중등 **3학년**

2023년 상반기 HME

해법수학 학력평가 정답 및 풀이

정 답

1. 3	**2.** 13	**3.** 4
4. 12	**5.** 2	**6.** 11
7. 7	**8.** 36	**9.** 1
10. 8	**11.** 19	**12.** 5
13. 4	**14.** 2	**15.** 5
16. 499	**17.** 3	**18.** 12
19. 9	**20.** 48	**21.** 64
22. 409	**23.** 248	**24.** 10
25. 47		

1. $\sqrt{3^2}=3$

2. $\overline{BC}=\overline{AD}=8$ cm이므로 $x=8$
$\overline{DC}=\overline{AB}=5$ cm이므로 $y=5$
$\therefore x+y=8+5=13$

3. $(x+2y)^2=x^2+2\times x\times 2y+(2y)^2$
$=x^2+4xy+4y^2$
따라서 □ 안에 알맞은 수는 4이다.

4. 주사위 한 개를 던질 때 나오는 경우의 수는 6가지, 동전 한 개를 던질 때 나오는 경우의 수는 2가지이므로 구하는 경우의 수는
$6\times 2=12$(가지)

5. $\sqrt{2}(\sqrt{2}+\sqrt{5})-\sqrt{10}=2+\sqrt{10}-\sqrt{10}$
$=2$

6. $x^2+ax+10=0$에 $x=-1$을 대입하면
$1-a+10=0$ $\therefore a=11$

7. (i) A 지점에서 P 지점을 거쳐 B 지점까지 가는 경우의 수는
$3\times 2=6$(가지)
(ii) A 지점에서 B 지점까지 바로 가는 경우의 수는 1가지
(i), (ii)에 의해 A 지점에서 B 지점까지 가는 모든 경우의 수는
$6+1=7$(가지)

8. 점 O가 △ABC의 외심이므로
$\overline{BD}=\overline{AD}=6$ cm, $\overline{CE}=\overline{BE}=7$ cm, $\overline{AF}=\overline{CF}=5$ cm
$\therefore$ (△ABC의 둘레의 길이)$=\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}$
$=(6+6)+(7+7)+(5+5)$
$=36$ (cm)

9. $0<a<1$이므로 $a-1<0$
$\therefore \sqrt{(a-1)^2}+\sqrt{a^2}=-(a-1)+a$
$=-a+1+a$
$=1$

10. $3=\sqrt{9}$, $4=\sqrt{16}$이므로 $3<\sqrt{12}<4$
즉 $\sqrt{12}$보다 작은 자연수는 1, 2, 3의 3개이므로 $a=3$
$5=\sqrt{25}$, $6=\sqrt{36}$이므로 $5<\sqrt{35}<6$
즉 $\sqrt{35}$보다 작은 자연수는 1, 2, 3, 4, 5의 5개이므로 $b=5$
$\therefore a+b=3+5=8$

11. $\overline{EF}=\overline{HG}=\frac{1}{2}\overline{AC}$, $\overline{EH}=\overline{FG}=\frac{1}{2}\overline{BD}$이므로
(□EFGH의 둘레의 길이)$=\overline{EF}+\overline{FG}+\overline{GH}+\overline{HE}$
$=\frac{1}{2}\overline{AC}+\frac{1}{2}\overline{BD}+\frac{1}{2}\overline{AC}+\frac{1}{2}\overline{BD}$
$=\overline{AC}+\overline{BD}$
$=8+11=19$ (cm)

12. $\dfrac{x^2-xy-6y^2}{x-3y}=\dfrac{(x+2y)(x-3y)}{x-3y}$
$=x+2y$
$=2\sqrt{2}+1+2(2-\sqrt{2})$
$=2\sqrt{2}+1+4-2\sqrt{2}$
$=5$

13. $6=2\times 3$이므로 $\sqrt{6x}$가 자연수가 되려면 $x=2\times 3\times(\text{자연수})^2$의 꼴이어야 한다.
따라서 $\sqrt{6x}$가 자연수가 되도록 하는 100 이하의 자연수 x는
$2\times 3(=6)$, $2\times 3\times 2^2(=24)$, $2\times 3\times 3^2(=54)$, $2\times 3\times 4^2(=96)$의 4개이다.

14. $40x-5x^2=60$에서 $5x^2-40x+60=0$
$x^2-8x+12=0$, $(x-2)(x-6)=0$
$\therefore x=2$ 또는 $x=6$
따라서 이 물체가 처음으로 높이 60 m인 지점을 지나는 것은 물체를 쏘아 올린 지 2초 후이다.

15. (i) $1<\sqrt{3}<2$이므로 $-1<-2+\sqrt{3}<0$, $0<-1+\sqrt{3}<1$
$-2<-\sqrt{3}<-1$이므로 $0<2-\sqrt{3}<1$
$1<\sqrt{2}<2$이므로 $-1<-2+\sqrt{2}<0$
(ii) $(-2+\sqrt{3})-(-2+\sqrt{2})=-2+\sqrt{3}+2-\sqrt{2}$
$=\sqrt{3}-\sqrt{2}>0$
$\therefore -2+\sqrt{3}>-2+\sqrt{2}$
(iii) $(-1+\sqrt{3})-(2-\sqrt{3})=-1+\sqrt{3}-2+\sqrt{3}$
$=-3+2\sqrt{3}$
$=-\sqrt{9}+\sqrt{12}>0$
$\therefore -1+\sqrt{3}>2-\sqrt{3}$
(i)~(iii)에 의해 주어진 수를 작은 수부터 크기순으로 나열하면
$-2+\sqrt{2}$, $-2+\sqrt{3}$, 0, $2-\sqrt{3}$, $-1+\sqrt{3}$이다.
즉 가장 작은 수는 $-2+\sqrt{2}$, 가장 큰 수는 $-1+\sqrt{3}$이므로 두 수를 더하면
$(-2+\sqrt{2})+(-1+\sqrt{3})=\sqrt{2}+\sqrt{3}-3$
따라서 $a=1$, $b=1$, $c=-3$이므로
$a+b-c=1+1-(-3)=5$

16. $\dfrac{2^2-1}{2^2}\times\dfrac{3^2-1}{3^2}\times\dfrac{4^2-1}{4^2}\times\cdots\times\dfrac{999^2-1}{999^2}$

$=\dfrac{(2-1)(2+1)}{2^2}\times\dfrac{(3-1)(3+1)}{3^2}\times\dfrac{(4-1)(4+1)}{4^2}\times\cdots\times\dfrac{(999-1)(999+1)}{999^2}$

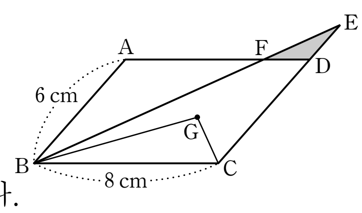
$=\dfrac{1\times3}{2^2}\times\dfrac{2\times4}{3^2}\times\dfrac{3\times5}{4^2}\times\cdots\times\dfrac{998\times1000}{999^2}$

$=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1000}{999}=\dfrac{500}{999}$

따라서 $p=999$, $q=500$이므로

$p-q=999-500=499$

17. 오른쪽 그림에서



$\angle ABE=\angle EBC$이고

$\angle BEC=\angle ABE$(엇각)이므로

$\angle EBC=\angle BEC$

즉 $\triangle BCE$는 이등변삼각형이다.

$\therefore\ \overline{CE}=\overline{BC}=8\text{ cm}$

$\triangle EFD$와 $\triangle EBC$에서

$\angle E$는 공통, $\angle EFD=\angle EBC$(동위각)이므로

$\triangle EFD\backsim\triangle EBC$(AA 닮음)

이때 $\overline{ED}=\overline{EC}-\overline{DC}=8-6=2\ (\text{cm})$이므로

$\triangle EFD$와 $\triangle EBC$의 닮음비는

$\overline{ED}:\overline{EC}=2:8=1:4$

따라서 $\triangle EFD$와 $\triangle EBC$의 넓이의 비는

$1^2:4^2=1:16$

한편, 점 G는 $\triangle BCE$의 무게중심이고 $\triangle GBC$의 넓이가 8 cm^2이므로

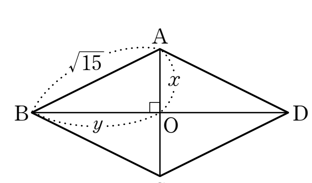
$\triangle EBC=3\triangle GBC=3\times8=24\ (\text{cm}^2)$

즉 $\triangle EFD:24=1:16$이므로

$16\triangle EFD=24\qquad\therefore\ \triangle EFD=\dfrac{24}{16}=\dfrac{3}{2}\ (\text{cm}^2)$

즉 $S=\dfrac{3}{2}$이므로 $2S=2\times\dfrac{3}{2}=3$

18. 오른쪽 그림과 같이 한 변의 길이가 $\sqrt{15}$인 마름모 ABCD의 두 대각선의 교점을 O, $\overline{AO}=x$, $\overline{BO}=y$라고 하자.



$\triangle ABO$는 직각삼각형이므로 피타고라스 정리에 의해

$x^2+y^2=15$

또 마름모의 두 대각선의 길이의 합이 $6\sqrt{3}$이므로

$2x+2y=6\sqrt{3}$에서 $x+y=3\sqrt{3}$

이때 $(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$이므로

$(3\sqrt{3})^2=15+2xy$, $27=15+2xy$

$2xy=12\qquad\therefore\ xy=6$

$\therefore$ (마름모 ABCD의 넓이)$=\dfrac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{BD}$

$=\dfrac{1}{2}\times2x\times2y$

$=2xy$

$=2\times6=12$

19. $\dfrac{1}{2+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+\dfrac{1}{4\sqrt{3}+3\sqrt{4}}+\cdots+\dfrac{1}{100\sqrt{99}+99\sqrt{100}}$

$=\dfrac{2-\sqrt{2}}{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}+\dfrac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})}+\dfrac{4\sqrt{3}-3\sqrt{4}}{(4\sqrt{3}+3\sqrt{4})(4\sqrt{3}-3\sqrt{4})}+\cdots+\dfrac{100\sqrt{99}-99\sqrt{100}}{(100\sqrt{99}+99\sqrt{100})(100\sqrt{99}-99\sqrt{100})}$

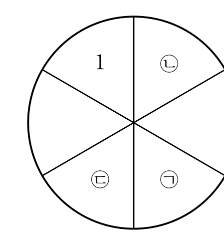
$=\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}+\dfrac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{6}+\dfrac{4\sqrt{3}-3\sqrt{4}}{12}+\cdots+\dfrac{100\sqrt{99}-99\sqrt{100}}{9900}$

$=\left(1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)+\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}-\dfrac{\sqrt{4}}{4}\right)+\cdots+\left(\dfrac{\sqrt{99}}{99}-\dfrac{\sqrt{100}}{100}\right)$

$=1-\dfrac{10}{100}=\dfrac{90}{100}=\dfrac{9}{10}$

즉 $A=\dfrac{9}{10}$이므로 $10A=10\times\dfrac{9}{10}=9$

20. 중심각을 서로 맞꼭지각으로 하는 두 부채꼴에 적힌 두 수의 합이 홀수가 되려면 두 수는 각각 홀수, 짝수이어야 한다.



(ⅰ) 오른쪽 그림에서 ㉠에 적을 수 있는 수는 2, 4, 6 중 하나이므로 그 경우의 수는 3가지이다.

(ⅱ) 오른쪽 그림에서 ㉡에 적을 수 있는 수는 (ⅰ)에서 적지 않은 나머지 4개의 수 중 하나이므로 그 경우의 수는 4가지이다.

(ⅲ) 위의 그림에서 ㉢에 적을 수 있는 수는 ㉡에 적힌 수가 홀수이면 남은 짝수 2개 중 하나, ㉡에 적힌 수가 짝수이면 남은 홀수 2개 중 하나이므로 그 경우의 수는 2가지이다.

(ⅳ) 나머지 2개의 수를 남아 있는 부채꼴에 각각 적는 경우의 수는 2가지이다.

(ⅰ)~(ⅳ)에 의해 구하는 경우의 수는

$3\times4\times2\times2=48$(가지)

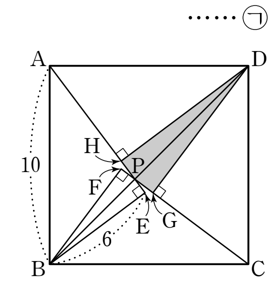
21. 직각삼각형 ABE에서 $\overline{AE}=\sqrt{10^2-6^2}=8$

$\triangle ABE\equiv\triangle CBF$이므로

$\angle ABF=90^\circ-\angle CBF$

$=90^\circ-\angle ABE=\angle CBE\qquad\cdots\cdots㉠$

오른쪽 그림과 같이 $\overline{BP}$, $\overline{PD}$를 그으면



$\triangle BPF$와 $\triangle BPE$에서

$\angle BFP=\angle BEP=90^\circ$, $\overline{BP}$는 공통,

$\overline{BF}=\overline{BE}$이므로

$\triangle BPF\equiv\triangle BPE$(RHS 합동)

$\therefore\ \angle PBF=\angle PBE\qquad\cdots\cdots㉡$

㉠, ㉡에 의해 $\angle ABP=\angle CBP$이므로 점 P는 대각선 BD 위에 있다.

$\overline{HP}=x$로 놓으면 $\overline{AH}=\overline{BE}=6$이므로

$\overline{PE}=\overline{AE}-\overline{AH}-\overline{HP}=8-6-x=2-x$

한편, $\triangle BEP$와 $\triangle DHP$에서

$\angle BPE=\angle DPH$(맞꼭지각), $\angle BEP=\angle DHP=90^\circ$이므로

$\triangle BEP\backsim\triangle DHP$(AA 닮음)

즉 $\overline{BE}:\overline{DH}=\overline{EP}:\overline{HP}$에서 $6:8=(2-x):x$

$8(2-x)=6x$, $16-8x=6x$

$14x=16\qquad\therefore\ x=\dfrac{16}{14}=\dfrac{8}{7}$

$\triangle DHP$와 $\triangle DGP$에서

$\angle DHP=\angle DGP=90^\circ$, $\overline{DP}$는 공통, $\overline{DH}=\overline{DG}$이므로

$\triangle DHP\equiv\triangle DGP$(RHS 합동)

$\therefore$ (□DHPG의 넓이)$=2\triangle DHP$

$=2\times\dfrac{1}{2}\times\overline{DH}\times\overline{HP}$

$=2\times\dfrac{1}{2}\times8\times\dfrac{8}{7}$

$=\dfrac{64}{7}$

즉 $S=\dfrac{64}{7}$이므로 $7S=7\times\dfrac{64}{7}=64$

22. $20^2=400$, $21^2=441$이므로 주어진 수의 각 항의 범위는 다음과 같다.

$20<\sqrt{20^2+k}<21$ (단, $k=1, 3, 5, \cdots, 39$)

따라서 $k=1, 3, 5, \cdots, 39$에 대하여 $\sqrt{20^2+k}$의 정수 부분은 20이므로 $\sqrt{20^2+k}$의 소수 부분은 $\sqrt{20^2+k}-20$이다.

이제 주어진 수의 각 항의 소수 부분의 합을 구해 보자.

$\sqrt{20^2+k}-20=\dfrac{k}{\sqrt{20^2+k}+20}$이고 $40<\sqrt{20^2+k}+20<41$이므로

$$\frac{k}{41}<\frac{k}{\sqrt{20^2+k}+20}<\frac{k}{40} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

㉠에 $k=1, 3, 5, \cdots, 39$를 각각 대입하여 변끼리 더하고

$$\frac{1}{\sqrt{20^2+1}+20}+\frac{3}{\sqrt{20^2+3}+20}+\frac{5}{\sqrt{20^2+5}+20}+\cdots+\frac{39}{\sqrt{20^2+39}+20}=A$$로 놓으면

$$\frac{1+3+5+\cdots+39}{41}<A<\frac{1+3+5+\cdots+39}{40}$$

$$\frac{400}{41}<A<\frac{400}{40} \qquad \therefore\ 9.75\cdots<A<10$$

이때

$$\sqrt{400+1}+\sqrt{400+3}+\sqrt{400+5}+\cdots+\sqrt{400+39}$$

$$=\left(20+\frac{1}{\sqrt{20^2+1}+20}\right)+\left(20+\frac{3}{\sqrt{20^2+3}+20}\right)+\left(20+\frac{5}{\sqrt{20^2+5}+20}\right)+\cdots+\left(20+\frac{39}{\sqrt{20^2+39}+20}\right)$$

$=20\times20+A=400+A$

이므로

$400+9.75\cdots<400+A<400+10$

$\therefore\ 409.75\cdots<400+A<410$

따라서 주어진 수를 넘지 않는 가장 큰 정수는 409이다.

23. 피타고라스 정리에 의해

$(30a+40b)^2+(40a+30b)^2=(50a+bc)^2$

위 식의 좌변과 우변을 각각 전개하여 간단히 하면

$2500a^2+4800ab+2500b^2=2500a^2+100abc+b^2c^2$

$4800ab+2500b^2=100abc+b^2c^2$

b가 자연수이므로 양변을 b로 나누면

$4800a+2500b=100ac+bc^2$

$2500b-bc^2=100ac-4800a$

$b(50-c)(50+c)=100a(c-48)$ $\cdots\cdots$ ㉠

a, b, c가 자연수이므로 ㉠에서 $b(50+c)>0$, $100a>0$이다.

즉 $50-c$와 $c-48$의 부호가 같아야 하므로 $c=49$이다.

$c=49$를 ㉠에 대입하면 $99b=100a$이고 99와 100은 서로소이므로 자연수 k에 대하여 $a=99k$, $b=100k$이다.

즉 $a+b+c=99k+100k+49=199k+49$이므로

$k=1$일 때 $a+b+c$가 최솟값을 갖는다.

따라서 구하는 최솟값은

$199\times1+49=248$

24. 두 자리 대칭수를 aa, 세 자리 대칭수를 aba, 네 자리 대칭수를 $abba$라고 하자. (단, a는 한 자리 자연수이고 b는 0 이상 9 이하의 정수)

두 자리 대칭수 aa는 11, 22, 33, $\cdots$, 99의 9개이다.

세 자리 대칭수 aba는 두 자리의 대칭수 11, 22, 33, $\cdots$, 99의 각각에 대하여 $b=0, 1, 2, \cdots, 9$가 들어간 모양이므로

$9\times10=90$(개)이다.

네 자리 대칭수 $abba$도 세 자리 대칭수 aba와 마찬가지로 90개이다.

즉 11 이상 9999 이하의 대칭수가 한 개씩 적혀 있는 카드의 총 개수는 $9+90+90=189$(개)이다.

한편, 카드에 적힌 수가 9의 배수이려면 대칭수의 각 자리의 숫자의 합이 9의 배수이어야 한다.

(ⅰ) 두 자리 대칭수 aa가 9의 배수이려면

$a+a=2a=9k$를 만족하는 자연수 k가 존재해야 한다.

① $k=1$일 때, $2a=9$를 만족하는 a의 값은 없다.

② $k=2$일 때, $2a=18$이므로 $a=9$

③ $k\geq3$일 때, $2a=9k$를 만족하는 a의 값은 없다.

즉 두 자리 대칭수 중 9의 배수는 99의 1개뿐이다.

(ⅱ) 세 자리 대칭수 aba가 9의 배수이려면

$a+b+a=2a+b=9k$를 만족하는 자연수 k가 존재해야 한다.

① $k=1$일 때, $2a+b=9$를 만족하는 두 수 a, b를 순서쌍 (a, b)로 나타내면 $(1, 7)$, $(2, 5)$, $(3, 3)$, $(4, 1)$의 4개이다.

② $k=2$일 때, $2a+b=18$을 만족하는 두 수 a, b를 순서쌍 (a, b)로 나타내면 $(5, 8)$, $(6, 6)$, $(7, 4)$, $(8, 2)$, $(9, 0)$의 5개이다.

③ $k=3$일 때, $2a+b=27$을 만족하는 두 수 a, b를 순서쌍 (a, b)로 나타내면 $(9, 9)$의 1개이다.

④ $k\geq4$일 때, $2a+b=9k$를 만족하는 두 수 a, b는 없다.

즉 세 자리 대칭수 중 9의 배수는 $4+5+1=10$(개)이다.

(ⅲ) 네 자리 대칭수 $abba$가 9의 배수이려면

$a+b+b+a=2a+2b=2(a+b)=9k$를 만족하는 자연수 k가 존재해야 한다.

① $k=1$일 때, $2(a+b)=9$를 만족하는 두 수 a, b는 없다.

② $k=2$일 때, $2(a+b)=18$, 즉 $a+b=9$를 만족하는 두 수 a, b를 순서쌍 (a, b)로 나타내면 $(1, 8)$, $(2, 7)$, $(3, 6)$, $(4, 5)$, $(5, 4)$, $(6, 3)$, $(7, 2)$, $(8, 1)$, $(9, 0)$의 9개이다.

③ $k=3$일 때, $2(a+b)=27$을 만족하는 두 수 a, b는 없다.

④ $k=4$일 때, $2(a+b)=36$, 즉 $a+b=18$을 만족하는 두 수 a, b를 순서쌍 (a, b)로 나타내면 $(9, 9)$의 1개이다.

⑤ $k\geq5$일 때, $2(a+b)=9k$를 만족하는 두 수 a, b는 없다.

즉 네 자리 대칭수 중 9의 배수는 $9+1=10$(개)이다.

(ⅰ)~(ⅲ)에 의해 11 이상 9999 이하의 대칭수 중에서 9의 배수의 개수는

$1+10+10=21$(개)

따라서 구하는 확률은 $\dfrac{21}{189}=\dfrac{1}{9}$이므로 $p=9$, $q=1$

$\therefore\ p+q=9+1=10$

25. $a+b\neq1$, $a^2-ab+b^2\neq1$이므로 $1\leq k<n$인 자연수 k에 대하여 $a+b=p^k$, $a^2-ab+b^2=p^{n-k}$이라고 놓을 수 있다.

$b=p^k-a$를 $a^2-ab+b^2=p^{n-k}$에 대입하여 정리하면

$3a^2-3p^ka+p^{2k}-p^{n-k}=0$

$$\therefore\ a=\frac{3p^k\pm\sqrt{3p^{n-k}(4-p^{3k-n})}}{6} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

이때 $p^{n-k}=(a+b)^2-3ab<(a+b)^2=p^{2k}$이므로

$n-k<2k \qquad \therefore\ 3k-n>0$

또 $4-p^{3k-n}\geq0$이어야 하므로 $p^{3k-n}\leq4$

$p=2$일 때, $3k-n=1$ 또는 $3k-n=2$

$p=3$일 때, $3k-n=1$

$p\geq5$일 때, $p^{3k-n}\leq4$를 만족하는 $3k-n$의 값은 없다.

(ⅰ) $p=2$, $3k-n=1$인 경우

$n=3k-1$이므로 ㉠에 $p=2$, $n=3k-1$을 대입하면

$$a=\frac{3\times2^k\pm\sqrt{3\times2^{2k-1}\times(4-2)}}{6}=\frac{3\times2^k\pm\sqrt{3\times2^{2k}}}{6}$$

그런데 3×2^{2k}은 $(\text{자연수})^2$의 꼴이 아니므로 자연수 a의 값은 없다.

(ii) $p=2$, $3k-n=2$인 경우

$n=3k-2$이므로 ㉠에 $p=2$, $n=3k-2$를 대입하면

$a=\dfrac{3\times2^k\pm\sqrt{3\times2^{2k-2}\times(4-2^2)}}{6}=2^{k-1}$

$b=2^k-a=2^k-2^{k-1}=2^{k-1}$

(iii) $p=3$, $3k-n=1$인 경우

$n=3k-1$이므로 ㉠에 $p=3$, $n=3k-1$을 대입하면

$a=\dfrac{3\times3^k\pm\sqrt{3\times3^{2k-1}\times(4-3)}}{6}=\dfrac{3^{k+1}\pm3^k}{6}$

즉 $a=2\times3^{k-1}$ 또는 $a=3^{k-1}$

$b=3^k-a$이므로

$a=2\times3^{k-1}$일 때, $b=3^{k-1}$

$a=3^{k-1}$일 때, $b=2\times3^{k-1}$

(i)~(iii)에서 순서쌍 (a, b, p, n)을 구하면

$k=1$일 때, $(1, 1, 2, 1)$, $(2, 1, 3, 2)$, $(1, 2, 3, 2)$

$k=2$일 때, $(2, 2, 2, 4)$, $(6, 3, 3, 5)$, $(3, 6, 3, 5)$

$k=3$일 때, $(4, 4, 2, 7)$, $(18, 9, 3, 8)$, $(9, 18, 3, 8)$

$k=4$일 때, $(8, 8, 2, 10)$, $(54, 27, 3, 11)$, $(27, 54, 3, 11)$

$k=5$일 때, $(16, 16, 2, 13)$, $(162, 81, 3, 14)$, $(81, 162, 3, 14)$

$k=6$일 때, $(32, 32, 2, 16)$, $(486, 243, 3, 17)$, $(243, 486, 3, 17)$

⋮

이때 a, b는 두 자리 자연수이므로 $a+b+p+n$의 최솟값은

$16+16+2+13=47$