p) = 0. \quad \square$$

7. Vorlesung, 8.11.18

Wir dürfen daher $\nabla_X Y$ lokal, für eine Karte x mit Standardbasis (e_i) , ausrechnen:

$$\nabla_X Y = \nabla_{\sum \xi^i e_i} (\sum \eta^j e_j) \stackrel{(i)}{=} \sum_i \xi^i \nabla_{e_i} (\sum_j \eta^j e_j) \stackrel{(ii)}{=} \sum_{i,j} \left(\xi^i (\partial_{e_i} \eta^j) e_j + \xi^i \eta^j \nabla_{e_i} e_j \right)$$

Nun definieren wir:

Definition. Die *Christoffel-Symbole* eines Zusammenhangs ∇ sind die für jede Karte (x, U) erklärten Funktionen $\Gamma_{ij}^k \in C^\infty(U)$, gegeben durch $\nabla_{e_i} e_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k e_k$.

Die Christoffel-Symbole Γ_{ij}^k eines Zusammenhangs sind im allgemeinen nicht symmetrisch in i, j . Wir können nun die zu (17) analoge lokale Darstellung angeben:

$$\nabla_X Y = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^n \xi^i \frac{\partial \eta^k}{\partial x_i} + \sum_{i,j=1}^n \xi^i \eta^j \Gamma_{ij}^k \right) e_k$$

Wiederum sagen wir: Die Christoffel-Symbole messen den Unterschied zwischen der Richtungsableitung der Karte und dem Zusammenhang. Erst durch den Christoffel-Term wird die rechte Seite invariant unter Koordinatenwechsel.

3.2. Parallelverschiebung eines Zusammenhangs. Wir wollen nun eine kovariante Ableitung $\frac{D}{dt} X$ entlang von Kurven $c(t)$ definieren, woraus sich wieder der Begriff der Parallelverschiebung ergibt.

Sei dazu ein Vektorfeld \tilde{X} längs einer Kurve $c: I \rightarrow M$ gegeben, d.h. eine differenzierbare Abbildung $\tilde{X}: I \rightarrow TM$ mit $\tilde{X}(t) \in T_{c(t)}M$. Die Menge dieser Vektorfelder bezeichnen wir mit $\mathcal{V}(c)$. Wir verallgemeinern den lokalen Ausdruck (15):

Satz 12. Jede Kurve $c \in C^\infty(I, M)$ bestimmt genau eine kovariante Ableitung längs c

$$\frac{D}{dt}: \mathcal{V}(c) \rightarrow \mathcal{V}(c)$$

mit den folgenden Eigenschaften:

- (i) $\frac{D}{dt}$ ist \mathbb{R} -linear und derivativ, d.h. $\frac{D}{dt}(f\tilde{X}) = (\frac{d}{dt}f)\tilde{X} + f\frac{D}{dt}\tilde{X}$ für alle $f \in C^\infty(I)$.
- (ii) Ist $U \subset M$ eine Umgebung von $c(t)$, und $X \in \mathcal{V}(U)$, so gilt für $\tilde{X}(t) := X(c(t))$:

$$(20) \quad \frac{D}{dt}\tilde{X}(t) = (\nabla_{c'(t)}X)(c(t))$$

Durch Lemma 11 ist die Schreibweise in (20) rechts gerechtfertigt, denn $(\nabla_Z X)(p)$ hängt von X nur in einer Umgebung von p ab, und von Z nur durch $Z(p)$ ab, so dass sich eine Fortsetzung von c' erübrigt.

Beweis. Wir zeigen zuerst die Eindeutigkeit unter Voraussetzung (i) und (ii). Sei $t \in I$ und $\tilde{X}(t) = \sum_i \tilde{\xi}^i(t) \tilde{e}_i(t)$ lokale Darstellung in U , wobei $\tilde{e}_j := e_j \circ c$. Dann gilt

$$(21) \quad \begin{aligned} \frac{D}{dt} \tilde{X} &\stackrel{(i)}{=} \sum_j \left(\left(\frac{d}{dt} \tilde{\xi}^j \right) \tilde{e}_j + \tilde{\xi}^j \frac{D}{dt} \tilde{e}_j \right) \stackrel{(ii)}{=} \sum_j \left(\left(\frac{d}{dt} \tilde{\xi}^j \right) \tilde{e}_j + \tilde{\xi}^j \nabla_{c'}(e_j \circ c) \right) \\ &\stackrel{\text{Def.}\Gamma}{=} \sum_{k=1}^n \left(\frac{d\tilde{\xi}^k}{dt} + \sum_{i,j=1}^n \gamma^{ij} \tilde{\xi}^j (\Gamma_{ij}^k \circ c) \right) e_k \circ c; \end{aligned}$$

dabei sei $c' = \sum \gamma^{ij} \tilde{e}_i$ für $t \in I$. Also wird $\frac{D}{dt}$ eindeutig durch ∇ bestimmt.

Für die Existenz definieren wir $\frac{D}{dt} \tilde{X}$ lokal durch (21). Man überzeugt sich schnell, dass die behaupteten Eigenschaften erfüllt sind. Wegen der Eindeutigkeit hängt $\frac{D}{dt} \tilde{X}$ aber nicht von der gewählten Karte ab. \square

Definition. $\tilde{X} \in \mathcal{V}(c)$ heißt *parallel* längs c , wenn $\frac{D}{dt} \tilde{X} = 0$ für alle t .

Wie in Satz 8 erhalten wir damit zu jedem Zusammenhang eine Parallelverschiebung längs Kurven durch Zitieren des entsprechenden Satzes für lineare Differentialgleichungen: Zu jedem Anfangswert gibt es ein paralleles Vektorfeld, und diese Zuordnung ist linear.

Es stellt sich die Frage, wann ein gegebenes Vektorfeld $\tilde{X} \in \mathcal{V}(c)$ sich fortsetzen läßt zu einem Vektorfeld X auf M . Natürlich geht dies im allgemeinen nicht, denn in Doppelpunkten der Kurve c kann \tilde{X} verschiedene Werte haben. Daher schränken wir uns auf folgenden Fall ein. Ist \tilde{X} Vektorfeld längs c und $p = c(t_0)$, so heißt $X \in \mathcal{V}(U)$ *lokale Fortsetzung* von \tilde{X} , wenn U Umgebung von p ist, so dass

$$(22) \quad X(c(t)) = \tilde{X}(t) \quad \text{für alle } t \text{ in einer Umgebung von } t_0.$$

Für immensierte Kurven kann man stets fortsetzen; in diesem Fall kann man $\frac{D}{dt}$ sogar durch (20) definieren.

Lemma 13. *Ist \tilde{X} Vektorfeld längs einer Kurve $c: I \rightarrow M$ mit $c'(t) \neq 0$, so gibt es eine lokale Fortsetzung X von \tilde{X} um $p := c(t)$.*

Falls c keine Immersion ist, so gibt es im allgemeinen allerdings keine lokale Fortsetzung von \tilde{X} : Denken Sie z.B. an den Fall, dass c auf einem Zeit-Intervall konstant ist, aber \tilde{X} dort verschiedene Werte annimmt. Dieser Fall wird von (21) abgedeckt, ist aber mit (20) nicht darstellbar.

Beweis. Wir benutzen eine Tatsache, die wir hier nicht beweisen (siehe Vorlesung Mannigfaltigkeiten, Corollary I.9, oder [L2]): Für jede Immersion $f: N^n \rightarrow M^{n+k}$ von Mannigfaltigkeiten und $p \in N$ gibt es eine Karte (y, V) von N um p und eine Karte (x, U) von M um $f(p)$, so dass für alle $u \in y(V)$ gilt $x \circ f \circ y^{-1}(u_1, \dots, u_n) = (u_1, \dots, u_n, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{n+k}$.

In unserem Falle $c: I \rightarrow M^n$ heisst das: Es gibt für jedes $t_0 \in I$ eine Umgebung $I_0 \subset I$ und eine Karte (x, U) von M um $p = c(t_0)$, so dass

$$(x \circ c)(t) = (t, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n \quad \text{für alle } t \in I_0.$$

Wir setzen den durch $\tilde{X}(t) = [\tilde{\xi}(t, 0)]$ gegebenen Hauptteil konstant in der Koordinate v von \mathbb{R}^{n-1} fort: $\xi(t, v) := \tilde{\xi}(t)$. Das Vektorfeld $X = [\xi]$ setzt \tilde{X} differenzierbar auf U fort. \square

Zum Abschluss zeigen wir, wie man den Zusammenhang aus der Parallelverschiebung zurückerhalten kann:

Satz 14. *Es seien X, Y Vektorfelder, und c eine Kurve durch $p = c(0)$ mit $c'(0) = X_p$. Ferner sei $\tau_{X,c,t}: T_p M \rightarrow T_{c(t)} M$ die Parallelverschiebung längs c . Dann gilt*

$$(\nabla_X Y)(p) = \frac{d}{dt}(\tau_{X,c,t}^{-1}(Y)) \Big|_{t=0}.$$

Beweis. Wir gehen zu Vektorfeldern längs c über: Sei $(\tilde{v}_i(t)) = (\tau_t(\tilde{v}_i(0)))$ eine längs c parallele Basis und $Y(c(t)) = \sum_i \tilde{\eta}^i(t) \tilde{v}_i(t)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} (\nabla_X Y)(p) &\stackrel{(20)}{=} \frac{D}{dt} \sum_i \tilde{\eta}^i(t) \tilde{v}_i(t) \Big|_{t=0} \stackrel{\tilde{v}_i \text{ parallel}}{=} \sum_i \frac{d\tilde{\eta}^i}{dt}(0) \tilde{v}_i(0) = \sum_i \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tilde{\eta}^i(t) - \tilde{\eta}^i(0)}{t} \tilde{v}_i(0) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left(\sum_i \tilde{\eta}^i(t) \tau_{X,c,t}^{-1}(\tilde{v}_i) - \tilde{\eta}^i(0) \tilde{v}_i(0) \right) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left(\tau_{X,c,t}^{-1}(Y) - Y(p) \right) \end{aligned}$$

Wegen $Y(p) = \tau_{X,c,0}^{-1}(Y)$ ist das die Behauptung. (Welche Eigenschaft der Parallelverschiebung haben wir beim letzten Gleichheitszeichen benutzt?) \square

3.3. Torsionsfreiheit und Verträglichkeit von Zusammenhängen. Es gibt viele Zusammenhänge auf einer gegebenen Mannigfaltigkeit. Im semi-Riemannschen Fall werden wir aber sehen, dass folgende Forderungen einen Zusammenhang eindeutig festlegen:

Definition. (i) Ein Zusammenhang ∇ auf einer Mannigfaltigkeit M heisst *torsionsfrei* oder *symmetrisch*, wenn seine *Torsion* $T(X, Y) := \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$ für alle $X, Y \in \mathcal{V}(M)$ verschwindet.

(ii) Ein Zusammenhang ∇ auf einer semi-Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) heisst *verträglich mit der Metrik*, wenn er $\partial_Z g(X, Y) = g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y)$ für alle $X, Y, Z \in \mathcal{V}(M)$ erfüllt.

Beispiel. Die von einer Immersion $F: M \rightarrow \mathbb{R}^m$ induzierte kovariante Ableitung mit $dF \cdot \nabla_X Y = \Pi(\partial_X \partial_Y F)$ hat diese Eigenschaften, siehe Satz 10(iii) und (iv).

Wir behaupten: Aus (i) folgt, dass die Christoffel-Symbole für jede Karte symmetrisch sind,

$$(23) \quad \Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k \quad \text{für alle } 1 \leq i, j, k \leq n.$$

Den Beweis lassen wir als einfache Übung.

Die in Satz 5 gezeigte Konstanz von Längen und Winkeln paralleler Felder längs Kurven ist äquivalent zur Eigenschaft (ii):

Satz 15. *Ein Zusammenhang ∇ ist genau dann verträglich mit g , wenn längs jeder Kurve für je zwei parallele Vektorfelder \tilde{X}, \tilde{Y} der Wert $g(\tilde{X}, \tilde{Y})$ konstant bleibt.*

Insbesondere haben parallele Vektorfelder also konstante Länge.

Beweis. “ \Rightarrow ” Sei $c: I \rightarrow M$ Kurve, und $t_0 \in I$. Wir nehmen zuerst an $c'(t_0) \neq 0$. Dann ist c lokal Immersion und damit sogar lokal Einbettung. Aus den gegebenen Vektorfeldern längs c erhalten wir dann nach Lemma 13 lokal definierte Felder X, Y, Z mit $\tilde{X} = X \circ c$, $\tilde{Y} = Y \circ c$ sowie $c' = Z \circ c$, und es gilt in einer Umgebung von t_0 :

$$(24) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dt}g(\tilde{X}, \tilde{Y}) &= \partial_Z g(X, Y) \stackrel{\nabla \text{ verträglich}}{=} g_p(\nabla_Z X, Y) + g_p(X, \nabla_Z Y) \\ &= g\left(\frac{D}{dt}\tilde{X}, \tilde{Y}\right) + g\left(\tilde{X}, \frac{D}{dt}\tilde{Y}\right) \stackrel{\tilde{X}, \tilde{Y} \text{ parallel}}{=} 0. \end{aligned}$$

Verschwindet c' in einem abgeschlossenen Intervall I , so folgt aus der Parallelitätsbedingung (21), dass dort \tilde{X} und \tilde{Y} konstant in I sind, also ist auch $g(\tilde{X}, \tilde{Y})$ konstant. Aber $t \mapsto g(\tilde{X}(t), \tilde{Y}(t))$ ist stetig, also global konstant.

“ \Leftarrow ” Wir zeigen die Verträglichkeitsbedingung in $p \in M$. Dazu wählen wir eine Kurve c mit $p = c(0)$ und $c'(0) = Z(p)$. Weiter sei $(v_i(0))$ eine Orthonormalbasis von $T_p M$ und $(v_i(t))$ ihre Parallelverschiebung längs c . Nach Voraussetzung ist dann auch $(v_i(t))$ Orthonormalbasis.

Die Einschränkung von X auf c schreiben wir lokal als $\tilde{X}(t) := X(c(t)) = \sum \tilde{\xi}^i(t)v_i(t)$. Es folgt für alle t

$$\frac{D}{dt}\tilde{X} = \frac{D}{dt} \sum_i \tilde{\xi}^i v_i = \sum_i \frac{d\tilde{\xi}^i}{dt} v_i + \sum_i \tilde{\xi}^i \underbrace{\frac{D}{dt} v_i}_{=0} = \sum_i \frac{d\tilde{\xi}^i}{dt} v_i.$$

Setzt man diesen Ausdruck und einen entsprechenden für $\tilde{Y}(t) = \sum \tilde{\eta}^j(t)v_j(t)$ ein in g , so ergibt sich zunächst die gewünschte Verträglichkeitsbedingung längs c :

$$g\left(\frac{D}{dt}\tilde{X}, \tilde{Y}\right) + g\left(\tilde{X}, \frac{D}{dt}\tilde{Y}\right) \stackrel{v_i \text{ ONB}}{=} \sum_i \frac{d\tilde{\xi}^i}{dt} \tilde{\eta}^i + \sum_i \tilde{\xi}^i \frac{d\tilde{\eta}^i}{dt} = \sum_i \frac{d}{dt}(\tilde{\xi}^i \tilde{\eta}^i) \stackrel{v_i \text{ ONB}}{=} \frac{d}{dt}g(\tilde{X}, \tilde{Y})$$

In $t = 0$ ergeben die Außenseiten der Gleichung $g_p(\nabla_Z X, Y) + g_p(X, \nabla_Z Y) = \partial_Z g(X, Y)$. □

3.4. Indizes heben und senken ist Musik. Wir schieben einen Abschnitt mit einem Resultat ein, das wir im nächsten Abschnitt und auch bei der Diskussion von Tensoren in Kapitel III benötigen.

Eigentlich handelt es sich nur um Lineare Algebra. Ein endlich-dimensionaler Vektorraum W und sein Dualraum W^* haben die gleiche Dimension und sind damit isomorph. Im Allgemeinen gibt es zwar keinen basisunabhängigen (kanonischen) Isomorphismus. Als Spezialfall des folgenden Lemmas werden wir sehen, dass jedoch eine gegebene, nicht ausgeartete Bilinearform einen natürlichen Isomorphismus vermittelt. Diese Aussage steht auch in Analogie zum Rieszschen Darstellungssatz für Hilberträume.

Üblicherweise bezeichnet man $C^\infty(M)$ -lineare Abbildungen $\mathcal{V}(M) \rightarrow \mathbb{R}$, $X \mapsto \omega(X)$, als *1-Formen*; ihre Menge sei $\Lambda^1(M)$. Die nicht-ausgeartete symmetrische Bilinearform g induziert einen kanonischen Isomorphismus zwischen dem Vektorraum $\mathcal{V}(M)$ und seinem Dualraum $\Lambda^1(M)$:

Lemma 16. *Sei g semi-Riemannsche Metrik auf einer Mannigfaltigkeit M . Dann ist*

$$\flat: \mathcal{V}(M) \rightarrow \Lambda^1(M), \quad V \mapsto \omega(\cdot) = g(V, \cdot),$$

ein $C^\infty(M)$ -linearer Isomorphismus.

Wir werden dies im nächsten Abschnitt folgendermaßen verwenden: Ist ω eine 1-Form, so existiert genau ein $V \in \mathcal{V}(M)$ mit $g(V, X) = \omega(X)$ für alle $X \in \mathcal{V}(M)$.

Beweis. Die $C^\infty(M)$ -Linearität von \flat ist klar. Wir zeigen Injektivität und Surjektivität.

Injektivität: V_1, V_2 mögen $g(V_1, X) = g(V_2, X)$ für alle X erfüllen, also $g(V_1 - V_2, X) = 0$. Weil g nicht ausgeartet ist, erhalten wir $V_1 = V_2$.

Surjektivität: Zu $\omega \in \Lambda^1(M)$ müssen wir ein Urbild $V \in \mathcal{V}(M)$ konstruieren. Sei dazu x Karte mit Standardbasis (e_i) und dualer Basis (e^j) . Wir schreiben lokal $\omega_j := \omega(e_j)$, so dass $\omega = \sum \omega_j e^j$. Für $V = \sum V^i e_i$ (mit V^i Hauptteil von V) soll gelten

$$(25) \quad \omega_j = g(V, e_j) = \sum_i V^i g_{ij} \quad \text{für jedes } j = 1, \dots, n.$$

Weil g nicht-ausgeartet ist, besitzt die Matrix (g_{ij}) eine Inverse (g^{ij}) , siehe Aufgaben. Multiplikation mit der Inversen liefert zu (25) äquivalente Gleichungen

$$(26) \quad \sum_j \omega_j g^{jk} = \sum_{i,j} V^i g_{ij} g^{jk} = V^k \quad \text{für jedes } k = 1, \dots, n.$$

Definieren wir V durch (26), so gilt (25), und wegen der schon bewiesenen Eindeutigkeit ist V sogar unabhängig von der gewählten Karte, also global definiert. \square

Im Beweis haben wir den Isomorphismus zwischen dem Vektorraum $T_p M$ und seinem Dualraum $(T_p M)^*$, bzw. $\mathcal{V}(M)$ und $\Lambda^1(M)$, durch die äquivalenten lokalen Darstellungen (25),(26) definiert. Dabei macht das *Index senken* (25) aus den Koordinaten des Vektors V die Koordinaten der 1-Form ω ; die dadurch gegebene Zuordnung nennt man auch den (erniedrigenden) *musikalischen Isomorphismus* $\flat: \mathcal{V}(M) \rightarrow \Lambda^1(M)$, $X \mapsto \omega := X^\flat$ [flat]. Entsprechend definiert das *Index heben* (26) den (erhöhenden) Isomorphismus [sharp]

$$\sharp = (\flat)^{-1}: \Lambda^1(M) \rightarrow \mathcal{V}(M), \quad \omega \mapsto X := \omega^\sharp.$$

3.5. Levi-Civita-Zusammenhang und Koszul-Formel. Nun weisen wir die Existenz eines torsionsfreien und verträglichen Zusammenhangs nach:

Satz 17 (Levi-Civita). *Auf jeder semi-Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) gibt es genau einen Zusammenhang ∇ , der torsionsfrei und mit der Metrik verträglich ist. Er ist definiert durch die Koszul-Formel*

$$(27) \quad g(\nabla_X Y, Z) = \frac{1}{2} \left(\partial_X g(Y, Z) + \partial_Y g(Z, X) - \partial_Z g(X, Y) \right. \\ \left. + g([X, Y], Z) - g([Y, Z], X) + g([Z, X], Y) \right).$$

Dieser Zusammenhang heißt *Levi-Civita-* (oder auch *semi-Riemannscher*) *Zusammenhang*, wir nennen ihn im folgenden meist *kovariante Ableitung*. Auf jeder differenzierbaren Mannigfaltigkeit existiert eine Riemannsche Metrik (Korollar 2), und damit existiert auch stets ein Riemannscher Zusammenhang.

Beweis. Nehmen wir an, ∇ existiert. Aus den Eigenschaften von ∇ gewinnen wir zuerst eine Darstellungsformel für $\nabla_X Y$. Aus der Verträglichkeitsbedingung folgern wir

$$\begin{aligned} \partial_X g(Y, Z) &= g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z), \\ \partial_Y g(Z, X) &= g(\nabla_Y Z, X) + g(Z, \nabla_Y X), \\ -\partial_Z g(X, Y) &= -g(\nabla_Z X, Y) - g(X, \nabla_Z Y). \end{aligned}$$

Dies addieren wir unter Benutzung der Torsionsfreiheit:

$$\partial_X g(Y, Z) + \partial_Y g(Z, X) - \partial_Z g(X, Y) = g([X, Z], Y) + g([Y, Z], X) + g(Z, \nabla_X Y + \underbrace{\nabla_Y X}_{=\nabla_X Y - [X, Y]}),$$

Dies ergibt die Koszul-Formel (27). Für festes X, Y bezeichnen wir ihre rechte Seite als $\omega(Z)$. Wir behaupten $\omega = \omega_{X,Y}$ ist eine 1-Form, d.h. wir müssen $\omega(fZ) = f\omega(Z)$ für jedes $f \in C^\infty(M)$ nachweisen. Sicher sind der dritte und vierte Term von $\omega(Z)$ jeweils $C^\infty(M)$ -linear. Wir befassen uns nun mit dem zweiten und fünften Term. Ist $f \in C^\infty(M)$, so gilt einerseits

$$\partial_Y g(fZ, X) = \partial_Y (f g(Z, X)) = \partial_Y f g(Z, X) + f \partial_Y g(Z, X).$$

Für den anderen Term beachten wir $[Y, fZ] = \nabla_Y(fZ) - f\nabla_Z Y = \partial_Y f Z + f[Y, Z]$, so dass

$$-g([Y, fZ], X) = -\partial_Y f g(Z, X) - f g([Y, Z], X).$$

Also ist die Summe aus zweitem und fünftem Term ebenfalls $C^\infty(M)$ -linear. Das gleiche gilt für die Summe aus erstem und sechstem Term, und die Behauptung ist gezeigt.

Wir dürfen daher Lemma 16 anwenden, und ω definiert ein eindeutig bestimmtes Vektorfeld V , das von X und Y abhängt. Da die rechte Seite nur Metrik sowie Lie-Ableitungen und -Klammern enthält, ist V durch (M, g) eindeutig bestimmt.

Für die Existenz müssen wir noch nachweisen, dass $(X, Y) \mapsto V(X, Y)$ tatsächlich einen torsionsfreien und mit der Metrik verträglichen Zusammenhang darstellt. Das Nachrechnen der entsprechenden vier Eigenschaften lassen wir als etwas langwierige Übung. \square

Spezialfälle: 1. Ist x Karte mit Basisfeldern e_i , sowie Christoffel-Symbolen $\nabla_{e_i} e_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k e_k$, so verschwinden die Lie-Klammern $[e_i, e_j]$ etc. und deshalb folgt für $X := e_i$, $Y := e_j$, $Z := e_k$ aus der Koszul-Formel die lokale Darstellung

$$(28) \quad \sum_{l=1}^n g_{kl} \Gamma_{ij}^l = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{ki} - \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij} \right) \quad \text{für jedes } 1 \leq i, j, k \leq n,$$

also (13).

2. Auf den Räumen $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle_k)$ verschwinden für die Karte $(\text{id}, \mathbb{R}^n)$ alle Christoffel-Symbole, so dass unabhängig vom Index k alle Levi-Civita-Zusammenhänge mit der Richtungsableitung übereinstimmen, $\nabla_X Y = \partial_X Y$.

Wir werden von nun an stets den Levi-Civita Zusammenhang betrachten. Wenn wir (M, g) schreiben, beziehen wir uns stets auf diesen Zusammenhang.

9. Vorlesung, 14.11.18

4. GEODÄTISCHE UND EXPONENTIALABBILDUNG

Geodätische wurden bereits in der Differentialgeometrie von Kurven und Flächen eingeführt. Man kann sie auf zwei äquivalente Arten einführen:

- Als “gerade” Kurven, d.h. als Kurven mit verschwindender geodätischer Krümmung oder
- als “kürzeste” Kurven bzw. als Kurven, die kritisch für die Bogenlänge sind.

Die Diskussion ist über weite Strecken analog zum Flächenfall. Entstand dort durch die Addition $c(t) + sV(t)$ im Parametergebiet aus einer Kurve c und einem Vektorfeld V eine Variation von c , so benötigen wir hier für diesen Zweck die Riemannsche Exponentialabbildung. Sie hat viele weitere Anwendungen.

Mit Hilfe von Geodätischen werden wir die Geometrien von Mannigfaltigkeiten studieren. Ihre Spreizung wird sich als ein Maß der Krümmung herausstellen.

4.1. Geodätische. Wir können eine Kurve c in M als Bewegung eines Massenpunktes verstehen. Leiten wir den Geschwindigkeitsvektor c' ab, so erhalten wir den Beschleunigungsvektor $\frac{D}{dt}c'$. Geodätische entsprechen unbeschleunigten Bewegungen, d.h. ihr Geschwindigkeitsvektor bleibt (intrinsisch gesehen) konstant:

Definition. Eine Kurve $c: I \rightarrow M$ heißt *Geodätische*, wenn $\frac{D}{dt}c' = 0$ für alle $t \in I$ gilt, d.h. das Vektorfeld c' ist parallel längs c .

Aus Satz 15 folgt die Konstanz der Geschwindigkeit im Riemannschen Fall, bzw. allgemein:

Lemma 18. *Für Geodätische c ist $g(c', c')$ konstant.*

Sei c eine nach Bogenlänge parametrisierte raumartige Kurve, also $g(c', c') \equiv 1$. Dann bezeichnen wir $\frac{D}{dt}c'$ als *geodätischen Krümmungsvektor*. Der Krümmungsvektor $\frac{D}{dt}c'$ steht dann senkrecht auf c' (warum?).

Im Riemannschen Fall ist die Geodätischen-Bedingung $\frac{D}{dt}c' = 0$ äquivalent dazu, dass die *geodätische Krümmung* $\kappa_{\text{geod}} := \|\frac{D}{dt}c'\|$ von c verschwindet. Für Punkte von Kurven mit $\|c'\| \neq 0$ kann man geodätische Krümmung durch Uparametrisierung definieren: beispielsweise gilt für den Fall konstanter Geschwindigkeit $\|c'\| \equiv a > 0$, dass $\kappa_{\text{geod}} = \|\frac{D}{dt}c'\|/a^2$ (warum?).

Um eine lokale Darstellung anzugeben, sei wieder γ' der Hauptteil von c , d.h. wir betrachten die Koordinatenkurve $\gamma = x \circ c$. Aus (20) und (21) folgt

$$\frac{D}{dt}c' = \sum_k \left(\frac{d}{dt}\gamma'^k + \sum_{i,j} \gamma'^i \gamma'^j \Gamma_{ij}^k \circ c \right) e_k \circ c$$

und c ist geodätisch genau dann, wenn γ das folgende (nicht-lineare) Differentialgleichungssystem zweiter Ordnung erfüllt

$$(29) \quad 0 = \gamma''^k + \sum_{i,j} \gamma'^i \gamma'^j \Gamma_{ij}^k \circ x^{-1} \circ \gamma, \quad k = 1, \dots, n.$$

In einfachen Räumen ist die Differentialgleichung explizit integrierbar, und wir erhalten als Geodätische:

Beispiele. 1. In $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle_k)$ integriert sich $c'' = 0$ zu $c_{p,v}(t) = p + tv$ für $p, v \in \mathbb{R}^n$ und $t \in \mathbb{R}$.
2. Für $(B^n, \langle \cdot, \cdot \rangle_k)$ haben Geodätische die gleiche Form, existieren aber nur für ein beschränktes Zeitintervall (für welches?).

3. Für $M = (\mathbb{S}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ sind proportional zur Bogenlänge parametrisierte Großkreise tatsächlich Geodätische: Seien $p \in \mathbb{S}^n$ und $v \in T_p \mathbb{S}^n \perp p$. Für $v = 0$ setzen wir $c \equiv p$ und sonst

$$(30) \quad c_{p,v}(t) := \cos(t|v|)p + \sin(t|v|)\frac{v}{|v|}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Es gilt dann $(c_{p,v}(t))'' = -|v|^2 c_{p,v}(t)$, also $\Pi(c_{p,v}''(t)) = 0$.

Innerhalb einer Karte können wir die Existenzaussage des Satzes von Picard-Lindelöf anwenden, um das Gleichungssystem (29) lokal zu lösen, und die Eindeutigkeitsaussage ergibt die Unabhängigkeit von der gewählten Karte:

Satz 19. *Seien $p \in M$ und $v \in T_p M$. Dann existiert für ein $\varepsilon > 0$ die Geodätische*

$$(31) \quad c_{p,v}: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M \quad \text{mit Anfangswerten} \quad c_{p,v}(0) = p, \quad c_{p,v}'(0) = v.$$

Zwei Geodätische zu diesen Anfangswerten stimmen auf dem Schnitt ihres Definitionsbereiches überein (Eindeutigkeit).

Benutzung der Linearitätseigenschaften von ∇ (oder Inspektion von (29)) zeigt, dass lineare Umparametrisierung Geodätische erhält:

Lemma 20. *Sei $c_{p,v}: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow (M, g)$ und $a \in \mathbb{R}$. Dann gilt $c_{p,v}(at) = c_{p,av}(t)$, d.h. $\tilde{c}(t) := c_{p,v}(at)$ ist auf $(-\varepsilon/a, \varepsilon/a)$ geodätisch mit Anfangswerten $\tilde{c}(0) = p$ und $\tilde{c}'(0) = av$.*

Beweis. Sicherlich ist \tilde{c} geodätisch, denn $(\nabla_{\tilde{c}'}\tilde{c}')(t) = (\nabla_{ac'}ac')(at) = a^2(\nabla_{c'}c')(at) = 0$. Weiter sind die Anfangswerte von $\tilde{c}'(t) = ac_{p,v}'(at)$ der Punkt p und Richtung av . Diese beiden Kurven stimmen daher nach dem Eindeutigkeitssatz für alle t überein. \square

Geodätische sind geometrische Objekte in folgendem Sinne:

Satz 21. *Ist $c: I \rightarrow (M, g)$ geodätisch, und $f: (M, g) \rightarrow (\tilde{M}, \tilde{g})$ lokale Isometrie, so ist auch $f \circ c: I \rightarrow (\tilde{M}, \tilde{g})$ geodätisch.*

Beweis. Wir wählen eine Karte (x, U) von M um $c(t)$. Dann ist $x \circ f^{-1}$ lokal definiert und eine Karte von \tilde{M} um $f(c(t))$. Bezüglich der jeweiligen Standardbasen gilt dann $\tilde{g}_{ij} = g_{ij}$ laut (5). Also stimmen die beiden Levi-Civita-Ableitungen überein, und damit die beiden (jeweils eindeutig bestimmten) Geodätischen. \square

Beispiele. Operiert eine diskrete Gruppe G auf einer Mannigfaltigkeit M durch Isometrien, so ist nach Satz I.4 die Projektion $\pi: M \rightarrow M/G$ lokale Isometrie.

1. Die Geodätischen von $\mathbb{R}P^n = (\mathbb{S}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)/\{\pm \text{id}\}$ erhalten wir als Projektionen $\pi(c_{p,v}(t))$ der Großkreisparametrisierungen (30). Wegen $c_{p,v}(t + \pi/|v|) = -c_{p,v}(t)$ halbiert sich die

Periode gegenüber \mathbb{S}^n .

2. Im Falle der flachen Tori $T^n = (\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle) / \Gamma$, siehe S. 24, lösen also die Projektionen von Geraden, $c_{p,v}(t) = \pi(p + tv)$, das Anfangswertproblem; sie sind für $t \in \mathbb{R}$ definiert. Falls $av \in \Gamma$ für $a \neq 0$, so sind die Bildkurven $c_{p,v}(\mathbb{R})$ kompakt in T^n , denn $c_{p,v}(t + a) = \pi(p + (t + a)v) = \pi(p + tv) = c_{p,v}(t)$. Wenn nicht, ist die Geodätische injektiv, aber ihr Bild ist keine Untermannigfaltigkeit. Das Bild liegt dann dicht in T^n (Übung).

4.2. Exponentialabbildung. Eine besonders gute Karte um einen Punkt p einer Mannigfaltigkeit erhält man, indem man Ursprungsstrahlen auf Geodätische durch p abbildet:

Definition. Sei (M, g) semi-Riemannsch. Die Abbildung

$$\exp_p: \Omega(p) := \{v \in T_p M : c_{p,v}(t) \text{ existiert für } t \in [0, 1]\} \rightarrow M, \quad \exp_p(v) := c_{p,v}(1),$$

heißt *Exponentialabbildung*.

Natürlich ist die Exponentialabbildung \exp_p allein durch die Lösungen einer Differentialgleichung definiert, so dass wir über $\Omega(p)$ zunächst nicht viel sagen können. Dennoch wird sich \exp als nützlich herausstellen. (Die gleiche Perspektive ist übrigens für die Exponentialfunktion auf \mathbb{R} ebenso sinnvoll.)

Unter der Exponentialabbildung gehen die Ursprungsgeraden $s \mapsto sv \in \Omega(p)$ in $T_p M$ auf Geodätische, denn

$$\exp_p(sv) = c_{p,sv}(1) = c_{p,v}(s)$$

(nach Lemma 20 mit $t := 1, a := s$). Nach Definition von $\Omega(p)$ ist mit $v \in \Omega(p)$ und $s \in [0, 1]$ auch $sv \in \Omega(p)$. Insbesondere ist der Definitionsbereich $\Omega(p)$ von \exp_p sternförmig um 0.

Beispiele. 1. $M = \mathbb{R}^n$: $\exp_p(v) = p + v$ und $\Omega(p) = T_p \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$.

2. $M = \mathbb{S}^n$: Es ist $\Omega(p) = T_p \mathbb{S}^n \cong \mathbb{R}^n$ und aus (30) folgt

$$\exp_p(0) = p \quad \text{und} \quad \exp_p(v) = (\cos |v|)p + (\sin |v|)\frac{v}{|v|} \quad \text{für } v \neq 0.$$

Insbesondere bildet \exp_p folgende Teilmengen von $T_p M$ auf Punkte ab: $\{v \in T_p M, \|v\| = \pi\} \mapsto -p$ und $\{v \in T_p M, \|v\| = 2\pi\} \mapsto p$, und so weiter. (Analog für $M = \mathbb{R}P^n$.)

Für $M := \mathbb{S}^n \setminus \{-p\}$ ist \exp_p nur auf einem offenem Ball $B_\pi(0) \subset T_p \mathbb{S}^n$ definiert.

3. Für $M = \mathbf{SO}(n) \subset \mathbb{R}^{n^2}$ kann man folgendes zeigen. Dies ist eine Mannigfaltigkeit, deren Tangentialraum an die Einheitsmatrix $E \in \mathbf{SO}(n)$ durch den Raum der schiefen Matrizen gegeben ist; insbesondere ist $\dim \mathbf{SO}(n) = n(n-1)/2$. Ist $V \in T_E M$ eine schiefe Matrix, so wird eine Geodätische durch E durch die Kurve $c_{E,V}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (tV)^k$ dargestellt. Die Reihe $\exp_E(V) = E + V + \frac{1}{2}V^2 + \frac{1}{3!}V^3 + \dots$ hat den Namen Exponentialabbildung geprägt.

Wir zeigen nun, dass $\Omega(p)$ immer eine Umgebung der 0 enthält.

Satz 22. (i) Es gibt eine offene Umgebung Ω des Nullschnitts $M \times \{0\} \subset TM$, auf der \exp definiert ist. Insbesondere ist $\Omega(p)$ eine sternförmige offene Umgebung der 0.

(ii) $\exp_p: \Omega(p) \rightarrow M$ ist differenzierbar.

Beweis. (i) Wir betrachten \exp als eine Abbildung

$$\exp: \Omega := \{(p, v) \in TM : c_{p,v}(s) \text{ existiert für } s \in [0, 1]\} \rightarrow M.$$

Sei $(p, v) \in \Omega$. Weil Geodätische auf offenen Intervallen existieren, gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass $c_{p,v}$ auf $[0, 1 + \varepsilon)$ definiert ist. Wegen der stetigen Abhängigkeit der Lösung der Geodätischen-Gleichung von den Anfangswerten gilt dies sogar noch in einer kleinen Umgebung von (p, v) . Also ist Ω eine offene Teilmenge von TM .

Weil $M \times \{0\}$ in Ω enthalten ist und Ω offen ist, stellt Ω eine offene Umgebung dieser Menge dar.

(ii) Die Lösungen $c_{p,v}(1)$ der Geodätischen-Gleichung hängen differenzierbar von den Anfangswerten (p, v) ab. \square

Wir wollen nun das Differential von \exp betrachten. Wegen $\exp_p: T_p M \rightarrow M$ geht

$$d(\exp_p)_v: T_v(T_p M) \rightarrow T_{\exp_p(v)} M.$$

Geometrisch verstehen wir $d(\exp_p)_v \cdot w \in T_{\exp_p(v)} M$ als Änderungsrichtung von $\exp_p(v)$, wenn man $v \in T_p M$ in Richtung $w \in T_v T_p M$ abändert.

Beispiel. \mathbb{S}^n . Es sei $S_\pi := \{v \in T_p M, \|v\| = \pi\}$. Wir hatten schon gesehen $\exp_p|_{S_\pi} \equiv -p$. Zu $v \in S_\pi$ sei $w \in T_v T_p M$ ein Vektor, der tangential an S_π ist. Dann muss die Ableitung verschwinden, $(d(\exp_p)_v)w = 0$. Andererseits verlängert sich die Geodätische $c_{p,v}$ von p nach $\exp_p(v) = -p$, wenn man v in radialer Richtung abändert, also für $w := v$. Tatsächlich gilt $(d \exp_p)_v v = c'_{p,v}(\pi)$.

Der Tangentialraum an einen Vektorraum wird üblicherweise mit dem Vektorraum selbst identifiziert. Dies geschieht über Parallelverschiebung, die in diesem Falle kanonisch ist: Man muss nur den Fußpunkt vergessen. Dies macht man bei der Differentialrechnung in \mathbb{R}^n , ohne es zu bemerken. Wir wollen dieselbe Identifikation für den Vektorraum $T_p M$ verwenden, und identifizieren den Definitionsbereich von $d \exp_p$ zu $T_v T_p M \cong T_p M$. Speziell für $v = 0$ erhalten wir damit

$$d(\exp_p)_0: T_0 T_p M \cong T_p M \rightarrow T_{\exp_p(0)} M = T_p M,$$

d.h. die Abbildung geht von \mathbb{R}^n nach \mathbb{R}^n . Mit Hilfe dieser Identifikation können wir formulieren:

Satz 23. $\exp_p(0) = p$ und $d(\exp_p)_0 = \text{id}$.

Beweis. Für $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist laut Kettenregel $\frac{d}{dt}\varphi(x + tv)|_{t=0} = d\varphi_x(v)$. Entsprechend ist

$$d(\exp_p)_0(v) = \frac{d}{dt}\exp_p(0 + tv)|_{t=0} = \frac{d}{dt}c_{p,tv}(1)|_{t=0} \stackrel{\text{Lemma 20}}{=} \frac{d}{dt}c_{p,v}(t)|_{t=0} = v. \quad \square$$

10. Vorlesung, 16.11.18

Wir wollen uns damit befassen, auf welchen Mengen \exp_p ein Diffeomorphismus ist. In Spezialfällen ist dies explizit:

Beispiele. 1. $\mathbb{R}_k^n: \mathbb{R}^n$, 2. $\mathbb{S}^n: B_\pi$, 3. $\mathbb{R}P^n: B_{\pi/2}$.

Der maximale Radius von Bällen, auf denen \exp_p Diffeomorphismus ist, hängt in der Regel von p ab: Auf einer sich verjüngenden Rotationsfläche wie der Pseudosphäre muss der Radius kleiner werden, wenn p nach unendlich läuft. Im allgemeinen gilt:

Korollar 24. Für jedes $p \in M$ besitzt der Tangentialvektor $0 \in T_p M$ eine Umgebung $V(p)$, so dass $\exp_p: V(p) \rightarrow M$ Diffeomorphismus auf sein Bild ist.

Beweis. Nach dem Satz hat $d(\exp_p)$ in 0 vollen Rang. Der Umkehrsatz gibt die Behauptung. \square

Als eine Folgerung aus dem Korollar gewinnen wir nun spezielle Koordinaten. Es ist oft sinnvoll, aufwendigere Rechnungen in speziellen Koordinaten durchzuführen, und ein allgemeines, koordinateninvariantes Ergebnis daraus abzulesen. In dieser Vorlesung werde ich allerdings kein Beispiel dafür geben.

Satz 25 (Normalkoordinaten). Sei (M, g) semi-Riemannsch und $p \in M$. Dann gibt es eine Umgebung U von p , so dass $x := \exp_p^{-1}: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Karte ist mit

$$(32) \quad g_{ij}(p) = \pm \delta_{ij} \quad \text{und} \quad \Gamma_{ij}^k(p) = 0 \quad \text{für alle } i, j, k;$$

bei g tritt das negative Vorzeichen (ind g)-mal auf.

Die Identitäten (32) gelten allein im Punkt p . In der elementaren Differentialgeometrie haben wir übrigens die gleiche Aussage schon für die lokale Normalform einer Fläche gezeigt.

Beweis. Auf dem Vektorraum $T_p M$ stellt g eine nicht-ausgeartete symmetrische Bilinearform vom Index k dar. Nach dem Satz über die Hauptachsentransformation gibt es daher eine Basis (v_1, \dots, v_n) , so dass $g(v_i, v_j) = \pm \delta_{ij}$, wobei genau k der n Paare $i = j$ ein Minuszeichen erhalten.

Wir wählen nun U entsprechend dem letzten Korollar und betrachten den Vektor $v = \sum \xi^i v_i \in x(U) \subset T_p M$. Die Kurven $t \mapsto \exp_p(tv_i) = c_{p,tv_i}(1) = c_{p,v_i}(t)$ erfüllen $c'(0) = v_i$. Also gilt $g_{ij}(p) = g(v_i, v_j) = \pm \delta_{ij}$.

Wir schreiben einen Vektor $v \in T_p M$ als $v = \sum_i \xi^i e_i$. Die Ursprungsgeraden $t \mapsto \gamma(t) = tv$ haben Kurven $c(t) := \exp_p(tv)$ als Bilder, deren Tangente c' einen konstanten Hauptteil $\gamma' = v$ besitzt. Also ist $\frac{d}{dt}\gamma' = 0$ und die Geodätischen-Gleichung (29) ergibt

$$(33) \quad 0 = \sum_{i,j} \gamma'^i \gamma'^j \Gamma_{ij}^\ell \circ c, \quad \ell = 1, \dots, n.$$

Speziell in p wird jeder Vektor $\xi \in \mathbb{R}^n$ durch die Tangente γ' einer Kurve realisiert. Es gilt daher $0 = \sum_{i,j} \xi^i \xi^j \Gamma_{ij}^\ell(p)$ für jedes $\xi \in \mathbb{R}^n$. Aber das bedeutet, dass die quadratische Form $\xi \mapsto \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^\ell(p) \xi^i \xi^j$ für jedes ℓ verschwindet. Durch Polarisierung folgt, dass die zugehörige Bilinearform verschwindet, also $\Gamma_{ij}^\ell(p) = 0$. \square

4.3. Kovarianter Satz von Schwarz. Das Vertauschen der Reihenfolge von Ableitungen ist eine grundlegende Operation in der Riemannschen Geometrie. Um die erste Variation von Kurven zu berechnen, wird das folgende Resultat hilfreich sein:

Lemma 26. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen und $h \in C^\infty(\Omega, M)$. Dann gilt*

$$(34) \quad \frac{D}{dt} \frac{\partial}{\partial s} h = \frac{D}{ds} \frac{\partial}{\partial t} h.$$

Dabei haben wir auf der linken Seite $\frac{\partial}{\partial s} h$ als Vektorfeld längs der Kurven $t \mapsto h(s, t)$ aufgefasst für jedes s , und rechts $\frac{\partial}{\partial t} h$ als Vektorfeld längs $s \mapsto h(s, t)$ für jedes t .

Sofern es Vektorfelder X, Y auf einer offenen Umgebung von $h(\Omega) \subset M$ gibt mit $X \circ h = \frac{\partial}{\partial s} h$ und $Y \circ h = \frac{\partial}{\partial t} h$, so lautet die Aussage $(\nabla_Y X) \circ h = (\nabla_X Y) \circ h$. Sie folgt sofort aus der Charakterisierung der Lie-Klammer $[X, Y] \circ h = 0$. Ist speziell h eine Immersion, so zeigt eine Variante von Lemma 13, dass sich $\frac{\partial}{\partial s} h$ und $\frac{\partial}{\partial t} h$ tatsächlich stets lokal zu Vektorfeldern fortsetzen lassen. Lemma 26 kommt aber ohne die Immersionsannahme aus.

Beweis. Als Tangentialvektor an die Kurven $s \mapsto h(s, t)$ ist das Vektorfeld $X = \frac{\partial h}{\partial s}$ für alle $(s, t) \in \Omega$ definiert. Längs jeder Kurve $t \mapsto h(s, t)$ haben wir dann zwei Vektorfelder definiert: die Tangentialvektoren $\frac{\partial h}{\partial t}$ und X . Eine lokale Darstellung für $\frac{D}{dt} X$ ist gemäß (21)

$$\frac{D}{dt} \frac{\partial h}{\partial s} = \sum_k \left(\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial h^k}{\partial s} + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k \circ h \frac{\partial h^i}{\partial s} \frac{\partial h^j}{\partial t} \right) e_k \circ h \quad \text{für alle } (s, t) \in \Omega.$$

Ganz analog ergibt sich bei Vertauschung der Rollen von s und t :

$$\frac{D}{ds} \frac{\partial h}{\partial t} = \sum_k \left(\frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial h^k}{\partial t} + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k \circ h \frac{\partial h^i}{\partial t} \frac{\partial h^j}{\partial s} \right) e_k \circ h \quad \text{für alle } (s, t) \in \Omega.$$

Die ersten Summen in den beiden Darstellungen stimmen laut Satz von Schwarz überein, die zweiten als eine Konsequenz der Torsionsfreiheit $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ aus (23). \square

4.4. Erste Variation der Energie. Eine Hauptfrage der Riemannschen Geometrie ist, wann Geodätische Kürzeste sind. Um diese Frage präzise formulieren zu können, wollen wir zunächst untersuchen, wie sich die Bogenlänge ändert, wenn wir die Kurve variieren, d.h. zu nah benachbarten Kurven übergehen.

Die Länge $L(c) = \int \sqrt{g(c', c')} dt$ ist nur für raumartige Kurven sinnvoll. Im semi-Riemannschen Fall ist es natürlich an ihrer Stelle die (*mathematische*) *Energie* [energy, action] zu betrachten:

$$E(c) := \frac{1}{2} \int g(c', c') dt$$

Als physikalische Realisierung kann man sich ein Gummiband für die Energie vorstellen, während man Längen durch Seifenhaut realisieren könnte. Die Energie hat noch zwei weitere Vorteile gegenüber der Länge:

1. Es gibt kein Differenzierbarkeitsproblem in $c' = 0$.
2. Kritische Punkte der Energie werden sich als gut parametrisiert herausstellen: Sie haben konstante Geschwindigkeit. Tatsächlich ist es anschaulich, dass im Energiegleichgewicht in jedem Punkt die quadratische Spannung $g(c', c')$ gleich groß sein muss. Dagegen erschwert die Parametrisierungsinvarianz der Länge ihre mathematische Behandlung dadurch, dass kritische Punkte uneindeutig sind.

Im Falle einer auf $[a, b]$ definierten raumartigen Kurve ergibt die Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$L^2(c) = \left(\int_a^b \sqrt{g(c', c')} dt \right)^2 \leq (b - a) \int_a^b g(c', c') dt = 2(b - a)E(c).$$

Im Riemannschen Fall gilt also für jede Kurve c

$$(35) \quad L^2(c) \leq 2(b - a)E(c) \quad \text{mit Gleichheit, falls } t \mapsto g(c'(t), c'(t)) \text{ konstant ist.}$$

Insbesondere gilt für c in Bogenlängen-Parametrisierung $L(c) = 2E(c)$, was man den Integralen natürlich auch direkt ansehen kann.

Definition. Sei $c: I = [a, b] \rightarrow M$ differenzierbare Kurve.

(i) Eine *Variation* von c ist eine differenzierbare Abbildung

$$h: (-\delta, \delta) \times I \rightarrow M, \quad (s, t) \mapsto h_s(t) = h(s, t), \quad \text{mit } h_0(t) = c(t).$$

(ii) Das Vektorfeld $V(t) := \frac{\partial}{\partial s} h_s(t)|_{s=0}$ längs c heißt *Variationsvektorfeld* von h .

(iii) V bzw. h heißt *eigentlich* [proper], wenn $V(a) = V(b) = 0$ gilt.

Wir halten zuerst fest, dass man für jedes Variationsvektorfeld auch eine Variation definieren kann:

Lemma 27. Sei $c \in C^\infty([a, b], M)$ und $V \in \mathcal{V}(c)$. Dann existiert $\delta > 0$, so dass die Variation

$$h_s(t) := \exp_{c(t)}(sV(t))$$

für alle $s \in (-\delta, \delta)$ definiert ist. Insbesondere hat h das Variationsvektorfeld V .

Beweis. Wenn h_s definiert ist, ist V ihr Variationsfeld, denn

$$\frac{\partial}{\partial s} h_s(t) \Big|_{s=0} = \frac{d}{ds} \exp_{c(t)}(sV(t)) \Big|_{s=0} = (d\exp_{c(t)})_0 V(t) \stackrel{\text{Satz 23}}{=} V(t).$$

Um die Definiertheit festzustellen, betrachten wir die Menge $K := c([a, b]) \subset M$. Nach Satz 22 ist \exp auf einer Umgebung der Menge $K \times \{0\} \subset TM$ definiert. Da K kompakt ist, gibt es ein δ , so dass diese Umgebung alle Punkte von K mit $s < \delta$ enthält. Also sind für $|s| < \delta$ die ganzen Variationskurven $t \mapsto h_s(t)$ in dieser Umgebung enthalten und damit definiert. \square

Lemma 28 (1. Variation). Sei M semi-Riemannsch, $c \in C^\infty([a, b], M)$ und h_s eine Variation mit Variationsvektorfeld V längs c . Dann gilt

$$(36) \quad \delta_V E(c) := \frac{d}{ds} E(h_s) \Big|_{s=0} = g(c', V) \Big|_a^b - \int_a^b g\left(\frac{D}{dt} c', V\right) dt.$$

Man nennt (36) die *erste Variation der Energie* in Richtung V . Beachten Sie, dass die rechte Seite allein von V , aber sonst nicht von h_s abhängt. Das rechtfertigt die Schreibweise $\delta_V E(c)$.

Wir erläutern die beiden Terme von (36):

- Der erste Term gibt an, wie sich die Kurve verkürzt oder verlängert, wenn man die Endpunkte von c verändert. Z.B. steigt die Energie für $V(b) = c'(b)$. Sie bleibt in erster Ordnung gleich, wenn man $c(b)$ senkrecht zur Tangente $c'(b)$ verschiebt. Der Term verschwindet stets, wenn die Variation eigentlich ist.
- Der zweite Term ist für uns entscheidend. Verändert man die Kurve in Richtung ihres Beschleunigungsvektors, $V(t) = \frac{D}{dt} c'$, so wird die Energie kleiner, und umgekehrt. Speziell gilt das auch für Umparametrisierungen. Wie wir noch sehen werden verschwindet der Integrand genau dann, wenn die Kurve geodätisch ist, $\frac{D}{dt} c' \equiv 0$.

Veranschaulichen Sie sich die Effekte an konkreten Beispielen.

Beweis. Geben wir Tangenten- und Variationsfeld einen Namen,

$$(37) \quad T(s, t) := \frac{\partial}{\partial t} h_s(t), \quad V(s, t) := \frac{\partial}{\partial s} h_s(t) \in T_{h_s(t)} M,$$

so gilt für den torsionsfreien LC-Zusammenhang $\frac{D}{ds}T = \frac{D}{dt}V$ nach (34). Wir erhalten

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{ds}E(h_s) \right|_{s=0} &= \frac{1}{2} \frac{d}{ds} \int_a^b g(T, T) dt \Big|_{s=0} = \int_a^b g\left(\frac{D}{ds}T, T\right) \Big|_{s=0} dt \\ &= \int_a^b g\left(\frac{D}{dt}V, T\right) dt = \int_a^b \frac{d}{dt}g(V, T) - g\left(V, \frac{D}{dt}T\right) dt. \end{aligned} \quad \square$$

Definition. Eine Kurve c heißt *kritisch für die Energie*, wenn $\delta_V E(c) = 0$ für jedes eigentliche Variationsfeld $V \in \mathcal{V}(c)$ gilt.

Diese Eigenschaft charakterisiert Geodätische:

Satz 29. Eine Kurve $c: [a, b] \rightarrow M$ ist geodätisch ($\frac{D}{dt}c' = 0$) genau dann, wenn c kritisch für die Energie ist.

Insbesondere ist $g(c', c')$ für kritische Punkte der Energie konstant.

Beweis. “ \Rightarrow ”: Für $\frac{D}{dt}c' = 0$ und ein eigentliches Variationsfeld V ergibt die erste Variationsformel (36) sofort $\delta_V E(c) = 0$.

“ \Leftarrow ”: Sei $t_0 \in (a, b)$ beliebig. Wir zeigen das Verschwinden der geodätischen Krümmung $\frac{D}{dt}c'(t_0) = 0$. Wegen der Stetigkeit $t \mapsto \frac{D}{dt}c'(t)$ zeigt dies die Behauptung.

Für jedes kleine $\xi > 0$ gibt es eine Hutfunktion $f = f_\xi \in C^\infty([a, b])$, so dass der Träger in $[t_0 - \xi, t_0 + \xi] \subset (a, b)$ liegt, $0 \leq f \leq 1$ und $f(t_0) = 1$. Sei weiterhin y ein beliebiger Tangentialvektor an M in $c(t_0)$. Wir erweitern y zu einem Vektorfeld Y längs c , beispielsweise durch Parallelverschiebung. Dann ist das Variationsfeld $V := fY$ eigentlich, und dadurch wird nach Lemma 27 eine eigentliche Variation $h_s(t) := \exp_{c(t)}(sV(t))$ definiert. Es folgt

$$0 = \delta_V E(c) \stackrel{(36)}{=} - \int_a^b g\left(\frac{D}{dt}c', V(t)\right) dt = - \int_{t_0-\xi}^{t_0+\xi} f_\xi(t) g\left(\frac{D}{dt}c'(t), Y(t)\right) dt.$$

Weil dies für alle $\xi > 0$ klein und jedes Y gilt, und der Integrand stetig in t ist, muss sogar

$$g\left(\frac{D}{dt}c'(t_0), y\right) = 0 \quad \text{für alle } y \in T_{c(t_0)}M$$

gelten. Die semi-Riemannsche Metrik g ist aber nicht ausgeartet, woraus wie gewünscht $\frac{D}{dt}c'(t_0) = 0$ folgt. \square

Bemerkungen. 1. Im Riemannschen Fall kann man im Beweis sofort $y := \frac{D}{dt}c'(t_0)$ setzen, denn aus $g(y, y) = 0$ folgt dann direkt $y = 0$.

2. Eine interessante Frage ist, wann ein kritischer Punkt $c = h_0$ auch Minimum von $s \mapsto E(h_s)$ ist, d.h. wann c die Energie zwischen den Endpunkten lokal minimiert. Ganz analog zum Fall kritischer Punkte von Funktionen, für den die zweite Ableitung (bzw. Hesseform) eine hinreichende Antwort auf diese Frage gibt, ist für Kurven Positivität einer zweiten Variation hinreichend für Minimalität.

3. Verwendet man das Längenintegral statt der Energie, so muss man für kritische Punkte noch die Konstanz der Geschwindigkeit voraussetzen, um die Äquivalenz des letzten Satzes zu erhalten.

11. Vorlesung, 21.11.18

4.5. Stückweise differenzierbare Kurven. Stückweise differenzierbare Kurven betrachtet man, da erst diese Klasse von Kurven abgeschlossen bezüglich Hintereinanderhängen ist – Sie kennen das aus der Funktionentheorie. Wir werden in dieser größeren Klasse allerdings keine zusätzlichen kritischen Punkte der Energie finden. Das überrascht nicht, denn Kurven werden nicht dadurch kürzer, dass man Ecken in sie einbaut.

Definition. (i) Eine Kurve $c \in C^0([a, b], M)$ zusammen mit einer Zerlegung $Z \in \mathbb{R}^{\ell+1}$ der Form $a = t_0 < t_1 < \dots < t_\ell = b$ heißt *stückweise differenzierbar*, wenn alle Einschränkungen $c|_{[t_{i-1}, t_i]}$ differenzierbar sind. Wir schreiben auch $(c, Z) \in PC^\infty([a, b], M)$.

(ii) Eine *gebrochene Variation* von (c, Z) ist eine Abbildung $h \in C^0((-\delta, \delta) \times [a, b], M)$, so dass jede Einschränkung $h: (-\delta, \delta) \times [t_{i-1}, t_i] \rightarrow M$ differenzierbare Variation von $c|_{[t_{i-1}, t_i]}$ ist. Sie heißt wiederum *eigentlich*, wenn $h_s(a) = c(a)$ und $h_s(b) = c(b)$ gilt.

(iii) Die Energie von (c, Z) sei $E(c) := \sum_{i=1}^{\ell} E(c|_{[t_{i-1}, t_i]})$.

Auch eine gebrochene Variation kann man nach s ableiten, und erhält dadurch ein *stückweise differenzierbares Vektorfeld* $V(t) := \frac{\partial h_s}{\partial s}(t)|_{s=0}$ längs c als Variationsfeld. Umgekehrt liefert Exponenzieren wieder eine gebrochene Variation. Lemma 27 gilt also entsprechend.

Die Tangentendifferenz in den Zerlegungspunkten $\Delta c'(t_i) := c'(t_i^+) - c'(t_i^-) \in T_{c(t_i)}M$ kann man als einen diskreten Krümmungsvektor verstehen. Wenden wir die erste Variation (36) auf jedes Teilintervall der Zerlegung an, und fassen die Randterme anders zusammen, so erhalten wir:

Satz 30. Sei (c, Z) stückweise differenzierbare Kurve auf $[a, b]$. Für jede gebrochene Variation $h_s(t)$ mit Variationsfeld V gilt

$$(38) \quad \delta_V E(c) = g(c', V) \Big|_a^b - \sum_{i=1}^{\ell-1} g(\Delta c'(t_i), V(t_i)) - \int_a^b g\left(\frac{D}{dt}c', V\right) dt.$$

Wenn die erste Variation von stückweise differenzierbaren Kurven verschwindet, so sind solche Kurven wiederum Geodätische. Sie besitzen also keine Ecken:

Satz 31. Sei (c, Z) stückweise differenzierbare Kurve. Dann ist c eine differenzierbare Geodätische (also $\frac{D}{dt}c' = 0$ auf $[a, b]$) genau dann, wenn gilt $\delta_V E(c) = 0$ für jede eigentliche gebrochene Variation h_s von c mit Variationsfeld V .

Beweis. “ \Rightarrow ”: Der erste Term verschwindet wegen der Eigentlichkeit von V , der zweite wegen der Differenzierbarkeit von c , und der dritte wegen der Geodätischen-Eigenschaft.

“ \Leftarrow ”: Schränken wir Satz 29 auf Variationen mit Träger im Teilintervall ein, so sehen wir, dass auf jedem Teilintervall die Ableitung $\frac{D}{dt}c'$ verschwinden muss. Es bleibt also zu zeigen, dass c in allen t_i glatt ist ($i = 1, \dots, \ell - 1$).

Wir bemerken zuerst, dass sich jedes beliebige $y \in T_{c(t_i)}$ wiederum zu einem stückweise differenzierbarem Vektorfeld $Y \in \mathcal{V}(c)$ fortsetzen lässt. Sei weiter $f \geq 0$ eine Hutfunktion mit $f(t_i) = 1$ und Träger in (t_{i-1}, t_{i+1}) . Wir betrachten das Variationsfeld $V := fY$. Die erste Variation (38) lautet dafür

$$0 = \delta_V E(c) = -g(\Delta c'(t_i), y)$$

für alle y . Es folgt $\Delta c'(t_i) = 0$ und damit ist c einmal differenzierbar.

Aber jede C^1 -Lösung c der Differentialgleichung $\frac{D}{dt}c' = 0$ ist tatsächlich sogar C^∞ : In $\gamma''^k = -\sum_{ij}(\Gamma_{ij}^k \circ \gamma)\gamma'^i\gamma'^j$ ist die rechte Seite stetig in t , also existiert auch $\gamma''(t_i)$. Aber dann ist die rechte Seite in C^1 , also zeigt die linke $c \in C^3$, etc. \square

4.6. Kürzeste.

Definition. Sei (M, g) Riemannsch. Eine Kurve $c \in PC^\infty(I, M)$ heißt *Kürzeste*, wenn für jedes $[a, b] \subset I$ und jede Kurve $\tilde{c} \in PC^\infty([a, b], M)$ von $c(a)$ nach $c(b)$ gilt

$$E(c|_{[a,b]}) \leq E(\tilde{c}).$$

Dabei ist zugelassen, dass I nicht-kompakt ist. Diese Definition ist im semi-Riemannschen Fall mit $\text{ind}_g \neq 1, n-1$ nicht sinnvoll, weil die Energie beliebig negativ werden kann (warum?).

Beispiele. 1. Auf \mathbb{S}^n sind mit konstanter Geschwindigkeit parametrisierte Großkreisbögen bis zur Länge π Kürzeste.

2. In $\mathbb{R}^n \setminus \overline{B_1(0)}$ gibt es keine Kürzeste zwischen $\pm 2e_1$.

Satz 32. Sei c eine stückweise differenzierbare Kürzeste. Dann ist c geodätisch, insbesondere differenzierbar.

Mit der umgekehrten Frage werden wir uns noch eingehend befassen.

Beweis. Nach Einschränkung auf $[a, b] \subset I$ gilt $E(c) \leq E(h_s(t))$ für jede eigentliche Variation h_s von c . Also hat $s \mapsto E(h_s(t))$ ein Minimum in $s = 0$, das heißt $\delta_V E(c) = 0$. Aus Satz 31 folgt die Behauptung. \square

Als ein instruktives Beispiel behandeln wir Geodätische und Kürzeste auf dem quadratischen Torus $T^2 := \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$.

Weil die Projektion $\pi: \mathbb{R}^2 \rightarrow T^2$ lokal isometrisch ist, sind alle Geodätischen von T^2 in Projektionen von Geraden des \mathbb{R}^2 enthalten. Wir wählen $P, Q \in \mathbb{R}^2$ mit $p = \pi(P)$ und $q = \pi(Q)$ und setzen $Q_{m,n} := Q + (m, n)$. Jedes Geradenstück $G_{m,n} \subset \mathbb{R}^2$ von P nach $Q_{m,n}$ projiziert auf eine Geodätische $c_{m,n}$. Dies sind alle Geodätischen von p nach q , weil jede Homotopieklasse von Kurven von p nach q durch eine Kurve $c_{m,n}$ repräsentiert wird und in dieser Klasse $c_{m,n}$ die eindeutige Geodätische ist (warum?).

Unter den Geodätischen $c_{m,n}$ ist normalerweise eine die Kürzeste. Es können aber maximal vier Kürzeste existieren, z.B. für $Q = P + (1/2, 1/2)$. Sind auch genau zwei oder genau drei Kürzeste möglich?

4.7. Gauß-Lemma. Wir befassen uns nun mit $d(\exp_p)$ an eine Stelle $v \in T_p M$. Beispielsweise hat der Strahl $t \mapsto \exp_p(tv) = c_{p,v}(t)$ zur Zeit $t = 1$ den Geschwindigkeitsvektor

$$\left. \frac{d}{dt} c_{p,v}(t) \right|_{t=1} = \left. \frac{d}{dt} \exp_p(tv) \right|_{t=1} = d(\exp_p)_v(v).$$

Zur Zeit $t = 0$ ist die Geschwindigkeit v , so dass die Konstanz der Geschwindigkeit liefert

$$g(d(\exp_p)_v(v), d(\exp_p)_v(v)) = g(v, v).$$

Dies ist die Änderung von \exp in Längsrichtung. Betrachten wir andererseits einen Vektor $w \perp v$. Dann kann $d(\exp_p)_v w$ verschwinden, z.B. auf der Sphäre für $\|v\| = \pi$, oder dieser Vektor kann groß sein, beispielsweise im Hyperbolischen. Dennoch hat man noch eine Aussage:

Lemma 33 (Gauß-Lemma). *Sei (M, g) semi-Riemannsch und $p \in M$, $v \in T_p M \cong T_v T_p M$, so dass $\exp_p(v)$ definiert ist. Dann gilt für jedes $w \in T_p M \cong T_v T_p M$*

$$g(d(\exp_p)_v v, d(\exp_p)_v w) = g(v, w).$$

Man kann die Aussage folgendermaßen verstehen: In radialer Richtung ist \exp isometrisch (wähle für w ein skalares Vielfaches von v). Eine dazu orthogonale Richtung (wähle w mit $g(v, w) = 0$) hat unter \exp immerhin auch ein dazu orthogonales Bild: Die Bilder von Abstandssphären stehen senkrecht auf den „radialen“ Geodätischen.

Beweis. Wir wollen den Ausdruck links als eine Variation der Kurve $t \mapsto \exp_p(tv)$ berechnen. Tatsächlich gilt

$$(39) \quad g(d(\exp_p)_v v, d(\exp_p)_v w) = g(T(0, 1), V(0, 1)),$$

wobei wie in (37) wieder $T(s, t)$ und $V(s, t)$ Tangenten- bzw. Variationsfeld der Variation

$$h(s, t) := \exp_p t(v + sw) = c_{p, v+sw}(t), \quad t \in [0, 1], \quad -\delta < s < \delta$$

sind. In der Tat ist die Endpunktstangente der Kurve mit $s = 0$

$$T(0, 1) = \left. \frac{d}{dt} \exp_p t(v + 0w) \right|_{t=1} \stackrel{\text{Kettenr.}}{=} d(\exp_p)_v v$$

und der Variationsvektor im Endpunkt $t = 1$ lautet

$$V(0, 1) = \left. \frac{d}{ds} \exp_p(v + sw) \right|_{s=0} \stackrel{\text{Kettenr.}}{=} d(\exp_p)_v w$$

Weiterhin ist h wegen der Offenheit des Definitionsbereichs der Exponentialabbildung für kleine $\delta > 0$ erklärt.

Die rechte Seite von (39) mit $t = 0$ statt 1 verschwindet wegen $V(0, 0) = \left. \frac{d}{ds} \exp_p 0 \right|_{s=0} = 0$. Wir können daher mit dem Hauptsatz schreiben:

$$g(d(\exp_p)_v v, d(\exp_p)_v w) = \int_0^1 \left. \frac{d}{dt} g(T(0, t), V(0, t)) \right|_{t=\tau} d\tau$$

Wir behaupten nun, dass der Integrand die Konstante $g(v, w)$ ist. Daraus folgt sofort die Aussage des Satzes.

Alle radialen Kurven $t \mapsto h(s, t)$ sind geodätisch, also $\frac{D}{dt} T(s, t) = 0$, und damit gilt

$$(40) \quad \frac{d}{dt} g(T, V) = g\left(T, \frac{D}{dt} V\right) \stackrel{(34)}{=} g\left(T, \frac{D}{ds} T\right) = \frac{1}{2} \frac{d}{ds} g(T, T) \quad \text{für alle } s, t.$$

Hierbei sind Torsionsfreiheit und Verträglichkeit des Levi-Civita-Zusammenhangs eingegangen. Die radialen Kurven $t \mapsto h(s, t)$ sind weiterhin geodätisch, so dass der Tangentialvektor für alle t jeweils dieselbe Länge hat, siehe Lemma 18. Weil ihre Anfangsgeschwindigkeit $T(s, 0) = d(\exp_p)_0(v + sw) = v + sw$ ist, folgt

$$g(T(s, t), T(s, t)) = g(T(s, 0), T(s, 0)) = g(v + sw, v + sw) \quad \text{für alle } s, t.$$

Setzen wir dieses Resultat in (40) ein und spezialisieren auf $s = 0$, so erlaubt uns die Bilinearität von g die gewünschte Ableitung zu berechnen und damit die Behauptung zu bestätigen:

$$(41) \quad \frac{d}{dt} g(T(0, t), V(0, t)) = \left. \frac{1}{2} \frac{d}{ds} g(v + sw, v + sw) \right|_{s=0} = g(v, w) \quad \text{für alle } t.$$

□

5. RIEMANNSCHE MANNIGFALTIGKEITEN ALS METRISCHE RÄUME

Die Metrik g misst die Distanz infinitesimal. Daraus ergibt sich folgender Abstandsbegriff:

Definition. Sei (M, g) Riemannsch. Für $p, q \in M$ sei

$$(42) \quad \begin{aligned} d(p, q) &:= \inf \{ L(c) : c: [0, 1] \rightarrow M \text{ stückw. diff.bar, } c(0) = p, c(1) = q \} \\ &= \inf \{ \sqrt{2E(c)} : c: [0, 1] \rightarrow M \text{ stückw. diff.bar, } c(0) = p, c(1) = q \} \in [0, \infty]. \end{aligned}$$

Die Infima sind gleich, denn laut (35) ist stets $L^2(c) \geq 2E(c)$, mit Gleichheit genau bei konstanter Geschwindigkeit $\|c'\|$. Wir müssen uns sicherlich auf den Riemannschen Fall beschränken, da im semi-Riemannschen Fall (mit Index ungleich $0, n$) das Infimum stets $-\infty$ ist.

Wir wollen im vorliegenden Kapitel zwei Fragen klären:

1. Ist d eine (Abstands-)Metrik, also positiv, symmetrisch und gilt die Dreiecksungleichung?
2. Wird das Infimum angenommen? In diesem Fall existiert eine Kürzeste von p nach q .

Für die zweite Frage ist es gut, das Gegenbeispiel $M := \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ mit Standardmetrik vor Augen zu haben, bei dem das Infimum $d(p, -p)$ nicht angenommen wird. Dieses Beispiel legt nahe, den Begriff der Vollständigkeit zu verwenden.

5.1. Normale Bälle.

Definition. Ein *normaler Ball* $B_R(p) \subset M$ vom *Radius* $R \in (0, \infty]$ um p ist das Bild von

$$\exp_p: \{v \in T_p M : \|v\|_p < R\} \rightarrow M;$$

dabei ist gefordert, dass diese Abbildung definiert und Diffeomorphismus auf ihr Bild ist.

Beispiele. 1. \mathbb{S}^n und Einheitszylinder: $B_\pi(p)$ ist maximaler normaler Ball.

2. \mathbb{R}^n : $B_\infty(p)$ ist maximaler normaler Ball.

Folgende Eigenschaften werden wir noch benötigen:

Lemma 34. Sei (M, g) Riemannsch.

- (i) Für jedes $p \in M$ existiert ein $R = R(p) > 0$, so dass $B_R(p)$ ein normaler Ball ist.
- (ii) Ist $K \subset M$ kompakt, so ist für alle $p \in K$ der Radius R unabhängig von p wählbar.

Leider wissen wir nicht, dass R wie in (i) als eine stetige Funktion von p gewählt werden kann, sonst wäre (ii) sofortige Folgerung aus (i).

Beweis. (i) Nach Korollar 24 gibt es stets eine Umgebung U der 0, so dass \exp_p definiert und Diffeomorphismus ist. Also gibt es $R > 0$ mit $\{\|v\| < R\} \subset U$.

(ii) [Umkehrsatz] Wie im Beweis von Satz 22 sei wieder $\Omega \subset TM$ der Definitionsbereich von \exp . Wir betrachten die Abbildung

$$F: \Omega \rightarrow M \times M, \quad F(p, v) := (p, \exp_p v).$$

Wir wollen zuerst zeigen, dass diese Abbildung in Punkten $(p, 0)$ umkehrbar ist. Wir schicken die Tatsache voraus, dass eine Produktmannigfaltigkeit $M \times N$ den Tangentialraum $T_{(p,q)}(M \times N) = T_p M \times T_q N$ hat (Übung). Für $F(p, 0) = (p, p)$ ist das Differential von F folgende Abbildung, wenn wir bei \cong wieder die übliche Identifikation benutzen:

$$dF_{(p,0)}: T_{(p,0)}(TM) = T_p M \times T_0(T_p M) \cong T_p M \times T_p M \rightarrow T_{(p,p)}(M \times M) = T_p M \times T_p M.$$

Um den Rang von $dF_{(p,0)}$ zu bestimmen, beachten wir einerseits $F(p, 0) = (p, p)$, also $F(\cdot, 0) = (\text{id}_M, \text{id}_M)$ und daher $dF_{(p,0)}(v, 0) = (v, v)$. Andererseits folgt aus $d(\exp_p)_0 = \text{id}$, dass $dF_{(p,0)}(0, w) = (0, w)$. Insgesamt ergibt sich daraus folgende Blockgestalt:

$$dF_{(p,0)} = \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 1_n & 1_n \end{pmatrix}$$

Insbesondere hat dF in $(p, 0)$ den maximalen Rang $2n$.

Der Umkehrsatz ergibt daher, dass F ein lokaler Diffeomorphismus von einer Umgebung von $(p, 0) \in TM$ auf eine Umgebung von $(p, p) \in M \times M$ ist. Die erstgenannte Umgebung enthält eine Umgebung von p der Form $\{(q, v) : q \in U, \|v\|_q < R\}$; auch hierauf eingeschränkt ist F Diffeomorphismus auf sein Bild. Insbesondere ist für jedes $q \in U$ dann \exp ein Diffeomorphismus von $\{v \in T_q M : \|v\|_q < R\}$ auf sein Bild.

Für jedes $p \in K$ gibt es also eine Umgebung $U(p)$ und ein $R(p)$, so dass \exp_q Diffeomorphismus von $\{v \in T_q M : \|v\|_q < R(p)\}$ auf sein Bild ist, und zwar für alle $q \in U(p)$. Weil K kompakt ist, wird K von endlich vielen solcher Mengen $U(p_i)$ überdeckt. Setzen wir also $R := \min\{R(p_i)\}$, so wird $\{v \in T_q M : \|v\|_q < R\}$ für jedes $q \in K$ diffeomorph auf sein Bild in M abgebildet. \square

Bemerkung. Wir haben hier aus den Riemannschen Fall behandelt, der sich bequem mit Hilfe von Bällen formulieren lässt. Aber auch im semi-Riemannschen Fall existieren für jeden Punkt und jedes Kompaktum normale Umgebungen – modifizieren Sie Definition und Beweis!

5.2. Radiale Geodätische sind Kürzeste.

Satz 35. Sei M Riemannsch, $p \in M$, $B_R(p)$ ein normaler Ball und $\|v\|_p < R$. Unter allen stückweise differenzierbaren Kurven $c: [0, 1] \rightarrow M$ von p nach $q = \exp_p(v) \in B_R(p)$ ist die radiale Geodätische

$$[0, 1] \rightarrow B_R(p), \quad t \mapsto c_{p,v}(t) \quad \text{mit} \quad v = \exp_p^{-1}(q),$$

die eindeutig bestimmte Kurve mit minimaler Energie $E(c) = \frac{1}{2}(d(p, q))^2$.

Insbesondere minimiert diese Kurve auch die Länge, und jede längenminimierende Kurve mit den gegebenen Endpunkten ist monotone Umparametrisierung von $c_{p,v}$.

Korollar 36. *Für einen normalen Ball gilt $B_R(p) = \{q \in M : d(p, q) < R\}$.*

Beweis. Ist $q = p$, so ist die konstante Geodätische $c_{p,0}$ offensichtlich das eindeutige Minimum. Nehmen wir also $q \neq p$ an. Wir müssen zeigen $E(c) \geq E(c_{p,v})$ (letzteres ist natürlich explizit $\frac{1}{2}\|v\|^2$).

(i) Fall $c(t) \in B_R(p) \setminus \{p\}$ für alle $t > 0$. Da \exp Diffeomorphismus auf B_R ist, kann man dann eindeutig schreiben $c(t) = \exp_p(r(t)w(t))$ mit $r: [0, 1] \rightarrow (0, R)$ und $v: (0, 1] \rightarrow T_p M$, $\|w(t)\| = 1$. Dies sind Polarkoordinaten, bei denen die Winkelkoordinate w von c stammt.

Als Vorüberlegung betrachten wir die Abbildung

$$(0, 1] \times (0, R) \rightarrow T_p M, \quad (\sigma, \rho) \mapsto \rho w(\sigma),$$

deren Bild ein Kegel durch das Urbild der Kurve beschreibt. Wir zeigen, dass die beiden Koordinatenlinien des Bildes $h(\sigma, \rho) := \exp_p(\rho w(\sigma))$ aufeinander senkrecht stehen. Für alle $\sigma \in [0, 1]$ und $\rho \in (0, R)$ gilt

(43)

$$\partial_1 h = d(\exp_p)_{\rho w(\sigma)}\left(\rho \frac{dw}{d\sigma}\right) \quad \text{und} \quad \|\partial_2 h\|^2 = \|d(\exp_p)_{\rho w(\sigma)}(w(\sigma))\|^2 \stackrel{(*)}{=} \|w(\sigma)\|^2 = 1;$$

dabei haben wir bei (*) das Gauß-Lemma für den radialen Fall zunächst auf $\rho w(\sigma)$ statt auf $w(\sigma)$ angewandt und danach durch ρ^2 geteilt. Wir verwenden ein weiteres Mal das Gauß-Lemma und erhalten

$$(44) \quad g(\partial_1 h, \partial_2 h) = g\left(\rho \frac{dw}{d\sigma}(\sigma), w(\sigma)\right) = \frac{\rho}{2} \frac{d}{d\sigma} \|w(\sigma)\|^2 = 0.$$

Nun setzen wir $\sigma := t$ und $\rho := r(t)$ in h ein, d.h. wir betrachten

$$h(t, r(t)) = \exp_p(r(t)w(t)) = c(t), \quad 0 < t \leq 1.$$

Die Kettenregel liefert eine Zerlegung von c' in sphärischen und radialen Anteil,

$$c'(t) = \partial_1 h(t, r(t)) + \partial_2 h(t, r(t)) r'(t),$$

so dass (43), (44) ergibt:

$$\|c'(t)\|^2 = g(c'(t), c'(t)) = \|\partial_1 h(t, r(t))\|^2 + |r'(t)|^2 \quad \text{für } t \in (0, 1].$$

Es folgt

$$(45) \quad \begin{aligned} E(c) &= \frac{1}{2} \int_0^1 \|\partial_1 h(t, r(t))\|^2 + (r'(t))^2 dt \geq \frac{1}{2} \int_0^1 (r'(t))^2 dt \\ &\stackrel{\text{Hölder}}{\geq} \frac{1}{2} \left(\int_0^1 r'(t) dt \right)^2 = \frac{1}{2} (r(1))^2 = \frac{1}{2} \|v\|^2 = E(c_{p,v}). \end{aligned}$$

Der Gleichheitsfall bedeutet Gleichheit bei beiden Ungleichungen in (45). Die erste Gleichheit bedeutet, dass $\sigma \mapsto v(\sigma)$ konstant ist. Die zweite bedeutet, dass $r' = \|c'\|$ konstant ist. Dies charakterisiert $c_{p,v}$.

(ii) Wir befreien uns nun von der Zusatzvoraussetzung $c(t) \neq p$ für $t > 0$. Gilt $c(t_0) = p$ für ein $t_0 > 0$, aber $c(t) \neq p$ für alle $t > t_0$, so folgt $E(c) \geq E(c|_{[t_0,1]}) > E(c_{p,v})$. Die zweite Ungleichung folgt dabei aus (45), wobei wir beachten, dass eine auf dem Intervall $[t_0, 1]$ parametrisierte Kurve von p nach $q = \exp_p v$ mindestens Energie $\|v\|^2/(1-t_0)^2 > \|v\|^2$ hat.

Auf ähnliche Weise betrachten wir von einer Kurve, die $B_R(p)$ verlässt, nur das Teilstück, das von p bis zum Rand $\partial B_R(p)$ läuft. Nach (45) hat es mindestens Energie $\frac{1}{2}R^2$, also auch eine Energie, die größer ist als die von $c_{p,v}$. \square

Bemerkung. Man kann auch statt eines normalen Balles B_R eine offene Umgebung U einer radialen Geodätischen betrachten, so dass $d \exp_p$ auf U vollen Rang hat. Dann zeigt der Beweis des Satzes, dass jede Kurve $\exp_p h_s(t)$ länger als die radiale Kurve $c_{p,v}(t) = \exp_p h_0(t)$ ist, sofern nur $h_s(t)$ in U liegt. Diese Aussage umfasst Fälle, bei denen $c_{p,v}$ nicht Kürzeste ist, z.B. könnte man eine Kurve $c_{p,v}$ betrachten, die von einem Zylinderpunkt p entlang eines Kreises wieder zu p zurückkehrt. Jede Vergleichskurve $t \mapsto \exp_p h_s(t)$ liegt dann in derselben Homotopieklasse.

13. Vorlesung, 28.11.18

5.3. Abstandsmetrik. Wir beantworten nun die eingangs gestellte Frage 1.

Satz 37. *Sei (M, g) zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit.*

- (i) *Durch (42) wird eine (Abstands-)Metrik $d = d_g$ auf (M, g) definiert.*
- (ii) *Die von d_g induzierte Topologie stimmt mit der von M überein.*

Beweis. (ii) Aus Satz 35 folgt: Für jedes p gibt es ein R , so dass $B_r(p)$ metrischer Ball für alle $r < R$ ist, und die Einschränkungen von \exp sind Diffeomorphismen auf diese Bälle. Die Aussage folgern wir nun daraus, dass die Bälle in $T_p M$ und in M die Topologie erzeugen. Ist $V \subset M$ eine Umgebung von p , so ist $\exp_p^{-1}(V \cap B_R(p))$ eine Umgebung von 0 in $T_p M$. Also enthält sie einen Ball vom Radius r . Also enthält V einen metrischen Ball vom Radius r . Die umgekehrte Richtung geht analog.

(i) 1. Endlichkeit, $d(p, q) < \infty$: Es sei $C_p \subset M$ die Menge der mit $p \in M$ durch eine stückweise differenzierbare Kurve verbindbaren Punkte. In jedem normalen Ball ist der Mittelpunkt durch eine differenzierbare Kurve mit jedem anderen Punkt verbindbar. Durch Zusammensetzen von Kurvenstücken erhält man daraus, unter Benutzung von (ii):

- C_p ist offen.

- Auch $M \setminus C_p$ ist offen, also ist C_p abgeschlossen.

Nun ist M zusammenhängend und $p \in C_p$. Also folgt $C_p = M$.

2. Symmetrie, $d(p, q) = d(q, p)$: Läuft $c: [0, 1] \rightarrow M$ von p nach q , so läuft die Kurve $\tilde{c} := c(1 - t)$ von q nach p . Es ist aber $E(\tilde{c}) = E(c)$ (warum?).

3. Dreiecksungleichung, $d(p, r) \leq d(p, q) + d(q, r)$: Die Zusammensetzung stückweise differenzierbarer Kurven bleibt stückweise differenzierbar; dabei ist die Länge additiv.

4. Positivität, $p \neq q \implies d(p, q) > 0$: Wir benutzen (ii) und die Hausdorff-Eigenschaft von M : Punkte $p \neq q$ besitzen disjunkte offene Umgebungen $U_1(p)$ und $U_2(q)$, in denen normale Bälle $B_{r_1}(p)$ und $B_{r_2}(q)$ enthalten sind. Also ist $d(p, q) \geq r_1 + r_2 > 0$. \square

In jedem metrischen Raum impliziert die Dreiecksungleichung $d(p, q) \leq d(p, q_0) + d(q_0, q)$ die verschärfte Dreiecksungleichung $|d(p, q) - d(p, q_0)| \leq d(q, q_0)$. Wie in jedem metrischen Raum ist daher die Abstandsfunktion $q \mapsto d(p, q)$ Lipschitz mit Konstante 1. Insbesondere:

Korollar 38. Für jedes $p \in M$ ist die auf M definierte Funktion $q \mapsto d(p, q)$ stetig.

Beispielsweise folgt daraus, dass auch noch auf dem Abschluss eines normalen Balles, $\overline{B_R(p)}$, die Distanz durch die Länge radialer Geodätischer gegeben wird. Diese Tatsache benutzen wir im folgenden Abschnitt mehrfach.

5.4. Vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeiten. Wir kommen nun zur zweiten Frage, wann das Infimum der Länge angenommen wird. Wir werden sehen, dass die folgenden beiden Begriffe äquivalent sind. Setzt man sie voraus, wird die Antwort positiv ausfallen.

Definition. (i) Eine Riemannsche Mannigfaltigkeit (M, g) heißt *metrisch vollständig*, wenn es M mit der Metrik (42) ist, d.h. Cauchy-Folgen bzgl. d konvergieren.

(ii) M heißt *geodätisch vollständig*, wenn jede Geodätische in M zu einer auf ganz \mathbb{R} definierten Geodätischen fortgesetzt werden kann.

Beispiele. 1. Kompakte metrische Räume sind metrisch vollständig, beispielsweise $\mathbb{S}^n, \mathbb{R}P^n, T^n$ unabhängig von der gewählten Riemannschen Metrik.

2. $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ist metrisch vollständig, nicht aber \mathbb{R}^n mit der durch stereographische Projektion von $\mathbb{S}^n \setminus N$ zurückgezogenen Metrik.

Die eine Implikation der Äquivalenz unserer beiden Vollständigkeitsbegriffe zeigen wir jetzt:

Satz 39. Ist (M, g) metrisch vollständig, so ist M auch geodätisch vollständig.

Beweis. Nach dem lokalen Existenzsatz ist der maximale Definitionsbereich von Geodätischen offen. Wir zeigen nun die Abgeschlossenheit.

Es sei $c: [a, b) \rightarrow M$ Geodätische, die wir nach Bogenlänge parametrisiert annehmen dürfen. Wir wollen c über b hinaus fortsetzen. Sei $t_i \nearrow b$. Wegen

$$d(c(t_i), c(t_j)) \leq L(c|_{[t_i, t_j]}) = |t_i - t_j| \rightarrow 0$$

ist $c(t_i)$ Cauchy-Folge und besitzt einen eindeutig bestimmten Grenzwert $p \in M$. Fügen wir diesen Punkt zur Geodätischen hinzu, so ist klar, dass $K := c([a, b)) \cup \{p\}$ folgenkompakt ist. Nach Lemma 34(ii) gibt es ein $R > 0$, so dass für jedes $q \in K$ der Ball $B_R(q)$ normal ist.

Wegen $c(t_i) \rightarrow p$ gibt es ein i mit $d(p, c(t_i)) < R$. Aber im normalen Ball $B_R(c(t_i))$ ist die Geodätische c radial, und daher enthält der Ball eine Verlängerung von c auf einem offenen Intervall über b hinaus. \square

Aussage (ii) des folgenden Satzes ist unser Hauptresultat:

Satz 40 (Hilbert 1905, H.Hopf, Rinow 1931). *Sei (M, g) eine zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit.*

- (i) *Ist \exp_p für ein $p \in M$ auf ganz $T_p M$ definiert, so existiert eine Kürzeste c von p nach q , d.h. c ist geodätisch mit $L(c) = d(p, q)$.*
- (ii) *Ist M geodätisch vollständig, so lässt sich jedes Paar von Punkten $p, q \in M$ durch eine Kürzeste verbinden.*

Auch in unvollständigen Mannigfaltigkeiten kann die Aussage gelten: In jeder offenen konvexen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ mit Standardmetrik gibt es zwischen je zwei Punkten eine Kürzeste.

Um $v \in T_p M$ zu finden, so dass die Geodätische $t \mapsto \exp_p(tv)$ den Punkt q enthält, verwenden wir folgende Idee: Wir minimieren zunächst die Distanz von q zu einem normalen Ball $B_R(p)$. Im folgenden Lemma konstruieren wir einen minimierenden Punkt $\zeta \in \partial B_R(p)$. Er kann dann als $\zeta = \exp_p v$ geschrieben werden. Im eigentlichen Beweis von Hopf-Rinow zeigen wir dann, dass die Geodätische $t \mapsto \exp_p(tv)$ tatsächlich durch q läuft.

Lemma 41. *Sei $\overline{B_\rho(q_0)}$ enthalten in einem normalen Ball und $q \notin B_\rho(q_0)$. Dann existiert ein $\zeta \in \partial B_\rho(q_0)$ mit $d(q_0, q) = d(q_0, \zeta) + d(\zeta, q)$.*

Nach Satz 35 ist $d(q_0, \zeta) = \rho$.

Beweis. Die Menge $\partial B_\rho(q_0)$ ist kompakt und $d(\cdot, q)$ laut Korollar 38 stetig; daher existiert $\zeta \in \partial B_\rho(q_0)$ mit $d(\zeta, q) = d(\partial B_\rho(q_0), q)$.

Die eine Ungleichung folgt sofort aus der Dreiecks-Ungleichung: $d(q_0, q) \leq d(q_0, \zeta) + d(\zeta, q)$. Wir zeigen nun die andere Ungleichung. Sei $c: [0, 1] \rightarrow M$ Kurve von q_0 nach q . Wir behaupten diese Kurve schneidet die Menge $\partial B_\rho(q_0)$. In der Tat ist $t \mapsto d(c(t), q_0)$ stetig und hat Wert 0 in $t = 0$ und einen Wert $d \geq \rho$ in $t = 1$; letzteres folgt aus Satz 35 wegen $q \notin B_\rho(q_0)$. Der Zwischenwertsatz ergibt die Behauptung. Es gibt also ein t_0 mit $c(t_0) \in \partial B_\rho(q_0)$, und dafür gilt

$$L(c) = L(c|_{[0, t_0]}) + L(c|_{[t_0, 1]}) \stackrel{\text{Satz 35}}{\geq} \rho + d(\partial B_\rho(q_0), q).$$

Aus dem Infimum folgern wir die ausstehende Ungleichung

$$d(q_0, q) = \inf_c L(c) \geq \rho + d(\partial B_\rho(q_0), q) \geq d(q_0, \zeta) + d(\zeta, q). \quad \square$$

Beweis des Satzes von Hopf-Rinow. (ii) ist direkte Folgerung aus (i). Wir zeigen also (i). Es sei $q \neq p$ und $B_r(p)$ ein normaler Ball, dessen Abschluss noch in einem normalen Ball liegt. Gilt $q \in B_r(p)$, so sind wir nach Satz 35 fertig. Anderenfalls ist $r \leq d := d(p, q)$ und das Lemma liefert einen Punkt $z \in \partial B_r(p)$, in dem $d(q, \cdot)$ ein Minimum annimmt. Wir schreiben $z = \exp_p(rv)$ mit $\|v\| = 1$. Nach Voraussetzung existiert die Geodätische $c(t) = \exp_p(tv)$ für alle t .

Um zu zeigen, dass c eine Kürzeste von p nach q ist, müssen wir bestätigen, dass der Punkt q auf c liegt. Wir betrachten diejenigen t , für die $c(t)$ den erwarteten Abstand zum Endpunkt q hat,

$$(46) \quad d(c(t), q) = d - t.$$

Dazu setzen wir $I := \{t \in [0, d] : (46) \text{ gilt}\}$. Wir müssen $I = [0, d]$ zeigen. Daraus folgt $c(d) = q$ und $L(c) = d = d(p, q)$.

Sicherlich ist $0 \in I$. Weiterhin ist I abgeschlossen: Gilt (46) für eine konvergente Folge (t_k) , so gilt (46) wegen der Stetigkeit von $t \mapsto d(c(t), q)$ auch für den Grenzwert $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k$.

Also ist $I = [0, T]$ mit $T \leq d$. Wir führen nun die Annahme $T < d$ zum Widerspruch, indem wir ein ρ konstruieren, für das $T + \rho \in I$ gilt, d.h. wir zeigen I ist offen. Wir wählen $\rho > 0$ so, dass $B_\rho(c(T))$ ein normaler Ball um $c(T)$ ist, der q nicht mehr enthält, d.h. $T + \rho \leq d$. Wiederum laut Lemma gibt es eine Minimalstelle ζ von $d(q, \cdot)$ auf $\partial B_\rho(c(T))$ mit

$$(47) \quad d \stackrel{(46) \text{ für } T}{=} T + d(c(T), q) \stackrel{\text{Lemma}}{=} T + d(c(T), \zeta) + d(\zeta, q),$$

wobei $T = d(p, c(T))$. Es folgt

$$d(p, \zeta) \stackrel{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} d(p, c(T)) + d(c(T), \zeta) \stackrel{(47)}{=} d - d(\zeta, q) \stackrel{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} d(p, \zeta).$$

Also gilt sogar Gleichheit in der ersten Ungleichung, d.h.

$$(48) \quad d(p, \zeta) = d(p, c(T)) + d(c(T), \zeta).$$

Wir verketteten die Geodätische c von p nach $c(T)$ mit der radialen Geodätischen von $c(T)$ nach ζ . Das Resultat ist eine stückweise differenzierbare Kurve, die gemäß (48) die Länge minimiert, also eine Kürzeste.

Nach Korollar 32 muss diese Kürzeste differenzierbar sein (das entscheidende Argument in diesem Beweis!). Also liegt ζ auf der Kurve c , d.h. $\zeta = c(T + \rho)$. Einsetzen von (48) in die rechte Seite von (47) liefert

$$d = d(p, c(T + \rho)) + d(c(T + \rho), q),$$

also $T + \rho \in I$. □

Wir können nun zeigen, dass geodätische und metrische Vollständigkeit äquivalent sind.

Satz 42. *Es sei (M, g) zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit, und für ein $p \in M$ sei die Abbildung $\exp_p: T_p M \cong \mathbb{R}^n \rightarrow M$ definiert.*

- (i) *Dann ist (M, g) metrisch vollständig, und*
- (ii) *$\exp_q: \mathbb{R}^n \rightarrow M$ ist sogar für alle $q \in M$ definiert.*

Beweis. (i) Sei dazu (q_i) Cauchy-Folge in M . Nach dem Satz von Hopf-Rinow existieren Kürzeste $c_i: [0, 1] \rightarrow M$ von p nach q_i , die wir in der Form $c_i(t) = \exp_p(tv_i)$ mit $v_i \in T_p M$ schreiben können. Weil die Folge $d(q_i, p) = \|v_i\|$ beschränkt ist, ist (v_i) eine beschränkte Folge in $T_p M$. Eine Teilfolge konvergiert also, $v_i \rightarrow v$, und wegen Stetigkeit gilt auch $q_i = \exp_p(v_i) \rightarrow q_0 := \exp_p v$. Wegen der Cauchy-Eigenschaft konvergiert dann sogar die ganze Folge, $q_i \rightarrow q_0$.

(ii) ergibt sich aus Satz 39. □

Weil damit metrische und geodätische Vollständigkeit äquivalent sind, werden wir in Zukunft nurmehr den Begriff *Vollständigkeit* verwenden.

6. HYPERBOLISCHER RAUM

Wie wir noch sehen werden, ist der Raum \mathbb{H}^n für die Riemannsche Geometrie dadurch ausgezeichnet, dass er die konstante Krümmung -1 besitzt, während \mathbb{R}^n die Krümmung 0 hat und \mathbb{S}^n Krümmung $+1$. Aus historischer Perspektive liegt die Bedeutung der Entdeckung des hyperbolischen Raumes \mathbb{H}^n darin, dass er eine zweitausend Jahre lang andauernde Diskussion über das Parallelenaxiom beendete.

Literatur: Wir orientieren uns an [L]. Geometrischer ist [Bär, 4.9-4.11] und viel weiter führend [Th].

6.1. Modelle des hyperbolischen Raums. Anders als die Sphäre \mathbb{S}^n ist \mathbb{H}^n nicht als Untermannigfaltigkeit des Riemannschen Raumes \mathbb{R}^{n+1} darstellbar. Hilbert hat dies für die hyperbolische Ebene \mathbb{H}^2 gezeigt: Sie ist nicht nach \mathbb{R}^3 isometrisch einbettbar (Beweis siehe z.B. Spivak III, Ch. 5, Thm. 12). Viele Teilmengen von \mathbb{H}^2 können aber isometrisch durch Flächen mit Gauß-Krümmung $K \equiv -1$ in \mathbb{R}^3 dargestellt werden.

Es gibt mehrere Beschreibungen des hyperbolischen Raums, die unterschiedliche Vorzüge haben. Wir führen die gängigsten drei dieser sogenannten Modelle ein, die wir allerdings nicht vollständig durchrechnen wollen.

Auch für die Sphären \mathbb{S}^n könnte man zwei Modelle angeben: Einerseits ist \mathbb{S}^n die Untermannigfaltigkeit $\{p : \langle p, p \rangle = 1\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ mit der induzierten Metrik. Andererseits ist \mathbb{S}^n nach Entfernung eines Punktes auch der Raum \mathbb{R}^n mit der durch stereographische Projektion induzierten Metrik. Wir geben zwei ganz analoge Modelle für den hyperbolischen Raum an. Zusätzlich beschreiben wir noch eine weitere Möglichkeit, die für $n = 2$ in enger Beziehung zur Funktionentheorie steht und gerade in dieser Dimension gern verwendet wird.

Satz 43. *Die folgenden Räume sind isometrische Riemannsche Mannigfaltigkeiten:*

(i) Hyperboloid-Modell: *Die obere Schale des zweischaligen Hyperboloids $\{\langle p, p \rangle_1 = -1\}$ im Lorentz-Raum ist die Rotationshyperfläche*

$$\left(H^n := \left\{ p = (p_1, \dots, p_n, p_0) \in \mathbb{R}_1^{n+1} : \langle p, p \rangle_1 = -1, p_0 > 0 \right\}, \langle \cdot, \cdot \rangle_1 \right),$$

wobei $\langle p, q \rangle_1 := (\sum_{i=1}^n p_i q_i) - p_0 q_0$ die Lorentz-Metrik ist.

(ii) Poincaré-Ball-Modell: *Der offene Einheitsball $B^n \subset \mathbb{R}^n$, versehen mit Riemanns Metrik*

$$\left(B^n, b_p(\cdot, \cdot) := \frac{4}{(1 - |p|^2)^2} \langle \cdot, \cdot \rangle \right)$$

(iii) (Poincaré) Halbraum-Modell:

$$\left(U^n := \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_+, u_{(p_1, \dots, p_n)}(\cdot, \cdot) := \frac{1}{p_n^2} \langle \cdot, \cdot \rangle \right)$$

Aus dem Satz folgt insbesondere die folgende, nicht unmittelbar klare, Eigenschaft: Die Einschränkung der Lorentz-Metrik auf das Hyperboloid H^n ist Riemannsch. Anschaulich folgt dies aus der nachrechenbaren Tatsache, dass der Tangentialraum an das Hyperboloid um weniger als 45° geneigt ist, also raumartig ist.

Definition. Die durch den Satz bis auf Isometrie beschriebene Riemannsche Mannigfaltigkeit nennen wir den *hyperbolischen Raum* \mathbb{H}^n .

Um eine der Isometrien anzugeben, benötigen wir folgende Abbildung. Es sei $P_- := (0, \dots, 0, -1) \in \mathbb{R}_1^{n+1}$ und

$$\Pi: \mathbb{R}_1^{n+1} \setminus \{P_-\} \rightarrow \mathbb{R}^n \times \{0\} \subset \mathbb{R}_1^{n+1}$$

die Projektion längs Geraden durch den Punkt P_- . Man erhält schnell eine explizite Formel für Π (Übung). Die Einschränkung π von Π auf H^n heißt (*hyperbolische*) *stereographische Projektion*. Weil die Hyperboloidschale H^n asymptotisch zum Lichtkegel ist, gilt

$$\pi: H^n \rightarrow B^n \times \{0\}.$$

Der Beweis des Satzes ergibt sich dann aus folgender Aussage, deren Beweis eine längere Rechnung ist. Im Falle des oberen Halbebenen-Modells beschränken wir uns nur aus Bequemlichkeit auf den Fall $n = 2$. Für eine detailliertere Darstellung siehe [L, S. 38–40].

Lemma 44. (i) *Hyperbolische stereographische Projektion ist Isometrie, d.h. $\pi^*b = \langle \cdot, \cdot \rangle_1$.*
(ii) *Für $n = 2$ ist die Cayley-Abbildung*

$$\varphi: B^2 \rightarrow U^2, \quad \varphi(w) := -i \frac{w + i}{w - i}$$

eine Isometrie von (B^2, b) nach (U^2, u) .

Bemerkung. Im Falle der flachen Räume \mathbb{R}_k^n liefern positive skalare Vielfache der Metriken $\langle \cdot, \cdot \rangle_k$ isometrische Räume (warum?). Aus dem hyperbolischen Raum entsteht, ebenso wie bei der Sphäre, durch Skalierung jedoch eine Familie paarweise nicht-isometrischer Metriken. Man kann auch direkt 1-Parameter-Familien der hyperbolischen Modelle betrachten, siehe [L].

14. Vorlesung, 5.12.18

6.2. Isometrien im Hyperboloid-Modell. Die Räume \mathbb{R}^n und \mathbb{S}^n sehen an jedem Punkt und in jeder Richtung gleich aus, in folgendem Sinne:

Definition. (i) Eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit M heißt *homogen* [homogeneous], wenn es für zwei Punkte $p, q \in M$ eine Isometrie σ gibt mit $\sigma(p) = q$.

(ii) Eine Riemannsche Mannigfaltigkeit M heißt *isotrop* [isotropic], wenn es für alle $p \in M$ und $v, w \in T_p M$ mit $\|v\| = \|w\| = 1$ eine Isometrie ρ mit $\rho(p) = p$ und $d\rho(v) = w$ gibt.

In diesem Abschnitt wollen wir diese Eigenschaften für den hyperbolischen Raum nachweisen. Dazu werden wir das Hyperboloid-Modell benutzen, für das die Beschreibung von Isometrien am einfachsten ist.

Wir betrachten zuerst eine Kurve, die wir später als Geodätische erkennen werden:

Beispiel. Es sei $P := (0, \dots, 0, 1)$ der Scheitel des Hyperboloids, der die Rolle des Pols der Sphäre übernimmt, und $v := (v_1, \dots, v_n, 0) \perp P$ ein horizontaler Einheitsvektor, also

$\langle v, v \rangle_1 = 1$. In der von v und P aufgespannten Ebene betrachten wir den „hyperbolischen Großkreis“

$$(49) \quad c(t) := v \sinh t + P \cosh t,$$

eine Hyperbel (warum?). Tatsächlich liegt c in H^n , denn

$$\langle c(t), c(t) \rangle_1 = \sinh^2 t - \cosh^2 t = -1.$$

Also ist c ein Meridian der Rotationsfläche H^n . Weiter gilt

$$(50) \quad \langle c'(t), c'(t) \rangle_1 = \cosh^2 t - \sinh^2 t = 1,$$

so dass $c(t)$ nach Bogenlänge parametrisiert ist. Weil $c(t)$ asymptotisch an den Lichtkegel $\{\langle p, p \rangle_1 = 0\}$ wird, steht das im Einklang damit, dass für $t \rightarrow \pm\infty$ die euklidische Länge divergiert, $\|c'(t)\|_0 \rightarrow \infty$.

Wir kommen nun zu Isometrien. Wir erinnern daran, dass im Falle von $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ für die Skalarprodukt-erhaltenden linearen Abbildungen, die orthogonale Gruppe $O(n+1)$, gilt:

- Sie fixiert \mathbb{S}^n als Menge (denn sie wirkt Norm-erhaltend), und
- sie wirkt durch Isometrien auf \mathbb{S}^n .

Das Hyperboloid-Modell ist günstig, um die Isometriegruppe zu beschreiben: Auch dort sind Isometrien lineare Abbildungen, genau wie im Falle der Sphäre. Und ganz analog sind sie dadurch definiert, dass sie die Metrik des umgebenden Raumes erhalten. Im Falle der Lorentz-Metrik können solche linearen Abbildungen allerdings die beiden Hyperboloid-Schalen $\pm H^n$ vertauschen, so dass wir die Definition noch weiter einschränken müssen:

Definition. (i) Es sei $O(n, 1) := \{A \in GL(n+1) : \langle p, q \rangle_1 = \langle Ap, Aq \rangle_1 \ \forall p, q \in \mathbb{R}^{n+1}\}$.
(ii) Die *Lorentz-Gruppe* $O_+(n, 1)$ ist die Untergruppe von $O(n, 1)$, die H^n als Menge erhält.

Beispiele. 1. Drehungen um die x_0 -Achse der Form $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ mit $A \in O(n)$ liegen in $O_+(n, 1)$. Wir schreiben im folgenden für diese spezielle Teilmenge einfach $\begin{pmatrix} O(n) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Die Spiegelung an $\mathbb{R}^n \times \{0\}$ liegt in $O(n, 1) \setminus O_+(n, 1)$.

3. Zu $r \in \mathbb{R}$ betrachten wir die Matrix

$$A_r := \begin{pmatrix} \cosh r & 0 & \cdots & 0 & \sinh r \\ 0 & 1 & & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 & 0 \\ \sinh r & 0 & \cdots & 0 & \cosh r \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad A_r \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \\ p_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \cosh r + p_0 \sinh r \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \\ p_1 \sinh r + p_0 \cosh r \end{pmatrix}.$$

Wir zeigen $A_r \in \mathbf{O}_+(n, 1)$:

- Die Identität $\cosh^2 r - \sinh^2 r = 1$ liefert für alle $p, q \in \mathbb{R}^{n+1}$

$$\begin{aligned} \langle A_r p, A_r q \rangle_1 &= (p_1 \cosh r + p_0 \sinh r)(q_1 \cosh r + q_0 \sinh r) \\ &\quad + p_2 q_2 + \cdots + p_n q_n - (p_1 \sinh r + p_0 \cosh r)(q_1 \sinh r + q_0 \cosh r) \\ &= \langle p, q \rangle_1. \end{aligned}$$

- Für $p \in H^n$ folgern wir $(A_r p)_0 = p_0 \cosh r + p_1 \sinh r > 0$ aus

$$p_0^2 = 1 + \sum_{i=1}^n p_i^2 \quad \text{und} \quad p_0 > 0 \quad \Rightarrow \quad p_0 > |p_1| \quad \Rightarrow \quad p_0 \cosh r > |p_1| |\sinh r|.$$

Unter Benutzung der Beispiele 1 und 3 können wir zeigen:

Satz 45. $\mathbf{O}_+(n, 1) \subset \text{Isom}(H^n)$ und H^n ist homogen.

Tatsächlich gilt $\mathbf{O}_+(n, 1) = \text{Isom}(H^n)$, wie aus dem nächsten Satz folgt, zusammen mit der Tatsache, dass Isometrien Geodätische aufeinander abbilden.

Beweis. Sei $A \in \mathbf{O}_+(n, 1)$. Für alle $p \in H^n$ und $v, w \in T_p H^n$ folgt die Isometrie-Eigenschaft $\langle dA(v), dA(w) \rangle_1 = \langle Av, Aw \rangle_1 = \langle v, w \rangle_1$ aus der Linearität von A , d.h. aus $dA(v) = Av$.

Seien nun $p, q \in H^n$ beliebig gegeben. Die Abbildung $r \mapsto A_r p = (\sinh r, 0, \dots, 0, \cosh r)$ nimmt alle Werte $x \in H^n$ mit $x_2 = \dots = x_n = 0$ an, und dieser Meridian erzeugt die Rotationsfläche $H^n \subset \mathbb{R}_1^{n+1}$. Weil alle Rotationen um die x_0 -Achse in $\mathbf{O}_+(n, 1)$ liegen, gibt es daher ein $r \in \mathbb{R}$ und ein $B \in \begin{pmatrix} \mathbf{O}(n) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, so dass $BA_r q = P$; ebenso gilt $\tilde{B}A_{\tilde{r}} p = P$. Wegen der Invertierbarkeit von BA_r zeigt das die Homogenität. \square

Tatsächlich zeigt der Beweis noch etwas mehr. Weil $\mathbf{O}(n)$ transitiv auf Orthonormalbasen von \mathbb{R}^n ist, kann man im Scheitel P je zwei Orthonormalbasen von $T_P H^n$ durch eine Abbildung in $\begin{pmatrix} \mathbf{O}(n) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ineinander überführen. Dies kann man mit der Abbildung aus dem Beweis von (ii) verknüpfen und erhält:

Satz 46. Die Operation von $\mathbf{O}_+(n, 1)$ auf H^n ist transitiv auf orthonormalen Rahmen. D.h. für $p, q \in H^n$ und eine Orthonormalbasis von $T_p H^n$ kann man das Bild in $T_q H^n$ vektorenweise als eine beliebige Orthonormalbasis vorschreiben. Insbesondere ist \mathbb{H}^n isotrop.

Aus diesem Satz wird folgen, dass die Krümmung von \mathbb{H}^n konstant ist.

Bemerkung. Wir haben hier die Hyperflächen $\{\langle p, p \rangle_1 = -1\}$ des Minkowski-Raumes \mathbb{R}_1^{n+1} betrachtet. Allgemeiner kann man entsprechende Hyperflächen der Räume \mathbb{R}_k^{n+1} mit $1 \leq k \leq n$ betrachten: Für $r > 0$ hat die *Pseudosphäre*

$$\mathbb{S}_k^n(r) := \{p \in \mathbb{R}_k^{n+1} : \langle p, p \rangle_k = r^2\}, \quad 0 \leq k \leq n,$$

den Index k , und der *pseudohyperbolische Raum*

$$\mathbb{H}_k^n(r) := \{p \in \mathbb{R}_k^{n+1} : \langle p, p \rangle_k = -r^2\}, \quad 1 \leq k \leq n+1,$$

den Index $k-1$. Dies sind interessante Beispiele semi-Riemannscher Mannigfaltigkeiten von beliebigem Index $1 \leq k \leq n$; sie haben sogar konstante Krümmung. Näheres findet man in [ON], Kapitel 4, *Hyperquadrics*, und Kapitel 8, *Simply connected space forms*.

6.3. Geodätische. Wir lösen hier nicht die Differentialgleichung, um Geodätische zu bestimmen, sondern wollen dazu Symmetrien einsetzen. Im Falle von \mathbb{S}^n sind Geodätische invariant unter der Spiegelung an einer sie enthaltenden Ebene, und dies charakterisiert sie umgekehrt. Wir werden dieses Argument auf das Hyperboloid-Modell H^n übertragen.

Um mit dem genannten Argument parametrisierungslos arbeiten zu können, wollen wir zuerst einen Begriff für krümmungslos eingebettete Untermannigfaltigkeiten einführen:

Definition. Eine semi-Riemannsche Untermannigfaltigkeit M einer semi-Riemannschen Mannigfaltigkeit N heißt *total geodätisch*, wenn jede Geodätische von M auch eine Geodätische von N ist.

Beispiele. 1. $N = \mathbb{R}^n$ und M jeder affine Untervektorraum oder offene Teilmenge davon.

2. N beliebig, und

- $M \subset N$ jede offene Menge, oder
- M ein Punkt (enthält nur konstante Geodätische), oder
- M Bild einer eingebetteten Geodätischen (bzw. offene Teilmengen davon).

Satz 47. Es sei σ eine Isometrie einer semi-Riemannschen Mannigfaltigkeit (N, g) . Dann sind die Zusammenhangskomponenten der Fixpunktmenge

$$\text{Fix}(\sigma) := \{p \in N : \sigma(p) = p\}.$$

total geodätische Untermannigfaltigkeiten von N .

Beispiel. Für $N = \mathbb{S}^2$ kann $\text{Fix}(\sigma)$ sein: die leere Menge, zwei antipodale Punkte, ein Großkreis, ganz \mathbb{S}^2 .

Im Satz wird nicht behauptet, dass $\text{Fix}(\sigma)$ selbst eine Untermannigfaltigkeit ist. Tatsächlich können Komponenten der Fixpunktmenge verschiedene Dimensionen haben. Dies sieht man schon in einfachen Beispielen wie $N = \mathbb{R}P^2 = \mathbb{S}^2/\{\pm \text{id}\}$ und σ Spiegelung an einem Großkreis: $\text{Fix}(\sigma)$ ist die Vereinigung des Großkreises mit einem weiteren Punkt, und zwar dem Pol des Großkreises. Auch auf der Kleinschen Flasche mit Standard-Metrik kann man eine Spiegelung an einer geschlossenen Geodätischen definieren, die zusätzlich noch zwei isolierte Punkte fixiert.

Beweis. Es sei $p \in \text{Fix}(\sigma)$. Wir betrachten den Eigenraum E von $d\sigma$ zum Eigenwert 1, also den Unterraum $E := \{v \in T_p N : d\sigma(v) = v\}$; dabei ist auch der Fall $E = \{0\}$ zugelassen. Weiterhin sei $V \subset T_p M$ so gewählt, dass $\exp: V \rightarrow B_r(p)$ Diffeomorphismus auf einen normalen Ball ist. Wir behaupten

$$(51) \quad \exp_p(E \cap V) = \text{Fix}(\sigma) \cap B_r(p).$$

Um “ \subset ” zu zeigen, wähle $v \in E \cap V$. Dann gilt $\sigma(c_{p,v}(t)) = c_{p,v}(t)$, denn beide Seiten haben die gleichen Anfangswerte (Kettenregel), und beide Seiten sind geodätisch (wegen σ Isometrie). Also ergibt der Eindeutigkeitssatz für Geodätische die behauptete Identität und $\exp_p v$ ist invariant unter σ .

Für “ \supset ” betrachte $q \in \text{Fix}(\sigma) \cap B_r(p)$. Nach Satz 35 ist die Kürzeste $c: [0, 1] \rightarrow M$, $c(t) = \exp_p(tv)$, von $p = c(0)$ nach $q = c(1)$ eindeutig. Aber auch $\sigma \circ c$ ist eine Geodätische mit gleicher Länge und denselben Endpunkten. Also gilt $c = \sigma \circ c$ und diese Kurven haben dieselbe Anfangsrichtung $c'(0) = d\sigma(c'(0))$. Es folgt $v = d\sigma(v)$, also $v \in E \cap V$.

Aus (51) folgern wir erstens, dass $\text{Fix}(\sigma)$ eine Untermannigfaltigkeit ist: Tatsächlich ist E ein d -dimensionaler Unterraum von $T_p M$, und damit hat \exp_p eingeschränkt auf $E \cap V$ eine Umkehrabbildung, die Karte von $\text{Fix}(\sigma)$ ist.

Zweitens zeigt das für “ \supset ” gegebene Argument, dass für $p \in \text{Fix}(\sigma)$ und für $q \in \text{Fix}(\sigma)$ aus einer Umgebung von p die Geodätische c von p nach q in $\text{Fix}(\sigma)$ liegt. Damit ist $\text{Fix}(\sigma)$ total geodätisch. \square

15. Vorlesung, 7.12.18

Satz 48. Die Geodätischen von \mathbb{H}^n sind Parametrisierungen proportional zur Bogenlänge von genau den folgenden Mengen:

- (i) (Hyperboloid) Schnitte von Ursprungsebenen mit H^n ,
- (ii) (Poincaré-Ball) Strecken und Kreisbögen, die den Rand \mathbb{S}^n senkrecht treffen,
- (iii) (Halbraum) Halbgeraden und Halbkreise, die den Rand $\mathbb{R}^n \times \{0\}$ senkrecht treffen.

Im Hyperboloid-Modell sind speziell alle Geodätischen durch den Scheitel P bis auf Parametrisierung in der Form (49) darstellbar, denn diese Kurven liegen in der (P, v) -Ebene, und sind gemäß (50) nach Bogenlänge parametrisiert.

Beweis. (i) Die Spiegelung σ an der vertikalen Ebene E durch (e_1, P) ist eine Isometrie von H^n . Nach Satz 47 ist daher der nach Bogenlänge parametrisierte Meridian $c(t) = P \cosh t + e_1 \sinh t$ aus (49) geodätisch.

Wegen der Homogenität und Isotropie von H^n ist jedes $p \in H$ und jeder Einheitsvektor $v \in T_p M$ das Bild von (P, e_1) unter einer Isometrie $A \in O_+(n, 1)$. Also ist auch Ac geodätisch,

nach Bogenlänge parametrisiert, und in der Ebene $A(E)$ enthalten. Weiter hat Ac die Anfangswerte (p, v) , d.h. es gilt $Ac = c_{p,v}$ bzw. für allgemeines $w = \lambda v$ dann $Ac(\lambda t) = c_{p,w}(t)$

Dies sind alle Geodätischen, weil das Anfangswertproblem für Geodätische eine eindeutige Lösung besitzt. Umgekehrt enthalten alle Ebenen durch Punkte von H^n damit eine Geodätische.

(ii) Dies folgt aus der expliziten Formel für stereographische Projektion, siehe [L, S.84/85]. Genau dann, wenn die Ebene den Punkt S enthält, ist das Bild eine Gerade.

(iii) Auch dies kann man nachrechnen, siehe [L, S.86]. Nicht nur für die Cayley-Transformierte, sondern für jede Möbiustransformation gilt: Geraden und Kreise werden auf Geraden oder Kreise abgebildet; weil Winkel erhalten werden, bleibt auch die Eigenschaft, den Rand senkrecht zu treffen, erhalten. \square

In (i) kann man anstelle des Symmetriearguments auch wie im Beweis des Gauß-Lemmas argumentieren, und direkt nachrechnen, dass $t \mapsto (\sinh t, 0, \dots, \cosh t)$ eine Kürzeste von P zu jedem anderen Kurvenpunkt ist. Dieselbe Aussage gewinnen wir hier als Folgerung:

Satz 49. (i) \mathbb{H}^n ist vollständig.

(ii) Geodätische von \mathbb{H}^n sind auf jedem Teilstück Kürzeste und jeder metrische Ball $B_r(p)$ ist normal.

Beweis. (i) Weil die Exponentialabbildung für alle Punkte $p \in \mathbb{H}^n$ auf ganz $T_p M$ definiert ist, folgt dies aus Satz 42.

(ii) Nach dem letzten Satz existiert genau eine Geodätische, die $p \neq q \in H^n$ (mit $[0, 1]$ parametrisiert) verbindet. Andererseits gibt es wegen (i) nach Hopf-Rinow immer eine Geodätische, die Kürzeste ist. Also ist die eindeutige Geodätische die Kürzeste. \square

Wir betrachten abschließend noch die Umfänge von geodätischen Kreisscheibe vom Radius $r > 0$ in H^2 . Nehmen wir als Mittelpunkt den Scheitel des Hyperboloid-Modells, so ist die Exponentialabbildung durch $\exp_P(rv) = v \sinh r + \cosh r$ gegeben, wobei $\|v\| = 1$, $v_0 = 0$. Für den Kreis mit $v = (\cos \varphi, \sin \varphi, 0)$ ergibt das die Parametrisierung

$$c(\varphi) = (\cos \varphi \sinh r, \sin \varphi \sinh r, \cosh r), \quad \varphi \in [0, 2\pi),$$

und der Umfang ist

$$\int_0^{2\pi} \|c'\| d\varphi = \int_0^{2\pi} \left\| \begin{pmatrix} -\sin \varphi \sinh r \\ \cos \varphi \sinh r \\ 0 \end{pmatrix} \right\|_1 d\varphi = \int_0^{2\pi} \sinh r d\varphi = 2\pi \sinh r.$$

Wir erhalten also folgende Kreisumfänge:

$$\mathbb{S}^2 : |\partial B_r| = 2\pi \sin r = 2\pi\left(r - \frac{r^3}{3!} + \dots\right) \text{ für } r < \pi,$$

$$\mathbb{R}^2 : |\partial B_r| = 2\pi r,$$

$$\mathbb{H}^2 : |\partial B_r| = 2\pi \sinh r = 2\pi\left(r + \frac{r^3}{3!} + \dots\right).$$

Wegen $\sin r < r < \sinh r$ ist im hyperbolischen Raum am meisten Platz. In Satz III.25 werden wir noch zeigen, dass in Flächen mit beliebiger Krümmung die Taylorentwicklung von $\frac{1}{2\pi}|\partial B_r(p)|$ einen Koeffizienten von $-\frac{r^3}{3!}$ liefert, der gerade die Krümmung $K(p)$ ist.

6.4. Parallelenaxiom. Rund zweitausend Jahre lang waren Euklids Axiome die Grundlage der ebenen Geometrie. Diese Axiome beziehen sich auf Punkte und Geraden der (euklidischen) Ebene. Zwei Beispiele sind: Durch je 2 Punkte geht genau eine Gerade; entfernt man aus einer Geraden einen Punkt, so gibt es Punkte in der Geraden, die nicht verbindbar sind. Die berühmteste Aussage, in verkürzter Form, lautet:

Je zwei Geraden, die nicht parallel sind, schneiden sich in einem Punkt.

Diese Aussage wurde zum *Parallelenaxiom* uminterpretiert, und ist, vorausgesetzt die anderen Axiome gelten, auch äquivalent dazu:

Für jede Gerade g und $p \notin g$ gibt es genau eine Gerade h durch p mit $h \cap g = \emptyset$.

Dabei folgt die Existenz einer solchen Parallelen aus den anderen Axiomen, es geht also darum, dass höchstens eine Parallele existiert. Man vermutete lange, das Parallelenaxiom sei von den anderen impliziert. Daher war es eine Revolution festzustellen, dass für die Menge der Geodätischen von \mathbb{H}^2 das Parallelenaxiom nicht gilt, obwohl alle anderen Axiome gelten. In unseren Modellen ist dies einfach zu sehen: Nimmt man z.B. den Poincaré-Ball mit einer Geodätischen g , so gehen durch jeden Punkt $p \notin g$ viele Kreise, die g nicht schneiden (und den Rand senkrecht treffen).

Mehr zur axiomatischen Geometrie finden Sie bei Bär und in Hilberts Buch “Grundlagen der Geometrie”. Eine ausführliche und sehr schöne Quelle zu diesen Fragen ist das Buch von John McCleary [MC].

6.5. Kompakte hyperbolische Flächen. Das *Geschlecht* [genus] $g \in \mathbb{N}_0$ einer kompakten orientierbaren Fläche wollen wir hier nicht präzise definieren. Es ist anschaulich die Anzahl ihrer “Henkel”. Wenn man eine nach \mathbb{R}^3 eingebettete Fläche hat, so ist es die Anzahl der Löcher. Eine Sphäre hat also Geschlecht 0, ein Torus Geschlecht 1.

Ist die Fläche M trianguliert mit F Flächen, K Kanten und E Ecken, so ist g über *Euler-Charakteristik* $\chi(M) := E - K + F = 2(1 - g) \leq 2$ gegeben. Überprüfen Sie dies für

spezielle Triangulierungen; es gehen auch polygonale Zerlegungen (warum?). Diese Definition von g kommt aus der formalen topologischen Definition von g als Dimension der ersten Homologiegruppe von M .

Wir wollen nun Flächen von beliebigem Geschlecht $g > 0$ konstruieren, die lokal isometrisch zur hyperbolischen Ebene sind, und dadurch ebenso wie wir das für \mathbb{H}^2 sehen werden, konstante Gauss-Krümmung -1 besitzen.

Satz 50. *Für jedes $g \geq 2$ gibt es eine zweidimensionale kompakte orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit M_g vom Geschlecht g , deren Metrik lokal isometrisch zu \mathbb{H}^2 ist.*

Wir wollen diese Flächen aus Sechsecken aus \mathbb{H}^2 zusammenkleben. Dabei besteht ein *Sechseck* aus sechs durchnummerierten verschiedenen Punkten aus \mathbb{H}^2 , die zyklisch durch Geodätische verbunden sind, welche einander nicht schneiden.

Lemma 51. *Es gibt rechtwinklige Sechsecke in \mathbb{H}^2 .*

Beweis. Wir betrachten die Poincaré-Kreisscheibe $B = B^2$ und benutzen, dass sie konform zur Standardmetrik ist. Wir nehmen drei Ursprungsgeraden von \mathbb{R}^2 , die sich mit je 60° schneiden und markieren darauf sechs Punkte $p_1(r), \dots, p_6(r)$ im geodätischen Abstand $r > 0$ vom Ursprung. Geodätische durch benachbarte Punkte $p_i(r), p_{i+1}(r)$ sind den Rand ∂B senkrecht treffende Kreisbögen. Für jedes $r > 0$ schließen sie ein Sechseck ein. Der Mittelpunkt der Kreise ist der Schnittpunkt der Tangenten an die jeweiligen beiden Randpunkte. Wegen der stetigen Abhängigkeit dieser Konstruktion von r schneiden die Geodätischen einander in den $p_i(r)$ mit einem von r stetig abhängigen Winkel $\alpha(r)$. Die Grenzwerte sind:

$$\alpha(r) \rightarrow 120^\circ \quad \text{für } r \rightarrow 0, \quad \alpha(r) \rightarrow 0^\circ \quad \text{für } r \rightarrow \infty.$$

Nach dem Zwischenwertsatz existiert ein $r_0 > 0$ mit $\alpha(r_0) = 90^\circ$. □

Mit Hilfe von hyperbolischer Trigonometrie kann man alle rechtwinkligen Sechsecke konstruieren; sie besitzen 3 freie Parameter.

Beweis des Satzes. Sei S ein beliebiges rechteckiges Sechseck S , z.B. ein gleichseitiges von Lemma 51. Wir verkleben dann zwei Kopien von S entlang wie ein Kissen, aber nur mit jeder zweiten Seite und erhalten ein sogenanntes *Y-Stück*. Die drei nicht verklebten Kanten (zusammen mit ihren Spiegelbildern) bilden drei disjunkte Kreise, die das Y-Stück beranden.

Passende Längen der Randkreise vorausgesetzt, kann man Kopien von Y-Stücken entlang ihrer Randkreise zusammenkleben. Verklebt man beispielsweise die Randkreise zweier Y-Stücke, so erhält man eine Fläche M_2 mit $g = 2$. Verklebt man nur zwei statt drei Kreise,

so erhält man ein Doppelstück “mit Loch” (bestehend aus 4 Sechsecken). Verklebt man für $g > 1$ nun $g - 1$ solcher Doppelstücke bzw. $(2g - 2)$ Y-Stücke (bzw. $4g - 4$ Sechsecke), so hat die resultierende Fläche M_g das Geschlecht $g > 1$. (Überprüfen Sie die Euler-Charakteristik $\chi(M_g) = E - K + F$.)

Wir behaupten, dass jeder Punkt eine Umgebung besitzt, die isometrisch zu einer Teilmenge von \mathbb{H}^2 ist: Das ist ohnehin klar für innere Punkte jedes Sechsecks. An jedem inneren Punkt einer Kante hat man zwei Halbräume, jeweils zu einer Seite einer Geodätischen, zusammengeklebt. Weil man an Geodätischen spiegeln kann, ergibt sich eine Umgebung, die isometrisch zu einer Umgebung eines Punktes in \mathbb{H}^2 ist. Entsprechendes gilt in den Ecken: Nach einer Spiegelung hat man lokal einen Halbraum, so dass auch hier die vier Kopien der Umgebung der Ecke wieder lokal isometrisch zu \mathbb{H}^2 sind. Also ist M_g eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, die lokal isometrisch zu \mathbb{H}^2 ist. \square

Bemerkungen. 1. Die Flächen des Satzes lassen sich nicht isometrisch nach \mathbb{R}^3 einbetten oder immersieren, weil solche Immersionen Punkte positiver Gauß-Krümmung haben müssen.

2. Die Riemannsche Struktur definiert eine 90-Grad Drehung $J: T_p M \rightarrow T_p M$. Da die von uns konstruierten Mannigfaltigkeiten M_g orientierbar sind, ist J global definiert, indem wir eine orientierte Orthonormalbasis v_p, w_p konstruieren und $Jv_p = w_p, Jw_p = -v_p$ definieren. Jede orientierte hyperbolische Fläche trägt deshalb eine wohlbestimmte konforme Struktur, d.h. sie wird zu einer *Riemannschen Fläche*, also einer komplex-eindimensionalen Mannigfaltigkeit. Erstaunlicherweise gilt für $g \geq 2$ auch die Umkehrung (siehe Farkas-Kra, Theorem IV.8.6): Jede Riemannsche Fläche lässt sich mit einer Metrik versehen, so dass $v \perp iv$ und die Metrik Krümmung -1 hat.

3. Unsere Konstruktion kann man benutzen, um die Menge aller Riemannschen Metriken mit $K \equiv -1$ auf einer topologischen Fläche vom Geschlecht g zu analysieren; natürlich betrachtet man nur die Äquivalenzklassen isometrischer Metriken. Diese Menge heißt *Teichmüller-Raum* \mathcal{T}_g und ist sogar eine Mannigfaltigkeit, wie wir gleich sehen werden.

Dazu kann man sich elementargeometrisch überlegen: Jedes beliebige rechtwinklige Sechseck hat drei Parameter, also auch jedes Y-Stück. Beispielsweise kann man die Längen $\ell_1, \ell_2, \ell_3 > 0$ der Randkreise nehmen. Weil man diese Kreislängen paarweise anpassen muss, hat man für M_g die $3(2g - 2)/2$ Kreisumfänge $(\ell_1, \dots, \ell_{3g-3})$. Da aber Verdrehen eines Y-Randkreises gegenüber seinem Partnerkreis jeweils einen weiteren Parameter $\varphi_i \in \mathbb{S}^1$ einführt (solche *Twists* führen tatsächlich zu nicht-isometrischen Flächen), hat \mathcal{T}_g die Dimension $2 \cdot 3(2g - 2)/2 = 6g - 6$. Man bezeichnet diese Parameter als *Fenchel-Nielsen-Parameter* von $M \in \mathcal{T}_g$.

Eine Karte von \mathcal{T}_g wird durch eine Wahl geschlossener Geodätischer bestimmt, die M in Y-Stücke zerlegt. Eine solche Zerlegung ist immer möglich, in der Regel auf viele verschiedene Weisen. Die durch diese Wahl bestimmten $(6g - 6)$ Parameter der Fläche $(\ell_1, \varphi_1, \dots, \ell_{3g-3}, \varphi_{3g-3})$ definieren dann eine Karte von \mathcal{T}_g .

Teil 3. Krümmung

16. Vorlesung, 12.12.18

Es sei stets (M^n, g) semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit und ∇ ihr Levi-Civita-Zusammenhang. Wir setzen ferner $n \geq 2$ voraus.

1. KRÜMMUNGSBEGRIFFE

Der Krümmungsbegriff, den wir einführen, wird die folgenden Eigenschaften haben:

1. Die Krümmung wird die Gauß-Krümmung K von Flächen auf Mannigfaltigkeiten beliebiger Dimension verallgemeinern. Dazu nimmt sie die Gauß-Krümmung einer Fläche, die Exponentialbild einer Ebene $E \subset T_p M$ im Tangentialraum ist,

$$(p, E) \mapsto K(\exp_p(E)).$$

Dies war 1854 Riemanns wegweisende Idee.

2. Die Krümmung misst die Wegabhängigkeit der Parallelverschiebung: Die Krümmung verschwindet genau dann, wenn die Parallelverschiebung lokal wegunabhängig ist. Dabei kann man „lokal“ präzisieren als „für homotope Wege“.

3. Die Krümmung ist die einzige Invariante von semi-Riemannschen Mannigfaltigkeiten unter lokalen Isometrien.

4. Die Krümmung ist normiert durch die Festlegung: Die Mannigfaltigkeiten \mathbb{S}^n , \mathbb{R}^n , \mathbb{H}^n haben die Krümmungen $+1$, 0 , -1 .

1.1. Gauß-Krümmung von Flächen. Weil der Riemannsche Krümmungsbegriff die Gauß-Krümmung verallgemeinert, möchte ich kurz wiederholend darstellen, wie dieser Krümmungsbegriff definiert werden kann und welche Eigenschaften er hat. Ich gebe vier verschiedene Charakterisierungen der Gauß-Krümmung K an. Dabei sind a), b) extrinsische Definitionen und c), d) beschreiben, wie die Gauß-Krümmung intrinsisch deutbar ist.

a) Wir betrachten immensierte Flächen $f: U^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Wir benutzen die Normalenabbildung $\nu: U^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ (Gauß-Abbildung) der Fläche.

Beispiele. 1. Für eine parametrisierte Ebene ist ν konstant,

2. für einen Zylinder liegt ν in einem Großkreis,

3. für \mathbb{S}_R^2 kann man $\nu = \frac{1}{R}f$ wählen.

Wenn sich f stark krümmt, wird das Normalenbild groß sein. Eine Möglichkeit, die Größe des Normalenbildes zu messen, ist $\det d\nu_p$ zu betrachten. Allerdings tut es dies relativ

zur gewählten Parametrisierung: Skalieren wir die Fläche in \mathbb{R}^3 beispielsweise mit einem Faktor, so hängt $\det d\nu_p$ quadratisch von diesem Faktor ab. Um eine von der gewählten Parametrisierung unabhängige Größe zu erhalten, dividieren wir durch $\det df$. Entsprechend hat Gauß definiert:

$$(1) \quad K(p) = \frac{\det d\nu_p}{\det df_p}.$$

(Technisch ist es vorteilhaft, die *Weingartenabbildung* $S = -(df)^{-1}d\nu$ einzuführen, so dass $K(p) = \det((df_p)^{-1}d\nu_p) = \det(-S_p)$; siehe Vorlesung klassischen Differentialgeometrie.)

- Beispiele.* 1. Für die Ebene $K \equiv 0$,
 2. für den lokal isometrischen Zylinder ebenfalls.
 3. Für die Kugel \mathbb{S}_R^2 ist $K = 1/R^2$.

b) Man kann auch die zweite Fundamentalform $b_{ij} := \langle \partial_{ij}f, \nu \rangle$ benutzen, um die Gauß-Krümmung einzuführen. Wir tun dies hier nur für den Spezialfall eines Graphen über der Tangentialebene. Wir nehmen also $f(x, y) = (x, y, h(x, y))$ an, wobei $f(0, 0) = 0$ und $\text{grad } f(0, 0) = 0$, bzw. $\nu(0, 0) = (0, 0, 1)$. Dann gilt im Ursprung $b_{ij} = \partial_{ij}^2 h$, die zweite Fundamentalform ist also die Hesseform der Höhenfunktion, $b = d^2h$. Zulässige Isometrien sind hier Bewegungen der parametrisierenden Ebene. Die Invarianten der symmetrischen Bilinearform d^2h bezüglich Bewegungen sind die Eigenwerte, genannt Hauptkrümmungen κ_1, κ_2 . In der entsprechenden Basis von Eigenvektoren hat d^2h die Diagonalform $d^2h = \begin{pmatrix} \kappa_1 & 0 \\ 0 & \kappa_2 \end{pmatrix}$. Insbesondere ist auch das Produkt der Eigenwerte $K = \det d^2h = \kappa_1 \kappa_2$ eine Invariante.

Wenn f allgemein ist, also nicht unbedingt Graph über der Tangentialebene, erhält man einen parametrisierungsinvarianten Ausdruck, indem man setzt

$$(2) \quad K = \frac{\det b}{\det g}.$$

c) Auf Flächen haben geodätische Kreise $\partial B_r(p)$ vom Abstand r um einen Punkt p eine Länge, deren Taylorentwicklung die Gauß-Krümmung $K(p)$ enthält,

$$L(\partial B_r) = 2\pi \left(r - \frac{K(p)}{3!} r^3 + O(r^4) \right),$$

In \mathbb{S}^2 , \mathbb{R}^2 , bzw. \mathbb{H}^2 haben wir uns von dieser Formel bereits überzeugt, dort sind die Längen $2\pi \sin r$, $2\pi r$, bzw. $2\pi \sinh r$.

d) Wir benötigen eine Formel, die $K(p)$ durch die erste Fundamentalform bzw. Riemannsche Metrik g und seine Ableitungen bestimmt. Dass es eine solche Formel gibt, ist eine überraschende Tatsache, die nicht aus (1) oder (2) ablesbar ist. Sie ist Inhalt des *theorema egregium* von Gauß. Der Beweis des theorema egregium folgt aus längeren Rechnungen, die man wie folgt zusammenfassen kann. Für eine Immersion $f: U^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ gilt

$(\partial_{ij} - \partial_{ji})\partial_k f = 0$ nach dem Satz von Schwarz. Indem man diesen Ausdruck als eine Linearkombination seiner Tangentialkomponenten berechnet, gewinnt man für jede Immersion f eine Gleichung, die sogenannte *Gauß-Gleichung*,

$$(3) \quad R_{ijk}^s := \partial_i \Gamma_{jk}^s - \partial_j \Gamma_{ik}^s + \sum_{r=1}^n \Gamma_{jk}^r \Gamma_{ir}^s - \Gamma_{ik}^r \Gamma_{jr}^s = \sum_{r=1}^n (b_{jk} b_{ir} - b_{ik} b_{jr}) g^{rs} \quad 1 \leq i, j, k, s \leq n.$$

Die Gauß-Gleichung verknüpft die innere Geometrie (linke Seite) mit der äußeren Geometrie (rechte Seite). Tatsächlich hängen die Christoffel-Symbole ja nur von g ab, während b durch ν bestimmt ist.

Multiplizieren wir die Gauß-Gleichung mit der Matrix g_{st} und summieren, so erhalten wir $\sum_s g_{st} R_{ijk}^s = b_{jk} b_{it} - b_{ik} b_{jt}$ für $1 \leq i, j, k, t \leq n$. Im zweidimensionalen Fall, $n = 2$, wird die rechte Seite zur Determinante von b , wenn wir spezifizieren $i = t = 1$ und $j = k = 2$. Es ergibt sich die gewünschte intrinsische Formel für die Gauß-Krümmung,

$$(4) \quad \frac{\sum_{s=1}^2 g_{s1} R_{122}^s}{g_{11} g_{22} - g_{12}^2} = \frac{\det b}{\det g} = K,$$

in jedem Punkt $p \in U \subset \mathbb{R}^2$.

Die durch die Gleichungen (3) und (4) gegebenen Größen werden wir auf Mannigfaltigkeiten übertragen. Dabei wird (3) zum algebraischen Begriff des Krümmungstensors führen, und (4) zur geometrischen Schnittkrümmung.

1.2. Krümmungstensor. Die Krümmung auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten wird zunächst durch einen Tensor beschrieben, der drei Vektorfeldern ein neues Vektorfeld zuordnet. Später werden wir hieraus den geometrischen Begriff der Schnittkrümmung herleiten.

Definition. Sei (M, g) semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Levi-Civita-Zusammenhang ∇ .

(i) Der *Krümmungstensor* ist der Kommutator der zweiten kovarianten Ableitungen

$$(5) \quad R(X, Y)Z := \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z, \quad X, Y, Z \in \mathcal{V}(M).$$

(ii) Man bezeichnet Mannigfaltigkeiten mit identisch verschwindendem Krümmungstensor als *flach*.

Bemerkungen. 1. Die Wahl des umgekehrten Vorzeichens für R ist ebenfalls üblich!

2. Wir werden die Schreibweise $R(X, Y)Z$ statt $R(X, Y, Z)$ noch begründen.

Der Krümmungstensor verallgemeinert damit die Ableitungsdifferenz $\partial_i \partial_j \partial_k f - \partial_j \partial_i \partial_k f$ einer Immersion, aus der Gauss-Gleichung hervorgeht. Anders als im flachen Fall, in dem der Satz von Schwarz gilt, vertauschen im Riemannschen Fall zweite Ableitungen gewöhnlich nicht mehr, und dieser Tatbestand wird jedesmal für das Auftreten des Krümmungstensor

verantwortlich sein. Dies werden wir an verschiedenen Stellen sehen, z.B. bei Berechnung der zweiten Variation.

Im Beweis des folgenden Lemmas erkennen wir unsere Definition (5) als die koordinatenfreie Darstellung von (3):

Lemma 1. *Sei (x, U) Karte einer semi-Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) mit Standardbasis (e_i) . Der Levi-Civita-Zusammenhang habe die Christoffel-Symbole Γ und $R_{ijk}^s: U \rightarrow \mathbb{R}$ sei definiert durch*

$$R(e_i, e_j)e_k = \sum_s R_{ijk}^s e_s.$$

Dann gilt die in (3) links gegebene Darstellung.

Beweis. Die Standardbasis (e_i) bezüglich einer Karte (x, U) erfüllt $[e_i, e_j] = 0$. Also gilt:

$$\begin{aligned} R(e_i, e_j)e_k &= \nabla_{e_i} \nabla_{e_j} e_k - \nabla_{e_j} \nabla_{e_i} e_k \\ &= \nabla_{e_i} \left(\sum_r \Gamma_{jk}^r e_r \right) - \nabla_{e_j} \left(\sum_r \Gamma_{ik}^r e_r \right) \\ (6) \quad &\stackrel{\nabla \text{ derivativ}}{=} \sum_r \left[(\partial_i \Gamma_{jk}^r) e_r + \Gamma_{jk}^r \sum_s \Gamma_{ir}^s e_s - (\partial_j \Gamma_{ik}^r) e_r - \Gamma_{ik}^r \sum_s \Gamma_{jr}^s e_s \right] \\ &= \sum_s \left[\partial_i \Gamma_{jk}^s - \partial_j \Gamma_{ik}^s + \sum_r \left(\Gamma_{jk}^r \Gamma_{ir}^s - \Gamma_{ik}^r \Gamma_{jr}^s \right) \right] e_s \end{aligned} \quad \square$$

Die folgende Eigenschaft ist wichtig, z.B. für Basisdarstellungen:

Lemma 2. $(X, Y, Z) \mapsto R(X, Y)Z$ ist $C^\infty(M)$ -linear in allen drei Einträgen.

Dies ist nicht offensichtlich, denn die Summanden von $R(X, Y)Z$ wie $(X, Y, Z) \mapsto \nabla_X \nabla_Y Z$ sind nicht $C^\infty(M)$ -linear; nicht einmal $(Y, Z) \mapsto \nabla_Y Z$ ist es.

Beweis. Die \mathbb{R} -Linearität, z.B. $R(U+V, Y)Z = R(U, Y)Z + R(V, Y)Z$, gilt termweise. Wir zeigen nun die $C^\infty(M)$ -Linearität. Sei $f \in C^\infty(M)$.

- in X : Unter Verwendung der Formel von Satz I.7(iv) folgt

$$\begin{aligned} R(fX, Y)Z &= f \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y (f \nabla_X Z) - \nabla_{f[X, Y] - (\partial_Y f)X} Z \\ &= f \nabla_X \nabla_Y Z - f \nabla_Y \nabla_X Z - \partial_Y f \nabla_X Z - f \nabla_{[X, Y]} Z + \partial_Y f \nabla_X Z = f R(X, Y)Z. \end{aligned}$$

- in Y genauso.

• in Z :

$$\begin{aligned}
 \nabla_X \nabla_Y (fZ) &= \nabla_X (f \nabla_Y Z + \partial_Y f Z) \\
 &= f \nabla_X \nabla_Y Z + \underbrace{\partial_X f \nabla_Y Z + \partial_Y f \nabla_X Z}_{\text{symm. in } X, Y} + (\partial_X \partial_Y f) Z. \\
 \implies R(X, Y) fZ &= \nabla_X \nabla_Y (fZ) - \nabla_Y \nabla_X (fZ) - \nabla_{[X, Y]} fZ \\
 &= f(\nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X) Z + (\partial_{[X, Y]} f) Z - f \nabla_{[X, Y]} Z - (\partial_{[X, Y]} f) Z \\
 &= f R(X, Y) Z
 \end{aligned}$$

□

Lemma 2 sagt, dass R ein Tensor ist: Der Wert von $R(X, Y)Z$ im Punkt p wird allein durch die Werte der Vektorfelder X, Y, Z im Punkt p bestimmt. Es gilt z.B. lokal

$$R\left(\sum \xi^i e_i, \sum \eta^j e_j\right) \sum \zeta^k e_k \stackrel{(*)}{=} \sum \xi^i \eta^j \zeta^k R(e_i, e_j) e_k = \sum \xi^i \eta^j \zeta^k R_{ijk}^s e_s.$$

Weil ξ, η, ζ nur lokal definiert sind, ist $(*)$ nicht direkt durch die $C^\infty(M)$ -Linearität gerechtfertigt. Wir werden dies mit Satz 11 nachholen, wenn wir uns allgemein mit Tensoren befassen.

Bemerkungen. Wählen wir für X, Y, Z Standardbasisfelder einer Karte, so ist der Krümmungstensor exakt der Kommutator der zweiten Ableitungen $\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z$. Indem man noch den Lie-Klammer-Term $\nabla_{[X, Y]} Z$ hinzufügt, verallgemeinert man diesen Kommutator unter Beibehaltung der Tensor-Eigenschaft auf beliebige Felder X, Y, Z .

1.3. Schnittkrümmung. Wir wollen $g(R(X, Y)U, V)$ als einen Krümmungsausdruck interpretieren, der auf den durch X, Y und U, V aufgespannten orientierten Ebenen definiert ist; dies wird durch die folgenden Eigenschaften (ii)-(iv) nahe gelegt.

Lemma 3. (i) Bianchi-Identität: $R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0$

(ii) $R(X, Y)Z = -R(Y, X)Z$

(iii) $g(R(X, Y)U, V) = -g(R(X, Y)V, U)$

(iv) $g(R(X, Y)U, V) = g(R(U, V)X, Y)$

Die Eigenschaften (ii) – (iv) kann man als Orientierungswechsel der Ebenen bzw. Ebenen-tausch verstehen; dagegen bleibt (i), jedenfalls für mich, undurchsichtig.

Beweis. (i) Laut Jacobi-Identität, Satz I.7, ist $0 = [X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]]$. In dieser zyklischen Summe ersetzen wir nun die Lie-Klammern gemäß $[U, V] = \nabla_U V - \nabla_V U$:

$$\begin{aligned}
 0 &= \sum_{\text{zykl.}} [X, [Y, Z]] = \sum_{\text{zykl.}} \nabla_X [Y, Z] - \nabla_{[Y, Z]} X = \sum_{\text{zykl.}} \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_X \nabla_Z Y - \nabla_{[Y, Z]} X \\
 &\stackrel{(*)}{=} \sum_{\text{zykl.}} \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z = \sum_{\text{zykl.}} R(X, Y)Z.
 \end{aligned}$$

Bei (*) haben wir die insgesamt 9 Terme nur umgruppiert.

(ii) Nach Definition von R klar.

(iii) Auch $(X, Y, U, V) \mapsto g(R(X, Y)U, V)$ ist $C^\infty(M)$ -linear. Daher reicht es, die Behauptung lokal für Vektoren der Standardbasis nachzuweisen. Daraus folgt sie allgemein, denn wir können aufsummieren, z.B. $g(R(\sum_i \xi^i e_i, Y)U, V) = \sum_i \xi^i g(R(e_i, Y)U, V)$. Machen Sie sich dies klar! Wir schreiben weiterhin X, Y, U, V für die Vektoren der Standardbasis und werden allein benutzen, dass alle ihre Lie-Klammern verschwinden (*).

Zunächst: Ist b irgendeine Bilinearform, so gilt

$$b(Z, Z) = 0 \quad \forall Z \quad \Longleftrightarrow \quad b(X, Y) = -b(Y, X) \quad \forall X, Y \quad (\text{Schiefsymmetrie}).$$

Dabei ist “ \Leftarrow ” klar, während “ \Rightarrow ” aus der Parallelogrammgleichung folgt oder aus

$$b(X, Y) + b(Y, X) = b(X + Y, X + Y) - b(X, X) - b(Y, Y).$$

Also reicht es, zu zeigen $g(R(X, Y)U, U) = 0$. Wir leiten dies her, indem wir zuerst die Verträglichkeitsbedingung von ∇ mit g verwenden:

$$\begin{aligned} g(\nabla_X \nabla_Y U, U) &= \underbrace{\partial_X g(\nabla_Y U, U)}_{=\frac{1}{2}\partial_Y g(U, U)} - \underbrace{g(\nabla_Y U, \nabla_X U)}_{\text{symm. in } X, Y} \\ \Rightarrow \quad 2g(R(X, Y)U, U) &\stackrel{(*)}{=} \partial_X \partial_Y g(U, U) - \partial_Y \partial_X g(U, U) = \partial_{[X, Y]} g(U, U) \stackrel{(*)}{=} 0 \end{aligned}$$

(iv) Wir addieren die vier zyklischen Gleichungen, die wir aus (i) erhalten:

$$\begin{array}{llll} g(R(W, X)Y, Z) + \underline{g(R(X, Y)W, Z)} + g(R(Y, W)X, Z) & = & 0 \\ \underline{g(R(X, Y)Z, W)} + g(R(Y, Z)X, W) + \underbrace{g(R(Z, X)Y, W)}_{-g(R(X, Z)Y, W)} & = & 0 \\ \dots & + & \dots & + \underbrace{g(R(W, Y)Z, X)}_{g(R(Y, W)X, Z)} = 0 \\ \dots & + & \dots & + \underbrace{g(R(X, Z)W, Y)}_{-g(R(X, Z)Y, W)} = 0. \end{array}$$

Nach (iii) heben sich die ersten beiden Spalten zyklisch in Paaren weg wie unterstrichen. In der dritten Spalte haben wir mit (ii)(iii) umgeformt. Das ergibt die gewünschte Summe

$$2g(R(Y, W)X, Z) - 2g(R(X, Z)Y, W) = 0. \quad \square$$

Bemerkung. Wie sich herausstellen wird, sind die metrischen Eigenschaften Riemannscher Mannigfaltigkeiten durch die Jacobi-Gleichung bestimmt, die allein $R(X, Y)Y$ enthält. (Für diesen Ausdruck ist die Bianchi-Identität trivial – warum?) Der folgende Satz zeigt, dass der Ausdruck $R(X, Y)Y$ den ganzen Krümmungstensor bestimmt (sogar punktweise). Aus

meiner Sicht ist der volle Krümmungstensor ein algebraisch gut handhabbares, aber nicht geometrisch bedeutsames Objekt.

Satz 4. *Sei $g: (\mathbb{R}^n)^2 \rightarrow \mathbb{R}$ eine nicht ausgeartete symmetrische Bilinearform und die trilineare Abbildung $R: (\mathbb{R}^n)^3 \rightarrow \mathbb{R}^n$ erfülle die vier Eigenschaften aus Lemma 3. Dann ist $R(X, Y)Z$ bereits eindeutig durch $g(R(X, Y)Y, X)$ bestimmt.*

Beweis. Wir nehmen an

$$g(R'(X, Y)Y, X) = g(R(X, Y)Y, X) \quad \text{für alle } X, Y$$

und müssen $R(X, Y)W = R'(X, Y)W$ für alle X, Y, W zeigen.

Zunächst ist $g(R(X, Y)Y, Z) \stackrel{(ii)(iii)}{=} g(R(Y, X)Z, Y) \stackrel{(iv)}{=} g(R(Z, Y)Y, X)$. Das benutzen wir, um in der folgenden Formel den unterstrichenen Term zu erhalten:

$$\begin{aligned} g(R(X + Z, Y)Y, X + Z) &= g(R(X, Y)Y, X + Z) + g(R(Z, Y)Y, X + Z) \\ &= g(R(X, Y)Y, X) + \underline{2g(R(X, Y)Y, Z)} + g(R(Z, Y)Y, Z). \end{aligned}$$

Das gleiche gilt für R' , wobei nach Annahme die linke Seite und rechts die beiden nicht unterstrichenen Terme übereinstimmen. Also muss auch der unterstrichene Term für R und R' jeweils übereinstimmen. Daher gilt bereits

$$(7) \quad g(R(X, Y)Y, Z) = g(R'(X, Y)Y, Z) \quad \text{für alle } X, Y, Z.$$

Hieraus folgt $g(R(X, Y + W)(Y + W), Z) = g(R' \dots)$. Subtrahieren wir davon laut (7) gleiche Summanden, so verbleibt

$$\begin{aligned} g(R(X, Y)W, Z) + g(R(X, W)Y, Z) &= g(R'(X, Y)W, Z) + g(R'(X, W)Y, Z) \\ (8) \quad \stackrel{(ii)}{\Leftrightarrow} \quad g(R(X, Y)W, Z) - g(R'(X, Y)W, Z) &= g(R(W, X)Y, Z) - g(R'(W, X)Y, Z). \end{aligned}$$

Für jedes Z bleibt also die Differenz, die auf beiden Seiten von (8) auftritt, gleich unter zyklischer Vertauschung der X, Y, W .

Die Bianchi-Identität gilt für R und R' , und so folgt

$$\begin{aligned} 0 &= g(\text{Bianchi}(X, Y, W), Z) - g(\text{Bianchi}'(X, Y, W), Z) \\ &\stackrel{(8)}{=} 3g(R(X, Y)W, Z) - 3g(R'(X, Y)W, Z). \end{aligned}$$

Weil dies für alle Z gilt, folgt $R(X, Y)W = R'(X, Y)W$ gemäß Lemma II.16. □

Um die die Gauß-Krümmung (4) zu verallgemeinern, spezialisieren wir den Krümmungstensor auf Ebenen des Tangentialraumes. Ein Paar Vektoren $X, Y \in T_p M$ heiße *ausgeartet* [*degenerate*] wenn $g_p(X, X)g_p(Y, Y) - g_p(X, Y)^2 = 0$ gilt. Im Riemannschen Fall sind nur linear abhängige Vektoren ausgeartet.

Definition. Sei (M, g) semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit (mit $\dim M \geq 2$). Für $p \in M$ und $X, Y \in T_p M$ nicht ausgeartet ist die *Schnittkrümmung* [sectional curvature]

$$(9) \quad K_p(X, Y) := \frac{g_p(R_p(X, Y)Y, X)}{g_p(X, X)g_p(Y, Y) - g_p(X, Y)^2}.$$

Im Riemannschen Fall gibt der Nenner den Inhalt des von X und Y aufgespannten Parallelogramms an. Er übernimmt nur die Rolle einer Normalisierung, so dass die zweite Behauptung des folgenden Satzes gilt:

Satz 5. (i) Die Schnittkrümmung bestimmt den Krümmungstensor.

(ii) $K_p(X, Y)$ hängt nur vom Schnitt $\sigma := \text{span}\{X_p, Y_p\} \subset T_p M$ ab.

(iii) Ist $\dim M = 2$ und M Riemannsch, so stimmt $p \mapsto K_p(X, Y)$ für beliebige linear unabhängige Vektoren $X, Y \in T_p M$ mit der Gauß-Krümmung $K(p)$ überein.

Wegen (ii) schreiben wir auch $K(\sigma)$ oder $K_p(\sigma)$.

Beweis. (i) Hatten wir bereits durch Satz 4 gezeigt.

(ii) Jede Basistransformation von σ , gegeben durch $(X, Y) \mapsto (X', Y')$, wird erzeugt durch:

a) $(X, Y) \mapsto (Y, X)$

b) $(X, Y) \mapsto (X + Y, Y)$

c) $(X, Y) \mapsto (\lambda X, Y)$ mit $\lambda \neq 0$

Zähler und Nenner von (9) bleiben unter (a) invariant, und werden unter (c) beide mit λ^2 multipliziert. Wegen $R(Y, Y)Z = 0$ nach Lemma 3(ii) bleibt unter (b) der Zähler invariant, und ebenso der Nenner. Also ist $K_p(X, Y) = K_p(X', Y')$.

(iii) Nach (ii) hängt $K_p(X, Y)$ nicht von der Wahl von X, Y ab. Setzen wir speziell $X := e_1$ und $Y := e_2$, so erhalten wir in p

$$K(e_1, e_2) = \frac{g(R(e_1, e_2)e_2, e_1)}{g(e_1, e_1)g(e_2, e_2) - g^2(e_1, e_2)} = \frac{g(R_{122}^1 e_1 + R_{122}^2 e_2, e_1)}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} = \frac{g_{11}R_{122}^1 + g_{21}R_{122}^2}{\det g},$$

was laut (4) gerade die Gauß-Krümmung K ist. \square

17. Vorlesung, 14.12.18

1.4. Mannigfaltigkeiten konstanter Krümmung.

Definition. (i) Eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit (M, g) hat *konstante Krümmung*, wenn es ein $\kappa \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $K_p(\sigma) = \kappa$ für alle $p \in M$ und solche Ebenen $\sigma \subset T_p M$ gilt, die durch nicht ausgeartete Vektoren aufgespannt werden.

(ii) Eine vollständige zusammenhängende Mannigfaltigkeit konstanter Krümmung heißt *Raumform* [space form].

(iii) Ist $K_p(\sigma) < \text{bzw. } > 0$ für alle $p \in M$ und Ebenen $\sigma \subset T_p M$, so sagt man M hat *negative bzw. positive Krümmung*.

Nach Satz 4 ist konstante Krümmung $\kappa = 0$ äquivalent zur Flachheit $R \equiv 0$. Der Raum \mathbb{R}^n und lokal isometrische Räume wie T^n sind Beispiele.

Satz 6. Sei $\kappa \in \mathbb{R}$. Dann hat M genau dann konstante Krümmung κ , wenn

$$(10) \quad R_p(X, Y)Z = \kappa (g_p(Y, Z)X - g_p(X, Z)Y) \quad \text{für alle } p \in M \text{ und } X, Y, Z \in T_p M$$

gilt. Speziell für Dimension 2 gilt weiterhin: M hat die (punktabhängige) Gauß-Krümmung $p \mapsto K(p)$ genau dann, wenn (10) mit $K(p)$ anstelle von κ gilt.

Beweis. “ \Leftarrow ” Aus (10) folgt $R(X, Y)Y = \kappa(g(Y, Y)X - g(X, Y)Y)$ und daraus

$$(11) \quad g(R(X, Y)Y, X) = \kappa(g(X, X)g(Y, Y) - g(X, Y)^2).$$

Der Quotient ergibt die Schnittkrümmung $K(X, Y) = \kappa$, d.h. M hat konstante Krümmung κ .

“ \Rightarrow ” M habe konstante Krümmung κ und einen Krümmungstensor R^M . Wir behaupten: Auch die durch (10) definierte Abbildung R hat ebenfalls die in Lemma 3 angegebenen Eigenschaften eines Krümmungstensors. In der Tat sieht man (ii) sofort und ebenso (iii)(iv), nachdem man (10) in die Metrik eingesetzt hat,

$$g(R(X, Y)U, V) = \kappa(g(Y, U)g(X, V) - g(X, U)g(Y, V)).$$

Weiterhin ergibt sich die Bianchi-Identität für die rechte Seite von (10) aus der Symmetrie von g . Satz 4 ergibt die Identität $R^M = R$.

Der Beweis beider Richtungen ist punktweise. Man kann daher κ durch die Gauß-Krümmung $K(p)$ ersetzen, um ihn auf die Aussage für $n = 2$ zu übertragen. \square

Obwohl Aussage und Beweis des Satzes auch korrekt im nicht-konstanten, punktabhängigen Fall $\kappa = \kappa(p)$ wären, ist dieser Fall nur für $n = 2$ möglich: Ein Satz von Schur (siehe Übungen) besagt für $\dim M \geq 3$: Ist $K_p(\sigma)$ unabhängig von σ , so ist $p \mapsto K_p$ konstant.

Mit etwas Mühe können wir nun immerhin verifizieren:

Satz 7. \mathbb{S}^n hat konstante Krümmung 1, ebenso Quotienten unter diskreter Gruppenoperation wie $\mathbb{R}P^n$.

Beweis. Seien $p, q \in \mathbb{S}^n$. Ist σ Ebene in $T_p \mathbb{S}^n$ und τ Ebene in $T_q \mathbb{S}^n$ so gibt es eine Isometrie $\varphi \in \text{O}(n+1)$ mit $\varphi(p) = q$ und $d\varphi(\sigma) = \tau$. (Tatsächlich gibt es sogar für jedes Paar von Orthonormalbasen in $T_p \mathbb{S}^n, T_q \mathbb{S}^n$ eine Isometrie, die die Vektoren paarweise aufeinander abbildet.) Nun ist die Schnittkrümmung $K_p(\sigma)$ invariant unter Isometrien. Also hat \mathbb{S}^n konstante Krümmung $\kappa \in \mathbb{R}$.

Wir benutzen nun, dass $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ die Schnittkrümmung 1 hat. Das folgt entweder durch Anwendung des theorema egregium, oder indem man Christoffel-Symbole für die stereographische Projektion berechnet.

Der Untervektorraum $U := \text{span}(p, \sigma)$ hat Dimension 3. Daher ist $S := U \cap \mathbb{S}^n$ isometrisch zur 2-Sphäre und hat die konstante Schnittkrümmung 1. Also gilt nach (10) für je drei Vektoren X, Y, Z , die $T_p S$ aufspannen,

$$R_p^S(X, Y)Z = g^S(Y, Z)X - g^S(X, Z)Y.$$

Wir behaupten nun, dass beide Seiten erhalten bleiben, wenn g, R bezüglich \mathbb{S}^n gebildet werden. Aus Satz 6 folgt dann $\kappa = 1$.

Weil die Inklusion $S \subset \mathbb{S}^n$ isometrisch ist, bleibt die rechte Seite unverändert. Für die linke Seite beachten wir, dass auf der Untermannigfaltigkeit $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ die kovariante Ableitung $\nabla_X^{\mathbb{S}^n} Y$ als Tangentialanteil definiert ist:

$$(12) \quad \nabla_X^{\mathbb{S}^n} Y = \Pi(\partial_X Y) = \partial_X Y - \langle \partial_X Y, p \rangle p.$$

Nun ist die Normale p sowohl die Normale von \mathbb{S}^n als auch die Normale an $S \subset U$. Also gilt dieselbe Formel für S wie für \mathbb{S}^n ; das gleiche gilt für die zweiten kovarianten Ableitungen und die Lie-Klammer, die R definieren. \square

Ähnlich kann man auch für den hyperbolischen Raum argumentieren. Durch Berechnen der Christoffelsymbole zeigt man, dass \mathbb{H}^2 Krümmung -1 hat. Weiterhin hat \mathbb{H}^n konstante Krümmung, da die Isometriegruppe transitiv auf Ebenen ist. Es reicht also, die Krümmung von \mathbb{H}^n für eine Ebene zu bestimmen. Nehmen wir einen Unterraum $\mathbb{H}^2 \subset \mathbb{H}^n$, der tangential an diese Ebene ist, so behaupten wir, dass dessen Schnittkrümmung -1 auch die Schnittkrümmung von \mathbb{H}^n ist. Das liegt daran, dass jede total geodätische Untermannigfaltigkeit M einer Mannigfaltigkeit N erfüllt: $\nabla_X^M Y = \nabla_X^N Y$ für alle $X, Y \in \mathcal{V}(M)$ (siehe z.B. Prop. 13 auf p.104 von [ON]).

Bemerkung. 1. Im semi-Riemannschen Fall (mit Index $1 \leq k \leq n-1$) sind Pseudosphären und pseudohyperbolische Räume Beispiele von Mannigfaltigkeiten konstanter Krümmung.

2. Die komplex-projektiven Räume $\mathbb{C}P^n$ (mit der Fubini-Study-Metrik) sind homogene und isotrope (reelle) Riemannsche Mannigfaltigkeiten. Sie haben dennoch eine nicht-konstanter Schnittkrümmung im Intervall $[\frac{1}{4}, 1]$. Insbesondere ist $\text{Isom}(\mathbb{C}P^n)$ nicht transitiv auf Orthonormalbasen des Tangentialraums – sonst wäre ja die Krümmung konstant. Im semi-Riemannschen Fall, bei Index $1 \leq k \leq n-1$, sind solche Beispiele unmöglich, denn eine untere oder obere Schranke an die Schnittkrümmung impliziert bereits, dass die Schnittkrümmung konstant ist (siehe [ON, Prop. 8.28]).

Ich habe den folgenden Abschnitt bearbeitet nach der Vorlesung _____

1.5. Geometrische Eigenschaften des Krümmungstensors. Wir geben hier zwei anschauliche Eigenschaften des Krümmungstensors an.

a) Wir beginnen damit, den flachen Fall zu charakterisieren:

Satz 8. *Eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit (M, g) ist flach ($R = 0$) genau dann, wenn jeder Punkt $p \in M$ eine Umgebung hat, in der die Parallelverschiebung von Vektorfeldern wegunabhängig ist.*

Beweis. „ \Rightarrow “: Sei (x, U) eine Karte von M um $p = x^{-1}(0)$ mit Standardbasis (e_i) und k der Index von g . Wir setzen einen gegebenen Vektor $X(p) \in T_p M$ jeweils durch Parallelverschiebung auf das Bild einer Koordinatenebene fort:

- zuerst längs der Kurven $u^1 \mapsto x^{-1}(u^1, 0, \dots, 0)$,
- dann längs der Kurven $u^2 \mapsto x^{-1}(u^1, u^2, 0, \dots, 0)$.

Nach Konstruktion verschwindet das Vektorfeld $\nabla_{e_2} X$ im Bild der $u^1 u^2$ -Ebene. Wir zeigen nun, dass das Vektorfeld $Y := \nabla_{e_1} X$ ebenfalls dort verschwindet, so dass X längs beliebiger Kurven im Bild der Ebene parallel ist. Die Flachheit von M ergibt

$$(13) \quad 0 = R(e_2, e_1)X \stackrel{e_2, e_1 \text{ Kartenfelder}}{=} \nabla_{e_2} \nabla_{e_1} X - \nabla_{e_1} \nabla_{e_2} X \stackrel{X \text{ parallel}}{=} \nabla_{e_2} \nabla_{e_1} X.$$

Weil Y zudem in den Punkten $x^{-1}(u^1, 0, \dots, 0)$ verschwindet, folgt aus $\nabla_{e_2} Y = 0$, dass tatsächlich Y in allen Punkten $x^{-1}(u^1, u^2, 0, \dots, 0)$ verschwindet.

Setzt man X parallel längs $u^3 \mapsto x^{-1}(u^1, u^2, u^3, 0, \dots, 0)$ fort, so folgt ebenso aus $0 = R(e_3, e_j)X$, dass im Bild $\nabla_{e_j} X = 0$ für $j \leq 3$ ist. Induktion liefert entsprechend eine Fortsetzung von X auf eine Umgebung von p , so dass $\nabla_{e_i} X \equiv 0$ für alle i . Wie zuvor zeigt das, dass X parallel entlang beliebiger Kurve in der Umgebung ist.

„ \Leftarrow “: Hat man für jedes $X(p) \in T_p M$ eine lokal wegunabhängige Parallelverschiebung X , so folgt zunächst $R(e_i, e_j)X = 0$ für alle i, j . Wählt man Felder $X(p)$, die eine Basis durchlaufen, so ergibt dies $R(p) = 0$. \square

Die Größe der Umgebung ist topologisch bedingt: Durch Zusammensetzen von Karten sieht man, dass jede Umgebung funktioniert, die einfach zusammenhängend ist. Die gleiche Bemerkung gilt auch für die folgende Aussage:

Beispiel. Eine nicht einfach zusammenhängende flache Mannigfaltigkeit, für die die Parallelverschiebung nicht global definiert ist, ist der folgende Quotientenraum von $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \ni (z, t)$: Für jedes $\varphi \neq 0 \bmod 2\pi$ erzeugt die Abbildung $(z, t) \mapsto \Phi(z, t) = (e^{i\varphi} z, t+1)$ eine Gruppe $\Lambda = \{\Phi^k : k \in \mathbb{Z}\}$, so dass der Quotient $M := \mathbb{R}^3 / \Lambda$ als eine Schicht der Höhe 1 verstanden werden kann, deren Ränder um φ verdreht identifiziert werden. Zeigen Sie: 1. Die einzige geschlossene Geodätische c in M entspricht der t -Achse. 2. Parallelverschiebung längs jeder Kurve, die homotop zu c ist, ergibt einen Winkel φ bei einem Umlauf.

18. Vorlesung, 19.12.18

Korollar 9. Sei (M, g) semi-Riemannsch mit Krümmungstensor $R \equiv 0$. Dann ist M lokal isometrisch zu $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle_k)$.

Beweis. Sei $p \in M$ und $(X_i(p))$ eine Orthonormalbasis von $T_p M$, d.h.

$$(14) \quad g_p(X_i(p), X_j(p)) = \pm \delta_{ij},$$

mit $+$ genau für die ersten $n - k$ Indices $i = j$. Das Lemma ergibt in einer Umgebung von p definierte parallele Fortsetzungen von jedem X_i . Nach Satz II.15 ist die Abbildung $q \mapsto g_q(X_i, X_j)$ konstant auf $V \ni q$, so dass (14) in einer Umgebung von p gilt.

Für den Levi-Civita-Zusammenhang erhalten wir

$$[X_i, X_j] = \nabla_{X_i} X_j - \nabla_{X_j} X_i \stackrel{X_i, X_j \text{ parallel}}{=} 0.$$

Nach einem Satz der Vorlesung Mannigfaltigkeiten existiert daher eine Karte (y, V) um p mit Standardbasis X_1, \dots, X_n . Genauer ist diese Karte z.B. durch $y^{-1}(u^1, \dots, u^n) := \varphi_n(\dots(\varphi_1(p))\dots)$ gegeben, wobei φ_i der Fluss des Feldes X_i ist.

Wir behaupten, dass y eine lokale Isometrie von M nach $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle_k)$ darstellt. Das folgt aber aus der Gültigkeit von (14) für die Kartenfelder X_i in einer ganzen Umgebung von p . \square

Der Beweis wird durch die Nutzung von etwas mehr Theorie bedeutend einfacher. So kann man z.B. Jacobifelder und Überlagerungstheorie benutzen um das Korollar leicht auf Räume konstanter Krümmung zu übertragen, siehe z.B. [GHL, Thm.3.82].

Die Aussage des Korollars gilt jedoch in noch größerer Allgemeinheit: Stimmen die Schnittkrümmungen zweier Mannigfaltigkeiten überein, so sind sie lokal isometrisch. Genauer vergleicht man die Krümmungen zweier Mannigfaltigkeiten M^n und N^n , indem man bezüglich eines festen Punktepaares $p \in M, q \in N$ die lokal definierte Abbildung $\exp_q^N \circ (\exp_p^M)^{-1}$ betrachtet, wobei Vektorfelder mittels Parallelverschiebung nach $T_p M = T_q M = (\mathbb{R}^n, \delta)$ zurückbefördert werden. In diesem Sinne ist die Schnittkrümmung die einzige lokale Isometrie-Invariante einer semi-Riemannschen Mannigfaltigkeit von gegebenem Index.

b) Im allgemeinen ist der Krümmungstensor ein infinitesimales Maß der Wegabhängigkeit der Parallelverschiebung. Um dies zu präzisieren, wählen wir als Daten $p \in M$ und $X, Y, Z \in \mathcal{V}(M)$. Dazu sei f eine auf einer Umgebung V von $0 \in \mathbb{R}^2$ erklärte Abbildung mit Werten in M , so dass $f(0) = p$ und $\frac{\partial f}{\partial x}|_p = X(p)$ und $\frac{\partial f}{\partial y}|_p = Y(p)$. Wir betrachten nun das Bild eines in V enthaltenen kleinen Rechtecks $\square_{s,t}$; es soll die linke untere Ecke in 0 haben, sowie Kantenlängen s in x -Richtung und t in y -Richtung.

Wir nehmen nun den Vektor $Z(p)$ und verschieben ihn parallel längs des Randes von $f(\square_{s,t})$; genauer gesagt machen wir dies nacheinander entlang der vier glatten Seiten des Bild-Rechtecks. Das Ergebnis dieser Parallelverschiebung sei der Vektor $Z(s, t) \in T_p M$.

Satz 10. *Es gilt*

$$(15) \quad R(X, Y)Z = \lim_{(s,t) \rightarrow 0} \frac{Z(s, t) - Z(p)}{st}.$$

Gilt also $R_p(X, Y)Z \neq 0$, so führt die Parallelverschiebung von Z längs eines geeignet kleinen Rechtecks $f(\partial \square_{s,t})$ mit Ecke in p tatsächlich zu einem von Z verschiedenen Vektor; sie ist insbesondere wegababhängig.

Beweisidee. Wie im Beweis von Satz 8 setzt man $Z(p)$ fort zu einem Feld \tilde{Z} , so dass

$$\tilde{Z}(p) = Z(p), \quad t \mapsto \tilde{Z}_{f(0,t)} \text{ parallel}, \quad s \mapsto \tilde{Z}_{f(s,t)} \text{ parallel}.$$

Wie in (13) folgt aus Parallelität und Kartenfeldern dann $R_p(X, Y)Z = (\nabla_X \nabla_Y \tilde{Z})(p)$. Man kann die Behauptung nun durch Nachrechnen zeigen, indem man die beiden kovarianten Ableitungen durch Differenzenquotienten ersetzt, siehe Satz II.14. \square

2. TENSOREN

Der Tensorkalkül ist die technische Grundlage der Riemannschen Geometrie. Da wir mittlerweile einer Reihe von Tensoren begegnet sind und wir andererseits im nächsten Abschnitt die Ricci-Krümmung als eine mittels Tensorkalkül definierte Krümmungsgröße benötigen, schieben wir an dieser Stelle ein Kapitel ein, das mit gutem Grund auch schon viel früher hätte behandelt werden können.

Neben der Ricci-Krümmung ergeben sich durch Tensoroperationen invariante Differentialoperatoren wie etwa der Laplace-Operator, die Grundlage der geometrischen Analysis sind; allerdings werden wir sie in dieser Vorlesung leider nicht mehr weiter verwenden. Eine explizite Quelle für die nächsten drei Abschnitte ist [ON, Kap. 2 und 3].

2.1. Multilineare Algebra. Wir beginnen mit den punktweisen Eigenschaften von Tensorfeldern, also mit Vektorraumtheorie. Es sei V ein n -dimensionaler Vektorraum und V^* der Dualraum der Kovektoren. Für $r, s \geq 0$ heißt eine Abbildung $T: (V^*)^r \times V^s \rightarrow \mathbb{R}$ ein (r, s) -Tensor, wenn T *multilinear* ist, d.h. \mathbb{R} -linear in jedem Argument. Die Menge dieser Abbildungen sei $\mathcal{T}^{(r,s)}(V)$, wobei $\mathcal{T}^{(0,0)}(V) := \mathbb{R}$.

Beispiele. 1. Jede Bilinearform $(v, w) \mapsto b(v, w)$ ist $(0, 2)$ -Tensor.

2. Die Determinante $(v_1, \dots, v_n) \mapsto \det(v_1, \dots, v_n)$ ist ein $(0, n)$ -Tensor, und jede k -Form ist $(0, k)$ -Tensor.

3. Die Auswertung $(w^*, v) \mapsto w^*(v)$ ist $(1, 1)$ -Tensor.

Bemerkungen. 1. Basisdarstellungen wie $b(v_1, v_2) = \sum_{ij} b_{ij} v_1^i v_2^j$ kann man auch für beliebige Tensoren angeben. Sei (e_i) eine Basis von V und (e^j) eine Basis von V^* . Schreiben wir jedes $v \in V$ und $w \in V^*$ als Linearkombination, z.B. $v = \sum v^i e_i$, so erhalten wir allein unter Benutzung der Multilinearität für einen (r, s) -Tensor T die Darstellung

$$\begin{aligned} T(w^1, \dots, w^r, v_1, \dots, v_s) &= T\left(\sum_{i_1=1}^n w_{i_1}^1 e^{i_1}, \dots, \sum_{j_s=1}^n v_s^{j_s} e_{j_s}\right) \\ &= \sum_{\substack{1 \leq i_1, \dots, i_r \leq n \\ 1 \leq j_1, \dots, j_s \leq n}} T(e^{i_1} \dots e^{i_r}, e_{j_1} \dots e_{j_s}) w_{i_1}^1 \dots w_{i_r}^r v_1^{j_1} \dots v_s^{j_s} =: \sum_{\substack{1 \leq i_1, \dots, i_r \leq n \\ 1 \leq j_1, \dots, j_s \leq n}} T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} w_{i_1}^1 \dots w_{i_r}^r v_1^{j_1} \dots v_s^{j_s}, \end{aligned}$$

wobei die Koeffizienten durch termweise Gleichheit definiert sind. Ein Tensor ist damit eine Multilinear kombination, eine Summe von Produkten. Eleganter wird die Basisschreibweise in Multiindex-Notation $T(w^I, v_J) = \sum_{I,J} T_J^I w_I v_J$. Die Anzahl der Koeffizienten ergibt sofort die Dimension $\dim \mathcal{T}^{(r,s)} = n^{r+s}$.

2. Das *Tensorprodukt* \otimes ist eine Operation, die aus einem (r, s) -Tensor T und einem (r', s') -Tensor T' den $(r + r', s + s')$ -Tensor $(T \otimes T')(\dots) := T(\dots)T'(\dots)$ macht; ist (r, s) oder (r', s') gleich $(0, 0)$, so läßt man das Tensorzeichen fort. Basiselemente von $\mathcal{T}^{(r,s)}(V)$ kann man damit in der Form $e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_r} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_s} =: e_I \otimes e^J$ angeben. Ist (e^j) duale Basis zu (e_i) , also $e^j(e_i) = \delta_i^j$, so gilt offenbar $T = \sum_{I,J} T_J^I e_I \otimes e^J$.

3. Die *Kontraktion* macht aus einem (r, s) -Tensor T für jede Wahl von $1 \leq a \leq r$ und $1 \leq b \leq s$ einen $(r - 1, s - 1)$ -Tensor $c_b^a T$. Dazu wird der a -te Kovektor bzw. b -te Vektor durch e^k bzw. das duale Basiselement e_k ersetzt und dann summiert:

$$(c_b^a T)(w^1 \dots w^{r-1}, v_1 \dots v_{s-1}) := \sum_k T(w^1 \dots w^{a-1}, e^k, w^a \dots w^{r-1}, v_1 \dots v_{b-1}, e_k, v_b \dots v_{s-1})$$

Man kann zeigen, dass Kontraktion nicht von der gewählten Basis abhängt (Übung). Offenbar hat $c_b^a T$ gerade die Koeffizienten

$$(c_b^a T)_{j_1 \dots j_{s-1}}^{i_1 \dots i_{r-1}} = \sum_{k=1}^n T_{j_1 \dots j_{b-1} k j_b \dots j_{s-1}}^{i_1 \dots i_{a-1} k i_a \dots i_{r-1}}.$$

4. Es gibt einen Isomorphismus (Übung)

$$\Phi: \{A: V^s \rightarrow V : A \text{ multilinear}\} \rightarrow \mathcal{T}^{(1,s)}(V), \quad (\Phi(A))(w, v_1, \dots, v_s) := w(A(v_1, \dots, v_s)).$$

Beschränken wir uns auf den einfachsten Fall, den Isomorphismus $\Phi: \text{End}(V) \rightarrow \mathcal{T}^{(1,1)}(V)$ mit $T(w, v) := w(Av)$. Die Basis-Darstellungen von A und $T = \Phi(A)$ stimmen überein: Ist $A(e_j) = \sum_i A_j^i e_i$, so folgt aus $e^k(e_i) = \delta_i^k$, dass

$$T(w^*, v) = w^*(Av) = \sum_{i,j,k} w_k e^k(A_j^i v^j e_i) = \sum_{i,j} A_j^i v^j w_i, \quad \text{also } (\Phi(A))_j^i = A_j^i.$$

Daher ist es sinnvoll, Φ als Identifikation aufzufassen. Die Spur eines Endomorphismus $A \in \text{End}(V)$ entspricht gerade der Kontraktion eines Tensors $T = \Phi(A) \in \mathcal{T}^{(1,1)}(V)$:

$$\text{Spur } A = \sum_k a_k^k = \sum_k e^k \left(\sum_i a_k^i e_i \right) = \sum_k e^k A(e_k) = \sum_k T(e^k, e_k) = c_1^1 T$$

Weil die Spur einer Matrix nicht von der gewählten Basis abhängt, zeigt dies, dass die Kontraktion $c_1^1 T$ basis-unabhängig definiert ist; diese Feststellung folgt sofort für beliebige Kontraktionen beliebiger Tensoren, indem man alle übrigen Einträge fixiert. Der basis-unabhängige Isomorphismus existiert in größerer Allgemeinheit, z.B.

$$\mathcal{T}^{(r+1,s)} \cong \{A : (V^*)^r \times V^s \rightarrow V : A \text{ multilinear}\}.$$

5. *Kovarianz* und *Kontravarianz* sind Begriffe, die sich auf das Transformationsverhalten von Vektoren beziehen. Betrachten wir zuerst V . Seien (e_i) und (f_i) Basen und $v = \sum_j \xi^j e_j = \sum_i \eta^i f_i$. Bezüglich der Basistransformation $f_i = \sum_j a_i^j e_j$ für $A = (a_i^j) \in \text{GL}(V)$ gilt dann

$$(16) \quad \xi^j = \sum_i \eta^i a_i^j \quad \Leftrightarrow \quad \xi = A^t \eta \quad \Leftrightarrow \quad \eta = (A^t)^{-1} \xi.$$

Betrachten wir dagegen einen Kovektor mit Basis-Darstellungen $w^* = \sum_i \alpha_i e^i = \sum_j \beta_j f^j$, bezüglich der dualen Basen (e^i) bzw. (f^j) . Einsetzen von v ergibt

$$w^*(v) = \sum_{ij} \alpha_i e^i(\xi^j e_j) = \sum_i \alpha_i \xi^i \stackrel{\text{analog}}{=} \sum_i \beta_i \eta^i \quad \Rightarrow \quad \alpha^t \xi = \beta^t \eta.$$

Also transformieren sich die Koordinaten α, β von w^* wie folgt:

$$(17) \quad \alpha^t \xi = \alpha^t (A^t \eta) \quad \Leftrightarrow \quad \beta^t = \alpha^t A^t \quad \Leftrightarrow \quad \beta = A \alpha$$

Weil sich Elemente von V^* oder von $\mathcal{T}^{(0,s)}$ mit A transformieren, nennt man sie kovariant. Sie werden mit unteren Indizes notiert. Die sich in der umgekehrten Richtung mit $(A^t)^{-1}$ transformierenden Elemente von V (obere Indices) oder $\mathcal{T}^{(t,0)}$ heißen kontravariant. (Siehe en.wikipedia.org/wiki/Covariance_and_contravariance_of_vectors für ausführlichere Erklärungen im Kontext der Physik.)

2.2. Tensorfelder. Lässt man Tangentialvektoren von Fußpunkten abhängen, so erhält man Vektorfelder. Genauso führen Tensoren auf Tensorfelder:

Definition. Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Ein (r, s) -Tensorfeld T ist eine in jedem Eintrag $C^\infty(M)$ -lineare Abbildung

$$T : (\mathcal{V}(M)^*)^r \times \mathcal{V}(M)^s \rightarrow C^\infty(M).$$

Die Menge dieser Abbildungen sei $\mathcal{T}^{(r,s)}(M)$, wir setzen $\mathcal{T}^{(0,0)}(M) := C^\infty(M)$.

Ein Tensorfeld macht also aus s Vektorfeldern und r Dualvektorfeldern (Eins-Formen) eine Funktion. Wie wir schon beim Krümmungstensor gesehen haben, ist die entscheidende Eigenschaft die $C^\infty(M)$ -Multilinearität. Indem wir Bemerkung 4 von Tensoren auf Tensorfelder übertragen, können wir identifizieren

$$(18) \quad \{A: \mathcal{V}(M)^s \rightarrow \mathcal{V}(M): A \text{ ist } C^\infty(M)\text{-multilinear}\} \cong \mathcal{T}^{(1,s)}(M).$$

Der Spezialfall $s = 0$ ergibt für Vektorfelder $X \in \mathcal{V}(M)$, dass $T := \Phi(X) \in \mathcal{T}^{(1,0)}(M)$, wobei $T(\omega) \cong \omega(X)$.

Beispiele. (i) Die semi-Riemannsche Metrik oder der *metrische Tensor* $g \in \mathcal{T}^{(0,2)}(M)$.

(ii) $g(R(W, X)Y, Z)$ ist $(0, 4)$ -Tensorfeld, während sich R selbst nach (18) mit einem $(1, 3)$ -Tensorfeld identifizieren lässt.

(iii) Dagegen ist die Abbildung $(X, Y, Z) \mapsto g(\nabla_X Y, Z)$ kein $(0, 3)$ -Tensorfeld; jedoch ist für jedes feste Y die Abbildung $(X, Z) \mapsto g(\nabla_X Y, Z)$ ein $(0, 2)$ -Tensorfeld.

Anders als für Derivationen gilt:

Satz 11. *Sei $T \in \mathcal{T}^{(r,s)}$ Tensorfeld. Dann hängt der Wert $T_p(\omega^1, \dots, \omega^r, X_1, \dots, X_s) \in \mathbb{R}$ nur ab von den punktweisen Werten $\omega^1(p), \dots, \omega^r(p), X_1(p), \dots, X_s(p)$.*

Eine wichtige Konsequenz ist, dass man für Tensorfelder genau die gleiche Basisdarstellung hat wie für Tensoren, allein, dass Koeffizienten sowie Vektoren und Kovektoren nun vom Fußpunkt abhängen:

$$T_p(\omega^1, \dots, \omega^r, X_1, \dots, X_s) = \sum_{\substack{1 \leq i_1, \dots, i_r \leq n \\ 1 \leq j_1, \dots, j_s \leq n}} T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}(p) \omega_{i_1}^1(p) \cdots \omega_{i_r}^r(p) X_1^{j_1}(p) \cdots X_s^{j_s}(p)$$

Lokal, bezüglich einer Karte (x, U) , lautet die Tensorproduktschreibweise

$$T = \sum T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_r} \otimes e^{j_1} \otimes \cdots \otimes e^{j_s} = \sum T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial x_{i_r}} \otimes dx^{j_1} \otimes \cdots \otimes dx^{j_s}.$$

Aufgrund des Satzes kann man diese lokale Darstellung punktweise herleiten.

Beweis. Wir zeigen dies für einen $(0, 1)$ -Tensor, der allgemeine Fall geht genauso. Für zwei Vektorfelder X, Y mit $X(p) = Y(p)$ ist dann zu zeigen $T_p(X) = T_p(Y)$.

Falls ganz M in einer Karte liegt, so erhält man für die lokalen Darstellungen $X = \sum_i \xi^i e_i$ und $Y = \sum_i \eta^i e_i$ mit $\eta^i(p) = \xi^i(p)$ aus der $C^\infty(M)$ -Linearität

$$(19) \quad T_p X = T_p \left(\sum_i \xi^i e_i \right) = \sum_i \xi^i(p) T_p e_i = \sum_i \eta^i(p) T_p e_i = T_p Y.$$

Ist jedoch (x, U) eine Karte um p aus einem Atlas, so können wir die $C^\infty(M)$ -Linearität erst benutzen, nachdem wir folgendermaßen mit einer Hutfunktion f multipliziert haben.

Für $f \in C^\infty(M)$ mit kompaktem Träger in U und $f(p) = 1$ erhalten wir durch Fortsetzung mit 0 außerhalb von U die Funktionen $f\xi^i, f\eta^i \in C^\infty(M)$ und Vektorfelder $f e_i \in \mathcal{V}(M)$. Ersetzen wir nun ξ^i, η^i, e_i in (19) durch diese Produkte, so ergibt $f(p) = 1$ dasselbe Resultat. \square

Die Ko- bzw. Kontravarianz beschreibt im Tensorfeld-Fall das Verhalten unter Kartenwechsel. Es seien (x, U) und (y, V) zwei Karten um $p \in M$ und $y \circ x^{-1}: x(U) \rightarrow y(U)$ der Kartenwechsel. Ist (e_i) die Standardbasis von x und (f_i) die von y , so dass X die Darstellungen $X = \sum_i \xi^i e_i = \sum_j \eta^j f_j$ hat, so gilt laut I(1)

$$(20) \quad \eta = d(y \circ x^{-1})\xi \quad \text{bzw.} \quad \eta^j = \sum_i \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \xi^i,$$

wobei wir rechts die Kurzschreibweise $\frac{\partial y^j}{\partial x^i} := \partial_i(y \circ x^{-1})^j$ verwendet haben; die Jacobimatrix entspricht also der Matrix $(A^t)^{-1}$ aus (16). Kovektorfelder haben Koordinatenvektoren, die sich gemäß (17) mit der Transponierten der Inversen der Jacobimatrix transformieren, bei Notation analog zu (17) also wie $\beta = d(x \circ y^{-1})^t \alpha$.

20. Vorlesung, 21.12.18

2.3. Riemannsche Tensorkonstruktionen. Gegeben eine semi-Riemannsche Metrik, wollen wir die musikalischen Isomorphismen einsetzen: Vektorfelder $\mathcal{V}(M)$ und 1-Formen $\Lambda^1(M)$ sind basis-unabhängig isomorph, siehe Lemma II.16. Dies induziert Isomorphismen von Tensoren verschiedener Typen, z.B. $\mathcal{T}^{(r+s,0)}(M) \leftrightarrow \mathcal{T}^{(r,s)}(M) \leftrightarrow \mathcal{T}^{(s,r)}(M) \leftrightarrow \mathcal{T}^{(0,r+s)}(M)$: Man muss nur ein Vektorfeld X durch die Form $\omega(\cdot) = g(X, \cdot)$ ersetzen, bzw. umgekehrt.

Wir geben ein Beispiel für den Isomorphismus $\mathcal{T}^{(0,1)}(M) \leftrightarrow \mathcal{T}^{(1,0)}(M) \cong \mathcal{V}(M)$:

Definition. Der Riemannsche *Gradient* $\text{grad}: C^\infty(M) \rightarrow \mathcal{V}(M)$ wird für $f \in C^\infty(M)$ durch jede der folgenden Eigenschaften eindeutig bestimmt:

- Global durch $\text{grad } f = (df)^\sharp$, d.h. für $\text{grad } f$ und die 1-Form df gilt gemäß Lemma II.16:

$$(21) \quad df(X) = g(\text{grad } f, X) \quad \text{für alle } X \in \mathcal{V}(M).$$

- Oder lokal gemäß II(26) durch Indexhebung $(\text{grad } f)^j = \sum_i g^{ij} \partial_i f$ bzw.

$$(22) \quad \text{grad } f = \sum_{ij} g^{ij} \partial_i f e_j.$$

Für die Standardmetrik auf \mathbb{R}^n ergibt sich die bekannte Formel. Auch Riemannsch gibt der Gradient die Richtung des steilsten Anstiegs von f an (Übung?).

Als zweites Beispiel behandeln wir die Tensortypumwandlung für die Weingartenabbildung $S_p \in \text{End}(T_p M)$, aus der wir die zweite Fundamentalform $b \in \mathcal{T}^{(0,2)}$ einer Hyperfläche $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ gewinnen wollen.

Allerdings entspricht das erst dann dem hier vorgestellten Tensorkalkül, Hier müssen wir zuerst den Isomorphismus Φ einsetzen. Es ist $\Phi(S) \in \mathcal{T}^{1,1}(M)$ definiert durch $\Phi(S)(\omega, Y) = \omega(SY)$. Um daraus ein $(2,0)$ -Tensorfeld zu machen, müssen wir den musikalischen Isomorphismus auf das Argument $\omega = X^\flat$ anwenden

$$\Phi(S)^\flat(X, Y) := \Phi(S)(X^\flat, Y) = X^\flat(SY) = g(X, SY) = b(X, Y).$$

Der betrachtete Spezialfall legt nahe, wie man die Tensortypumwandlung definieren muss; dabei behandeln wir nur einen der vielen möglichen Fälle:

Definition. Sei $T \in \mathcal{T}^{(r,s)}$. Dann ist $T^\flat \in \mathcal{T}^{(0,r+s)}$ definiert durch argumentweise Anwendung von \flat , also

$$T^\flat(X_1, \dots, X_r, X_{r+1}, \dots, X_{r+s}) := T(X_1^\flat, \dots, X_r^\flat, X_{r+1}, \dots, X_{r+s})$$

Im Beispiel der Weingartenabbildung S könnten wir auch direkt das Bild $SX \in \mathcal{V}(M)$ umwandeln: Für festes $X \in \mathcal{V}(M)$ könnten wir (ohne Benutzung von Φ) definieren $((SX)^\flat)(Y) = g(SX, Y) = b(X, Y)$, wobei wir $b(X, \cdot) \in \Lambda^1(M)$ verstehen. Wie erwartet entsteht dann b aus S durch Index-Senken, $\sum g_{ij} S_k^i = b_{jk}$. Die lokale Darstellung stimmt mit der für $(\Phi(S)^\flat)$ überein.

Wir wollen nun darstellen, wie man musikalische Isomorphismen einsetzen kann, um die Kontraktion eines Tensors auch dann zu definieren, wenn man über zwei Einträge des gleichen Typs kontrahieren möchte, also zweimal kovariant oder zweimal kontravariant.

Sehen wir uns diese Kontraktion zuerst am Beispiel an. Für die zweite Fundamentalform (b_{ij}) ist $c_{12}b$ lokal durch Index-Hebung definiert:

$$c_{12}b := c_1^1(b^\sharp) = c_1^1\left(\left(\sum_j g^{ij} b_{jk}\right)_{ik}\right) = \sum_{ij} g^{ij} b_{ji} = \sum_i S_i^i = c_1^1 \Phi(S) = nH.$$

Um die nötige Hebung zu vermeiden, arbeite ich lieber mit S statt mit b . Beachten Sie: Würde man direkt summieren, $\sum_i b_{ii}$, wäre das Ergebnis koordinatenabhängig und damit unbrauchbar.

Zur Vereinfachung betrachten wir im Folgenden nur den Fall $r = 0$.

Definition. Sei $T \in \mathcal{T}^{(0,s)}$ mit $s \geq 2$. Die *Riemannsche Kontraktion* oder *Spurbildung*

$$c_{ab}T \in \mathcal{T}^{(0,s-2)}(M), \quad 1 \leq a < b \leq s,$$

wird äquivalent auf jede der folgenden Weisen definiert:

(i) Der musikalischen Isomorphismus \flat , angewendet auf das b -te Argument, liefert einen Tensor $\tilde{T} \in \mathcal{T}^{(1,s-1)}$. Dann sei $c_{ab}T := c_a^1 \tilde{T}$.

(ii) Durch die Koordinaten-invariante lokale Darstellung

$$(23) \quad (c_{ab}T)_{j_1 \dots j_{s-2}} := \sum_{k, \ell=1}^n g^{k\ell} T_{j_1 \dots k \dots \ell \dots j_{s-2}}.$$

Dabei stehen rechts k bzw. ℓ in den Positionen a bzw. b (aus 1 bis s).

(iii) Sei (E_k) ein *orthonormaler Rahmen* [frame] von $\mathcal{V}(U)$ für $U \subset M$ offen, also $g(E_i, E_j) = \pm \delta_{ij}$, so gilt für jeden Punkt aus U

$$(c_{ab}T)(X_1, \dots, X_{s-2}) := \sum_{k=1}^n \pm T(X_1, \dots, E_k, \dots, E_k, \dots, X_{s-2});$$

dabei stehen rechts insgesamt s Einträge, wobei E_k an die a -te und b -te Position eingeschoben ist.

Die Darstellung (iii) ist am übersichtlichsten und wird besonders häufig verwendet. Weil musikalische Isomorphismen und Kontraktionen C^∞ -linear sind, und damit Tensorfelder erhalten, erhält auch die Riemannsche Kontraktion (i) Tensorfelder. Wir überzeugen uns noch, dass die Darstellungen (ii) und (iii) zu (i) äquivalent sind.

Hebt man den b -ten Index von $T \in \mathcal{T}^{(0,s)}(M)$, so erhält man $\tilde{T} \in \mathcal{T}^{(1,s-1)}$ mit Koeffizienten

$$\tilde{T}_{j_1 \dots j_{s-1}}^k = \sum_{\ell} g^{k\ell} T_{j_1 \dots \ell \dots j_{s-1}}.$$

Wir kontrahieren über den a -ten Eintrag und erhalten $c_a^1 \tilde{T} \in \mathcal{T}^{(0,s-2)}(M)$ in der behaupteten Darstellung (23)

$$(c_a^1 \tilde{T})_{j_1 \dots j_{s-2}} = \sum_{k=1}^n \tilde{T}_{j_1 \dots k \dots j_{s-2}}^k = \sum_{k, \ell=1}^n g^{k\ell} T_{j_1 \dots k \dots \ell \dots j_{s-2}}.$$

Aus $g_{kl}(p) = g(E_k, E_l) = \pm \delta_{kl}$ folgt $g^{kl}(p) = \pm \delta^{kl}$. Daher folgt (iii) sofort aus (ii). Ein orthonormaler Rahmen E_k existiert stets lokal (warum?).

2.4. Kovariante Ableitung von Tensorfeldern. Wenn man sich vergegenwärtigt, dass Tensorfelder lokal Multilinear kombinationen sind, wird klar, dass sie gemäß der Produktregel zu differenzieren sind. Gegeben ein Zusammenhang ∇ auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit, ist daher folgende Definition plausibel (die wir, abgesehen von einem Fall, nur für $r = 0$ benötigen):

Definition. Die *kovariante Ableitung* einer 1-Form $\omega \in \mathcal{T}^{(1,0)}(M)$ ist das Feld $\nabla\omega$ mit $\partial_X(\omega(Y)) = (\nabla_X\omega)(Y) + \omega(\nabla_X Y)$. Im Allgemeinen sei $\nabla: \mathcal{T}^{(r,s)}(M) \rightarrow \mathcal{T}^{(r,s+1)}(M)$ definiert durch

(24)

$$\begin{aligned} \partial_X T(\omega^1, \dots, \omega^r, Y_1, \dots, Y_s) &= \nabla T(\omega^1, \dots, \omega^r, Y_1, \dots, Y_s, X) \\ &+ \sum_{i=1}^r T(\omega^1, \dots, \nabla_X \omega^i, \dots, \omega^r, Y_1, \dots, Y_s) + \sum_{j=1}^s T(\omega^1, \dots, \omega^r, Y_1, \dots, \nabla_X Y_j, \dots, Y_s). \end{aligned}$$

Wir schreiben auch $(\nabla_X T)(\omega^1, \dots, \omega^r, Y_1, \dots, Y_s)$ für den ersten Term rechts. Ist $\nabla T = 0$, so sagen wir der Tensor T ist *parallel*.

Bemerkung. Dieselbe Definition kann man auch im vektorwertigen Fall treffen, also für $\mathbb{C}^\infty(M)$ -multilineare Abbildungen $T: (\Lambda^1(M))^r \times (\mathcal{V}(M))^s \rightarrow \mathcal{V}(M)$, sofern man links ∂_X durch ∇_X ersetzt.

Satz 12. Eine semi-Riemannsche Metrik g ist genau dann parallel ($\nabla g = 0$), wenn ∇ mit der Metrik verträglich ist.

Beweis. Nach (24) gilt: $\partial_Z(g(X, Y)) = (\nabla g)(X, Y, Z) + g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y)$ □

Ein anderes Beispiel eines parallelen Tensors ist die 90°-Drehung J im zweidimensionalen Riemannschen Fall.

Formal muss man noch die Wohldefiniertheit von (24) überprüfen, also dass ∇T wieder $\mathbb{C}^\infty(M)$ -multilinear ist. Der Einfachheit halber zeigen wir dies nur am Beispiel $T = g$:

$$\begin{aligned} (\nabla g)(fX, Y, Z) &= \partial_Z \underbrace{g(fX, Y)}_{fg(X, Y)} - g(\nabla_Z(fX), Y) - g(fX, \nabla_Z Y) \\ &= (f \partial_Z g(X, Y) + g(X, Y) \partial_Z f) - (fg(\nabla_Z X, Y) + g((\partial_Z f)X, Y)) - fg(X, \nabla_Z Y) \\ &= f(\nabla_Z g)(X, Y) \end{aligned}$$

Übung. Kovariantes Ableiten vertauscht mit Kontraktion

Im semi-Riemannschen Fall bedeutet die Parallelität $\nabla g = 0$, dass der metrische Tensor verschwindende Ableitung hat. In lokalen Formeln bedeutet das, dass g_{ij} beim kovarianten Ableiten wie eine Konstante behandelt werden kann. Insbesondere haben musikalische Isomorphismen, also das Heben und Senken von Indizes, keine Auswirkungen auf die kovariante Ableitung, d.h. sie kommutieren mit ihr, $(\nabla T)^b := \nabla(T^b)$.

Wir werden noch die kovariante Ableitung der Weingartenabbildung $S: \mathcal{V}(M) \rightarrow \mathcal{V}(M)$ einer Hyperfläche M benötigen. Aus (24), zusammen mit der Bemerkung, ergibt sich

$$(25) \quad (\nabla_Z S)X = \nabla_Z(SX) - S(\nabla_Z X) \quad \text{für } X, Z \in \mathcal{V}(M).$$

Die Tensorableitung von S können wir auch als Tensorableitung von b deuten, indem wir $b(X, Y) = g(SX, Y)$ einsetzen:

$$\begin{aligned}
 (\nabla_Z b)(X, Y) &\stackrel{(24)}{=} \partial_Z(b(X, Y)) - b(\nabla_Z X, Y) - b(X, \nabla_Z Y) \\
 (26) \quad &\stackrel{\nabla g=0}{=} \left(g(\nabla_Z(SX), Y) + g(SX, \nabla_Z Y) \right) - g(S(\nabla_Z X), Y) - g(SX, \nabla_Z Y) \\
 &\stackrel{(25)}{=} g((\nabla_Z S)X, Y).
 \end{aligned}$$

21. Vorlesung, 16.1.19

2.5. Riemannsche Differentialoperatoren div und Δ . Divergenz und Laplace-Operator sind bereits in \mathbb{R}^n aus zwei Gründen interessant: Sie haben eine hohe Invarianz, z.B. sind sie drehinvariant (isotrop), was man den Definitionen $\operatorname{div} V = \sum_i \partial_i V^i$ und $\Delta f = \sum_i \partial_{ii} f$ nicht direkt ansieht. Indem wir diese Operatoren als Spurbildungen auffassen, wird diese Eigenschaft aber ohne weitere Rechnung klar werden.

Sicherlich erhält man Riemannsche, Koordinaten-invarianten Operatoren, indem man

- erste partielle Ableitungen durch kovariante Ableitungen ersetzt, $\partial_i V \rightsquigarrow \nabla_{e_i} V$,
- und i -te Komponenten durch $g(\cdot, e_i)$.

Das Ergebnis ist:

Definition. Sei (M, g) semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit.

(i) Die (Riemannsche) Divergenz von $V \in \mathcal{V}(M)$ ist die Kontraktion des $(0, 2)$ -Tensors $X, Y \mapsto g(\nabla_X V, Y)$, also

$$\operatorname{div}: \mathcal{V}(M) \rightarrow C^\infty(M), \quad \operatorname{div} V := \sum_k g(\nabla_{E_k} V, E_k) \quad \text{für } (E_k) \text{ orthonormal.}$$

(ii) Der Laplace-Beltrami-Operator ist

$$\Delta: C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M), \quad \Delta f := \operatorname{div} \operatorname{grad} f.$$

Diese Operatoren sind Koordinaten-invariant definiert und spezialisieren sich auf die wohl-bekannten Ausdrücke im euklidischen Fall.

Wir wollen die Divergenz in allgemeinen Koordinaten angeben. Aus der lokalen Darstellung

$$\nabla_X V = \sum_{ir} (X^i \partial_i V^r + \sum_j \Gamma_{ij}^r X^j V^r) e_r$$

erhält man $\nabla_{e_k} V = \sum_r (\partial_k V^r + \sum_j \Gamma_{kj}^r V^j) e_r$. Mit der allgemeinen Formel (23) sowie der Identität $\sum_\ell g^{k\ell} g(e_r, e_\ell) = \sum_\ell g^{k\ell} g_{r\ell} = \delta_r^k$ ergibt sich folgende lokale Darstellung der Riemannschen Divergenz:

$$\operatorname{div} V = \sum_{k,\ell} g^{k\ell} g(\nabla_{e_k} V, e_\ell) = \sum_{k,\ell,r} g^{k\ell} \left(\partial_k V^r + \sum_j \Gamma_{kj}^r V^j \right) g(e_r, e_\ell) = \sum_k \left(\partial_k V^k + \sum_j \Gamma_{kj}^k V^j \right)$$

Um den Laplace-Operator als Riemannsche Kontraktion zu verstehen, definieren wir die *Riemannsche Hesse-Form* [Hessian] von $f \in C^\infty(M)$ als den $(0, 2)$ -Tensor

$$(X, Y) \mapsto H_f(X, Y) := g(\nabla_X(\text{grad } f), Y).$$

Offenbar ist Δ die Riemannsche Kontraktion der Hesse-Form,

$$\Delta f = c_{12} H_f = \sum_k H_f(E_k, E_k) \quad \text{für } (E_k) \text{ orthonormal.}$$

Schreibt man H_f mithilfe von Lie-Ableitungen (Übung), so wird die Symmetrie der Hesse-Form klar, und man erhält die lokale Darstellung

$$(27) \quad \Delta f = \sum_{ij} g^{ij} \left(\partial_{ij} f - \sum_k \Gamma_{kj}^k \partial_i f \right).$$

Durch Rechnung gewinnt man die folgenden oft verwendeten lokalen Darstellungen von div und Δ , wobei $g := |\det(g_{ij})|$ sei (siehe Übungen):

$$\text{div } V = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_k \partial_k (\sqrt{g} V^k), \quad \Delta f = \sum_{ij} \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_i (\sqrt{g} g^{ij} \partial_j f)$$

Wir können an dieser Stelle nur darauf hinweisen, dass sich Sätze wie der Divergenzsatz wörtlich auf Riemannsche Mannigfaltigkeiten verallgemeinern, so dass zahlreiche Anwendungen vorhanden sind.

2.6. Ricci- und Skalarkrümmung. Diese Krümmungsbegriffe sind durch Kontraktion definiert:

Definition. (i) Der *Ricci-Tensor* ist der symmetrische $(0, 2)$ -Tensor

$$\text{Ric}(X, Y) := c_{14} g(R(\cdot, X)Y, \cdot) = \sum_k g(R(E_k, X)Y, E_k) \quad \text{für } (E_k) \text{ orthonormal,}$$

mit lokaler Darstellung $\text{Ric}_{ij} = \sum_k R_{kij}^k$.

(ii) Die *Skalarkrümmung* $\text{Scal} \in C^\infty(M)$ ist gegeben durch

$$\text{Scal}_p := c_{12} \text{Ric} = \sum_{\ell=1}^n \text{Ric}(E_\ell, E_\ell) = \sum_{k,\ell=1}^n g(R(E_k, E_\ell)E_\ell, E_k) \quad \text{für } (E_i) \text{ orthonormal;}$$

sie wird auch *Ricci-Skalar* in der Physik genannt. Die lokale Darstellung lautet $\text{Scal} = \sum_{ij} g^{ij} \text{Ric}_{ij} = \sum_{ijk} g^{ij} R_{kij}^k$.

(iii) Speziell im Riemannschen Fall betrachtet man auch die *Ricci-Krümmung* (in Richtung X), gegeben durch

$$\text{Rc}(X) := \frac{\text{Ric}(X, X)}{g(X, X)}, \quad X \in T_p M \setminus \{0\}.$$

Beispiele. 1. \mathbb{R}^n hat $\text{Ric} \equiv 0$ und $\text{Scal} \equiv 0$.

2. \mathbb{S}^n hat $\text{Scal} \equiv n(n-1)$; Rc bleibt als Übung.

3. In Dimension $n = 2$ stimmen Rc und Scal mit K überein, in Dimension $n = 3$ gibt es offenbar drei verschiedene Summanden von Scal .

Man kann zeigen, dass Kontraktionen als Spurbildungen denselben Wert ergeben wie Integrale über Einheitssphären, bzw. unnormierte Mittelwerte. So ist die Skalarkrümmung das Mittel der Schnittkrümmungen; dafür muss man sie allerdings noch durch $n(n-1)$ teilen, was oft bereits zur Definition gehört. Die Ricci-Krümmung $\text{Rc}(X)$ misst $(n-1)$ -mal die mittlere Schnittkrümmung über alle Ebenen, die den Einheitsvektor X enthalten.

Eine mathematische Interpretation der Schnittkrümmung ist durch das Längenwachstum des Exponential-Bildes von Kreisen in der betreffenden Ebene gegeben. Daher überrascht es nicht, dass eine mathematische Interpretation von Ricci- und Skalarkrümmung mithilfe des Volumenwachstums von Bällen gegeben werden kann: Für $\varepsilon \sim 0$ gilt

$$\frac{\text{area}(\partial B_\varepsilon(p) \subset M)}{\text{area}(\partial B_\varepsilon(0) \subset \mathbb{R}^n)} = 1 - \frac{\text{Scal}_p}{6n} \varepsilon^2 + O(\varepsilon^4), \quad \frac{\text{vol}(B_\varepsilon(p) \subset M)}{\text{vol}(B_\varepsilon(0) \subset \mathbb{R}^n)} = 1 - \frac{\text{Scal}_p}{6(n+2)} \varepsilon^2 + O(\varepsilon^4).$$

Entsprechend ist $\text{Ric}(X)$ durch das Volumenwachstum von Kegeln mit Achse X gegeben (bzw. durch ihr exponentielles Bild). Das Buch [Be] enthält ein lesenswertes Kapitel zur Interpretation der Ricci-Krümmung.

Der Ricci-Tensor ist insbesondere durch den Ricci-Fluss, der Evolutionsgleichung $\partial_t g = -\text{Ric}$ für zeitabhängige Metriken $g(t, p)$ in den letzten Jahren intensiv studiert worden. Perelman hat ihn zum Beweis der Poincaré-Vermutung eingesetzt (siehe Übungen). Die Ricci-Krümmung braucht man allgemein in der Analysis von Mannigfaltigkeiten, siehe z.B. [GHL, Kap.IV: Analysis on manifolds and the Ricci curvature].

Ricci- und Skalarkrümmung spielen in der allgemeinen Relativitätstheorie eine prominente Rolle: Dort ist die Raumzeit eine 4-Mannigfaltigkeit M mit Lorentz-Metrik g . Man benötigt noch einen vorgegebenen $(0, 2)$ -Tensor T , den *Energie-Impuls Tensor*, der im Vakuum-Fall verschwindet. Die drei $(0, 2)$ -Tensoren Ric, g, T erfüllen die *Einsteinschen Feldgleichungen*

$$\text{Ric} - \frac{1}{2} \text{Scal } g = T$$

(Einstein 1915). Dies sind partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung für die Lorentz-Metrik g . Im Vakuum-Fall $T = 0$ bezeichnet man die Lösungen (M, g) auch als *Einstein-Mannigfaltigkeiten*. Variationell kann man Lösungen als kritische Punkte des Integrals der totalen Skalarkrümmung $\int_M \text{Scal} \, d\text{vol}$ darstellen (Hilbert 1915).

3. ZWEITE VARIATION UND SATZ VON MYERS

Eine Geodätische stellt einen kritischen Punkt der Energie dar. Wir interessieren uns nun dafür, ob ein solcher kritischer Punkt ein lokales Minimum ist. Dazu berechnen wir die zweite Variation. Weil sie die Schnittkrümmung enthält, können wir aus Krümmungsvoraussetzungen topologische Schlüsse ziehen.

3.1. Zweite Variation der Energie. Zur Vereinfachung betrachten wir Variationen in spezieller Form: Jeder Punkt der Kurve wird durch Geodätische variiert.

Satz 13. *Sei (M, g) semi-Riemannsch, $c \in C^\infty([a, b], M)$ Kurve, $V(t)$ Vektorfeld längs c , und $h_s(t) := \exp_{c(t)} sV(t)$, definiert für $|s|$ klein. Dann gilt für alle solchen s*

$$(28) \quad \frac{d^2}{ds^2} E(h_s) = \int_a^b g\left(\frac{D}{dt}V, \frac{D}{dt}V\right) - g(R(V, T)T, V) dt,$$

wobei $T(s, t) := \frac{\partial}{\partial t} h_s(t)$ und $V(s, t) := \frac{\partial}{\partial s} h_s(t) \in T_{h_s(t)}M$ (insbesondere $V(0, t) = V(t)$).

Wir werden meist den folgenden Spezialfall betrachten: M ist Riemannsch und $V \in \mathcal{V}^\perp(c) := \{X \in \mathcal{V}(c) : X \perp c'\}$. Dann gilt:

$$(29) \quad \frac{d^2}{ds^2} E(h_s) = \int_a^b \left\| \frac{D}{dt}V \right\|^2 - K_{c(t)}(V, T) \|T\|^2 \|V\|^2 dt$$

Beweis. Wir müssen $\frac{1}{2} \int \frac{d^2}{ds^2} g(T, T)$ berechnen. Nach Lemma II.26 gilt der Satz von Schwarz für kovariante Ableitungen einer Abbildung: $\frac{D}{ds} \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{D}{dt} \frac{\partial h}{\partial s}$ oder $\frac{D}{ds} T = \frac{D}{dt} V$. Es folgt

$$(30) \quad \frac{d}{ds} g(T, T) = 2g\left(\frac{D}{ds} T, T\right) = 2g\left(\frac{D}{dt} V, T\right)$$

und daraus

$$\frac{d^2}{ds^2} g(T, T) = 2g\left(\frac{D}{ds} \frac{D}{dt} V, T\right) + 2g\left(\frac{D}{dt} V, \underbrace{\frac{D}{ds} T}_{\frac{D}{dt} V}\right).$$

Nun vertauschen wir im ersten Term die Ableitungsreihenfolge. Wir benutzen dabei $[V, T] = 0$ für unsere Abbildungsfelder und unsere Voraussetzung, dass $s \mapsto h_s(t)$ geodätisch ist, so dass $\frac{D}{ds} V(s, t) = 0$ für alle s, t gilt. Wir erhalten

$$\frac{D}{ds} \frac{D}{dt} V = \frac{D}{dt} \frac{D}{ds} V + R(V, T)V = R(V, T)V.$$

Wir haben also genau die Definition des Krümmungstensors benötigt! Insgesamt folgt

$$\frac{1}{2} \frac{d^2}{ds^2} g(T, T) = g(R(V, T)V, T) + g\left(\frac{D}{dt} V, \frac{D}{dt} V\right),$$

so dass Integration über t genau unsere Behauptung (28) ergibt. \square

Wir verwenden auch die Notation $\delta_{V,V}^2 E(c) := \frac{d^2}{ds^2} E(h_s)|_{s=0}$. Der Doppelindex deutet an, dass die zweite Variation eine quadratische Form in V ist, genauso wie ihr endlich dimensionales Analagon, die Hesse-Form. Man gewinnt leicht die zugehörige Bilinearform $(V, W) \mapsto \delta_{V,W}^2 E(c)$ (wie?).

Beispiel. Sei $M = \mathbb{R}^n$ und c proportional zur Bogenlänge parametrisierte Gerade, also c kritisch für E unter eigentlichen Variationen. Die 2. Variation $\frac{d^2}{ds^2} (E(c)) = \int_a^b g(\frac{D}{dt} V, \frac{D}{dt} V)$ ist dann positiv für jedes eigentliche $V \neq 0$, denn unter diesen erfüllt nur $V \equiv 0$ auch $\frac{D}{dt} V \equiv 0$. Natürlich ist damit c nicht unbedingt Kürzeste (absolutes Minimum von E), wie man z.B. am Zylinder leicht sehen kann.

Genauso können wir im Falle negativer Krümmung argumentieren:

Korollar 14. *Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit nicht-positiver Schnittkrümmung. Dann ist jede Geodätische $c: [a, b] \rightarrow M$ ein lokales Minimum der Energie, d.h. es gilt*

$$\delta_{V,V}^2 E(c) > 0 \quad \text{für alle } V \text{ mit } V(a) = V(b) = 0, \quad V \neq 0$$

(V ist also ein nicht verschwindendes eigentliches Variationsfeld).

Beweis. Aus $V(a) = 0$ folgt für V parallel, dass $V \equiv 0$. Für jedes $V \neq 0$ muss daher DV/dt an irgendeinem Punkt von 0 verschieden sein, so dass $\int_a^b g(\frac{DV}{dt}, \frac{DV}{dt}) > 0$. Weiterhin ist

$$-g(R(V, T)T, V) = -K(V, T)(\|V\|^2\|T\|^2 - g(V, T)^2) \geq 0 \quad \text{für } V, T \text{ linear unabhängig}$$

und $-g(R(V, T)T, V) = 0$ sonst. Wir erhalten $\int_a^b -g(R(V, T)T, V) \geq 0$ und das Ergebnis folgt aus (28). \square

22. Vorlesung, 18.1.19

3.2. Satz von Myers.

Definition. Eine Riemannsche Mannigfaltigkeit (M, g) hat den *Durchmesser* [diameter]

$$\text{diam}(M) := \sup\{d(p, q) : p, q \in M\} \in [0, \infty].$$

Beispiele. 1. $\text{diam}(\mathbb{S}_r^n) = \pi r$.

2. $\text{diam}(\mathbb{R}P^n) = \frac{\pi}{2}$.

3. $\text{diam}(T^n) = \frac{\sqrt{n}}{2}$, denn nach Pythagoras gilt $\text{diam}^2(T^n) = n(\frac{1}{2})^2$.

Große positive Krümmung bedeutet einen kleinen Durchmesser:

Satz 15 (Bonnet 1855 ($n = 2$), Myers 1941). *Sei M vollständige zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit. Gilt für ein $r > 0$, dass*

$$(31) \quad \operatorname{Ric}_p(X, X) \geq \frac{n-1}{r^2} \quad \text{für alle } p \in M \text{ und Einheitsvektoren } X \in T_p M,$$

so ist $\operatorname{diam}(M) \leq \pi r$.

Insbesondere gilt der Satz, wenn man statt (31) die Krümmungsschranke

$$(32) \quad K_p(\sigma) \geq \frac{1}{r^2} \quad \text{für alle } p \in M \text{ und Ebenen } \sigma \subset T_p M,$$

voraussetzt. Dies sieht man, indem man X zu einer ONB ergänzt.

Bemerkungen. 1. Aus $K_p > 0$ folgt noch nicht $\operatorname{diam}(M) < \infty$: Das Rotations-Paraboloid $P := \{z = x^2 + y^2\} \subset \mathbb{R}^3$ hat $K_p > 0$, aber unendlichen Durchmesser (Übung).

2. Es ist nötig, im Satz die Vollständigkeit vorauszusetzen. Wir bilden einen Streifen $S := \mathbb{R} \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ durch die Kugelkoordinaten- Abbildung $f(\varphi, \vartheta)$ auf eine ε -Umgebung des Äquators von \mathbb{S}^2 ab. Versehen wir S mit der zurückgezogenen Metrik $g = f^*\langle \cdot, \cdot \rangle$, so erhalten wir eine Riemannsche Mannigfaltigkeit (S, g) mit konstanter Krümmung $K \equiv 1$, die wir uns als (unendlich lange) Abwicklung der Äquatorumgebung vorstellen. Dann ist $\operatorname{diam}(S, g) = \infty$, denn die Punkte $(0, 0)$ und $(2\pi k, 0)$ für $k \in \mathbb{N}$ haben einen Abstand, der größer als $2\pi k \cos \varepsilon$ ist (Übung). Jedoch ist (S, g) nicht vollständig.

Beweis. Wir geben den Beweis unter der Voraussetzung (32) und lassen den Fall der Ricci-Schranke (31) als Übung.

Wir nehmen an, es wäre $\operatorname{diam}(M) > \pi r$. Dann gibt es zwei Punkte $p, q \in M$ mit $\operatorname{dist}(p, q) > \pi r$. Der Satz II.40(ii) von Hopf-Rinow liefert eine Kürzeste c von p nach q mit

$$L := \operatorname{dist}(p, q) > \pi r.$$

Die Voraussetzung an die Schnittkrümmung bedeutet dann die untere Schranke

$$(33) \quad K \geq \frac{1}{r^2} > \frac{\pi^2}{L^2}.$$

Wir wollen einen Widerspruch erhalten, indem wir zeigen, dass c nicht Kürzeste sein kann. Dazu geben wir ein eigentliches Variationsfeld $V \perp c'$ an, für das $\delta_{V,V}^2 E(c) < 0$ gilt. Dann hat für alle hinreichend kleinen $s \neq 0$ die Kurve $\exp_{c(t)} sV(t)$ von p nach q mit Energie kleiner als $E(c)$. Nach Definition (siehe II.4.6) kann c dann nicht Kürzeste sein.

Wir nehmen an, dass c auf $[0, L]$ und nach Bogenlänge parametrisiert ist, und wählen einen Einheitsvektor $W(0) \perp c'(0)$. Die Parallelverschiebung W von $W(0)$ ist nach Satz II.15

ein Einheitsvektorfeld in $\mathcal{V}^\perp(c)$. Um ein eigentliches Feld zu erhalten, betrachten wir das ebenfalls auf c' senkrechte Feld

$$V(t) := \frac{L}{\pi} \left(\sin \frac{\pi}{L} t \right) W(t).$$

Auf einer Sphäre vom Riemannschen Durchmesser L ist V das Variationsvektorfeld einer Geodätischenschar zwischen zwei Antipoden.

Die Derivativität der kovarianten Ableitung längs Kurven (siehe die Definition von D/dt) und die Parallelität von W ergibt

$$\frac{D}{dt} V = \frac{d}{dt} \left(\frac{L}{\pi} \sin \frac{\pi}{L} t \right) W(t) + \frac{L}{\pi} \left(\sin \frac{\pi}{L} t \right) \underbrace{\frac{D}{dt} W(t)}_{=0} = \left(\cos \frac{\pi}{L} t \right) W(t).$$

Einsetzen in die zweite Variation zeigt wie gewünscht, dass c keine Kürzeste sein kann:

$$\begin{aligned} \delta_{V,V}^2 E(c) &\stackrel{(29)}{=} \int_0^L \left\| \frac{D}{dt} V \right\|^2 - K(V, c') \|V\|^2 dt = \int_0^L \cos^2 \left(\frac{\pi}{L} t \right) - K(V, c') \frac{L^2}{\pi^2} \sin^2 \left(\frac{\pi}{L} t \right) dt \\ &\stackrel{(33)}{<} \int_0^L \cos^2 \left(\frac{\pi}{L} t \right) dt - \int_0^L \sin^2 \left(\frac{\pi}{L} t \right) dt = 0. \end{aligned}$$

□

Korollar 16. *Sei M zusammenhängend und vollständig mit positiver unterer Krümmungsschranke (31) oder (32).*

(i) *Dann ist M kompakt und*

(ii) *die Fundamentalgruppe $\pi_1(M)$ ist endlich.*

Beweis. (i) Nach Satz II.42 ist \exp_p für jedes p auf ganz \mathbb{R}^n definiert. Nach dem Satz von Myers ist $\exp_p(\overline{B_{\pi r}}) = M$. Nun ist $\overline{B_{\pi r}} \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und \exp stetig, also M kompakt.

(ii) Sei \tilde{M} die universelle Überlagerung von M (siehe nächster Abschnitt). Weil M und \tilde{M} lokal isometrisch sind, gilt für \tilde{M} dieselbe Krümmungsschranke. Ferner ist auch \tilde{M} wieder vollständig. Nach Teil (i) ist auch \tilde{M} kompakt. Also muss $\pi_1(M)$ endlich sein. (Die Menge $\pi^{-1}(p)$ ist diskret und hat einen Häufungspunkt. Also ist sie endlich.) □

Bemerkungen. 1. Das Rotationsparaboloid zeigt, dass die schwächere Voraussetzung $K > 0$ noch nicht die Kompaktheit impliziert.

2. Lohkamp hat 1994 bewiesen, dass jede Mannigfaltigkeit M^n mit $n \geq 3$ eine Metrik mit negativer Ricci-Krümmung besitzt. Im Gegensatz zu positiver Ricci-Krümmung kann daher negative Ricci-Krümmung keine topologischen Konsequenzen haben.

3.3. Anhang: Überlagerungen. In diesem Abschnitt besprechen wir kurz ein Grundkonzept der Topologie, das wir insbesondere für Abschnitt 5.3 benötigen. Literatur ist beispielsweise Jänich, Topologie.

Definition. Seien E, M zusammenhängende topologische/differenzierbare/Riemannsche Mannigfaltigkeiten. Eine surjektive Abbildung

$$\pi: E \rightarrow M,$$

die stetig/differenzierbar/(lokal) isometrisch ist, heißt topologische/differenzierbare/isometrische *Überlagerung* [covering], wenn für jedes $p \in M$ eine Umgebung U existiert, deren Urbild eine disjunkte Vereinigung ist,

$$\pi^{-1}(U) = \coprod_{\alpha \in A} U_{\alpha} \quad \text{mit} \quad \pi: U_{\alpha} \rightarrow U \text{ Homöomorphismus/Diffeom./globale Isometrie;}$$

dabei sei U_{α} offene Teilmenge von E und A beliebige Indexmenge. Eine Überlagerung heißt *universell*, wenn E einfach zusammenhängend ist.

Beachte: • $\dim E = \dim M$

- $\pi^{-1}(p) = A$ ist diskrete Menge.
- Die Blätterzahl A ist unabhängig von p .

Die Relation Überlagerung ist transitiv (Übung). Der Begriff universelle Überlagerung bezieht sich in diesem Sinne darauf, dass diese Überlagerung jede andere Überlagerung überlagert.

Beispiele. 1. Kreis:

- a) $\pi: E = \mathbb{R} \rightarrow M = \mathbb{S}^1$, $\pi(t) := e^{it}$ ist universelle Überlagerung mit $A = \mathbb{Z}$.
- b) $\pi: E = \mathbb{S}^1 \rightarrow M = \mathbb{S}^1$, $\pi(z) := z^k$ ist k -blättrige Überlagerung, mit $A = \{1, \dots, k\}$.
2. Diese Abbildungen setzen sich folgendermaßen zu komplexen Überlagerungen fort:
 $\pi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$, $\pi(z) = \exp(z)$ bzw. $\pi: \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$, $\pi(z) = z^k$.
3. $\pi: E = \mathbb{S}^3 \rightarrow M = \text{SO}(3)$, mit $A = \mathbb{Z}_2$ ist universelle zweiblättrige Überlagerung. Die Abbildung kann man durch Quaternionen definieren, so dass für $\pm p \in \mathbb{S}^3$ die Drehachse durch $\text{Im } p \in \mathbb{S}^2$ beschrieben wird, $\text{Re } p$ ergibt den Drehwinkel.
4. Sei A Gruppe, die diskret auf E wirkt. Dann ist $\pi: E \rightarrow M := E/A$ Überlagerung, Hierunter fallen die isometrischen Überlagerungen $\pi: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$ mit $A = \mathbb{Z}_2$ und $\pi: \mathbb{R}^n \rightarrow T^n$ mit $A = \mathbb{Z}^n$.

Zur Abgrenzung des Begriffes der Überlagerung bemerken wir:

1. Die Projektion $\pi: (x, y, z) \mapsto (x, y, 0)$ ist keine Überlagerung, weil $\pi^{-1}(p) \cong \mathbb{R}$ nicht diskret ist. Der passende Begriff ist die *Faserung*.
2. Die Abbildung $\pi_k(z) := z^k$, $k \geq 2$ ergibt keine Überlagerung von $E := \mathbb{C}$ nach $M = \mathbb{C}$: Einerseits ist $\pi^{-1}(0) = \{0\}$, andererseits gilt $\#\pi^{-1}(z) = k$ für alle $z \neq 0$, wobei sich Urbild um k -te Einheitswurzeln unterscheiden. Also besitzt $0 \in M$ nicht die geforderte Umgebung.

Funktionentheoretiker sprechen hier noch von einer *verzweigten Überlagerung*, bei der eine diskrete Menge von Ausnahmepunkten in M zugelassen ist.

Die wichtigste Eigenschaft von Überlagerungen ist, dass man Wege von M nach E hochheben kann; diese Eigenschaft charakterisiert umgekehrt Überlagerungen.

Satz 17. *Sei $\pi: E \rightarrow M$ Überlagerung.*

- (i) *Ist $c: [0, 1] \rightarrow M$ eine Kurve mit $c(0) = p$. Ist $\tilde{p} \in E$ ein Punkt mit $\pi(\tilde{p}) = p$, so gibt es eine eindeutig bestimmte Kurve $\tilde{c}: [0, 1] \rightarrow E$ mit $\tilde{c}(0) = \tilde{p}$ und $\pi \circ \tilde{c} = c$.*
- (ii) *Homotopien in M lassen sich auf die gleiche Weise eindeutig liften.*

Die Kurve \tilde{c} nennt man auch einen *Lift* von c .

23. Vorlesung, 23.1.19

Beweis. (i) • **Eindeutigkeit:** Seien $c_1, c_2: [0, 1] \rightarrow E$ zwei Kurven mit $\pi \circ c_i = c$ und $c_i(0) = \tilde{p}$. Wir betrachten die Menge $I := \{t : c_1(t) = c_2(t)\} \subset [0, 1]$ mit $0 \in I$ und zeigen die Offenheit sowohl von I wie von $[0, 1] \setminus I$. Sei $t \in I$, so ist $c_1(t) = c_2(t) \in U_\alpha$. Wegen Stetigkeit ist $c_i(s) \in U_\alpha$ für s in einer kleinen Umgebung von t . Weil $\pi: U_\alpha \rightarrow U$ Homöomorphismus ist, folgt $c_1(s) = c_2(s)$ in dieser Umgebung. Liegen umgekehrt $c_1(t)$ und $c_2(t)$ in verschiedenen Blättern $U_\alpha \neq U_\beta$, so zeigt das gleiche Argument, dass eine Umgebung von t nicht in I liegt.

• **Existenz.** Weil M von den offenen Mengen U der Überlagerungsdefinition überdeckt wird, gibt eine endliche Zerlegung $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$ von I , so dass $c|_{[t_{i-1}, t_i]}$ in solchen Mengen $U^i \subset M$ liegt. Für die überlagernden Mengen U_α^i spezifizieren wir nun λ induktiv.

Sei $\tilde{c}|_{[0, t_i]}$ schon konstruiert, d.h. $\tilde{c}(t_i)$ liege in einem $U_{\alpha_i}^i$. Dann liegt $\tilde{c}(t_i)$ auch in $U_{\alpha_{i+1}}^{i+1}$ und es gibt genau einen stetigen Lift von c auf dem Intervall $[t_i, t_{i+1}]$ der in dieser Menge liegt, gegeben durch $\tilde{c} := \pi^{-1} \circ c$, wobei π der passende Homöomorphismus ist.

(ii) Dieselben Argumente funktionieren auch für eine Homotopie $h: [0, 1]^2 \rightarrow M$ nach Unterteilung in gleich große Quadrate. \square

Eine Folgerung aus (ii) ist:

Korollar 18. *Ist M einfach zusammenhängend, so ist jede Überlagerung $\pi: E \rightarrow M$ einblättrig, d.h. π ist bijektiv.*

Beweis. Wir zeigen für $p_1, p_2 \in \pi^{-1}(p)$, dass $p_1 = p_2$ gilt. Weil E zusammenhängend ist, gibt es eine Kurve c von p_1 nach p_2 . Betrachten wir $\gamma := \pi \circ c$. Dies ist eine Schleife in M mit Endpunkt p . Weil M einfach zusammenhängend ist, existiert eine Homotopie, so dass $h_0 = \gamma$ und $h_1 \equiv p$. Diese Homotopie läßt sich nach E liften, zu einer Homotopie \tilde{h} .

Für $s = 0$ gilt $\tilde{h}_s(0) = p_1$ und $\tilde{h}_s(1) = p_2$. Aus Stetigkeitsgründen gilt dies für jedes s , insbesondere für $s = 1$. Andererseits ist \tilde{h}_1 konstant. Es folgt $p_1 = p_2$. \square

Man kann die universelle Überlagerung als Raum der Endpunkte homotoper Kurven definieren, also $\tilde{M} := \{\gamma: [0, 1] \rightarrow M\} / \sim$ unter der Äquivalenzrelation

$$(34) \quad \gamma \sim \delta : \iff \gamma(1) = \delta(1) \text{ und } \gamma, \delta \text{ homotop.}$$

mit $\pi: \tilde{M} \rightarrow M, \gamma \mapsto \gamma(1)$.

4. JACOBIFELDER

Um die Krümmung und ganz allgemein die Geometrie von Räumen zu verstehen, wollen wir Scharen von Geodätischen untersuchen. Unsere Leitfrage ist: Wie nah liegen Geodätische beieinander? Offensichtlich laufen sie in $\mathbb{S}^2, \mathbb{R}^2, \mathbb{H}^2$ verschieden schnell auseinander. Ein Nebenergebnis wird sein, dass wir sehen werden, wann $d \exp$ injektiv ist.

4.1. Jacobi-Gleichung. Sei $c \in C^\infty(I, M)$ eine Geodätische. Dann heißt $h: (-\varepsilon, \varepsilon) \times I$ eine *Variation von $c = h_0$ durch Geodätische*, wenn jede Kurve $t \mapsto h_s(t)$ geodätisch ist, d.h.

$$(35) \quad \frac{D}{dt} h'_s(t) = 0 \quad \text{für alle } s, t.$$

Satz 19. Es sei c geodätisch und $h_s(t)$ eine Variation von c durch Geodätische. Dann erfüllt das Variationsfeld $J := \frac{\partial}{\partial s} h_s|_{s=0} \in \mathcal{V}(c)$ die Jacobische Differentialgleichung

$$(36) \quad J'' + R(J, c')c' = 0.$$

Dabei steht der Ableitungsstrich $'$ sowohl für d/dt wie für D/dt , so dass $J''(t) := \frac{D}{dt} \frac{D}{dt} J(t)$.

Beweis. Wir berechnen J'' unter Benutzung der Parallelitätsbedingung (35). Dazu müssen wir, wie im Beweis der 2. Variation, die Ableitungsreihenfolge vertauschen. Es ergibt sich, unter Verwendung von “ $R(J, T)T = \nabla_J \nabla_T T - \nabla_T \nabla_J T$ ” bei der zweiten Gleichheit:

$$\frac{D}{dt} \left(\frac{D}{dt} \frac{\partial h}{\partial s} \right) \stackrel{\text{Lemma II.26}}{=} \frac{D}{dt} \frac{D}{ds} \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{D}{ds} \left(\frac{D}{dt} \frac{\partial h}{\partial t} \right) - R \left(\frac{\partial h}{\partial s}, \frac{\partial h}{\partial t} \right) \frac{\partial h}{\partial t}$$

Wegen (35) verschwindet der erste Term rechts. Auswertung in $s = 0$ ergibt die Jacobi-Gleichung. \square

Wir werden noch sehen, dass auch eine Umkehrung des Satzes gilt. Im Moment ist es bequem zu definieren: Ein Vektorfeld J längs einer Geodätischen c , das (36) erfüllt, heißt *Jacobifeld*. Ein Jacobifeld gibt den Abstand einer Geodätischenschar in 1. Ordnung an, es beschreibt die Spreizung infinitesimal benachbarter Geodätischer.

Beispiele. 1. In \mathbb{R}^n sei $c(t) = vt$ mit $v \in \mathbb{R}^n$ eine Ursprungsgerade. Für $X, Y \in \mathbb{R}^n$ ist $J(t) := X + tY$ Jacobifeld, denn $h_s(t) = vt + s(X + tY) = sX + (v + sY)t$ ist Variation der Geraden; offenbar gilt $J'' = 0$.

2. In \mathbb{S}^n kann man eine Variation durch Geodätische darstellen als

$$(37) \quad c(t) := p \cos t + v \sin t, \quad h_s(t) = p \cos s + (v \cos s + w \sin s) \sin t$$

wobei $v, p, w \in \mathbb{R}^{n+1}$ paarweise senkrechte Einheitsvektoren sind. Dann ist das Jacobifeld

$$(38) \quad J(t) := \frac{\partial}{\partial s} h_s(t) \Big|_{s=0} = w \sin t.$$

3. Eine Geodätische c kann man geodätisch umparametrisieren durch $h_s^1(t) := c(s+t)$ und $h_s^2(t) := c((1+s)t)$. Also sind Jacobifelder:

$$(39) \quad J_1(t) := \frac{\partial}{\partial s} c(s+t) \Big|_{s=0} = c'(t) \quad \text{und} \quad J_2(t) := \frac{\partial}{\partial s} c((1+s)t) \Big|_{s=0} = tc'(t)$$

Als erstes analysieren wir die Jacobi-Gleichung: Jacobifelder existieren eindeutig zu gegebenen Anfangsbedingungen $J(a), J'(a)$:

Lemma 20. *Sei $c \in C^\infty(I, M^n)$ geodätisch, $a \in I$. Die Jacobi-Gleichung ist ein System linearer Differentialgleichungen zweiter Ordnung und hat für gegebene Anfangswerte $J(a) = v$ und $J'(a) = w$ genau eine Lösung $J: I \rightarrow T_{c(t)}M$. Insbesondere ist der Raum \mathcal{J}_c der Jacobifelder längs c ein $2n$ -dimensionaler Vektorraum.*

Aus Beispiel 3 folgt, dass c', tc' einen 2-dimensionalen Unterraum tangentialer Jacobifelder aufspannen. In den Übungen wird gezeigt, dass diese explizit bekannten Felder bereits alle tangentialen Jacobifelder sind. Der Raum der Felder, die senkrecht auf c' stehen, hat also Dimension $2n - 2$.

Beweis. Sei $E_1 := c', E_2, \dots, E_n$ eine parallele Orthonormalbasis längs c , erhalten z.B. durch Parallelverschiebung einer ONB in $c(a)$. Jedes Vektorfeld X längs c lässt sich dann schreiben als $X(t) = \sum_{k=1}^n \xi^k(t) E_k(t)$. Wir erhalten dann

$$X' = \frac{D}{dt} \left(\sum_k \xi^k E_k \right) = \sum_k \frac{d\xi^k}{dt} E_k, \quad X'' = \frac{D}{dt} X' = \sum_k \frac{d^2 \xi^k}{dt^2} E_k.$$

Ferner ist

$$R(X, c')c' = R\left(\sum_i \xi^i E_i, c'\right)c' = \sum_i \xi^i R(E_i, c')c' = \sum_{i,k} \xi^i R_i^k E_k,$$

wobei die glatten Funktionen $R_i^k(t)$ auf I durch $R(E_i, c')c' = \sum R_i^k E_k$ definiert sind. Unter Benutzung der linearen Unabhängigkeit der E_k ergeben die letzten Gleichungen

$$\frac{d^2 \xi^k}{dt^2}(t) + \sum_{i=1}^n \xi^i(t) R_i^k(t) = 0 \quad \text{für } k = 1, \dots, n.$$

Dies ist ein System von n gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung in $(\xi^1(t), \dots, \xi^n(t))$ auf dem Intervall I mit glatten Koeffizienten. Daher gibt es genau eine Lösung mit Anfangswerten $\xi^k(a) = v^k$, $\frac{d}{dt}\xi^k(a) = w^k$, die auf ganz I erklärt ist. \square

Sind die Lösungen der Jacobi-Gleichung stets als Variationsvektorfelder von Variationen durch Geodätische gegeben? Dies ist so, wir wollen es aber nur in dem Spezialfall beweisen, für den wir es brauchen: Dies ist der Fall $J(0) = 0$, für den die Geodätischenschar einen Punkt p gemeinsam hat.

Satz 21. *Sei $u \in T_p M$ und $c(t) := \exp_p t u$ eine Geodätische durch $c(0) = p$. Dann wird ein Jacobifeld $J \in \mathcal{V}(c)$ mit Anfangsbedingungen $J(0) = 0$ und $J'(0) = w \in T_p M$ als Variationsfeld $J(t) := \frac{\partial}{\partial s} h_s|_{s=0}$ der folgenden Variation von c durch Geodätische gegeben:*

$$(40) \quad h_s(t) := \exp_p t(u + sw)$$

Weiterhin gilt

$$(41) \quad J(t) = (d \exp_p)_{tu}(tw).$$

Es gibt auch eine Formel für den allgemeinen Fall mit $J(0) \neq 0$, siehe z.B. [GHL].

Beweis. Alle Aussagen sind unmittelbar klar bis auf $J'(0) = w$.

$$(42) \quad \begin{aligned} J'(0) &= \frac{D}{dt} J(t) \Big|_{t=0} = \frac{D}{dt} \frac{\partial}{\partial s} h \Big|_{s,t=0} \stackrel{\text{Lemma II.26}}{=} \frac{D}{ds} \frac{\partial}{\partial t} h \Big|_{s,t=0} \\ &= \frac{D}{ds} (d \exp_p)_{t(u+sw)}(u + sw) \Big|_{s,t=0} = \frac{D}{ds} (d \exp_p)_0(u + sw) \Big|_{s=0} \\ &\stackrel{\text{Satz 23}}{=} \frac{D}{ds} (\text{id} \cdot (u + sw)) \Big|_{s=0} \stackrel{(*)}{=} \frac{d}{ds} (u + sw) \Big|_{s=0} = w. \end{aligned}$$

Dabei haben wir bei $(*)$ benutzt, dass die kovariante Ableitung des Vektorfeldes $u + sw \in T_p M$ längs der konstanten Kurve p gerade durch die gewöhnliche Ableitung gegeben ist. \square

Um die durch $d \exp$ beschriebene Spreizung der Geodätischen zu quantifizieren, muss man den Ausdruck $(d \exp_p)_u w$ für $w \perp u$ berechnen. Bislang verfügen wir nur über gewisse Informationen für diesen Ausdruck durch das Gauß-Lemma. Wir können ihn folgendermaßen als Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung berechnen:

Korollar 22. *Seien $p \in M$, $u \in T_p M$ und $w \in T_u T_p M \cong T_p M$. Dann gilt*

$$(43) \quad (d \exp_p)_u w = J(1),$$

wobei $J \in \mathcal{V}(c)$ dasjenige Jacobifeld längs der auf $[0, 1]$ definierten Geodätischen $c(t) := \exp_p t u$ ist, welches $J(0) = 0$, $J'(0) = w$ erfüllt.

4.2. Krümmungsberechnung für \mathbb{S}^n und \mathbb{H}^n . Die Jacobi-Gleichung enthält die Krümmung als Koeffizient. Weil wir die Geodätischen der Standardräume und ihre kovariante Ableitung kennen, können wir dadurch auf die Krümmung zurückschließen.

Satz 23. Sei $n \geq 2$.

- (i) \mathbb{S}^n hat Schnittkrümmung $K \equiv 1$,
- (ii) \mathbb{H}^n hat Schnittkrümmung $K \equiv -1$.

Teil (i) hatten wir bereits in Satz 7 unter Benutzung des theorema egregium gezeigt.

Beweis. (i) Wir betrachten eine Variation eines Bogenlängen-parametrisierten Großkreises c wie in (37). Ihr Jacobifeld $J(t) = w \sin t \in \mathcal{V}^\perp(c)$, siehe (38), erfüllt $J'' = -J$. Daher erhalten wir für jedes t außerhalb der Nullstellen von J :

$$(44) \quad K_c(J, c') = \frac{g(R(J, c')c', J)}{\|c'\|^2 \|J\|^2} \stackrel{\text{Jacobi-Glg.}}{=} \frac{g(-J'', J)}{\|J\|^2} = \frac{g(J, J)}{\|J\|^2} = 1$$

Weil die Krümmung von \mathbb{S}^n konstant ist, folgt die Behauptung (alternativ könnte man c, c', J so wählen, dass in p eine gegebene Ebene σ beschrieben wird).

24. Vorlesung, 25.1.19

(ii) Im Hyperboloid-Modell H^n können wir ähnlich wie in (i) vorgehen. Wie in Abschnitt 6.2 sei $P := (0, \dots, 0, 1)$ der Scheitel von H^n . Für einen Einheitsvektor $v \in T_P H^n$ betrachten wir die Kurve

$$c: \mathbb{R} \rightarrow H^n, \quad c(t) := P \cosh t + v \sinh t,$$

und die Variation von c ,

$$h_s(t) := P \cosh t + (v \cos s + w \sin s) \sinh t,$$

mit $w \in T_P H^n$ Einheitsvektor senkrecht auf P und auf v . Man könnte speziell $v = (1, 0, \dots, 0)$ und $w = (0, 1, 0, \dots, 0)$ wählen. Entsprechend der Aussage nach Satz II.48 ist c und jedes h_s geodätisch, so dass $J(t) := \frac{\partial}{\partial s} h_s(t)|_{s=0} = w \sinh t$ Jacobifeld ist.

Für die folgende Rechnung beachten wir, dass in \mathbb{R}_k^{n+1} der Levi-Civita-Zusammenhang durch ∂ gegeben ist, unabhängig von k . Der Begriff des Tangentialraumes einer Hyperfläche ist ebenfalls unabhängig von k . Also gilt $\nabla_X Y = \Pi \partial_X Y$ für an die Hyperfläche $H^n \subset \mathbb{R}_1^{n+1}$ tangential Vektorfelder X, Y ebenso, wie es für $H^n \subset \mathbb{R}_0^{n+1}$ gilt. Weil w tangential längs c ist, folgt daher für alle t

$$J'' = \frac{D}{dt} \left(\frac{D}{dt} w \sinh t \right) = \frac{D}{dt} \left(\Pi \frac{d}{dt} (w \sinh t) \right) = \frac{D}{dt} (w \cosh t) = \Pi (w \sinh t) = w \sinh t = J.$$

Das Jacobifeld J erfüllt nach Satz 19 die Jacobigleichung $R_c(J, c')c' = -J''$. Wir erhalten

$$K_c(J, c') = \frac{\langle R(J, c')c', J \rangle_1}{\langle c', c' \rangle_1 \langle J, J \rangle_1} = \frac{\langle -J'', J \rangle_1}{\langle J, J \rangle_1} = -1 \quad \forall t \neq 0.$$

Weil die Isometriegruppe von H^n nach Satz II.46 transitiv auf Ebenen in Tangentialräumen wirkt, hat H^n konstante Krümmung. Also folgt $K \equiv -1$. \square

4.3. Jacobifelder in Räumen konstanter Krümmung oder in Dimension 2. Es sei M Riemannsche Mannigfaltigkeit entweder

- a) mit konstanter Krümmung κ , oder
- b) zweidimensional mit Gauß-Krümmung κ .

Auf M lässt sich dann Satz 6 anwenden. Dazu betrachten wir längs einer nach Bogenlänge parametrisierten Geodätischen $c \in C^\infty(I, M)$ ein Jacobifeld $J \in \mathcal{V}^\perp(c)$:

$$R(J, c')c' \stackrel{(10)}{=} \underbrace{\kappa(g(c', c'))}_{=1} J - \underbrace{g(J, c')c'}_{=0} = \kappa J.$$

Die Jacobi-Gleichung (36) vereinfacht sich also zu $J'' + \kappa J = 0$. Um dies als skalare Gleichung zu schreiben, sei $E \in \mathcal{V}^\perp(c)$ paralleles Feld. Wir betrachten speziell $J(t) := a(t)E(t)$ mit $a \in C^\infty(I, \mathbb{R})$. Wegen $J'' = (a'E + aE')' = a''E$ ist J genau dann Jacobifeld, wenn a die skalare Gleichung

$$(45) \quad a'' + \kappa a = 0 \quad \text{für alle } t \in I$$

erfüllt, wobei $\kappa(t) := \kappa(c(t))$ im Fall b).

Im Fall a) kann man (45) für die Anfangsbedingungen $a(0) = 1$ und $a'(0) = 0$ bzw. $a(0) = 0$ und $a'(0) = 1$ explizit lösen. Superposition der Lösungen ergibt:

Satz 24. *In einer Raumform mit Krümmung κ ist das Jacobifeld J mit den Anfangsbedingungen*

$$J(0) = E \perp c'(0) \quad \text{und} \quad J'(0) = F \perp c'(0)$$

gegeben durch

$$J(t) := \begin{cases} \cos(\sqrt{\kappa} t)E(t) + \frac{1}{\sqrt{\kappa}} \sin(\sqrt{\kappa} t)F(t), & \text{für } \kappa > 0, \\ E(t) + tF(t), & \text{für } \kappa = 0, \\ \cosh(\sqrt{-\kappa} t)E(t) + \frac{1}{\sqrt{-\kappa}} \sinh(\sqrt{-\kappa} t)F(t), & \text{für } \kappa < 0, \end{cases}$$

wobei $E(t)$ bzw. $F(t)$ parallele Fortsetzungen von $E = E(0)$ bzw. $F = F(0)$ längs c sind.

Im Falle b) könnte man (45) benutzen, um z.B. aus Krümmungsschranken Abschätzungen für die Länge von Jacobifeldern zu gewinnen. Hierzu kann man z.B. die Vergleichssätze von Sturm-Liouville benutzen.

Um das Maß geodätischer Sphären oder Bälle zu einem gegebenem Mittelpunkt zu bestimmen, muss man Jacobifelder betrachten, die an diesem Punkt verschwinden. Diese Felder, ausgewertet am Radius, spannen dann das Flächenelement der Sphären (oder Bälle) auf. Natürlich kann man Jacobifelder nur in Sonderfällen explizit angeben. Im Allgemeinen kann man aber immer noch Entwicklungen um den Mittelpunkt bestimmen. Daraus ergeben sich dann Formeln für das Volumenwachstum kleiner Sphären oder Bälle, wie wir sie in Abschnitt 2.6 angegeben hatten. Wir behandeln hier nur den einfachsten Fall, und zwar den Umfang geodätischer Kreise in Flächen.

Es sei $S_r(p) = \{\exp_p v : |v| = r\}$ ein Kreis vom geodätischem Radius r um p . Es sei $v: [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$, $v(\varphi) := e^{i\varphi}$. Dann ist der Kreisumfang als die Kurvenlänge $L(S_r(p)) := L(\exp_p rv)$ gegeben. Durch Taylorentwicklung zeigen wir das folgende Ergebnis:

Satz 25 (Bertrand/Puiseux 1848). *Sei M zwei-dimensional mit Gauß-Krümmung K . Dann gilt für jedes $p \in M$ die Entwicklung*

$$L(S_r(p)) = 2\pi r \left(1 - \frac{K(p)}{6} r^2 + o(r^2) \right), \quad r \geq 0, \quad r \approx 0.$$

Äquivalent ist die folgende intrinsische Darstellung der Gauß-Krümmung:

$$K(p) = \lim_{r \searrow 0} \frac{6}{r^2} \left(1 - \frac{L(S_r(p))}{2\pi r} \right)$$

Beweis. Für hinreichend kleines $r > 0$ ist $\overline{B_r}(p) \subset M$. Wir benutzen Polarkoordinaten:

$$h: [0, r] \times \mathbb{R} \rightarrow M, \quad h(t, \varphi) := \exp_p tv(\varphi)$$

Dann ist $L(S_r(p)) = \int_0^{2\pi} \left\| \frac{\partial h}{\partial \varphi}(r, \varphi) \right\| d\varphi$. Für festes φ ist die Kurve $c(t) := h(t, \varphi)$ eine (radiale) Geodätische, die wegen $c'(0) = v(\varphi)$ mit Einheitsgeschwindigkeit parametrisiert ist.

Weil $t \mapsto h(t, \varphi)$ für jedes φ geodätisch ist, ist $J = \partial h / \partial \varphi$ ein Jacobifeld längs c . Für den Kreisumfang müssen wir also

$$a(t) := \|J(t)\| = \left\| \frac{\partial h}{\partial \varphi}(t, \varphi) \right\|, \quad t \in [0, r]$$

integrieren. Daher sind die Taylorkoeffizienten $a_k := a^{(k)}(0) = \|J\|^{(k)}(0)$ von

$$a(t) = \sum_{k=0}^3 \frac{a_k}{k!} t^k + o(t^3), \quad t \geq 0, \quad t \approx 0,$$

gesucht. In den folgenden Rechnungen sei φ fixiert; wir werden sehen, dass die a_k von φ unabhängig sind.

Zunächst ist

$$(46) \quad a_0 = \|J(0)\| = \|(d\exp_p)_0 0\| = 0.$$

Für die Berechnung von a_1 bzw. $J'(0)$ setzen wir $E(0) = ie^{i\varphi} \perp c'(0)$ parallel fort zu einem Einheitsvektorfeld $E \in \mathcal{V}^\perp(c)$. Nun gilt $J(t) \parallel E(t)$, denn senkrechte Jacobifelder bleiben senkrecht (Übung); alternativ ergibt das Gauß-Lemma II.33, dass $\frac{\partial h}{\partial t} \perp \frac{\partial h}{\partial \varphi}$. Wir behaupten $J'(0) = E(0)$. Dies folgt aus einer Rechnung analog zu (42): Man muss nur das dortige $s \mapsto t(u + sw)$ durch unser $\varphi \mapsto tv(\varphi)$ ersetzen; weiter differenziert man statt in $s = 0$ nun für festes φ . Daher erhalten wir zuerst

$$J'(0) = v'(\varphi) = ie^{i\varphi} = E(0),$$

und daraus, als erste t -Ableitung,

$$(47) \quad \begin{aligned} a_1 &= \|J(t)\|'_{t=0} = \lim_{t \searrow 0} \frac{1}{\|J(t)\|} g(J(t), J'(t)) = \lim_{t \searrow 0} g\left(\frac{J(t)}{\|J(t)\|}, J'(t)\right) \\ &\stackrel{E \parallel J}{=} \lim_{t \searrow 0} g(E(t), J'(t)) = g(E(0), E(0)) = 1. \end{aligned}$$

In unserer Situation gilt $J(t) = a(t)E(t)$ und daher nach der Jacobi-Gleichung (45)

$$(48) \quad a''(t) = \|J(t)\|'' = -K(f(t, \varphi))\|J(t)\|.$$

Aus (46) folgt zunächst $a_2 = 0$. Wir können (48) aber auch benutzen, um den dritten Taylorkoeffizienten zu berechnen:

$$a_3 = \left. \frac{d}{dt}(a''(t)) \right|_{t=0} = -\left. \frac{d}{dt}(K(c(t)) a(t)) \right|_{t=0} \stackrel{a(0)=0}{=} -K(c(0))a'(0) \stackrel{(47)}{=} -K(p).$$

Als Ergebnis dieser Berechnungen halten wir fest

$$\|J(t)\| = ta_1 + \frac{t^3}{3!}a_3 + o(t^3) = t - \frac{t^3}{3!}K(p) + o(t^3),$$

wobei wie behauptet die rechte Seite von φ unabhängig ist. Als Umfang erhalten wir daher

$$L(S_r) = \int_0^{2\pi} \left\| \frac{\partial h}{\partial \varphi}(r, \varphi) \right\| d\varphi = \int_0^{2\pi} \|J(r)\| d\varphi = 2\pi \left(r - \frac{K(p)}{3!}r^3 + o(r^3) \right).$$

□

Die Formel gilt auch in folgender Situation. Sei M allgemeiner n -dimensional und v, w ONB einer Ebene σ in $T_p M$. Dann ist $h: B_r \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M$ mit $h(t, \varphi) := \exp_p t(v \cos \varphi + w \sin \varphi)$ für kleines $r > 0$ definiert. Die Formel gilt daher für die Kreise $S_r(p) := \{h(t, \varphi) : t = r, \varphi \in [0, 2\pi)\}$ mit Schnittkrümmung $K_p(\sigma)$.

5. KONJUGIERTE PUNKTE UND SATZ VON CARTAN-HADAMARD

Nachdem wir mit dem Satz von Myers ein Resultat über die Topologie positiv gekrümmter Mannigfaltigkeiten kennengelernt haben, ist unser Ziel nun, Jacobifelder einzusetzen, um die Topologie negativ gekrümmter Mannigfaltigkeiten zu verstehen.

5.1. Kritische Punkte von $d\exp$. Im Falle negativer Krümmung wird sich \exp als lokaler Diffeomorphismus herausstellen. Um dies mit Hilfe von Jacobifeldern zu zeigen, benötigen wir den Begriff des konjugierten Punktes:

Definition. Sei $c \in C^\infty(I, M)$ geodätisch. Dann heißen die Parameter $t_1 \neq t_2$ aus I *konjugiert zueinander längs c* , wenn es ein Jacobifeld $J \not\equiv 0$ längs c gibt mit $J(t_1) = 0 = J(t_2)$. Die maximale Anzahl linear unabhängiger Felder J mit dieser Eigenschaft bezeichnet man als *Vielfachheit*.

Man sagt auch $p, q \in \text{Spur } c$ sind *konjugiert zueinander*; im Falle von Doppelpunkten ist das allerdings "abuse of notation".

Beispiele. 1. In \mathbb{S}^n ist längs eines Großkreises (37) das Feld $J(t) = w \sin t$ aus (38) ein Jacobifeld. Also ist $-p$ zu p konjugiert, sogar unabhängig von der gewählten Geodätischen. Die Vielfachheit ist die Dimension von $T_p M \cap w^\perp$, also $n - 1$. Entsprechend sind auf einer Sphäre $\mathbb{S}_{1/\sqrt{\kappa}}^n$ mit Krümmung κ die Endpunkte von Geodätischen der Länge $\frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$ konjugiert. 2. In \mathbb{R}^n oder T^n hat $J(t) = X + tY$ höchstens eine Nullstelle. In \mathbb{H}^n gilt das ebenso für $J(t) = X(t) \cosh t + Y(t) \sinh t$, wobei $X, Y \in V^\perp(c)$ parallel seien. Also gibt es keine konjugierten Punkte.

Bemerkung. Die Vielfachheit kann höchstens $n - 1$ sein: Laut Lemma 20 ist der Raum der Jacobifelder mit $J(t_1) = 0$ gerade n -dimensional; das tangential Feld tc' besitzt aber keine weitere Nullstelle.

Wir wollen nun konjugierte Punkte als eine Eigenschaft der Exponentialabbildung verstehen. Wir sagen \exp_p hat $u \in T_p M$ als *kritischen Punkt*, wenn $(d\exp_p)_u : T_u T_p M = T_p M \rightarrow T_{\exp_p(u)} M$ nicht den vollen Rang n hat.

Beispiel. Für \mathbb{S}^n sind alle u mit $|u| \in \pi\mathbb{N}$ kritische Punkte von \exp_p .

Satz 26. Sei $c \in C^\infty([0, \tau], M)$ geodätisch mit $c(0) = p$. Dann ist

- (i) τ konjugiert zu 0 genau dann, wenn \exp_p den kritischen Punkt $\tau c'(0) \in T_p M$ hat.
- (ii) Die Vielfachheit von τ ist die Dimension des Kerns von $(d\exp_p)_{\tau c'(0)}$.

Beweis. Sei $c(t) = \exp_p(tu)$ mit $u := c'(0)$. Wir betrachten die lineare Abbildung, die $w \in T_p M$ dem Jacobifeld mit Anfangsbedingungen $J(0) = 0$, $J'(0) = w$ zuordnet. Nach (41) erhalten wir durch Einschränkung eine surjektive Abbildung der (Unter-)Vektorräume

$$\{w \in T_p M : (d \exp_p)_{\tau u}(\tau w) = 0\} \rightarrow \{J \in \mathcal{J}(c) : J(0) = 0, J(\tau) = 0\}.$$

Die Abbildung ist injektiv, denn nach Lemma 20 ist nur für $w = 0$ auch $J \equiv 0$. Also ist sie Isomorphismus und die Behauptungen folgen. \square

Definition. Der *konjugierte Ort* $C(p)$ von $p \in M$ ist die Menge derjenigen $q \in M \setminus \{p\}$, für die es eine Geodätische $c \in C^\infty([0, 1], M)$ von p nach q gibt, deren erster konjugierter Punkt q ist.

Beispiele. 1. \mathbb{S}^n : $C(p) = \{-p\}$.

2. \mathbb{R}^n , T^n , \mathbb{H}^n : $C(p) = \emptyset$.

3. Im allgemeinen ist $C(p)$ die Vereinigung von Flächenstücken deren Dimension höchstens $n - 1$ ist. Bei variabler Krümmung ist der konjugierte Ort schwer zu bestimmen.

5.2. Konjugierte Punkte und Kürzeste. Geodätische ohne konjugierte Punkte minimieren die Energie:

Lemma 27. Sei $c \in C^\infty([0, b], M)$ Geodätische ohne konjugierte Punkte, und $h_s(t)$ eine eigentliche Variation von c mit $h_s \neq c$ für $s \neq 0$. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass $E(c) < E(h_s)$ gilt für alle $0 < |s| < \varepsilon$.

Für Aussage und Beweis ist es sinnvoll, an den Fall zu denken, dass c Doppelpunkte besitzt: Es entsteht keine zulässige Vergleichskurve h_s , wenn man die Schleife der Kurve am Doppelpunkt abschneidet.

Beweis. Der Beweis ergibt sich aus dem Beweis von Satz II.35 folgendermaßen. Es sei $\sigma(t) = tu \in T_p M$ für $t \in [0, b]$ der Strahl mit $\exp_p(\sigma(t)) = c(t)$. Nach Voraussetzung hat $d \exp_p$ den vollen Rang n auf σ .

Die Menge $\{u \in T_p M : \text{Rang}((d \exp_p)_u) = n\}$ ist offen. Daher enthält sie eine Umgebung U des Strahles σ . Da $[0, b]$ kompakt ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass für $|s| < \varepsilon$ die Kurven $t \mapsto h_s(t)$ in $\exp_p(U)$ liegen.

Weil U die Menge $\exp_p(U)$ differenzierbar überlagert, kann man h_s eindeutig liften zu einer Kurve $\tilde{h}_s \subset U$ (Satz 17). Nach der Bemerkung im Anschluss zu Satz II.35 ist $E(h_s) = E(\exp_p \tilde{h}_s) > E(\exp_p \sigma) = E(c)$. \square

Es gibt Fälle, bei denen die Einschränkung auf kleine $|s|$ nicht nötig ist, z.B. für den flachen Torus T^n – warum? Geben Sie andererseits ein Beispiel an, für das sehr wohl die Beschränkung auf kleine Variationen nötig ist.

Bemerkung. Die Tatsache, dass für eine Metrik *alle* Geodätischen frei von konjugierten Punkten sind, ist eine überraschend starke Aussage: H. Hopf vermutete, dass eine solche Metrik auf dem n -Torus T^n flach sein muss; dies wurde von Burago und Ivanov 1994 nachgewiesen.

5.3. Satz von Cartan-Hadamard. Im Falle nicht-positiver Krümmung ergibt ein einfacher Beweis eine starke Aussage:

Lemma 28. *Sei M Riemannsche Mannigfaltigkeit mit überall $K_p(\sigma) \leq 0$. Dann ist für jedes $p \in M$ der konjugierte Ort leer, $C(p) = \emptyset$ und, wo definiert, ist \exp_p lokaler Diffeomorphismus.*

Beweis. Sei $c: [0, T] \rightarrow M$ geodätisch und $J \in \mathcal{V}(c)$ Jacobifeld mit $J(0) = 0$. Wir zeigen: Ist $J(t) = 0$ für ein $t \in (0, T]$, so folgt $J \equiv 0$. Demnach hat keine Geodätische einen konjugierten Punkt, und nach Satz 26 ist \exp frei von kritischen Punkten.

Aus der Krümmungsschranke folgt

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} (\|J\|^2) &= \frac{d}{dt} g(J', J) = g(J', J') + g(J'', J) = \|J'\|^2 - g(R(J, c')c', J) \\ &= \|J'\|^2 - \underbrace{K(J, c')}_{\geq 0 \text{ n.V.}} \underbrace{(\|c'\|^2 \|J\|^2 - g(c', J)^2)}_{\geq 0} \geq 0. \end{aligned}$$

Also ist $\|J\|^2$ konvex. Aber dann bedeuten die zwei Nullstellen $\|J(0)\|^2 = \|J(t)\|^2 = 0$ für unsere Funktion $\|J\|^2 \geq 0$, dass J auf $[0, t]$ identisch verschwindet. Nach Lemma 20 verschwindet dann J auf ganz $[0, T]$. \square

26. Vorlesung, 1.2.19

Wir kommen nun zum Hauptergebnis des Kapitels, das im Flächenfall bereits 1881 von Mangoldt bewiesen wurde und unabhängig davon von Hadamard 1898.

Satz 29 (Cartan 1928). *Sei M vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit mit $K_p(\sigma) \leq 0$ für alle $p \in M$, $\sigma \subset T_p M$ Ebenen. Dann gilt:*

- (i) $\exp_p: \mathbb{R}^n = T_p M \rightarrow M$ ist differenzierbare Überlagerung für jedes $p \in M$.
- (ii) Ist speziell M einfach zusammenhängend, so ist M diffeomorph zu \mathbb{R}^n .

Beispiele. 1. Für den Torus T^n ist $\exp_p: \mathbb{R}^n \rightarrow T^n$ sogar isometrische Überlagerung.

2. Für die in Satz 50 konstruierten hyperbolischen Flächen Σ_g (mit Krümmung -1) ist \mathbb{H}^2 die isometrische Überlagerung. Das gleiche gilt für beliebige Quotienten von \mathbb{R}^n oder \mathbb{H}^n unter diskreten Gruppenoperationen.

Um Geodätische effektiv einsetzen zu können, werden wir im nächsten Lemma, das den technischen Hauptschritt des Beweises darstellt, sogar isometrische Überlagerungen betrachten.

Lemma 30. *Sei $\varphi: (E, h) \rightarrow (M, g)$ lokale Isometrie zusammenhängender Riemannscher Mannigfaltigkeiten. Ist E vollständig, so ist φ eine isometrische Überlagerung. Insbesondere ist auch M vollständig.*

Beweis. Wir gehen in mehreren Schritten vor.

1. *Geodätische liften und M ist vollständig.* Sei $p \in \varphi(E)$ also $p = \varphi(\tilde{p})$. Für jedes $v \in T_p M$ existiert eine Geodätische $c: [0, T) \rightarrow M$ mit $c(0) = p$ und $c'(0) = v$. Weil φ lokale Isometrie ist, ist $d\varphi_{\tilde{p}}: T_{\tilde{p}}E \rightarrow T_p M$ ein Isomorphismus, so dass $\tilde{v} \in T_{\tilde{p}}E$ existiert mit $d\varphi_{\tilde{p}}(\tilde{v}) = v$. Wir wählen \tilde{c} als die Geodätische mit $\tilde{c}(0) = \tilde{p}$ und $\tilde{c}'(0) = \tilde{v}$. Weil E vollständig ist, ist \tilde{c} auf ganz \mathbb{R} definiert. Weiter ist φ lokale Isometrie und damit $\varphi \circ \tilde{c}$ ebenfalls Geodätische. Diese Geodätische hat die gleichen Anfangswerte wie c . Also stimmt sie nach dem Eindeutigkeitssatz auf $[0, T)$ mit c überein und wird durch $\varphi \circ \tilde{c}$ nach ganz \mathbb{R} fortgesetzt. Damit ist \exp_p auf ganz \mathbb{R}^n definiert und M ist tatsächlich vollständig.

2. *φ ist surjektiv.* E und damit auch $\varphi(E)$ ist nicht leer. Weiter ist $\varphi(E)$ offen in M , weil φ lokaler Diffeomorphismus ist, und $\varphi(E)$ abgeschlossen, weil $\varphi(E)$ vollständig ist. Schließlich ist M zusammenhängend, so dass $\varphi(E) = M$ folgt.

3. *φ ist differenzierbare Überlagerung.* Wir müssen für jedes $p \in M$ eine Umgebung $U = U(p)$ finden, so dass $\varphi^{-1}(U) = \coprod_{\alpha \in A} \tilde{U}_\alpha$ ist und jedes $\varphi: \tilde{U}_\alpha \rightarrow U$ Diffeomorphismus. Dazu treffen wir die folgenden Wahlen:

- Es sei $U := B_\varepsilon(p)$ ein normaler Ball, d.h. das Bild der injektiven Abbildung \exp_p .
- Es sei $\varphi^{-1}(p) = \{\tilde{p}_\alpha : \alpha \in A = A(p)\}$ und
- $\tilde{U}_\alpha := \{\tilde{q} \in E : d(\tilde{q}, \tilde{p}_\alpha) < \varepsilon\}$.

Wir weisen die Behauptung in drei einzelnen Schritten nach:

a) *Die \tilde{U}_α sind disjunkt.* Sei dazu $\alpha \neq \beta$. Nach Hopf-Rinow existiert eine Kürzeste \tilde{c} in E von \tilde{p}_α nach \tilde{p}_β . Dann ist $c := \varphi \circ \tilde{c}$ eine geschlossene Geodätische mit Anfangs- und Endpunkt p . Weil U normal gewählt ist, enthält c am Anfang und Ende jeweils eine radiale Geodätische der Länge ε . Damit ist $L(c) \geq 2\varepsilon$ und wegen der Isometrieeigenschaft hat auch die Kürzeste Länge $L(\tilde{c}) \geq 2\varepsilon$. Damit ist $d(\tilde{p}_\alpha, \tilde{p}_\beta) \geq 2\varepsilon$, so dass sich die Mengen \tilde{U}_α und \tilde{U}_β nicht schneiden.

b) $\varphi^{-1}(U) = \coprod_{\alpha \in A} \tilde{U}_\alpha$. Jeder Punkt von \tilde{U}_α hat Abstand höchstens ε von \tilde{p}_α . Unter der lokalen Isometrie φ hat daher jeder Bildpunkt höchstens Abstand ε von p . Dies zeigt $\varphi(\tilde{U}_\alpha) \subset U$, so dass zu zeigen verbleibt $\varphi^{-1}(U) \subset \bigcup_{\alpha \in A} \tilde{U}_\alpha$. Sei dazu $\tilde{q} \in \varphi^{-1}(U)$. Dann ist $q := \varphi(\tilde{q}) \in U$, also $r := d(p, q) < \varepsilon$. Damit existiert eine Geodätische von q nach p der

Länge $L(c) = r$. Sei nun $\tilde{c}: [0, r] \rightarrow E$ der Lift von c mit Anfangspunkt $\tilde{c}(0) = \tilde{q}$. Das Bild des Endpunkts ist $\varphi(\tilde{c}(r)) = c(r) = p$, so dass ein $\alpha \in A$ existiert mit $\tilde{c}(r) = \tilde{p}_\alpha$. Wegen $d(\tilde{p}_\alpha, \tilde{q}) = L(\tilde{c}) = r < \varepsilon$ gilt $\tilde{q} \in \tilde{U}_\alpha$.

c) $\varphi: \tilde{U}_\alpha \rightarrow U$ ist *Diffeomorphismus*. Jedenfalls ist φ lokaler Diffeomorphismus. Weiterhin ist φ bijektiv, denn wegen des Eindeutigkeitsatzes hat jede Geodätische mit Startpunkt p in U ein eindeutiges Urbild mit Startpunkt $\tilde{p}_\alpha \in \tilde{U}_\alpha$. \square

Beweis von Hadamard-Cartan. M ist vollständig, daher ist $\exp_p: T_p M \rightarrow M$ definiert, und nach Lemma 28 lokaler Diffeomorphismus. Also wird $(E := T_p M, h)$ zur Riemannschen Mannigfaltigkeit, indem wir die Metrik zurückziehen durch

$$h_u(v, w) := g((d \exp_p)_u v, (d \exp_p)_u w).$$

Dann wird $\exp_p: (T_p M, h) \rightarrow (M, g)$ zu einer lokalen Isometrie.

Um Lemma 30 anwenden zu können, zeigen wir nun: $(T_p M, h)$ ist vollständig. Ursprungsstrahlen von $T_p M$ bildet \exp_p auf Geodätische durch p ab. Da \exp_p lokale Isometrie ist, sind die Ursprungsstrahlen in $(T_p M, h)$ geodätisch. Weiterhin sind sie nach Bogenlänge parametrisiert und haben daher unendliche h -Länge. Das bedeutet, dass die Riemannsche Mannigfaltigkeit $(T_p M, h)$ eine auf ganz \mathbb{R}^n definierte Exponentialabbildung $\exp_0: \mathbb{R}^n \rightarrow (T_p M, h)$ besitzt. Nach Satz II.42 folgt daraus die Vollständigkeit von $(T_p M, h)$.

Dann folgt (i) aus Lemma 30 durch Vergessen der Metrik h . Die Aussage (ii) folgt aus (i) nach Korollar 18. \square

Der Beweis zeigt noch etwas mehr. Ein *Pol* p einer vollständigen Mannigfaltigkeit M ist ein Punkt, für den alle Geodätischen durch p keine konjugierten Punkte besitzen. Wenn nun ein Pol existiert, so ist $\exp_p: T_p M \rightarrow M$ eine Überlagerung, und M ist diffeomorph zu \mathbb{R}^n , wenn $\pi_1(M) = 0$. Beispielsweise ist der Ursprung ein Pol für das Rotationsparaboloid, und tatsächlich ist das Paraboloid diffeomorph zu \mathbb{R}^2 .

Die Sphären S^n sind einfach zusammenhängend für $n \geq 2$, und als kompakte Mannigfaltigkeiten mit jeder Riemannschen Metrik vollständig. Teil (ii) des Satzes von Cartan ergibt daher:

Korollar 31. S^n besitzt keine Riemannsche Metrik mit Krümmung $K \leq 0$.

5.4. Ausblick auf Sätze zu Topologie und Krümmung. Wir haben gesehen, dass sich Riemannsche Mannigfaltigkeiten M je nach Krümmung ganz verschieden verhalten:

- (Myers) Ist $K > \varepsilon > 0$, so ist M kompakt mit endlicher Fundamentalgruppe.
- (Synge) Ist $K > 0$ und M kompakt von gerader Dimension, so ist $\pi_1(M) = 0$.
- (Cartan) Ist $K \leq 0$, so ist die Überlagerung \tilde{M} diffeomorph zu \mathbb{R}^n .

Insbesondere verhalten sich Mannigfaltigkeiten mit konstanter Krümmung sehr verschieden. Um dies im einzelnen zu sehen, muss man untersuchen welche Gruppen auf solchen Mannigfaltigkeiten operieren können. Man zeigt mithilfe von Überlagerungstheorie:

Satz 32 (Killing, Hopf). *Sei M vollständige zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit mit konstanter Krümmung $K \equiv -1, 0$, oder 1 . Dann ist M isometrisch zu \tilde{M}/Γ , wobei \tilde{M} für $\mathbb{H}^n, \mathbb{R}^n$ bzw. \mathbb{S}^n steht, und $\Gamma = \pi_1(M)$ diskrete Untergruppe der Isometriegruppe von M ist.*

Je nach dem Wert der Krümmung erhält man folgende Möglichkeiten:

- $K \equiv 0$: Dies sind Tori oder andere Quotienten, die beispielsweise durch Division von \mathbb{R}^n durch ein Gitter $\Gamma^k := \{\sum_{i=1}^k \lambda_i v_i : \lambda_i \in \mathbb{R}\}$ vom Rang $k \leq n$ entstehen (die v_i sind linear unabhängig).
- $K \equiv 1$: In geraden Dimensionen sind die einzigen fixpunktfreien Isometrien von \mathbb{S}^n die Inversionen, so dass in diesem Falle M entweder \mathbb{S}^n oder $\mathbb{R}P^n$ sein muss. In ungeraden Dimensionen hat J.A. Wolf 1967 alle endlichen Untergruppen von $O(n+1)$ bestimmt, siehe das Buch *Spaces of constant curvature* von 1967. Das einfachste nicht-triviale Beispiel ist \mathbb{S}^3 : Die *Linsenräume* geben ein Beispiel für Quotientenräume von \mathbb{S}^3 (siehe Übungen), es gibt aber noch weitere Typen.
- $K \equiv -1$: Dieser Fall ist reichhaltiger und daher schwerer zu analysieren; man muss diskrete Untergruppen von $O_+(n+1, 1)$ studieren. Dabei unterscheidet man:
 - * In Dimension $n = 2$ klassifiziert das Geschlecht die kompakten orientierten Flächen bis auf Diffeomorphie. Für jedes Geschlecht $g \geq 2$ gibt der $(6g-6)$ -dimensionale Teichmüllerraum die verschiedenen Isometrietypen hyperbolischer Flächen an.
 - * In höherer Dimension $n \geq 3$ bestimmt jedoch die Topologie den Isometrie-Typ von hyperbolischen Mannigfaltigkeiten mit endlichem Volumen, d.h. speziell im kompakten Fall: Jeder Diffeomorphismus, der einen Isomorphismus der Fundamentalgruppe induziert, ist Isometrie (sogenannte Mostow-Rigidität, 1968). Z.B. ist das Volumen einer 3-Mannigfaltigkeit allein durch den topologischen Typ bestimmt. Eine explizite Klassifikation ist bislang nicht gegeben worden.

Im Falle nicht-konstanter Krümmung gibt es *Uniformisierungssätze*: Für Dimension 2 existiert je nach Geschlecht $g = 0, 1, \geq 2$ eine Metrik mit konstanter Krümmung $1, 0, -1$. Thurstons *Geometrisierungsprogramm* ist ein entsprechender Uniformisierungssatz in Dimension $n = 3$. Man benötigt in diesem Fall eine Zerlegung in Mannigfaltigkeiten von acht verschiedenen Typen, die allesamt homogene 3-Mannigfaltigkeiten sind. Perelman hat diese Zerlegung 2003 bewiesen. Höhere Dimensionen sind nicht mit den gleichen Methoden behandelbar.

Es gibt viele weitere interessante Fragen und Entwicklungen in der Richtung Topologie und Geometrie. Eine besonders bekannte Aussage in dieser Richtung dürfte der *Satz von Toponogow* sein. Sei M vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit mit einer unteren Schranke an die Schnittkrümmung

$$K \geq \kappa \in \mathbb{R}.$$

Der Satz von Toponogov betrachtet Dreiecke. Dabei ist ein *Dreieck* definiert als eine topologische Kreisscheibe, die von einer geschlossenen Randkurven aus drei Kürzesten berandet wird. Betrachten wir als Vergleichsräume die einfach zusammenhängenden zweidimensionalen Räume $M(\kappa)$ mit konstanter Krümmung κ , also $\mathbb{S}^2, \mathbb{R}^2, \mathbb{H}^2$ mit skalierten Metriken. Dann hat man explizite Formeln für die Kantenlängen, z.B. gibt der *Kosinussatz* in einer sphärischen, euklidischen oder hyperbolischen Variante an, wie groß eine Kantenlänge c ist, wenn man die anderen beiden Kantenlängen a, b und den eingeschlossenen Winkel γ kennt. Sind diese Daten gegeben und minimieren die Kanten, so ist c eine monoton fallende Funktion in κ (soweit definiert), d.h. hyperbolische Dreiecke haben die längste Kante. Es sei noch bemerkt, dass geodätische Dreiecke in Räumen konstanter Krümmung stets in einer total geodätischen Untermannigfaltigkeit der Dimension 2 liegen, so dass diese Dimension zum Vergleichen ausreicht.

Der Satz von Toponogow besagt, dass auch bei variabler Krümmung die Kantenlänge c_M nach oben durch die Länge $c_{M(\kappa)}$ im Vergleichsraum mit der unteren Krümmungsschranke abgeschätzt wird:

$$c_M \leq c_{M(\kappa)}$$

Beweise sind nicht ganz einfach und finden sich in [P, S.339ff] oder [CE, Ch.2].

Der Satz von Toponogov gibt zum einen eine besonders einprägsame Interpretation der Krümmung. Zum anderen liegt seine Bedeutung darin, dass er es in einer Variante erlaubt, auch für metrische Räume Krümmungsschranken zu definieren. Dazu muss man Dreiecke mit gleicher Seitenlänge betrachten, und die Längen von Diagonalen vergleichen (also von Geodätischen, die von einer Ecke z.B. zum Mittelpunkt der gegenüberliegenden Seite laufen). Wenn stets eine Ungleichung gilt, kann man dadurch eine Krümmungsschranke für metrische Räume definieren. In diesem Sinn hat z.B. ein Würfel nicht-negative Krümmung.

27. Vorlesung, 6.2.19

6. RIEMANNSCHE UNTERMANNIGFALTIGKEITEN

Wir verallgemeinern in diesem Abschnitt die Flächentheorie. Statt \mathbb{R}^{n+k} betrachten wir nun eine umgebende semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit (\overline{M}^{n+k}, g) .

Definition. Eine *semi-Riemannsche Untermannigfaltigkeit* M^n mit Kodimension $k \in \mathbb{N}$ ist eine Untermannigfaltigkeit einer semi-Riemannschen Mannigfaltigkeit \overline{M}^{n+k} , so dass auch die auf M^n induzierte Metrik semi-Riemannsch ist.

Wir unterstellen also stets, dass die mittels der Einbettung

$$\iota: M^n \rightarrow \overline{M}^{n+k}, \quad \iota(x) = x,$$

von (\overline{M}^{n+k}, g) auf M^n zurückgezogene Metrik ι^*g semi-Riemannsch ist, also nicht-degeneriert und von konstantem Index. Ein Beispiel liefert das Hyperboloid-Modell des hyperbolischen Raums $H^n \subset \mathbb{R}_1^{n+1}$.

Wir werden die Inklusionsabbildung nicht ausschreiben, und identifizieren Tangentialvektoren $v \in T_p M$ mit ihren Bildern $d\iota(v) \in T_{\iota(p)} \overline{M}$. Entsprechend schreiben wir $\mathcal{V}(M)$ statt $d\iota(\mathcal{V}(\overline{M}))$ für längs $M = \iota(M)$ definierte *tangentiale* Vektorfelder.

Weil wir allein lokale Theorie betreiben, verallgemeinert sich alles, was wir tun, sinngemäß auf den Fall immersierter Mannigfaltigkeiten $F: (M^n, F^*g) \rightarrow (\overline{M}^{n+k}, g)$. In der Tat ist die Immersion nach Einschränkung auf geeignete offene Teilmengen $U \subset M$ eine Einbettung, und $F(U)$ wird Untermannigfaltigkeit von \overline{M} .

6.1. Zweite Fundamentalform. Es sei $\overline{\nabla}$ der Levi-Civita-Zusammenhang und \overline{R} der Krümmungstensor von \overline{M} , sowie entsprechend ∇ und R diese Größen für M . Unser Ziel ist die Beziehung von ∇ zu $\overline{\nabla}$ und R zu \overline{R} zu klären, wenn die Auswertung auf tangentialen Vektorfeldern stattfindet. Zum Ableiten ist es nötig, Vektorfelder $X \in \mathcal{V}(M)$ auf einer Umgebung von M in \overline{X} fortzusetzen; die Fortsetzung sei mit \overline{X} bezeichnet.

In Punkten $p \in M$ zerlegen wir das Tangentialbündel von \overline{M} orthogonal in

$$T_p \overline{M} = T_p M \oplus N_p M \cong \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^k.$$

Dabei ist $N_p M := \{v \in T_p \overline{M} : g(v, w) = 0 \text{ für alle } w \in T_p M\}$ der *Normalraum* in p . Er definiert ein *Normalenbündel* NM . Es ist eine Übung in linearer Algebra zu zeigen, dass die Existenz der orthogonalen Zerlegung äquivalent dazu ist, dass die Einschränkung der Metrik g auf $T_p M$ nicht-degeneriert ist.

Wir haben dann differenzierbare orthogonale Projektionen, definiert für jedes $p \in M$:

$$\Pi: T_p \overline{M} \rightarrow T_p M, \quad \perp: T_p \overline{M} \rightarrow N_p M$$

Wir bezeichnen auf M definierte Vektorfelder von \overline{M} , deren Werte (auf M) im Normalenbündel NM liegen, mit $\mathcal{N}(M)$. Für uns wird wichtig sein, dass für tangentielle Vektorfelder auf M die Lie-Klammer unabhängig von einer Fortsetzung ist und dass sie wiederum

tangential ist:

$$(49) \quad X, Y \in \mathcal{V}(M) \quad \Rightarrow \quad [X, Y] = [\overline{X}, \overline{Y}] \in \mathcal{V}(M)$$

Die Unabhängigkeit von der Fortsetzung folgt daraus, dass $[X, Y]$ in p als Vektorfeld bereits durch $X(p)$ und $Y(p)$ definiert ist. Die Tangentialität folgt daraus, dass Integralkurven von X und Y sicherlich innerhalb von M verlaufen. Also muss auch die Ableitung an Endpunktsvektoren von Maschen wieder in M liegen, wenn wir die Sprechweise von Kapitel I.3.3 benutzen.

Als Alternative füge ich noch einen Beweis dieser Behauptung durch Nachrechnen ein. Dazu sei allgemeiner $\varphi: M \rightarrow \tilde{M}$. Dann heißen $X \in \mathcal{V}(M)$ und $\tilde{X} \in \mathcal{V}(\tilde{M})$ φ -verwandt, wenn für alle $p \in M$ gilt:

$$d\varphi_p(X(p)) = \tilde{X}(\varphi(p)) \quad \text{bzw. kurz} \quad d\varphi X = \tilde{X} \circ \varphi.$$

Lemma 33. Seien $X, Y \in \mathcal{V}(M)$ Vektorfelder, die φ -verwandt zu $\tilde{X}, \tilde{Y} \in \mathcal{V}(\tilde{M})$ sind. Dann ist auch $[X, Y]$ ein φ -verwandtes Feld zu $[\tilde{X}, \tilde{Y}]$, d.h. es gilt $d\varphi[X, Y] = [\tilde{X}, \tilde{Y}] \circ \varphi$.

Beweis. Zuerst stellen wir fest, dass die Identität $\partial_X f = df(X)$ zusammen mit der Kettenregel ergibt:

$$(50) \quad \partial_X(f \circ \varphi) = d(f \circ \varphi)(X) = df(d\varphi(X)) = (df(\tilde{X})) \circ \varphi = (\partial_{\tilde{X}} f) \circ \varphi \quad \text{für alle } f \in C^\infty(\tilde{M})$$

Für $f \in C^\infty(\tilde{M})$ wenden wir nun (50) zweimal an:

$$\partial_X(\partial_Y(f \circ \varphi)) = \partial_X((\partial_{\tilde{Y}} f) \circ \varphi) = (\partial_{\tilde{X}} \partial_{\tilde{Y}} f) \circ \varphi \quad \Rightarrow \quad \partial_{[X, Y]}(f \circ \varphi) = (\partial_{[\tilde{X}, \tilde{Y}]} f) \circ \varphi$$

Andererseits ist nach (50) auch $\partial_{[X, Y]}(f \circ \varphi) = (\partial_{d\varphi[X, Y]} f) \circ \varphi$. Durch Vergleich ergibt sich die Behauptung. \square

Es folgt in unserer Situation $d\iota[X, Y] = [d\iota X, d\iota Y] \circ \iota$ bzw. $[\overline{X}, \overline{Y}] = [\overline{X}, \overline{Y}]$.

Die wesentliche Idee der Flächentheorie ist es, Vektoren in tangentialen und normalen Anteil zu zerlegen. Dieselbe Strategie verfolgen wir hier. Weil wir im vorliegenden Abschnitt noch beliebige Kodimension zulassen, betrachten wir die ganze Normalkomponente der kovarianten Ableitung anstelle des Skalarprodukts der zweiten Ableitungen mit einer Einheitsnormale $\nu: \overline{\nabla_X} \overline{Y}$:

Definition. Die (vektorwertige) zweite Fundamentalform der Untermannigfaltigkeit M von \overline{M} ist

$$B: \mathcal{V}(M) \times \mathcal{V}(M) \rightarrow \mathcal{N}(M), \quad B(X, Y) := \perp(\overline{\nabla_X} \overline{Y}).$$

Lemma 34. Die zweite Fundamentalform ist

- (i) wohldefiniert (unabhängig von den benutzten Fortsetzungen),
- (ii) $C^\infty(M)$ -bilinear,
- (iii) symmetrisch.

Beweis. (iii) $B(X, Y) - B(Y, X) = \perp(\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y} - \bar{\nabla}_{\bar{Y}}\bar{X}) \stackrel{\bar{\nabla} \text{ symm.}}{=} \perp([\bar{X}, \bar{Y}]) \stackrel{(49)}{=} 0$

(i),(ii) Nach Definition von B hängt $X \mapsto B(X, Y)$ nicht von der Fortsetzung \bar{X} ab, und diese Zuordnung ist $C^\infty(M)$ -linear. Wegen Symmetrie gilt das genauso für $Y \mapsto B(X, Y)$. \square

Nun behandeln wir die Tangentialkomponente. Für immersive Untermannigfaltigkeiten M des \mathbb{R}^{n+k} definierte der Tangentialanteil der euklidischen Richtungsableitung gerade die kovariante Ableitung. Bei Unterdrückung von dF in der Notation lautete diese Definition $\nabla_X Y := \Pi(\partial_X Y)$. Wir hatten dann festgestellt, dass dies genau der Levi-Civita-Zusammenhang von $M \subset \mathbb{R}^{n+k}$ ist (Satz II.10). Das gleiche stellen wir nun in der verallgemeinerten Situation fest:

Satz 35. *Sei $\bar{\nabla}$ der Levi-Civita-Zusammenhang von (\bar{M}, g) . Dann erfüllt der Levi-Civita-Zusammenhang ∇ von (M, ι^*g) die Identität*

$$(51) \quad \nabla_X Y = \Pi(\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y}) \quad X, Y \in \mathcal{V}(M).$$

Insbesondere ist $\Pi(\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y})$ unabhängig von der Wahl der Fortsetzungen \bar{X}, \bar{Y} von X, Y .

Beweis. Wir weisen für $\Pi(\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y})$ diejenigen Eigenschaften nach, die den Levi-Civita-Zusammenhang ∇ auf M nach Satz II.17 eindeutig bestimmen. Dann folgt die Identität (51). Weil wir die Eigenschaften nur für $p \in M$ nachweisen, lassen wir gegebenenfalls Querstriche weg.

- $C^\infty(M)$ - bzw. \mathbb{R} -Linearität: Weil die Tangentialprojektion $C^\infty(M)$ -linear ist, werden diese Eigenschaften von $\bar{\nabla}$ ererbt.

- Derivativität in Y . Sie folgt aus der Derivativität von $\bar{\nabla}$ und wegen $\Pi(\bar{Y}) = Y$ auf M :

$$\Pi(\bar{\nabla}_{\bar{X}}f\bar{Y}) = \Pi(\partial_X f Y + f\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y}) = \partial_X f Y + f \Pi(\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y}) \quad \forall f \in C^\infty(M).$$

- Symmetrie/Torsionsfreiheit:

$$\Pi(\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y}) - \Pi(\bar{\nabla}_{\bar{Y}}\bar{X}) \stackrel{\bar{\nabla} \text{ symm.}}{=} \Pi([\bar{X}, \bar{Y}]) \stackrel{(49)}{=} [X, Y]$$

- Verträglichkeit mit der Metrik: Für $X, Y, Z \in \mathcal{V}(M)$ gilt wie gewünscht

$$\partial_X g(Y, Z) \stackrel{\bar{\nabla} \text{ vertr.}}{=} g(\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y}, Z) + g(Y, \bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Z}) = g(\Pi(\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y}), Z) + g(Y, \Pi(\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Z})). \quad \square$$

Beispiele. 1.. Für die Sphäre $M = \mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ und für das Hyperboloid-Modell $M = H^n \subset \mathbb{R}_1^{n+1}$ von \mathbb{H}^n gilt $T_p M = p^\perp$. Es folgt mit der jeweiligen Metrik $\langle \cdot, \cdot \rangle_*$:

$$(52) \quad \nabla_X Y(p) = \partial_X Y(p) - \langle \partial_X Y(p), p \rangle_* p.$$

2. Eine Kurve c in M ist genau dann eine Geodätische von M , wenn $0 = \nabla_{c'} c' = \Pi(\bar{\nabla}_{c'} c')$ gilt, d.h. wenn der Beschleunigungsvektor $\bar{\nabla}_{c'} c'$ normal ist.

Korollar 36 (Gauß-Formel). *Angewendet auf tangentielle Felder hat $\bar{\nabla}$ in Punkten aus M folgende orthogonale Zerlegung in Tangential- und Normalkomponente:*

$$(53) \quad \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y} = \nabla_X Y + B(X, Y) \in \mathcal{V}(M) \oplus \mathcal{N}(M) \quad \text{für alle } X, Y \in \mathcal{V}(M).$$

Insbesondere hängt $\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y}$ für tangentielle Felder nicht von der Fortsetzung von Y ab. Daher lassen wir von nun an bei Vektorfeldern die Kennzeichnung der Fortsetzung weg.

Auf Kurven angewendet, ergibt das Korollar

$$\bar{\nabla}_{c'} c' = \nabla_{c'} c' + B(c', c').$$

Wenden wir das auf beliebiges $c(0)$ und $c'(0)$ an, so erhalten wir (vergleiche Abschnitt 6.3):

Korollar 37. *Eine semi-Riemannsche Untermannigfaltigkeit M von \bar{M} ist genau dann total geodätisch, wenn $B \equiv 0$ gilt.*

Beispiel. Für die Sphäre $\bar{M} = \mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ oder den Hyperbolischen Raum $\bar{M} = H^n \subset \mathbb{R}_1^{n+1}$ geben wir total geodätische Untermannigfaltigkeiten an. Es sei $V \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ein Unterraum der Dimension $2 \leq d \leq n$, und $M^{d-1} := V^d \cap \bar{M}^n$ Untermannigfaltigkeit. Für $d = 2$ ist dies ein sphärischer oder hyperbolischer Großkreis (siehe Satz 48), für $d \geq 3$ sind dies Großsphären, etc. Hat man Vektorfelder an die Untermannigfaltigkeit, $X, Y \in \mathcal{V}(M^{d-1})$, so liegt offenbar $\partial_X Y(p)$ im Unterraum V . Nach (52) liegt auch die kovariante Ableitung in V . Also ist $\perp(\nabla_X Y) = 0$, d.h. es gilt $B \equiv 0$. In beiden Fällen ist also M^{d-1} total geodätische Untermannigfaltigkeit. (Was ändert sich, wenn V ein affiner Unterraum ist, der nicht die 0 enthält?)

6.2. Gauß-Gleichung. Wir erinnern an die Flächentheorie. Die Gauß-Formel zerlegt dort zweite Ableitungen in Tangential- und Normalanteil, die Weingartenformel beschreibt die Ableitung der Normale, die tangential ist. Diese Darstellungen werden benutzt, um die Integrabilitätsbedingungen herzuleiten, also die Gauß- und Codazzi-Gleichungen.

In der Flächentheorie haben wir die Identität $g(SX, Y) = -b(X, Y)$. Weil wir hier aber beliebige Kodimension zulassen, hängt unsere Darstellung nun von der Wahl eines normalen Vektorfeldes ab. Die entsprechende Gleichung lautet:

Lemma 38 (Weingartenformel). *Seien $X, Y \in \mathcal{V}(M)$ und $N \in \mathcal{N}(M)$. Dann gilt auf M bezüglich beliebiger Fortsetzungen dieser Felder*

$$(54) \quad g(\bar{\nabla}_X N, Y) = -g(N, B(X, Y))$$

Beweis.

$$0 = \partial_X g(N, Y) = g(\bar{\nabla}_X N, Y) + g(N, \bar{\nabla}_X Y) \stackrel{(53)}{=} g(\bar{\nabla}_X N, Y) + g(N, B(X, Y)) \quad \square$$

Für das theorema egregium war die Gauß-Gleichung entscheidend. Sie verallgemeinert sich auf unsere Situation:

Satz 39 (Gauß-Gleichung). *Für tangentielle Vektorfelder $X, Y, Z, W \in \mathcal{V}(M)$ gilt*

$$g(\bar{R}(X, Y)Z, W) - g(R(X, Y)Z, W) = g(B(X, Z), B(Y, W)) - g(B(X, W), B(Y, Z)).$$

In den klassischen Gauß-Gleichungen der Flächentheorie ist der umgebende Raum flach, so dass \bar{R} verschwindet, und der verbleibende Krümmungstensorterm erscheint in der lokalen Schreibweise von III.(6) – vergleichen Sie! Hier jedoch erscheint die relative Krümmungsgröße B als Vermittlung zwischen den intrinsischen Krümmungen von M und \bar{M} .

Beweis. Wie in der Flächentheorie erhalten wir die Gauß-Gleichung dadurch, dass wir zweite Ableitungen in Tangential- und Normalanteil zerlegen. Wir benutzen dazu die Gauß-Formel. Der erste Schritt lautet

$$\begin{aligned} g(\bar{R}(X, Y)Z, W) &= g(\bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_Y Z - \bar{\nabla}_Y \bar{\nabla}_X Z - \bar{\nabla}_{[X, Y]} Z, W) \\ &\stackrel{(53)}{=} g(\bar{\nabla}_X (\nabla_Y Z + B(Y, Z)) - \bar{\nabla}_Y (\nabla_X Z + B(X, Z)) - \nabla_{[X, Y]} Z, W). \end{aligned}$$

Dabei haben wir beim Lie-Klammer-Term schon berücksichtigt, dass B normal ist und orthogonal auf W steht. Nun verwenden wir die Weingarten-Formel, um die beiden kovarianten Ableitungen von B zu ersetzen:

$$\begin{aligned} g(\bar{R}(X, Y)Z, W) &= g(\bar{\nabla}_X \nabla_Y Z, W) - g(\bar{\nabla}_Y \nabla_X Z, W) - g(\nabla_{[X, Y]} Z, W) \\ &\quad - g(B(Y, Z), B(X, W)) + g(B(X, Z), B(Y, W)) \end{aligned}$$

Wenn wir nun erneut die Zerlegung (53) anwenden, so spielt wegen der Tangentialität von W der Normalanteil von $\bar{\nabla}$ keine Rolle. Wir können daher $\bar{\nabla}$ durch ∇ ersetzen und die entstehenden Terme als Krümmungstensor R von M zusammenfassen. Dies liefert die Behauptung. \square

Setzen wir in der Gauß-Gleichung $Z = Y$ und $W = X$, erhalten wir nach Division im nicht-ausgearteten Riemannschen Fall folgende Beziehung der Schnittkrümmungen:

$$(55) \quad \bar{K}(X, Y) - K(X, Y) = \frac{\|B(X, Y)\|^2 - g(B(X, X), B(Y, Y))}{\|X\|^2 \|Y\|^2 - g^2(X, Y)}.$$

6.3. Krümmungsgrößen für Hyperflächen. Wir betrachten in diesem Abschnitt ausschließlich Untermannigfaltigkeiten mit Kodimension 1, also $\iota: M^n \rightarrow \overline{M}^{n+1}$; dabei beschränken wir uns auf den Riemannschen Fall. In diesem Fall nennen wir M^n eine *Hyperfläche* von \overline{M}^{n+1} . Wir führen die aus der Flächentheorie bekannten Größen ein:

Definition. Für eine Hyperfläche M definieren wir bezüglich eines lokal definierten Einheits-Normalenfeldes $N \in \mathcal{N}(M)$ die *Weingartenabbildung* [shape operator] durch

$$SX := -\overline{\nabla}_X N \quad \text{für } X \in \mathcal{V}(M)$$

und die *skalarwertige zweite Fundamentalform* $b: \mathcal{V}(M) \times \mathcal{V}(M) \rightarrow C^\infty(M)$ durch

$$(56) \quad b(X, Y) := g(B(X, Y), N) \stackrel{(54)}{=} g(SX, Y) \quad \Leftrightarrow \quad B(X, Y) = b(X, Y)N.$$

Die Weingartenabbildung S gibt an, wie sich die Normale an M ändert, wenn man in Richtung X auf der Hyperfläche läuft. Wie in der klassischen Flächentheorie gilt:

Lemma 40. *Die Weingartenabbildung nimmt tangentielle Werte an, d.h. $S: \mathcal{V}(M) \rightarrow \mathcal{V}(M)$ für alle $X \in \mathcal{V}(M)$ oder $S \in \mathcal{T}^{1,1}(M)$. Weiterhin ist sie selbstadjungiert, $g(SX, Y) = g(X, SY)$.*

Beweis. Die Tangentialität folgt aus $0 = \partial_X g(N, N) = 2g(\overline{\nabla}_X N, N)$. Weiter ist $b(X, Y) = g(B(X, Y), N)$ symmetrisch nach Lemma 34. Aus der Weingartenformel (54) folgt die Selbstadjungiertheit von S . \square

Wegen der Selbstadjungiertheit ist S diagonalisierbar. Punktweise existiert also eine Orthonormalbasis (E_i) von $T_p M$ sowie Zahlen λ_i , so dass $SE_i = \lambda_i E_i$.

Definition. Die *Gauß-Kronecker-Krümmung* ist

$$\det S = \lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_n,$$

und die *mittlere Krümmung* ist

$$H = \frac{1}{n} \text{Spur } S = \frac{1}{n}(\lambda_1 + \dots + \lambda_n).$$

Hyperflächen mit $H \equiv 0$ heißen *minimal*.

Beispiele. 1. Wir betrachten $M = \mathbb{S}^n$ als Hyperfläche von $\overline{M} = \mathbb{S}^{n+1}$. Dabei sei $\mathbb{S}^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+2}$ und die n -Sphäre z.B. als Äquator bezüglich der Pole $\pm e_{n+2}$ definiert, also

$$M := \{p \in \mathbb{S}^{n+1} : \langle p, e_{n+2} \rangle = 0\} \subset \mathbb{R}^{n+1} \times \{0\}.$$

Offenbar ist $N := e_{n+2}$ erstens ein Einheitsvektor, zweitens liegt N für Punkte p aus M im Tangentialraum von $T_p \overline{M}$ (denn $\langle p, e_{n+2} \rangle = 0$), und drittens ist N normal an M (setze in die Definition von M eine Kurve $c(t)$ anstelle von p ein). Ist aber N konstant, so sind wir

im besonders einfachen Fall $S = \bar{\nabla}_X N \equiv 0$. Also hat $M = \mathbb{S}^n \subset \mathbb{S}^{n+1}$ die Gauß-Kronecker-Krümmung 0 und ebenso mittlere Krümmung 0.

2. Ebenso für die Hyperfläche $M = H^n$ von $\bar{M} = \mathbb{H}^{n+1}$.

3. Allgemeiner gilt: Ist $M \subset \bar{M}$ total geodätisch, so ist $B = 0$, also auch $S = 0$ und alle $\lambda_i = 0$. Insbesondere verschwinden dann die beiden Krümmungen.

Um die Gauß-Gleichung (55) mit Hauptkrümmungen auszudrücken, benutzen wir $B(X, Y) = g(SX, Y)N$ und folgern

$$(57) \quad \bar{K}(X, Y) - K(X, Y) = \frac{g^2(SX, Y) - g(SX, X)g(SY, Y)}{\|X\|^2\|Y\|^2 - g^2(X, Y)}.$$

Verwendet man im Flächenfall $n = 2$ für X, Y eine Orthonormalbasis von Eigenvektoren, so ergibt sich in diesem Spezialfall

$$(58) \quad \bar{K}(T_p M) - K(p) = -\lambda_1(p)\lambda_2(p),$$

wobei wir $K(p)$ für die intrinsisch definierte Gauß-Krümmung von M^2 geschrieben haben. In gekrümmten 3-Mannigfaltigkeiten \bar{M}^3 ist die Gauß-Krümmung also nicht das Produkt der Hauptkrümmungen, sondern es gilt $K = \lambda_1\lambda_2 + \bar{K}(T_p M)$.

Beispiel. Die Untermannigfaltigkeit $M = \mathbb{S}^2$ von $\bar{M} = \mathbb{S}^3$ erfüllt $1 - 1 = 0 \cdot 0$.

Wir behandeln abschließend noch das Beispiel einer Riemannschen Untermannigfaltigkeit, die nicht total geodätisch ist, und zwar *Horosphären* des hyperbolischen Raumes. Dazu sei $(\bar{M}^{n+1}, g) = (U^{n+1}, \langle \cdot, \cdot \rangle / p_{n+1}^2)$ das Halbraummodell des hyperbolischen Raums \mathbb{H}^{n+1} . Eine Horosphäre entspricht dann der euklidischen Ebene

$$M^n = \{p \in U^{n+1} : p^{n+1} = 1\}.$$

Die Metrik g eingeschränkt auf M ist dann gerade die Standardmetrik $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Daher ist eine Horosphäre flach, sie hat also Schnittkrümmung $K \equiv 0$. Nun bestimmen wir S , ohne explizit auf Christoffel-Symbole zurückzugreifen.

Längs M ist $N = e_{n+1}$ eine Einheitsnormale. Uns interessiert $Sv = -\bar{\nabla}_v N$ für (horizontales) $v \in T_p M$.

Dazu betrachten wir zuerst den Spezialfall $n = 2$, für den $N = e_2$ eine Normale an die euklidische Gerade M^1 ist. Wir behaupten $\nabla_{e_1} e_1 = e_2$. Dazu kann man entweder für die Kurve $t \mapsto c(t) = (t, 1) \in U^2$ die Krümmung $\kappa = 1$ bestätigen (Übung). Oder man macht folgende Überlegung. Für den parametrisierten Einheitshalbkreis γ in U^2 ist die euklidische Rotationsgeschwindigkeit der Einheitstangente γ' im Punkt $p = (0, 1)$ dann -1 . Parametrisiert man γ als hyperbolische Geodätische so, dass in $p = (0, 1)$ die Tangente $\gamma' = e_1$ ist, so ist γ' parallel mit Rotationsgeschwindigkeit 0. Weil für beide Wahlen γ' in p übereinstimmt, schließen wir: Man muss also in p nur 1 addieren, um von der euklidischen auf die

hyperbolische Rotationsgeschwindigkeit zu kommen. Wenden wir dies auf unsere Kurve c an, deren Tangente euklidisch nicht rotiert, so muss sie hyperbolisch mit Geschwindigkeit 1 rotieren. Genau das ist aber unsere Behauptung.

Aus der Behauptung ergibt sich

$$2g(\nabla_{e_1} e_2, e_2) = \partial_{e_1} g(e_1, e_2) = 0 \quad \text{und} \quad g(\nabla_{e_1} e_2, e_1) = \partial_{e_1} g(e_2, e_1) - g(e_2, \nabla_{e_1} e_1) = -1,$$

und wir schließen $\nabla_{e_1} N = -e_1$ für die Normale $N = e_2$.

Nun machen wir die Betrachtung mehrdimensional. Dazu betrachten wir die obere $x_1 x_2$ -Ebene von \mathbb{R}^{n+1} als U^2 . Diese Ebene liegt total geodätisch in U^{n+1} , denn geodätische Halbkreise und Strahlen in U^2 sind auch geodätisch in U^{n+1} . Also folgern wir aus der Gültigkeit von $\nabla_{e_1} N = -e_1$ bezüglich U^2 auch $\nabla_{e_1} N = -e_1$ in $M^n \subset U^{n+1}$. Das gilt genauso für jede koordinaten-parallele Ebene U^2 in U^{n+1} . Also folgt $Se_i = e_i$ für $i = 1, \dots, n$ und damit $Sv = v$ für alle (horizontalen) $v \in T_p M$. Es gilt somit $\lambda_i = 1$ für $i = 1, \dots, n$. Die Gauß-Gleichung (58) ergibt also $-1 - 0 = -1 \cdot 1$. Weiterhin hat M^n Gauß-Kronecker Krümmung 1 und mittlere Krümmung 1. Im Vergleich zur total geodätischen Untermannigfaltigkeit (euklidische Hemisphäre) krümmt sich die flache Untermannigfaltigkeit M in Richtung N .

Dieses Ergebnis gilt auch für $M^n = \{p \in U^{n+1} : p^{n+1} = c\}$ für $c > 0$, denn $\Phi_c : p \mapsto cp$ ist eine Isometrie von U^{n+1} . Also wird \mathbb{H}^n sogar von Horosphären geblättert. Im Poincaré-Ball sind die Horosphären Sphären, die genau einen idealen Randpunkt enthalten.

Bemerkungen. 1. Wie in der klassischen Differentialgeometrie tauchen die Hauptkrümmungen als quadratische Terme einer Normalform auf.

2. Die hier dargestellte Theorie für Hyperflächen kann man auf den Fall höherer Kodimension verallgemeinern. Relativ zu einem beliebigen Einheitsnormalenfeld $N \in \mathcal{N}(M)$ definiert man die Weingartenabbildung $S_N(X) := -\bar{\nabla}_X N$; für jede Wahl von N ist S_N selbstadjungiert. Allerdings hängen nun die Hauptkrümmungsrichtungen von der Wahl von N ab, ebenso $\det S_N$ und H_N . Dennoch kann man z.B. Minimalität noch definieren als das Verschwinden von H_N für alle Wahlen von N . (Siehe [dC], Kap.6, für weitere Informationen und Literaturangaben.)

29. Vorlesung, 13.2.19

6.4. Codazzi-Gleichung für Hyperflächen. Wir kommen nun zu den Codazzi-Gleichungen, der zweiten Integrabilitätsbedingung im Hyperflächen-Fall. Sie enthalten Ableitungen der zweiten Fundamentalform:

Satz 41. *Sei M eine Hyperfläche der Riemannschen Mannigfaltigkeit \overline{M} und N lokal definiertes Einheits-Normalenfeld. Dann gilt*

$$(59) \quad g(\overline{R}(X, Y)Z, N) = (\nabla_X b)(Y, Z) - (\nabla_Y b)(X, Z) \quad \text{für alle } X, Y, Z \in \mathcal{V}(M).$$

Auf der rechten Seite von (59) stehen Tensorableitungen, wie wir sie in (24) definiert hatten:

$$(60) \quad \begin{aligned} (\nabla_X b)(Y, Z) &= \partial_X b(Y, Z) - b(\nabla_X Y, Z) - b(Y, \nabla_X Z) \\ -(\nabla_Y b)(X, Z) &= -\partial_Y b(X, Z) + b(\nabla_Y X, Z) + b(X, \nabla_Y Z) \end{aligned}$$

Beweis. Um die linke Seite von (59) zu berechnen, benutzen wir die Gauß-Formel:

$$\perp \overline{\nabla}_X \overline{\nabla}_Y Z = \perp \overline{\nabla}_X (\nabla_Y Z + b(Y, Z)N) = b(X, \nabla_Y Z)N + \perp \overline{\nabla}_X (b(Y, Z)N)$$

Für den letzten Term ergeben die Derivativität von $\overline{\nabla}$ und die Tangentialität von $\overline{\nabla}_X N$:

$$\perp \overline{\nabla}_X (b(Y, Z)N) = \partial_X b(Y, Z)N$$

Also lautet der gesuchte Ausdruck

$$g(\overline{R}(X, Y)Z, N) = b(X, \nabla_Y Z) + \partial_X b(Y, Z) - b(Y, \nabla_X Z) + \partial_Y b(X, Z) - b([X, Y], Z).$$

Wir erkennen rechts genau die Terme von (60), so dass (59) folgt. \square

Eine konstante Krümmung geht in die Codazzi-Gleichungen erstaunlicherweise nicht ein:

Korollar 42. *Falls die Mannigfaltigkeit \overline{M} konstante Krümmung hat, gilt für die Hyperfläche M*

$$(61) \quad (\nabla_X S)Y = (\nabla_Y S)X \quad \text{für alle } X, Y \in \mathcal{V}(M).$$

Beweis. Die Formel (10) für R bei konstanter Krümmung zeigt, dass R in diesem Fall tangential an M ist, also $\perp R(X, Y)Z = 0$. Damit verschwindet die linke Seite von (59). Zusätzlich haben wir die rechte Seite mit (26) umgeformt. \square

Benutzen wir (25), so können wir für (61) auch $\nabla_X(SY) - \nabla_Y(SX) - S([X, Y]) = 0$ schreiben.

Wir möchten noch eine besonders elegante Schreibweise der Codazzi-Gleichungen in einer Raumform angeben, auch wenn wir diese Formulierung nicht brauchen. Die aus der Vorlesung Mannigfaltigkeiten bekannte Formel für das Differential einer Form spezialisiert sich im Falle einer 1-Form ω auf

$$d\omega(X, Y) = \partial_X(\omega(Y)) - \partial_Y(\omega(X)) - \omega([X, Y]).$$

Ist M zusätzlich Riemannsch, so gilt aber auch mit Tensorableitungen

$$(62) \quad d\omega(X, Y) = (\nabla_X \omega)Y - (\nabla_Y \omega)X,$$

denn die rechte Seite ist nach Definition (24) gerade $\partial_X(\omega(Y)) - \omega(\partial_X Y) - \partial_Y(\omega(X))$. Nun kann man im vektorwertigen Fall (62) einfach zur Definition machen. Dann kann man (61) schreiben als

$$dS = 0.$$

30. Vorlesung, 15.2.19

6.5. Hauptsatz der Flächentheorie. Falls die umgebende Mannigfaltigkeit konstante Schnittkrümmung besitzt, dann sind die Gleichungen von Gauß und Codazzi Integrabilitätsbedingungen für Hyperflächen, d.h. der Hauptsatz der Flächentheorie verallgemeinert sich:

Satz 43. *Es sei (\overline{M}^{n+1}, g) eine Raumform, d.h. eine vollständige, zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit mit konstanter Krümmung κ . Weiter sei (M^n, h) einfach zusammenhängende Mannigfaltigkeit. Auf M sei ein symmetrisches $(0, 2)$ -Tensorfeld b gegeben, so dass b und die Krümmungstensoren \overline{R}, R die Gleichungen von Gauß und Codazzi erfüllen. Dann existiert eine isometrische Immersion von M nach \overline{M} mit zweiter Fundamentalform b bezüglich einer Wahl von Normalenfeld, eindeutig bis auf Isometrie von \overline{M} .*

Spivak gibt einen langen Beweis in Band IV, Chapter 7, Theorem 20 für einen allgemeineren Fall. In unserem Satz ist allerdings \overline{M} (bzw. die universelle Überlagerung davon) als S^n oder H^n nach \mathbb{R}^{n+1} eingebettet. Benutzt man dies wird der Beweis direkter und kürzer (siehe Aufgabe 14 bei Spivak hinter dem genannten Kapitel).

Ich möchte eine Anwendung dieses Satzes angeben, die den Bogen zu Minimalflächen und zu meiner eigenen Arbeit schlägt:

Satz 44 (Lawson 1970). *Sei M^2 einfach zusammenhängende 2-Mannigfaltigkeit. Eine minimale Immersion $f: M \rightarrow S^3$ mit Weingartenabbildung S existiert genau dann, wenn eine isometrische Immersion $\tilde{f}: M \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit mittlerer Krümmung $H \equiv 1$ existiert und Weingartenabbildung $\tilde{S} = JS + \text{id}$.*

Hierbei ist J die 90° -Drehung bezüglich der Metrik g , die von den isometrischen Immersionen f oder \tilde{f} induziert wird, also $Je_1 = e_2$ und $Je_2 = -e_1$ für eine ONB.

Man kann den Satz so verstehen, dass die umgebende Krümmung der Minimalfläche sich in mittlere Krümmung im flachen Raum verwandelt.

Beispiel. 1. S^2 ist einmal Minimalfläche in S^3 mit $S \equiv 0$ und zum anderen Fläche konstanter mittlerer Krümmung 1 in \mathbb{R}^3 mit $S \equiv \text{id}$.

2. Der Clifford-Torus (siehe Übungen) ist minimale Immersion von \mathbb{R}^2 nach S^3 ; der Satz liefert dann den Zylinder vom Radius $1/2$ als Immersion mit $H = 1$ in \mathbb{R}^3 . Beachten Sie, dass

man nicht Torus oder Zylinder für M wählen darf, weil sie nicht einfach zusammenhängend sind; die Schließung beider Flächen ist gewissermaßen zufällig.

Beweis. Wenn f existiert, sind die Gleichungen von Gauß und Codazzi in \mathbb{S}^3 erfüllt. Wir weisen nun diese Gleichungen für \tilde{f} in \mathbb{R}^3 nach. Ebenso die Umkehrung.

Wir nehmen dazu an, dass wir einen Punkt $p \in M$ betrachten, und zwei Einheitsvektoren $e_1, e_2 \in T_p M$ wählen, die Hauptkrümmungsrichtungen für f sind. Weil f minimal ist, lauten die Weingartenabbildungen in dieser Basis dann in jedem $p \in M$

$$S = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \tilde{S} = JS + \text{id} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}.$$

Man sieht zunächst, dass \tilde{S} mittlere Krümmung 1 hat, wir lassen den analogen Beweis der Umkehrung als Übung.

Die isometrischen Flächen f und \tilde{f} besitzen in jedem Punkt p dieselbe intrinsische Gauß-Krümmung $K = K(p)$. Daher lauten die beiden Gauß-Gleichungen

$$1 - K = \lambda^2 \quad \text{für } f \text{ laut (58)} \quad \text{und} \quad 0 - K = \lambda^2 - 1 \quad \text{für } \tilde{f} \text{ laut (57)}.$$

Diese beiden Gleichungen sind äquivalent!

Das gleiche zeigen wir nun für die Codazzi-Gleichungen, die wir in der Form $\nabla_X(SY) - \nabla_Y(SX) - S([X, Y]) = 0$ benutzen. Es reicht, Felder zu betrachten, die $[X, Y] = 0$ im betrachteten Punkt p erfüllen. Wir müssen dann zeigen $\nabla_X(SY) = \nabla_Y(SX)$ ist äquivalent zu der entsprechenden Gleichung für \tilde{S} . Wegen der Parallelität von J , siehe nachfolgendes Lemma, ist aber

$$\nabla_X(\tilde{S}Y) = \nabla_X((JS + \text{id})Y) = \nabla_X(JSY) + \nabla_X Y = J\nabla_X(SY) + \nabla_X Y.$$

Wieder sind die beiden Gleichungen äquivalent! □

Lemma 45. *Für jede orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit (M^2, g) gilt $\nabla J = 0$.*

Dabei ist J punktweise definiert dadurch, dass eine orientierte Orthonormalbasis $E_1, E_2 \in T_p M$ die Bilder $JE_1 = E_2$ und $JE_2 = -E_1$ hat.

Beweis. $(\nabla_X J)(Y) = 0$ ist äquivalent zu $\nabla_X(JY) = J\nabla_X Y$. Zum Nachweis gehen wir in Schritten vor.

1. Für $p \in M$ sei P paralleles Einheitsvektorfeld in Richtung X , also $\nabla_X P = 0$ in p . Wir behaupten, dass dann auch $\nabla_X(JP) = 0$ in p gilt. Weil (P, JP) Orthonormalbasis von $T_p M$ ist, folgt dies aus

$$g(\nabla_X(JP), P) = -g(JP, \nabla_X P) = 0 \quad \text{und} \quad g(\nabla_X(JP), JP) = \frac{1}{2} \partial_X \|JP\|^2 = 0.$$

2. Sei nun weiter $Y = fP$ mit $f \in C^\infty(M)$. Dann gilt in p

$$\nabla_X(JY) = \nabla_X(fJP) \stackrel{JP \text{ parallel}}{=} \partial_X f JP = J(\partial_X f P) \stackrel{P \text{ parallel}}{=} J\nabla_X(fP) = J\nabla_X Y.$$

Ebenso zeigt man $\nabla_X(J(fJP)) = J\nabla_X(fJP)$ und die Behauptung folgt wegen Linearität. \square

In jüngster Zeit sind durch B. Daniel auch Integrabilitätsbedingungen für Flächen in homogenen 3-Mannigfaltigkeiten angegeben worden. In jedem Punkt dieser Räume ist die Schnittkrümmung nicht konstant, sie stimmt aber in verschiedenen Punkten überein. Der Hauptsatz der Flächentheorie gilt auch noch in dieser Situation, und sogar der Satz von Lawson besitzt eine Verallgemeinerung.

6.6. Höhere Kodimension. Die dargestellte Theorie kann auf den Fall von höherer Kodimension $k \geq 1$ erweitert werden. Die Gauß-Gleichungen enthalten $g(\bar{R}(X, Y)Z, W)$ für vier tangentielle Felder. Die Codazzi-Gleichungen enthalten $g(\bar{R}(X, Y)Z, N)$ für drei tangentielle Felder und ein normales Feld. Im Falle der höheren Kodimension treten zu diesen Gleichungen die *Ricci-Gleichungen* hinzu, die $g(\bar{R}(X, Y)N_1, N_2)$ für zwei tangentielle Vektorfelder $X, Y \in \mathcal{V}(M)$ und zwei normale $N_1, N_2 \in \mathcal{N}(M)$ bestimmen. Wegen der Symmetrien von \bar{R} ist es unwesentlich, an welcher Stelle diese Einträge stehen. Im Falle konstanter Krümmung der umgebenden Mannigfaltigkeit sind die drei Gleichungen von Gauß, Codazzi und Ricci wiederum ein vollständiger Satz von Integrabilitätsbedingungen. Siehe [dC], Kapitel 6, für die Darstellung der Gleichungen im Falle höherer Kodimension.

Die auf Kodimension $k \geq 1$ verallgemeinerte Theorie ist auch konzeptionell interessant, weil sie das k -dimensionale Normalenbündel systematisch verwendet. Tatsächlich führt man auf dem Normalenbündel durch Projektion einen Zusammenhang ein:

$$\nabla_X^{\mathcal{N}} N := \perp \bar{\nabla}_X N, \quad X \in \mathcal{V}(M), \quad N \in \mathcal{N}(M).$$

Das Normalenbündel hat ebenfalls einen Krümmungstensor:

$$R^{\mathcal{N}}(X, Y)N := \nabla_X^{\mathcal{N}} \nabla_Y^{\mathcal{N}} N - \nabla_Y^{\mathcal{N}} \nabla_X^{\mathcal{N}} N - \nabla_{[X, Y]}^{\mathcal{N}} N, \quad X, Y \in \mathcal{V}(M), \quad N \in \mathcal{N}(M),$$

der die Ortsabhängigkeit der Parallelverschiebung im Normalenbündel misst: Ist $R^{\mathcal{N}} \equiv 0$, so kann man lokal eine parallele Orthonormalbasis des Normalenbündels finden, siehe [dC, Kapitel 6] oder [Spivak IV, Chapter 7]. Dies führt auf den allgemeineren Begriff von Zusammenhängen in Vektorbündeln über einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit, siehe z.B. [Lee], S.49. Sie verallgemeinert unsere Theorie des Zusammenhangs im Tangentialbündel.

Teil 4. Anhang: Übungsaufgaben**1. MANNIGFALTIGKEITEN***Aufgabe 1 – Quiz:*

Prüfen Sie die folgenden Behauptungen bzw. beantworten Sie:

1. Karten sind immer Homöomorphismen auf ihr Bild.
2. Jeder Atlas enthält alle zu ihm differenzierbar verträglichen Karten.
3. Das Quadrat $Q = \{0 \leq x, y \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2$ ist eine Mannigfaltigkeit.
4. Die Menge $\Gamma = \{y = \pm\sqrt{x}\} \subset \mathbb{R}^2$ ist eine Mannigfaltigkeit.
5. Sei $f \in \mathcal{D}(M)$ und $\varphi: M \rightarrow N$. Wofür stehen die Kurzschreibweisen $\frac{\partial}{\partial x_i}$, $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$?
6. Auf jedem Torus T^n gibt es ein nicht-verschwindendes Vektorfeld.
7. Sind die Ausdrücke $\partial_X f$ bzw. $\partial_Y \partial_X f$ an der Stelle p definiert, wenn man das Vektorfeld X nur in p kennt?

Aufgabe 2 – Polarkoordinaten:

Betrachten Sie die Mannigfaltigkeit $M := \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, sowie den Punkt $p = (1, 0) \in M$.

Gegeben seien zwei Karten um p : Einerseits die Karte $(x := \text{id}, M)$ und andererseits die Karte $(y, (0, \infty) \times \mathbb{R})$, so dass

$$y^{-1}: (0, \infty) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \longrightarrow M, \quad y^{-1}(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi).$$

- a) Wie lautet die Standardbasis $\{X_1, X_2\}$ bezüglich x ?
- b) Was ist die Standardbasis $\{Y_1, Y_2\}$ bezüglich y in p ? Drücken Sie diese in Termen von X_1 und X_2 aus.
- c) Berechnen Sie die Kartenwechsel $x \circ y^{-1}$ und $y \circ x^{-1}$.
- d) Berechnen Sie das Differential $d(x \circ y^{-1})_{y(p)}$.

Aufgabe 3 – Orientierbarkeit:

Zwei Karten (x, U) , (y, V) einer Mannigfaltigkeit M heißen *orientierbar verträglich*, wenn gilt

$$p \in U \cap V \quad \Rightarrow \quad \det(d(y \circ x^{-1}))_{x(p)} > 0.$$

Die Mannigfaltigkeit M heißt *orientierbar*, wenn es einen Atlas \mathcal{A} gibt, so dass alle Kartenwechsel orientierbar verträglich sind.

- a) Geben Sie zwei Beispiele eines Paares von Karten einer Mannigfaltigkeit an, die eine orientierbar verträglich, die andere nicht.

- b) Zeigen Sie, dass für jede differenzierbare Mannigfaltigkeit M das Tangentialbündel TM orientierbar ist.

Aufgabe 4 – Implizite Untermannigfaltigkeiten:

Es seien M und N Mannigfaltigkeiten und $f: M \rightarrow N$ eine (glatte) Abbildung. Ein Punkt $p \in M$ heißt *regulärer Punkt* von f , falls df_p surjektiv ist. Weiterhin heißt $q \in N$ *regulärer Wert*, falls alle $p \in f^{-1}(q)$ reguläre Punkte sind.

- a) Zeigen Sie, dass $f^{-1}(q)$ lokal Euklidisch ist, wenn q ein regulärer Wert von f ist. (Tipp: Satz für implizite Funktionen.)
 b) Ist $f^{-1}(q)$ eine Mannigfaltigkeit? Falls ja, welche Dimension hat sie?
 c) Ist die Einheitsmatrix E ein regulärer Wert der folgenden Abbildung?

$$f: \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \text{Sym}(n) = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} : A^T = A\}, \quad A \mapsto A^T A.$$

Was sagt dies über die orthogonale Gruppe $O(n) = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} : A^T A = E\}$ aus?

Aufgabe 5 – Vektorbündel:

Ein k -Vektorbündel (π, E) über einer (differenzierbaren) Mannigfaltigkeit M besteht aus einer Mannigfaltigkeit E sowie einer differenzierbaren Abbildung $\pi: E \rightarrow M$, so dass $\pi^{-1}(p)$ für jedes $p \in M$ ein k -dimensionaler Vektorraum ist und dass für jedes $p \in M$ eine Umgebung U und ein Diffeomorphismus

$$\varphi: U \times \mathbb{R}^k \rightarrow \pi^{-1}(U) \subset E$$

existieren, mit folgender Eigenschaft: Für jedes $q \in U$ ist $v \mapsto \varphi(q, v)$ ein Vektorraumisomorphismus von \mathbb{R}^k auf $\pi^{-1}(q)$. Einen solchen Diffeomorphismus nennt man auch *Bündelkarte*.

Ein triviales Beispiel sind Produkte $M \times \mathbb{R}^k$; interessante Beispiele (siehe 6) sind aber nicht global (sondern eben nur lokal) Produkte.

- a) Machen Sie sich klar, dass das Tangentialbündel TM ein Vektorbündel über M ist.
 b) Sei $p \in E$. Ein *lokaler Schnitt* um p besteht aus einer Umgebung $U \subset M$ von $\pi(p)$ und einer Abbildung $\sigma: U \rightarrow E$ mit $\pi \circ \sigma = \text{id}|_U$ und $\sigma(\pi(p)) = p$. Zeigen Sie, dass die Menge der lokalen Schnitte $U \rightarrow E$ ein Vektorraum ist.
 c) Eine Menge von k lokalen Schnitten $U \rightarrow E$, die linear unabhängig sind, nennt man *lokale Basis* für das Bündel. Überlegen Sie sich, dass eine lokale Basis eine Bündelkarte definiert, und umgekehrt.
 d) Folgern Sie, dass die Existenz von k linear unabhängigen *globalen* Schnitten die Existenz eines globalen Diffeomorphismus $\pi: M \times \mathbb{R}^k \rightarrow E$ impliziert. Ein solches Bündel heißt *trivial*.

- e) Zeigen Sie, dass $T\mathbb{R}^n$ und $T\mathbb{S}^1$ trivial über \mathbb{R}^n beziehungsweise \mathbb{S}^1 sind, $T\mathbb{S}^2$ aber nicht über \mathbb{S}^2 .
- f) Wir betrachten ein 1-Vektorbündel $E \rightarrow \mathbb{S}^1$ mit $E \subset \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^2$, wobei wir

$$E := \bigcup_{\vartheta \in \mathbb{R}} E_{e^{i\vartheta}}, \quad E_{e^{i\vartheta}} := \{e^{i\vartheta}\} \times \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\vartheta/2) \\ \sin(\vartheta/2) \end{pmatrix} \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^2$$

setzen. Zeigen Sie, dass dies kein triviales Bündel ist. Haben Sie eine geometrische Vorstellung von diesem Bündel?

Aufgabe 6 – Lie-Klammer in der Ebene:

- a) Geben Sie ein Beispiel von zwei nicht-konstanten Vektorfeldern X, Y der Ebene \mathbb{R}^2 , deren Kommutator verschwindet, und ein weiteres Paar von Vektorfeldern, für das der Kommutator nicht verschwindet.
- b) Der Kommutator zweier Vektorfelder X, Y sei von der Form $[X, Y] = aX + bY$ mit $a, b: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ glatten Funktionen. Weiter gelte $[X, Y]_p \neq 0$. Zeigen Sie durch Lösung einer Differentialgleichung, dass es in einer Umgebung $U(p)$ von p Funktionen $f, g: U(p) \rightarrow \mathbb{R}$ gibt, so dass $[fX, gY] = 0$ in $U(p)$.

Aufgabe 7 – Kritische Punkte und Hesse-Form:

Es sei M eine Mannigfaltigkeit, $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, $p \in M$ und (x, U) eine Karte von M um p . Wir bezeichnen p als *kritischen Punkt von f* , falls $d(f \circ x^{-1})_{x(p)} \equiv 0$ gilt. Zeigen Sie, dass diese Definition unabhängig von der Wahl der Karte (x, U) ist. Zeigen Sie weiterhin, dass für alle Vektorfelder X und Y auf M

$$\partial_X \partial_Y f(p) = \partial_Y \partial_X f(p)$$

gilt, falls p ein kritischer Punkt von f ist.

2. SEMI-RIEMANNSCHE METRIKEN UND ZUSAMMENHÄNGE

Metriken.

Aufgabe 8 – Matrixdarstellung von Bilinearformen:

Es sei $b: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ eine Bilinearform.

- a) Geben Sie zu einer Basis $\{e_1, \dots, e_n\}$ von V eine $n \times n$ -Matrix A an mit

$$b(v, w) = v^T \cdot A \cdot w.$$

- b) Zeigen Sie: A ist genau dann invertierbar, wenn b nicht-degeneriert ist.
 c) Geben Sie eine weitere Bedingung an b , an so dass es eine Basis gibt, für die A diagonal ist. (Zitieren Sie einen Satz!) Charakterisieren Sie den Index von b mit Hilfe der Diagonalelemente.

Aufgabe 9 – Minkowski-Raum:

Beschreiben Sie die Mengen $\|v\|^2 = \pm 1$ im Minkowski-Raum.

Aufgabe 10 – Schreibweise von Metriken:

- a) Zeigen Sie, dass sich jede Riemannsche Metrik g auch schreiben lässt als

$$g = \sum_{i,j=1}^n g_{ij} dx^i dx^j \quad \text{mit} \quad dx^i dx^j := \frac{1}{2}(dx^i \otimes dx^j + dx^j \otimes dx^i).$$

- b) Schreiben Sie die Metriken der folgenden Räume in obiger Form: \mathbb{R}^n , \mathbb{R}_k^n , \mathbb{H}^2 (obere Halbebene), $U \subset \mathbb{R}^n$ mit erster Fundamentalform induziert durch $f: U \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$.

Aufgabe 11 – Orthogonale Komplemente im semi-Riemannschen Fall:

Sei $g: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine nicht-ausgeartete symmetrische Bilinearform. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ ein Untervektorraum. Wir nennen

$$U^\perp := \{w \in \mathbb{R}^n : g(u, w) = 0 \text{ für alle } u \in U\}$$

das *orthogonale Komplement* von U in \mathbb{R}^n .

- a) Sei $g(v, w) := v_1 w_1 - v_2 w_2$ auf $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ und $U_b := \text{span}\{(1, b)\}$ für $b \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie U_b^\perp und fertigen Sie eine Skizze an. Gibt es ein b , sodass die direkte Summe $U_b \oplus U_b^\perp$ nicht ganz \mathbb{R}^2 ist?
 b) Zeigen Sie $\dim(U) + \dim(U^\perp) = n$ und $(U^\perp)^\perp = U$.
 c) Zeigen Sie: g eingeschränkt auf $U \times U$ ist genau dann eine nicht-ausgeartete symmetrische Bilinearform, wenn $U \oplus U^\perp = \mathbb{R}^n$ gilt.

Aufgabe 12 – Semi-Riemannsche Metrik mit Index 1 auf dem flachen Torus:

In der Vorlesung haben wir gezeigt, dass auf jeder differenzierbaren Mannigfaltigkeit eine Riemannsche Metrik existiert. Die Existenz einer semi-Riemannschen Metrik mit Index 1 ist eine topologische Frage: Allgemein besitzt eine kompakte Mannigfaltigkeit M genau dann eine semi-Riemannsche Metrik mit Index 1, wenn die Euler-Charakteristik $\chi(M) = 0$ ist (siehe Bemerkung in Vorlesung). Auf dem flachen Torus $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ existiert also eine semi-Riemannsche Metrik mit Index 1.

Konstruieren Sie eine solche Metrik wie folgt: Sie starten mit einer nicht-ausgearteten symmetrischen Bilinearform mit Index 1 auf \mathbb{R}^2 . Was sagt Ihnen Satz 4 (in Teil 2) nun über den flachen Torus $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ aus? Wieviele verschiedene Metriken können wir auf diese Weise konstruieren? Funktioniert das auch auf einer Kleinschen Flasche?

Aufgabe 13 – Metrik auf einem Graphen:

Für $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ betrachten wir den Graphen $M = \{(u, f(u)) \in \mathbb{R}^{n+1}\}$.

- a) Warum ist M Mannigfaltigkeit und $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, $u \mapsto (u, f(u))$ eine Immersion?
- b) Für $p \in \mathbb{R}^n$ und $X, Y \in \mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$ ist die *erste Fundamentalform* von φ durch

$$\langle X, Y \rangle = \langle d\varphi_p X(p), d\varphi_p Y(p) \rangle.$$

definiert. Zeigen Sie, dass sie eine Riemannsche Metrik auf \mathbb{R}^n ist.

- c) Berechnen Sie die Koeffizienten der ersten Fundamentalform

$$g_{ij}(p) := g_p(e_i(p), e_j(p)), \quad 1 \leq i, j \leq 2.$$

Aufgabe 14 – Polarkoordinaten:

Es sei $P: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $(r, \varphi) \mapsto (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$ gegeben.

- a) Wählen Sie ein maximales $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, so dass P Immersion ist. Warum ist P lokaler Diffeomorphismus?
- b) Sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ die Standardmetrik auf dem Bild. Bestimmen Sie die Riemannsche Metrik g auf Ω , so dass P lokale Isometrie wird.

Aufgabe 15 – Längen von Kurven:

Berechnen Sie die Längen L der Kurven

- a) $c_{-1}: [0, T_{-1}] \rightarrow M_{-1}^2$, $c_{-1}(t) = (0, t)$, mit $T_{-1} < 1$;
- b) $c_{+1}: [0, T_{+1}] \rightarrow M_{+1}^2$, $c_{+1}(t) = (0, t)$, mit $T_{+1} > 0$.

Aufgabe 16 – Kürzeste in der hyperbolischen Ebene:

Wir betrachten die hyperbolische Ebene \mathbb{H}^2 im oberen Halbebenenmodell. Berechnen Sie für $\varepsilon > 0$ (noch einmal) die Länge der Kurve

$$c_0: [\varepsilon, 1] \rightarrow \mathbb{H}^2, \quad t \mapsto (0, t).$$

Zeigen Sie anschließend, dass jede Kurve c mit den gleichen Endpunkten wenigstens genauso lang ist.

Aufgabe 17 – Semi-Riemannsche Untermannigfaltigkeiten:

- Geben Sie Beispiele von zweidimensionalen Untermannigfaltigkeiten von \mathbb{R}_1^3 an, die bezüglich der von \mathbb{R}_1^3 zurückgezogenen Metrik semi-Riemannsch vom Index 0 oder 1 sind.
- Zeigen Sie, dass der Index einer nicht ausgearteten symmetrischen Bilinearform g_p auf einer zusammenhängenden Mannigfaltigkeit unabhängig ist vom Fußpunkt p . Dabei sei $p \mapsto g_p$ als differenzierbar vorausgesetzt.
- Zeigen Sie, dass kompakte zweidimensionale Untermannigfaltigkeiten von \mathbb{R}_1^3 bezüglich der von \mathbb{R}_1^3 zurückgezogenen Metrik niemals semi-Riemannsch sind. (Weshalb ist dies in \mathbb{R}^3 anders?)

Aufgabe 18 – Produktmannigfaltigkeiten:

Es seien M_1, \dots, M_n Mannigfaltigkeiten und $M = M_1 \times \dots \times M_n$ ihr kartesisches Produkt. Zeigen sie:

- Es existiert eine differenzierbare Struktur \mathcal{S} auf M , bezüglich der alle kanonischen Projektionen $\pi_i: M \rightarrow M_i$ differenzierbare Abbildungen sind. Insbesondere ist (M, \mathcal{S}) eine differenzierbare Mannigfaltigkeit.
- Verfügt jeder Faktor M_i über eine Riemannsche Metrik g_i , so ist auch M Riemannsch bezüglich der Metrik

$$g(X, Y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n g_i(X, Y)^2}.$$

- Verfügt jeder Faktor M_i über die Struktur einer Lie-Gruppe, so gilt dies auch für M .

Aufgabe 19 – Metrik auf Matrizenräumen:

Es seien $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ beliebige Matrizen.

a) Zeigen Sie, dass

$$g(A, B) := \text{Spur}(A \cdot B)$$

eine symmetrische Bilinearform darstellt.

b) Was ist das Vorzeichen von $g(A, A)$, falls A symmetrisch bzw. schief-symmetrisch ist?

c) Berechnen Sie den Index von g . Schreiben Sie dazu eine gegebene Matrix A als Summe einer symmetrischen und einer schief-symmetrischen Matrix.

Aufgabe 20 – Isometrien:

Zeigen Sie, dass die Räume $(\mathbb{R}_k^n, \lambda \langle \cdot, \cdot \rangle_k)$ mit $\lambda > 0$ paarweise isometrisch sind.

Aufgabe 21 – Quiz:

- a) Es sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Welche Anforderungen an $f \in C^\infty(M)$ muss man stellen, damit auch $h_p = f(p) \cdot g_p$ eine Riemannsche Metrik h auf M definiert?
- b) Wozu sind zusammenhängende eindimensionale Mannigfaltigkeiten isometrisch? Welche Invariante klassifiziert sie?
- c) Es sei G eine Lie-Gruppe, die auf einer Mannigfaltigkeit M operiert. Warum sind die Abbildungen $p \mapsto g \cdot p$ für $g \in G$ dann automatisch Diffeomorphismen?
- d) Wir betrachten die hyperbolische Ebene im oberen Halbebenenmodell. Ist die Abbildung $p \mapsto ap$ mit $a > 0$ eine Isometrie?

Gruppenoperationen.

Aufgabe 22 – Freiheit von Gruppenoperationen:

Zeigen Sie, dass folgende Abbildungen Gruppenoperationen definieren und entscheiden Sie, welche Gruppenoperationen frei sind:

- a) Die Gruppe $G = (\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}, +)$ durch Rotation um den Winkel $2k\pi/7$ auf \mathbb{R}^2 .
- b) Die Gruppe $G = (\mathbb{Z}^n, +)$ durch $a \cdot x := a + x$ auf \mathbb{R}^n .
- c) Die Gruppe $G = (\mathbb{R}, +)$ durch $a \cdot (x, y) := (a + x, y)$ auf \mathbb{R}^2 .
- d) Die Gruppe $G = (\text{SL}_2(\mathbb{R}), \cdot)$ durch

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot z = \frac{az + b}{cz + d}$$

auf der oberen Halbebene $\{z = x + iy \in \mathbb{C} : y > 0\}$.

Aufgabe 23 – Freiheit und Eigentlichkeit von Gruppenoperationen:

Entscheiden Sie, ob die folgenden Gruppenoperationen frei bzw. eigentlich sind. Ist beides der Fall, beschreiben Sie den Quotienten geometrisch.

- a) \mathbb{S}^1 operiert auf \mathbb{S}^2 durch Drehung um die Nord-Süd-Achse
- b) \mathbb{Z} operiert auf \mathbb{S}^1 durch Drehung um Vielfache von $\pi/8$
- c) \mathbb{Z} operiert auf \mathbb{S}^1 durch Drehung um Vielfache von $1/8$
- d) \mathbb{Z}_2 operiert auf dem Zylinder $\{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 1\}$ durch Spiegelung an einer vertikalen Ebene
- e) \mathbb{Z}_2 operiert auf dem Zylinder durch 180° -Drehung um die z -Achse

Aufgabe 24 – Punktsymmetrische Untermannigfaltigkeiten:

Wir nennen eine Untermannigfaltigkeit $M^m \subset \mathbb{R}^{m+k}$ *punktsymmetrisch*, wenn $0 \notin M$, und $p \in M$ genau dann, wenn $-p \in M$. Zeigen Sie:

- a) Die Operation von $G := \mathbb{Z}_2$ durch $\{\text{id}, -\text{id}\}$ ist diskret auf jeder punktsymmetrischen Untermannigfaltigkeit.
- b) M/G ist Hausdorffsch.
- c) Betrachten Sie nun Rotationstorus, Zylinder und \mathbb{S}^n . Überlegen Sie, welche topologischen Räume die Quotienten darstellen.

Aufgabe 25 – Kompakte Lie-Gruppen:

Zeigen Sie, dass kompakte Lie-Gruppen stets eigentlich operieren. Warum ist G_K abgeschlossen?

Aufgabe 26 – Linksinvarianz:

Sei M eine Lie-Gruppe, die durch Linkstranslation $L_x: M \rightarrow M, y \mapsto xy$ auf sich selbst operiert und sei e das neutrale Element von M .

- a) Ein Vektorfeld $X \in T_M$ heißt *linksinvariant*, wenn $dL_p(X) = X$ für alle $p \in M$ gilt. Zeigen Sie, dass der Vektorraum der linksinvarianten Vektorfelder auf M isomorph zu $T_e M$ ist.
- b) Weisen Sie nach, dass $[X, Y]$ ein linksinvariantes Vektorfeld ist, falls es X und Y sind. Der Raum $\mathcal{M} := (T_e M, [\cdot, \cdot])$ wird als *Lie-Algebra* von M bezeichnet.
- c) Eine Riemannsche Metrik heißt *linksinvariant*, wenn

$$g_q(X, Y) = g_{L_p(q)}(d(L_p)_q(X), d(L_p)_q(Y))$$

für alle $p, q \in M$ und $X, Y \in T_q M$ gilt. Wie kann man ein Skalarprodukt von $T_e M$ zu einer linksinvarianten Riemannsche Metrik auf M fortsetzen?

d) Sei nun

$$M = \{g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(t) = yt + x : x, y \in \mathbb{R}, y > 0\}.$$

Diese Menge M bildet eine Lie-Gruppe mit der Komposition von Funktionen als Multiplikation. Als differenzierbare Mannigfaltigkeit ist M einfach die obere Halbebene von \mathbb{R}^2 mit der differenzierbaren Struktur von \mathbb{R}^2 . Zeigen Sie dass die Riemannsche Metrik von M , die in $T_e M$ mit der euklidischen Metrik übereinstimmt, genau die hyperbolische Metrik ist.

Aufgabe 27 – Quotientenmannigfaltigkeiten:

Die folgenden Gruppenoperationen sind allesamt frei und eigentlich. Bestimmen Sie jeweils die Topologie des Quotienten.

- a) \mathbb{R}^+ operiert auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ durch Skalierung
- b) \mathbb{R} operiert auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ durch Skalierung
- c) \mathbb{Z} operiert auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ durch Skalierung
- d) \mathbb{Z}_2 operiert auf dem Zylinder durch Punktspiegelung im Ursprung
- e) \mathbb{Z}_2 operiert auf dem Rotationstorus in \mathbb{R}^3 durch Punktspiegelung im Ursprung

Aufgabe 28 – Klassifikation flacher 2-Tori:

Ein *flacher 2-Torus* ist eine Riemannsche Mannigfaltigkeit der Art \mathbb{R}^2/Γ , wobei Γ ein Gitter vom Rang 2 bezeichnet, welches durch Addition auf \mathbb{R}^2 operiert. Es gibt also linear unabhängige Vektoren v und w mit $\Gamma = v\mathbb{Z} + w\mathbb{Z}$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

- a) Ist $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine Drehung oder Spiegelung, so ist \mathbb{R}^2/Γ isometrisch zu $\mathbb{R}^2/\varphi(\Gamma)$.
- b) Ist $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine Streckung, so ist \mathbb{R}^2/Γ homothetisch zu $\mathbb{R}^2/\varphi(\Gamma)$. Zwei Riemannsche Mannigfaltigkeiten (M, g) und (N, h) heißen *homothetisch*, falls ein Diffeomorphismus $f: M \rightarrow N$ und eine Konstante $\lambda > 0$ existieren, so dass $h_{f(p)} = \lambda g_p$ für alle $p \in M$.
- c) Jeder flache 2-Torus ist homothetisch zu einem Torus der Art \mathbb{R}^2/Γ_w , wobei

$$\Gamma_w = e_1\mathbb{Z} + w\mathbb{Z} \quad \text{mit} \quad w \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \times (0, \infty) \quad \text{und} \quad \|w\| \geq 1.$$

Tatsächlich sind die Tori \mathbb{R}^2/Γ_w aus dem letzten Aufgabenteil paarweise nicht homothetisch zueinander. Inwiefern liefert dies eine Klassifikation der Isometrieklassen flacher 2-Tori?

Parallelität und kovariante Ableitung.

Aufgabe 29 – Christoffel-Symbole des Zylinders:

Berechnen Sie die Christoffel-Symbole des Zylinders dargestellt als Graph über $\mathbb{R}^2 \times (-1, 1)$.

Aufgabe 30 – Quiz:

- a) Betrachten Sie zwei Großkreisbögen c_1 und c_2 auf \mathbb{S}^2 , welche den Nordpol $(0, 0, 1)$ und den Südpol $(0, 0, -1)$ verbinden und sich in den Polen rechtwinklig schneiden. Es sei ferner X der Tangentialvektor von c_1 im Nordpol. Welchen Winkel bilden die Parallelverschiebungen von X entlang c_1 und c_2 am Südpol? (Skizze genügt!)
- b) Es sei c ein nach Bogenlänge parametrisierter Großkreis von \mathbb{S}^2 und Y ein normiertes Vektorfeld längs c mit $Y \perp c'$. Zeigen Sie, dass $a(t)$ und $b(t)$ konstant sein müssen, wenn $a(t)c'(t) + b(t)Y$ ein paralleles Feld längs c sein soll.

Aufgabe 31 – Linearität der Parallelverschiebung:

Es sei M eine Mannigfaltigkeit, $c: I \rightarrow M$ eine Kurve und $0, t \in I$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

- a) Für parallele Vektorfelder X und Y längs c und Konstanten $a, b \in \mathbb{R}$ ist auch die Linearkombination $aX + bY$ ein paralleles Vektorfeld längs c .
- b) Es gibt eine eindeutig bestimmte Abbildung $\varphi_t: T_{c(0)}M \rightarrow T_{c(t)}M$, so dass $\varphi_t(X(0)) = X(t)$ für jedes parallele Feld X längs c gilt. Wir bezeichnen diese Abbildung als *Parallelverschiebung längs c* .
- c) Die Parallelverschiebung φ_t ist eine lineare Abbildung.
- d) Die Parallelverschiebung φ_t ist ein Isomorphismus von Vektorräumen.
Tipp: Was ist das Bild einer Orthonormalbasis?

Aufgabe 32 – Parallelverschiebung auf dem Kegel:

Einen Kegel kann man durch *isometrisches Aufrollen* eines ebenen Sektors $U \subset \mathbb{R}^2$ mit Öffnungswinkel $\alpha > 0$ erhalten. Dabei sei $f: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ die entsprechende Parametrisierung des Kegels. Auf U betrachten wir die Standardmetrik $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

- a) Begründen Sie anschaulich, dass die Immersion f eine Isometrie ist.
- b) Was sind daher die Christoffel-Symbole der Immersion f ?

Ein Breitenkreis des Kegels werde durch ein Kreissegment in M parametrisiert.

- c) Wie sieht ein paralleles Vektorfeld X in U längs des Kreissegments aus? Warum ist sein isometrisches Bild $df \cdot X$ ebenfalls parallel?
- d) Geben Sie den Drehwinkel an, den das drehende Feld $df \cdot X$ bei einem vollen Umlauf um den Breitenkreis ausführt.

Aufgabe 33 – Parallelverschiebung entlang Breitenkreis von \mathbb{S}^2 :

Untersuchen Sie die Parallelverschiebung längs eines Breitenkreises von \mathbb{S}^2 mit Höhe $0 < h < 1$ über dem Äquator. Finden Sie dazu einen an \mathbb{S}^2 im Breitenkreis tangentialen Kegel. Wickeln Sie diesen Kegel auf ein Winkelsegment der Ebene ab. Welchen Winkel hat das entstehende Segment? Bestimmen Sie nun die Parallelverschiebung mithilfe der vorigen Übung.

Aufgabe 34 – Parallelität im Normalenbündel von Kurven:

Sei $c: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine reguläre Kurve. Sei $X: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Normalenfeld an c , d.h. es gilt $\langle X, c' \rangle = 0$. Das Feld X heißt *parallel im Normalenbündel längs c* , wenn gilt $\frac{D}{dt} X := \perp \left(\frac{d}{dt} X \right) = 0$.

- Zeigen Sie, dass analog zu Satz 5 der Vorlesung gilt: Sind X, Y parallel im Normalenbündel längs c , so bleibt $\langle X, Y \rangle$ konstant. Insbesondere bleiben die Länge $|X|$ und der für $X \neq Y$ erklärte Winkel $\angle(X, Y)$ erhalten.
- Es gibt eine Basis $N_1(t), \dots, N_{n-1}(t)$, des Normalenraums $\perp(c'(t))$, die differenzierbar von t abhängt.
- Zu jedem gegebenen Normalenvektor $X(0)$ in $c(0)$ gibt es eine *parallele* Fortsetzung längs der Kurve c , d.h. $\frac{D}{dt} X \equiv 0$.
- Es gibt eine parallele Orthonormalbasis längs c .
- Geben Sie eine solche Orthonormalbasis für $\mathbb{S}^1 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$ an. Wie sieht eine geschlossene Kurve $c: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ aus, für die die parallele Orthonormalbasis sich nicht “schließt”, d.h. nicht auf \mathbb{S}^1 erklärt ist?

Literatur: Richard L. Bishop: There is More than One Way to Frame a Curve, American Math. Monthly 82, 246–251, 1975.

Zusammenhänge.*Aufgabe 35 – Test zu Zusammenhängen:*

- Es seien ∇^1 und ∇^2 Zusammenhänge auf M . Sind dann auch $2\nabla^1$ und $\nabla^1 + \nabla^2$ Zusammenhänge?
- Wird M^n bereits durch eine Karte überdeckt, so besteht eine Bijektion zwischen der Wahl von n^3 Funktionen $\{\Gamma_{ij}^k\}$ und Zusammenhängen auf M .
- Folgern Sie direkt aus dem letzten Teil: Jede Mannigfaltigkeit M besitzt einen Zusammenhang.

Aufgabe 36 – Christoffelsymbole in \mathbb{R}^n :

Zeigen Sie: Bei linearem Koordinatenwechsel $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ verschwinden die Christoffelsymbole der durch f auf \mathbb{R}^n induzierten Metrik, bei nichtlinearem f jedoch nicht.

Aufgabe 37 – Zylinderkoordinaten in \mathbb{R}^3 :

Sei g_0 das Standardskalarprodukt von \mathbb{R}^3 und sei

$$f: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (r, \varphi, h) \mapsto (r \cos \varphi, r \sin \varphi, h).$$

Wir betrachten die Riemannsche Mannigfaltigkeit $M := (\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2, f^*g_0)$.

- Berechnen Sie die Koeffizienten der Metrik und die Christoffelsymbole von M .
- Bestimmen Sie damit $\nabla_{e_i} e_j$ für die Standardbasis $\{e_i: 1 \leq i \leq 3\}$. Welche Terme verschwinden? Wieso stimmt das Ergebnis mit der geometrischen Erwartung überein?
- Können Sie auch diejenigen Terme, die nicht verschwinden, geometrisch erklären?

Aufgabe 38 – Vektorfelder längs einer Abbildung:

Wir betrachten eine Abbildung $F: M \rightarrow N$ zwischen Mannigfaltigkeiten M und N . Eine (glatte) Abbildung $Y: M \rightarrow TN$ mit $Y(p) \in T_{F(p)}N$ für alle $p \in M$ heißt *Vektorfeld längs F* .

- Veranschaulichen Sie sich die Definition in den folgenden Fällen. Können Sie jeweils Beispiele für Vektorfelder längs F angeben, die Sie bereits kennen?
 - M ist ein Intervall und F eine (nach Bogenlänge parametrisierte) Kurve.
 - M ist eine offene Teilmenge von \mathbb{R}^2 , $N = \mathbb{R}^3$ und F eine Immersion.
 - $F: M \rightarrow N$ ist eine Immersion.
- Geben Sie eine Darstellung eines Vektorfeldes Y längs F in lokalen Koordinaten an.
- Wir nehmen im Folgenden an, dass auf N ein Zusammenhang ∇ definiert ist. Definieren Sie in diesem Fall die kovariante Ableitung $\nabla_X Y$ eines Vektorfeldes Y längs F in Richtung eines Vektorfeldes X auf M . Benutzen Sie hierzu den bereits bekannten Begriff der kovarianten Ableitung längs einer Kurve und vergessen Sie nicht, die Wohldefiniert Ihrer Definition zu zeigen. (*Tipp*: Das Vorgehen in Abschnitt 2.5 ist sehr ähnlich.)

Aufgabe 39 – Kovariante Ableitung auf der Sphäre \mathbb{S}^2 :

Zu einem Winkel gegenüber der Horizontalen $\vartheta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ sei durch

$$t \mapsto \gamma(t, \vartheta) := (\cos \vartheta \cos t, \cos \vartheta \sin t, \sin \vartheta), \quad t \in [0, 2\pi),$$

ein Breitenkreis auf der Einheitssphäre $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ gegeben. Seine Einheitstangente sei $X(t, \vartheta) := \frac{\gamma'(t, \vartheta)}{|\gamma'(t, \vartheta)|}$, wobei $\gamma'(t, \vartheta)$ die Ableitung nach t bedeutet.

- a) Berechnen Sie die kovariante Ableitung $\frac{D}{dt} X(t, \vartheta) = \Pi \left(\frac{d}{dt} X(t, \vartheta) \right)$. Was ist die kovariante Ableitung von $X(t, \vartheta)$ längs des Äquatorkreises?
- b) Berechnen Sie die Projektionen $\left\langle \frac{D}{dt} X(t, \vartheta), \gamma(t, \vartheta) \right\rangle$ und $\left\langle \frac{D}{dt} X(t, \vartheta), X(t, \vartheta) \right\rangle$ für $\vartheta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Deuten Sie Ihre Ergebnisse geometrisch (*Tipp*: normal, tangential, $\frac{d}{dt} \|X\|$).

Das Feld $X(t, \vartheta)$ ist für $\vartheta \neq 0$ nicht parallel. Wir konstruieren nun ein paralleles Feld.

- c) Bestimmen Sie ein $Y(t, \vartheta)$, so dass $\{X(t, \vartheta), Y(t, \vartheta)\}$ eine orthonormale Basis der Tangentialebene an $T_{\gamma(t, \vartheta)} \mathbb{S}^2$ bildet.
- d) Bestimmen Sie einen (konstanten) Drehwinkel $\alpha = \alpha(\vartheta)$, so dass das rotierende Feld $Z(t, \vartheta) := \cos(\alpha t) X(t, \vartheta) + \sin(\alpha t) Y(t, \vartheta)$ längs des Breitenkreises $\gamma(\cdot, \vartheta)$ parallel wird.

Aufgabe 40 – Test:

- a) Geben Sie für die Minkowski-Metriken $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle_k)$ die metrischen Koeffizienten g_{ij} an. Geben Sie den Levi-Civita-Zusammenhang und die Parallelverschiebung dieser Metriken an.
- b) Gegeben sei eine Isometrie $f: M \rightarrow N$ zwischen Riemannschen Mannigfaltigkeiten M und N . Geben Sie Karten x von M und y von N an, so dass die Christoffel-Symbole der jeweiligen Levi-Civita-Zusammenhänge bezüglich dieser Karten übereinstimmen.
- c) Sei (x, U) Karte von M . Welche Aussage gilt für die Lieklammer $[e_i, e_j]$ von zwei Vektoren der Standardbasis?
- d) Es sei ∇ ein torsionsfreier Zusammenhang auf einer Mannigfaltigkeit M^n . Zeigen Sie, dass die Christoffelsymbole Γ_{ij}^k des Zusammenhangs in diesem Fall symmetrisch sind, d.h. dass gilt

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k \quad \text{für alle } 1 \leq i, j, k \leq n.$$

Aufgabe 41 – Parallelverschiebung:

Sei c eine Kurve in einer Mannigfaltigkeit M und $\tau_t: T_{c(0)}M \rightarrow T_{c(t)}M$ die Parallelverschiebung längs c . Zeigen Sie: τ_t ist linear und bildet eine Basis auf eine Basis ab.

Aufgabe 42 – Eigenschaften des Levi-Civita-Zusammenhangs:

Betrachten Sie den Levi-Civita Zusammenhang, der durch die Koszul-Formel definiert ist. Weisen Sie für ihn die vier Eigenschaften nach, die ein torsionsfreier und mit der Metrik verträglicher Zusammenhang erfüllen muss. (Am besten in vier Gruppen, jeder eine Eigenschaft.)

Aufgabe 43 – Produktmannigfaltigkeiten:

Es seien M_1 und M_2 differenzierbare Mannigfaltigkeiten und $M := M_1 \times M_2$ ihr Produkt. Sind g^1 und g^2 Riemannsche Metriken auf M_1 bzw. M_2 , so definieren wir die *Produktmetrik* auf M durch

$$g_{(p,q)}(X, Y) := g_p^1(d\pi_1 \cdot X, d\pi_1 \cdot Y) + g_q^2(d\pi_2 \cdot X, d\pi_2 \cdot Y)$$

für alle $(p, q) \in M$ und $X, Y \in T_{(p,q)}M$, wobei π_i die Projektion von M auf M_i sei ($i = 1, 2$).

- Verifizieren Sie, daß g tatsächlich eine Riemannsche Metrik ist.
- Benutzen Sie die Koszul-Formel, um für den Levi-Civita-Zusammenhang auf der Produktmannigfaltigkeit zu zeigen: $\nabla_X Y = (\nabla_{d\pi_1 X}^1 d\pi_1 Y, \nabla_{d\pi_2 X}^2 d\pi_2 Y)$

Aufgabe 44 – Differenztensor:

Siehe Lee, Aufgabe 4-4

Aufgabe 45 – Levi-Civita-Zusammenhang auf der hyperbolischen Ebene:

In dieser Aufgabe bestimmen wir den Levi-Civita-Zusammenhang der hyperbolischen Ebene \mathbb{H}^2 im oberen Halbebenenmodell. Damit können wir die Geodätischen von \mathbb{H}^2 beschreiben.

- Sei G eine Lie-Gruppe und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ eine linksinvariante Metrik auf G , d.h. die Linkstranslation $L_a: G \rightarrow G$, $L_a(g) := ag$ ist Isometrie für jedes $a \in G$. Seien X, Y und Z linksinvariante Vektorfelder auf G . Zeigen Sie

$$2\langle \nabla_X Y, Z \rangle = \langle [X, Y], Z \rangle - \langle [Y, Z], X \rangle + \langle [Z, X], Y \rangle.$$

Sei $\mathbb{H}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: y > 0\}$. Die Abbildung

$$\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2, \quad (x_1, y_1) * (x_2, y_2) := (x_1 + y_1 x_2, y_1 y_2)$$

definiert eine Gruppenstruktur auf \mathbb{H}^2 mit neutralem Element $(0, 1)$ (siehe Aufgabe 26).

- Zeigen Sie, dass die Metrik $\langle \cdot, \cdot \rangle_{(x,y)} := \frac{1}{y^2} \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^2}$ linksinvariant ist.
- Die Vektorfelder $E_1(x, y) := (y, 0)$ und $E_2(x, y) := (0, y)$ sind linksinvariant (warum?). Zeigen Sie $[E_1, E_2] = -E_1$. Bestimmen Sie nun mit Hilfe von (a) den Levi-Civita-Zusammenhang ∇ durch Angabe von $\nabla_{E_i} E_j$ für $i, j \in \{1, 2\}$.
- Für $\varphi \in (0, \pi)$ definiert $c(t) := (e^{t \sin \varphi} \cos \varphi, e^{t \sin \varphi} \sin \varphi)$ eine Kurve in \mathbb{H}^2 . Skizzieren Sie diese Kurve und berechnen Sie die geodätische Krümmung κ von c , indem Sie $c' = \cos \varphi E_1 + \sin \varphi E_2$ benutzen. Zeigen Sie $\kappa \in [0, 1)$. Gibt es auch Kurven in \mathbb{H}^2 mit geodätischer Krümmung $\kappa = 1$?

- e) Zeigen Sie, dass der Kreisbogen $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}^2$, $t \mapsto (\tanh t, 1/\cosh t)$ eine Geodätische ist. Nutzen Sie die Isometrien $(x, y) \mapsto (x+t, y)$ und $(x, y) \mapsto (\lambda x, \lambda y)$ mit $t \in \mathbb{R}$ und $\lambda > 0$ aus, um alle Geodätischen durch $(0, 1)$ zu bestimmen. Warum reicht dies aus, um sogar alle Geodätischen von \mathbb{H}^2 zu bestimmen?

Geodätische und Exponentialabbildung.

Aufgabe 46 – Quiz zu Geodätischen:

- Eine konstante Kurve $c(t) \equiv p$ ist Geodätische.
- Multipliziert man die Metrik g mit einer Konstanten $\lambda > 0$, so bleiben gleich: $[X, Y]$ ja/nein, Levi-Civita-Zusammenhang $\nabla_X Y$ ja/nein, Parallelverschiebung ja/nein, Geodätische ja/nein, geodätische Krümmung einer Kurve ja/nein.
- Die Differentialgleichung für Parallelverschiebung ist eine gewöhnliche Differentialgleichung mit den Eigenschaften: autonom/nicht-autonom, linear/nicht-linear, von ... Ordnung.
- Die Differentialgleichung für Geodätische ist eine gewöhnliche Differentialgleichung mit den Eigenschaften: autonom/nicht-autonom, linear/nicht-linear, von ... Ordnung.
- Sei $c: I \rightarrow M$ eine nicht-konstante Geodätische. Wie muss ein Diffeomorphismus von Intervallen $h: J \rightarrow I$ aussehen, damit $c \circ h$ wieder geodätisch ist?
- Gibt es auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ eine Metrik, bezüglich welcher alle Ursprungskreise Geodätische sind?

Aufgabe 47 – Injektivitätsradius:

- Geben Sie zwei geometrisch verschiedene Beispiele von Riemannschen Mannigfaltigkeiten an, so dass zwischen zwei Punkten $p, q \in M$ unendlich viele Geodätische existieren.

Der *Injektivitätsradius* einer Riemannschen Mannigfaltigkeit M ist definiert als

$$\text{Inj}(M) := \inf_{p \in M} \text{inj}_M(p) \quad \text{mit} \quad \text{inj}_M(p) := \sup_{r \in \mathbb{R}} \{ \exp_p: B_r(0) \rightarrow M \text{ ist injektiv} \} \in (0, \infty].$$

- Bestimmen Sie den Injektivitätsradius von \mathbb{R}^n , \mathbb{S}^n , Zylinder und flachem Torus $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$.
- Wie sieht eine Mannigfaltigkeit aus, deren Injektivitätsradius verschwindet?

Aufgabe 48 – Christoffelsymbole der hyperbolischen Ebene:

Wir betrachten das obere Halbebenen-Modell U^2 von \mathbb{H}^2 .

- a) Berechnen Sie die Christoffel-Symbole.
- b) Bestimmen Sie die Geodätischen.

Hinweis: Das Ergebnis sollen Strahlen senkrecht zur x -Achse sein, sowie Halbkreise mit Mittelpunkt auf der x -Achse.

- c) Zwei Geodätische heißen *parallel*, falls sie keine gemeinsamen Punkte besitzen.

Zeigen Sie, dass es zu jeder Geodätischen γ in U^2 und jedem nicht auf γ liegenden Punkt $p \in U^2$ unendlich viele zu γ parallele Geodätische durch p gibt.

Bemerkung: Die hyperbolische Halbebene bildet also eine Geometrie, in der das Parallelenaxiom verletzt ist.

Aufgabe 49 – Geodätische auf dem Zylinder:

Es sei Z ein Zylinder in \mathbb{R}^3 , z.B. $Z = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 1\}$.

- a) Zeigen Sie, dass es für je zwei Punkte $p \neq q$ auf Z unendlich viele Geodätische von p nach q in Z gibt.
- b) Gilt das auch für $p = q$?

Aufgabe 50 – Geodätische in spiegelsymmetrischen Flächen:

Eine Riemannsche Mannigfaltigkeit M heißt *spiegelsymmetrisch* bezüglich einer Kurve $c: I \rightarrow M$, falls es eine Isometrie $f: M \rightarrow M$ gibt, deren Fixpunktmenge genau $c(I)$ entspricht.

- a) Zeigen Sie, dass eine Kurve c , bezüglich der M spiegelsymmetrisch ist, geodätisch ist.
Tipp: Welche Charakterisierung von Geodätischen kann man hier verwenden?
- b) Ist c auch Kürzeste?

Aufgabe 51 – Geodätische in $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$:

Wir definieren $\exp(A) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$, dabei sei $A^0 := \mathbf{1}$.

- a) Zeigen Sie oder erinnern Sie sich, dass $\exp(A)$ für jedes $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ konvergiert. Wir erhalten also eine Abbildung $\exp: \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.
- b) Wir definieren durch $c(t) := \exp(tA) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (tA)^k$ eine Kurve $c: \mathbb{R} \rightarrow \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Berechnen Sie c' , c'' . Welche Differentialgleichung erfüllt c ? Folgern Sie daraus die Identität $c(s+t) = c(s)c(t)$.

- c) Wir bezeichnen den Vektorraum der schiefsymmetrischen $n \times n$ -Matrizen mit $\mathfrak{o}_n(\mathbb{R})$, und den der symmetrischen mit $\mathbf{Sym}_n(\mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass man bezüglich

$$\langle \cdot, \cdot \rangle: \mathbf{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathbf{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \langle A, B \rangle := \text{trace}(AB^T)$$

die orthogonale Zerlegung $\mathbf{M}_n(\mathbb{R}) = \mathbf{Sym}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathfrak{o}_n(\mathbb{R})$ hat.

- d) Für $A \in \mathfrak{o}_n(\mathbb{R})$ folgern Sie nun mit b) und c) die folgenden Behauptungen.

- a) Die Kurve c liegt in der Drehgruppe, d.h. es gilt $\exp(tA) \in \mathbf{SO}_n(\mathbb{R})$.
- b) $\|c'(t)\|$ ist konstant bezüglich der Metrik $\langle \cdot, \cdot \rangle$.
- c) c ist Geodätische in $\mathbf{SO}_n(\mathbb{R})$.

Aufgabe 52 – Metrik in Gaußscher Form:

Eine Riemannsche Metrik auf $U \subset \mathbb{R}^2$ ist von *Gaußscher Form*, wenn es eine Funktion $f: U \rightarrow (0, \infty)$ gibt, so dass für $X = (\xi^1, \xi^2)$ und $Y = (\eta^1, \eta^2)$ gilt:

$$g_p(X, Y) = \xi^1 \eta^1 + f(p) \xi^2 \eta^2, \quad p \in U$$

Man kann zeigen, dass sich für jede Fläche stets lokal eine Karte in Gaußscher Form finden läßt.

- a) Geben Sie eine Orthonormalbasis für jeden Punkt p an.
- b) Berechnen Sie die Christoffelsymbole.
- c) Zeigen Sie: Die u -Linien, $c(u) := (u, c) \in U$ sind für jedes c geodätisch.
- d) Bestimmen Sie die geodätische Krümmung der v -Linien $\gamma(v) := (c, v)$ für $c \in \mathbb{R}$.
Tipp: Parametrisieren Sie lieber nicht auf Einheitsgeschwindigkeit um. Statt dessen können Sie aber leicht ein Normalenfeld $N(t)$ bestimmen. Wie verhält sich $\frac{D}{dt}N$ zu $\frac{D}{dt}c'$?

Aufgabe 53 – Erste Variation der Länge:

Es sei (M, g) Riemannsche Mannigfaltigkeit und $c: [a, b] \rightarrow M$ eine differenzierbare Kurve. Weiter sei h_s eine eigentliche Variation von c mit Vektorfeld V .

- a) Berechnen Sie die erste Variation $\delta_V L(c)$ des Bogenlängenfunktionals $L(c) := \int_a^b \sqrt{|g(c', c')|} dt$ für mit konstanter Geschwindigkeit parametrisierte Kurven. Welche weitere Annahme benötigen Sie?
- b) Charakterisieren Sie Geodätische auch als kritische Punkte der Bogenlänge, wiederum unter geeigneten Annahmen.

Aufgabe 54 – Schar geschlossener Geodätischer:

Sei M Riemannsch und $h: [-\varepsilon, \varepsilon] \times [0, 1] \rightarrow M$ eine Schar geschlossener Geodätischer, d.h. für alle $s \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ ist $t \mapsto h_s(t)$ geschlossene Geodätische (mit $\|\frac{\partial h}{\partial t}\|$ konstant).

Zeigen Sie: Alle Kurven h_s haben die gleiche Länge $\ell(h_s)$.

Aufgabe 55 – Verkürzung einer Ecke:

Betrachten Sie die Kurve mit Ecke $c: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $c(t) := (t, 0)$ für $t \leq 0$ und $c(t) := (0, t)$ für $t \geq 0$. Geben Sie eine konkrete Variation h_s an, die c verkürzt.

Aufgabe 56 – Krümmung von Horokreisen:

Wir betrachten das obere Halbebenen-Modell U^2 von \mathbb{H}^2 .

- Sei $c(t) = (t, 1)$ mit $t \in (0, 1)$ ein Stück eines Horokreises. Zeigen Sie, dass $(x, y) \mapsto (x + \lambda, y)$ für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ eine Isometrie von U^2 ist und folgern Sie, dass $\frac{D}{dt}c'$ konstant ist.
- Verwenden Sie eine konkrete Variation, um zu zeigen, dass $\frac{D}{dt}c' = (0, 1)$ gilt.
- Zeigen Sie, dass $(x, y) \mapsto \lambda \cdot (x, y)$ für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ eine Isometrie von U^2 ist und folgern Sie, dass jeder Horokreis $\{(x, y) \in U^2 : y = h\}$ Krümmung 1 hat.

Aufgabe 57 – Kürzeste Kurven zu einer Menge:

Sei $K \subset M$ eine kompakte Menge mit glattem Rand und $p \in M \setminus K$.

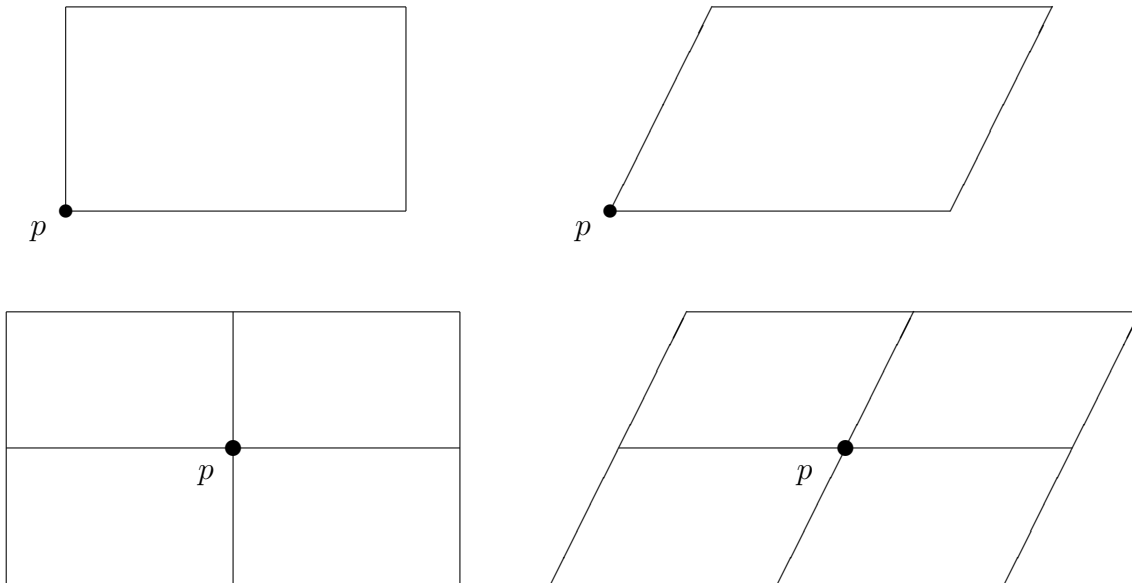
- Zeigen Sie: Ist $c: [a, b] \rightarrow M$ eine kürzeste Kurve mit $c(a) = p$ und $c(b) \in K$, so trifft c die Menge K senkrecht.
Tipp: Was sagt die erste Variation, falls es nicht so ist?
- Finden Sie ein Beispiel für M , p und K , so dass es unendlich viele kürzeste Kurven von p nach K gibt. Kann es auch sein, dass jede Geodätische von p nach K Kürzeste ist?

Aufgabe 58 – Schnitort auf dem Torus:

Der *Schnitort* [cut locus] eines Punktes $p \in M$ ist die Menge

$$C(p) := \{q \in M : \text{es gibt mehr als eine Kürzeste von } p \text{ nach } q\}$$

- Die folgenden Abbildungen repräsentieren zweidimensionale Tori, und zwar einen rechteckigen und einen allgemeinen Torus. Um die Übersicht zu erleichtern, sind auch vier nebeneinander liegende Fundamentalbereiche skizziert. Zeichnen Sie jeweils $C(p)$ ein.



- b) Stellen Sie beide Tori als identifiziertes Viereck bzw. Sechseck dar, wobei Sie zu identifizierende Kanten mit Pfeilen versehen. Zeichnen Sie alle Kürzesten vom Mittelpunkt p zu einem Eckpunkt q des Vierecks bzw. Sechsecks ein.
- c) Sei $p \in \mathbb{RP}^2$ ein Punkt der projektiven Ebene \mathbb{RP}^2 . Bestimmen Sie die Menge $C(p)$.
Hinweis: Repräsentieren Sie \mathbb{RP}^2 als Hemisphäre von \mathbb{S}^2 mit Pol p .

Aufgabe 59 – Geodätische minimieren nicht hinter Schnittpunkt:

Sei M vollständig und $c : [0, 1 + \delta) \rightarrow M$ eine Geodätische mit $\delta > 0$, so dass $c|_{[0,1]}$ Kürzeste von $p = c(0)$ nach $q = c(1)$ ist.

Zeigen Sie: Gibt es eine weitere Kürzeste zwischen p und q , dann ist c auf $[0, 1 + \delta]$ nicht mehr Kürzeste.

Aufgabe 60 – Kürzeste auf Polyedern:

- a) Es sei M die Oberfläche eines Würfels. Wir wollen die Kürzeste in M zwischen zwei Punkten $p, q \in M$ ermitteln. Es sei p der Mittelpunkt einer Würfel­fläche F und q :
- Mittelpunkt auf einer Nachbarfläche, oder
 - Mittelpunkt einer Kante, die nur eine Ecke mit F gemeinsam hat.
- Kann man p, q so wählen, dass eine Kürzeste durch eine Ecke läuft?
- b) Versuchen Sie Kürzeste auf allgemeinen Polyedern zu analysieren, indem Sie unterscheiden: Innerhalb der Flächen, in Kanten, in Ecken mit Gesamtwinkel $<, =, > 2\pi$.

Tipp: Eine Möglichkeit, Kürzeste in den Ecken zu verstehen, ist es, Kürzeste auf drei, vier oder fünf zusammengeklebten Vierecken zu verstehen.

Aufgabe 61 – Quiz zur Exponentialabbildung:

In \mathbb{R}^n gilt $\exp_p(v) = \dots\dots\dots$. Also ist $d(\exp_p)_v(w) = \dots\dots\dots$

Betrachten wir nun die Sphäre \mathbb{S}^2 . Sei $p \in \mathbb{S}^2$.

a) Es sei $v \in T_p\mathbb{S}^2$ mit $|v| = \pi/2$. Bestimmen Sie geometrisch und als Formel:

- $\exp_p v$ • $d(\exp_p)_v \frac{v}{|v|}$ • $d(\exp_p)_v w$ für $w \perp v$ ein Einheitsvektor.

b) Es sei $v \in T_p\mathbb{S}^2$ mit $|v| = \pi$. Bestimmen Sie wiederum:

- $\exp_p v$ • $d(\exp_p)_v \frac{v}{|v|}$ • $d(\exp_p)_v w$ für $w \perp v$ ein Einheitsvektor.

c) Gibt es ein $v \in T_p\mathbb{S}^2$ so dass $(d\exp_p)_v v = 0$?

d) Was ist die Exponentialabbildung auf einer Sphäre vom Radius R ?

Riemannsche Mannigfaltigkeiten als metrische Räume.

Aufgabe 62 – Längenabschätzung:

Geben Sie den Beweis von Lemma ?? im Spezialfall einer ebenen Kurve mit Polarkoordinatendarstellung $c(t) = P(r(t), \varphi(t))$ an, wobei $P(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$.

Aufgabe 63 – Quiz zu Vollständigkeit:

a) Wenn $f: M \rightarrow N$ eine Isometrie und M vollständig ist, ist dann auch N vollständig?

b) Wenn $f: M \rightarrow N$ ein Diffeomorphismus und N vollständig ist, ist dann auch M vollständig?

c) Seien M und N differenzierbare Mannigfaltigkeiten. Zeigen Sie $T_{(p,q)}(M \times N) = T_p M \times T_q N$.

d) Geben Sie alle eindimensionalen zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeiten (bis auf Isometrien) an. Welche davon sind vollständig?

e) Ist $\mathbb{R} \times (0, \infty)$ mit der Metrik $g_{(x,y)} = \langle \cdot, \cdot \rangle / y$ vollständig?

Aufgabe 64 – Vollständigkeit unter Diffeomorphismen:

Seien M, N Riemannsche Mannigfaltigkeiten und sei N vollständig.

- a) Sei $f: M \rightarrow N$ ein Diffeomorphismus. Es existiere ein $c > 0$, so dass für alle $p \in M$ und $v \in T_p M$

$$\|v\| \geq c \cdot \|df_p v\|$$

gelte. Zeigen Sie, dass M vollständig ist.

- b) Finden Sie ein Beispiel für M, N und eine lokale Isometrie $f: M \rightarrow N$, so dass M nicht vollständig ist.

Aufgabe 65 – Heine-Borel:

Sei M eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und sei $p \in M$. Zeigen Sie, dass M genau dann vollständig ist, wenn beschränkte und abgeschlossene Teilmengen von M kompakt sind.

Aufgabe 66 – Divergente Kurven:

Eine *divergente Kurve* in einer Riemannschen Mannigfaltigkeit M ist eine differenzierbare Abbildung $c: [0, \infty) \rightarrow M$, so dass für jede kompakte Menge $K \subset M$ ein $t_0 \in [0, \infty)$ existiert mit $c(t) \notin K$ für alle $t > t_0$. Wir definieren die Länge einer divergenten Kurve als

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t |c'(s)| \, ds.$$

Zeigen Sie, dass M genau dann vollständig ist, wenn die Länge jeder divergenten Kurve unbeschränkt ist.

Aufgabe 67 – Vollständigkeit und Kompaktheit:

Wir nennen eine Riemannsche Mannigfaltigkeit (M, g) *beschränkt*, wenn es $C > 0$ und $O \in M$ gibt, so dass $d(O, q) < C$ für alle $q \in M$ gilt.

- a) Zeigen Sie, dass M kompakt ist, falls es eine Riemannsche Metrik g gibt, so dass (M, g) beschränkt und vollständig ist.
- b) Sei (M, g) vollständig. Finden Sie eine zu g konforme Metrik h , so dass (M, h) beschränkt ist.

Tipp: Wählen Sie eine differenzierbare Funktion ω mit $\omega(p) > d(p, O)$ für alle $p \in M$ und setzen Sie $h := e^{-2\omega(p)} g$.

- c) Folgern Sie: ist eine Riemannsche Mannigfaltigkeit M vollständig bezüglich jeder Riemannschen Metrik, dann ist M kompakt.

Aufgabe 68 – Strahlen:

Ein *Strahl* durch p ist eine Geodätische $c: [0, \infty) \rightarrow M$ mit $c(0) = p$, die auf jedem endlichen Teilstück Kürzeste ist. Sei M vollständig, aber nicht kompakt. Zeigen Sie: Für jedes $p \in M$ gibt es einen Strahl durch p .

Hinweis: Benutzen Sie, dass \exp_p für alle p und alle $v \in T_p M$ definiert ist, und dass es zwischen Punkten p und q stets eine Kürzeste gibt.

Aufgabe 69 – Rotationsparaboloid:

- a) Jede vertikale Ursprungsebene schneidet das Rotationsparaboloid $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2\}$ in einer Geodätischen.

Tipp: Spiegelsymmetrie

- b) Benutzen Sie die vorige Aufgabe, um zu zeigen, dass jeder dieser Schnitte Strahlen durch den Pol 0 des Paraboloids definiert.

- c) Zeigen Sie, dass genügend lange Teilstücke im Schnitt von P mit vertikalen Ursprungsebenen nicht Kürzeste sind.

Tipp: Es reicht Geodätische durch 0 zu betrachten, die symmetrisch um 0 sind. Betrachten Sie die Distanz der Endpunkte.

Aufgabe 70 – Transitive Isometrien:

Eine Riemannsche Mannigfaltigkeit (M, g) heißt *homogen*, wenn ihre Isometriegruppe transitiv operiert, d.h. für alle $p, q \in M$ gibt es eine Isometrie φ mit $\varphi(p) = q$. Zeigen Sie: Dann ist M vollständig.

Aufgabe 71 – Vollständigkeit im semi-Riemannschen Fall:

Geodätische Vollständigkeit ist im Gegensatz zu metrischer Vollständigkeit auch für eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit M ein sinnvoller Begriff (warum?). Machen Sie sich klar, dass die Minkowski-Räume vollständig sind.

Wir unterscheiden folgende Vollständigkeitsbegriffe: Eine zeitartige, raumartige oder lichtartige Geodätische c in M heißt *zeitvollständig*, *raumvollständig* oder *lichtvollständig*, wenn sie auf ganz \mathbb{R} definiert ist. Diese Begriffe sind von einander unabhängig, wie wir an folgendem Beispiel sehen.

Wir betrachten $\mathbb{R}^2 = \{(t, x) : t, x \in \mathbb{R}\}$ und $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow (0, \infty)$ sei eine glatte Funktion mit folgenden Eigenschaften:

- $f|_{\{|x| \geq 1\}} \equiv 1$,
- f ist symmetrisch um die t -Achse,
- $\int_0^\infty f(t, 0) dt$ ist endlich.

Dies definiert eine semi-Riemannsche Metrik $g = f^2(-dt^2 + dx^2)$ auf \mathbb{R}^2 . Zeigen Sie, dass (\mathbb{R}^2, g) nicht zeitvollständig, jedoch raum- und lichtvollständig ist.

Hyperbolischer Raum.*Aufgabe 72 – Test hyperbolische Modelle:*

- a) Warum haben Dreiecke in (B^2, b) eine Innenwinkelsumme kleiner als π ?
- b) Man kann zeigen, dass jeder Abstandskreis eines Punktes im obere-Halbebenen-Modell U^2 ein euklidischer Kreis ist. Betrachten Sie in U^2 den Kreis $\partial B_\rho(i)$ vom (intrinsischen) Radius ρ um i . Was ist sein Mittelpunkt und sein Radius?
- c) Betrachten Sie die beiden Geodätischen $\Gamma_1 = i\mathbb{R}$ und $\Gamma_2 = 1 + i\mathbb{R}$ in U . Was ist ihr Abstand $d(\Gamma_1, \Gamma_2) = \inf\{d(p, q) : p \in \Gamma_1, q \in \Gamma_2\}$?

Aufgabe 73 – Senkrechte Geodätische in \mathbb{H}^2 :

- a) Sei $p \in \mathbb{H}^2$ und sei Γ eine Geodätische. Zeigen Sie, dass es eine eindeutige Geodätische Γ' gibt, die senkrecht auf Γ steht und den Abstand zwischen p und Γ minimiert.
- b) Seien Γ_1, Γ_2 Geodätische, die keinen gemeinsamen Punkt in \mathbb{H}^2 oder $\partial\mathbb{H}^2$ haben. Zeigen Sie, dass es eine eindeutige gemeinsame Senkrechte von Γ_1 und Γ_2 gibt, die deren Abstand minimiert. Sie dürfen benutzen, dass $d_{\mathbb{H}^2}(\pi(p), \pi(q)) \leq d_{\mathbb{H}^2}(p, q)$ gilt, falls π die orthogonale Projektion auf eine Geodätische ist.
- c) Gibt es auch eine gemeinsame Senkrechte zwischen Geodätischen, die sich schneiden? Was ist mit Geodätischen, die sich in $\partial\mathbb{H}^2$ schneiden?
- d) Wie sieht die Menge der Punkte in U^2 aus, die einen festen Abstand zu $i\mathbb{R}$ haben? Was ist mit Abstandskurven anderer Geodätischer? Welches Bild ergibt sich in B^2 ?

*Aufgabe 74 – Krümmung von Horokreisen:*Wir betrachten das obere Halbebenen-Modell U^2 von \mathbb{H}^2 .

- a) Sei $c(t) = (t, 1)$ mit $t \in (0, 1)$. Zeigen Sie, dass $(x, y) \mapsto (x + \lambda, y)$ für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ eine Isometrie von U^2 ist und folgern Sie, dass $\frac{D}{dt}c'$ konstant ist.
- b) Verwenden Sie eine konkrete Variation, um zu zeigen, dass $\frac{D}{dt}c' = (0, 1)$ gilt.
- c) Zeigen Sie, dass $(x, y) \mapsto \lambda \cdot (x, y)$ für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ eine Isometrie von U^2 ist und folgern Sie, dass jeder Horokreis $\{(x, y) \in U^2 : y = h\}$ Krümmung 1 hat.

Aufgabe 75 – Homogen und isotrop:

- a) Eine Riemannsche Mannigfaltigkeit (M, g) sei vollständig und isotrop. Zeigen Sie: M ist homogen.
- b) Ist der flache 2-Torus $T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ isotrop? Was vermuten Sie allgemein für Σ_g , eine orientierbare Fläche vom Geschlecht g mit konstanter Krümmung?

Aufgabe 76 – Konforme Metriken und Modelle des hyperbolischen Raums:

- a) Zeigen Sie, dass die Meridiankurven von H^n Hyperbeln sind.
- b) Schreiben Sie H^n als Graph und zeigen Sie, dass seine Tangentialvektoren raumartig sind.
- c) Zeigen Sie, dass die Cayley-Transformation

$$\varphi: B^2 \rightarrow U^2, \quad \varphi(w) := -i \frac{w+i}{w-i}$$

invertierbar ist (wenn Sie es nicht schon wissen).

- d) Finden Sie eine Formel für die hyperbolische stereographische Projektion

$$\Pi: \mathbb{R}_1^{n+1} \setminus \{(0, \dots, 0, -1)\} \rightarrow \mathbb{R}^n \times \{0\} \subset \mathbb{R}_1^{n+1}.$$

Aufgabe 77 – Pseudosphäre:

- a) Als *Pseudosphäre* bezeichnet man die Rotationsfläche der Traktrix (derjenigen Kurve, bei der auf jeder Tangentengeraden der Tangentenpunkt und der Schnittpunkt mit der y -Achse den Abstand 1 besitzen). Zeigen Sie: Die Pseudosphäre hat Gauß-Krümmung $K \equiv -1$.

Tipp zur Verkürzung der Rechnung: Überlegen Sie sich, dass eine nach Bogenlänge parametrisierte Traktrix $c(t) + c'(t) \in \{y\text{-Achse}\}$ erfüllt und verwenden Sie die Formel der Gaußkrümmung einer nach Bogenlänge parametrisierten Kurve.

- b) Was ist die geodätische Krümmung und Länge des berandenden Breitenkreises? Was ist die geodätische Krümmung eines Meridians?
- c) Wir entfernen aus der Pseudosphäre eine Meridiankurve. Aus allgemeinen Sätzen folgt, dass die entstehende einfach zusammenhängende Fläche isometrisch zu einer Teilmenge $V \subset U^2$ ist. Benutzen Sie Teil b), um mit allgemeinen Überlegungen zu erschließen, wie man V am einfachsten darstellen kann. (Sie sollen nicht die Isometrie berechnen.)
- d) Überlegen Sie: Welche Isometrie von U^2 entspricht dann der Drehung der Pseudosphäre um ihre Achse? Was bedeutet das für die geodätische Krümmung eines beliebigen Breitenkreises auf der Pseudosphäre?

Aufgabe 78 – Metriken auf der oberen Halbebene:

- a) Zeigen Sie: Die Kurve $t \mapsto (0, 1-t) \in H^2$ für $t \in (0, 1)$ hat unendliche Länge in der hyperbolischen Metrik der oberen Halbebene.
- b) Zeigen Sie: Die Riemannsche Mannigfaltigkeit $\mathbb{R} \times (0, \infty)$, $g = \frac{1}{y} \langle \cdot, \cdot \rangle$ ist nicht vollständig.
- c) Zeigen Sie direkt: Jede Cauchy-Folge in H^2 mit der hyperbolischen Metrik konvergiert.
Tipp: Zeigen Sie, dass jede Cauchy-Folge von 0 weg beschränkte y -Koordinaten hat.

Aufgabe 79 – Dreiecke und Pflasterungen:

- a) Ein *Dreieck* in U^2 ist eine geschlossene C^0 -Kurve, die aus drei geodätischen Bögen besteht. Bestimmen Sie ein Dreieck mit drei gleichen Winkeln von 45° in H^2 .
Tipp: Zwischenwertargument.
- b) Machen Sie sich klar, dass mit isometrischen Bildern des Dreiecks die hyperbolische Ebene lückenlos gepflastert werden kann. Wieviele solcher Dreiecke kommen in jeder Ecke zusammen? Skizzieren Sie! *Tipp:* Spiegelung.
- c) Wir betrachten ab jetzt das Poincaré-Modell (B_1^2, g) von \mathbb{H}^2 . Ein *ideales Dreieck* ist ein Dreieck, dessen drei Ecken auf ∂B_1^2 liegen. Was sind seine Winkel?
- d) Warum kann man die hyperbolische Ebene mit solchen idealen Dreiecken lückenlos pflastern? Skizzieren Sie!
- e) *Zum Nachdenken:* Sehen Sie irgendeinen elementaren Weg zu zeigen, dass die Winkelsumme jedes hyperbolischen Dreiecks kleiner als 180° ist?

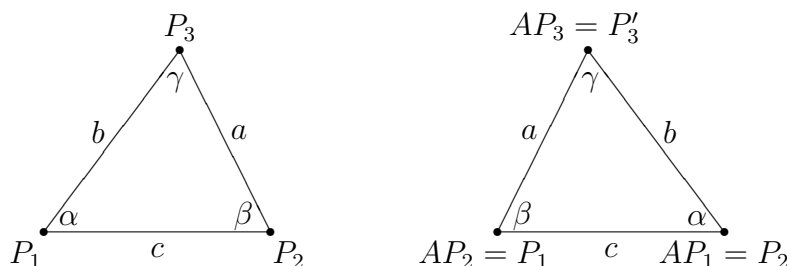
Aufgabe 80 – Inhalt und Innenwinkel von Dreiecken:

Wir betrachten das obere Halbebenen-Modell U^2 von \mathbb{H}^2 . Wir wollen den Inhalt eines Dreiecks Δ berechnen.

- a) Sei Δ ein Dreieck mit genau einer Ecke in ∂U^2 und Winkeln $\alpha, \beta > 0$ in den anderen beiden Ecken. Argumentieren Sie, warum wir annehmen dürfen, dass eine Ecke in ∞ und die anderen beiden Ecken auf dem Einheitskreis liegen. Berechnen Sie daraus $\text{area}(\Delta)$.
- b) Sei jetzt Δ ein Dreieck mit den Winkeln $\alpha, \beta, \gamma > 0$. Berechnen Sie $\text{area}(\Delta)$.
- c) Zeigen Sie, dass die Winkelsumme in hyperbolischen Dreiecken kleiner als 180° ist.

Aufgabe 81 – Trigonometrie:

Im Hyperboloid H^2 betrachten wir drei verschiedene Punkte P_1, P_2, P_3 , welche durch drei Geodätische der Längen $a, b, c > 0$ verbunden sind. Weiter gelte $\alpha, \beta, \gamma \in (0, \pi)$.



- a) Begründen Sie zunächst, dass wir o.B.d.A. annehmen können

$$P_1 = (0, 0, 1), \quad P_2 = (\sinh c, 0, \cosh c), \quad P_3 = (\sinh b \cos \alpha, \sinh b \sin \alpha, \cosh b).$$

Auf dieses neue Dreieck wenden wir nun die Isometrie

$$A := \begin{pmatrix} -\cosh c & 0 & \sinh c \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sinh c & 0 & \cosh c \end{pmatrix}$$

an, welche die Punkte P_1 und P_2 miteinander vertauscht.

- b) Bestimmen Sie anhand des rechten Bildes die Koordinaten des Bildpunktes $P'_3 := AP_3$.
 c) Berechnen Sie andererseits das Produkt $P'_3 = AP_3$ explizit unter Verwendung obiger Isometrie. Schließen Sie hieraus

- den Sinussatz

$$\frac{\sinh a}{\sin \alpha} = \frac{\sinh b}{\sin \beta} = \frac{\sinh c}{\sin \gamma},$$

- den Kosinussatz

$$\cosh c = \cosh a \cosh b - \cos \gamma \sinh a \sinh b \quad (\text{und zyklisch vertauscht})$$

- und den Winkelkosinussatz

$$\cos \gamma = -\cos \alpha \cos \beta + \cosh c \sin \alpha \sin \beta \quad (\text{und zyklisch vertauscht}).$$

Tipp: Multiplizieren Sie die erste Zeile mit $\cos \alpha$ und verwenden einerseits die erste Zeile mit $b \leftrightarrow c$ und andererseits den Sinussatz.

- d) Verwenden Sie den Winkelkosinussatz, um zu zeigen, dass ein rechtwinkliges Dreieck mit den anderen beiden Winkeln $0 < \alpha, \beta < \pi$ genau dann existiert, wenn $\alpha + \beta < \pi/2$ gilt.
- e) Wir wollen nun untersuchen, auf welche Arten \mathbb{H}^2 gepflastert werden kann. Wir betrachten eine Pflasterung mit regulären n -Ecken, wobei an jeder Ecke k solcher n -Ecke aufeinandertreffen. Skizzieren Sie eine solche Situation.
- f) Führen Sie das Problem auf die Existenz von rechtwinkligen Dreiecken zurück, indem Sie jedes n -Eck in $2n$ rechtwinklige Dreiecke aufteilen. Wie groß sind die beiden anderen auftretenden Winkel in diesen rechtwinkligen Dreiecken?
- g) Verwenden Sie die bisherigen Aufgabenteile, um zu untersuchen, für welche Werte von n und k eine Pflasterung von \mathbb{H}^2 durch reguläre n -Ecke existiert, wobei an jeder Ecke k solcher n -Ecke zusammentreffen.

3. KRÜMMUNG

Krümmungstensor.

Aufgabe 82 – Testfragen:

- a) Warum ist \mathbb{R}^n flach?
- b) Berechnen Sie $R(X, Y)Z$ für Vektorfelder X, Y, Z auf \mathbb{R}^n mit der Standardmetrik.
- c) Welche der folgenden Ausdrücke sind $C^\infty(M)$ -linear, wenn $f \in C^\infty(M)$ und $X, Y \in \mathcal{V}(M)$?
- $X \mapsto \nabla_X Y$
 - $Y \mapsto \nabla_X Y$
 - $X \mapsto fX$
 - $X \mapsto [X, Y]$

Aufgabe 83 – Skalierte Metriken:

Eine gegebene Riemannsche Metrik g werde mit einem konstanten Faktor $\lambda \in \mathbb{R}$ multipliziert, $\tilde{g} := \lambda g$.

- a) Unter welcher Bedingung an λ ist \tilde{g} ebenfalls Riemannsche Metrik?

Wie ändern sich

- b) die Christoffel-Symbole Γ_{ij}^k ;
- c) der Riemannsche Krümmungstensor;
- d) die Schnittkrümmung (bzw. Gaußkrümmung in Dimension $n = 2$)?
- e) Sind Geodätische von (M, g) auch Geodätische von (M, \tilde{g}) ?

Aufgabe 84 – Der Krümmungstensor ist ein Tensor:

Zeigen Sie, dass die Abbildung $(X, Y, Z) \mapsto R(X, Y)Z$ in allen Einträgen $\mathcal{D}(M)$ -linear ist.

Aufgabe 85 – Krümmung konformer Metriken:

Wir betrachten eine ebene konforme Metrik der Form

$$\lambda^2(dx^2 + dy^2).$$

Zeigen Sie, dass die (Schnitt- oder Gauß-)Krümmung gegeben ist durch

$$K_p = -\frac{\Delta \log \lambda}{\lambda^2},$$

wobei $\Delta = \partial_{11} + \partial_{22}$ den Laplace-Operator bezeichnet. Folgern Sie, dass \mathbb{H}^2 Krümmung $K = -1$ hat.

Aufgabe 86 – Konforme Metriken:

Nun sei (M, g) semi-Riemannsch und $\tilde{g} = \lambda g$, wobei $\lambda \in \mathcal{D}(M)$.

- Wie muss λ gewählt werden, damit auch (M, \tilde{g}) semi-Riemannsch ist?
- Für welche λ besitzen g und \tilde{g} den gleichen Index?
- Sind Geodätische von (M, g) auch Geodätische von (M, \tilde{g}) ? Geben Sie einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an.

Aufgabe 87 – Krümmung von Rotationsflächen:

- Berechnen Sie die Gaußsche Krümmung des Rotationsparaboloids

$$P := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2\} \subset \mathbb{R}^3.$$

- Sei $(r, h): I \rightarrow (0, \infty) \times \mathbb{R}$ eine reguläre Kurve. Geben Sie die Gaußsche Krümmung für eine Rotationsfläche $f: I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f(t, \varphi) = (r(t) \cos \varphi, r(t) \sin \varphi, h(t))$ an.

Aufgabe 88 – Produktmannigfaltigkeiten:

Es seien (M_1, g^1) und (M_2, g^2) nicht-leere Riemannsche Mannigfaltigkeiten. Laut Aufg.43 ist $N := M_1 \times M_2$ mit der Metrik $h_{(p,q)}(X, Y) := g_p^1(X_1, Y_1) + g_q^2(X_2, Y_2)$ eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Hierbei schreiben wir ein Vektorfeld Z auf N als $Z = (Z_1, Z_2)$ mit $Z_i := d\pi_i(Z)$, wobei $\pi_i: N \rightarrow M_i$ die Projektion ist ($i = 1, 2$).

- Zeigen Sie $R_{(p,q)}(X, Y)Z = (R_p^1(X_1, Y_1)Z_1, R_q^2(X_2, Y_2)Z_2)$.
- Wieso gibt es für jedes $(p, q) \in N$ immer eine Ebene σ in $T_{(p,q)}N$ mit $K_{(p,q)}(\sigma) = 0$?
- Bestimmen Sie alle Schnittkrümmungen des Riemannschen Produktes $N = \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$, wobei \mathbb{S}^2 die Standardmetrik besitzt.

Anmerkung: H. Hopf fragte in den 1950er Jahren, ob $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ irgendeine Metrik positiver Krümmung besitzt. Das Problem ist nach wie vor offen.

Tensoren.*Aufgabe 89 – Quiz Tensoren:*

- Welche der folgenden Ausdrücke sind $\mathcal{D}(M)$ -linear, wenn $f \in \mathcal{D}(M)$, $\omega \in V^*(M)$ und $X, Y \in \mathcal{V}(M)$?
 - $X \mapsto \nabla_X Y$ • $Y \mapsto \nabla_X Y$ • $X \mapsto fX$ • $X \mapsto [X, Y]$ • $X, Y \mapsto X(\omega Y)$
- Welche Invariante liefert die Kontraktion der Metrik einer semi-Riemannschen Mannigfaltigkeit, $c_{12}g$?

- c) Bestimmen Sie $\text{Ric}(X, Y)$ für \mathbb{S}^n .
- d) Welches Tensorprodukt ist kommutativ?
- $w_1 \otimes w_2$ für $w_1, w_2 \in V^*$
 - $v \otimes w$ für $v \in V, w \in V^*$
- e) Wie ändert sich die Formel für die Divergenz im semi-Riemannschen Fall?

Aufgabe 90 – Zweite Bianchi-Identität:

Wir betrachten den Tensor $T(X, Y, U, V) := g(R(X, Y)U, V)$. Zeigen Sie die *zweite Bianchi-Identität*

$$\nabla T(X, Y, U, V, W) + \nabla T(X, Y, V, W, U) + \nabla T(X, Y, W, U, V) = 0.$$

Tip: Für $p \in M$ wähle geeignete Felder X_i mit $\nabla_{X_i} X_j(p) = 0$. Rechne dafür die Tensorableitung aus –zyklische Summe!– und benutze die Jacobi-Identität.

Aufgabe 91 – Satz von Schur:

Sei (M, g) Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension $n \geq 3$. Zeigen Sie: Ist M *isotrop*, d.h. hängt $K_p(\sigma)$ für kein p von σ ab, so hängt $K_p(\sigma)$ sogar nicht einmal von p ab; M ist also eine Mannigfaltigkeit konstanter Krümmung.

Tip: Sei $T'(W, Z, X, Y) := g(Z, X)g(W, Y) - g(W, X)g(Z, Y)$. Setzen wir $T(W, Z, X, Y) := g(R(W, Z)X, Y)$, so gilt nach Satz 6 dann $T_p = \kappa(p)T'_p$. Folgern Sie dann aus der 2. Bianchi-Identität, $\nabla T(W, Z, X, Y, U) + \nabla T(W, Z, Y, U, X) + \nabla T(W, Z, U, X, Y) = 0$, dass

$$0 = \partial_U \kappa \left(g(Z, X)g(W, Y) - g(W, X)g(Z, Y) \right) + \partial_X \kappa \left(g(Z, Y)g(W, U) - g(W, Y)g(Z, U) \right) + \partial_Y \kappa \left(g(Z, U)g(W, X) - g(W, U)g(Z, X) \right).$$

Wählen Sie nun X, Y, Z orthonormal und $U = Z$. Es folgt $g((\partial_Y \kappa)X - (\partial_X \kappa)Y, W) = 0$. Warum ist also κ konstant?

Aufgabe 92 – Ricci-Tensor:

Sei (M, g) Riemannsch. Für $v, w \in T_p M$ seien

$$\text{Ric}_p(v, w) := \sum_{i=1}^n g_p(R_p(e_i, v)w, e_i)$$

der Ricci-Tensor und

$$S_p := \text{tr}_g(\text{Ric}_p) = \sum_{i=1}^n \text{Ric}_p(e_i, e_i)$$

die Skalarkrümmung (mit e_1, \dots, e_n Orthonormalbasis von $T_p M$). Für einen Einheitsvektor $v \in T_p M$ nennt man $\text{Ric}_p(v, v)$ die *Ricci-Krümmung* von v .

- a) Sei $v \in T_p M$ ein Einheitsvektor und sei (e_2, \dots, e_n) eine Orthonormalbasis von v^\perp . Zeigen Sie

$$\text{Ric}_p(v, v) = \sum_{i=2}^n K_p(\text{span}(v, e_i)).$$

- b) Zeigen Sie, dass der Ricci-Tensor symmetrisch ist.
- c) Sei M zweidimensional und sei $v \in T_p M$ ein Einheitsvektor. Zeigen Sie, dass die Ricci-Krümmung von v genau der Gauß-Krümmung und die Skalarkrümmung genau der doppelten Gauß-Krümmung von M entsprechen.
- d) Sei $Z := \text{Ric}_p - \frac{S_p}{n} \cdot g_p$ der so genannte *spurfreie* Ricci-Tensor. Zeigen Sie, dass wirklich $\text{tr}_g Z \equiv 0$ gilt.
- e) Eine Riemannsche Mannigfaltigkeit (M, g) heißt *Einstein-Mannigfaltigkeit*, wenn in jedem $p \in M$ die Bedingung $\text{Ric}_p = \lambda(p)g_p$ erfüllt ist. Zeigen Sie, dass eine Mannigfaltigkeit, deren spurfreier Ricci-Tensor verschwindet, eine Einstein-Mannigfaltigkeit ist.
- f) Zeigen Sie, dass jede 3-dimensionale Einstein-Mannigfaltigkeit konstante Krümmung besitzt. *Tipp*: Satz von Schur.

Aufgabe 93 – Gradient:

Zeigen Sie: Ist $\text{grad } f|_p \neq 0$, so ist $\text{grad } f$ die Richtung des größten Wachstums, d.h. in p gilt

$$-\frac{\text{grad } f}{\|\text{grad } f\|} \leq v(f) \leq \frac{\text{grad } f}{\|\text{grad } f\|}$$

für jedes $v \in T_p M$ mit $\|v\| = 1$; Gleichheit gilt nur für $v = \pm \frac{\text{grad } f}{\|\text{grad } f\|}$.

Aufgabe 94 – Hesse-Form:

Weisen Sie die Symmetrie der Hesse-Form nach, also $Hf(X, Y) = Hf(Y, X)$, und zeigen Sie (27).

Tipp: Es ist $Hf(X, Y) = \partial_X \partial_Y f - \partial_{\nabla_X Y} f$.

Aufgabe 95 – Laplace-Beltrami-Operator für konforme Metriken:

- a) Zeigen Sie $\Delta(fh) = f\Delta h + h\Delta f + 2g(\text{grad } f, \text{grad } h)$ für $f, h \in C^\infty(M)$.
- b) Für den nächsten Teil brauchen wir eine Vorüberlegung. Es sei $\tilde{g} = \lambda^2 g$ mit einer Funktion $\lambda: M \rightarrow (0, \infty)$ eine zu g *konform äquivalente* Metrik auf M . Dann gilt für den Levi-Civita Zusammenhang $\tilde{\nabla}$ von \tilde{g}

$$\lambda^2 \tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \frac{1}{\lambda} \left(X(\lambda)Y + Y(\lambda)X - g(X, Y) \text{grad } \lambda \right).$$

Tipp: Koszul-Formel

c) Mit $\widetilde{\operatorname{div}}$ bezeichnen wir die Divergenz bezüglich $\tilde{g} = \lambda^2 g$. Zeigen Sie

$$\lambda^2 \widetilde{\operatorname{div}} Z = \operatorname{div} Z + \frac{n}{\lambda} Z(\lambda).$$

Tipp: Rechnen Sie bezüglich des orthonormalen Rahmen $\tilde{E}_i := \frac{1}{\lambda} E_i$ von (M, \tilde{g}) .

d) Zeigen Sie $\tilde{\Delta} f = \frac{1}{\lambda^2} \Delta f + \frac{n-2}{\lambda^3} g(\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} \lambda)$ für den Laplace-Operator $\tilde{\Delta}$ einer konform äquivalenten Metrik $\tilde{g} = \lambda^2 g$.

Bemerkung: In Dimension $n = 2$ sind also $\Delta f = 0$ und $\tilde{\Delta} f = 0$ äquivalent unter konformer Änderung der Metrik; z.B. kann man die längs einer beliebigen biholomorphen Abbildung zurückgezogene Metrik betrachten.

Aufgabe 96 – Lokale Formeln für Divergenz und Laplace:

a) Es gilt $\operatorname{div}(Zu) = u \operatorname{div} Z + Z(u)$ für $u \in C^\infty(M)$.

b) Leiten Sie $\partial_k(\sqrt{g}) = \sum_i \sqrt{g} \Gamma_{ki}^i$ her, wobei g für $\det(g_{kl})$ steht. Zeigen Sie die lokale Darstellung der Divergenz

$$\operatorname{div} Z = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_k(\sqrt{g} \zeta^k) \quad \text{für } Z = \sum \zeta^k e_k$$

und folgern Sie daraus die lokale Darstellung

$$\Delta f = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_i(\sqrt{g} g^{ij} \partial_j f).$$

Aufgabe 97 – Ricci-Fluss:

Wir betrachten eine Familie $\mathcal{M}_t := (M, g(t))$ von Riemannschen Mannigfaltigkeiten. Hierbei sei $g(t)$ für jedes $t \in [0, T)$ eine Riemannsche Metrik und die Funktion $t \mapsto g(t)$ sei glatt. Um zu verdeutlichen, auf welche Metrik sich eine Größe bezieht, schreiben wir sie in eckige Klammern, also etwa $\operatorname{Ric}[g]$ für den Ricci-Tensor bezüglich Metrik g .

a) Ist $\tilde{g} = a \cdot g$ mit $a > 0$, dann gilt $\operatorname{Ric}[\tilde{g}] = \operatorname{Ric}[g]$.

Die *Ricci-Fluss-Gleichung* (*Ricci curvature flow*) ist das folgende Anfangswertproblem:

$$(RCF) \quad \frac{\partial}{\partial t} g(t) = -2 \operatorname{Ric}[g(t)], \quad g(0) = g_0$$

Eine Lösung hiervon ist eine Funktion $t \mapsto g(t)$, zusammen mit einem Existenzintervall $[0, T)$, auf dem g Riemannsch ist und (RCF) löst.

b) Sei $\mathcal{M}_0 = \mathbb{S}^n$ mit Standardmetrik. Finden Sie eine Lösung von (RCF)? Für welche Zeiten existiert sie?

c) Zeigen Sie, dass für $M = \mathbb{S}^n$ mit Standardmetrik die Lösung \mathcal{M}_t von (RCF) für jedes $t \in [0, T)$ isometrisch zu einer Sphäre vom Radius $r(t)$ mit Standardmetrik ist. Wie lautet die Funktion $r(t)$? Was passiert also mit der Lösung für $t \rightarrow T$?

- d) Sei M eine kompakte Einstein-Mannigfaltigkeit. Zeigen Sie, dass es ein $T > 0$ gibt, so dass eine Lösung von (RCF) für $t < T$ existiert.
- e) Wir betrachten eingebettete Flächen (also $n = 2$) in \mathbb{R}^3 . Wie lautet hier (RCF)? Was passiert, wenn M ein flacher Torus, ein Zylinder, ein Stück der Pseudosphäre oder ein Rotationstorus ist?

Anmerkung: Der Ricci-Fluss wurde von Hamilton 1981 eingeführt. Er wurde zum Beweis der *Poincaré-Vermutung* von Perelman 2003 benutzt: Jede einfach zusammenhängende, geschlossene 3-Mannigfaltigkeit ist homöomorph zu \mathbb{S}^3 . Brendle und Schoen benutzten ihn 2007 zum Beweis des *Sphärensatzes*: Jede kompakte, einfach zusammenhängende n -Mannigfaltigkeit mit Schnittkrümmungen in $(1/4, 1]$ ist diffeomorph zur n -Sphäre.

Zweite Variation.

Aufgabe 98 – Zweite Variation eines Großkreises:

Auf \mathbb{S}^2 betrachten wir den Großkreis $c(t) := e_3 \cos t + e_1 \sin t$ und seine Variation durch Großkreise $h_s(t) := e_3 \cos t + \sin t(e_1 \cos s + e_2 \sin s)$.

- a) Zeigen Sie, dass das Variationsfeld $V(t)$ orthogonal zu $c'(t)$ ist.
- b) Für welche t ist h_s eigentlich?
- c) Was ist $L(h_s([0, \pi]))$?
- d) Berechnen Sie die zweite Variation der Bogenlänge von $c([0, \pi])$.

Aufgabe 99 – Satz von Myers:

Beweisen Sie den Satz von Myers unter der Annahme (31), d.h. unter der Annahme $\text{Ric}_p(X, X) = \sum_{k=1}^{n-1} g(R(E_k, X)X, E_k) \geq \frac{n-1}{r^2}$.

Aufgabe 100 – Semi-Riemannsche Mannigfaltigkeiten:

Wir betrachten eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit (M, g) mit Index $\nu > 0$.

- a) Der *kausale Charakter* eines Tangentialvektors $X \in T_p M$ ist die Eigenschaft, lichtartig, raumartig oder zeitartig zu sein. Dabei sagen wir für zwei nicht-lichtartige Vektoren $X, Y \in T_p M$ ihr kausaler Charakter ist *entgegengesetzt*, wenn genau einer von ihnen zeitartig ist.
- Zeigen Sie, dass die Summe zweier orthonormaler Tangentialvektoren mit entgegengesetztem kausalen Charakter lichtartig ist.

b) Wir definieren

$$Q_p: T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}, \quad Q_p(X, Y) = g_p(X, X)g_p(Y, Y) - g_p(X, Y)^2.$$

Eine Ebene $\Pi \subset T_p M$, die von X und Y aufgespannt wird, nennen wir *definit*, falls $Q_p(X, Y) > 0$, *degeneriert*, falls $Q_p(X, Y) = 0$ und *indefinit*, falls $Q_p(X, Y) < 0$. Zeigen Sie, dass diese Eigenschaft wohldefiniert ist.

Tipp: Zeigen Sie $\operatorname{sgn} Q(X, Y) = \operatorname{sgn} Q(X, Z)$ für jede Linearkombination Z von X und Y .

- c) Finden Sie eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit (M, g) und drei Paare von Vektoren, die jeweils eine definite, eine indefinite und eine degenerierte Ebene aufspannen.
- d) Sei Π eine Ebene, die durch die orthogonalen Vektoren X, Y aufgespannt wird. Zeigen Sie, dass Π genau dann definit ist, wenn X und Y den gleichen kausalen Charakter haben, genau dann indefinit ist, wenn X und Y entgegengesetzten kausalen Charakter haben, und genau dann degeneriert ist, wenn X oder Y lichtartig sind.
- e) Sei X, U, Z ein Orthonormalsystem in $T_p M$, so dass X und U entgegengesetzten kausalen Charakter haben. Dann gilt $Q(X, Z) = -Q(U, Z)$.
- f) Wir definieren eine Abbildung

$$\mathcal{N}_p: \{\text{degenerierte Ebenen in } T_p M\} \rightarrow \{-1, 0, 1\}, \quad \Pi \mapsto \operatorname{sgn} g_p(R_p(X, Y)Y, X),$$

wobei X und Y die Ebene Π aufspannen. Zeigen Sie, dass \mathcal{N}_p wohldefiniert ist.

Tipp: Ersetzen Sie auch hier einen der Vektoren durch eine Linearkombination.

- g) Zeigen Sie, dass (M, \tilde{g}) mit $\tilde{g} := -g$ eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Index $n - \nu$ ist. Wie hängen Q_p , R_p und K_p von g und \tilde{g} zusammen?

Aufgabe 101 – Semi-Riemannsche Mannigfaltigkeiten mit Krümmungsschranke:

In dieser Aufgabe wollen wir folgenden Satz zeigen:

Satz (Kulkarni et al., 1979). *Sei (M, g) eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Index $\nu > 0$ und sei $p \in M$. Wenn $K_p \geq a$ oder $K_p \leq b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ gilt, dann ist K_p konstant.*

Alle auftretenden Größen werden im Punkt $p \in M$ betrachtet und wir lassen den Fußpunkt überall weg.

- a) Überlegen Sie, dass wir o.B.d.A. $\dim M \geq 3$ und $a \leq K$ annehmen können.
- b) Zeigen Sie: $\mathcal{N} \equiv 0$, wobei

$$\mathcal{N}_p: \{\text{degenerierte Ebenen in } T_p M\} \rightarrow \{-1, 0, 1\}, \quad \Pi \mapsto \operatorname{sgn} g_p(R_p(X, Y)Y, X)$$

aus der letzten Übung bekannt ist. Dabei dürfen Sie ohne Beweis verwenden, dass jede degenerierte Ebene Grenzwert von einerseits definiten und andererseits indefiniten Ebenen ist.

- c) Seien $X, U, Z \in T_p M$ ein Orthonormalsystem. Weiterhin gelte, dass X und U entgegengesetzten kausalen Charakter haben. Folgern Sie aus (b): $K(\text{span}(X, Z)) = K(\text{span}(U, Z))$.

Tipp: Berechnen Sie $g(R(X \pm U, Z)Z, X \pm U)$.

- d) Sei $\nu = 1$ und U zeitartig. Zeigen Sie, dass K für jede Ebene, die U enthält oder auf U senkrecht steht, konstant ist. Folgern Sie die Behauptung des Satzes für $\nu = 1$ und $\nu = n - 1$.

- e) Zeigen Sie, dass K auch für $1 < \nu < n - 1$ konstant ist.

Anmerkung: Im Fall von $n \geq 3$ folgt aus dem Satz von Schur, dass M konstante Krümmung hat (K also auch nicht vom Punkt abhängt).

Aufgabe 102 – Minitest zu Überlagerungen:

Welche der folgenden Abbildungen sind Überlagerungen?

- a) $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1, t \mapsto (\cos t, \sin t)$
- b) $\mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*, z \mapsto z^k$ mit $k \in \mathbb{N}$
- c) $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n/\Gamma, x \mapsto \pi(x)$ mit einem Gitter Γ und der kanonischen Projektion π
- d) $M \rightarrow M, p \mapsto p$
- e) $\mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}, z \mapsto \exp z$

Aufgabe 103 – Überlagerungen der Figur acht:

In dieser Aufgabe betrachten wir die durch die Figur acht definierte *topologische* Mannigfaltigkeit M , zum Beispiel dargestellt durch zwei sich tangential berührende Kreise in \mathbb{R}^2 oder als Spur der Immersion $c: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, c(t) := (\sin(2t), \sin(t))$.

- a) Finden Sie eine endliche (und nicht-triviale!) Überlagerung von M .
- b) Zeigen Sie, dass c keine Überlagerung von $M = c(\mathbb{R})$ ist.
- c) Finden Sie die universelle Überlagerung von M , indem Sie einen geeigneten Graphen in \mathbb{R}^2 skizzieren.

Hinweis: Wie löst man die problematische Stelle in b) am sinnvollsten?

Jacobifelder.

Aufgabe 104 – Test:

Geben Sie an, ob die folgenden Aussagen stimmen: Beweis oder Gegenbeispiel.

- a) Sind J_1, J_2, J_3 Jacobifelder, so auch $J_1 + 2J_2 + 3J_3$.

- b) Jacobifelder haben konstante Länge.
- c) Das Vektorfeld $t \mapsto f(t)c'(t)$ ist genau dann ein Jacobifeld, wenn f affin linear ist.
- d) Sind J_1, J_2 Jacobifelder, so ist $g(J'_1, J_2) - g(J_1, J'_2)$ konstant in t .
- e) Ist J Jacobifeld ohne Nullstelle, so ist $J/|J|$ parallel.
- f) Falls c konstant ist, sind alle Jacobifelder explizit bekannt.

Aufgabe 105 – Jacobifelder auf dem Zylinder:

Sei $Z = \{x^2 + y^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$ der Zylinder mit Standardmetrik. Finden Sie eine Basis für den Raum der Jacobifelder längs des Meridians $\{x = 1, y = 0\}$.

Aufgabe 106 – Jacobifelder bei nichtpositiver Schnittkrümmung:

Sei M Riemannsch und J ein Jacobifeld längs einer Geodätischen c .

- a) Berechnen Sie $\frac{d^2}{dt^2} \|J(t)\|^2$.
- b) Zeigen Sie: hat M nichtpositive Schnittkrümmung, so ist $t \mapsto \|J(t)\|^2$ konvex.
- c) Wir betrachten die Geodätische $c: t \mapsto (0, e^t)$ im oberen Halbebenen-Modell U^2 des hyperbolischen Raums. Finden Sie ein Jacobifeld J senkrecht zu c' . Was passiert mit $\|J\|$ für $t \rightarrow \pm\infty$? Was verrät das über den (infinitesimalen) Abstand zweier solcher Geodätischer?

Aufgabe 107 – Tangentiale und normale Jacobifelder:

Sei J ein Jacobifeld längs einer nach Bogenlänge parametrisierten Geodätischen c . Zeigen Sie, dass sowohl Normalanteil $J^\perp := J - g(J, c')c'$ als auch Tangentialanteil $J^\top := g(J, c')c'$ ebenfalls Jacobifelder sind.

Aufgabe 108 – Tangentiale Jacobifelder:

Es seien J, J_1, J_2 Jacobifelder längs einer nach Bogenlänge parametrisierten Geodätischen $c(t)$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

- a) $g(J'_1, J_2) - g(J_1, J'_2)$ ist konstant in t .
- b) $g(J', c')$ ist konstant und $g(J, c')$ affin linear in t .
- c) Ist $J(0) \perp c'(0)$ und $J'(0) \perp c'(0)$, so ist $J(t) \perp c'(t)$ für jedes t .
- d) Es sei \mathcal{J} der Raum der Jacobifelder längs c , und $\mathcal{J}^\perp := \{J \in \mathcal{J} : J(t) \perp c'(t) \ \forall t\}$. Dann ist $\mathcal{J} = \mathcal{J}^\perp \oplus \text{span}\{c', tc'\}$. Insbesondere hat \mathcal{J}^\perp Dimension $2n - 2$.

Aufgabe 109 – Jacobifeld auf Rotationsfläche:

Sei $\varphi(t, \alpha) := (r(t) \cos \alpha, r(t) \sin \alpha, h(t))$ eine Rotationsfläche, deren Meridiane $t \mapsto \varphi(t, \alpha)$ nach Bogenlänge parametrisiert seien. Finden Sie ein Jacobifeld längs eines Meridians. Berechnen Sie die Gauß-Krümmung der Rotationsfläche aus der Jacobi-Gleichung.

Aufgabe 110 – Linearisierung:

Die *Linearisierung* einer Differentialgleichung $L(t, u, u') = u' - f(t, u) = 0$ ist definiert als

$$\frac{d}{ds} L(t, u + sv, (u + sv)')|_{s=0}.$$

- Linearisieren Sie die quadratische Differentialgleichung $u' - u^2 = 0$.
- Machen Sie sich klar, dass die Jacobische Differentialgleichung eine Linearisierung der Geodätengleichung ist.

Aufgabe 111 – Schnittkrümmung:

Sie sind in einem Punkt p des Weltraums, den wir als eine 3-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit auffassen. Wie würden Sie die Schnittkrümmung $K_p(\sigma)$ ermitteln? Geben Sie möglichst präzise an, was Sie messen müssen, und welche Rechnung Sie mit den Ergebnissen machen. (Sie können Längen messen und kennen die Bahnen von Lichtstrahlen.)

Aufgabe 112 – Index-Form:

Sei $c: [0, a] \rightarrow M$ eine Geodätische in einer Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) . Weiter sei $\mathcal{V} = \{V \text{ stückweise differenzierbares Vektorfeld längs } c \text{ mit } V(0) = V(a) = 0\}$. Dann definiert

$$I_a: \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}, \quad I_a(V, W) := \int_0^a g\left(\frac{D}{dt}V, \frac{D}{dt}W\right) - g(R(V, c')c', W) dt$$

eine symmetrische Bilinearform (klar machen!). Die quadratische Form $\mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}, V \mapsto I_a(V, V)$ heißt auch *Index-Form*. Weiter sei

$$\mathcal{N} := \{V \in \mathcal{V}: I_a(V, W) = 0 \text{ für alle } W \in \mathcal{V}\}.$$

- Beschreiben Sie \mathcal{N} und $\dim(\mathcal{N})$ geometrisch. Zeigen Sie $\mathcal{N} = \mathcal{V} \cap \mathcal{J}_c$. Wieso ist $\mathcal{N} \neq \mathcal{J}_c$?

Wir nennen

$$\text{ind}(c) := \sup \{ \dim(\mathcal{A}): \mathcal{A} \subset \mathcal{V} \text{ Untervektorraum und } I_a|_{\mathcal{A} \times \mathcal{A}} \text{ negativ definit} \}$$

den *Index von c* und $N(c) := \dim(\mathcal{N})$ die *Nullität*.

- b) Betrachten Sie $M = \mathbb{S}^n$ und eine vom Nordpol aus startende Geodätische $c: [0, a] \rightarrow \mathbb{S}^n$ für $a \in (k\pi, (k+1)\pi]$ mit $k \in \mathbb{N}_0$. Was ist $\text{ind}(c)$?

Hinweis: $I_a(V, V) = \delta_{V,V}^2 E(c)$ und Satz 22

Das *Index-Theorem von Morse* besagt

$$\text{ind}(c) < \infty \quad \text{und} \quad \text{ind}(c) = \sum_{t \in (0, a)} N(c^t),$$

wobei $c^t := c|_{[0, t]}$ für $t \in (0, a)$. Wir wollen die erste Aussage, $\text{ind}(c) < \infty$, nun beweisen.

Wir wählen dazu eine Zerlegung $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{k-1} < t_k = a$ von $[0, a]$, so dass jedes Segment $c|_{[t_{j-1}, t_j]}$ für $j \in \{1, \dots, k\}$ in einer normalen Umgebung liegt, d.h. dieses Segment minimiert die Energie. Außerdem sei

$$\mathcal{V}^- := \{V \in \mathcal{V} : V|_{(t_{j-1}, t_j)} \text{ Jacobifeld für alle } j \in \{1, \dots, k\}\}$$

und

$$\mathcal{V}^+ := \{W \in \mathcal{V} : W(t_j) = 0 \text{ für alle } j \in \{1, \dots, k-1\}\}.$$

- c) Beweisen Sie: Die Mengen \mathcal{V}^+ und \mathcal{V}^- sind Untervektorräume mit $\mathcal{V} = \mathcal{V}^+ \oplus \mathcal{V}^-$, und bezüglich I_a ist diese Summe orthogonal.
- d) Zeigen Sie: Eingeschränkt auf $\mathcal{V}^+ \times \mathcal{V}^+$ ist I_a positiv definit.
- e) Folgern Sie, dass $\text{ind}(c)$ endlich ist.

Aufgabe 113 – Geometrischer Beweis der Wirtinger-Ungleichung:

Sei $f: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ eine 2-mal stetig differenzierbare Funktion mit $f(0) = 0 = f(\pi)$. Dann gilt die *Wirtinger-Ungleichung*

$$\int_0^\pi (f(t))^2 dt \leq \int_0^\pi (f'(t))^2 dt;$$

sie wird mit Gleichheit genau dann erfüllt, wenn $f(t) = c \sin(t)$ für ein $c \in \mathbb{R}$ ist.

Betrachten Sie zum Beweis eine Geodätische $c: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{S}^2$, die zwei antipodale Punkte p und $-p$ verbindet. Finden Sie ein geeignetes Vektorfeld $V \in \mathcal{V}$ mit $I_\pi(V, V) = \int_0^\pi (f'(t))^2 dt - \int_0^\pi (f(t))^2 dt$. Warum folgt daraus die Ungleichung? Wie folgt der Gleichheitsfall?

Welche Ungleichung erhält man, wenn man das Intervall $[0, \pi]$ durch ein Intervall $[0, L]$ mit $L > 0$ ersetzt?

Konjugierte Punkte.

Aufgabe 114 – Synge-Lemma:

In dieser Aufgabe zeigen wir die folgende Aussage:

Satz (Synge 1936). *Sei M eine orientierbare Riemannsche Mannigfaltigkeit gerader Dimension mit überall positiver Schnittkrümmung. Sei $c: [a, b] \rightarrow M$ geschlossene Geodätische (also nicht konstant). Dann gibt es eine Variation h von c , so dass alle Kurven h_s geschlossen sind, und $L(h_s) < L(h_0) = L(c)$ für $s \neq 0$.*

Gehen Sie wie folgt vor:

- Zeigen Sie, dass eine Matrix aus $\mathrm{SO}(m)$ mit m ungerade den Eigenwert 1 hat.
- Setzen Sie einen Vektor aus $T_{c(a)}M^\perp := \{X \in T_p M : g(X, c'(a)) = 0\}$ parallel zu einem geschlossenen Vektorfeld $V(t)$ fort.
- Berechnen Sie die ersten beiden Variationen.

Aufgabe 115 – Mannigfaltigkeiten positiver Krümmung in gerader Dimension:

Nach Satz 32 ist jede vollständige, zusammenhängende Mannigfaltigkeit der Dimension $n \geq 2$ mit konstanter Krümmung $K > 0$ isometrisch zu \mathbb{S}^n/Γ , wobei $\Gamma \subset \mathrm{O}(n+1)$ frei und eigentlich diskontinuierlich auf \mathbb{S}^n operiert.

Sei M^{2n} eine vollständige, zusammenhängende Mannigfaltigkeit gerader Dimension mit konstanter Krümmung $K > 0$. Folgern Sie, dass M isometrisch zur Sphäre \mathbb{S}^{2m} mit Radius $K^{-1/2}$ oder zum projektiven Raum $\mathbb{R}P^{2m} = \mathbb{S}^{2m}/\{\pm \mathrm{id}\}$ ist.

Aufgabe 116 – Linsenräume:

Indem wir $\mathbb{C}^2 = \mathbb{R}^4$ identifizieren, wird $\mathbb{S}^3 = \{(w, z) \in \mathbb{C}^2 : w\bar{w} + z\bar{z} = 1\}$. Für $k \in \mathbb{N}$ schreiben wir $\mathbb{Z}_k = \{\zeta_\kappa := e^{2\pi i \kappa/k} : 0 \leq \kappa \leq k-1\}$ als multiplikative Gruppe k -ter Einheitswurzeln in \mathbb{C} .

- \mathbb{Z}_k operiert auf \mathbb{S}^3 durch $(w, z) \mapsto (w\zeta_\kappa, z\zeta_\kappa^m)$ eigentlich diskontinuierlich, und zwar für jedes $m \in \mathbb{N}$, das teilerfremd zu k ist.
- \mathbb{Z}_k operiert durch Isometrien (oder auch orthogonal). Daher hat der Quotientenraum $L(k, m) = \mathbb{S}^3/\mathbb{Z}_k$ mit Riemannscher Quotientenmetrik die konstante Krümmung $+1$. Warum ist $\pi_1(L(k, 1)) \neq 0$, wenn $k \geq 2$?
- Finden Sie eine geschlossene Geodätische mit Länge $2\pi/k$ in $L(k, 1)$.
- Bestimmen Sie r , so dass $\exp_p : B_r \rightarrow L(k, 1)$ injektiv ist für alle $p \in L(k, 1)$.

Aufgabe 117 – Satz von Frankel:

In dieser Aufgabe zeigen wir den folgenden Satz.

Satz (Theodore Frankel, 1960). *Sei M^n kompakt mit positiver Schnittkrümmung und seien U^k, V^ℓ total geodätische Untermannigfaltigkeiten von M mit $k + \ell \geq n$. Dann schneiden sich U und V in mindestens einem Punkt.*

Gehen Sie dazu wie folgt vor:

- Zeigen Sie, dass total geodätische Untermannigfaltigkeiten von kompakten Mannigfaltigkeiten selbst kompakt sind.
- Ist $U \cap V \neq \emptyset$, dann gibt es eine Kürzeste c zwischen U und V . Diese trifft beide Untermannigfaltigkeiten senkrecht.
- Die Parallelverschiebung $T_{c(0)}M \rightarrow T_{c(1)}M$ ist ein Isomorphismus.
- Benutzen Sie die Dimensionsvoraussetzung, um ein paralleles Vektorfeld P längs c mit $P(0) \in T_{c(0)}U$ und $P(1) \in T_{c(1)}V$ zu finden.
- Untersuchen Sie die zweite Variation bezüglich P .

Zusatz: Wenn M nicht kompakt ist, U und V aber schon – gilt der Satz dann auch noch?

Bemerkung: Siehe [P, S.181] für eine Verallgemeinerung von B. Wilking (2003).

Aufgabe 118 – Killing-Felder:

Sei V ein Vektorfeld auf (M, g) und sei A ein $(0, 2)$ -Tensor auf (M, g) . Die Lie-Ableitung von A nach V ist wie bei Differentialformen definiert als

$$(\mathcal{L}_V A)(X, Y) := \partial_V A(X, Y) - A([V, X], Y) - A(X, [V, Y]).$$

Ähnlich wie bei der Lie-Klammer zweier Vektorfelder lässt sich zeigen, dass

$$\mathcal{L}_V A = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (\psi_t^* A - A)$$

gilt, wobei ψ_t den Fluss von V bezeichnet, der für geeignete t definiert ist.

- Zeigen Sie, dass ein Vektorfeld V genau dann $\mathcal{L}_V g = 0$ erfüllt, wenn der Fluss ψ_t für jedes t eine Isometrie ist. Ein solches Vektorfeld nennt man auch *Killing-Vektorfeld*.
Tipp: Zeigen Sie, dass die Ableitung der Funktion $f: s \mapsto g(d\psi_s v, d\psi_s v)$ verschwindet.
- Folgern Sie aus a) folgende Eigenschaft: Ein Killing-Feld V eingeschränkt auf eine Geodätische ist ein Jacobifeld.
- Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:
 - V ist ein Killing-Feld.
 - Für alle Vektorfelder X, Y auf M gilt $\partial_V g(X, Y) = g([V, X], Y) + g(X, [V, Y])$.

- c) Es gilt $g(\nabla_X V, Y) = -g(\nabla_Y V, X)$ für alle Vektorfelder X, Y auf M , d.h. die Abbildung $X \mapsto \nabla_X V$ ist schiefssymmetrisch bezüglich g .
- d) Zeigen Sie, dass die Menge der Killing-Felder einer Mannigfaltigkeit M einen Vektorraum $\mathcal{K}(M)$ bildet.
- e) Bestimmen Sie $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$.
Tipp: Nach (a) müssen Sie nur die Isometriegruppe kennen und die zugehörigen Flüsse betrachten.
- f) Sei $M = T^n$ der flache Torus. Finden Sie eine Basis von $\mathcal{K}(T^n)$. *Tipp:* Liften Sie Felder nach \mathbb{R}^n , denn dort kennen Sie sie bereits.

Aufgabe 119 – Eindeutigkeit von Killing-Feldern:

- a) Sei V ein Killing-Feld auf M und sei c eine Geodätische in M . Zeigen Sie, dass die Einschränkung $V \circ c$ von V auf c ein Jacobifeld ist und dass $g(V \circ c, c')$ konstant entlang c ist.
- b) Sei V ein Killing-Feld auf M und sei M zusammenhängend. Zeigen Sie, dass wenn V und $X \mapsto \nabla_X V$ beide in einem Punkt $p \in M$ verschwinden, bereits $V \equiv 0$ folgt.
Tipp: Zeigen Sie, dass die Menge A , auf der V verschwindet, offen und abgeschlossen ist. Betrachten Sie für die Offenheit einen normalen Ball um p .

Aufgabe 120 – Satz von Bochner:

Zeigen Sie den folgenden Satz:

Satz (Bochner, 1946). *Sei (M, g) eine kompakte orientierbare Riemannsche Mannigfaltigkeit mit nicht-positiver Ricci-Krümmung. Dann ist jedes Killing-Feld parallel. Ist die Ricci-Krümmung negativ, dann ist $V \equiv 0$ das einzige Killing-Feld.*

Sei dazu V ein Killing-Feld auf M und $f: M \rightarrow \mathbb{R}$, $f(p) := \frac{1}{2}g(V(p), V(p))$.

- a) Zeigen Sie $\text{grad } f = -\nabla_V V$ und $\Delta f = -\text{Ric}(V, V) + |\nabla V|^2$.
- b) Integrieren Sie Δf über M , und benutzen Sie den Satz von Stokes sowie das Ergebnis aus a), um den Satz von Bochner zu beweisen.

Aufgabe 121 – Symmetrische Räume:

Eine zusammenhängende Mannigfaltigkeit heißt *symmetrisch*, wenn es in jedem Punkt $p \in M$ eine Isometrie $\zeta_p: M \rightarrow M$ gibt, so dass $d(\zeta_p)_p = -\text{id}$ gilt.

- a) Finden Sie Beispiele für symmetrische Räume.

- b) Zeigen Sie, dass die globale Isometrie ζ_p Geodätische durch p spiegelt: Für jede Geodätische mit $c(0) = p$ gilt $\zeta_p(c(s)) = c(-s)$.
- c) Zeigen Sie, dass symmetrische Räume vollständig sind.

Aufgabe 122 – Transvektionen:

Eine Isometrie $\varphi: M \rightarrow M$ heißt *Transvektion* entlang einer Geodätischen c , wenn $\varphi(c(s)) = c(s + T)$ für ein T und alle s gilt (also φ entlang c verschiebt) und $d\varphi$ die Parallelverschiebung entlang c ist.

- a) Finden Sie ein Beispiel für eine Transvektion auf \mathbb{S}^2 .
- b) Sei M ein symmetrischer Raum, c eine Geodätische auf M und ζ_s die globale Symmetrie von M in $c(s)$. Dann ist die Abbildung $\zeta_{T/2}\zeta_0$ für jedes T eine Transvektion entlang c , welche um T verschiebt.
- c) Zeigen Sie, dass jede nichtkonstante Geodätische in einem symmetrischen Raum entweder injektiv oder einfach periodisch ist.

Aufgabe 123 – Satz von Kobayashi:

In dieser Aufgabe zeigen wir die folgende Aussage:

Satz (Kobayashi 1962). *Eine homogene Riemannsche Mannigfaltigkeit mit $K \leq 0$ und $\text{Ric} < 0$ ist einfach zusammenhängend.*

- a) Finden Sie ein Beispiel einer homogenen Mannigfaltigkeit mit $K \leq 0$ und $\text{Ric} \geq 0$, die nicht einfach zusammenhängend ist.

Gehen Sie jetzt zum Beweis des Satzes wie folgt vor:

- b) Zeigen Sie, dass jede maximale Geodätische in M injektiv oder periodisch ist. Sie dürfen benutzen, dass man jeden Vektor X zu einem Killing-Vektorfeld fortsetzen kann.
Tipp: Sie müssen nur zeigen, dass bei einer Geodätischen mit $c(0) = c(b)$ auch $c'(0) = c'(b)$ gilt (wieso?). Setzen Sie dazu $c'(0)$ durch ein Killing-Vektorfeld längs c fort.
- c) Wenn M nicht einfach zusammenhängend ist, gibt es eine periodische Geodätische.
- d) M besitzt keine periodischen Geodätischen.
Tipp: Wegen $\text{Ric} < 0$ gibt es einen Vektor $X \in T_{c(0)}M$ mit $g(R(X, c'(0))c'(0), X) < 0$. Setzen Sie diesen zu einem Killing-Feld fort und berechnen Sie die zweite Ableitung der periodischen Funktion $h(t) = g(X(c(t)), X(c(t)))$.

Untermannigfaltigkeiten.

Aufgabe 124 – Semi-Riemannsche Hyperflächen:

Eine *semi-Riemannsche Untermannigfaltigkeit* $M^n \subset \overline{M}^{n+k}$ in einer semi-Riemannschen Mannigfaltigkeit ist eine semi-Riemannsche Untermannigfaltigkeit, auf der die eingeschränkte Metrik nicht-degeneriert ist und konstanten Index hat.

- Zeigen Sie, dass ein Unterraum W eines Vektorraums V genau dann nicht-degeneriert ist, wenn V die direkte Summe von W und W^\perp ist. Folgern Sie, dass der Normalraum einer semi-Riemannschen Untermannigfaltigkeit nicht-degeneriert ist.
- Der *Ko-Index* co-ind von M ist der Index von g , eingeschränkt auf $N_p M$. Zeigen Sie, dass der Ko-Index nicht vom Punkt abhängt und dass $\text{ind}(\overline{M}) = \text{ind}(M) + \text{co-ind}(M)$ gilt.
- Sei $f: \overline{M} \rightarrow \mathbb{R}$ und $c \in f(\overline{M})$. Unter welchen Voraussetzungen ist $M := f^{-1}(c)$ eine semi-Riemannsche Hyperfläche in \overline{M} ?
- Das *Vorzeichen* ε einer Hyperfläche M sei 1, falls $\text{co-ind}(M) = 0$ gilt; es ist -1 , falls $\text{co-ind}(M) = 1$ gilt. Finden Sie ein Einheitsnormalenfeld auf $M = f^{-1}(c)$. Was ist das Vorzeichen von M ?
- Gelten die Codazzi-Gleichungen für Hyperflächen im semi-Riemannschen Fall?

Aufgabe 125 – Nabelpunkte:

Sei $M \subset \overline{M}$ eine semi-Riemannsche Hyperfläche mit lokal definiertem Einheitsnormalenfeld N und Weingartenabbildung S .

- Ein Punkt $p \in M$ heißt *Nabelpunkt*, wenn es ein $Z \in N_p M$ gibt, so dass $B(V, W) = g(V, W)Z$ für alle $V, W \in T_p M$ gilt. Zeigen Sie, dass in der Sphäre $M = \mathbb{S}^n(R)$ vom Radius R in $\overline{M} = \mathbb{R}^{n+1}$ jeder Punkt ein Nabelpunkt ist. Berechnen Sie das mittlere Krümmungsfeld $(c_{12}B)/n$ von $\mathbb{S}^n(R)$.
- Zeigen Sie, dass M genau dann nur aus Nabelpunkten besteht, wenn $S = k_N \cdot \text{id}$ mit einer Funktion $k_N: M \rightarrow \mathbb{R}$ gilt. Warum gilt $k_{-N} = -k_N$?
Die Funktion k_N heißt *Normalkrümmung* von M bezüglich N .
- Sei M zusammenhängend mit Dimension mindestens 2. Wir nehmen an, dass M nur aus Nabelpunkten besteht und dass \overline{M} konstante Krümmung K hat. Zeigen Sie, dass die Normalkrümmung k_N von M konstant ist und dass M konstante Krümmung $K + \varepsilon k_N^2$ hat.
Tipp: Setzen Sie in p linear unabhängige Vektorfelder V, W in die Codazzi-Gleichung ein. Danach hilft die Gauß-Gleichung.

Aufgabe 126 – Total geodätische Untermannigfaltigkeiten:

- a) Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen für eine Riemannsche Untermannigfaltigkeit $M \subset \overline{M}$ äquivalent sind:
- M ist total geodätisch in \overline{M} .
 - Die zweite Fundamentalform B von M in \overline{M} verschwindet.
- b) Warum stimmt die Schnittkrümmung einer total geodätischen Untermannigfaltigkeit mit der Schnittkrümmung der umgebenden Mannigfaltigkeit überein?
- c) Zeigen Sie, dass total geodätische Untermannigfaltigkeiten nur aus Nabelpunkten bestehen.
- d) Zeigen Sie, dass eine flache Hyperfläche in \mathbb{R}^n , die nur aus Nabelpunkten besteht, total geodätisch ist.
- e) Sei $\sigma \subset T_p \overline{M}$ ein Unterraum der Dimension zwei, sei B ein offener Ball in $T_p \overline{M}$, auf dem \exp_p ein Diffeomorphismus ist und sei $S = \exp_p(B \cap \sigma)$. Was beschreibt S anschaulich? Zeigen Sie

$$K_S(p) = K_p(\sigma).$$

Hier ist K_S die Gauß-Krümmung der zweidimensionalen Fläche S .

Aufgabe 127 – Clifford-Torus:

Wir betrachten in $\overline{M} := \mathbb{S}^3$ die Untermannigfaltigkeit M , die Bild der folgenden Abbildung ist:

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{S}^3, \quad f(x, y) := \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos x, \sin x, \cos y, \sin y)$$

- Bestätigen Sie: f ist Immersion und das Bild von M ist ein Torus.
- M hat Schnitt- bzw. Gaußkrümmung $K \equiv 0$ und M ist homogen.
- Finden Sie ein Einheitsnormalenfeld N an M . Geben Sie die Weingartenabbildung S an. Was sind die Hauptkrümmungen λ_1, λ_2 ? Folgern Sie: Die Gauß-Gleichung gilt, M ist minimal, aber nicht isotrop.
- Überlegen Sie, warum $t \mapsto f(t, t)$ und $t \mapsto f(t, -t)$ Asymptotenlinien sind. Folgern Sie daraus, dass M minimal ist, ohne die vorherige Rechnung zu benutzen.
- Zeigen Sie, dass der Clifford-Torus auf zwei verschiedene Weisen durch Großkreise geblättert wird. Zusatz: Folgern Sie, dass es Rotationstori in \mathbb{R}^3 gibt, die durch vier Scharen von Kreisen geblättert werden.
- Eine gute geometrische Beschreibung des Clifford-Torus ist: Dies ist die Menge, die Abstand $\pi/4$ von einem Großkreis hat. Verifizieren Sie diese Beschreibung, und zeigen Sie, dass es sogar zwei derartige Großkreise gibt.

Anmerkung: Die *Lawson-Vermutung* besagt, dass der Clifford-Torus der einzige Torus in \mathbb{S}^3 ist, der minimal und eingebettet ist. Die Vermutung wurde 2012 von Simon Brendle bewiesen.

Mehrere Themen.

Aufgabe 128 – Wiederholung ganze Vorlesung:

Thema kovariante Ableitung und Differentialoperatoren:

- a) Was ist eine kovariante Ableitung? Existiert sie?
- b) Was ist eine Parallelverschiebung? Erklären Sie sie anschaulich an einem Beispiel.
- c) Was ist der Riemannsche Gradient? Riemannsche Divergenz?

Thema Geodätische:

- a) Definition? Äquivalente Charakterisierungen?
- b) Existenz?
- c) Haben sie Ecken?
- d) Wann minimieren Geodätische? Geben Sie hinreichende Bedingungen an.
- e) Wie sehen Geodätische in \mathbb{R}^n , \mathbb{H}^n und \mathbb{S}^n aus?

Thema Krümmung:

- a) Gibt es eine Riemannsche Metrik mit Krümmung $K \geq \varepsilon > 0$ auf \mathbb{R}^2 ?
- b) Wie ist der Krümmungstensor definiert? Wie kann man ihn geometrisch charakterisieren?
- c) Was ist Ricci-Krümmung?
- d) Sie sind in einem Punkt p des Weltraums, den wir als eine 3-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit auffassen. Wie würden Sie die Schnittkrümmung $K_p(\sigma)$ ermitteln? Geben Sie möglichst präzise an, was Sie messen müssen, und welche Rechnung Sie mit den Ergebnissen machen. (Sie können Längen messen und kennen die Bahnen von Lichtstrahlen.)

INDEX

- Ableitung, kovariante, 31, 76
- Abzählbarkeitsaxiom, zweites, 1, 21
- Atlas, 2
- Bahn, 22
- Basisfelder, 36
- Bianchi-Identität, 78, 157
- Bogenlänge, 18
- Bonnet, Pierre Ossian (1819–1892), 98
- Christoffel, Elwin Bruno (1829–1900), 29
- Christoffel-Symbole, 29, 36
- Clifford-Torus, 126, 171
- Derivation, 7, 11
- Diffeomorphismus, 4
- Differential, 9
- differenzierbar, 4
- differenzierbare Struktur, 2
- diskrete Gruppenoperation, 23, 25
- divergente Kurve, 149
- Divergenz, 94, 159
- Dreieck, 116
- Durchmesser, 98
- Einbettung, 10, 73
- Einstein-Mannigfaltigkeit, 96, 158, 159
- Energie, 49
- euklidischer Raum, 16
- Euler-Charakteristik, 71
- Exponentialabbildung, 45, 63
- Exponentialabbildung, Differential, 110
- Fixpunktmenge, 68
- Fläche, 16, 73
- flach, 76
- frei, 22
- Fundamentalform, zweite, 118
- Funktionskeime, 6
- Gauß-Gleichung, 76
- Gauß-Kronecker-Krümmung, 122
- Gaußsche Form (Metrik), 145
- Gauß-Lemma, 54
- Geodätische, 32, 43
- geodätische Krümmung, 43
- Gitter, 24
- Gradient, 90
- Gruppenoperation, 22
- Halbraum-Modell, 64
- Hauptachsentransformation, 47
- Hauptteil, 5, 10
- Hausdorffsch, 1
- Hesse-Form, 95, 158
- Hilbert, David (1862–1943), 61, 64
- homogen, 65, 150, 169
- Hopf, Heinz (1894–1971), 61, 112, 156
- Hopf-Rinow, Satz von, 61, 99
- Horokreis, 146
- Horosphäre, 123, 146
- hyperbolischer Raum, 19, 63, 83
- Hyperboloid-Modell, 64, 120
- Hyperfläche, 122, 170
- Igel, 11
- Immersion, 9
- Index, 15
- Index heben/senken, 41, 90
- Index-Form, 164
- Injektivitätsradius, 143
- Invarianten, 20
- Isometrie, 20, 72, 85, 117
- Isometriegruppe, 20
- isotrop, 65
- Isotropiegruppe, 22
- Jacobi-Gleichung, 103
- Jacobi-Identität, 13, 78
- Jacobifeld, 103
- Karte, 2
- Kartenwechsel, 2
- Killing, Wilhelm (1847–1923), 167
- Killing-Vektorfeld, 167, 168
- Ko-/Kontravarianz, 88, 90
- Kommutator, 13
- konform, 18, 155, 158

- konjugierte Ort, 111
- konjugierter Punkt, 110
- Kontraktion, 87, 91
- Koszul-Formel, 41
- kovariante Ableitung, 41
- Krümmung (Gauß), 74
- Krümmung, konstante, 81
- Krümmung, positive oder negative, 82
- Krümmungsschranke, 99, 100, 116, 161
- Krümmungstensor, 76, 81, 89, 97
- Kürzeste, 53, 61

- Länge, 18
- Laplace-Beltrami-Operator, 94, 158, 159
- Lawson-Vermutung, 172
- Levi-Civita, Tullio (1873–1941), 41
- Levi-Civita-Zusammenhang, 41
- lichtartig, 17
- Lichtkegel, 17
- Lie, Sophus (1842–1899), 7, 11, 13
- Lie-Ableitung, 7, 11
- Lie-Algebra, 14
- Lie-Gruppe, 23
- Lie-Klammer, 13, 34, 39, 76, 118
- Lift, 102
- Linearisierung, 164
- Linienfeld, 22
- Linsenraum, 166
- lokal euklidisch, 2
- lokale Koordinaten, 2
- Lorentz, Hendrik Antoon (1853–1928), 17
- Lorentz-Raum, 64

- Mannigfaltigkeit, 3, 15
- Mannigfaltigkeit konstanter Krümmung, 81
- Mannigfaltigkeit, differenzierbare, 3
- Mannigfaltigkeit, Riemannsche, 15
- Mannigfaltigkeit, semi-Riemannsche, 15
- Mannigfaltigkeit, topologische, 2
- Metrik, 15, 59
- Metrik, Riemannsche, 15, 21
- Metrik, semi-Riemannsche, 15, 89
- minimal, 122
- Minkowski-Raum, 16, 67
- mittlere Krümmung, 122

- multilinear, 86
- musikalischer Isomorphismus, 41, 90
- Myers, 98

- Nabelpunkt, 170
- Nash, John (geb. 1928), 21
- Normalenbündel, 117
- normaler Ball, 56

- Operation einer Gruppe, 22
- Orbifaltigkeit, 23
- Orbit, 22
- orthonormaler Rahmen, 92

- Paraboloid, 99
- parallel, 28, 37, 93
- Parallelenaxiom, 71
- Parallelverschiebung, 28, 86
- Poincaré, Henri (1854–1912), 19, 64
- Poincaré-Modell, 19, 64
- Poincaré-Vermutung, 160
- Pol, 114
- Produktmannigfaltigkeit, 134, 142, 156
- projektive Räume, 3, 83, 98
- pseudohyperbolische Raum, 68
- Pseudosphäre, 67, 152
- Puiseux, Victor Alexandre (1820–1883), 108

- radiale Geodätische, 57
- raumartig, 17
- Raumform, 81, 115
- Relativitätstheorie, 17, 96
- Ricci-Curbastro, Gregorio (1853–1925), 95
- Ricci-Fluss, 159
- Ricci-Gleichungen, 128
- Ricci-Krümmung, 95, 157
- Ricci-Tensor, 95
- Riemann, Georg Friedrich Bernhard (1826–1866), 15, 19
- Riemannschen Fläche, 73
- Rinow, Willi (1907–1979), 61
- Rotationsparaboloid, 100, 150, 156

- Schnittkrümmung, 81
- Schnittort, 146
- Schur, Satz von, 157

- Sechseck, 72
- semi-Riemannscher Zusammenhang, 41
- Sphäre, 3, 82, 98, 120
- Sphärensatz, 160
- Spur, 91
- Standardbasis, 6
- stereographische Projektion, 65
- Strahl, 149
- symmetrische Räume, 168
- Synge-Lemma, 166
-
- Tangentialbündel, 8
- Tangentialraum, 5
- Tangentialvektor, 17
- Teichmüller-Raum, 73
- Tensor, 86
- Tensorfeld, 88
- Tensorprodukt, 87
- theorema egregium, 75
- topologischer Raum, 1, 59
- Toponogov, Satz von, 116
- Torsion, 38
- torsionsfrei, 38
- Torus, 146
- Torus, flacher, 54, 98
- total geodätisch, 68, 120, 123, 167, 171
- transitiv, 22
- Transvektion, 169
-
- Überdeckung, 2, 21
- Überlagerung, 101
- Uniformisierungssätze, 115
- Untermannigfaltigkeit, 10, 117
-
- Variation, 49, 103
- Variation, erste, 50, 52
- Variation, gebrochene, 52
- Variation, zweite, 100
- Vektorbündel, 128
- Vektorfeld, 10, 28
- Vektorfeld längs Kurve, 36
- vertraglich mit der Metrik, 38, 93
- vollständig (metrisch/geodätisch), 60, 63, 99
- Volumen, 18
-
- Weingartenabbildung, 75, 122
- Winkel, 18
-
- zeitartig, 17
- Zerlegung der Eins, 21
- Zusammenhang, 35, 128
- Zusammenhang, Levi-Civita, 41
- Zusammenhang, symmetrischer, 38
- zweite Fundamentalform, 122