2016년도 2차 물리인증제 역학 Expert 4번 문항 풀이

by 14041 박승원

입자가 라그랑지안 $\mathcal{L} = -mc\sqrt{c^2 f(r) - \dot{r}^2/f(r) - r^2\dot{\phi}^2}$ 하에서 운동하고 있다. (단, $f(r) = \left(1 - \frac{R}{r}\right)^2$ 이다.) 여기에서 m, c, R 은 상수이며, r, ϕ 는 입자의 위치를 극좌표에서 나타내기 위한 변수들로 이해할 수 있다.

(1) 입자가 운동하는 과정에서 보존량이 J와 E로 두 개가 있다. J는 ϕ 방향의 각운동량을 의미하며 이는 $J = \partial\mathcal{L}/\partial\dot{\phi}$로 구할 수 있다. 또한, E는 르장드르 변환을 통해 구할 수 있다. J와 E를 $r, \dot{r}, \dot{\phi}$ 에 관한 식으로 구하여라.

(2) 입자가 $r = 4R$인 원운동을 하고 있다. 이 상황에서 $r, \dot{r}, \dot{\phi}$를 구하여라.

(3) 입자가 $4R \le r \le \beta R$ 에 속박되어 있다. 즉, $r = 4R$ 또는 $r = \beta R$일 때 $\dot{r} = 0$이다. $r = 4R$인 순간 $\dot{\phi} = \frac{\sqrt{15}c}{32R}$일 때, β의 값을 구하여라.

풀이.

(1) J는 그냥 계산하면 된다.

$$J = -mc \cdot \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{c^2 f(r) - \dot{r}^2/f(r) - r^2\dot{\phi}^2}} \cdot \left(-2r^2\dot{\phi}\right)$$
$$= \frac{mcr^2\dot{\phi}}{\sqrt{c^2 f(r) - \dot{r}^2/f(r) - r^2\dot{\phi}^2}}$$

문제는 E 를 구하는 것이다. 우선 '르장드르 변환'이라는 말이 나왔으니 이 보존량은 해밀토니안 $\mathcal{H}$임을 강력히 추측할 수 있다.

p_r은

$$p_r = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t} = -mc \cdot \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{c^2 f(r) - \dot{r}^2/f(r) - r^2\dot{\phi}^2}} \cdot (-2\dot{r}/f(r))$$
$$= \frac{mc\dot{r}}{f(r)} \frac{1}{\sqrt{c^2 f(r) - \dot{r}^2/f(r) - r^2\dot{\phi}^2}}$$

와 같이 구할 수 있고, p_ϕ 는 $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}}$로서 J 와 동일하다.

이제, 해밀토니안은

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H} &= \dot{r}p_r + \dot{\phi}p_\phi - \mathcal{L} \\
&= \frac{mc\dot{r}^2}{f(r)} \frac{1}{\sqrt{c^2 f(r) - \dot{r}^2/f(r) - r^2\dot{\phi}^2}} + mcr^2 \frac{\dot{\phi}^2}{\sqrt{c^2 f(r) - \dot{r}^2/f(r) - r^2\dot{\phi}^2}} \ + mc\sqrt{c^2 f(r) - \dot{r}^2/f(r) - r^2\dot{\phi}^2} \\
&= \frac{mc}{\sqrt{c^2 f(r) - \dot{r}^2/f(r) - r^2\dot{\phi}^2}} \left(\frac{\dot{\phi}^2}{f(r)} + r^2\dot{\phi}^2 + c^2 f(r) - \dot{r}^2/f(r) - r^2\dot{\phi}^2 \right) \\
&= \frac{mc^3 f(r)}{\sqrt{c^2 f(r) - \dot{r}^2/f(r) - r^2\dot{\phi}^2}}
\end{aligned}
$$

이다. 이는 시간에 따라 변하지 않는($d\mathcal{H}/dt = 0$) 보존량이며, 이것이 바로 E 이다.

(2) (2번 문항은 3번 문항에서 $\beta = 0$인 상황이다.)
일단 $r = 4R, \dot{r} = 0$. $\dot{\phi}$의 경우 각운동량 J를 (1)에서 구한 식과 원래 정의인 $mr^2\dot{\phi}$을 이용해서 계산하고 비교하면 된다.
그런데 $c = \sqrt{\frac{9}{16}c^2 - 16R^2\dot{\phi}}^2$ 이 나온다. 필자의 계산실수인지, 문제 복기 중 계수를 잘못 기억한 것인지 모르겠음.

(3) 이 경우에도 각운동량 J를 이용하면 된다. $r = 4R$인 상태와 $r = \beta R$인 상태의 각운동량이 동일함을 이용하면 된다. 문제에서 주어진 대로 각각의 경우에서 $\dot{r} = 0$임에 주목.