중등 **2학년**

2023년 상반기 HME

해법수학 학력평가 정답 및 풀이

정 답

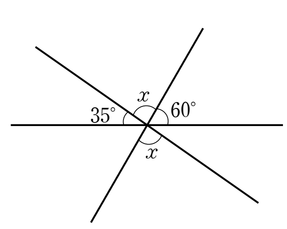
1. 8	**2.** 6	**3.** 10
4. 85	**5.** 8	**6.** 3
7. 11	**8.** 62	**9.** 10
10. 30	**11.** 51	**12.** 4
13. 47	**14.** 13	**15.** 54
16. 27	**17.** 35	**18.** 30
19. 20	**20.** 6	**21.** 10
22. 12	**23.** 44	**24.** 944
25. 7		

1. $x^2\times x^6=x^{2+6}=x^8$이므로 □ 안에 알맞은 수는 8이다.

2. $\triangle\mathrm{ABC}\equiv\triangle\mathrm{DEF}$이므로 $\overline{\mathrm{DE}}$의 대응변은 $\overline{\mathrm{AB}}$이다.
$\therefore x=6$

3. 도수가 가장 큰 계급은 70점 이상 80점 미만이고 이 계급의 도수는 10명이다.

4. 오른쪽 그림에서 맞꼭지각의 크기는 서로 같고 평각의 크기는 180°이므로



$35^\circ+\angle x+60^\circ=180^\circ$
$\angle x+95^\circ=180^\circ$
$\therefore\ \angle x=85^\circ$

5. $(2x^2-7x+6)+(4x^2+10x-7)=6x^2+3x-1$
따라서 $a=6$, $b=3$, $c=-1$이므로
$a+b+c=6+3+(-1)=8$

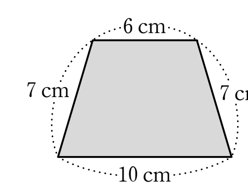
6. $5x+1>3(2x-1)$에서
$5x+1>6x-3$
$-x>-4$
$\therefore x<4$
따라서 주어진 부등식을 만족하는 자연수 x는 1, 2, 3의 3개이다.

7. $3.\dot{6}$을 분수로 나타내면
$3.\dot{6}=\frac{36-3}{9}=\frac{33}{9}=\frac{11}{3}$
$\therefore x=11$

8. $\left(\frac{4x^a}{y^2}\right)^3=\frac{4^3(x^a)^3}{(y^2)^3}=\frac{64x^{3a}}{y^6}=\frac{bx^{12}}{y^c}$이므로
$3a=12$에서 $a=4$
$b=64$
$c=6$
$\therefore\ a+b-c=4+64-6=62$

9. $\frac{4}{9}=0.\dot{4}$이므로 순환마디는 4이고
$\frac{7}{6}=1.1\dot{6}$이므로 순환마디는 6이다.
따라서 $a=4$, $b=6$이므로
$a+b=4+6=10$

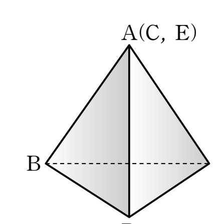
10. 주어진 원뿔대를 회전축을 포함하는 평면으로 잘랐을 때 생기는 단면은 오른쪽 그림과 같다.



따라서 구하는 단면의 둘레의 길이는
$6+7+10+7=30$ (cm)

11. $\frac{6}{125}=\frac{6}{5^3}=\frac{6\times2^3}{5^3\times2^3}=\frac{48}{10^3}=\frac{480}{10^4}=\frac{4800}{10^5}=\cdots$
따라서 $a=48$, $n=3$일 때 $a+n$이 최솟값을 가지므로 구하는 최솟값은
$a+n=48+3=51$

12. 주어진 전개도를 접어서 삼각뿔을 만들면 오른쪽 그림과 같다.



$\overline{\mathrm{AB}}$와 꼬인 위치에 있는 모서리는 $\overline{\mathrm{DF}}$이므로
$a=1$
$\overline{\mathrm{AB}}$와 한 점에서 만나는 모서리는
$\overline{\mathrm{CD}}(=\overline{\mathrm{DE}})$, $\overline{\mathrm{AF}}(=\overline{\mathrm{EF}})$, $\overline{\mathrm{BD}}$, $\overline{\mathrm{BF}}$이므로
$b=4$
$\therefore\ ab=1\times4=4$

13. $(8xy^2-12x^2y)\div4xy-(2xy-6y^2)\div\frac{y}{3}$
$=(8xy^2-12x^2y)\times\frac{1}{4xy}-(2xy-6y^2)\times\frac{3}{y}$
$=2y-3x-(6x-18y)$
$=2y-3x-6x+18y$
$=-9x+20y$
$-9x+20y$에 $x=-3$, $y=1$을 대입하면
$-9x+20y=-9\times(-3)+20\times1$
$=27+20=47$

14. 종이가 1장일 때 직사각형의 가로의 길이는 9 cm
종이를 2장 붙였을 때 직사각형의 가로의 길이는
$9+(9-2)=16$ (cm)
종이를 3장 붙였을 때 직사각형의 가로의 길이는
$9+(9-2)\times2=23$ (cm)
⋮
즉 종이를 x장 붙였을 때 직사각형의 가로의 길이는
$9+(9-2)\times(x-1)=9+7x-7=7x+2$ (cm)
이므로

$7x+2\geq 90$, $7x\geq 88$

$\therefore\ x\geq\dfrac{88}{7}=12.5714\cdots$

따라서 종이를 최소 13장 붙여야 한다.

15. 세로축 한 눈금의 도수를 x명이라고 하면

$4x+5x+7x+3x+x=120$

$20x=120$

$\therefore\ x=6$

따라서 세로축 한 눈금의 도수는 6명이므로 일주일 동안의 독서실 이용 시간이 6시간 미만인 학생 수는

$4\times 6+5\times 6=54$(명)

16. $\triangle$BCG와 $\triangle$DCE에서

$\overline{BC}=\overline{DC}$, $\overline{GC}=\overline{EC}$, $\angle GCB=90^\circ-\angle GCF=\angle ECD$이므로

$\triangle BCG\equiv\triangle DCE$(SAS 합동)

따라서 $\triangle$BCG와 $\triangle$DCE의 넓이는 같다.

이때

$\triangle GCF=\dfrac{1}{2}\times$(사각형 GCEF의 넓이)

$\quad=\dfrac{1}{2}\times 36=18$

이므로

$\triangle$BCG

$=$(사각형 ABCD의 넓이)$-$(오각형 ABGFD의 넓이)$-\triangle$GCF

$=450-387-18$

$=45$

$\therefore\ \triangle DFE=\triangle DCE-\triangle FCE$

$\quad=\triangle BCG-\dfrac{1}{2}\times$(사각형 GCEF의 넓이)

$\quad=45-\dfrac{1}{2}\times 36=27$

17. $\dfrac{17}{14}=1.2\dot{1}4285\dot{7}$이고 순환마디는 142857이다.

$200=1+6\times 33+1$이므로 소수점 아래 200번째 자리의 숫자는 순환마디의 첫 번째 숫자인 1과 같다.

$\therefore\ a=1$

순환마디에는 숫자 2가 1개 있고 소수점 아래 200번째 자리의 숫자까지 순환마디는 33번 반복된다. 한편 소수점 아래 첫 번째 자리의 숫자가 2이므로 소수점 아래 200번째 자리까지 나오는 2의 개수는 $33+1=34$ $\quad\therefore\ b=34$

$\therefore\ a+b=1+34=35$

18. $2^x\times 3^2\times 5^5=2^{x-5}\times 3^2\times(2^5\times 5^5)=2^{x-5}\times 3^2\times 10^5$이므로

$2^x\times 3^2\times 5^5$이 8자리 자연수가 되려면 $2^{x-5}\times 3^2$이 3자리 자연수이어야 한다.

(i) $x=8$일 때, $2^{8-5}\times 3^2=2^3\times 3^2=8\times 9=72$

(ii) $x=9$일 때, $2^{9-5}\times 3^2=2^4\times 3^2=16\times 9=144$

(iii) $x=10$일 때, $2^{10-5}\times 3^2=2^5\times 3^2=32\times 9=288$

(iv) $x=11$일 때, $2^{11-5}\times 3^2=2^6\times 3^2=64\times 9=576$

(v) $x=12$일 때, $2^{12-5}\times 3^2=2^7\times 3^2=128\times 9=1152$

(i)~(v)에 의하여 구하는 자연수 x의 값은 9, 10, 11이고 그 합은

$9+10+11=30$

19. 봉사 활동 시간이 4시간 미만인 학생 수는 $5+11=16$(명)이고, 이 학생 수가 전체의 50 %이므로

(전체 학생 수)$=\dfrac{16}{0.5}=32$(명)

봉사 활동 시간이 4시간 이상인 학생 수는

$32-16=16$(명)

봉사 활동 시간이 많은 쪽에서 10번째인 학생이 4시간 이상 6시간 미만인 계급에 속하고 봉사 활동 시간이 8시간 이상 10시간 미만인 학생 수는 3명이므로 봉사 활동 시간이 6시간 이상 8시간 미만인 학생 수는 0명, 1명, 2명, 3명, 4명, 5명, 6명이 될 수 있다.

(i) 봉사 활동 시간이 6시간 이상 8시간 미만인 계급의 도수가 0명인 경우 4시간 이상 6시간 미만인 계급의 도수는

$16-(0+3)=13$(명)

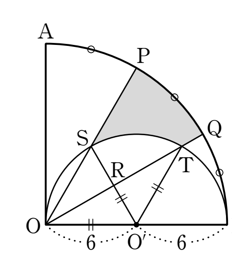
(ii) 봉사 활동 시간이 6시간 이상 8시간 미만인 계급의 도수가 6명인 경우 4시간 이상 6시간 미만인 계급의 도수는

$16-(6+3)=7$(명)

따라서 4시간 이상 6시간 미만인 계급의 도수는 (i)에서 최댓값을 갖고 (ii)에서 최솟값을 가지므로 구하는 최댓값과 최솟값의 합은

$13+7=20$(명)

20. 오른쪽 그림과 같이 $\overline{SO'}$, $\overline{TO'}$을 긋고, $\overline{SO'}$과 $\overline{OQ}$의 교점을 R라고 하자.



$\widehat{AP}=\widehat{PQ}=\widehat{QB}$이므로

$\angle AOP=\angle POQ=\angle QOB$

$\quad=\dfrac{1}{3}\times 90^\circ=30^\circ$

$\triangle SOO'$에서 $\overline{OO'}=\overline{SO'}=6$,

$\angle SOO'=60^\circ$이므로

$\triangle SOO'$은 정삼각형이고 $\overline{SO}=6$

$\triangle O'OT$는 $\overline{O'O}=\overline{O'T}$인 이등변삼각형이므로

$\angle O'TO=\angle O'OT=30^\circ$

$\triangle O'OT$에서 $\angle TO'B=30^\circ+30^\circ=60^\circ$이므로

$\angle SO'T=180^\circ-(60^\circ+60^\circ)=60^\circ$

$\triangle$SOR와 $\triangle$O′TR에서

$\overline{OS}=\overline{TO'}$, $\angle RSO=\angle RO'T$, $\angle SOR=\angle O'TR$이므로

$\triangle SOR\equiv\triangle O'TR$(ASA 합동)

따라서 $\triangle$SOR와 $\triangle$O′TR의 넓이는 같으므로 어두운 부분의 넓이는 부채꼴 POQ의 넓이에서 부채꼴 SO′T의 넓이를 뺀 것과 같다.

$\therefore$ (어두운 부분의 넓이)$=\pi\times 12^2\times\dfrac{30}{360}-\pi\times 6^2\times\dfrac{60}{360}$

$\quad=12\pi-6\pi=6\pi$

즉 $a=6$

21. $0.b\dot{b}\dot{a}=\dfrac{b}{10}+\dfrac{b}{10^2}+\dfrac{a}{10^3}+\dfrac{b}{10^4}+\dfrac{a}{10^5}+\cdots$

이때 $x_1=b$, $x_{2k}=b$, $x_{2k+1}=a$ (k는 자연수)이므로

$x_1^2-x_2^2+x_3^2-x_4^2+x_5^2-x_6^2+\cdots+x_{169}^2-x_{170}^2=3360$에서

$(b^2-b^2)+(a^2-b^2)+(a^2-b^2)+\cdots+(a^2-b^2)=3360$

$0+(a^2-b^2)\times\dfrac{1}{2}\times(170-2)=3360$

$(a^2-b^2)\times 84=3360$

$\therefore\ a^2-b^2=40$

$b^2=a^2-40$이고 a, b는 한 자리 자연수이므로

$a=7$ 또는 $a=8$ 또는 $a=9$

(i) $a=7$일 때, $b^2=7^2-40=9$

$\quad\therefore\ b=3$

(ii) $a=8$일 때, $b^2=8^2-40=24$

그런데 $b^2=24$를 만족하는 한 자리 자연수 b는 없다.

(iii) $a=9$일 때, $b^2=9^2-40=41$

그런데 $b^2=41$을 만족하는 한 자리 자연수 b는 없다.

(i)~(iii)에 의하여 $a=7$, $b=3$이므로

$a+b=7+3=10$

22. 4, $4^2=16$, $4^3=64$, $4^4=256$, $4^5=1024$, $\cdots$이므로 4의 거듭제곱의 일의 자리의 숫자는 4, 6의 순서로 반복됨을 알 수 있다.

한편 4, 4^2, 4^3, 4^4, 4^5, $\cdots$을 5로 나누었을 때의 나머지는 4, 1의 순서로 반복됨을 알 수 있으므로 4^{2020}을 5로 나누었을 때의 나머지는 1이다.

$4^{2020}=5n+1$ (n은 자연수)이라고 하면

$$\begin{aligned}4^{2023}&=4^3\times 4^{2020}\\&=64\times(5n+1)\\&=64\times 5n+64\end{aligned}$$

이때 $\dfrac{4^{2023}}{5}=\dfrac{64\times 5n+64}{5}=64n+12+\dfrac{4}{5}$이므로

$\dfrac{4^{2023}}{5}$의 정수 부분은 $64n+12$이다.

따라서 $\dfrac{4^{2023}}{5}$의 정수 부분을 64로 나누었을 때의 나머지는 12이다.

23. $\dfrac{a}{2^3\times 3\times 5\times 7\times b}$가 유한소수가 되려면 기약분수로 나타낼 때, 분모의 소인수가 2 또는 5뿐이어야 한다.

따라서 a는 3×7, 즉 21의 배수이고 두 자리 자연수이므로 a의 값은 21, 42, 63, 84이다.

(i) $a=21$일 때, $\dfrac{1}{2^3\times 5\times b}$이므로 b의 값은 2×5, $2^2\times 5$, $2^3\times 5$, $2^4\times 5$, 2^4, 2^5, 2^6, 5^2, 2×5^2이므로 순서쌍 (a, b)는 $(21, 10)$, $(21, 20)$, $(21, 40)$, $(21, 80)$, $(21, 16)$, $(21, 32)$, $(21, 64)$, $(21, 25)$, $(21, 50)$의 9개이다.

(ii) $a=42$일 때, $\dfrac{1}{2^2\times 5\times b}$이므로 b의 값은 2×5, $2^2\times 5$, $2^3\times 5$, $2^4\times 5$, 2^4, 2^5, 2^6, 5^2, 2×5^2이므로 순서쌍 (a, b)는 $(42, 10)$, $(42, 20)$, $(42, 40)$, $(42, 80)$, $(42, 16)$, $(42, 32)$, $(42, 64)$, $(42, 25)$, $(42, 50)$의 9개이다.

(iii) $a=63$일 때, $\dfrac{3}{2^3\times 5\times b}$이므로 b의 값은 2×5, $2^2\times 5$, $2^3\times 5$, $2^4\times 5$, 2^4, 2^5, 2^6, 5^2, 2×5^2, 3×5, $2\times 3\times 5$, $2^2\times 3\times 5$, $2^2\times 3$, $2^3\times 3$, $2^4\times 3$, $2^5\times 3$, 3×5^2이므로 순서쌍 (a, b)는 $(63, 10)$, $(63, 20)$, $(63, 40)$, $(63, 80)$, $(63, 16)$, $(63, 32)$, $(63, 64)$, $(63, 25)$, $(63, 50)$, $(63, 15)$, $(63, 30)$, $(63, 60)$, $(63, 12)$, $(63, 24)$, $(63, 48)$, $(63, 96)$, $(63, 75)$의 17개이다.

(iv) $a=84$일 때, $\dfrac{1}{2\times 5\times b}$이므로 b의 값은 2×5, $2^2\times 5$, $2^3\times 5$, $2^4\times 5$, 2^4, 2^5, 2^6, 5^2, 2×5^2이므로 순서쌍 (a, b)는 $(84, 10)$, $(84, 20)$, $(84, 40)$, $(84, 80)$, $(84, 16)$, $(84, 32)$, $(84, 64)$, $(84, 25)$, $(84, 50)$의 9개이다.

(i)~(iv)에 의하여 순서쌍 (a, b)의 개수는

$9+9+17+9=44$(개)

24. $3\le c\le b\le a$이므로 $\dfrac{1}{a}\le\dfrac{1}{b}\le\dfrac{1}{c}\le\dfrac{1}{3}$

즉 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{2}{c}\le\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{3}=\dfrac{4}{3}$

또 $n<\dfrac{3}{abc}+n=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{2}{c}\le\dfrac{4}{3}$이므로 $n=1$

즉 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{2}{c}=\dfrac{3}{abc}+1$에서

$1<\dfrac{3}{abc}+1=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{2}{c}\le\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{c}+\dfrac{2}{c}=\dfrac{4}{c}$가 성립하므로

$c=3$

$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{2}{3}=\dfrac{3}{3ab}+1$에서 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{ab}+\dfrac{1}{3}$이고

$\dfrac{1}{3}<\dfrac{1}{ab}+\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\le\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{2}{b}$가 성립하므로

$b=3$ 또는 $b=4$ 또는 $b=5$

(i) $b=3$일 때, $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{3a}+\dfrac{1}{3}$이므로 이를 만족하는 자연수 a는 없다.

(ii) $b=4$일 때, $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{4a}+\dfrac{1}{3}$이므로 $\dfrac{3}{4a}=\dfrac{1}{12}$

$4a=36 \qquad \therefore a=9$

(iii) $b=5$일 때, $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{5}=\dfrac{1}{5a}+\dfrac{1}{3}$이므로 $\dfrac{4}{5a}=\dfrac{2}{15}$

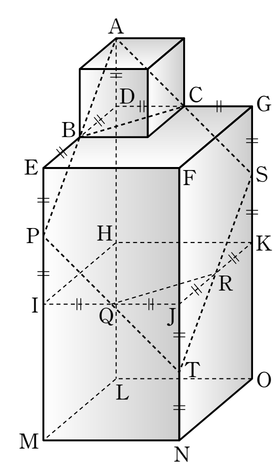
$10a=60 \qquad \therefore a=6$

(i)~(iii)에 의하여 $a=9$, $b=4$, $c=3$, $n=1$일 때,

$100a+10b+c+n$이 최댓값을 가지므로 구하는 최댓값은

$100a+10b+c+n=100\times 9+10\times 4+3+1=944$

25.



주어진 입체도형은 세 꼭짓점 A, B, C를 지나는 평면에 의하여 위 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AL}}$을 포함하는 입체도형과 $\overline{\mathrm{FT}}$를 포함하는 입체도형으로 나누어진다.

작은 정육면체는 삼각뿔 A−DBC와 나머지로 나누어지고 직육면체를 정사각형 HIJK를 밑면으로 하는 두 개의 정육면체로 생각하면 위에 있는 정육면체는 모양과 크기가 같은 두 입체도형으로 나누어지고 아래에 있는 정육면체는 삼각뿔 T−QJR와 나머지로 나누어진다.

이때 작은 정육면체의 한 모서리의 길이를 a라고 하면 나누어진 두 입체도형에서 $\overline{\mathrm{AL}}$을 포함하는 입체도형의 부피는

$$\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times a\times a\right)\times a+2a\times 2a\times 2a\times\frac{1}{2}+\left\{2a\times 2a\times 2a-\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times a\times a\right)\times a\right\}$$

$$=\frac{1}{6}a^3+4a^3+8a^3-\frac{1}{6}a^3=12a^3$$

나누어진 두 입체도형에서 $\overline{\mathrm{FT}}$를 포함하는 입체도형의 부피는 주어진 입체도형에서 $\overline{\mathrm{AL}}$을 포함하는 입체도형의 부피를 뺀 것과 같다.

$\therefore$ ($\overline{\mathrm{FT}}$를 포함하는 입체도형의 부피)

$$\begin{aligned}&=a\times a\times a+2a\times 2a\times 4a-12a^3\\&=a^3+16a^3-12a^3=5a^3\end{aligned}$$

따라서 두 입체도형의 부피의 비는 $12a^3:5a^3$이고 이를 가장 간단한 자연수의 비로 나타내면 $12:5$이다.

즉 $m=12$, $n=5$이므로

$m-n=12-5=7$