很多同学在矩阵上加 → $\vec{A}.\vec{B}$

习题 0

1. 计算 n 阶行列式.

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ -b_2 & c_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -b_3 & 0 & c_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -b_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & c_{n-1} & 0 \\ -b_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & c_n \end{vmatrix}.$$

解: 若 $c_2, c_3, \ldots, c_n$ 全不为 0, 则原式 $=\begin{vmatrix} a_1+\sum\limits_{i=2}^{n}\frac{a_ib_i}{c_i} & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ 0 & c_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & c_n \end{vmatrix} = (a_1+\sum\limits_{i=2}^{n}\frac{a_ib_i}{c_i})c_2c_3\ldots c_n.$

若有某个 $c_j=0\ (2\le j\le n)$, 则按第 j 行展开得:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{j-1} & a_j & a_{j+1} & \cdots & a_n \\ -b_2 & c_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -b_{j-1} & 0 & \cdots & c_{j-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -b_j & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -b_{j+1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & c_{j+1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -b_n & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & c_n \end{vmatrix} = (-1)^{j+2}b_j \begin{vmatrix} a_2 & \cdots & a_{j-1} & a_j & a_{j+1} & \cdots & a_n \\ c_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & c_{j-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & c_{j+1} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & c_n \end{vmatrix}$$

$$\underline{\text{按第 } j-1 \text{ 列展开}}\ (-1)^{j+2}b_j(-1)^j a_j \begin{vmatrix} c_2 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & c_{j-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & c_{j+1} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & c_n \end{vmatrix} = a_jb_jc_2\ldots c_{j-1}c_{j+1}\ldots c_n.$$

2. 化 $\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & x_1+a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & a_1 & x_2+a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_1 & a_2 & \cdots & x_n+a_n \end{vmatrix}$ 为上题的形式计算之, 并求 $\begin{vmatrix} x_1+a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & x_2+a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & x_n+a_n \end{vmatrix}$.

解: $\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & x_1+a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & a_1 & x_2+a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_1 & a_2 & \cdots & x_n+a_n \end{vmatrix} \times(-1) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ -1 & x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & x_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & x_n \end{vmatrix} = \begin{cases} (1+\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{a_i}{x_i})x_1\cdots x_n, & x_1\cdots x_n\neq 0; \\ x_1\cdots x_{j-1}a_jx_{j+1}\cdots x_n, & x_j=0. \end{cases}$

$$\begin{vmatrix} x_1+a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & x_2+a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & x_n+a_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & x_1+a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & a_1 & x_2+a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_1 & a_2 & \cdots & x_n+a_n \end{vmatrix} = \begin{cases} (1+\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{a_i}{x_i})x_1\cdots x_n, & x_1\cdots x_n\neq 0; \\ x_1\cdots x_{j-1}a_jx_{j+1}\cdots x_n, & x_j=0. \end{cases}$$

3. 由第 2 题的启发求 $\begin{vmatrix} a_1^2+1 & a_1a_2 & \cdots & a_1a_n \\ a_2a_1 & a_2^2+2 & \cdots & a_2a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_na_1 & a_na_2 & \cdots & a_n^2+n \end{vmatrix}$.

解: $\begin{vmatrix} a_1^2+1 & a_1a_2 & \cdots & a_1a_n \\ a_2a_1 & a_2^2+2 & \cdots & a_2a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_na_1 & a_na_2 & \cdots & a_n^2+n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & a_1^2+1 & a_1a_2 & \cdots & a_1a_n \\ 0 & a_2a_1 & a_2^2+2 & \cdots & a_2a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_na_1 & a_na_2 & \cdots & a_n^2+n \end{vmatrix} \times(-a_1)\ \times(-a_2)\ \cdots\ \times(-a_n)$

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ -a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_2 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_n & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix} = (1+\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^2}{i})n!.$$

4. $A=(a_{ij})_{n\times n}$, 其中 $a_{ij}=|i-j|$, 求 $\det A$.

有同学不会

解: $\det A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ 2 & 1 & 0 & \cdots & n-4 & n-3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n-2 & n-3 & n-4 & \cdots & 0 & 1 \\ n-1 & n-2 & n-3 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix} \times(-1) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ 2 & 1 & 0 & \cdots & n-4 & n-3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n-2 & n-3 & n-4 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & -1 \end{vmatrix}$

$= \cdots = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ 2 & 1 & 0 & \cdots & n-4 & n-3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & -1 \end{vmatrix} \times(-1) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ 1 & 1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & -1 \end{vmatrix} \times(-1)$

$= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{1+n}(n-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 2 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \end{vmatrix}$

$= (-1)^{1+n}(n-1)2^{n-2}.$

5. $d_n=\begin{vmatrix} a+b & a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ b & a+b & a & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & b & a+b & a & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & b & a+b & \ddots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & a+b & a\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & b & a+b \end{vmatrix}$. 试证: $d_n-ad_{n-1}=b^n$, $d_n-bd_{n-1}=a^n$. 由此求 d_n.

解: 原式 $=\begin{vmatrix} a & a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & a+b & a & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & b & a+b & a & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & b & a+b & \ddots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & a+b & a\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & b & a+b \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} b & a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ b & a+b & a & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & b & a+b & a & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & b & a+b & \ddots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & a+b & a\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & b & a+b \end{vmatrix}$

$=ad_{n-1}+\begin{vmatrix} b & a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & b & a & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & b & a+b & a & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & b & a+b & \ddots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & a+b & a\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & b & a+b \end{vmatrix}$

$=ad_{n-1}+b\begin{vmatrix} b & a & 0 & \cdots & 0 & 0\\ b & a+b & a & \cdots & 0 & 0\\ 0 & b & a+b & \ddots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \ddots & a+b & a\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b & a+b \end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)}$

$=ad_{n-1}+b\begin{vmatrix} b & a & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & b & a & \cdots & 0 & 0\\ 0 & b & a+b & \ddots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \ddots & a+b & a\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b & a+b \end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)}$

$=ad_{n-1}+b^2\begin{vmatrix} b & a & \cdots & 0 & 0\\ b & a+b & \ddots & 0 & 0\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \ddots & a+b & a\\ 0 & 0 & \cdots & b & a+b \end{vmatrix}_{(n-2)\times(n-2)}=\dots=ad_{n-1}+b^n.$

互换 a, b 可得 $d_n=bd_{n-1}+a^n$.

故 $\begin{cases} d_n-ad_{n-1}=b^n,\\ d_n-bd_{n-1}=a^n. \end{cases}$

若 $a\neq b$, 则 $d_n=\dfrac{b^{n+1}-a^{n+1}}{b-a}$.

若 $a=b$,

则 $d_n=ad_{n-1}+a^n=a(ad_{n-2}+a^{n-1})+a^n=a^2d_{n-2}+2a^n=\dots=a^{n-1}d_1+(n-1)a^n=(n+1)a^n$.

6. $A=\begin{bmatrix} a & b & c & d\\ -b & a & -d & c\\ -c & d & a & -b\\ -d & -c & b & a \end{bmatrix}$, 求 AA^{T} 及 $\det A$.

解: $AA^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix} a & b & c & d\\ -b & a & -d & c\\ -c & d & a & -b\\ -d & -c & b & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & -b & -c & -d\\ b & a & d & -c\\ c & -d & a & b\\ d & c & -b & a \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} k & 0 & 0 & 0\\ 0 & k & 0 & 0\\ 0 & 0 & k & 0\\ 0 & 0 & 0 & k \end{bmatrix}$, 其中 $k=a^2+b^2+c^2+d^2$.

由此可得 $(\det A)^2=\det(AA^{\mathrm{T}})=k^4$.

又因为 $\det A$ 中 a^4 的系数为 1, 所以 $\det A=k^2=(a^2+b^2+c^2+d^2)^2$.

7. 设 $A=(a_{ij})_{4\times 7}$, 其子矩阵 $B=\begin{bmatrix} a_{21} & a_{24} & a_{26}\\ a_{41} & a_{44} & a_{46} \end{bmatrix}$. 求 C 与 D 使 $B=CAD$.

解: 令 $e_1=(1, 0, 0, 0)$, $e_2=(0, 1, 0, 0)$, $e_3=(0, 0, 1, 0)$, $e_4=(0, 0, 0, 1)$,

$\varepsilon_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}, \varepsilon_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}, \varepsilon_3=\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}, \varepsilon_4=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix}, \varepsilon_5=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\1\\0\\0\end{bmatrix}, \varepsilon_6=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\1\\0\end{bmatrix}, \varepsilon_7=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\end{bmatrix},$

则 $e_iA=(a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, a_{i4}, a_{i5}, a_{i6}, a_{i7})$, $e_iA\varepsilon_j=a_{ij}$.

令 $C=\begin{bmatrix}e_2\\e_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$, $D=[\varepsilon_1, \varepsilon_4, \varepsilon_6]=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$, 则 $B=CAD$.

8. 设 n 阶方阵 $A=(e_n, e_1, \dots, e_{n-1})$, 求证: $A^k=\begin{bmatrix} O & I_{n-k}\\ I_k & O \end{bmatrix}$ $(k=1, 2, \dots, n-1)$, $A^n=I_n$.

证明: 因为用 $A=(e_n, e_1, \dots, e_{n-1})$ 右乘一个矩阵 $B_{m\times n}$ 相当于把 $B_{m\times n}$ 的第 n 列调到第 1 列(原来的第 1 列至第 $n-1$ 列向后平移),

由此可见 $A=(e_n, e_1, \dots, e_{n-1})=\begin{bmatrix} O & I_{n-1}\\ 1 & O \end{bmatrix}$, $A^2=\begin{bmatrix} O & I_{n-2}\\ I_2 & O \end{bmatrix}$, …, $A^{n-1}=\begin{bmatrix} O & 1\\ I_{n-1} & O \end{bmatrix}$, $A^n=I_n$.

9. (1) 记 $e=e_1+e_2+\dots+e_n$, $Ae=(s_1, s_2, \dots, s_n)^{\mathrm{T}}$, 问 $s_i=?$ $(1\le i\le n)$.

(2) 已知 n 阶方阵 A 的每行元素和为 a, 求证 A^k 的每行元素和为 a^k, k 为正整数, 且当 A 可逆时, 以上命题对 $k=-1$ 也成立.

解(1) $e=e_1+e_2+\ldots+e_n$, $Ae=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{1n}\\a_{21}+a_{22}+\cdots+a_{2n}\\\vdots\\a_{n1}+a_{n2}+\cdots+a_{nn}\end{bmatrix}$,

$s_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\ (1\le i\le n)$.

证明(2) 因为 n 阶方阵 A 的每行元素和为 a, 故由(1)可知 $Ae=\begin{bmatrix}a\\a\\\vdots\\a\end{bmatrix}=ae$.

进而有 $A^2e=A(Ae)=A(ae)=a(Ae)=a^2e$.

对于任意正整数 k, 依次类推可得 $A^ke=a^ke$. 可见 A^k 的每行元素和为 a^k.

当 A 可逆时, $a\neq0$. (否则 $a=0\Rightarrow Ae=ae=0\Rightarrow e=A^{-1}0=0$, 矛盾!)

进而由 $Ae=ae$ 可得 $A^{-1}e=a^{-1}e$, 可见 A^{-1} 的每行元素和为 a^{-1}.

有同学直接将 $k=-1$ 代入 $A^ke=a^ke$.

10. n 阶 Frobenius 矩阵 $F=(e_2, e_3, \ldots, e_n, -\beta)$, 其中 $\beta=(a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1)^T$.

(1) 求证 $B=F^n+a_1F^{n-1}+\ldots+a_nI_n=O$;

(2) 若 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 与 F 乘积可交换, 证明 $A=a_{n1}F^{n-1}+\ldots+a_{21}F+a_{11}I$.

证明(1) 由条件可知 $Fe_1=e_2, Fe_2=e_3, \ldots, Fe_{n-1}=e_n, Fe_n=-\beta$.

进而有 $F^2e_1=Fe_2=e_3, \ldots, F^{n-1}e_1=e_n, F^ne_1=-\beta$.

故 $Be_1=(F^n+a_1F^{n-1}+\ldots+a_nI_n)e_1=-\beta+a_1e_n+\ldots+a_ne_1=-\beta+\beta=0$.

于是 $Be_2=BFe_1=FBe_1=F0=0, \ldots, Be_n=BFe_{n-1}=FBe_{n-1}=F0=0$.

因此 $B=BI=B(e_1, e_2, \ldots, e_n)=(Be_1, Be_2, \ldots, Be_n)=O$.

(2) $(a_{n1}F^{n-1}+\ldots+a_{21}F+a_{11}I)e_1=a_{n1}F^{n-1}e_1+\ldots+a_{21}Fe_1+a_{11}e_1=a_{n1}e_n+\ldots+a_{21}e_2+a_{11}e_1$
$=(a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{n1})^T=Ae_1$,

有同学做出

对于 $1<k\le n$, 设$(a_{n1}F^{n-1}+\ldots+a_{21}F+a_{11}I)e_{k-1}=Ae_{k-1}$, 则

$$\begin{aligned}(a_{n1}F^{n-1}+\ldots+a_{21}F+a_{11}I)e_k&=(a_{n1}F^{n-1}+\ldots+a_{21}F+a_{11}I)Fe_{k-1}\\&=F(a_{n1}F^{n-1}+\ldots+a_{21}F+a_{11}I)e_{k-1}\\&=FAe_{k-1}=AFe_{k-1}=Ae_k.\end{aligned}$$

由数学归纳法原理可知, $(a_{n1}F^{n-1}+\ldots+a_{21}F+a_{11}I)e_k=Ae_k$ 对于任意的 $1\le k\le n$ 都成立.

所以 $A=A(e_1, e_2, \ldots, e_n)=(Ae_1, Ae_2, \ldots, Ae_n)=(a_{n1}F^{n-1}+\ldots+a_{21}F+a_{11}I)(e_1, e_2, \ldots, e_n)$
$=a_{n1}F^{n-1}+\ldots+a_{21}F+a_{11}I$.

11. 称如下形式的矩阵为循环阵

$$\begin{bmatrix}a_0&a_1&a_2&\cdots&a_{n-2}&a_{n-1}\\a_{n-1}&a_0&a_1&\cdots&a_{n-3}&a_{n-2}\\a_{n-2}&a_{n-1}&a_0&\cdots&a_{n-4}&a_{n-3}\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\a_2&a_3&a_4&\cdots&a_0&a_1\\a_1&a_2&a_3&\cdots&a_{n-1}&a_0\end{bmatrix}$$

试证: 两个循环阵之积仍为循环阵.

证明: 设 n 阶方阵 $A=(e_n, e_1, \ldots, e_{n-1})$, 由第 8 题可知 $A^k=\begin{bmatrix}O&I_{n-k}\\I_k&O\end{bmatrix}$ $(k=1, 2, \ldots, n-1)$, $A^n=I_n$.

① 有同学直接用两个矩阵相乘
② 有同学用两个相同的循环阵之积.

设 $M=\begin{bmatrix}a_0&a_1&a_2&\cdots&a_{n-2}&a_{n-1}\\a_{n-1}&a_0&a_1&\cdots&a_{n-3}&a_{n-2}\\a_{n-2}&a_{n-1}&a_0&\cdots&a_{n-4}&a_{n-3}\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\a_2&a_3&a_4&\cdots&a_0&a_1\\a_1&a_2&a_3&\cdots&a_{n-1}&a_0\end{bmatrix}$, $N=\begin{bmatrix}b_0&b_1&b_2&\cdots&b_{n-2}&b_{n-1}\\b_{n-1}&b_0&b_1&\cdots&b_{n-3}&b_{n-2}\\b_{n-2}&b_{n-1}&b_0&\cdots&b_{n-4}&b_{n-3}\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\b_2&b_3&b_4&\cdots&b_0&b_1\\b_1&b_2&b_3&\cdots&b_{n-1}&b_0\end{bmatrix}$,

则 $M=a_0I+a_1A+a_2A^2+\ldots+a_{n-1}A^{n-1}$, $N=b_0I+b_1A+b_2A^2+\ldots+b_{n-1}A^{n-1}$,

而且 MN 仍可写成 $c_0I+c_1A+c_2A^2+\ldots+c_{n-1}A^{n-1}$ 的形式.

所以 $MN=\begin{bmatrix}c_0&c_1&c_2&\cdots&c_{n-2}&c_{n-1}\\c_{n-1}&c_0&c_1&\cdots&c_{n-3}&c_{n-2}\\c_{n-2}&c_{n-1}&c_0&\cdots&c_{n-4}&c_{n-3}\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\c_2&c_3&c_4&\cdots&c_0&c_1\\c_1&c_2&c_3&\cdots&c_{n-1}&c_0\end{bmatrix}$ 仍为循环阵.

12. 试证(1) Sherman-Morrison 公式. 设 B 为 n 阶可逆阵, $u, v\in C^n$ 且 $r=1+v^TB^{-1}u\neq0$, 则 $A=B+uv^T$ 可逆, 且 $A^{-1}=B^{-1}-\frac{1}{r}B^{-1}uv^TB^{-1}$;

(2) 若 B 与 $B+uv^T$ 可逆, 其中 $u, v\in C^n, B\in C^{n\times n}$, 则 $1+v^TB^{-1}u\neq0$;

(3) 设 B^{-1} 已知, $v\in C^n$, $A=B+e_kv^T$ (即 A 与 B 除第 k 行外, 其余完全相同)可逆, 试用 Sherman-Morrison 公式求 A^{-1} (称此法为修正法).

证明: (1) $A(B^{-1}-\frac{1}{r}B^{-1}uv^TB^{-1})=(B+uv^T)(B^{-1}-\frac{1}{r}B^{-1}uv^TB^{-1})$

$$\begin{aligned}&=I-\frac{1}{r}uv^TB^{-1}+uv^TB^{-1}-\frac{1}{r}uv^TB^{-1}uv^TB^{-1}\\&=I-\frac{1}{r}uv^TB^{-1}+uv^TB^{-1}-\frac{1}{r}(v^TB^{-1}u)(uv^TB^{-1})\\&=I-\frac{1}{r}(1+v^TB^{-1}u)uv^TB^{-1}+uv^TB^{-1}\\&=I-uv^TB^{-1}+uv^TB^{-1}=I.\end{aligned}$$

有同学未用此题条件证而另证 A 可逆

故 $A=B+uv^T$ 可逆, 且 $A^{-1}=B^{-1}-\frac{1}{r}B^{-1}uv^TB^{-1}$.

(2) 当 $u=0$ 时, $1+v^TB^{-1}u=1\neq0$;

当 $u\neq0$ 时, $(B+uv^T)B^{-1}u=u+uv^TB^{-1}u=u+u(v^TB^{-1}u)=u+(v^TB^{-1}u)u$
$=(1+v^TB^{-1}u)u$,

有近30%的同学不会

可见 $1+v^TB^{-1}u$ 为可逆矩阵$(B+uv^T)B^{-1}$ 的特征值, 故 $1+v^TB^{-1}u\neq0$.

(3) 在 Sherman-Morrison 公式中取 $u=e_k, r=1+v^TB^{-1}e_k$, 则 $A^{-1}=B^{-1}-\frac{1}{r}B^{-1}e_kv^TB^{-1}$.

13. (1) 已知 A, B 满足 $A+B=AB$, 证明 $A-I$ 可逆, 并求其逆.

(2) 已知 $A^2=A$, 证明 $A-2I$ 可逆, 并求其逆.

证明: (1) $A+B=AB\Rightarrow AB-A-B=O\Rightarrow(A-I)(B-I)=AB-A-B+I=I$
$\Rightarrow A-I$ 可逆而且$(A-I)^{-1}=B-I$.

(2) $A^2=A\Rightarrow(A-2I)(A+I)=A^2-A-2I=-2I\Rightarrow A-2I$ 可逆而且$(A-2I)^{-1}=-\frac{1}{2}(A+I)$.

14. 已知 $A^3=2I, B=A^2-2A+2I$, 证明 B 可逆, 并求其逆.

证明: $A^3=2I\Rightarrow$ ① $B=A^2-2A+2I=A^2-2A+A^3=A(A+2I)(A-I)$;

② $A^{-1}=\frac{1}{2}A^2$;

③ $(A+2I)(A^2-2A+4I)=A^3+8I=10I \Rightarrow (A+2I)^{-1}=\frac{1}{10}(A^2-2A+4I)$;

④ $(A-I)(A^2+A+I)=A^3-I=I \Rightarrow (A-I)^{-1}=A^2+A+I$,　　14. 有同学直接读出了 B^{-1}.

$\Rightarrow B=A^2-2A+2I$ 可逆而且

$$B^{-1}=(A-I)^{-1}(A+2I)^{-1}A^{-1}=(A^2+A+I)\frac{1}{10}(A^2-2A+4I)\frac{1}{2}A^2$$

$$=\frac{1}{10}(A^2+3A+4I).$$

【注】本题也可以用"待定系数法". 令 $B^{-1}=aA^2+bA+cI$,

则 $I=(A^2-2A+2I)(aA^2+bA+cI)=aA^4+(b-2a)A^3+(2a-2b+c)A^2+(2b-2c)A+2cI$

$=aA^4+(b-2a)A^3+(2a-2b+c)A^2+(2b-2c)A+2cI$

$=(2a-2b+c)A^2+(2a+2b-2c)A+(-4a+2b+2c)I$,

故 $\begin{cases}2a-2b+c=0,\\2a+2b-2c=0,\\-4a+2b+2c=1.\end{cases}$ 由此可得 $a=\frac{1}{10}, b=\frac{3}{10}, c=\frac{2}{5}$.

15. 证明: 秩为 r 的矩阵可以分解为 r 个秩为 1 的矩阵之和.

证明: 设矩阵 A 的秩为 r, 当 $r=0$ 时, $A=O$, 此时结论显然成立. 若 r 为一个正整数, 则存在可逆矩阵 P 和 Q 使得

$$A=P\begin{pmatrix}I_r & O\\ O & O\end{pmatrix}Q,$$

有同学把列向量分解混淆了.

其中 I_r 为 r 阶单位矩阵. 对于 $i=1,2,\ldots,r$, 令 B_i 为 r 阶对角矩阵, 其对角线上第 i 个元素为 1, 其余元素为 0, 即

$$B_i=\mathrm{diag}(0,\ldots,0,\underset{i}{1},0,\ldots,0),$$

少部分同学不会.

再令 $U_i=P\begin{pmatrix}B_i & O\\ O & O\end{pmatrix}Q$, 则每个 U_i 的秩都为 1, 而且

$$A=P\begin{pmatrix}E_r & O\\ O & O\end{pmatrix}Q=P(\begin{pmatrix}B_1 & O\\ O & O\end{pmatrix}+\ldots+\begin{pmatrix}B_r & O\\ O & O\end{pmatrix})Q=U_1+\ldots+U_r.$$

16. 设 A 为 r 阶方阵, B 是秩为 r 的 $r\times n$ 矩阵(称为行满秩矩阵). 证明:

(1) 若 $AB=O$, 则 $A=O$; (2) 若 $AB=B$, 则 $A=I$.

证明: B 是秩为 r 的 $r\times n$ 矩阵 $\Rightarrow$ 存在 r 阶可逆矩阵 P 使得 $PB=(I_r,C)$ —— B 的行最简形

(1) $AB=O\Rightarrow AP^{-1}PB=O\Rightarrow AP^{-1}(I_r,C)=O\Rightarrow(AP^{-1},AP^{-1}C)=O\Rightarrow AP^{-1}=O$

$\Rightarrow A=O$.

(2) $AB=B\Rightarrow AP^{-1}(I_r,C)=P^{-1}(I_r,C)\Rightarrow AP^{-1}=P^{-1}\Rightarrow A=I$.

【注】(1)也可以根据 B 的行向量组线性无关来证明.

(2) $AB=B\Rightarrow(A-I)B=O\Rightarrow A-I=O\Rightarrow A=I$.

17. 证明: 任一方阵都可表示为可逆阵与幂等阵(平方等于自身)的乘积.

证明: 设 n 阶方阵 A 的秩为 r, 则存在可逆阵 P,Q 使得

$$A=P\begin{pmatrix}E_r & O\\ O & O\end{pmatrix}Q=PQQ^{-1}\begin{pmatrix}E_r & O\\ O & O\end{pmatrix}Q,$$

其中 PQ 为可逆阵, $Q^{-1}\begin{pmatrix}E_r & O\\ O & O\end{pmatrix}Q$ 为幂等阵.

有同学把题意理解错了 直接证 $A=P\begin{pmatrix}E & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}Q$ 其中 P, Q可逆. $\begin{pmatrix}E & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ 幂等

18. 求下列矩阵的满秩分解:

$$\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{bmatrix};\ \begin{bmatrix}1&2&3&4\\0&1&1&0\\1&1&2&4\end{bmatrix};\ \begin{bmatrix}1&1&0&-1\\3&1&2&1\\4&1&3&2\end{bmatrix}.$$

解: (1) 因为 $\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{bmatrix}$ 是行满秩矩阵, 所以 $\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{bmatrix}$ 的满秩分解可取为

$$\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{bmatrix}.$$

(2) $\begin{bmatrix}1&2&3&4\\0&1&1&0\\1&1&2&4\end{bmatrix}\times(-1)\rightarrow\begin{bmatrix}1&2&3&4\\0&1&1&0\\0&-1&-2&0\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&2&3&4\\0&1&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$, 由此可见

有同学只做了(1) 剩下的不会做 满秩分解不少同学不会

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&3&4\\0&1&1&0\\1&1&2&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\0&1&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},$$

故 $\begin{bmatrix}1&2&3&4\\0&1&1&0\\1&1&2&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-1&0&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1&2&3&4\\0&1&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&3&4\\0&1&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&3&4\\0&1&1&0\end{bmatrix}.$$

(3) $\begin{bmatrix}1&1&0&-1\\3&1&2&1\\4&1&3&2\end{bmatrix}\times(-3)\ \times(-4)\rightarrow\begin{bmatrix}1&1&0&-1\\0&-2&2&4\\0&-3&3&6\end{bmatrix}\times(-\tfrac{3}{2})\rightarrow\begin{bmatrix}1&1&0&-1\\0&-2&2&4\\0&0&0&0\end{bmatrix}$, 由此可见

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-\frac{3}{2}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-4&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\-3&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&0&-1\\3&1&2&1\\4&1&3&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&0&-1\\0&-2&2&4\\0&0&0&0\end{bmatrix},$$

故 $\begin{bmatrix}1&1&0&-1\\3&1&2&1\\4&1&3&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\-3&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-4&0&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-\frac{3}{2}&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1&1&0&-1\\0&-2&2&4\\0&0&0&0\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}1&0&0\\3&1&0\\4&\frac{3}{2}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&0&-1\\0&-2&2&4\\0&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\3&1\\4&\frac{3}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&0&-1\\0&-2&2&4\end{bmatrix}.$$

19. (1) 若 A 可逆, 试证: 秩$\begin{pmatrix}A&B\\C&D\end{pmatrix}$= 秩$(A)$+ 秩$(D-CA^{-1}B)$;

(2) 设 C 为 $k\times n$ 阵, B 为 $n\times k$ 阵, 试证: $n+$ 秩$(I_k-CB)=k+$ 秩(I_n-BC).

证明: (1) $-CA^{-1}\begin{pmatrix}A&B\\C&D\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}A&B\\O&D-CA^{-1}B\end{pmatrix}\xrightarrow{\times(-A^{-1}B)}\begin{pmatrix}A&O\\O&D-CA^{-1}B\end{pmatrix}$, 由此可见

秩$\begin{pmatrix}A&B\\C&D\end{pmatrix}$= 秩$\begin{pmatrix}A&O\\O&D-CA^{-1}B\end{pmatrix}$= 秩$(A)$+ 秩$(D-CA^{-1}B)$.

(2) $-C\begin{pmatrix}I_n&B\\C&I_k\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}I_n&B\\O&I_k-CB\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}I_n&O\\O&I_k-CB\end{pmatrix}$,

另一方面, $-B\begin{pmatrix}I_n&B\\C&I_k\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}I_n-BC&O\\C&I_k\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}I_n-BC&O\\O&I_k\end{pmatrix}$,

由此可见

$=$ 秩$(A, BA)=$ 秩[R ...]

$$n+\text{秩}(I_k-CB)=\text{秩}\begin{pmatrix} I_n & O \\ O & I_k-CB \end{pmatrix}=\text{秩}\begin{pmatrix} I_n & B \\ C & I_k \end{pmatrix}=\text{秩}\begin{pmatrix} I_n-BC & O \\ O & I_k \end{pmatrix}=k+\text{秩}(I_n-BC).$$

20. 设 A 为 $s\times n$ 阵, B 为 $s\times t$ 阵, 试证: $AX=B$ 有解的充要条件为秩$(A)=$秩(A, B).

证明: (必要性) 若~~$AX=B$ 有解, 则 B 的列向量组能由 A 的列向量组线性表示,~~ 有同学不会证不熟

~~故~~秩$(A)\le$ 秩$(A, B)\le$ 秩(A), 进而秩$(A)=$秩(A, B).

(充分性) 若秩$(A)=$秩(A, B), 则对于 B 的任意一列向量 B_i,

有秩$(A)=$秩$(A, B)\le$ 秩$(A, B_i)\le$ 秩(A), 秩$(A, B)=$

故秩$(A)=$ 秩(A, B_i), 因而 $Ax=B_i$ 有解.

所以 $AX=B$ 有解.

21. 试证: 幂等阵 A (即 $A^2=A$)有秩$(A)+$秩$(I_n-A)=n$.

证明: 一方面, $A+(I_n-A)=I_n\Rightarrow$ 秩$(A)+$秩$(I_n-A)\ge$ 秩$[A+(I_n-A)]=$ 秩$(I_n)=n$.

另一方面, $A^2=A\Rightarrow A(I_n-A)=A-A^2=O\Rightarrow$ 秩$(A)+$秩$(I_n-A)\le n$.

综上可得秩$(A)+$秩$(I_n-A)=n$.

22. 试证: 若 n 阶方阵 A 满足秩$(A)+$秩$(I_n-A)=n$, 则 $A^2=A$.

证明: 设$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_s$是 $Ax=0$ 的一个基础解系; $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_t$是$(I_n-A)x=0$ 的一个基础解系,

则$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_s$是 A 的对应于特征值 0 的特征向量, 很多同学不会

$\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_t$是 A 的对应于特征值 1 的特征向量,

可见$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_s, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_t$线性无关.

另一方面 $A(I_n-A)\xi_i=(I_n-A)A\xi_i=0, A(I_n-A)\eta_j=0, \forall 1\le i\le s, 1\le j\le t$.

可见$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_s, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_t$都是 $A(I_n-A)x=0$ 的解.

因此 $n-$ 秩$[A(I_n-A)]\ge s+t=[n-$ 秩$(A)]+[n-$ 秩$(I_n-A)]$.

由此可得秩$[A(I_n-A)]\le$ 秩$(A)+$秩$(I_n-A)-n=0$.

故 $A(I_n-A)=O$, 即 $A^2=A$.

证明: 设秩$(A)=r$ 且 $A=GH$ 为 A 的一个满秩分解, 其中 G 为 $n\times r$ 阵, H 为 $r\times n$ 阵.

由第 19 题(2)可知, $n+$ 秩$(I_r-HG)=r+$ 秩(I_n-A).

由秩$(A)+$秩$(I_n-A)=n$ 得秩$(I_r-HG)=0$, 故 $I_r=HG$.

于是 $A^2=GHGH=GI_rH=GH=A$.

23. 若 $A^2=I$, 则称 A 为对合阵. 试证 n 阶方阵 A 为对合阵的充要条件为

秩$(I_n+A)+$ 秩$(I_n-A)=n$. 很多同学不会证

证明: (必要性) $A^2=I\Rightarrow(I_n+A)(I_n-A)=I-A^2=O\Rightarrow$ 秩$(I_n+A)+$秩$(I_n-A)\le n$. 必要性

另一方面, $(I_n+A)+(I_n-A)=2I_n\Rightarrow$ 秩$(I_n+A)+$秩$(I_n-A)\ge$ 秩$(2I_n)=n$.

故秩$(I_n+A)+$ 秩$(I_n-A)=n$. ①充分性 也有很多同学

(充分性) 令 $B=\dfrac{1}{2}(I_n+A)$, 则 $I_n-B=\dfrac{1}{2}(I_n-A)$. 不会.

秩$(I_n+A)+$ 秩$(I_n-A)=n\Rightarrow$ 秩$(B)+$秩$(I_n-B)=n$. ②分不清什么是充分性、

于是由第 22 题得 $B^2=B$. 由此可得 $A^2=I$. 什么是必要性

24. 设 A, B 为 n 阶对合阵, 且 $\det(AB)<0$, 试证: 存在非零列向量 X 使 $BAX+X=0$. (推导方向)

证明: $\det(I+BA)=\det(B^2+BA)=\det B\det(B+A)=\det B\det(BA^2+A)=\det B\det(BA+I)\det A$

$=\det A\det B\det(BA+I)=\det(AB)\det(BA+I)=\det(AB)\det(I+BA)$.

由此可得 $[1-\det(AB)]\det(I+BA)=0$.

又因为 $\det(AB)<0$, 所以 $\det(I+BA)=0$.

因而$(I+BA)x=0$ 有非零解, 故存在非零列向量 X 使 $BAX+X=0$.

25. 设 n 阶方阵 $B_1, \ldots, B_k$ 满足 $\prod\limits_{i=1}^{k}B_i=O$, 试证: $\sum\limits_{i=1}^{k}r(B_i)\le(k-1)n$. 并举一个等号成立的例子.

证明: 由$\begin{pmatrix} A & O \\ I & B \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} O & -AB \\ I & B \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} O & -AB \\ I & O \end{pmatrix}$可见

$$n+r(AB)=r\begin{pmatrix} O & -AB \\ I & O \end{pmatrix}=r\begin{pmatrix} A & O \\ I & B \end{pmatrix}\ge r(A)+r(B).$$

重复使用该结论可得 $(k-1)n+r(\prod\limits_{i=1}^{k}B_i)\ge\sum\limits_{i=1}^{k}r(B_i)$.

又因为 $\prod\limits_{i=1}^{k}B_i=O$, 所以 $\sum\limits_{i=1}^{k}r(B_i)\le(k-1)n$.

举例: $n=4, k=3, B_1=\begin{pmatrix} 1&0&0&0 \\ 0&1&0&0 \\ 0&0&1&0 \\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}, B_2=\begin{pmatrix} 1&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&1 \end{pmatrix}, B_3=\begin{pmatrix} 0&0&0&0 \\ 0&1&0&0 \\ 0&0&1&0 \\ 0&0&0&1 \end{pmatrix}$,

则 $B_1B_2B_3=O$, 而且 $\sum\limits_{i=1}^{k}r(B_i)=3+2+3=8=(k-1)n$.

1. 下列集合是否是指定数域上的线性空间，证明之.

(1) $V=\{(n_1, n_2, \ldots, n_k) \mid n_i$ 为整数$\}$，数域为实数域 $\mathbb{R}$，加法与数乘为通常的运算.

答：不是. 因为对于 $\alpha=(1, 0, \ldots, 0) \in V$，以及 $a=\frac{1}{2} \in \mathbb{R}$，$a\alpha=(\frac{1}{2}, 0, \ldots, 0) \notin V$.

(2) $V=\{(x_1, x_2) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$，数域为 $\mathbb{R}$，加法 $\oplus$ 与数乘 $\otimes$ 定义为

$$(x_1, x_2) \oplus (y_1, y_2)=(x_1+2y_1, x_2+2y_2),$$
$$k\otimes(x_1, x_2)=(kx_1, 2kx_2).$$

答：不是. 因为对于 $\alpha=(0, 1) \in V$，$1\otimes\alpha=1\otimes(0, 1)=(0, 2) \neq (0, 1)=\alpha$.

(3) $V=\mathbb{R}^+$，数域为 $\mathbb{R}$，加法 $\oplus$ 与数乘 $\otimes$ 定义为

$$a\oplus b=ab, k\otimes a=a^k.$$

答：是. 证明如下：

对于任意的 $a, b \in \mathbb{R}^+$，以及任意的 $k \in \mathbb{R}$，有 $a\oplus b=ab$，$k\otimes a=a^k \in \mathbb{R}^+$，而且

① 对于任意的 $a, b \in \mathbb{R}^+$，有 $a\oplus b=ab=ba=b\oplus a$，

② 对于任意的 $a, b, c \in \mathbb{R}^+$，有 $(a\oplus b)\oplus c=(ab)\oplus c=(ab)c=a(bc)=a\oplus(bc)=a\oplus(b\oplus c)$，

③ 存在 $1 \in \mathbb{R}^+$，使得对于任意的 $a \in \mathbb{R}^+$，有 $a\oplus 1=a\cdot 1=a$，

④ 对于任意的 $a \in \mathbb{R}^+$，存在 $b=a^{-1} \in \mathbb{R}^+$ 使得 $a\oplus b=ab=aa^{-1}=1$.

⑤ 对于任意的 $a \in \mathbb{R}^+$，有 $1\otimes a=a^1=a$，

⑥ 对于任意的 $a \in \mathbb{R}^+$，以及任意的 $k, l \in \mathbb{R}$，有
$$k\otimes(l\otimes a)=k\otimes a^l=(a^l)^k=a^{k\cdot l}=(k\cdot l)\otimes a,$$

⑦ 对于任意的 $a \in \mathbb{R}^+$，以及任意的 $k, l \in \mathbb{R}$，有
$$(k+l)\otimes a=a^{(k+l)}=a^k\cdot a^l=a^k\oplus a^l=k\otimes a\oplus l\otimes a,$$

⑧ 对于任意的 $a, b \in \mathbb{R}^+$，以及任意的 $k \in \mathbb{R}$，有
$$k\otimes(a\oplus b)=k\otimes(ab)=(ab)^k=a^k\cdot b^k=a^k\oplus b^k=k\otimes a\oplus k\otimes b.$$

(4) $V=\mathbb{R}^2=\{(x_1, x_2) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$，数域为 $\mathbb{R}$，加法 $\oplus$ 与数乘 $\otimes$ 定义为

$$(x_1, x_2) \oplus (y_1, y_2)=(x_1+y_1, x_2+y_2+x_1y_1),$$
$$k\otimes(x_1, x_2)=(kx_1, kx_2+\frac{k(k-1)}{2}x_1^2) \quad (\forall x_1, x_2, y_1, y_2, k \in \mathbb{R}).$$

答：是. 证明如下：

有的同学已经讲了一部分.

对于任意的 $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$，以及任意的 $k \in \mathbb{R}$，有

$$(x_1, x_2) \oplus (y_1, y_2)=(x_1+y_1, x_2+y_2+x_1y_1), k\otimes(x_1, x_2)=(kx_1, kx_2+\frac{k(k-1)}{2}x_1^2) \in \mathbb{R}^2,$$

而且

① 对于任意的 $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$，有
$$(x_1, x_2) \oplus (y_1, y_2)=(x_1+y_1, x_2+y_2+x_1y_1)=(y_1+x_1, y_2+x_2+y_1x_1)=(y_1, y_2) \oplus (x_1, x_2),$$

② 对于任意的 $(x_1, x_2), (y_1, y_2), (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2$，有
$$\begin{aligned}[(x_1, x_2) \oplus (y_1, y_2)]\oplus(z_1, z_2) &= (x_1+y_1, x_2+y_2+x_1y_1)\oplus(z_1, z_2)\\ &= (x_1+y_1+z_1, x_2+y_2+x_1y_1+z_2+x_1z_1+y_1z_1)\\ &= (x_1+y_1+z_1, x_2+y_2+z_2+y_1z_1+x_1y_1+x_1z_1)\\ &= (x_1, x_2)\oplus(y_1+z_1, y_2+z_2+y_1z_1)\\ &= (x_1, x_2) \oplus [(y_1, y_2)\oplus(z_1, z_2)].\end{aligned}$$

③ 存在 $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$，使得对于任意的 $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$，有
$$(x_1, x_2)\oplus(0, 0)=(x_1+0, x_2+0+x_10)=(x_1, x_2),$$

④ 对于任意的 $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$，存在 $(-x_1, x_1^2-x_2) \in \mathbb{R}^2$ 使得
$$(x_1, x_2)\oplus(-x_1, x_1^2-x_2)=(x_1-x_1, x_2+x_1^2-x_2+x_1(-x_1))=(0, 0).$$

有的同学对负向量附加注释!

⑤ 对于任意的 $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$，有 $1\otimes(x_1, x_2)=(1x_1, 1x_2+\frac{1(1-1)}{2}x_1^2)=(x_1, x_2)$，

⑥ 对于任意的 $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$，以及任意的 $k, l \in \mathbb{R}$，有
$$\begin{aligned}k\otimes[l\otimes(x_1, x_2)] &= k\otimes(lx_1, lx_2+\frac{l(l-1)}{2}x_1^2)\\ &= (klx_1, klx_2+k\frac{l(l-1)}{2}x_1^2+\frac{k(k-1)}{2}(lx_1)^2)\\ &= (klx_1, klx_2+\frac{kl(kl-1)}{2}x_1^2)=(kl)\otimes(x_1, x_2),\end{aligned}$$

⑦ 对于任意的 $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$，以及任意的 $k, l \in \mathbb{R}$，有
$$\begin{aligned}(k+l)\otimes(x_1, x_2) &= ((k+l)x_1, (k+l)x_2+\frac{(k+l)(k+l-1)}{2}x_1^2)\\ &= (kx_1+lx_1, kx_2+\frac{k(k-1)}{2}x_1^2+lx_2+\frac{l(l-1)}{2}x_1^2+klx_1^2)\\ &= (kx_1, kx_2+\frac{k(k-1)}{2}x_1^2) \oplus (lx_1, lx_2+\frac{l(l-1)}{2}x_1^2)\\ &= k\otimes(x_1, x_2) \oplus l\otimes(x_1, x_2),\end{aligned}$$

⑧ 对于任意的 $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$，以及任意的 $k \in \mathbb{R}$，有
$$\begin{aligned}k\otimes[(x_1, x_2) \oplus (y_1, y_2)] &= k\otimes(x_1+y_1, x_2+y_2+x_1y_1)\\ &= (k(x_1+y_1), k(x_2+y_2+x_1y_1)+\frac{k(k-1)}{2}(x_1+y_1)^2)\\ &= (kx_1+ky_1, kx_2+\frac{k(k-1)}{2}x_1^2+ky_2+\frac{k(k-1)}{2}y_1^2+k^2x_1y_1)\\ &= (kx_1, kx_2+\frac{k(k-1)}{2}x_1^2) \oplus (ky_1, ky_2+\frac{k(k-1)}{2}y_1^2)\\ &= k\otimes(x_1, x_2) \oplus k\otimes(y_1, y_2).\end{aligned}$$

2. 设 α 为线性空间 $V(F)$ 中的非零向量. 若 F 中数 k_1 与 k_2 不等，证明 $k_1\alpha \neq k_2\alpha$.

(由于任一数域中均含无穷多个数，故任一有非零向量的线性空间含有无穷多个向量.)

有的同学不会做

证明：首先证明对于任意的非零向量 $\alpha \in V(F)$，以及 $k \in F$，若 $k\alpha=\theta$，则 $k=0$.

事实上，假若 $k \neq 0$，则有 $\alpha=1\alpha=(k^{-1}k)\alpha=k^{-1}(k\alpha)=k^{-1}\theta=\theta$，这与 $\alpha \neq \theta$ 矛盾!

下面证明 $k_1\alpha \neq k_2\alpha$.

假若 $k_1\alpha=k_2\alpha$，则 $(k_1-k_2)\alpha=k_1\alpha-k_2\alpha=\theta$，而 $\alpha \neq \theta$，故 $k_1-k_2=0$，即 $k_1=k_2$，

但这与 $k_1 \neq k_2$ 矛盾! 可见 $k_1\alpha \neq k_2\alpha$.

3. 证明：若 $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ 线性无关，$\alpha_1, \ldots, \alpha_r, \beta$ 线性相关，则 β 可经 $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ 线性表出，且系数唯一.

有的同学未证唯一性

证明：因为 $\alpha_1, \ldots, \alpha_r, \beta$ 线性相关，

所以存在不全为零的数 $k_1, \ldots, k_r, k_{r+1}$ 使得 $k_1\alpha_1+\ldots+k_r\alpha_r+k_{r+1}\beta=\theta$.

假若 $k_{r+1}=0$，则 $k_1, \ldots, k_r$ 不全为零，而且 $k_1\alpha_1+\ldots+k_r\alpha_r=\theta$.

但这与"$\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ 线性无关"矛盾!

可见 $k_{r+1} \neq 0$.

于是由 $k_1\alpha_1+\ldots+k_r\alpha_r+k_{r+1}\beta=\theta$ 可得 $\beta=-\frac{k_1}{k_{r+1}}\alpha_1-\ldots-\frac{k_r}{k_{r+1}}\alpha_r$，

可见 β 可经 $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ 线性表出.

若 $\beta=k_1\alpha_1+\ldots+k_r\alpha_r=l_1\alpha_1+\ldots+l_r\alpha_r$，

则$(k_1-l_1)\alpha_1+\ldots+(k_r-l_r)\alpha_r=(k_1\alpha_1+\ldots+k_r\alpha_r)-(l_1\alpha_1+\ldots+l_r\alpha_r)=\theta$.

由$\alpha_1, \ldots, \alpha_r$线性无关可得 $k_1-l_1=\ldots=k_r-l_r=0$, 即 $k_1=l_1, \ldots, k_r=l_r$.

可见β经$\alpha_1, \ldots, \alpha_r$线性表出的系数唯一.

4. 求下列线性空间的维数及一组基.

(1) $F^{n\times n}$中全体对称阵所构成F上的线性空间V.

解: 对于任意的$1\le i<j\le n$, 令$A_{ij}=E_{ij}+E_{ji}$, $A_{ii}=E_{ii}$, 其中诸E_{ij}为$F^{n\times n}$中的矩阵单位.

则$\{A_{ij}\mid 1\le i\le j\le n\}\subseteq V$, 而且有

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}=\sum_{1\le i\le j\le n}a_{ij}A_{ij}=O\Rightarrow a_{ij}=0\ (1\le i\le j\le n),$$

有近一半同学未说明线性无关.

可见$\{A_{ij}\mid 1\le i\le j\le n\}$线性无关.

另一方面, 对于任意的$A\in V$, 可设$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}$,

于是有$A=\sum\limits_{1\le i\le j\le n}a_{ij}A_{ij}$, 可见$A$能由$\{A_{ij}\mid 1\le i\le j\le n\}$线性表示.

综上所述, $\{A_{ij}\mid 1\le i\le j\le n\}$是$V$的一组基, 因而$\dim V=1+2+\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

(2) $\mathbb{C}^{n\times n}$中全体上三角阵所构成$\mathbb{C}$上的线性空间V.

解: $\{E_{ij}\mid 1\le i\le j\le n\}\subseteq V$, 而且有

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}=\sum_{1\le i\le j\le n}a_{ij}E_{ij}=O\Rightarrow a_{ij}=0\ (1\le i\le j\le n),$$

可见$\{E_{ij}\mid 1\le i\le j\le n\}$线性无关.

另一方面, 对于任意的$A\in V$, 可设$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}$,

于是有$A=\sum\limits_{1\le i\le j\le n}a_{ij}E_{ij}$, 可见$A$能由$\{E_{ij}\mid 1\le i\le j\le n\}$线性表示.

综上所述, $\{E_{ij}\mid 1\le i\le j\le n\}$是$V$的一组基, 因而$\dim V=1+2+\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

(3) $V(F)=\{(x_1, x_2, \ldots, x_{2n-1}, x_{2n})\mid x_2=x_4=\ldots=x_{2n}, \forall x_i\in F\}$. 有少数同学不会求基

解: 对于任意的$1\le i\le 2n$,

令$e_i=(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)\in V(F)$, 其中第$i$分量为1, 其余分量为0.

令$e=e_2+e_4+\ldots+e_{2n}$. 则

$$a_1e_1+a_3e_3+\ldots+c_{2n-1}e_{2n-1}+ae=(a_1, a, a_3, \ldots, a_{2n-1}, a)=0$$

$$\Rightarrow a_1=a_3=\ldots=a_{2n-1}=a=0,$$

可见$\{e_1, e_3, \ldots, e_{2n-1}, e\}$线性无关.

另一方面, 对于任意的$\alpha=(x_1, x_2, \ldots, x_{2n-1}, x_{2n})\in V(F)$,

有$\alpha=x_1e_1+x_3e_3+\ldots+x_{2n-1}e_{2n-1}+x_2e$, 可见$\alpha$能由$\{e_1, e_3, \ldots, e_{2n-1}, e\}$线性表示.

综上所述, $\{e_1, e_3, \ldots, e_{2n-1}, e\}$是$V(F)$的一组基, 因而$\dim V(F)=n+1$.

(4) $A=\mathrm{diag}(1, \omega, \omega^2)$, 其中$\omega^3=1$, 但$\omega\ne 1$, 且$V(\mathbb{R})=\{f(A)\mid \forall f(x)\in\mathbb{R}[x]\}$.

解: $A=\mathrm{diag}(1, \omega, \omega^2)$, $A^2=\mathrm{diag}(1, \omega^2, \omega)$, $A^3=\mathrm{diag}(1, 1, 1)=I$.

$$x_1I+x_2A+x_3A^2=\mathrm{diag}(x_1+x_2+x_3, x_1+x_2\omega+x_3\omega^2, x_1+x_2\omega^2+x_3\omega)=O$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0\\ x_1+\omega x_2+\omega^2x_3=0\\ x_1+\omega^2x_2+\omega x_3=0\end{cases}\Rightarrow x_1=x_2=x_3=0,$$

可见$\{I, A, A^2\}$线性无关.

另一方面, 对于任意的$f(x)\in\mathbb{R}[x]$,

可设$f(x)=q(x)(x^3-x)+r(x)$, 其中$r(x)=a_0+a_1x+a_2x^2\in\mathbb{R}[x]$,

于是$f(A)=q(A)(A^3-I)+r(A)=r(A)=a_0I+a_1A+a_2A^2$,

可见$f(A)$能由$\{I, A, A^2\}$线性表示.

综上所述, $\{I, A, A^2\}$是$V(\mathbb{R})$的一组基, 因而$\dim V(\mathbb{R})=3$.

5. 设$A\in\mathbb{C}^{n\times n}$.

(1) 若$V=\{B\in\mathbb{C}^{n\times n}\mid AB=BA\}$, 证明$V$是$\mathbb{C}^{n\times n}$的子空间.

证明: 首先, 由$AI=IA$可知$I\in V$, 因而$V\ne\varnothing$.

很多同学未证非空!

其次, 对于任意的$B, C\in V$, $a, b\in\mathbb{C}$, 有

$$A(aB+bC)=aAB+bAC=aBA+bCA=(aB+bC)A,$$

故$aB+bC\in V$.

综上所述, V是$\mathbb{C}^{n\times n}$的子空间.

(2) 若$A=I$, 求(1)中的V.

解: 若$A=I$, 则对于任意的$B\in\mathbb{C}^{n\times n}$, 有$AB=AI=IA=BA$, 即$B\in V$.

因此$\mathbb{C}^{n\times n}\subseteq V$, 进而有$V=\mathbb{C}^{n\times n}$.

(3) 若$A=\mathrm{diag}(1, 2, \ldots, n)$, 求(1)中$V$的一组基.

解: 若$A=\mathrm{diag}(1, 2, \ldots, n)$, 则对于任意的$B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n}\\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn}\end{pmatrix}\in\mathbb{C}^{n\times n}$,

$$B\in V\Leftrightarrow AB=BA\Leftrightarrow\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n}\\ 2b_{21} & 2b_{22} & \cdots & 2b_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ nb_{n1} & nb_{n2} & \cdots & nb_{nn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_{11} & 2b_{12} & \cdots & nb_{1n}\\ b_{21} & 2b_{22} & \cdots & nb_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ b_{n1} & 2b_{n2} & \cdots & nb_{nn}\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow b_{ij}=0\ (\forall i\ne j)\Leftrightarrow B=\begin{pmatrix} b_{11} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & b_{22} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & b_{nn}\end{pmatrix}=\mathrm{diag}(b_{11}, b_{22}, \ldots, b_{nn}).$$

因此V的一组基为$\{E_{11}, E_{22}, \ldots, E_{nn}\}$.

(4) 当$n=3$, $A=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&1&0\\0&1&2\end{pmatrix}$时, 求(1)中$V$的一组基.

解: 若$n=3$, $A=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&1&0\\0&1&2\end{pmatrix}$, 则对于任意的$B=\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{13}\\b_{21}&b_{22}&b_{23}\\b_{31}&b_{32}&b_{33}\end{pmatrix}\in\mathbb{C}^{3\times 3}$,

$$B\in V\Leftrightarrow AB=BA\Leftrightarrow\begin{pmatrix}3b_{11}&3b_{12}&3b_{13}\\b_{21}&b_{22}&b_{23}\\b_{21}+2b_{31}&b_{22}+2b_{32}&b_{23}+2b_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3b_{11}&b_{12}+b_{13}&2b_{13}\\3b_{21}&b_{22}+b_{23}&2b_{23}\\3b_{31}&b_{32}+b_{33}&2b_{33}\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow B=\begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0\\ 0 & b_{22} & 0\\ 0 & b_{33}-b_{22} & b_{33}\end{pmatrix}=b_{11}E_{11}+b_{22}(E_{22}-E_{32})+b_{33}(E_{32}+E_{33}).$$

另一方面，不难验证 $E_{11}, E_{22}-E_{32}, E_{32}+E_{33}$ 线性无关.

因此 V 的一组基为 $\{E_{11}, E_{22}-E_{32}, E_{32}+E_{33}\}$.

6. 已知 $\alpha_1=(1,2,1,0)$, $\alpha_2=(-1,1,1,1)$, $\beta_1=(2,-1,0,1)$, $\beta_2=(1,-1,3,7)$,

$V_1=\mathrm{span}\{\alpha_1,\alpha_2\}$, $V_2=\mathrm{span}\{\beta_1,\beta_2\}$, 分别求 V_1+V_2 及 $V_1\cap V_2$ 的一组基.

解: (1) $V_1+V_2=\mathrm{span}\{\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2\}$.

$$\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \beta_1\\ \beta_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&1&0\\-1&1&1&1\\2&-1&0&1\\1&-1&3&7\end{pmatrix}\begin{matrix}\times1 & \times(-2) & \times(-1)\\ \\ \\ \\ \end{matrix}\to\begin{pmatrix}1&2&1&0\\0&3&2&1\\0&-5&-2&1\\0&-3&2&7\end{pmatrix}\begin{matrix}\times2 & \times1\\ \\ \\ \\ \end{matrix}\to\begin{pmatrix}1&2&1&0\\0&3&2&1\\0&1&2&3\\0&0&4&8\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \\ \times(-3)\\ \times1/4\end{matrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&2&1&0\\0&0&-4&-8\\0&1&2&3\\0&0&1&2\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \\ \\ \times4\end{matrix}\to\begin{pmatrix}1&2&1&0\\0&0&0&0\\0&1&2&3\\0&0&1&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&1&0\\0&1&2&3\\0&0&1&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

可见 $\{\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2\}$ 与 $\{(1,2,1,0),(0,1,2,3),(0,0,1,2)\}$ 等价,

且 $\{(1,2,1,0),(0,1,2,3),(0,0,1,2)\}$ 线性无关.

故 $\{(1,2,1,0),(0,1,2,3),(0,0,1,2)\}$ 为 V_1+V_2 的一组基.

注: 也可以用下面的方法求解.

$$\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \beta_1\\ \beta_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&1&0\\-1&1&1&1\\2&-1&0&1\\1&-1&3&7\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等列变换}}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-1&1&0&0\\2&1&1&0\\1&7&3&0\end{pmatrix},$$

可见 $\{\alpha_1,\alpha_2,\beta_1\}$ 是 $\{\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2\}$ 的一个极大无关组,

故 $\{\alpha_1,\alpha_2,\beta_1\}$ 是 V_1+V_2 的一组基.

(2) $\alpha\in V_1\cap V_2\Leftrightarrow\exists k_1,k_2,k_3,k_4$ 使得 $\alpha=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2=k_3\beta_1+k_4\beta_2$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}k_1-k_2-2k_3-k_4=0,\\2k_1+k_2+k_3+k_4=0,\\k_1+k_2-3k_4=0,\\k_2-k_3-7k_4=0,\end{cases}\text{该方程组的通解为}\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\k_3\\k_4\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}-1\\4\\-3\\1\end{pmatrix}.$$

可见 $-\alpha_1+4\alpha_2$ 是 $V_1\cap V_2$ 的一组基.

7. 已知 $\mathbb{C}^{2\times2}$ 的子空间: $V_1=\left\{\begin{bmatrix}x&y\\y&x\end{bmatrix}\middle|\forall x,y\in\mathbb{C}\right\}$, $V_2=\left\{\begin{bmatrix}x&y\\x&y\end{bmatrix}\middle|\forall x,y\in\mathbb{C}\right\}$,

分别求 V_1+V_2 及 $V_1\cap V_2$ 的一组基.

解: (1) $V_1=\mathrm{span}\left\{\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\right\}$, $V_2=\mathrm{span}\left\{\begin{bmatrix}1&0\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1\\0&1\end{bmatrix}\right\}$.

$$V_1+V_2=\mathrm{span}\left\{\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1\\0&1\end{bmatrix}\right\}.$$

$\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}1&0\\1&0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}0&1\\0&1\end{bmatrix}$ 在基 $E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}$ 下的坐标依次为:

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&1&1&0\\1&0&0&1\end{pmatrix}\begin{matrix}\times(-1)\\ \times(-1)\\ \\ \\ \end{matrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&1&-1\\0&0&-1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

由此可见 $\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}1&0\\1&0\end{bmatrix}$ 是 $\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}1&0\\1&0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}0&1\\0&1\end{bmatrix}$ 的一个极大无关组.

因而 $\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}1&0\\1&0\end{bmatrix}$ 是 V_1+V_2 的一组基.

(2) $A\in V_1\cap V_2\Leftrightarrow\exists k_1,k_2,k_3,k_4$ 使得 $A=\begin{bmatrix}k_1&k_2\\k_2&k_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}k_3&k_4\\k_3&k_4\end{bmatrix}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}k_1=k_3,\\k_2=k_4,\\k_2=k_3,\\k_1=k_4,\end{cases}\text{该方程组的通解为}\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\k_3\\k_3\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

可见 $\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}$ 是 $V_1\cap V_2$ 的一组基.

8. 设 $V_1=\{A\mid A^{\mathrm{T}}=A, A\in\mathbb{C}^{n\times n}\}$, $V_2=\{A\mid A^{\mathrm{T}}=-A, A\in\mathbb{C}^{n\times n}\}$, 证明: $\mathbb{C}^{n\times n}=V_1\oplus V_2$.

证明: 对于任意的 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$, 令 $B=\frac{1}{2}(A+A^{\mathrm{T}})$, $C=\frac{1}{2}(A-A^{\mathrm{T}})$,

则 $B^{\mathrm{T}}=B$, $C^{\mathrm{T}}=-C$, 即 $B\in V_1$, $C\in V_2$,

于是有 $A=B+C\in V_1+V_2$.

因此 $\mathbb{C}^{n\times n}\subseteq V_1+V_2$, 进而有 $\mathbb{C}^{n\times n}=V_1+V_2$.

另一方面, 若 $A\in V_1\cap V_2$, 则 $A=A^{\mathrm{T}}=-A$, 因而 $A=O$. 可见 $V_1\cap V_2=\{O\}$.

综上所述, $\mathbb{C}^{n\times n}=V_1\oplus V_2$.

9. 设 $V(\mathbb{R})$ 为一切实连续函数所构成的线性空间, 作 $V(\mathbb{R})$ 的子空间:

$$V_1=\{f(x)\mid f(-x)=f(x)\},\ V_2=\{f(x)\mid f(-x)=-f(x)\},$$

证明: $V=V_1\oplus V_2$.

证明: 对于任意的 $f(x)\in V$, 令 $g(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]$, $h(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$,

则 $g(-x)=g(x)$, $h(-x)=-h(x)$, 即 $g(x)\in V_1$, $h(x)\in V_2$,

于是有 $f(x)=g(x)+h(x)\in V_1+V_2$.

因此 $V\subseteq V_1+V_2$, 进而有 $V=V_1+V_2$.

另一方面, 若 $f(x)\in V_1\cap V_2$, 则 $f(x)=f(-x)=-f(x)$, 因而 $f(x)=0$.

可见 $V_1\cap V_2=\{0\}$.

综上所述, $V=V_1\oplus V_2$.

10. 设 $V_1=\{(x_1,\ldots,x_n)\mid x_1+\ldots+x_n=0\}$, $V_2=\{(x_1,\ldots,x_n)\mid x_1=\ldots=x_n\}$, 证明: $\mathbb{C}^n=V_1\oplus V_2$.

证明: 对于任意的 $\alpha=(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{C}^n$,

令 $x=x_1+\ldots+x_n$, $\beta=(x_1-x,\ldots,x_n-x)$, $\gamma=(x,\ldots,x)$,

则 $\beta\in V_1$, $\gamma\in V_2$, 而且 $\alpha=\beta+\gamma\in V_1+V_2$.

因此 $V\subseteq V_1+V_2$, 进而有 $V=V_1+V_2$.

另一方面, 若 $\alpha=(x_1,\ldots,x_n)\in V_1\cap V_2$,

则 $nx_1=nx_2=\ldots=nx_n=x_1+\ldots+x_n=0$, 因而 $x_1=\ldots=x_n=0$, 即 $\alpha=(x_1,\ldots,x_n)=0$.

可见 $V_1\cap V_2=\{0\}$.

综上所述, $V=V_1\oplus V_2$.

证明：若 $\alpha=(x_1, \ldots, x_n) \in V_1 \cap V_2$，

则 $nx_1 = nx_2 = \ldots = nx_n = x_1 + \ldots + x_n = 0$，因而 $x_1 = \ldots = x_n = 0$，即 $\alpha = (x_1, \ldots, x_n) = 0$.

可见 $V_1 \cap V_2 = \{0\}$.

故 $V_1 + V_2 = V_1 \oplus V_2$.

另一方面，线性方程组 $x_1 + \ldots + x_n = 0$ 的一个基础解系为

$$\alpha_1 = (1, -1, 0, \ldots, 0),\ \alpha_2 = (1, 0, -1, \ldots, 0), \ldots, \alpha_{n-1} = (1, 0, \ldots, 0, -1),$$

可见 $\dim V_1 = n-1$.

V_2 的一组基为 $\alpha_n = (1, 1, \ldots, 1)$，故 $\dim V_2 = 1$.

于是 $\dim(V_1 \oplus V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 = n = \dim \mathbb{C}^n$.

因此 $V = V_1 \oplus V_2$.

证明：若 $\alpha=(x_1, \ldots, x_n) \in V_1 \cap V_2$，

则 $nx_1 = nx_2 = \ldots = nx_n = x_1 + \ldots + x_n = 0$，因而 $x_1 = \ldots = x_n = 0$，即 $\alpha = (x_1, \ldots, x_n) = 0$.

可见 $V_1 \cap V_2 = \{0\}$.

故 $V_1 + V_2 = V_1 \oplus V_2$.

另一方面，线性方程组 $x_1 + \ldots + x_n = 0$ 的一个基础解系为

$$\alpha_1 = (1, -1, 0, \ldots, 0),\ \alpha_2 = (1, 0, -1, \ldots, 0), \ldots, \alpha_{n-1} = (1, 0, \ldots, 0, -1),$$

即 V_1 的一组基为 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$.

V_2 的一组基为 $\alpha_n = (1, 1, \ldots, 1)$.

而 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}, \alpha_n$ 线性无关，

故 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}, \alpha_n$ 构成 $\mathbb{C}^n$ 的一组基.

于是 $\mathbb{C}^n = \mathrm{span}\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}, \alpha_n\} = V_1 + V_2 = V_1 \oplus V_2$.

11. 设 $A, B \in F^{n\times n}$，且 $AB = O, B^2 = B, V_1 = \{X \in F^n \mid AX = 0\}, V_2 = \{X \in F^n \mid BX = 0\}$.

(1)证明：$F^n = V_1 + V_2$；

证明：对于任意的 $X \in F^n$，令 $Y = BX, Z = X - BX$，

则 $AY = ABX = OX = 0, BZ = B(X-BX) = BX - B^2X = BX - BX = 0$，

可见 $Y \in V_1, Z \in V_2, X = BX + (X - BX) = Y + Z \in V_1 + V_2$.

因此，$F^n \subseteq V_1 + V_2 \subseteq F^n$，进而有 $F^n = V_1 + V_2$.

(2)证明：$F^n = V_1 \oplus V_2 \Leftrightarrow r(A) + r(B) = n$.

证明：($\Rightarrow$)若 $F^n = V_1 \oplus V_2$，则 $\dim V_1 + \dim V_2 = n$，其中 $\dim V_1 = n - r(A), \dim V_2 = n - r(B)$，

由此可得 $n - r(A) + n - r(B) = n$，故 $r(A) + r(B) = n$.

($\Leftarrow$)设 $r(A) + r(B) = n$，则 $r(B) = n - r(A)$.

令 $B = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$，且 $\beta_{j_1}, \beta_{j_2}, \ldots, \beta_{j_{n-r(A)}}$ 为 $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ 的极大无关组.

由 $AB = O$ 可知 $\beta_{j_1}, \beta_{j_2}, \ldots, \beta_{j_{n-r(A)}}$ 为 V_1 的一组基，

因而 $V_1 = \mathrm{span}\{\beta_{j_1}, \beta_{j_2}, \ldots, \beta_{j_{n-r(A)}}\} = \mathrm{span}\{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n\} = R(B)$.

于是对于任意的 $X \in V_1 \cap V_2$，存在 $Y \in F^n$ 使得 $X = BY$，且 $BX = 0$，

故 $X = BY = B^2Y = B(BY) = BX = 0$.

可见 $V_1 \cap V_2 = \{0\}$，结合(1)可得 $F^n = V_1 \oplus V_2$.

12. 已知 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，分别求 $R(A)$ 及 $K(A)$ 的一组基.

解：
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \times(-3) & \times(-1) \end{matrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times(-1) \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

由此可见 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ 是 A 的列向量组的一个极大无关组，

因而 α_1, α_2 为 $R(A)$ 的一组基.

另一方面，$AX = 0$ 经初等行变换化为 $\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 0, \\ x_2 + x_3 = 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} x_1 = -2x_3, \\ x_2 = -x_3, \end{cases}$

由此可得 $AX = 0$ 的一个基础解系 $\xi = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$，

因而 ξ 为 $K(A)$ 的一组基.

13. 在 $F^{2\times2}$ 中定义线性变换 $f(X) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} X, \forall X \in F^{2\times2}$，分别求 f 在基 $\{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$ 与基 $\{E_{11}, E_{21}, E_{12}, E_{22}\}$ 下的矩阵.

解：$f(E_{11}) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} E_{11} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix} = aE_{11} + 0E_{12} + cE_{21} + 0E_{22}$,

$f(E_{12}) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} E_{12} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{bmatrix} = 0E_{11} + aE_{12} + 0E_{21} + cE_{22}$,

$f(E_{21}) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} E_{21} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & 0 \\ d & 0 \end{bmatrix} = bE_{11} + 0E_{12} + dE_{21} + 0E_{22}$,

$f(E_{22}) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} E_{22} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{bmatrix} = 0E_{11} + bE_{12} + 0E_{21} + dE_{22}$,

可见 f 在基 $\{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$ 下的矩阵为 $\begin{bmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{bmatrix}$.

$f(E_{11}) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} E_{11} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix} = aE_{11} + cE_{21} + 0E_{12} + 0E_{22}$,

$f(E_{21}) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} E_{21} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & 0 \\ d & 0 \end{bmatrix} = bE_{11} + dE_{21} + 0E_{12} + 0E_{22}$,

$f(E_{12}) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} E_{12} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{bmatrix} = 0E_{11} + 0E_{21} + aE_{12} + cE_{22}$,

$f(E_{22}) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} E_{22} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{bmatrix} = 0E_{11} + 0E_{21} + bE_{12} + dE_{22}$,

可见 f 在基 $\{E_{11}, E_{21}, E_{12}, E_{22}\}$ 下的矩阵为 $\begin{bmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & c & d \end{bmatrix}$.

注：从基 $\{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$ 到基 $\{E_{11}, E_{21}, E_{12}, E_{22}\}$ 的过渡矩阵为 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

故 f 在基 $\{E_{11}, E_{21}, E_{12}, E_{22}\}$ 下的矩阵为

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}a&0&b&0\\0&a&0&b\\c&0&d&0\\0&c&0&d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a&b&0&0\\c&d&0&0\\0&0&a&b\\0&0&c&d\end{bmatrix}.$$

14. 设线性变换 f 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 下的矩阵为 $A=(a_{ij})_{3\times3}$.

(1)求 f 在基 $\varepsilon_3, \varepsilon_2, \varepsilon_1$ 下的矩阵;

解: 从基 $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ 到基 $\{\varepsilon_3, \varepsilon_2, \varepsilon_1\}$ 的过渡矩阵为 $\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$,

故 f 在基 $\{\varepsilon_3, \varepsilon_2, \varepsilon_1\}$ 下的矩阵为 $\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{33}&a_{32}&a_{31}\\a_{23}&a_{22}&a_{21}\\a_{13}&a_{12}&a_{11}\end{bmatrix}$.

(2)求 f 在基 $\varepsilon_1+k\varepsilon_2, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 下的矩阵.

解: 从基 $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ 到基 $\{\varepsilon_1+k\varepsilon_2, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ 的过渡矩阵为 $\begin{bmatrix}1&0&0\\k&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$,

故 f 在基 $\{\varepsilon_1+k\varepsilon_2, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ 下的矩阵为

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\k&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\k&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}+ka_{12}&a_{12}&a_{13}\\-ka_{11}+a_{21}-k^2a_{12}+ka_{22}&-ka_{12}+a_{22}&-ka_{13}+a_{23}\\a_{31}+ka_{32}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}.$$

15. 证明下列映射是线性映射, 并自选基偶, 求线性映射的矩阵.

(1) $f(A)=\mathrm{tr}A,\ \forall A\in\mathbb{R}^{n\times n}, f:\mathbb{R}^{n\times n}\to\mathbb{R}$;

证明: $\forall A, B\in\mathbb{R}^{n\times n}, k\in\mathbb{R}$, 有

$$f(A+B)=\mathrm{tr}(A+B)=\mathrm{tr}A+\mathrm{tr}B=f(A)+f(B),$$
$$f(kA)=\mathrm{tr}(kA)=k\,\mathrm{tr}A=kf(A),$$

故 f 是线性映射.

取 $\mathbb{R}^{n\times n}$ 的一组基: $E_{11}, E_{12}, \dots, E_{1n}, E_{21}, E_{22}, \dots, E_{2n}, \dots, E_{n1}, E_{n2}, \dots, E_{nn}$,

$\mathbb{R}$ 的一组基: 1,

则 $f(E_{11})=1, f(E_{12})=0, \dots, f(E_{1n})=0, f(E_{21})=0, f(E_{22})=1, \dots, f(E_{2n})=0$,

$\dots, f(E_{n1})=0, f(E_{n2})=0, \dots, f(E_{nn})=1$,

可见 f 在基偶 $\{E_{11}, E_{12}, \dots, E_{1n}, E_{21}, E_{22}, \dots, E_{2n}, \dots, E_{n1}, E_{n2}, \dots, E_{nn}\}$, $\{1\}$ 下的矩阵为

$(1, 0, \dots, 0, 0, 1, \dots, 0, \dots, 0, 0, \dots, 1)^{\mathrm{T}}$.

(2) $\mathbb{R}[x]_3=\{a_0+a_1x+a_2x^2 \mid \forall a_i\in\mathbb{R}\}$, $h(x,t)=x^2+tx$, 且

$$f[p(x)]=\int_0^1 p(t)h(x,t)\mathrm{d}t \quad (\forall p(x)\in\mathbb{R}[x]_3).$$

证明: 设 $p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2\in\mathbb{R}[x]_3$, 则

$$\begin{aligned}f[p(x)]&=\int_0^1(a_0+a_1t+a_2t^2)(x^2+tx)\mathrm{d}t\\&=\int_0^1[a_0x^2+(a_0x+a_1x^2)t+(a_1x+a_2x^2)t^2+a_2xt^3]\mathrm{d}t\\&=a_0x^2+\frac{1}{2}(a_0x+a_1x^2)+\frac{1}{3}(a_1x+a_2x^2)+\frac{1}{4}a_2x\\&=(\frac{1}{2}a_0+\frac{1}{3}a_1+\frac{1}{4}a_2)x+(a_0+\frac{1}{2}a_1+\frac{1}{3}a_2)x^2\in\mathbb{R}[x]_3.\end{aligned}$$

$\forall p(x), q(x)\in\mathbb{R}[x]_3, k\in\mathbb{R}$, 有

$$\begin{aligned}f[p(x)+q(x)]&=\int_0^1[p(t)+q(t)]h(x,t)\mathrm{d}t\\&=\int_0^1 p(t)h(x,t)\mathrm{d}t+\int_0^1 q(t)h(x,t)\mathrm{d}t=f[p(x)]+f[q(x)],\end{aligned}$$

$$f[kp(x)]=\int_0^1 kp(t)h(x,t)\mathrm{d}t=k\int_0^1 p(t)h(x,t)\mathrm{d}t=kf[p(x)],$$

故 f 是线性映射.

取 $\mathbb{R}[x]_3$ 的一组基: $1, x, x^2$, 则

$$f(1)=\frac{1}{2}x+x^2,\quad f(x)=\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}x^2,\quad f(x^2)=\frac{1}{4}x+\frac{1}{3}x^2,$$

可见 $f:\mathbb{R}[x]_3\to\mathbb{R}[x]_3$ 在基 $\{1, x, x^2\}$ 下的矩阵为 $\begin{pmatrix}0&0&0\\1/2&1/3&1/4\\1&1/2&1/3\end{pmatrix}$.

16. 分别求第 15 题中 f 的值域及核的一组基.

解: (1)对于任意的 $a\in\mathbb{R}$, 存在 $aE_{11}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 使得 $f(aE_{11})=\mathrm{tr}(aE_{11})=a$,

可见 f 为满射, 即 $R(f)=\mathbb{R}$, 它的一组基为 1.

对于任意的 $A=(a_{ij})_{n\times n}\in\mathbb{R}^{n\times n}$, 有 $A=(a_{ij})_{n\times n}=\sum\limits_{1\le i,j\le n}a_{ij}E_{ij}$ 且

$A\in K(f)\Leftrightarrow \mathrm{tr}(A)=f(A)=0\Leftrightarrow a_{11}+a_{22}+\dots+a_{nn}=0$.

可见对于任意的 $1\le i\ne j\le n, E_{ij}\in K(f)$,

同时有 $E_{11}-E_{22}, E_{11}-E_{33}, \dots, E_{11}-E_{nn}\in K(f)$,

而且 $E_{ij}\ (1\le i\ne j\le n), E_{11}-E_{22}, E_{11}-E_{33}, \dots, E_{11}-E_{nn}$ 这 n^2-1 个矩阵线性无关.

又因为 $\dim R(f)+\dim K(f)=\dim\mathbb{R}^{n\times n}=n^2$, $\dim R(f)=\dim\mathbb{R}=1$,

所以 $\dim K(f)=n^2-1$,

可见 $E_{ij}\ (1\le i\ne j\le n), E_{11}-E_{22}, E_{11}-E_{33}, \dots, E_{11}-E_{nn}$ 是 $K(f)$ 的一组基.

(2) $A=\begin{pmatrix}0&0&0\\1/2&1/3&1/4\\1&1/2&1/3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1/2&1/3\\1/2&1/3&1/4\\0&0&0\end{pmatrix}\times(-1/2)\to\begin{pmatrix}1&1/2&1/3\\0&1/12&1/12\\0&0&0\end{pmatrix}\times12$

$\to\begin{pmatrix}1&1/2&1/3\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}\times(-1/2)\to\begin{pmatrix}1&0&-1/6\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$.

由此可见 $\begin{pmatrix}0\\1/2\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\1/3\\1/2\end{pmatrix}$ 为 A 的列向量组的一个极大无关组,

因而 $\frac{1}{2}x+x^2$, $\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}x^2$ 为 $R(f)$ 的一组基.

另一方面, $AX=0$ 的一个基础解系为 $X=(1/6, -1, 1)^{\mathrm{T}}$.

由此可得 $\frac{1}{6}-x+x^2$ 为 $K(f)$ 的一组基.

17. 设 $f\in\mathrm{Hom}(V, V)$.

(1)证明: f 是单射 $\Leftrightarrow K(f)=\{0\}$;

证明: ($\Rightarrow$)设 f 是单射, 则对于任意的 $\alpha\in K(f)$, 由 $f(\alpha)=0=f(0)$ 得 $\alpha=0$,

故 $K(f)\subseteq\{0\}$, 进而有 $K(f)=\{0\}$.

($\Leftarrow$)设 $K(f)=\{0\}$, 则对于任意的 $\alpha, \beta\in V$,

由 $f(\alpha)=f(\beta)$ 可得 $f(\alpha-\beta)=f(\alpha)-f(\beta)=0$,

故$\alpha-\beta\in K(f)=\{0\}$,

从而有$\alpha-\beta=0$, 即$\alpha=\beta$.

可见f是单射.

(2)若 $\dim V=n$, 证明:f是单射⇔f是满射⇔f可逆.

证明: 若 $\dim V=n$, 则 $\dim R(f)+\dim K(f)=\dim V=n$.

① 由(1)得f是单射⇔ $K(f)=\{0\}\Leftrightarrow \dim K(f)=0\Leftrightarrow \dim R(f)=n\Leftrightarrow f$是满射.

② 设f是单射, 则由①可得f是满射, 进而得f可逆.

反之, 设f可逆, 则f是单射.

所以f是单射⇔f可逆.

18. 设$f\in \mathrm{Hom}(V,V)$, $\dim V=n$, 且$f^2=f$.

证明:f的矩阵必相似于$\begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O\end{bmatrix}_{n\times n}$, 其中 $r=\dim R(f)$.

$=R(f)$ $=\ker f$

证明: 令 $V_1=\{\alpha\in V\mid f(\alpha)=\alpha\}$, $V_2=\{\alpha\in V\mid f(\alpha)=0\}$, 则

(1) $V_1, V_2\le V$. 事实上,

① $\alpha,\beta\in V_1, k,l\in F\Rightarrow f(k\alpha+l\beta)=kf(\alpha)+lf(\beta)=k\alpha+l\beta\Rightarrow k\alpha+l\beta\in V_1$,

② $\alpha,\beta\in V_2, k,l\in F\Rightarrow f(k\alpha+l\beta)=kf(\alpha)+lf(\beta)=k0+l0=0\Rightarrow k\alpha+l\beta\in V_2$.

(2) $V_1\cap V_2=\{0\}$. 事实上,

$\alpha\in V_1\cap V_2\Rightarrow \alpha=f(\alpha)=0$.

(3) $V=V_1+V_2$. 事实上,

对于任意的 $\alpha\in V$, 令$\beta=f(\alpha)$, $\gamma=\alpha-f(\alpha)$, 则由$f^2=f$可得

$f(\beta)=f^2(\alpha)=f(\alpha)=\beta$, $f(\gamma)=f(\alpha-f(\alpha))=f(\alpha)-f^2(\alpha)=f(\alpha)-f(\alpha)=0$,

故 $\beta\in V_1$, $\gamma\in V_2$, $\alpha=\beta+\gamma\in V_1+V_2$.

可见 $V_1+V_2\subseteq V\subseteq V_1+V_2$.

因而 $V=V_1+V_2=V_1\oplus V_2$.

$V=V_1\oplus V_2$
$=R(f)\oplus K(f)$

(4)由(2)和(3)可得 $V=V_1\oplus V_2$.

(5) $V_1=R(f)$. 事实上,

① $\alpha\in V_1\Rightarrow \alpha=f(\alpha)\in R(f)$.

$\alpha=f(\beta)$
$\therefore f(\alpha)=f(f(\beta))=f(\beta)=\alpha$.

② $\alpha\in R(f)\Rightarrow$ 存在$\beta\in V$使得 $\alpha=f(\beta)\Rightarrow f(\alpha)=f^2(\beta)=f(\beta)=\alpha\Rightarrow \alpha\in V_1$.

(6)设 V_1 的一组基为 $\alpha_1,\ldots,\alpha_r$, V_2的一组基为 $\beta_{r+1},\ldots,\beta_n$,

则f 在 V 的基 $\alpha_1,\ldots,\alpha_r,\beta_{r+1},\ldots,\beta_n$下的矩阵为$\begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O\end{bmatrix}_{n\times n}$,

其中 $r=\dim V_1=\dim R(f)$.

由于线性变换在不同的基下的矩阵是相似的,

所以f的矩阵必相似于$\begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O\end{bmatrix}_{n\times n}$, 其中 $r=\dim V_1=\dim R(f)$.

19. 设 V_1为 n 维线性空间 V的 r 维子空间, 又 $V=V_1\oplus V_2$, 于是对于任意的 $\alpha\in V$, 存在唯一的 $\alpha_i\in V_i\,(i=1,2)$, 使得 $\alpha=\alpha_1+\alpha_2$. 定义$f(\alpha)=a\alpha_1+b\alpha_2\ (\forall\alpha\in V)$, 证明:$f$为线性变换, 且$f$的矩阵必相似于$\begin{bmatrix} aI_r & O \\ O & bI_{n-r}\end{bmatrix}$.

证明: (1)设 $\alpha=\alpha_1+\alpha_2$, $\beta=\beta_1+\beta_2$, $\alpha_i,\beta_i\in V_i\,(i=1,2)$, $k\in F$, 则

$$f(\alpha+\beta)=f((\alpha_1+\beta_1)+(\alpha_2+\beta_2))=a(\alpha_1+\beta_1)+b(\alpha_2+\beta_2)$$
$$=(a\alpha_1+b\alpha_2)+(a\beta_1+b\beta_2)=f(\alpha)+f(\beta),$$
$$f(k\alpha)=f(k\alpha_1+k\alpha_2)=ak\alpha_1+bk\alpha_2=k(a\alpha_1+b\alpha_2)=kf(\alpha).$$

故f为线性变换.

(2)设 V_1的一组基为 $\alpha_1,\ldots,\alpha_r$, V_2的一组基为 $\beta_{r+1},\ldots,\beta_n$,

则f 在 V 的基 $\alpha_1,\ldots,\alpha_r,\beta_{r+1},\ldots,\beta_n$下的矩阵为$\begin{bmatrix} aI_r & O \\ O & bI_{n-r}\end{bmatrix}$,

由于线性变换在不同的基下的矩阵是相似的,

所以f的矩阵必相似于$\begin{bmatrix} aI_r & O \\ O & bI_{n-r}\end{bmatrix}$.

20. 已知线性变换f与g满足$f^2=f$, $g^2=g$, 证明:

(1)f与g有相同的值域⇔$fg=g$, $gf=f$.

证明: (⇒)设f与g有相同的值域, 则对于任意的$\alpha\in V$, 有 $g(\alpha)\in R(g)=R(f)$,

故存在$\beta\in V$使得 $g(\alpha)=f(\beta)=f^2(\beta)=f[f(\beta)]=f[g(\alpha)]=fg(\alpha)$.

常见错误:
① $f(\alpha)=g(\alpha)$
② $\exists\alpha,\beta\in V$ s.t. $f(\alpha)=g(\beta)$
③ $f(\alpha)=gf(\alpha)$.

可见$fg=g$.

互换f与g可得$gf=f$.

(⇐)设$fg=g$, $gf=f$, 则对于任意的$\alpha\in R(f)$, 存在$\beta\in V$使得 $\alpha=f(\beta)$,

于是 $\alpha=f(\beta)=gf(\beta)=g[f(\beta)]\in R(g)$.

可见 $R(f)\subseteq R(g)$.

互换f与g可得 $R(g)\subseteq R(f)$. 因而 $R(f)=R(g)$.

(2)f与g有相同的核⇔$fg=f$, $gf=g$.

证明: (⇒)设f与g有相同的核, 则对于任意的$\alpha\in V$,

由$f(\alpha-f(\alpha))=f(\alpha)-f^2(\alpha)=f(\alpha)-f(\alpha)=0$ 可得 $\alpha-f(\alpha)\in K(f)=K(g)$,

故 $g(\alpha)-gf(\alpha)=g(\alpha-f(\alpha))=0$, 即 $g(\alpha)=gf(\alpha)$.

可见 $gf=g$.

互换f与g可得$fg=f$.

(⇐)设$fg=f$, $gf=g$, 则对于任意的$\alpha\in K(f)$,

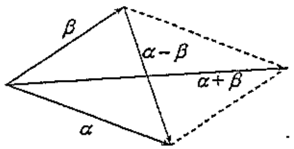
有 $g(\alpha)=gf(\alpha)=g[f(\alpha)]=g(0)=0$, 即$\alpha\in K(g)$,

可见 $K(f)\subseteq K(g)$.

互换f与g可得 $K(g)\subseteq K(f)$. 因而 $K(f)=K(g)$.

1. 证明内积空间中的“平行四边形定理”：

$$\|\alpha+\beta\|^2+\|\alpha-\beta\|^2=2(\|\alpha\|^2+\|\beta\|^2).$$



证明：$\|\alpha+\beta\|^2+\|\alpha-\beta\|^2$

$=\langle\alpha+\beta,\alpha+\beta\rangle+\langle\alpha-\beta,\alpha-\beta\rangle$

$=\langle\alpha,\alpha\rangle+\langle\alpha,\beta\rangle+\langle\beta,\alpha\rangle+\langle\beta,\beta\rangle$

$\quad+\langle\alpha,\alpha\rangle-\langle\alpha,\beta\rangle-\langle\beta,\alpha\rangle+\langle\beta,\beta\rangle$

$=2\langle\alpha,\alpha\rangle+2\langle\beta,\beta\rangle=2(\|\alpha\|^2+\|\beta\|^2).$

2. 证明欧式空间的“勾股定理”：$\alpha\perp\beta\Leftrightarrow\|\alpha+\beta\|^2=\|\alpha\|^2+\|\beta\|^2$，并讨论该命题在酉空间中是否成立.

证明：因为$\|\alpha+\beta\|^2=\langle\alpha+\beta,\alpha+\beta\rangle=\langle\alpha,\alpha\rangle+\langle\alpha,\beta\rangle+\langle\beta,\alpha\rangle+\langle\beta,\beta\rangle=\|\alpha\|^2+2\langle\alpha,\beta\rangle+\|\beta\|^2$，

所以$\alpha\perp\beta\Leftrightarrow\langle\alpha,\beta\rangle=0\Leftrightarrow\|\alpha+\beta\|^2=\|\alpha\|^2+\|\beta\|^2$.

有同学考虑了酉空间的情况. 我认为酉空间中也成立.

在酉空间$\mathbb{C}$中，$\langle\alpha,\beta\rangle=\bar{\beta}\alpha$.

取$\alpha=1,\beta=\mathrm{i}$，则$\langle\alpha,\beta\rangle=\langle 1,\mathrm{i}\rangle=-\mathrm{i},\langle\beta,\alpha\rangle=\langle\mathrm{i},1\rangle=\mathrm{i}$，

$$\|\alpha+\beta\|^2=\|\alpha\|^2+\langle\alpha,\beta\rangle+\langle\beta,\alpha\rangle+\|\beta\|^2=\|\alpha\|^2+\|\beta\|^2,$$

但$\langle\alpha,\beta\rangle=\langle 1,\mathrm{i}\rangle=-\mathrm{i}\neq 0$，即$\alpha\perp\beta$不成立.

3. 设$f_1(x),f_2(x),\ldots,f_n(x)$是$[a,b]$上的实连续函数，证明：

$$\left|\int_a^b f_i(x)f_j(x)\mathrm{d}x\right|\le\max_k\int_a^b f_k^2(x)\mathrm{d}x\quad(i,j=1,2,\ldots,n).$$

证明：$\left|\int_a^b f_i(x)f_j(x)\mathrm{d}x\right|\le\int_a^b|f_i(x)f_j(x)|\mathrm{d}x\le\frac{1}{2}\int_a^b[f_i^2(x)+f_j^2(x)]\mathrm{d}x\le\max_k\int_a^b f_k^2(x)\mathrm{d}x.$

4. 设$A=\begin{bmatrix}0&1&2\\-1&1&2\\1&1&-1\end{bmatrix}$，把$A$的列作为欧式空间$\mathbb{R}^3$的一组基，按Schmidt正交化方法求$\mathbb{R}^3$的一组标准正交基，由此求出正交阵$Q$及上三角阵$R$，使$A=QR$.

有同学不太理解QR分解的概念.

解：令$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，其中$\alpha_1=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}$.

令$\beta_1=\alpha_1,\beta_2=\alpha_2-\frac{\langle\alpha_2,\beta_1\rangle}{\langle\beta_1,\beta_1\rangle}\beta_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}-\frac{0}{2}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，

$\beta_3=\alpha_3-\frac{\langle\alpha_3,\beta_1\rangle}{\langle\beta_1,\beta_1\rangle}\beta_1-\frac{\langle\alpha_3,\beta_2\rangle}{\langle\beta_2,\beta_2\rangle}\beta_2=\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}+\frac{3}{2}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1/2\\-1/2\end{pmatrix}$，

$\eta_1=\frac{\beta_1}{\|\beta_1\|}=\begin{pmatrix}0\\-1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix},\eta_2=\frac{\beta_2}{\|\beta_2\|}=\begin{pmatrix}1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\end{pmatrix},\eta_3=\frac{\beta_3}{\|\beta_3\|}=\begin{pmatrix}2/\sqrt{6}\\-1/\sqrt{6}\\-1/\sqrt{6}\end{pmatrix}$，

于是η_1,η_2,η_3为$\mathbb{R}^3$的一组标准正交基，

$$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)\begin{bmatrix}\|\beta_1\|&\|\beta_1\|\frac{\langle\alpha_2,\beta_1\rangle}{\langle\beta_1,\beta_1\rangle}&\|\beta_1\|\frac{\langle\alpha_3,\beta_1\rangle}{\langle\beta_1,\beta_1\rangle}\\0&\|\beta_2\|&\|\beta_2\|\frac{\langle\alpha_3,\beta_2\rangle}{\langle\beta_2,\beta_2\rangle}\\0&0&\|\beta_3\|\end{bmatrix}=QR,$$

其中$Q=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=\begin{bmatrix}0&1/\sqrt{3}&2/\sqrt{6}\\-1/\sqrt{2}&1/\sqrt{3}&-1/\sqrt{6}\\1/\sqrt{2}&1/\sqrt{3}&-1/\sqrt{6}\end{bmatrix}$为正交阵，

$R=\begin{bmatrix}\|\beta_1\|&\|\beta_1\|\frac{\langle\alpha_2,\beta_1\rangle}{\langle\beta_1,\beta_1\rangle}&\|\beta_1\|\frac{\langle\alpha_3,\beta_1\rangle}{\langle\beta_1,\beta_1\rangle}\\0&\|\beta_2\|&\|\beta_2\|\frac{\langle\alpha_3,\beta_2\rangle}{\langle\beta_2,\beta_2\rangle}\\0&0&\|\beta_3\|\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sqrt{2}&0&-\frac{3\sqrt{2}}{2}\\0&\sqrt{3}&\sqrt{3}\\0&0&\sqrt{6}/2\end{bmatrix}$为上三角阵.

5. 已知$W=\left\{(x_1,x_2,\cdots,x_5)^{\mathrm{T}}\,\middle|\,\begin{bmatrix}1&2&3&4&5\\0&1&2&3&4\end{bmatrix}(x_1,x_2,\cdots,x_5)^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\right\}$，求$W^{\perp}$的一组标准正交基.

解：令$A=\begin{bmatrix}1&2&3&4&5\\0&1&2&3&4\end{bmatrix}$，则$W=\mathrm{K}(A),W^{\perp}=\mathrm{K}(A)^{\perp}=\mathrm{R}(A^{\mathrm{H}})$，其中$A^{\mathrm{H}}=\begin{bmatrix}1&0\\2&1\\3&2\\4&3\\5&4\end{bmatrix}$.

令$A^{\mathrm{H}}=(\alpha_1,\alpha_2)$，则$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\\5\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$线性无关.

令$\beta_1=\alpha_1,\beta_2=\alpha_2-\frac{\langle\alpha_2,\beta_1\rangle}{\langle\beta_1,\beta_1\rangle}\beta_1=\begin{pmatrix}0\\1\\2\\3\\4\end{pmatrix}-\frac{8}{11}\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8/11\\-5/11\\-2/11\\1/11\\4/11\end{pmatrix}$，

有的标准化时出错

$\eta_1=\frac{\beta_1}{\|\beta_1\|}=(\frac{1}{\sqrt{55}},\frac{2}{\sqrt{55}},\frac{3}{\sqrt{55}},\frac{4}{\sqrt{55}},\frac{5}{\sqrt{55}})^{\mathrm{T}},\eta_2=\frac{\beta_2}{\|\beta_2\|}=(\frac{-8}{\sqrt{110}},\frac{-5}{\sqrt{110}},\frac{-2}{\sqrt{110}},\frac{1}{\sqrt{110}},\frac{4}{\sqrt{110}})^{\mathrm{T}}$，

于是η_1,η_2为$W^{\perp}$的一组标准正交基.

6. 设f是内积空间V上的变换，若$\langle f(\alpha),f(\beta)\rangle=\langle\alpha,\beta\rangle\quad(\forall\alpha,\beta\in V)$，证明$f$是线性变换，因而$f$是等距变换.

个别同学使用反证法推不出

证明：$\forall\alpha,\beta\in V,k\in F$，有

$\langle f(\alpha+\beta)-f(\alpha)-f(\beta),f(\alpha+\beta)-f(\alpha)-f(\beta)\rangle$

$=\langle f(\alpha+\beta),f(\alpha+\beta)\rangle-\langle f(\alpha+\beta),f(\alpha)\rangle-\langle f(\alpha+\beta),f(\beta)\rangle$

$\quad-\langle f(\alpha),f(\alpha+\beta)\rangle+\langle f(\alpha),f(\alpha)\rangle+\langle f(\alpha),f(\beta)\rangle$

$\quad-\langle f(\beta),f(\alpha+\beta)\rangle+\langle f(\beta),f(\alpha)\rangle+\langle f(\beta),f(\beta)\rangle$

$=\langle\alpha+\beta,\alpha+\beta\rangle-\langle\alpha+\beta,\alpha\rangle-\langle\alpha+\beta,\beta\rangle$

$\quad-\langle\alpha,\alpha+\beta\rangle+\langle\alpha,\alpha\rangle+\langle\alpha,\beta\rangle-\langle\beta,\alpha+\beta\rangle+\langle\beta,\alpha\rangle+\langle\beta,\beta\rangle$

$=\langle\alpha+\beta,\alpha+\beta\rangle-\langle\alpha+\beta,\alpha+\beta\rangle-\langle\alpha,\alpha+\beta\rangle+\langle\alpha,\alpha+\beta\rangle-\langle\beta,\alpha+\beta\rangle+\langle\beta,\alpha+\beta\rangle=0;$

$\langle f(k\alpha)-kf(\alpha),f(k\alpha)-kf(\alpha)\rangle$

$=\langle f(k\alpha),f(k\alpha)\rangle-\bar{k}\langle f(k\alpha),f(\alpha)\rangle-k\langle f(\alpha),f(k\alpha)\rangle+k\bar{k}\langle f(\alpha),f(\alpha)\rangle$

$=\langle k\alpha,k\alpha\rangle-\bar{k}\langle k\alpha,\alpha\rangle-k\langle\alpha,k\alpha\rangle+k\bar{k}\langle\alpha,\alpha\rangle$

$=k\bar{k}\langle\alpha,\alpha\rangle-k\bar{k}\langle\alpha,\alpha\rangle-k\bar{k}\langle\alpha,\alpha\rangle+k\bar{k}\langle\alpha,\alpha\rangle=0,$

故$f(\alpha+\beta)-f(\alpha)-f(\beta)=0,f(k\alpha)-kf(\alpha)=0$，即$f(\alpha+\beta)=f(\alpha)+f(\beta),f(k\alpha)=kf(\alpha)$，

可见f是线性变换，因而f是等距变换.

7. 设 V 为欧式空间, k 为实数, $f(\alpha)=\alpha-k\langle\alpha,\omega\rangle\omega$, $\forall\alpha\in V$, $\|\omega\|=1$, 求 f 是正交变换的充要条件.

☆ 要先证 f 是线性变换

不用管本证是"欧氏空间"

解: $\|f(\alpha)\|^2=\langle f(\alpha),f(\alpha)\rangle=\langle\alpha-k\langle\alpha,\omega\rangle\omega,\ \alpha-k\langle\alpha,\omega\rangle\omega\rangle$

$=\langle\alpha,\alpha\rangle-k\langle\alpha,\omega\rangle\langle\alpha,\omega\rangle-k\langle\alpha,\omega\rangle\langle\omega,\alpha\rangle+k^2\langle\alpha,\omega\rangle^2\langle\omega,\omega\rangle$

$=\langle\alpha,\alpha\rangle+(k^2-2k)\langle\alpha,\omega\rangle^2=\|\alpha\|^2+(k^2-2k)\langle\alpha,\omega\rangle^2$,

因此 f 是正交变换 $\Leftrightarrow\|f(\alpha)\|=\|\alpha\|,\forall\alpha\in V$

$\Leftrightarrow\|f(\alpha)\|^2=\|\alpha\|^2,\forall\alpha\in V$

$\Leftrightarrow(k^2-2k)\langle\alpha,\omega\rangle^2=0,\forall\alpha\in V$

$\Leftrightarrow k^2-2k=0\Leftrightarrow k=0$ 或 2.

8. 设 f 是内积空间 V 的等距变换, W 是 f 的 r 维不变子空间. 证明: $W^\perp$ 也是 f 的不变子空间.

证明: 因为 W 是 f 的 r 维不变子空间, 所以 $V=W\oplus W^\perp$.

又因为 f 是内积空间 V 的等距变换, 所以 $f|_W$ 是 W 的等距变换.

设 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r$ 为 W 的一组标准正交基,

则 $f|_W$ 在 $\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r\}$ 下的矩阵 A 为酉矩阵.

对于任意的 $\alpha\in W$, 令 $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r)X$,

则存在 $\beta=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r)A^HX\in W$,

使得 $f(\beta)=f|_W(\beta)=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r)AA^HX=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r)X=\alpha$.

于是对于任意的 $\gamma\in W^\perp$, 有 $\langle f(\gamma),\alpha\rangle=\langle f(\gamma),f(\beta)\rangle=\langle\gamma,\beta\rangle=0$.

由此可见 $f(\gamma)\in W^\perp$.

因而 $W^\perp$ 也是 f 的不变子空间.

那个同学做错.

9. 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}\in\mathbb{R}^{n\times n}$, 记 a_{ij} 的代数余子式为 A_{ij}. 证明: A 是正交阵的充要条件是

$$a_{ij}=(\det A)^{-1}A_{ij}\quad(i,j=1,2,\ldots,n).$$

证明: A 的伴随矩阵 $A^*=(A_{ij})^T$, 而且 $AA^*=(\det A)I$.

$(\Rightarrow)$ A 是正交阵 $\Rightarrow A^T=A^{-1}=(\det A)^{-1}A^*=(\det A)^{-1}(A_{ij})^T\Rightarrow A=(\det A)^{-1}(A_{ij})$

$\Rightarrow a_{ij}=(\det A)^{-1}A_{ij}\quad(i,j=1,2,\ldots,n)$.

$(\Leftarrow)$ $a_{ij}=(\det A)^{-1}A_{ij}\quad(i,j=1,2,\ldots,n)\Rightarrow A=(\det A)^{-1}(A_{ij})$

$\Rightarrow A^T=(\det A)^{-1}(A_{ij})^T=(\det A)^{-1}A^*=A^{-1}$

$\Rightarrow A$ 是正交阵.

常规证法为:

$|(A+B)^2|=|A^2+B^2+AB+BA|$

$\le|A|^2+|B|^2+2|AB|$

$=1+1-2=0$

10. 设 A,B 都是正交阵, 且 $\det A\det B=-1$, 证明 $\det(A+B)=0$.

证明: 因为 A,B 都是正交阵, 所以 $A^TA=I$, $B^TB=I$, 从而有

$\det(A+B)=\det(A^T+B^T)=\det(A^TBB^T+A^TAB^T)=\det A^T(B+A)B^T$

$=\det A^T\det(B+A)\det B^T=\det A\det(A+B)\det B=\det A\det B\det(A+B)$.

又因为 $\det A\det B=-1$, 所以 $\det(A+B)=-\det(A+B)$, 因而 $\det(A+B)=0$.

11. 证明: n 维欧式空间 V 中, 两两成"钝角"的向量不多于 $(n+1)$ 个.

证明: (1) $n=1$ 时, 设 α 为 V 的一组标准正交基.

假若 $\alpha_1=k_1\alpha$, $\alpha_2=k_2\alpha$, $\alpha_3=k_3\alpha$ 两两成"钝角",

则 $k_1k_2=k_1k_2\langle\alpha,\alpha\rangle=\langle k_1\alpha,k_2\alpha\rangle=\langle\alpha_1,\alpha_2\rangle<0$,

类似地, $k_1k_3=\langle\alpha_1,\alpha_3\rangle<0$, $k_2k_3=\langle\alpha_2,\alpha_3\rangle<0$,

于是 $k_1^2k_2^2k_3^2=(k_1k_2)(k_1k_3)(k_2k_3)<0$, 矛盾!

可见 V 中两两成"钝角"的向量不多于 2 个.

(2) 设 n 维欧式空间中, 两两成"钝角"的向量不多于 $(n+1)$ 个,

下面证明 $n+1$ 维欧式空间 V 中, 两两成"钝角"的向量不多于 $(n+2)$ 个.

假若 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{n+3}$ 是 V 中两两成"钝角"的向量,

则 $W=\mathrm{span}\{\alpha_{n+3}\}$ 为 V 的 1 维子空间, 于是 $V=W\oplus W^\perp$, 其中 $\dim W^\perp=n$.

令 $\alpha_i=k_i\alpha_{n+3}+\beta_i$, 其中 $k_i\in\mathbb{R}$, $\beta_i\in W^\perp$, $i=1,2,\ldots,n+2$,

则 $k_i\langle\alpha_{n+3},\alpha_{n+3}\rangle=\langle k_i\alpha_{n+3},\alpha_{n+3}\rangle=\langle k_i\alpha_{n+3},\alpha_{n+3}\rangle+\langle\beta_i,\alpha_{n+3}\rangle=\langle k_i\alpha_{n+3}+\beta_i,\alpha_{n+3}\rangle$

$=\langle\alpha_i,\alpha_{n+3}\rangle<0$,

而 $\langle\alpha_{n+3},\alpha_{n+3}\rangle>0$, 故 $k_i<0$, $i=1,2,\ldots,n+2$.

于是对于任意的 $1\le i\ne j\le n+2$, 有

$$\langle\alpha_i,\alpha_j\rangle=\langle k_i\alpha_{n+3}+\beta_i,\ k_j\alpha_{n+3}+\beta_j\rangle=k_ik_j\langle\alpha_{n+3},\alpha_{n+3}\rangle+\langle\beta_i,\beta_j\rangle,$$

$$\langle\beta_i,\beta_j\rangle=\langle\alpha_i,\alpha_j\rangle-k_ik_j\langle\alpha_{n+3},\alpha_{n+3}\rangle<0,$$

可见 $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_{n+2}$ 是 $W^\perp$ 中 $(n+2)$ 个两两成"钝角"的向量.

但根据归纳假设, n 维欧式空间 $W^\perp$ 中, 两两成"钝角"的向量不多于 $(n+1)$ 个.

此矛盾表明, $n+1$ 维欧式空间 V 中, 两两成"钝角"的向量不多于 $(n+2)$ 个.

由数学归纳法原理可知, 原命题对任意的 n 都成立.

12. 设 $\|\omega\|=1$, 证明镜像变换

$$H(X)=X-2\langle X,\omega\rangle\omega\quad(\forall X\in\mathbb{C}^n)$$

在基 $e_1,e_2,\ldots,e_n$ 下的矩阵为 $I-2\omega\omega^H$. 因此, 无论 ω 是怎样的单位向量, 总有

$$\det(I-2\omega\omega^H)=-1.$$

证明: 设 $\omega=(a_1,a_2,\ldots,a_n)^T\in\mathbb{C}^n$, 则

$$H(e_1)=e_1-2\langle e_1,\omega\rangle\omega=e_1-2\overline{a_1}\,\omega=(e_1,e_2,\ldots,e_n)\begin{pmatrix}1-2\overline{a_1}a_1\\-2\overline{a_1}a_2\\\vdots\\-2\overline{a_1}a_n\end{pmatrix},$$

$$H(e_2)=e_2-2\langle e_2,\omega\rangle\omega=e_2-2\overline{a_2}\,\omega=(e_1,e_2,\ldots,e_n)\begin{pmatrix}-2\overline{a_2}a_1\\1-2\overline{a_2}a_2\\\vdots\\-2\overline{a_2}a_n\end{pmatrix},$$

$\ldots$,

$$H(e_n)=e_n-2\langle e_n,\omega\rangle\omega=e_n-2\overline{a_n}\,\omega=(e_1,e_2,\ldots,e_n)\begin{pmatrix}-2\overline{a_n}a_1\\-2\overline{a_n}a_2\\\vdots\\1-2\overline{a_n}a_n\end{pmatrix},$$

右同学 证法不完整

可见镜像变换 $H(X)=X-2\langle X,\omega\rangle\omega\quad(\forall X\in\mathbb{C}^n)$ 在基 $e_1,e_2,\ldots,e_n$ 下的矩阵为

$$\begin{pmatrix}1-2\overline{a_1}a_1&-2\overline{a_2}a_1&\cdots&-2\overline{a_n}a_1\\-2\overline{a_1}a_2&1-2\overline{a_2}a_2&\cdots&-2\overline{a_n}a_2\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\-2\overline{a_1}a_n&-2\overline{a_2}a_n&\cdots&1-2\overline{a_n}a_n\end{pmatrix}=I-2\omega\omega^H.$$

又因为镜像变换在任意一组基下的矩阵都相似于 $\mathrm{diag}(-1,1,\ldots,1)$,

所以 $\det(I-2\omega\omega^H)=\det(\mathrm{diag}(-1,1,\ldots,1))=-1$.

1. 设 $A\in\mathbb{C}^{s\times n}, B\in\mathbb{C}^{n\times s}$，证明:

(1) $\mathrm{tr}AB=\mathrm{tr}BA$;

(2) $\mathrm{tr}(AB)^k=\mathrm{tr}(BA)^k$，其中 k 为任一正整数.

证明: (1)令 $A=(a_{ij})_{s\times n}, B=(a_{ij})_{n\times s}, AB=(c_{ij})_{s\times s}, BA=(d_{kl})_{n\times n}$,其中 $c_{ij}=\sum\limits_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$, $d_{kl}=\sum\limits_{j=1}^{s}b_{kj}a_{jl}$, 则

$$\mathrm{tr}AB=\sum_{i=1}^{s}c_{ii}=\sum_{i=1}^{s}\left(\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{ki}\right)=\sum_{i=1}^{s}\left(\sum_{k=1}^{n}b_{ki}a_{ik}\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{s}b_{ki}a_{ik}\right)=\sum_{k=1}^{n}d_{kk}=\mathrm{tr}BA.$$

(2)当 $k=1$ 时，由(1)可得.

当 $k>1$ 时, $(AB)^k=[(AB)^{k-1}A]B$, $(BA)^k=B[(AB)^{k-1}A]$，根据(1)可知

$\mathrm{tr}(AB)^k=\mathrm{tr}[(AB)^{k-1}A]B=\mathrm{tr}B[(AB)^{k-1}A]=\mathrm{tr}(BA)^k$.

2. 设 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$，存在正整数 k 使 $A^k=O$(称 A 为幂零阵). 证明:

(1) $\det A=0$.

(2) $\mathrm{tr}A=0$.

(3) $\det(I+A)=1$.

(4)若 $A\neq O$，则 A 不能相似于对角阵.

证明: (1) $(\det A)^k=\det(A^k)=\det O=0\Rightarrow\det A=0$.

(2)设 λ 为 A 的特征值，则 λ^k 为 A^k 的特征值，故由 $A^k=O$ 可得 $\lambda^k=0$，从而 $\lambda=0$.

因此 $\mathrm{tr}A=\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n=0$，其中 $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ 为 A 的全体特征值.

(3)对于任意的复数 λ 以及 n 维非零列向量 ξ，有

$$A\xi=\lambda\xi\Leftrightarrow(I+A)\xi=(1+\lambda)\xi.$$

由此可见，λ 为 A 的特征值 $\Leftrightarrow 1+\lambda$ 为 $I+A$ 的特征值.

由 $A^k=O$ 可得 A 的特征值全为 0，故 $I+A$ 的特征值全为 1，

因此 $\det(I+A)=\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n=1$，其中 $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ 为 $I+A$ 的全体特征值.

(4)由 $A^k=O$ 可得 A 的特征值全为 0.

假若 A 相似于对角阵 Λ，即存在可逆阵 P 使得 $P^{-1}AP=\Lambda$，

则 $\Lambda=O$，从而有 $A=P\Lambda P^{-1}=POP^{-1}=O$.

因此，若 $A\neq O$，则 A 不能相似于对角阵.

3. 设 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$，且 $\det A\neq0$，又 α,β 为已知的 n 维列向量，求方程 $f(\lambda)=\det(\lambda A-\alpha\beta^T)=0$ 的根.

解: 因为 $\det A\neq0$, $\det(\lambda A-\alpha\beta^T)=\det[(\lambda I-\alpha\beta^TA^{-1})A]=\det(\lambda I-\alpha\beta^TA^{-1})\det A$,

所以 $\det(\lambda A-\alpha\beta^T)=0\Leftrightarrow\det(\lambda I_n-\alpha\beta^TA^{-1})=0$.

又因为 α 和 β^TA^{-1} 分别为 $n\times1$ 和 $1\times n$ 矩阵，根据第 3.1 节的例 3(2)可得

$$\lambda\det(\lambda I_n-\alpha\beta^TA^{-1})=\lambda^n\det(\lambda-\beta^TA^{-1}\alpha)=\lambda^n(\lambda-\beta^TA^{-1}\alpha),$$

所以 $f(\lambda)=\det(\lambda I_n-\alpha\beta^TA^{-1})=\lambda^{n-1}(\lambda-\beta^TA^{-1}\alpha)$.

可见 $f(\lambda)=0$ 的根为: 0 ($n-1$ 重), $\lambda-\beta^TA^{-1}\alpha$.　　有同学答的结果未化简

4. 设 V 为 n 维内积空间, ω 为 V 中单位向量，作线性变换

$$f(\xi)=\xi-2\langle\xi,\omega\rangle\omega\quad(\forall\xi\in V),$$

求 f 的特征多项式，特征值及相应的特征子空间.

解: 将 ω 扩充为 V 的标准正交基 $\omega,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n$,

则 $f(\omega)=-\omega$，$f(\varepsilon_i)=\varepsilon_i\ (i=2,\ldots,n)$,

故 f 在这组基下的矩阵为 $A=\mathrm{diag}(-1,1,\ldots,1)$.

因而 f 的特征多项式为 $|\lambda I-A|=(\lambda+1)(\lambda-1)^{n-1}$.

f 的特征值为 -1, 1($n-1$ 重).

对于任意的 $\xi\in V$，设 ξ 在基 $\omega,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n$ 下的坐标为 $X=(x_1,x_2,\ldots,x_n)^T$，

则 $\xi=(\omega,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n)X$，$f(\xi)=(\omega,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n)AX$.

故 $\xi\in V_{-1}\Leftrightarrow f(\xi)=-\xi\Leftrightarrow AX=-X\Leftrightarrow(I+A)X=0\Leftrightarrow x_2=\ldots=x_n=0\Leftrightarrow\xi\in L(\omega)$.

可见 $V_{-1}=L(\omega)$.

类似地, $\xi\in V_1\Leftrightarrow f(\xi)=\xi\Leftrightarrow AX=X\Leftrightarrow(I-A)X=0\Leftrightarrow x_1=0\Leftrightarrow\xi\in L(\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n)$.

可见 $V_1=L(\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n)=L(\omega)^\perp$.

5. 设 $A=\begin{bmatrix}1&2&1\\2&1&1\\0&-4&-1\end{bmatrix}$，求 $A^{100}-3A^{25}$.

解: $C(\lambda)=|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-2&-1\\-2&\lambda-1&-1\\0&4&\lambda+1\end{vmatrix}\times(-1)=\begin{vmatrix}\lambda+1&-\lambda-1&0\\-2&\lambda-1&-1\\0&4&\lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda+1)\begin{vmatrix}1&-1&0\\-2&\lambda-1&-1\\0&4&\lambda+1\end{vmatrix}\times2$

$=(\lambda+1)\begin{vmatrix}1&-1&0\\0&\lambda-3&-1\\0&4&\lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda+1)\begin{vmatrix}\lambda-3&-1\\4&\lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda+1)[(\lambda-3)(\lambda+1)+4]$

$=(\lambda+1)(\lambda^2-2\lambda+1)=(\lambda+1)(\lambda-1)^2$.

令 $f(\lambda)=\lambda^{100}-3\lambda^{25}=C(\lambda)g(\lambda)+a\lambda^2+b\lambda+c$，则

$$4=f(-1)=a-b+c,$$
$$-2=f(1)=a+b+c,$$
$$25=f'(1)=2a+b,$$

有同学得 c=13.

由此可得, $a=14$, $b=-3$, $c=-13$.

于是 $A^{100}-3A^{25}=f(A)=C(A)g(A)+14A^2-3A-13I=14A^2-3A-13I$

$$=14\begin{bmatrix}1&2&1\\2&1&1\\0&-4&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&1\\2&1&1\\0&-4&-1\end{bmatrix}-3\begin{bmatrix}1&2&1\\2&1&1\\0&-4&-1\end{bmatrix}-13\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}54&-6&25\\50&-2&25\\-12&12&-52\end{bmatrix}.$$

6. 证明: 相似的矩阵必有相同的最小多项式.

证明: 设 $P^{-1}AP=B$，则 $PBP^{-1}=A$.

于是对于任意多项式 $\varphi(x)$，有 $P^{-1}\varphi(A)P=\varphi(B)$, $P\varphi(B)P^{-1}=\varphi(A)$.

可见 $\varphi(A)=O\Leftrightarrow\varphi(B)=O$,

即 A 和 B 具有相同的化零多项式集.

因此 $m_A(x)\mid m_B(x)$ 且 $m_B(x)\mid m_A(x)$,

又因为 $m_A(x)$ 的 $m_B(x)$ 首相系数都是 1，故 $m_A(x)=m_B(x)$.

7. 求解矩阵方程 $X^2-X-20I=O$，其中 $X\in\mathbb{C}^{n\times n}$.

解: 因为 X 的最小多项式 $m(x)$ 整除其化零多项式 $\varphi(x)=x^2-x-20=(x-5)(x+4)$，

所以 $m(x)$ 没有重根，且可能的特征值只有: 5, −4.

因此 X 相似于 $\begin{bmatrix}5I_r&O\\O&-4I_{n-r}\end{bmatrix}$，其中 $0\le r\le n$，

即 $X=P\begin{bmatrix}5I_r&O\\O&-4I_{n-r}\end{bmatrix}P^{-1}$，其中 P 为任意 n 阶可逆阵.

8. 设 f,g 为线性空间 V 上线性变换，且 $fg=gf$. 证明: f 的特征子空间是 g 的不变子空间.

证明: 设 $V_\lambda=\{\xi\in V\mid f(\xi)=\lambda\xi\}$.

对于任意的 $\xi\in V_\lambda$，由 $fg=gf$ 得 $f(g(\xi))=g(f(\xi))=g(\lambda\xi)=\lambda g(\xi)$，即 $g(\xi)\in V_\lambda$.

因此 V_λ 是 g 的不变子空间.

9. 设 A 与 B 分别为 s 与 t 阶方阵, $C(\lambda)$为 A 的特征多项式,
证明: $C(B)$可逆$\Leftrightarrow A$ 与 B 无公共特征值.

证明: ($\Rightarrow$)假若 A 与 B 有公共特征值λ, 则 $C(\lambda)=0$.
设η为 B 的对应于λ的特征向量, 即$\eta\neq 0$ 而且 $B\eta=\lambda\eta$,
于是 $C(B)\eta=C(\lambda)\eta=0$.
又因为 $C(B)$可逆, 所以$\eta=C(B)^{-1}C(B)\eta=C(B)^{-1}0=0$. 但这与$\eta\neq 0$ 矛盾.
故 A 与 B 无公共特征值.
($\Leftarrow$)设 B 的特征值为$\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$, 则 $C(B)$的特征值为 $C(\lambda_1), C(\lambda_2), ..., C(\lambda_n)$,
若 A 与 B 无公共特征值, 则 $C(\lambda_1), C(\lambda_2), ..., C(\lambda_n)$全不为零,
进而有 $\det C(B)=C(\lambda_1)C(\lambda_2)...C(\lambda_n)\neq 0$, 故 $C(B)$可逆.

10. 设 A 与 B 分别为 s 与 t 阶方阵, 证明: A 与 B 无公共特征值$\Leftrightarrow$矩阵方程 $AX=XB$ 只有零解.

证明: ($\Leftarrow$)假若 A 与 B 有公共特征值λ, 则λ也是 B^{T} 的特征值.
设ξ为 A 的对应于λ的特征向量, 则$\xi\neq 0$ 而且 $A\xi=\lambda\xi$.
设η为 B^{T} 的对应于λ的特征向量, 则$\eta\neq 0$ 而且 $B^{\mathrm{T}}\eta=\lambda\eta$, $\eta^{\mathrm{T}}B=\lambda\eta^{\mathrm{T}}$.
令 $X=\xi\eta^{\mathrm{T}}$, 则 $X\neq O$, 且

$$AX=A(\xi\eta^{\mathrm{T}})=(A\xi)\eta^{\mathrm{T}}=\lambda\xi\eta^{\mathrm{T}}=\xi(\lambda\eta^{\mathrm{T}})=\xi(\eta^{\mathrm{T}}B)=(\xi\eta^{\mathrm{T}})B=XB.$$

但这与 $AX=XB$ 只有零解矛盾.
故 A 与 B 无公共特征值.
($\Rightarrow$)设 A 的特征多项式为 $C_A(\lambda)$.
假若矩阵方程 $AX=XB$ 有非零解 $X_{s\times t}$, 则 $O=C_A(A)X=XC_A(B)$.
若 A 与 B 无公共特征值, 则由上题可知 $C_A(B)$可逆,
进而有 $X=XC_A(B)C_A(B)^{-1}=OC_A(B)^{-1}=O$, 但这与 $X\neq O$ 矛盾.
故矩阵方程 $AX=XB$ 只有零解.

11. 设 A 与 B 分别为 s 与 t 阶方阵, D 是秩为 r 的 $s\times t$ 阵, 且 $AD=DB$.
证明: A 与 B 至少有 r 个(k 重根计 k 个)公共特征值.

证明: 因为 D 是秩为 r 的 $s\times t$ 阵, 所以存在可逆矩阵 P, Q 使得 $D=P\begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O\end{bmatrix}Q$.

由 $AD=DB$ 得 $AP\begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O\end{bmatrix}Q=P\begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O\end{bmatrix}QB$,

从而有$(P^{-1}AP)\begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O\end{bmatrix}(QBQ^{-1})$.

记 $M=P^{-1}AP=\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22}\end{bmatrix}$, $N=QBQ^{-1}=\begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{21} & N_{22}\end{bmatrix}$, 其中 M_{11}, N_{11} 为 r 阶方阵,

则$\begin{bmatrix} M_{11} & O \\ M_{21} & O\end{bmatrix}=M\begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O\end{bmatrix}N=\begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} \\ O & O\end{bmatrix}$,

故 $M=\begin{bmatrix} C & M_{12} \\ O & M_{22}\end{bmatrix}$, $N=\begin{bmatrix} C & O \\ N_{21} & N_{22}\end{bmatrix}$, 其中 $M_{11}=C=N_{11}$.

于是$|\lambda I_s-A|=|\lambda I_s-M|=|\lambda I_r-C|\times|\lambda I_{s-r}-M_{22}|$,
$|\lambda I_t-B|=|\lambda I_t-N|=|\lambda I_r-C|\times|\lambda I_{t-r}-N_{22}|$,
其中$|\lambda I_r-C|$为$|\lambda I_s-A|$与$|\lambda I_t-B|$得 r 次公因式,
所以 A 与 B 至少有 r 个(k 重根计 k 个)公共特征值.

12. 证明: 酉矩阵之特征值的模必等于 1.

证明: 设 $A^{\mathrm{H}}A=AA^{\mathrm{H}}=I$, $A\xi=\lambda\xi$, 其中$\xi\neq 0$,
则 $\bar{\lambda}\lambda\,\xi^{\mathrm{H}}\xi=(\lambda\xi)^{\mathrm{H}}(\lambda\xi)=(A\xi)^{\mathrm{H}}(A\xi)=\xi^{\mathrm{H}}A^{\mathrm{H}}A\xi=\xi^{\mathrm{H}}\xi$, 其中$\xi^{\mathrm{H}}\xi\neq 0$,

故$|\lambda|^2=\bar{\lambda}\lambda=1$, 因而$|\lambda|=1$.

13. 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 为上三角阵且主对角元全等于 k,
证明: A 相似于对角阵$\Leftrightarrow A=kI$.

证明: ($\Leftarrow$) $A=kI\Rightarrow A$ 相似于对角阵 kI.
($\Rightarrow$)因为 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 为上三角阵且主对角元全等于 k,
所以$|\lambda I-A|=(\lambda-k)^n$.
若 A 相似于对角阵, 则 A 的最小多项式为$\lambda-k$,
故 $A-kI=O$, 即 $A=kI$.
($\Rightarrow$)因为 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 为上三角阵且主对角元全等于 k,
所以$|\lambda I-A|=(\lambda-k)^n$.
若 A 相似于对角阵, 则存在可逆阵 P 使得 $P^{-1}AP=kI$,
故 $A=PkIP^{-1}=kI$.

14. 设 $f\in\mathrm{Hom}(V, V)$.
(1)若存在正整数 k 及$\alpha\in V$ 使 $f^{k-1}(\alpha)\neq 0, f^k(\alpha)=0$.
证明: 向量组$\alpha, f(\alpha), ..., f^{k-1}(\alpha)$线性无关; 且当 $\dim V=k$ 时, $f^k=0$.

证明: 由 $f^k(\alpha)=0$ 可得 $f^{k+1}(\alpha)=f[f^k(\alpha)]=f(0)=0$,
依次类推, $f^l(\alpha)=0$, 其中 l 为任意的大于 k 的整数.
若 $a_1\alpha+a_2f(\alpha)+...+a_kf^{k-1}(\alpha)=0$, 则有
$0=f^{k-1}(0)=f^{k-1}[a_1\alpha+a_2f(\alpha)+...+a_kf^{k-1}(\alpha)]=a_1f^{k-1}(\alpha)+a_2f^k(\alpha)+...+a_kf^{2(k-1)}(\alpha)$
$=a_1f^{k-1}(\alpha)+0+...+0=a_1f^{k-1}(\alpha)$.
由于 $f^{k-1}(\alpha)\neq 0$, 故 $a_1=0$.
于是 $a_2f(\alpha)+a_3f(\alpha)+...+a_kf^{k-1}(\alpha)=0$, 从而有
$0=f^{k-2}(0)=f^{k-2}[a_2f(\alpha)+a_3f(\alpha)+...+a_kf^{k-1}(\alpha)]=a_2f^{k-1}(\alpha)+a_3f^k(\alpha)+...+a_kf^{2(k-1)}(\alpha)$
$=a_2f^{k-1}(\alpha)+0+...+0=a_2f^{k-1}(\alpha)$.
由于 $f^{k-1}(\alpha)\neq 0$, 故 $a_2=0$.
依次类推, 可得 $a_1=a_2=...=a_k=0$.
由此可见向量组$\alpha, f(\alpha), ..., f^{k-1}(\alpha)$线性无关.
当 $\dim V=k$ 时, $\alpha, f(\alpha), ..., f^{k-1}(\alpha)$构成 V 的一组基,
于是, 对于任意的$\xi\in V$, 可设$\xi=x_1\alpha+x_2f(\alpha)+...+x_kf^{k-1}(\alpha)$, 则有
$f^k(\xi)=f^k[x_1\alpha+x_2f(\alpha)+...+x_kf^{k-1}(\alpha)]=x_1f^k(\alpha)+x_2f^{k+1}(\alpha)+...+x_kf^{2k-1}(\alpha)=0$.

证明: 由 $f^k(\alpha)=0$ 可得 $f^{k+1}(\alpha)=f[f^k(\alpha)]=f(0)=0$,
依次类推, $f^l(\alpha)=0$, 其中 l 为任意的大于 k 的整数.
假若$\alpha, f(\alpha), ..., f^{k-1}(\alpha)$线性相关, 则存在不全为零的数 $a_1, a_2, ..., a_k$ 使得

$$a_1\alpha+a_2f(\alpha)+...+a_kf^{k-1}(\alpha)=0,$$

设 $a_1, a_2, ..., a_k$ 中第一个不等于零的是 a_i, 即 $a_1=a_2=...=a_{i-1}=0, a_i\neq 0$, 则
$0=f^{k-i}(0)=f^{k-i}[a_1\alpha+a_2f(\alpha)+...+a_if^{i-1}(\alpha)+a_{i+1}f^i(\alpha)+...+a_kf^{k-1}(\alpha)]$
$=f^{k-i}[a_if^{i-1}(\alpha)+a_{i+1}f^i(\alpha)+...+a_kf^{k-1}(\alpha)]$
$=a_if^{k-1}(\alpha)+a_{i+1}f^k(\alpha)+...+a_kf^{2k-i-1}(\alpha)$
$=a_if^{k-1}(\alpha)+0+...+0=a_if^{k-1}(\alpha)$.
由于 $a_i\neq 0$, 故 $f^{k-1}(\alpha)=0$, 但这与 $f^{k-1}(\alpha)\neq 0$ 矛盾!
由此可见向量组$\alpha, f(\alpha), ..., f^{k-1}(\alpha)$线性无关.

......

(2)若 $\dim V=k, f^k=0$, 但 $f^{k-1}\neq 0$, 则 f 的矩阵必相似于 $N=\begin{bmatrix} O & I_{k-1} \\ O & O\end{bmatrix}$.

证明：因为 $f^k=0, f^{k-1}\neq 0$，所以存在 $\alpha\in V$ 使 $f^{k-1}(\alpha)\neq 0, f^k(\alpha)=0$.

又因为 $\dim V=k$，所以由(1)可知 $\alpha, f(\alpha), \ldots, f^{k-1}(\alpha)$ 构成 V 的一组基，

而且 f 在这一组基下的矩阵为 $N=\begin{bmatrix} O & I_{k-1} \\ O & O \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ I_{k-1} & 0 \end{bmatrix}$

故 f 的矩阵必相似于 N.

15. 设 $J_0=\begin{bmatrix} a & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{bmatrix}_{k\times k}=aI_k+N$，且 $p(x)$ 为 x 的多项式，证明：

$$p(J_0)=\begin{bmatrix} p(a) & p'(a) & p''(a)/2 & \cdots & p^{(k-2)}(a)/(k-2)! & p^{(k-1)}(a)/(k-1)! \\ 0 & p(a) & p'(a) & \cdots & p^{(k-3)}(a)/(k-3)! & p^{(k-2)}(a)/(k-2)! \\ 0 & 0 & p(a) & \cdots & p^{(k-4)}(a)/(k-4)! & p^{(k-3)}(a)/(k-3)! \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & p(a) & p'(a) \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & p(a) \end{bmatrix}_{k\times k}.$$

证明：① $(aI_k)^n=a^nI_k$.

② $N^2=\begin{bmatrix} O & I_{k-2} \\ O & O \end{bmatrix}, N^3=\begin{bmatrix} O & I_{k-3} \\ O & O \end{bmatrix}, \ldots, N^{k-1}=\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}, N^k=O.$

③ $aI_kN=NaI_k$.

④ $J_0{}^n=(aI_k+N)^n$

$$=(aI_k)^n+C_n^1(aI_k)^{n-1}N+C_n^2(aI_k)^{n-2}N^2+\ldots+C_n^{k-1}(aI_k)^{n-k+1}N^{k-1}+C_n^k(aI_k)^{n-k}N^k+\ldots+N^n$$

$$=a^nI_k+C_n^1a^{n-1}N+C_n^2a^{n-2}N^2+\ldots+C_n^{k-1}a^{n-k+1}N^{k-1}$$

$$=\begin{bmatrix} a^n & C_n^1a^{n-1} & C_n^2a^{n-2} & \cdots & C_n^{k-2}a^{n-k+2} & C_n^{k-1}a^{n-k+1} \\ 0 & a^n & C_n^1a^{n-1} & \cdots & C_n^{k-3}a^{n-k+3} & C_n^{k-2}a^{n-k+2} \\ 0 & 0 & a^n & \cdots & C_n^{k-4}a^{n-k+4} & C_n^{k-3}a^{n-k+3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a^n & C_n^1a^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a^n \end{bmatrix}_{k\times k}.$$

④设 $p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$，则

$$p(a)=a_0+a_1a+a_2a^2+\ldots+a_na^n=\sum_{i=0}^{n}a_ia^i,$$

$$p'(a)=a_1+2a_2a+3a_3a^2+\ldots+na_na^{n-1}$$

$$=a_1+C_2^1a_2a+C_3^1a_3a^2+\ldots+C_n^1a_na^{n-1}=\sum_{i=1}^{n}C_i^1a_ia^{i-1},$$

$$p''(a)=2a_2+6a_3a+12a_4a^2+\ldots+n(n-1)a_na^{n-2},$$

$$\frac{1}{2}p''(a)=C_2^2a_2+C_3^2a_3a+C_4^2a_4a^2+\ldots+C_n^2a_na^{n-2}=\sum_{i=2}^{n}C_i^2a_ia^{i-2},$$

……

$$p^{(k-1)}(a)=(k-1)!a_{k-1}+k\ldots2a_ka+(k+1)k\ldots3a_{k+1}a^2+\ldots+n(n-1)\ldots(n-k+2)a_na^{n-k+1},$$

$$\frac{1}{(k-1)!}p^{(k-1)}(a)=C_{k-1}^{k-1}a_{k-1}+C_k^{k-1}a_ka+C_{k+1}^{k-1}a_{k+1}a^2+\ldots+C_n^{k-1}a_na^{n-k+1}=\sum_{i=k-1}^{n}C_i^{k-1}a_ia^{i-k+1},$$

$$p(J_0)=a_0I_k+a_1J_0+a_2J_0^2+\ldots+a_nJ_0^n$$

$$=\begin{bmatrix} \sum\limits_{i=0}^{n}a_ia^i & \sum\limits_{i=1}^{n}C_i^1a_ia^{i-1} & \sum\limits_{i=2}^{n}C_i^2a_ia^{i-2} & \cdots & \sum\limits_{i=k-2}^{n}C_i^{k-2}a_ia^{i-k+2} & \sum\limits_{i=k-1}^{n}C_i^{k-1}a_ia^{i-k+1} \\ 0 & \sum\limits_{i=0}^{n}a_ia^i & \sum\limits_{i=1}^{n}C_i^1a_ia^{i-1} & \cdots & \sum\limits_{i=k-3}^{n}C_i^{k-3}a_ia^{i-k+3} & \sum\limits_{i=k-2}^{n}C_i^{k-2}a_ia^{i-k+2} \\ 0 & 0 & \sum\limits_{i=0}^{n}a_ia^i & \cdots & \sum\limits_{i=k-4}^{n}C_i^{k-4}a_ia^{i-k+4} & \sum\limits_{i=k-3}^{n}C_i^{k-3}a_ia^{i-k+3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \sum\limits_{i=0}^{n}a_ia^i & \sum\limits_{i=1}^{n}C_i^1a_ia^{i-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \sum\limits_{i=0}^{n}a_ia^i \end{bmatrix}_{k\times k}$$

$$=\begin{bmatrix} p(a) & p'(a) & p''(a)/2 & \cdots & p^{(k-2)}(a)/(k-2)! & p^{(k-1)}(a)/(k-1)! \\ 0 & p(a) & p'(a) & \cdots & p^{(k-3)}(a)/(k-3)! & p^{(k-2)}(a)/(k-2)! \\ 0 & 0 & p(a) & \cdots & p^{(k-4)}(a)/(k-4)! & p^{(k-3)}(a)/(k-3)! \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & p(a) & p'(a) \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & p(a) \end{bmatrix}_{k\times k}.$$

16. 分别写出满足下列条件的矩阵 A 的 Jordan 标准形之一切可能的形式(不计 Jordan 块的次序).

(1) A 的特征多项式为 $C(\lambda)=(\lambda-a)^2(\lambda-b)^3\quad(a\neq b)$;

答：$\begin{bmatrix} a & & & & \\ & a & & & \\ & & b & & \\ & & & b & \\ & & & & b \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a & & & & \\ & a & & & \\ & & b & & \\ & & & b & 1 \\ & & & & b \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a & & & & \\ & a & & & \\ & & b & 1 & \\ & & & b & 1 \\ & & & & b \end{bmatrix},$

$\begin{bmatrix} a & 1 & & & \\ & a & & & \\ & & b & & \\ & & & b & \\ & & & & b \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a & 1 & & & \\ & a & & & \\ & & b & & \\ & & & b & 1 \\ & & & & b \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a & 1 & & & \\ & a & & & \\ & & b & 1 & \\ & & & b & 1 \\ & & & & b \end{bmatrix}.$

2+2+1

(2) $C(\lambda)=(\lambda-a)^2(\lambda-b)^3$，最小多项式 $m(\lambda)=(\lambda-a)(\lambda-b)^2, (a\neq b)$;

答：$\begin{bmatrix} a & & & & \\ & a & & & \\ & & b & & \\ & & & b & 1 \\ & & & & b \end{bmatrix}$. $\begin{pmatrix} a & 1 & & & \\ & a & & & \\ & & b & & \\ & & & b & 1 \\ & & & & b \end{pmatrix}$

(3) $C(\lambda)=(\lambda-a)^4, m(\lambda)=(\lambda-a)^2, r(A-aI)=2$;

答：$\begin{bmatrix} a & 1 & & \\ & a & & \\ & & a & 1 \\ & & & a \end{bmatrix}$.

(4) $C(\lambda)=(\lambda-a)^7, m(\lambda)=(\lambda-a)^3, r(A-aI)=4$.

答: $\begin{bmatrix} a &&&&&& \\ & a & 1 &&&& \\ && a & 1 &&& \\ &&& a &&& \\ &&&& a & 1 & \\ &&&&& a & 1 \\ &&&&&& a \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} a & 1 &&&&& \\ & a &&&&& \\ && a & 1 &&& \\ &&& a &&& \\ &&&& a & 1 & \\ &&&&& a & 1 \\ &&&&&& a \end{bmatrix}$.

17. 已知 n 阶阵 A 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, $p(x)$ 为 x 的多项式, 求 $p(A)$ 的特征多项式.

解: 设 A 的 Jordan 标准形为 $J=\begin{bmatrix} J_1 &&& \\ & J_2 && \\ && \ddots & \\ &&& J_s \end{bmatrix}$, 其中 J 的主对角线元素依次为 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$,

则 $p(A)$ 相似于 $p(J)=\begin{bmatrix} p(J_1) &&& \\ & p(J_2) && \\ && \ddots & \\ &&& p(J_s) \end{bmatrix}$.

由第 15 题的结论可知, $p(J)$ 的主对角线元素依次为 $p(\lambda_1), p(\lambda_2), \ldots, p(\lambda_n)$.

因此 $p(A)$ 的特征多项式 $|\lambda I-p(A)|=|\lambda I-p(J)|=[\lambda-p(\lambda_1)][\lambda-p(\lambda_2)]\ldots[\lambda-p(\lambda_n)]$.

18. 证明: 复数域上任一 n 阶方阵 A 必有分解式 $A=S+M$, 其中 S 可相似对角化, M 是幂零阵, 且 $SM=MS$.

证明: 设 A 的 Jordan 标准形为 $J=\begin{bmatrix} J_1 &&& \\ & J_2 && \\ && \ddots & \\ &&& J_s \end{bmatrix}=P^{-1}AP$,

其中 $J_i=\lambda_i I+N_i$, $N_i^n=O$, $\lambda_i IN_i=N_i\lambda_i I$, $i=1, 2, \ldots, n$.

因而 $J=D+N$, 其中 $N=\begin{bmatrix} N_1 &&& \\ & N_2 && \\ && \ddots & \\ &&& N_s \end{bmatrix}$ 满足 $N^n=O$,

$D=\begin{bmatrix} \lambda_1 I &&& \\ & \lambda_2 I && \\ && \ddots & \\ &&& \lambda_s I \end{bmatrix}$ 是对角阵, 且满足 $DN=ND$.

令 $S=PDP^{-1}$, $M=PNP^{-1}$, 则 $A=PJP^{-1}=P(D+N)P^{-1}=PDP^{-1}+PNP^{-1}=S+M$,

其中 S 相似于对角阵 D, $M^n=(PNP^{-1})^n=PN^nP^{-1}=POP^{-1}=O$,

且 $SM=(PDP^{-1})(PNP^{-1})=PDNP^{-1}=PNDP^{-1}=(PNP^{-1})(PDP^{-1})=MS$.

19. 已知 A 的 Jordan 标准形为 $J=\begin{bmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}$, 当 $a\neq 0$ 和 $a=0$ 时, 分别求 A^2 的 Jordan 标准形.

解: 设 $P^{-1}AP=J=\begin{bmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}$, 则 $P^{-1}A^2P=(P^{-1}AP)(P^{-1}AP)=J^2=\begin{bmatrix} a^2 & 2a & 1 & 0 \\ 0 & a^2 & 2a & 1 \\ 0 & 0 & a^2 & 2a \\ 0 & 0 & 0 & a^2 \end{bmatrix}$.

(1)当 $a\neq 0$ 时, $|\lambda I-J^2|=(\lambda-a^2)^4$, $r(a^2I-J^2)=3$,

故 J^2 的 Jordan 标准形为 $\begin{bmatrix} a^2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a^2 \end{bmatrix}$,

因而 A^2 的 Jordan 标准形为 $\begin{bmatrix} a^2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a^2 \end{bmatrix}$.

(2)当 $a=0$ 时, $|\lambda I-J^2|=\lambda^4$, $r(J^2)=2$, 且 $J^2=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 的最小多项式为 λ^2;

不同答认为 $(J^2)^2=\begin{pmatrix} 0 && 1 \\ & \ddots & \\ &&0 \end{pmatrix}$

故 J^2 的 Jordan 标准形为 $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 因而 A^2 的 Jordan 标准形为 $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

20. 设 α, β 为 n 维列向量, 研究矩阵 $\alpha\beta^H$ 的 Jordan 标准形.

解: (1)当 α, β 中有一个为零时, $\alpha\beta^H=O$, 因而其 Jordan 标准形为 O.

(2)当 α, β 均为非零向量时, $\alpha\beta^H\neq O$, 因而 $0<r(\alpha\beta^H)\leq r(\alpha)=1$, 故 $r(\alpha\beta^H)=1$.

此时 $\alpha\beta^H$ 的 2 阶主子式全为零,

所以 $|\lambda I-\alpha\beta^H|=\lambda^n-\mathrm{tr}(\alpha\beta^H)\lambda^{n-1}=\lambda^n-\mathrm{tr}(\beta^H\alpha)\lambda^{n-1}=\lambda^n-\beta^H\alpha\lambda^{n-1}=\lambda^{n-1}(\lambda-\beta^H\alpha)$.

①若 $\beta^H\alpha=0$, 则 $|\lambda I-\alpha\beta^H|=\lambda^n$, 且 $(\alpha\beta^H)^2=(\alpha\beta^H)(\alpha\beta^H)=\alpha(\beta^H\alpha)\beta^H=O$,

可见 $\alpha\beta^H$ 的最小多项式为 λ^2, 故其 Jordan 标准形为 $\begin{bmatrix} 0 &&&& \\ & \ddots &&& \\ && 0 && \\ &&& 0 & 1 \\ &&&& 0 \end{bmatrix}$.

②若 $\beta^H\alpha\neq 0$, 则 $|\lambda I-\alpha\beta^H|=\lambda^{n-1}(\lambda-\beta^H\alpha)$.

由 $r(\alpha\beta^H)=1$ 可知其 Jordan 标准形为 $\begin{bmatrix} \beta^H\alpha &&& \\ & 0 && \\ && \ddots & \\ &&& 0 \end{bmatrix}$.

21. 利用 Jordan 标准形证明: 若矩阵 A 的最小多项式无重因式, 则 A 必可相似于对角阵.

证明: 因为 $J_0=\begin{bmatrix} a & 1 &&& \\ & a & \ddots && \\ && \ddots & 1 \\ &&& a \end{bmatrix}_{k\times k}$ 的最小多项式为 $(\lambda-a)^k$,

所以 J_0 的最小多项式无重因式 $\Leftrightarrow k=1$.

设 A 的 Jordan 标准形为 $J=\begin{bmatrix} J_1 &&& \\ & J_2 && \\ && \ddots & \\ &&& J_s \end{bmatrix}$,

则 A 的最小多项式 $m_A(\lambda)=m_{J_1}(\lambda)m_{J_2}(\lambda)\cdots m_{J_s}(\lambda)$,

其中 $m_{J_i}(\lambda)$ 为 J_i 的最小多项式, $i=1,2,\dots,s$.

故 A 的最小多项式无重因式 $\Rightarrow$ 每个 J_i 的最小多项式无重因式

$\Rightarrow$ 每个 J_i 都是 1 阶的

$\Rightarrow J$ 为对角阵

$\Rightarrow A$ 相似于对角阵.

22. 若 $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&d\end{bmatrix}$ 与 $B=\begin{bmatrix}a&0&0\\c&5&0\\1&2&b\end{bmatrix}$ 相似, 问: a,b,c,d 应满足什么条件?

解: $|\lambda I-A|=(\lambda-1)^2(\lambda-d)$, $|\lambda I-B|=(\lambda-5)(\lambda-a)(\lambda-b)$.

若 A 与 B 相似, 则 $(\lambda-1)^2(\lambda-d)=(\lambda-5)(\lambda-a)(\lambda-b)$, 因而 $a=b=1, d=5$.

此时 $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&5\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1&0&0\\c&5&0\\1&2&1\end{bmatrix}$, $r(I-A)=2$, $I-B=\begin{bmatrix}0&0&0\\c^{-c}&-4&0\\-1&-2&0\end{bmatrix}$,

由 $r(I-B)=r(I-A)=2$ 可得 $\begin{vmatrix}c&-4\\-1&-2\end{vmatrix}\neq 0$, 即 $c\neq -2$. 2

此时 A 与 B 的 Jordan 标准形都是 $\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&5\end{bmatrix}$, 故 A 与 B 相似.

综上所述, A 与 B 相似的充要条件是 $a=b=1, c\neq \overset{2}{-2}, d=5$.

23. 已知矩阵 $A=\begin{bmatrix}2&5&7\\0&2&6\\0&0&3\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}0&0&0\\3&0&0\\5&4&0\end{bmatrix}$, 证明: 矩阵方程 $X^2=A$ 有解, 但 $X^2=B$ 无解.

证明: (1) $|\lambda I-A|=(\lambda-2)^2(\lambda-3)$, $r(2I-A)=2$,

故 A 的 Jordan 标准形为 $J_A=\begin{bmatrix}2&1&0\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}$.

设 $P^{-1}AP=J_A=\begin{bmatrix}2&1&0\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}$, $X=P\begin{bmatrix}\sqrt2&\sqrt2/4&0\\0&\sqrt2&0\\0&0&\sqrt3\end{bmatrix}P^{-1}$, 则

$$X^2=P\begin{bmatrix}\sqrt2&\sqrt2/4&0\\0&\sqrt2&0\\0&0&\sqrt3\end{bmatrix}PP^{-1}\begin{bmatrix}\sqrt2&\sqrt2/4&0\\0&\sqrt2&0\\0&0&\sqrt3\end{bmatrix}P^{-1}$$

$$=P\begin{bmatrix}\sqrt2&\sqrt2/4&0\\0&\sqrt2&0\\0&0&\sqrt3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt2&\sqrt2/4&0\\0&\sqrt2&0\\0&0&\sqrt3\end{bmatrix}P^{-1}=P\begin{bmatrix}2&1&0\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}P^{-1}=A.$$

(2) $|\lambda I-B|=\lambda^3$, $r(B)=2$, 故 B 的 Jordan 标准形为 $J_B=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$.

假若 $X^2=B$ 有解, 则 $X^6=B^3=O$, $2=r(B)\le r(X)$, $|X|^2=|B|=0$, 因而 $|X|=0$, $r(X)=2$.

由此可得 X 的 Jordan 标准形为 $\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$, 于是 X^2 的 Jordan 标准形为 $\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$,

可见 $r(X^2)=r\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}=1$. 但另一方面 $r(X^2)=r(B)=2$.

此矛盾表明 $X^2=B$ 无解.

24. 求 Jordan 标准形, 并求 P, 使 $P^{-1}AP=J$.

(1) $\begin{bmatrix}1&1&-1\\-3&-3&3\\-2&-2&2\end{bmatrix}$, (2) $\begin{bmatrix}3&0&8\\3&-1&6\\-2&0&-5\end{bmatrix}$, (3) $\begin{bmatrix}0&3&3\\-1&8&6\\2&-14&-10\end{bmatrix}$, (4) $\begin{bmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&3\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{bmatrix}$.

解: (1) $A=\begin{bmatrix}1&1&-1\\-3&-3&3\\-2&-2&2\end{bmatrix}$, $r(A)=1$, $|\lambda I-A|=\lambda^3-\mathrm{tr}(A)\lambda^2=\lambda^3$.

由此可见 A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$, Jordan 标准形为 $J=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$.

令 $P^{-1}AP=J$, 其中 $P=(p_1,p_2,p_3)$,

则 $(Ap_1,Ap_2,Ap_3)=A(p_1,p_2,p_3)=AP=PJ=(p_1,p_2,p_3)\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}=(0,p_1,0)$,

$\begin{bmatrix}1&1&-1\\-3&-3&3\\-2&-2&2\end{bmatrix}\begin{matrix}\times3\ \times2\\ \\ \\\end{matrix}\to\begin{bmatrix}1&1&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$, 由此可得 $Ax=0$ 的基础解系: $\xi_1=\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}$, $\xi_2=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$,

取 $p_1=a\xi_1+b\xi_2$, $p_3=\xi_2$,

$(A,p_1)=\begin{bmatrix}1&1&-1&a+b\\-3&-3&3&-a\\-2&-2&2&b\end{bmatrix}\begin{matrix}\times3\ \times2\\ \\ \\\end{matrix}\to\begin{bmatrix}1&1&-1&a+b\\0&0&0&2a+3b\\0&0&0&2a+3b\end{bmatrix}$,

当 $a=3, b=-2$ 时, $p_1=\begin{bmatrix}1\\-3\\-2\end{bmatrix}$, $Ax=p_1$ 的一个特解为 $\eta=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$,

因为 p_1,η,p_3 线性无关, 所以可取 $p_2=\eta$ 使得 $P=(p_1,p_2,p_3)$ 可逆, 而且 $P^{-1}AP=J$.

(2) $A=\begin{bmatrix}3&0&8\\3&-1&6\\-2&0&-5\end{bmatrix}$, $|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-3&0&-8\\-3&\lambda+1&-6\\2&0&\lambda+5\end{vmatrix}=(\lambda+1)\begin{vmatrix}\lambda-3&-8\\2&\lambda+5\end{vmatrix}=(\lambda+1)^3$.

由此可见 A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=-1$,

又因为 $r(-I-A)=1$, 所以 Jordan 标准形为 $J=\begin{bmatrix}-1&1&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$.

令 $P^{-1}AP=J$, 其中 $P=(p_1,p_2,p_3)$,

则 $(Ap_1,Ap_2,Ap_3)=A(p_1,p_2,p_3)=AP=PJ=(p_1,p_2,p_3)\begin{bmatrix}-1&1&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}=(-p_1,p_1-p_2,-p_3)$,

$$-I-A=\begin{bmatrix}-4&0&-8\\-3&0&-6\\2&0&4\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{bmatrix}1&0&2\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},$$

由此可得$(-I-A)x=0$的基础解系: $\xi_1=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$, $\xi_2=\begin{bmatrix}-2\\0\\1\end{bmatrix}$,

取 $p_1=a\xi_1+b\xi_2$, $p_3=\xi_2$,

$$(A+I,p_1)=\begin{bmatrix}4&0&8&-2b\\3&0&6&a\\-2&0&-4&b\end{bmatrix}\begin{matrix}\\ \\ \times1\ \times2\end{matrix}\rightarrow\begin{bmatrix}0&0&0&0\\1&0&2&a+b\\-2&0&-4&b\end{bmatrix}\times2\rightarrow\begin{bmatrix}0&0&0&0\\1&0&2&a+b\\0&0&0&2a+3b\end{bmatrix},$$

当 $a=3$, $b=-2$ 时, $p_1=\begin{bmatrix}4\\3\\-2\end{bmatrix}$, $(A+I)x=p_1$的一个特解为$\eta=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$,

因为 p_1,η,p_3 线性无关, 所以可取 $p_2=\eta$使得 $P=(p_1,p_2,p_3)$可逆, 而且 $P^{-1}AP=J$.

(3) $A=\begin{bmatrix}0&3&3\\-1&8&6\\2&-14&-10\end{bmatrix}$,

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda&-3&-3\\1&\lambda-8&-6\\-2&14&\lambda+10\end{vmatrix}\begin{matrix}\\ \times2\ \ \times(-\lambda)\\ \\ \end{matrix}=\begin{vmatrix}0&-\lambda^2+8\lambda-3&6\lambda-3\\1&\lambda-8&-6\\0&2\lambda-2&\lambda-2\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}-\lambda^2+8\lambda-3&6\lambda-3\\2\lambda-2&\lambda-2\end{vmatrix}$$

$$=-(-\lambda^2+8\lambda-3)(\lambda-2)+(2\lambda-2)(6\lambda-3)=\lambda^3+2\lambda^2+\lambda=\lambda(\lambda+1)^2.$$

由此可见 A 的特征值为$\lambda_1=0$, $\lambda_2=\lambda_3=-1$,

又因为 $r(-I-A)=2$, 所以 Jordan 标准形为 $J=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&-1&1\\0&0&-1\end{bmatrix}$.

令 $P^{-1}AP=J$, 其中 $P=(p_1,p_2,p_3)$,

则$(Ap_1,Ap_2,Ap_3)=A(p_1,p_2,p_3)=AP=PJ=(p_1,p_2,p_3)\begin{bmatrix}0&0&0\\0&-1&1\\0&0&-1\end{bmatrix}=(0,-p_2,p_2-p_3)$,

对应于特征值$\lambda_1=0$的特征向量为 $k\begin{bmatrix}-2\\-1\\1\end{bmatrix}$, $k\neq0$.

取 $p_1=\begin{bmatrix}-2\\-1\\1\end{bmatrix}$.

$$-I-A=\begin{bmatrix}-1&-3&-3\\1&-9&-6\\-2&14&9\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{bmatrix}1&0&3/4\\0&1&3/4\\0&0&0\end{bmatrix},$$

由此可得$(-I-A)x=0$的基础解系: $\xi_1=\begin{bmatrix}-3\\-3\\4\end{bmatrix}$,

取 $p_2=\xi_1$,

$$(A+I,p_2)=\begin{bmatrix}1&3&3&-3\\-1&9&6&-3\\2&-14&-9&4\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{bmatrix}1&0&3/4&-3/2\\0&1&3/4&-1/2\\0&0&0&0\end{bmatrix},$$

由此可得$(A+I)x=p_3$的一个特解为$\eta=\begin{bmatrix}-3/2\\-1/2\\0\end{bmatrix}$,

取 $p_3=\eta$, 则 p_1,p_2,p_3 线性无关, $P=(p_1,p_2,p_3)$可逆, 而且 $P^{-1}AP=J$.

(4) $A=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&3\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{bmatrix}$, $|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-2&-3&-4\\0&\lambda-1&-2&-3\\0&0&\lambda-1&-2\\0&0&0&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^4$.

由此可见 A 的特征值为$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=1$,

又因为 $r(I-A)=3$, 所以 Jordan 标准形为 $J=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}$.

令 $P^{-1}AP=J$, 其中 $P=(p_1,p_2,p_3,p_4)$,

则$(Ap_1,Ap_2,Ap_3,Ap_4)=(p_1,p_2,p_3,p_4)\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}=(p_1,p_1+p_2,p_2+p_3,p_3+p_4)$.

对应于特征值$\lambda=1$的特征向量为 $k(1,0,0,0)^T$, $k\neq0$.

取 $p_1=(1,0,0,0)^T$.

$$(A-I,p_1)=\begin{bmatrix}0&2&3&4&1\\0&0&2&3&0\\0&0&0&2&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{bmatrix}0&1&0&0&1/2\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix},$$

由此可得$(A-I)x=p_1$的一个特解: $p_2=(0,1/2,0,0)^T$.

$$(A-I,p_2)=\begin{bmatrix}0&2&3&4&0\\0&0&2&3&1/2\\0&0&0&2&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{bmatrix}0&1&0&0&-3/8\\0&0&1&0&1/4\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix},$$

由此可得$(A-I)x=p_1$的一个特解: $p_3=(0,-3/8,1/4,0)^T$.

$$(A-I,p_3)=\begin{bmatrix}0&2&3&4&0\\0&0&2&3&-3/8\\0&0&0&2&1/4\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{bmatrix}0&1&0&0&5/16\\0&0&1&0&-3/8\\0&0&0&1&1/8\\0&0&0&0&0\end{bmatrix},$$

由此可得$(A-I)x=p_1$的一个特解: $p_4=(0,5/16,-3/8,1/8)^T$.

因为 p_1,p_2,p_3,p_4 线性无关, 所以 $P=(p_1,p_2,p_3,p_4)$可逆, 而且 $P^{-1}AP=J$.

25. 已知 $A=\begin{bmatrix}1&1\\-10&3\end{bmatrix}$, 适当选择 d_1,d_2, 由 $D^{-1}AD$ 来作出$\rho(A)$较精确的估计, 其中

$$D=\mathrm{diag}(d_1,d_2).$$

解: $D^{-1}AD=\begin{bmatrix}d_1^{-1}&0\\0&d_2^{-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\-10&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}d_1&0\\0&d_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&d_2/d_1\\-10d_1/d_2&3\end{bmatrix}$.

设 $x=\dfrac{d_1}{d_2}>0$, 则 $D^{-1}AD=\begin{bmatrix}1&x^{-1}\\-10x&3\end{bmatrix}$,

$\rho_1=\max\{1+x^{-1},3+10x\}$, $\rho_2=\max\{1+10x,3+x^{-1}\}$, $\rho(A)\le\min\{\rho_1,\rho_2\}$.

令 $1+x^{-1}=3+10x$，则由 $x>0$ 可得 $x=\dfrac{\sqrt{11}-1}{10}$，此时，$1+x^{-1}=3+10x=\sqrt{11}+2$.

$$\rho_1=\max\{1+x^{-1},3+10x\}=\begin{cases}1+x^{-1}, & x\in(0,\frac{\sqrt{11}-1}{10}];\\ 3+10x, & x\in(\frac{\sqrt{11}-1}{10},+\infty).\end{cases}$$

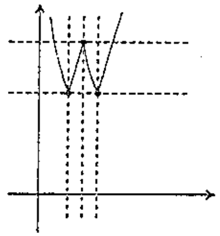
令 $1+10x=3+x^{-1}$，则由 $x>0$ 可得 $x=\dfrac{\sqrt{11}+1}{10}$，此时，$1+10x=3+x^{-1}=\sqrt{11}+2$.

$$\rho_2=\max\{1+10x,3+x^{-1}\}=\begin{cases}3+x^{-1}, & x\in(0,\frac{\sqrt{11}+1}{10}];\\ 1+10x, & x\in(\frac{\sqrt{11}+1}{10},+\infty).\end{cases}$$

又因为 $3+10x=3+x^{-1}$ 的正根为 $x=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$，

当 $x=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$ 时，$3+10x=3+x^{-1}=3+\sqrt{10}$.

于是可得
$$\min\{\rho_1,\rho_2\}=\begin{cases}1+x^{-1}, & x\in(0,\frac{\sqrt{11}-1}{10}];\\ 3+10x, & x\in(\frac{\sqrt{11}-1}{10},\frac{\sqrt{10}}{10}];\\ 3+x^{-1}, & x\in(\frac{\sqrt{10}}{10},\frac{\sqrt{11}+1}{10}];\\ 1+10x, & x\in(\frac{\sqrt{11}+1}{10},+\infty).\end{cases}$$



取 $d_1=\sqrt{11}\pm1$，$d_2=10$，则 $x=\dfrac{\sqrt{11}\pm1}{10}$，$\min\{\rho_1,\rho_2\}$ 达到最小值 $\sqrt{11}+2$.

故 $\rho(A)\le\sqrt{11}+2$.

26. 设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，$|a_{ii}|>\sum\limits_{\substack{j=1\\j\ne i}}^{n}|a_{ij}|$ $(i=1,2,\dots,k)$，证明：A 的秩至少为 k.

证明：令
$$B=\begin{bmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1k}&a_{1,k+1}&\cdots&a_{1n}\\ \vdots&&\vdots&\vdots&&\vdots\\ a_{1k}&\cdots&a_{kk}&a_{k,k+1}&\cdots&a_{kn}\\ 0&\cdots&0&1&\cdots&0\\ \vdots&&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ 0&\cdots&0&0&\cdots&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_k\\ \varepsilon_{k+1}\\ \vdots\\ \varepsilon_n\end{bmatrix}$$
，则由条件可知 B 为行对角占优矩阵，

因而 B 可逆，从而 $\alpha_1,\dots,\alpha_k$ 线性无关，故 $r(A)\ge r(\alpha_1,\dots,\alpha_k)=k$.

27. 已知 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 为对角占优矩阵，作 $\Lambda=\mathrm{diag}(a_{11},a_{22},\dots,a_{nn})$，分别就 A 为行对角占优与列对角占优证明：$\rho(I-\Lambda^{-1}A)<1$.

证明：因为 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 为对角占优矩阵，所以 $a_{11},a_{22},\dots,a_{nn}$ 均非零，从而 $\Lambda=\mathrm{diag}(a_{11},a_{22},\dots,a_{nn})$ 可逆，而且有

$$I-\Lambda^{-1}A=\begin{bmatrix}1&0&\cdots&0\\0&1&\cdots&0\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}a_{11}^{-1}&0&\cdots&0\\0&a_{22}^{-1}&\cdots&0\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&a_{nn}^{-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}0&-a_{11}^{-1}a_{12}&\cdots&-a_{11}^{-1}a_{1n}\\-a_{22}^{-1}a_{21}&0&\cdots&-a_{22}^{-1}a_{2n}\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\-a_{nn}^{-1}a_{n1}&-a_{nn}^{-1}a_{n2}&\cdots&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_{11}&b_{12}&\cdots&b_{1n}\\b_{21}&b_{22}&\cdots&b_{2n}\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\b_{n1}&b_{n2}&\cdots&b_{nn}\end{bmatrix}.$$

(1)若 A 为行对角占优矩阵，即 $|a_{ii}|>\sum\limits_{\substack{j=1\\j\ne i}}^{n}|a_{ij}|$，则 $1>\sum\limits_{\substack{j=1\\j\ne i}}^{n}|a_{ii}^{-1}a_{ij}|$，

因而 $\rho_1(I-\Lambda^{-1}A)=\max\{\sum\limits_{j=1}^{n}|b_{ij}|\,|\,i=1,2,\dots,n\}=\max\{\sum\limits_{\substack{j=1\\j\ne i}}^{n}|a_{ii}^{-1}a_{ij}|\,|\,i=1,2,\dots,n\}<1$.

故 $\rho(I-\Lambda^{-1}A)\le\rho_1(I-\Lambda^{-1}A)<1$.

(2)若 A 为列对角占优矩阵，即 $|a_{jj}|>\sum\limits_{\substack{i=1\\i\ne j}}^{n}|a_{ij}|$，则 $1>\sum\limits_{\substack{i=1\\i\ne j}}^{n}|a_{jj}^{-1}a_{ij}|$.

令
$$C=\Lambda(I-\Lambda^{-1}A)\Lambda^{-1}=I-A\Lambda^{-1}=\begin{bmatrix}0&-a_{22}^{-1}a_{12}&\cdots&-a_{nn}^{-1}a_{1n}\\-a_{11}^{-1}a_{21}&0&\cdots&-a_{nn}^{-1}a_{2n}\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\-a_{11}^{-1}a_{n1}&-a_{22}^{-1}a_{n2}&\cdots&0\end{bmatrix}=(c_{ij})_{n\times n},$$

因而 $\rho_2(C)=\max\{\sum\limits_{i=1}^{n}|c_{ij}|\,|\,j=1,2,\dots,n\}=\max\{\sum\limits_{\substack{i=1\\i\ne j}}^{n}|a_{jj}^{-1}a_{ij}|\,|\,j=1,2,\dots,n\}<1$.

故 $\rho(I-\Lambda^{-1}A)=\rho(\Lambda(I-\Lambda^{-1}A)\Lambda^{-1})=\rho(C)\le\rho_2(C)<1$.

28. 设 $A=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\\3&4&1&2\\4&1&2&3\end{bmatrix}$，证明：$\rho(A)=10$.

证明：
$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-2&-3&-4\\-2&\lambda-3&-4&-1\\-3&-4&\lambda-1&-2\\-4&-1&-2&\lambda-3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-10&\lambda-10&\lambda-10&\lambda-10\\-2&\lambda-3&-4&-1\\-3&-4&\lambda-1&-2\\-4&-1&-2&\lambda-3\end{vmatrix}$$
$$=(\lambda-10)\begin{vmatrix}1&1&1&1\\-2&\lambda-3&-4&-1\\-3&-4&\lambda-1&-2\\-4&-1&-2&\lambda-3\end{vmatrix}\begin{matrix}\times2\ \times3\ \times4\\ \\ \\ \\ \end{matrix}=(\lambda-10)\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&\lambda-1&-2&1\\0&-1&\lambda+2&1\\0&3&2&\lambda+1\end{vmatrix}$$
$$=(\lambda-10)\begin{vmatrix}\lambda-1&-2&1\\-1&\lambda+2&1\\3&2&\lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda-10)\begin{vmatrix}\lambda+2&0&\lambda+2\\-1&\lambda+2&1\\3&2&\lambda+1\end{vmatrix}$$
$$=(\lambda-10)(\lambda+2)\begin{vmatrix}1&0&1\\-1&\lambda+2&1\\3&2&\lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda-10)(\lambda+2)\begin{vmatrix}1&0&0\\-1&\lambda+2&2\\3&2&\lambda-2\end{vmatrix}.$$
$$=(\lambda-10)(\lambda+2)\begin{vmatrix}\lambda+2&2\\2&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-10)(\lambda+2)(\lambda+2\sqrt{2})(\lambda-2\sqrt{2}).$$

可见 A 的特征值为 $\lambda_1 = 10$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = -2\sqrt{2}$, $\lambda_4 = 2\sqrt{2}$.

故 $\rho(A) = 10$.

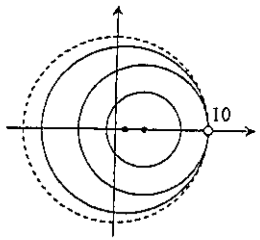
证明：因为 $\rho_1(A) = 10$，所以 $\rho(A) \le \rho_1(A) = 10$.

又因为 $A\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\\3&4&1&2\\4&1&2&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}10\\10\\10\\10\end{bmatrix} = 10\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$,

可见 10 是 A 的一个特征值.

综上可得 $\rho(A) = 10$.

29. 设 $A = \begin{bmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\\3&4&1&2\\1&1&2&3\end{bmatrix}$，证明：$\rho(A) < 10$.



证明：因为 $\rho_1(A) = 10$，所以 $\rho(A) \le \rho_1(A) = 10$.

A 的盖尔圆：

$C_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-1| \le 9\}$； $C_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-3| \le 7\}$；

$C_3 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-1| \le 9\}$； $C_4 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-3| \le 4\}$.

令 $G = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4$，则对于复数 $z \in G$，有 $|z| = 10 \Leftrightarrow z = 10$.

又因为 $|10I - A| = \begin{vmatrix}9&-2&-3&-4\\-2&6&-4&-1\\-3&-4&9&-2\\-4&-1&-2&6\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1&-4&-7&8\\-2&6&-4&-1\\-3&-4&9&-2\\-4&-1&-2&6\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1&-4&-7&8\\0&-2&-18&17\\0&-16&-12&22\\0&-8&-30&38\end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix}-2&-18&17\\-16&-12&22\\-8&-30&38\end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix}1&9&17\\8&6&22\\4&15&38\end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix}1&9&17\\0&-66&-114\\0&-21&-30\end{vmatrix}$

$= 4\begin{vmatrix}-66&-114\\-21&-30\end{vmatrix} = 72\begin{vmatrix}22&19\\7&5\end{vmatrix} = -1656 \ne 0$,

故 10 不是 A 的特征值.

综上可得 $\rho(A) < 10$.

30. 设 $A = \begin{bmatrix}0&1/n&1/n&\cdots&1/n&1/n\\2/n&2&1/n&\cdots&1/n&1/n\\1/n&1/n&4&\cdots&1/n&1/n\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\1/n&1/n&1/n&\cdots&2n-4&1/n\\1/n&1/n&1/n&\cdots&1/n&2n-2\end{bmatrix}$. 证明：$A$ 必相似于实对角阵.

证明：因为实矩阵 A 的 n 个盖尔圆 $C_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \le \frac{n-1}{n}\}$, $C_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-2| \le 1\}$,

$C_3 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-4| \le \frac{n-1}{n}\}$, ..., $C_n = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-(2n-2)| \le \frac{n-1}{n}\}$ 互不相交,

即实矩阵 A 的盖尔圆都是 1 区，所以 A 相似于实对角阵.

31. 若 A 的盖尔圆系中有一个 2 区由两外切圆组成. 证明：此两圆上必各有一特征值. 举例说明两圆内切时命题不成立.

证明：设 $A = (a_{ij})_{n\times n}$, $\Lambda = \mathrm{diag}(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$,

$$A(t) = \Lambda + t(A - \Lambda),\ 0 \le t \le 1,$$

则 $A(0) = \Lambda$, $A(1) = A$.

$A(t)$ 的盖尔圆系 $G(t) = C_1(t) \cup C_2(t) \cup \ldots \cup C_n(t)$,

其中 $C_i(t)$ 为 $|z - a_{ii}| \le tR_i$ 含在 A 的盖尔圆 C_i 内 $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

设 A 的盖尔圆系中有一个 2 区 G_2 由两外切圆 C_j 和 C_k 组成,

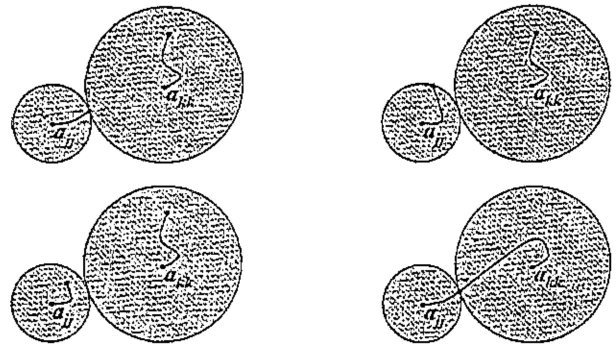
则当 t 从 0 变化到 1 时，$A(t)$ 的特征值 $\lambda_j(t)$ 由 $\lambda_j(0) = a_{jj}$ 连续地变化到 $\lambda_j(1) = \lambda_j$,

其轨迹完全落在 A 的盖尔圆 C_j 上；

同时，$A(t)$ 的特征值 $\lambda_k(t)$ 由 $\lambda_k(0) = a_{kk}$ 连续地变化到 $\lambda_k(1) = \lambda_k$,

其轨迹完全落在 A 的盖尔圆 C_k 上,

故 $\lambda_j \in C_j$, $\lambda_k \in C_k$.



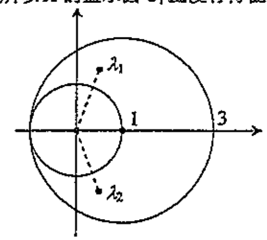
举例：设 $A = \begin{bmatrix}0&1\\-2&1\end{bmatrix}$，则 A 的盖尔圆 $C_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \le 1\}$ 与 $C_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-1| \le 2\}$ 内切,

而且 C_1 与 C_2 组成一个 2 区.

$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix}\lambda & -1\\ 2 & \lambda-1\end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda + 2 = (\lambda - \frac{1+\sqrt{7}i}{2})(\lambda - \frac{1-\sqrt{7}i}{2})$.

A 的特征值为 $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{7}i}{2}$, $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{7}i}{2}$.

因为 $|\lambda_1| = |\lambda_2| = \sqrt{2} > 1$，所以 A 的盖尔圆 C_1 上没有特征值.



1. 设 A 为正规阵，证明:

(1) A 为 Hermite 阵 $\Leftrightarrow$ A 的特征值全为实数.

证明: ($\Rightarrow$)设 A 为 Hermite 阵，即 $A^H=A$.

根据 Schur 引理，存在酉矩阵 U 以及上三角矩阵 T 使得 $U^HAU=T$.

于是有 $T^H=U^HA^HU=U^HAU=T$.

可见 T 为实对角阵，而且 A 酉相似于 T，故 A 的特征值全为实数.

($\Leftarrow$)因为 A 为正规阵，所以 A 酉相似于对角阵.

若 A 的特征值全为实数，

则存在酉矩阵 U 使得 $U^HAU=\Lambda=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)$，其中 $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ 均为实数.

于是有 $A=U\Lambda U^H$, $A^H=(U\Lambda U^H)^H=U\Lambda^HU^H=U\Lambda U^H=A$. 可见 A 为 Hermite 阵.

(2) A 为酉矩阵 $\Leftrightarrow$ A 的特征值之模为 1.

证明: ($\Rightarrow$)设 $A^HA=AA^H=I$, $A\xi=\lambda\xi$，其中 $\xi\neq0$,

若 A 的特征值全为实数，

则 $\bar\lambda\lambda\,\xi^H\xi=(\lambda\xi)^H(\lambda\xi)=(A\xi)^H(A\xi)=\xi^HA^HA\xi=\xi^H\xi$，其中 $\xi^H\xi\neq0$,

故 $|\lambda|^2=\bar\lambda\lambda=1$，因而 $|\lambda|=1$.

($\Leftarrow$)因为 A 为正规阵，所以 A 酉相似于对角阵.

设 $U^HAU=\Lambda=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)$，其中 U 为酉矩阵, $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ 为 A 的特征值,

则 $A=U\Lambda U^H$.

若 A 的特征值之模为 1，则 $\Lambda^H\Lambda=\mathrm{diag}(\bar\lambda_1\lambda_1,\ \bar\lambda_2\lambda_2,\ldots,\ \bar\lambda_n\lambda_n)=I$,

于是 $A^HA=(U\Lambda U^H)^H(U\Lambda U^H)=(U\Lambda^HU^H)(U\Lambda U^H)=U\Lambda^H\Lambda U^H=UIU^H=I$.

故 A 为酉矩阵.

2. 证明: n 阶方阵 A 为正规阵 $\Leftrightarrow$ $\|AX\|=\|A^HX\|$ $(\forall X\in\mathbb{C}^n)$

证明: ($\Rightarrow$)设 A 为 n 阶正规阵，则 $A^HA=AA^H$, $\forall X\in\mathbb{C}^n$ 有

$$\|AX\|^2=\langle AX,AX\rangle=(AX)^H(AX)=(X^HA^H)(AX)=(X^HA)(A^HX)=(A^HX)^H(A^HX)$$
$$=\langle A^HX,A^HX\rangle=\|A^HX\|^2.$$

因而 $\|AX\|=\|A^HX\|$.

较难 ($\Leftarrow$)① 令 $(b_{ij})_{n\times n}=B=A^HA-AA^H$,　∵ B 是 Hermite 阵, $b_{ij}=\overline{b_{ji}}$.　证

则 $B^H=(A^HA-AA^H)^H=(A^HA)^H-(AA^H)^H=A^HA-AA^H=B$.　下证 $B=0$

② $\forall X\in\mathbb{C}^n$，有

$$X^HBX=X^H(A^HA-AA^H)X=X^HA^HAX-X^HAA^HX=(AX)^H(AX)-(A^HX)^H(A^HX)$$
$$=\langle AX,AX\rangle-\langle A^HX,A^HX\rangle=\|AX\|^2-\|A^HX\|^2=0.$$

③ 对于 $\mathbb{C}^n$ 的基本单位向量组 $e_1,e_2,\ldots,e_n$，有

$$0=(e_i+e_j)^HB(e_i+e_j)=e_i^HBe_i+e_i^HBe_j+e_j^HBe_i+e_j^HBe_j=e_i^HBe_j+e_j^HBe_i$$
$$=b_{ij}+b_{ji}=b_{ij}+\overline{b_{ij}}=2\mathrm{Re}(b_{ij});$$
$$0=(e_i+\mathrm{i}e_j)^HB(e_i+\mathrm{i}e_j)=e_i^HBe_i+\mathrm{i}e_i^HBe_j-\mathrm{i}e_j^HBe_i+e_j^HBe_j=\mathrm{i}e_i^HBe_j-\mathrm{i}e_j^HBe_i$$
$$=\mathrm{i}b_{ij}-\mathrm{i}b_{ji}=\mathrm{i}b_{ij}-\mathrm{i}\overline{b_{ij}}=-2\mathrm{Im}(b_{ij});$$

由此可得 $b_{ij}=0$, $\forall i,j=1,2,\ldots,n$.

故 $A^HA-AA^H=B=O$，即 $A^HA=AA^H$. 可见 A 为正规阵.

3. 证明: (1)若 A 为正规阵，则 $A-\lambda I$ 也是正规阵.

证明: 因为 A 为正规阵，即 $A^HA=AA^H$，所以 .

$$(A-\lambda I)^H(A-\lambda I)=(A^H-\bar\lambda I)(A-\lambda I)=A^HA-\lambda A^H-\bar\lambda A+\bar\lambda\lambda I$$
$$=AA^H-\lambda A^H-\bar\lambda A+\bar\lambda\lambda I=(A-\lambda I)(A^H-\bar\lambda I)$$
$$=(A-\lambda I)(A-\lambda I)^H,$$

可见 $A-\lambda I$ 也是正规阵.

证明: 因为 A 为正规阵，所以 A 酉相似于对角阵.

设 $U^HAU=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)$，其中 U 为酉矩阵,

则 $U^H(A-\lambda I)U=U^HAU-\lambda U^HU=\mathrm{diag}(\lambda_1-\lambda,\lambda_2-\lambda,\ldots,\lambda_n-\lambda)$,

可见 $A-\lambda I$ 也酉相似于对角阵，因而 $A-\lambda I$ 也是正规阵.

(2)若 A 为正规阵，则 $AX=\lambda X\Leftrightarrow A^HX=\bar\lambda X$ (即 A 的特征值 λ 之共轭 $\bar\lambda$ 为 A^H 的特征值，且可对应于相同的特征向量).

证明: ($\Rightarrow$)因为 A 为正规阵，所以 $A-\lambda I$ 也是正规阵.

又因为 $AX=\lambda X$，故 $(A-\lambda I)X=0$.

于是 $[(A-\lambda I)^HX]^H[(A-\lambda I)^HX]=X^H(A-\lambda I)(A-\lambda I)^HX=X^H(A-\lambda I)^H(A-\lambda I)X=0$,

因而 $A^HX-\bar\lambda X=(A^H-\bar\lambda I)X=(A-\lambda I)^HX=0$.

可见 $A^HX=\bar\lambda X$.

($\Leftarrow$)因为 A 为正规阵，所以 $A-\lambda I$ 也是正规阵.

又因为 $A^HX=\bar\lambda X$，故 $(A-\lambda I)^HX=(A^H-\bar\lambda I)X=A^HX-\bar\lambda X=0$.

于是 $[(A-\lambda I)X]^H[(A-\lambda I)X]=X^H(A-\lambda I)^H(A-\lambda I)X=X^H(A-\lambda I)(A-\lambda I)^HX=0$,

因而 $AX-\lambda X=(A-\lambda I)X=0$.

可见 $AX=\lambda X$.

4. 证明: 若 A 是正规阵，有 r 个互异特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_r$，则存在 r 个矩阵 $P_1,P_2,\ldots,P_r$ 使

(1) $A=\sum_{i=1}^r\lambda_iP_i$;

(2) $P_i^H=P_i=P_i^2$ $(i=1,2,\ldots,r)$;

(3) $i\neq j$ 时, $P_iP_j=O$;

(4) $\sum_{i=1}^rP_i=I$.

证明: 因为 A 为正规阵，所以 A 酉相似于对角阵.

若有 r 个互异特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_r$，设 λ_i 的(代数)重数为 c_i, $i=1,2,\ldots,r$,

则存在酉矩阵 U，使得 $U^HAU=\mathrm{diag}(\lambda_1I_{c_1},\lambda_2I_{c_2},\ldots,\lambda_rI_{c_r})$.

令 $P_i=U\mathrm{diag}(O_{c_1},\ldots,I_{c_i},\ldots,O_{c_r})U^H$, $i=1,2,\ldots,r$，则

(1) $A=U\mathrm{diag}(\lambda_1I_{c_1},\lambda_2I_{c_2},\ldots,\lambda_rI_{c_r})U^H=\sum_{i=1}^r\lambda_iP_i$;

(2) $P_i^H=[U\mathrm{diag}(O_{c_1},\ldots,I_{c_i},\ldots,O_{c_r})U^H]^H=U\mathrm{diag}(O_{c_1},\ldots,I_{c_i},\ldots,O_{c_r})^HU^H$
$=U\mathrm{diag}(O_{c_1},\ldots,I_{c_i},\ldots,O_{c_r})U^H=P_i$ $(i=1,2,\ldots,r)$;

$P_i^2=[U\mathrm{diag}(O_{c_1},\ldots,I_{c_i},\ldots,O_{c_r})U^H][U\mathrm{diag}(O_{c_1},\ldots,I_{c_i},\ldots,O_{c_r})U^H]$
$=U\mathrm{diag}(O_{c_1},\ldots,I_{c_i},\ldots,O_{c_r})\mathrm{diag}(O_{c_1},\ldots,I_{c_i},\ldots,O_{c_r})U^H$
$=U\mathrm{diag}(O_{c_1},\ldots,I_{c_i},\ldots,O_{c_r})U^H=P_i$ $(i=1,2,\ldots,r)$;

(3) $i\neq j$ 时,

$P_iP_j=[U\mathrm{diag}(O_{c_1},\ldots,I_{c_i},\ldots,O_{c_r})U^H][U\mathrm{diag}(O_{c_1},\ldots,I_{c_j},\ldots,O_{c_r})U^H]$
$=U\mathrm{diag}(O_{c_1},\ldots,I_{c_i},\ldots,O_{c_r})\mathrm{diag}(O_{c_1},\ldots,I_{c_j},\ldots,O_{c_r})U^H$
$=UOU^H=O$;

(4) $\sum_{i=1}^rP_i=\sum_{i=1}^rU\mathrm{diag}(O_{c_1},\cdots,I_{c_i},\cdots,O_{c_r})U^H=U\left[\sum_{i=1}^r\mathrm{diag}(O_{c_1},\cdots,I_{c_i},\cdots,O_{c_r})\right]U^H$
$=UIU^H=I$.

5. 证明：若对 n 阶方阵 A 存在满足上题四个方程的 r 个互异数 λ_i 及 r 个非零矩阵 P_i，则
(1) A 为正规阵；
(2) A 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$；
(3)相应于特征值 λ_k 的特征子空间 $V_{\lambda_k} = \mathrm{R}(P_k)$.

证明：(1) $A^HA = (\sum_{i=1}^{r}\lambda_iP_i)^H(\sum_{j=1}^{r}\lambda_jP_j) = (\sum_{i=1}^{r}\overline{\lambda_i}P_i^H)(\sum_{j=1}^{r}\lambda_jP_j) = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\overline{\lambda_i}P_i^H\lambda_jP_j = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\overline{\lambda_i}\lambda_jP_iP_j$

$= \sum_{i=1}^{r}\overline{\lambda_i}\lambda_iP_i = \sum_{i=1}^{r}\lambda_i\overline{\lambda_i}P_i = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\lambda_i\overline{\lambda_j}P_iP_j = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\lambda_iP_i\overline{\lambda_j}P_j^H$

$= (\sum_{i=1}^{r}\lambda_iP_i)(\sum_{j=1}^{r}\overline{\lambda_j}P_j^H) = (\sum_{i=1}^{r}\lambda_iP_i)(\sum_{j=1}^{r}\lambda_jP_j)^H = AA^H$.

(2)对于任意的 $X \in \mathbb{C}^n$，有 $X = (\sum_{i=1}^{r}P_i)X = P_1X + \ldots + P_rX \in \mathrm{R}(P_1) + \ldots + \mathrm{R}(P_r)$,
故 $\mathbb{C}^n = \mathrm{R}(P_1) + \ldots + \mathrm{R}(P_r)$.
又因为对于任意的 $\xi \in \mathrm{R}(P_i)$，存在 $\eta \in \mathbb{C}^n$ 使得 $\xi = P_i\eta$,
于是 $A\xi = AP_i\eta = (\sum_{i=1}^{r}\lambda_iP_i)P_i\eta = \lambda_iP_iP_i\eta = \lambda_iP_i\eta = \lambda_i\xi$.
可见 $\mathrm{R}(P_i) \subseteq V_{\lambda_i}$, $i = 1, 2, \ldots, r$,
由此可得 $\mathbb{C}^n = \mathrm{R}(P_1) + \ldots + \mathrm{R}(P_r) \subseteq V_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus V_{\lambda_r} \subseteq \mathbb{C}^n$.
因而 $\mathbb{C}^n = V_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus V_{\lambda_r}$,
所以 A 相似于对角阵且有 r 个互异的特征值 $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$.

(3)在证明(2)的过程中已经得到 $\mathrm{R}(P_i) \subseteq V_{\lambda_i}$，因而 $\dim\mathrm{R}(P_i) \le \dim V_{\lambda_i}$ $i = 1, 2, \ldots, r$.
另一方面，$\mathbb{C}^n = \mathrm{R}(P_1) + \ldots + \mathrm{R}(P_r) = V_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus V_{\lambda_r}$.
假若存在 $\dim\mathrm{R}(P_i) < \dim V_{\lambda_i}$,
则 $n = \dim\mathbb{C}^n \le \dim\mathrm{R}(P_1) + \ldots + \dim\mathrm{R}(P_r) < \dim V_{\lambda_1} + \ldots + \dim V_{\lambda_r} = n$，矛盾!
故 $\dim\mathrm{R}(P_i) = \dim V_{\lambda_i}$, $i = 1, 2, \ldots, r$,
因此 $\mathrm{R}(P_i) = V_{\lambda_i}$, $i = 1, 2, \ldots, r$.

6. 设 $\alpha \in \mathbb{C}^n$，且 $\alpha^H\alpha < 1$，证明：$I - \alpha\alpha^H$ 是正定阵.
证明：首先，$(I - \alpha\alpha^H)^H = I - \alpha\alpha^H$，故 $I - \alpha\alpha^H$ 是 Hermit 阵.
其次，因为 α 和 α^H 分别为 $n\times1$ 和 $1\times n$ 矩阵，根据第 3.1 节的例 3(2)可得

$$\lambda|\lambda I - \alpha\alpha^H| = \lambda^n|\lambda - \alpha^H\alpha| = \lambda^n(\lambda - \alpha^H\alpha),$$

所以 $|\lambda I - \alpha\alpha^H| = \lambda^{n-1}(\lambda - \alpha^H\alpha)$，可见 $\alpha\alpha^H$ 的特征值为 0(n–1 重)和 $\alpha^H\alpha$.
因而 $I - \alpha\alpha^H$ 的特征值为 1(n–1 重)和 $1-\alpha^H\alpha$.
最后，因为 $\alpha^H\alpha < 1$，所以 $I - \alpha\alpha^H$ 的特征值全为正数，故 $I - \alpha\alpha^H$ 是正定阵.

7. 证明：Hermite 阵 A 是半正定阵 $\Leftrightarrow$ A 的特征值非负.
证明：设 $U^HAU = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$，其中 U 为酉矩阵，$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ 为 A 的特征值.
($\Rightarrow$)若 A 是半正定阵，则

$\lambda_i = e_i^H\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)e_i = e_i^HU^HAUe_i = (Ue_i)^HA(Ue_i) \ge 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$.　$X=UY$

($\Leftarrow$)设 A 的特征值非负.　$Y^H=U^H\xi$

对于任意的 $\xi \in \mathbb{C}^n$，令 $U^H\xi = (y_1, y_2, \ldots, y_n)^T$，则 $\xi = U(y_1, y_2, \ldots, y_n)^T$,　$x=UY$

$\xi^HA\xi = \xi^HA\xi = [U(y_1, y_2, \ldots, y_n)^T]^HA[U(y_1, y_2, \ldots, y_n)^T]$　$X^HAX=Y^HU^HAUY$

$= (\overline{y_1}, \overline{y_2}, \ldots, \overline{y_n})U^HAU(y_1, y_2, \ldots, y_n)^T$

$= (\overline{y_1}, \overline{y_2}, \ldots, \overline{y_n})\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)(y_1, y_2, \ldots, y_n)^T$

$= \lambda_1|y_1|^2 + \lambda_2|y_2|^2 + \ldots + \lambda_n|y_n|^2 \ge 0$.

可见 A 是半正定阵.

8. 证明：Hermite 阵 A 是半正定阵 $\Leftrightarrow$ A 的一切主子式非负.

证明：($\Rightarrow$)设 A 是半正定阵，$A_k = \begin{bmatrix} a_{i_1i_1} & \cdots & a_{i_1i_k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i_ki_1} & \cdots & a_{i_ki_k} \end{bmatrix}$, $k = 1, \ldots, n$.

对于任意的 $X_k = (x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})^T$,
令 n 维列向量 $X = (x_1, \ldots, x_n)^T$，其中 $x_j = 0$, $\forall j \notin \{i_1, \ldots, i_k\}$,
则 $X_k^HA_kX_k = X^HAX \ge 0$.
由此可见 A_k 是半正定的，因而 $|A_k| \ge 0$.

($\Leftarrow$)设 $A = (a_{ij})_{n\times n}$，其中 $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$. 下面对 A 的阶数 n 用数学归纳法:
①当 $n = 1$ 时，$A = a_{11}$. 由 A 的一切主子式非负可得 $a_{11} \ge 0$，因而 $A = a_{11}$ 半正定.
②当 $n > 1$ 时，假设一切主子式非负的 $n-1$ 阶 Hermite 阵是半正定阵的.
下面证明一切主子式非负的 n 阶 Hermite 阵 $A = (a_{ij})_{n\times n}$ 是半正定阵的.
(i)若 $a_{11} = 0$，则对于任意的 $j > 1$，由于 A 的一切 2 阶主子式非负，故有

$$-|a_{1j}|^2 = -\overline{a_{j1}}a_{1j} = -a_{j1}a_{1j} = \begin{vmatrix} 0 & a_{1j} \\ a_{j1} & a_{jj} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1j} \\ a_{j1} & a_{jj} \end{vmatrix} \ge 0,$$

由此可得 $a_{1j} = 0$, $j = 2, \ldots, n$.

于是 $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$,

其中 $B = \begin{bmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ 为一切主子式非负的 $n-1$ 阶 Hermite 阵,

故由归纳假设可知 B 是半正定阵的.
于是对于任意的 n 维列向量 $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$，令 $Y = (x_2, \ldots, x_n)^T$，则

$$X^HAX = Y^HBY \ge 0.$$

可见 A 是半正定阵.
(ii)若 $a_{11} \ne 0$，则由 A 的一切主子式非负可得 $a_{11} > 0$.

设 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \alpha^H \\ \alpha & B \end{bmatrix}$，其中 $B = \begin{bmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$,

则 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -a_{11}^{-1}\alpha & I_{n-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & \alpha^H \\ \alpha & B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -a_{11}^{-1}\alpha^H \\ 0 & I_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & B-a_{11}^{-1}\alpha\alpha^H \end{bmatrix}$.

令 $C = B - a_{11}^{-1}\alpha\alpha^H$,

则 C 的任一 k 阶主子阵 C_k 由 $\begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix}$ 的第 $i_1, i_2, \ldots, i_k$ $(2 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le n)$行

与列交叉处的元素构成，而且 $C_k = B_k - a_{11}^{-1}\beta\beta^H$,
其中 B_k 由 A 的第 $i_1, i_2, \ldots, i_k$ 行与列交叉处的元素构成,
$\beta^H = (a_{1i_1}, a_{1i_2}, \ldots, a_{1i_k})$.

因而 $\begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & C_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & B_k - a_{11}^{-1}\beta\beta^H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -a_{11}^{-1}\beta & I_k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & \beta^H \\ \beta & B_k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -a_{11}^{-1}\beta^H \\ 0 & I_k \end{bmatrix}$,

其中$\begin{bmatrix} a_{11} & \beta^H \\ \beta & B_k \end{bmatrix}$为 A 的第 $1, i_1, i_2, \dots, i_k$ 行与列交叉处的元素构成的 $k+1$ 主子阵,

故 $a_{11}|C_k| = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & C_k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \beta^H \\ \beta & B_k \end{vmatrix} \geq 0$, 可见$|C_k| \geq 0$,

这就是说 C 的主子式也全非负.

故由归纳假设可知 C 是半正定阵的.

于是存在 $n-1$ 阶可逆阵 P, 使得 $P^HCP = \mathrm{diag}(d_2, \dots, d_n)$, 其中 $d_2, \dots, d_n$ 全非负.

令 $Q = \begin{bmatrix} 1 & -a_{11}^{-1}\alpha^H \\ 0 & I_{n-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P \end{bmatrix}$, 则

$$\begin{aligned} Q^HAQ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P^H \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -a_{11}^{-1}\alpha & I_{n-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & \alpha^H \\ \alpha & B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -a_{11}^{-1}\alpha^H \\ 0 & I_{n-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P^H \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & B - a_{11}^{-1}\alpha\alpha^H \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P^H \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & P^HCP \end{bmatrix} = \mathrm{diag}(a_{11}, d_2, \dots, d_n), \end{aligned}$$

由此可见 A 是半正定阵.

9. 证明: Hermite 阵 A 是负定阵$\Leftrightarrow A$ 的 k 阶顺序主子式与$(-1)^k$同号.

证明: 设 A 是 Hermite 阵, 即 $A^H = A$, 则$(-A)^H = -A$, 即$-A$ 也是 Hermite 阵.

设 D_k 为 A 的 k 阶顺序主子式, 则$-A$ 的 k 阶顺序主子式$\Delta_k = (-1)^kD_k$.

因此, Hermite 阵 A 是负定阵$\Leftrightarrow -A$ 是正定阵

$\Leftrightarrow -A$ 的 k 阶顺序主子式Δ_k全为正数

$\Leftrightarrow A$ 的 k 阶顺序主子式 D_k与$(-1)^k$同号.

10. 设 $A = (a_{ij})_{n\times n}$为正定阵. 证明: $\max\{|a_{ij}| \mid 1 \leq i \neq j \leq n\} < \max\{|a_{ii}| \mid i = 1, 2, \dots, n\}$.

证明: 因为 $A = (a_{ij})_{n\times n}$为正定阵, 所以对于任意的 $1 \leq i < j \leq n$, 有

$a_{ii}, a_{jj} > 0$ 而且 $a_{ii}a_{jj} - a_{ji}a_{ij} = \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj} \end{vmatrix} > 0$. $\overline{a_{ij}} = a_{ji}$

$a_{ij}a_{ji}$

从而$|a_{ij}|^2 = \overline{a_{ij}}a_{ij} < a_{ii}a_{jj} \leq (\max\{a_{kk} \mid k = 1, 2, \dots, n\})^2$,

故$|a_{ji}| = |\overline{a_{ij}}| = |a_{ij}| < \max\{a_{kk} \mid k = 1, 2, \dots, n\}$.

可见 $\max\{|a_{ij}| \mid 1 \leq i \neq j \leq n\} < \max\{|a_{ii}| \mid i = 1, 2, \dots, n\}$.

11. 设 A 为半正定阵. 证明:

(1)必存在半正定阵 S 使 $A = S^2$.

证明: 因为 A 为半正定阵, 所以存在酉矩阵 Q 使得 $Q^HAQ = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$,

其中$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$为 A 的特征值, 且$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$全为非负实数.

令 $S = Q\mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \dots, \sqrt{\lambda_n})Q^H$,

则 S 的特征值为 $\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \dots, \sqrt{\lambda_n}$, 因而 S 也是半正定阵, 而且有

$$\begin{aligned} A &= Q\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)Q^H \\ &= Q\mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \dots, \sqrt{\lambda_n})\mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \dots, \sqrt{\lambda_n})Q^H \\ &= Q\mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \dots, \sqrt{\lambda_n})Q^HQ\mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \dots, \sqrt{\lambda_n})Q^H = S^2. \end{aligned}$$

(2) $|Y^HAX|^2 \leq |Y^HAY||X^HAX|, \forall X, Y \in \mathbb{C}^n$.

证明: $|Y^HAX|^2 = |Y^HSSX|^2 = |Y^HS^HSX|^2 = |(SY)^HSX|^2 = |\langle SX, SY\rangle|^2 \leq \langle SX, SX\rangle\langle SY, SY\rangle$

$$\begin{aligned} &= (SX)^HSX(SY)^HSY = X^HS^HSXY^HS^HSY = X^HSSXY^HSSY \\ &= X^HAXY^HAY = |Y^HAY||X^HAX|. \end{aligned}$$

12. 设 T_1, T_2为主对角元恒正的上三角阵. 若 $T_1^HT_1 = T_2^HT_2$, 证明: $T_1 = T_2$.

证明: 设 $T_1 = (t_{ij})_{n\times n}$, $T_2 = (\tau_{ij})_{n\times n}$为主对角元恒正的上三角阵,

则 T_1, T_2可逆, 而且 T_1^{-1}, T_2^{-1}也是主对角元恒正的上三角阵.

若 $T_1^HT_1 = T_2^HT_2$, 则 $T_1T_2^{-1} = (T_1^H)^{-1}T_2^H$,

其中 $T_1T_2^{-1}$为主对角元恒正的上三角阵,

$(T_1^H)^{-1}T_2^H = (T_1^{-1})^HT_2^H$为主对角元恒正的下三角阵,

故 $\mathrm{diag}(t_{11}\tau_{11}^{-1}, t_{22}\tau_{22}^{-1}, \dots, t_{nn}\tau_{nn}^{-1}) = T_1T_2^{-1} = (T_1^H)^{-1}T_2^H = \mathrm{diag}(t_{11}^{-1}\tau_{11}, t_{22}^{-1}\tau_{22}, \dots, t_{nn}^{-1}\tau_{nn})$.

由此可得 $t_{ii}\tau_{ii}^{-1} = t_{ii}^{-1}\tau_{ii} = (t_{ii}\tau_{ii}^{-1})^{-1} > 0$, 从而 $t_{ii}\tau_{ii}^{-1} = 1, i = 1, 2, \dots, n$.

因此 $T_1T_2^{-1} = \mathrm{diag}(t_{11}\tau_{11}^{-1}, t_{22}\tau_{22}^{-1}, \dots, t_{nn}\tau_{nn}^{-1}) = I$, 即 $T_1 = T_2$.

13. 设 A, B 为同阶 Hermite 阵, 且 A 为正定阵. 证明: 存在可逆阵 C, 使 C^HAC 与 C^HBC 均为对角阵.

证明: 设 A 为 n 阶正定阵, 则存在 n 阶可逆阵 P 使得 $P^HAP = I$.

设 B 为 n 阶 Hermite 阵, 则 P^HBP 也是 n 阶 Hermite 阵,

故存在 n 阶酉矩阵 U 使得 $U^H(P^HBP)U$ 为对角阵.

令 $C = PU$, 则 C 为 n 阶可逆阵, 而且

$$C^HAC = (PU)^HA(PU) = U^HP^HAPU = U^HIU = U^HU = I,$$
$$C^HBC = (PU)^HB(PU) = U^H(P^HBP)U$$

均为对角阵.

14. 设 A 为 n 阶正定阵, 作 n 元 Hermite 二次型$f(X) = \begin{vmatrix} A & X \\ X^H & 0 \end{vmatrix}$ $(X \in \mathbb{C}^n)$, 证明: f 是负定的.

证明: 因为 A 为 n 阶正定阵, 所以存在可逆阵 P 使得 $A = P^HP$.

从而 $A^{-1} = (P^HP)^{-1} = P^{-1}(P^{-1})^H$ 也是正定阵.

又因为$\begin{bmatrix} I & 0 \\ -X^HA^{-1} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & X \\ X^H & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & -A^{-1}X \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & -X^HA^{-1}X \end{bmatrix}$,

所以$-(X^HA^{-1}X)|A| = \begin{vmatrix} A & 0 \\ 0 & -X^HA^{-1}X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & X \\ X^H & 0 \end{vmatrix}$,

其中$|A| > 0$, 且对于任意的非零向量 $X \in \mathbb{C}^n$, $X^HA^{-1}X > 0$, 因而 $f(X) = \begin{vmatrix} A & X \\ X^H & 0 \end{vmatrix} < 0$.

故 f 是负定的.

15. 设正规阵 A 的特征值为$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, 相应的标准正交特征向量系为 $X_1, X_2, \dots, X_n$, 证明: 线性方程组 $AX = kX + b$, $k \in \mathbb{C}, b \in \mathbb{C}^n, k \neq \lambda_i\ (i = 1, 2, \dots, n)$的解可表示为

$$X = \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle b, X_i\rangle}{\lambda_i - k}X_i.$$

证明: 设 $b = b_1X_1 + b_2X_2 + \dots + b_nX_n$,

则$\langle b, X_i\rangle = \langle b_1X_1 + b_2X_2 + \dots + b_nX_n, X_i\rangle = b_i$, $i = 1, 2, \dots, n$.

当 $X = \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle b, X_i\rangle}{\lambda_i - k}X_i$ 时,

$$\begin{aligned} AX &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle b, X_i\rangle}{\lambda_i - k}AX_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_ib_i}{\lambda_i - k}X_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{(\lambda_i - k + k)b_i}{\lambda_i - k}X_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{kb_i}{\lambda_i - k}X_i + \sum_{i=1}^{n} b_iX_i = kX + b. \end{aligned}$$

设 $X=c_1X_1+c_2X_2+\ldots+c_nX_n$, 则

$$AX=A(c_1X_1+c_2X_2+\ldots+c_nX_n)=c_1AX_1+c_2AX_2+\ldots+c_nAX_n$$
$$=c_1\lambda_1X_1+c_2\lambda_2X_2+\ldots+c_n\lambda_nX_n.$$

若 $AX=kX+b$, 则 $c_i\lambda_i=kc_i+b_i$, $c_i=\dfrac{b_i}{\lambda_i-k}=\dfrac{\langle b,X_i\rangle}{\lambda_i-k}$, $i=1,2,\ldots,n$.

故 $X=\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\langle b,X_i\rangle}{\lambda_i-k}X_i$.

证明: 令 $U=(X_1,X_2,\ldots,X_n)$, 则 $U^HAU=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)$.

于是 $U^H(A-kI)U=\mathrm{diag}(\lambda_1-k,\lambda_2-k,\ldots,\lambda_n-k)$,

$$A-kI=U\mathrm{diag}(\lambda_1-k,\lambda_2-k,\ldots,\lambda_n-k)U^H,$$

若 $k\neq\lambda_i\,(i=1,2,\ldots,n)$, 则 $A-kI$ 可逆, 而且

$$(A-kI)^{-1}=U\mathrm{diag}(\lambda_1-k,\lambda_2-k,\ldots,\lambda_n-k)^{-1}U^H.$$

因而有 $AX=kX+b\Leftrightarrow(A-kI)X=b\Leftrightarrow X=(A-kI)^{-1}b$

$$\Leftrightarrow X=U\mathrm{diag}(\lambda_1-k,\lambda_2-k,\ldots,\lambda_n-k)^{-1}U^Hb$$

$$=(X_1,X_2,\ldots,X_n)\begin{pmatrix}(\lambda_1-k)^{-1}&&&\\&(\lambda_2-k)^{-1}&&\\&&\ddots&\\&&&(\lambda_n-k)^{-1}\end{pmatrix}\begin{bmatrix}X_1^Hb\\X_2^Hb\\\vdots\\X_n^Hb\end{bmatrix}$$

$$=(X_1,X_2,\ldots,X_n)\begin{pmatrix}\dfrac{\langle b,X_1\rangle}{\lambda_1-k}\\\dfrac{\langle b,X_2\rangle}{\lambda_2-k}\\\vdots\\\dfrac{\langle b,X_n\rangle}{\lambda_n-k}\end{pmatrix}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\langle b,X_i\rangle}{\lambda_i-k}X_i.$$

16. 设 A,B 为 n 阶 Hermite 阵, 且 B 是正定阵. 设有非零 n 维列向量 X 及数 λ 使

$$AX=\lambda BX,\qquad(*)$$

则称 λ 为 A (关于 B)的广义特征值.

(1)证明: λ 为实数, 且 λ 是 $\det(\lambda I-B^{-1}A)=0$ 的根.

证明: 因为 B 是正定阵, 所以 B 可逆, 且对于任意的 n 维非零列向量 X 有 $X^HBX>0$.

若有非零 n 维列向量 X 及数 λ 使 $AX=\lambda BX$, 则 $(\lambda I-B^{-1}A)X=B^{-1}(\lambda B-A)X=0$,

故 $\det(\lambda I-B^{-1}A)=0$.

同时由 A,B 为 n 阶 Hermite 阵以及 $X^HAX=\lambda X^HBX$ 可得 $\lambda=\dfrac{X^HAX}{X^HBX}$ 为实数.

(2)将满足(*)式的 λ 按大到小排列($\lambda_1\geq\lambda_2\geq\ldots\geq\lambda_n$), 证明

$$\lambda_1=\max\left\{\frac{X^HAX}{X^HBX}\,\middle|\,0\neq X\in\mathbb{C}^n\right\},\ \lambda_n=\min\left\{\frac{X^HAX}{X^HBX}\,\middle|\,0\neq X\in\mathbb{C}^n\right\}.$$

证明: 假若 λ 是 $\det(\lambda I-B^{-1}A)=0$ 的根,

则存在非零 n 维列向量 X 使 $(\lambda I-B^{-1}A)X=0$, 由此可得 $AX=\lambda BX$,

可见 λ 满足(*)式 $\Leftrightarrow\lambda$ 为 $B^{-1}A$ 的特征值, 而且由(1)可知 $B^{-1}A$ 的特征值全为实数.

于是可设 $\lambda_1\geq\lambda_2\geq\ldots\geq\lambda_n$ 为 $B^{-1}A$ 的特征值.

因为 B 是正定阵, 所以存在可逆阵 P 使得 $B=P^HP$.

于是 $B^{-1}A=(P^HP)^{-1}A=P^{-1}(P^{-1})^HA=P^{-1}[(P^{-1})^HAP^{-1}]P$,

可见 $B^{-1}A$ 与 $(P^{-1})^HAP^{-1}$ 相似, 因而 $\lambda_1\geq\lambda_2\geq\ldots\geq\lambda_n$ 也是 $(P^{-1})^HAP^{-1}$ 的特征值.

因而

$$\lambda_1=\max\left\{\frac{Y^H[(P^{-1})^HAP^{-1}]Y}{Y^HY}\,\middle|\,0\neq Y\in\mathbb{C}^n\right\},$$
$$\lambda_n=\min\left\{\frac{Y^H[(P^{-1})^HAP^{-1}]Y}{Y^HY}\,\middle|\,0\neq Y\in\mathbb{C}^n\right\}.$$

对于任意的 n 维列向量 X, 令 $Y=PX$, 则 $Y\neq0\Leftrightarrow X\neq0$, 而且当 $X\neq0$ 时, 有

$$\frac{X^HAX}{X^HBX}=\frac{(P^{-1}Y)^HA(P^{-1}Y)}{(P^{-1}Y)^HB(P^{-1}Y)}=\frac{Y^H[(P^{-1})^HAP^{-1}]Y}{Y^H(P^{-1})^HP^HPP^{-1}Y}=\frac{Y^H[(P^{-1})^HAP^{-1}]Y}{Y^HY}.$$

因而 $\lambda_1=\max\left\{\dfrac{Y^H[(P^{-1})^HAP^{-1}]Y}{Y^HY}\,\middle|\,0\neq Y\in\mathbb{C}^n\right\}=\max\left\{\dfrac{X^HAX}{X^HBX}\,\middle|\,0\neq X\in\mathbb{C}^n\right\}$,

$$\lambda_n=\min\left\{\frac{Y^H[(P^{-1})^HAP^{-1}]Y}{Y^HY}\,\middle|\,0\neq Y\in\mathbb{C}^n\right\}=\min\left\{\frac{X^HAX}{X^HBX}\,\middle|\,0\neq X\in\mathbb{C}^n\right\}.$$

17. 设 A,B 为同阶 Hermite 阵, 且 A 正定. 证明: AB 的特征值都是实数.

证明: 因为 A,B 为同阶 Hermite 阵, 且 A 正定,

所以 A 可逆, A^{-1} 也正定, 而且对于任意的 n 维列向量 X, $X^HA^{-1}X$ 与 X^HBX 都是实数.

若 λ 为 AB 的特征值, 则存在 n 维非零列向量 X 使 $ABX=\lambda X$,

于是 $BX=\lambda A^{-1}X$, $X^HBX=\lambda X^HA^{-1}X$, 其中 $X^HA^{-1}X>0$,

故 $\lambda=\dfrac{X^HAX}{X^HBX}$ 为实数.

即合同于E

证明: 因为A正定, 所以存在可逆阵P使得 $A=P^HP$.

于是 $(P^H)^{-1}ABP^H=(P^H)^{-1}P^HPBP^H=PBP^H$,

可见AB与 PBP^H 相似.

又因为 $(PBP^H)^H=PB^HP^H=PBP^H$, 即 PBP^H 为Hermite阵,

所以 PBP^H 的特征值均为实数

而相似的矩阵具有相同的特征值,

故AB的特征值都为实数.

1. 完成第节中例 1 的证明，即验证下列向量范数满足范数的定义，其中 $X=(x_1, x_2, \ldots, x_n)^{\mathrm T}$.

(1) 1-范数: $\|X\|_1=\sum_{i=1}^{n}|x_i|$,

证明: ①正定性

$X=(x_1, x_2, \ldots, x_n)^{\mathrm T}\neq 0 \Rightarrow \exists\, x_i\neq 0 \Rightarrow \|X\|_1=\sum_{i=1}^{n}|x_i|\geq |x_i|>0.$

②齐次性

$\|kX\|_1=\sum_{i=1}^{n}|kx_i|=|k|\sum_{i=1}^{n}|x_i|=|k|\cdot\|X\|_1.$

③三角不等式

设 $X=(x_1, x_2, \ldots, x_n)^{\mathrm T}$, $Y=(y_1, y_2, \ldots, y_n)^{\mathrm T}$, 则

$\|X+Y\|_1=\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|\leq\sum_{i=1}^{n}(|x_i|+|y_i|)=\sum_{i=1}^{n}|x_i|+\sum_{i=1}^{n}|y_i|=\|X\|_1+\|Y\|_1.$

(2) 2-范数: $\|X\|_2=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2\right)^{1/2}=(X^{\mathrm H}X)^{1/2}$,

证明: ①正定性

$X=(x_1, x_2, \ldots, x_n)^{\mathrm T}\neq 0 \Rightarrow \exists\, x_i\neq 0 \Rightarrow \|X\|_2=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2\right)^{1/2}\geq |x_i|>0.$

②齐次性

$\|kX\|_2=\left(\sum_{i=1}^{n}|kx_i|^2\right)^{1/2}=\left(\sum_{i=1}^{n}|k|^2|x_i|^2\right)^{1/2}=|k|\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2\right)^{1/2}=|k|\cdot\|X\|_2.$

③三角不等式

设 $X=(x_1, x_2, \ldots, x_n)^{\mathrm T}$, $Y=(y_1, y_2, \ldots, y_n)^{\mathrm T}$, 则

$$
\begin{aligned}
&|\langle X, Y\rangle|^2\leq\langle X, X\rangle\langle Y, Y\rangle=\|X\|_2^2\cdot\|Y\|_2^2\\
\Rightarrow\ &|\langle X, Y\rangle|=\|X\|_2\cdot\|Y\|_2\\
\Rightarrow\ &\|X+Y\|_2^2=\langle X+Y, X+Y\rangle=\langle X, X\rangle+\langle X, Y\rangle+\langle Y, X\rangle+\langle Y, Y\rangle\\
&=\|X\|_2^2+2\mathrm{Re}\langle X, Y\rangle+\|Y\|_2^2\\
&\leq\|X\|_2^2+2|\langle X, Y\rangle|+\|Y\|_2^2\\
&\leq\|X\|_2^2+2\|X\|_2\cdot\|Y\|_2+\|Y\|_2^2=(\|X\|_2+\|Y\|_2)^2\\
\Rightarrow\ &\|X+Y\|_2\leq\|X\|_2+\|Y\|_2.
\end{aligned}
$$

(3) ∞-范数: $\|X\|_\infty=\max\{|x_i|\mid i=1, 2, \ldots, n\}$.

证明: ①正定性

$X=(x_1, x_2, \ldots, x_n)^{\mathrm T}\neq 0\Rightarrow\exists\, x_j\neq 0\Rightarrow\|X\|_\infty=\max\{|x_i|\mid i=1, 2, \ldots, n\}\geq|x_j|>0.$

②齐次性

$\|kX\|_\infty=\max\{|kx_i|\mid i=1, 2, \ldots, n\}=|k|\cdot\max\{|x_i|\mid i=1, 2, \ldots, n\}=|k|\cdot\|X\|_\infty.$

③三角不等式

设 $X=(x_1, x_2, \ldots, x_n)^{\mathrm T}$, $Y=(y_1, y_2, \ldots, y_n)^{\mathrm T}$, $p\geq 1$, 则由 Minkowski 不等式可得

$$\|X+Y\|_p=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^p\right)^{1/p}\leq\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{i=1}^{n}|y_i|^p\right)^{1/p}=\|X\|_p+\|Y\|_p.$$

上式两边取极限得

$$\|X+Y\|_\infty=\lim_{p\to+\infty}\|X+Y\|_p\leq\lim_{p\to+\infty}\|X\|_p+\lim_{p\to+\infty}\|Y\|_p=\|X\|_\infty+\|Y\|_\infty.$$

2. 在 $\mathbb{C}^n$ 中设 $X=(x_1, x_2, \ldots, x_n)^{\mathrm T}$, 对于正实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$, 规定

$$\|X\|=\sum_{i=1}^{n}a_i|x_i|\quad(\forall X\in\mathbb{C}^n),$$

证明: $\|\cdot\|$ 是 $\mathbb{C}^n$ 上范数.

证明: ①正定性

$X=(x_1, x_2, \ldots, x_n)^{\mathrm T}\neq 0\Rightarrow\exists\, x_i\neq 0\Rightarrow\|X\|=\sum_{i=1}^{n}a_i|x_i|\geq a_i|x_i|>0.$

②齐次性

$\|kX\|=\sum_{i=1}^{n}a_i|kx_i|=|k|\sum_{i=1}^{n}a_i|x_i|=|k|\cdot\|X\|.$

③三角不等式

设 $X=(x_1, x_2, \ldots, x_n)^{\mathrm T}$, $Y=(y_1, y_2, \ldots, y_n)^{\mathrm T}$, 则

$\|X+Y\|=\sum_{i=1}^{n}a_i|x_i+y_i|\leq\sum_{i=1}^{n}(a_i|x_i|+a_i|y_i|)=\sum_{i=1}^{n}a_i|x_i|+\sum_{i=1}^{n}a_i|y_i|=\|X\|+\|Y\|.$

3. 设 $\|\cdot\|_a$ 与 $\|\cdot\|_b$ 均是 $\mathbb{C}^n$ 的范数, k_1, k_2 为正实数. 证明: $\|X\|=k_1\|X\|_a+k_2\|X\|_b\quad(\forall X\in\mathbb{C}^n)$ 是 $\mathbb{C}^n$ 的范数.

证明: ①正定性

$X=(x_1, x_2, \ldots, x_n)^{\mathrm T}\neq 0\Rightarrow\|X\|=k_1\|X\|_a+k_2\|X\|_b>0.$

②齐次性

$\|kX\|=k_1\|kX\|_a+k_2\|kX\|_b=k_1|k|\cdot\|X\|_a+k_2|k|\cdot\|X\|_b=|k|(k_1\|X\|_a+k_2\|X\|_b)=|k|\cdot\|X\|.$

③三角不等式

设 $X=(x_1, x_2, \ldots, x_n)^{\mathrm T}$, $Y=(y_1, y_2, \ldots, y_n)^{\mathrm T}$, 则

$$
\begin{aligned}
\|X+Y\|&=k_1\|X+Y\|_a+k_2\|X+Y\|_b\\
&\leq k_1(\|X\|_a+\|Y\|_a)+k_2(\|X\|_b+\|Y\|_b)\\
&=(k_1\|X\|_a+k_2\|X\|_b)+(k_1\|Y\|_a+k_2\|Y\|_b)=\|X\|+\|Y\|.
\end{aligned}
$$

4. 设 A 为 n 阶正定阵, 定义 $\|X\|=\sqrt{X^{\mathrm H}AX}$, $\forall X\in\mathbb{C}^n$.

(1)证明: $\|\cdot\|$ 是 $\mathbb{C}^n$ 的范数.

证明: ①正定性

A 为 n 阶正定阵, $X=(x_1, x_2, \ldots, x_n)^{\mathrm T}\neq 0$

$\Rightarrow X^{\mathrm H}AX>0\Rightarrow\|X\|=\sqrt{X^{\mathrm H}AX}>0.$

②齐次性

$\|kX\|=\sqrt{(kX)^{\mathrm H}A(kX)}=\sqrt{\bar{k}kX^{\mathrm H}AX}=\sqrt{|k|^2X^{\mathrm H}AX}=|k|\sqrt{X^{\mathrm H}AX}=|k|\cdot\|X\|.$

③三角不等式

因为 A 为 n 阶正定阵, 所以存在 n 阶可逆阵 P 使得 $A=P^{\mathrm H}P$.

设 $X=(x_1, x_2, \ldots, x_n)^{\mathrm T}$, $Y=(y_1, y_2, \ldots, y_n)^{\mathrm T}$, 则

$$
\begin{aligned}
\|X+Y\|&=\sqrt{(X+Y)^{\mathrm H}P^{\mathrm H}P(X+Y)}=\sqrt{[P(X+Y)]^{\mathrm H}[P(X+Y)]}=\|PX+PY\|_2\\
&\leq\|PX\|_2+\|PY\|_2=\sqrt{(PX)^{\mathrm H}(PX)}+\sqrt{(PY)^{\mathrm H}(PY)}\\
&=\sqrt{X^{\mathrm H}P^{\mathrm H}PX}+\sqrt{Y^{\mathrm H}P^{\mathrm H}PY}=\sqrt{X^{\mathrm H}AX}+\sqrt{Y^{\mathrm H}AY}=\|X\|+\|Y\|.
\end{aligned}
$$

(2)当 $A=\mathrm{diag}(d_1, d_2, \ldots, d_n)$, 其中 $d_i>0\ (i=1, 2, \ldots, n)$, 具体写出 $\|X\|$ 的表达式.

解: 设 $X=(x_1, x_2, \ldots, x_n)^{\mathrm T}$, 则 $X^{\mathrm H}AX=\sum_{i=1}^{n}d_i|x_i|^2$, $\|X\|=\sqrt{X^{\mathrm H}AX}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}d_i|x_i|^2}$.

5. 在 $\mathbb{C}^n$ 中证明: 对任一 $X\in\mathbb{C}^n$, 有

(1) $\|X\|_\infty \le \|X\|_1 \le n\|X\|_\infty$.

(2) $\|X\|_2 \le \|X\|_1 \le \sqrt{n}\,\|X\|_2$.

(3) $\|X\|_\infty \le \|X\|_2 \le \sqrt{n}\,\|X\|_\infty$.

证明：设 $X=(x_1, x_2, \ldots, x_n)^{\mathrm T}$ 为 $\mathbb{C}^n$ 中的非零向量，

令 $k=|x_1|+\ldots+|x_n|$, $Y=(y_1, y_2, \ldots, y_n)^{\mathrm T}=k^{-1}X$,

则 $|y_1|+\ldots+|y_n|=1$, $\|X\|_a=\|kY\|_a=|k|\cdot\|Y\|_a$, 其中 $\|\cdot\|_a$ 为 $\mathbb{C}^n$ 的任意范数.

于是对于 $\mathbb{C}^n$ 的任意范数 $\|\cdot\|_a$ 和 $\|\cdot\|_b$，有 $\dfrac{\|Y\|_a}{\|Y\|_b}=\dfrac{\|X\|_a}{\|X\|_b}$.

因为 $\dfrac{\|Y\|_a}{\|Y\|_b}$ 在有界闭集 $S=\{Y=(y_1, \ldots, y_n)^{\mathrm T} \mid \sum\limits_{i=1}^{n}|y_i|=1\}$ 上连续，

故存在最小值 k_1 和最大值 k_2.

于是对于任意的 $0\neq X\in\mathbb{C}^n$，有 $k_1\le\dfrac{\|X\|_a}{\|X\|_b}\le k_2$.

从而有 $k_1\|X\|_b\le\|X\|_a\le k_2\|X\|_b$.

当 $X=0$ 时，$k_1\|X\|_b\le\|X\|_a\le k_2\|X\|_b$ 依然成立.

(1) $\dfrac{\|Y\|_1}{\|Y\|_\infty}$ 在有界闭集 $S=\{Y=(y_1, \ldots, y_n)^{\mathrm T} \mid \sum\limits_{i=1}^{n}|y_i|=1\}$ 上的最小值为 1，最大值为 n,

故 $\|X\|_\infty\le\|X\|_1\le n\|X\|_\infty$.

(2) $\dfrac{\|Y\|_1}{\|Y\|_2}$ 在有界闭集 $S=\{Y=(y_1, \ldots, y_n)^{\mathrm T} \mid \sum\limits_{i=1}^{n}|y_i|=1\}$ 上的最小值为 1，最大值为 $\sqrt{n}$,

故 $\|X\|_2\le\|X\|_1\le\sqrt{n}\,\|X\|_2$.

(3) $\dfrac{\|Y\|_2}{\|Y\|_\infty}$ 在有界闭集 $S=\{Y=(y_1, \ldots, y_n)^{\mathrm T} \mid \sum\limits_{i=1}^{n}|y_i|=1\}$ 上的最小值为 1，最大值为 $\sqrt{n}$,

故 $\|X\|_\infty\le\|X\|_2\le\sqrt{n}\,\|X\|_\infty$.

6. 在一维线性空间 $\mathbb{R}$ 中绝对值 $|\cdot|$ 是一种范数. 证明：对于 $\mathbb{R}$ 中任一种范数 $\nu(\cdot)$，必存在正实数 a 使 $\nu(x)=a|x|$ $(\forall x\in\mathbb{R})$.

证明：令 $a=\nu(1)$，则由 $\nu(\cdot)$ 的正定性可知 $a>0$.

由 $\nu(\cdot)$ 的齐次性可知 $\nu(x)=\nu(x\cdot1)=|x|\cdot\nu(1)=a|x|$ $(\forall x\in\mathbb{R})$.

7. 将上题之结论推广到复数域上一维线性空间 $V(\mathbb{C})$. 设 $\|\cdot\|$ 为 $V(\mathbb{C})$ 的指定范数，$\nu_a(\cdot)$ 为 $V(\mathbb{C})$ 的任一种范数.

解：设 α 为 $V(\mathbb{C})$ 的一组基，则 $\alpha\neq0$. 由 $\|\cdot\|$ 和 $\nu_a(\cdot)$ 的正定性可知 $\|\alpha\|, \nu_a(\alpha)>0$.

令 $b=\nu_a(\alpha)/\|\alpha\|$，则 $b>0$.

于是对于任意的 $\xi\in V(\mathbb{C})$，设 $\xi=k\alpha$，其中 $k\in\mathbb{C}$，由 $\|\cdot\|$ 和 $\nu_a(\cdot)$ 的齐次性可知

$\|\xi\|=\|k\alpha\|=|k|\cdot\|\alpha\|$, $\nu_a(\xi)=\nu_a(k\alpha)=|k|\cdot\nu_a(\alpha)=|k|\cdot\|\alpha\|\cdot\nu_a(\alpha)/\|\alpha\|=b\|\xi\|$.

这就是说，对于 $V(\mathbb{C})$ 的任一种范数 $\nu_a(\cdot)$，必存在正实数 b 使 $\nu_a(\xi)=b\|\xi\|$, $\xi\in V(\mathbb{C})$.

8. 设 $\|\cdot\|$ 为相容的矩阵范数. 证明：

(1) $\|I\|\ge1$.

证明：$\|I\|\cdot\|I\|\ge\|I^2\|=\|I\|>0\Rightarrow\|I\|\ge1$.

(2)若 A 为可逆阵，λ 为 A 的特征值，则 $\|A^{-1}\|^{-1}\le|\lambda|\le\|A\|$.

证明：若 λ 为 A 的特征值，则存在非零向量 ξ 使得 $A\xi=\lambda\xi$.

若 A 为可逆阵，则 $\lambda\neq0$. (否则 $A\xi=\lambda\xi=0\Rightarrow\xi=A^{-1}A\xi=0$，矛盾!)

于是由 $A\xi=\lambda\xi$ 可得 $A^{-1}\xi=\lambda^{-1}\xi$.

$A\xi=\lambda\xi\Rightarrow\|A\|\cdot\|\xi\|\ge\|A\xi\|=\|\lambda\xi\|=|\lambda|\cdot\|\xi\|\Rightarrow\|A\|\ge|\lambda|$.

$A^{-1}\xi=\lambda^{-1}\xi\Rightarrow\|A^{-1}\|\cdot\|\xi\|\ge\|A^{-1}\xi\|=\|\lambda^{-1}\xi\|=|\lambda^{-1}|\cdot\|\xi\|\Rightarrow\|A^{-1}\|\ge|\lambda^{-1}|=|\lambda|^{-1}>0$

$\Rightarrow\|A^{-1}\|^{-1}\le|\lambda|$.

9. 证明：$\|A\|=n\|A\|_{m_\infty}$ $(\forall A\in\mathbb{C}^{s\times n})$ 是相容矩阵范数.

证明：设 $A=(a_{ij})_{s\times n}\in\mathbb{C}^{s\times n}$, $B=(b_{ij})_{n\times t}\in\mathbb{C}^{n\times t}$.

令 $M=\max\{|a_{ij}| \mid 1\le i\le s, 1\le j\le n\}$, $N=\max\{|b_{jk}| \mid 1\le j\le n, 1\le k\le t\}$，则

$$\|AB\|=t\|AB\|_{m_\infty}=t\cdot\max\{|\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{jk}| \mid 1\le i\le s, 1\le k\le t\}$$

$$\le t\cdot\max\{\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}||b_{jk}| \mid 1\le i\le s, 1\le k\le t\}$$

$$\le t(nMN)=(nM)(tN)=n\|A\|_{m_\infty}t\|B\|_{m_\infty}=\|A\|\cdot\|B\|.$$

故 $\|\cdot\|$ 是相容矩阵范数.

10. 设 $\|\cdot\|$ 是 $\mathbb{C}^{n\times n}$ 上相容矩阵范数，A 为 n 阶可逆阵，且 $\|A^{-1}\|\le1$.

证明：$\|M\|_a=\|AM\|$ $(\forall M\in\mathbb{C}^{n\times n})$ 是 $\mathbb{C}^{n\times n}$ 上相容矩阵范数.

证明：①正定性

A 为 n 阶可逆矩阵，M 为 n 阶非零矩阵

$\Rightarrow AM$ 为 n 阶非零矩阵 $\Rightarrow\|M\|_a=\|AM\|>0$.

②齐次性

$\|kM\|_a=\|A(kM)\|=\|k(AM)\|=|k|\cdot\|AM\|=|k|\cdot\|M\|_a$.

③三角不等式

$\|M+N\|_a=\|A(M+N)\|=\|AM+AN\|\le\|AM\|+\|AN\|=\|M\|_a+\|N\|_a$.

④相容性

$\|MN\|_a=\|A(MN)\|=\|AMA^{-1}AN\|\le\|AM\|\cdot\|A^{-1}\|\cdot\|AN\|\le\|AM\|\cdot\|AN\|=\|M\|_a\cdot\|N\|_a$.

11. 设 $\|\cdot\|$ 是 $\mathbb{C}^{n\times n}$ 上相容矩阵范数，A 为 n 阶可逆阵.

证明：$\|M\|_A=\|A^{-1}MA\|$ $(\forall M\in\mathbb{C}^{n\times n})$ 是 $\mathbb{C}^{n\times n}$ 是上相容矩阵范数.

证明：①正定性

A 为 n 阶可逆矩阵，M 为 n 阶非零矩阵

$\Rightarrow A^{-1}MA$ 为 n 阶非零矩阵 $\Rightarrow\|M\|_A=\|A^{-1}MA\|>0$.

②齐次性

$\|kM\|_A=\|A^{-1}(kM)A\|=\|k(A^{-1}MA)\|=|k|\cdot\|A^{-1}MA\|=|k|\cdot\|M\|_A$.

③三角不等式

$\|M+N\|_A=\|A^{-1}(M+N)A\|=\|A^{-1}MA+A^{-1}NA\|\le\|A^{-1}MA\|+\|A^{-1}NA\|=\|M\|_A+\|N\|_A$.

④相容性

$\|MN\|_a=\|A^{-1}(MN)A\|=\|(A^{-1}MA)(A^{-1}NA)\|\le\|A^{-1}MA\|\cdot\|A^{-1}NA\|=\|M\|_A\cdot\|N\|_A$.

12. 设 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$. 证明：

(1)若 $A^{\mathrm H}A=I_n$，则 $\|A\|_F=\sqrt{n}$, $\|A\|_2=1$.

证明：若 $A^{\mathrm H}A=I_n$，则 $\|A\|_F=(\mathrm{tr}A^{\mathrm H}A)^{1/2}=\sqrt{n}$, $\|A\|_2=\sqrt{\rho(A^{\mathrm H}A)}=\sqrt{\rho(I)}=1$.

(2) $\|A\|_2\le\|A\|_F\le\sqrt{n}\,\|A\|_2$.

证明：因为 $A^{\mathrm H}A$ 是 n 阶半正定阵，所以 $A^{\mathrm H}A$ 的特征值为非负实数.

设 $A^{\mathrm H}A$ 的特征值为 $\lambda_1\ge\lambda_2\ge\ldots\ge\lambda_n\,(\ge0)$,

则 $\|A\|_2=\sqrt{\rho(A^{\mathrm H}A)}=\sqrt{\lambda_1}$, $\|A\|_F=(\mathrm{tr}A^{\mathrm H}A)^{1/2}=(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n)^{1/2}\le(n\lambda_1)^{1/2}$,

因此 $\|A\|_2\le\|A\|_F\le\sqrt{n}\,\|A\|_2$.

13. 设$\|\cdot\|$是$\mathbb{C}^{n\times n}$上相容矩阵范数，且$\|A\|<1$. 证明:

(1) $I-A$ 可逆.

证明：对于任意的非零向量$X=(x_1, x_2, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}}\in\mathbb{C}^n$,

$\|(I-A)X\|=\|X-AX\|\geq\|X\|-\|AX\|\geq\|X\|-\|A\|\cdot\|X\|=(1-\|A\|)\|X\|>0$,

故$(I-A)X\neq 0$.

可见齐次线性方程组$(I-A)X=0$ 只有零解，因而$|I-A|=0$，即 $I-A$ 可逆.

(2) $\|(I-A)^{-1}-I\|\leq\|A\|(1-\|A\|)^{-1}$.

证明: $(I-A)^{-1}-I=(I-A)^{-1}[I-(I-A)]=(I-A)^{-1}A$,

因而$(I-A)^{-1}=I+(I-A)^{-1}A$, $(I-A)^{-1}A=A+(I-A)^{-1}A^2$,

故$\|(I-A)^{-1}A\|=\|A+(I-A)^{-1}A^2\|\leq\|A\|+\|(I-A)^{-1}A\|\cdot\|A\|$,

由此可得$\|(I-A)^{-1}A\|(1-\|A\|)\leq\|A\|$.

又因为$\|A\|<1$，即 $1-\|A\|>0$，故$\|(I-A)^{-1}-I\|\leq\|A\|(1-\|A\|)^{-1}$.

证明: $(I-A)^{-1}-I=(I-A)^{-1}[I-(I-A)]=(I-A)^{-1}A$,

因而$\|(I-A)^{-1}-I\|=\|(I-A)^{-1}A\|=\|(I-A)^{-1}A-A+A\|\leq\|(I-A)^{-1}A-A\|+\|A\|$

$\leq\|(I-A)^{-1}-I\|\cdot\|A\|+\|A\|$,

由此可得$\|(I-A)^{-1}A\|(1-\|A\|)\leq\|A\|$.

又因为$\|A\|<1$，即 $1-\|A\|>0$，故$\|(I-A)^{-1}-I\|\leq\|A\|(1-\|A\|)^{-1}$.

证明:
$$\begin{aligned}\|(I-A)^{-1}-I\|(1-\|A\|)&=\|(I-A)^{-1}-I\|-\|(I-A)^{-1}-I\|\cdot\|A\|\\&\leq\|(I-A)^{-1}-I\|-\|[(I-A)^{-1}-I]A\|\\&\leq\|(I-A)^{-1}-I-[(I-A)^{-1}-I]A\|\\&=\|[(I-A)^{-1}-I](I-A)\|\\&=\|I-(I-A)\|=\|A\|.\end{aligned}$$

又因为$\|A\|<1$，即 $1-\|A\|>0$，故$\|(I-A)^{-1}-I\|\leq\|A\|(1-\|A\|)^{-1}$.

(3)若$\|I\|=1$，则$\|(I-A)^{-1}\|\leq(1-\|A\|)^{-1}$.

证明: $(I-A)^{-1}-I=(I-A)^{-1}[I-(I-A)]=(I-A)^{-1}A$,

故$(I-A)^{-1}=I+(I-A)^{-1}A$.

若$\|I\|=1$，则$\|(I-A)^{-1}\|=\|I+(I-A)^{-1}A\|\leq\|I\|+\|(I-A)^{-1}A\|\leq 1+\|(I-A)^{-1}\|\cdot\|A\|$,

因而$\|(I-A)^{-1}\|(1-\|A\|)\leq 1$,

又因为$\|A\|<1$，即 $1-\|A\|>0$，故$\|(I-A)^{-1}\|\leq(1-\|A\|)^{-1}$.

14. 设分块对角阵$M=\begin{bmatrix}A & O\\ O & B\end{bmatrix}$，已知$\|A\|_F=a$, $\|B\|_F=b$, $\|A\|_2=c$, $\|B\|_2=d$,

分别求$\|M\|_F$和$\|M\|_2$.

解: $M^{\mathrm{H}}M=\begin{bmatrix}A & O\\ O & B\end{bmatrix}^{\mathrm{H}}\begin{bmatrix}A & O\\ O & B\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A^{\mathrm{H}} & O\\ O & B^{\mathrm{H}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A & O\\ O & B\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A^{\mathrm{H}}A & O\\ O & B^{\mathrm{H}}B\end{bmatrix}$.

根据已知条件

$$\|A\|_F=(\mathrm{tr}A^{\mathrm{H}}A)^{1/2}=a,\ \|B\|_F=(\mathrm{tr}B^{\mathrm{H}}B)^{1/2}=b,$$
$$\|A\|_2=[\rho(A^{\mathrm{H}}A)]^{1/2}=c,\ \|B\|_2=[\rho(B^{\mathrm{H}}B)]^{1/2}=d$$

可知 $\mathrm{tr}A^{\mathrm{H}}A=a^2$, $\mathrm{tr}B^{\mathrm{H}}B=b^2$, $\rho(A^{\mathrm{H}}A)=c^2$, $\rho(B^{\mathrm{H}}B)=d^2$.

故$\|M\|_F=(\mathrm{tr}M^{\mathrm{H}}M)^{1/2}=(\mathrm{tr}A^{\mathrm{H}}A+\mathrm{tr}B^{\mathrm{H}}B)^{1/2}=(a^2+b^2)^{1/2}$,

$\|M\|_2=[\rho(M^{\mathrm{H}}M)]^{1/2}=[\max\{\rho(A^{\mathrm{H}}A), \rho(B^{\mathrm{H}}B)\}]^{1/2}=[\max\{c^2, d^2\}]^{1/2}=\max\{c, d\}$.

15. 证明：对任意矩阵A, $\|A\|_2\leq\|A\|_1\|A\|_\infty$.

证明：设$A=(a_{ij})_{s\times n}$，则$A^{\mathrm{H}}A=\begin{bmatrix}\sum\limits_{i=1}^{s}\overline{a_{i1}}a_{i1} & \sum\limits_{i=1}^{s}\overline{a_{i1}}a_{i2} & \cdots & \sum\limits_{i=1}^{s}\overline{a_{i1}}a_{in}\\ \sum\limits_{i=1}^{s}\overline{a_{i2}}a_{i1} & \sum\limits_{i=1}^{s}\overline{a_{i2}}a_{i2} & \cdots & \sum\limits_{i=1}^{s}\overline{a_{i2}}a_{in}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \sum\limits_{i=1}^{s}\overline{a_{in}}a_{i1} & \sum\limits_{i=1}^{s}\overline{a_{in}}a_{i2} & \cdots & \sum\limits_{i=1}^{s}\overline{a_{in}}a_{in}\end{bmatrix}$.

$\|A\|_1=\max\{|a_{1j}|+|a_{2j}|+\ldots+|a_{sj}|\mid j=1, \ldots, n\}$,

$\|A\|_2=[\rho(A^{\mathrm{H}}A)]^{1/2}$,

$\|A\|_\infty=\max\{|a_{i1}|+|a_{i2}|+\ldots+|a_{in}|\mid i=1, \ldots, s\}$.

$$\begin{aligned}\rho_1(A^{\mathrm{H}}A)&=\max\{\sum_{j=1}^{n}\left|\sum_{i=1}^{s}\overline{a_{i1}}a_{ij}\right|, \sum_{j=1}^{n}\left|\sum_{i=1}^{s}\overline{a_{i2}}a_{ij}\right|, \ldots, \sum_{j=1}^{n}\left|\sum_{i=1}^{s}\overline{a_{in}}a_{ij}\right|\}\\&\leq\max\{\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{s}|a_{i1}||a_{ij}|, \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{s}|a_{i2}||a_{ij}|, \ldots, \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{s}|a_{in}||a_{ij}|\}\\&\leq\|A\|_1^2\|A\|_\infty^2,\end{aligned}$$

故$\|A\|_2=[\rho(A^{\mathrm{H}}A)]^{1/2}\leq\|A\|_1\|A\|_\infty$.

16. **[Gelfand's Formula, 1941]**设$A\in\mathbb{C}^{n\times n}$, $\|\cdot\|$是$\mathbb{C}^{n\times n}$上相容的矩阵范数,

证明: $\lim\limits_{k\to+\infty}\|A^k\|^{1/k}=\rho(A)$.

证明: (1)当$\rho(A)=0$ 时, A 的特征值全为 0,

因而 A 的特征多项式 $C(\lambda)=\lambda^n$,

可见 $A^n=C(A)=O$.

故 $k>n$ 时, $\|A^k\|^{1/k}=\|O\|^{1/k}=0$.

于是有 $\lim\limits_{k\to+\infty}\|A^k\|^{1/k}=0=\rho(A)$.

(2)当$\rho(A)\neq 0$ 时，有$\rho(A)>0$.

对于任意的$\rho(A)>\varepsilon>0$，令 $B=(\rho(A)+\varepsilon)^{-1}A$,

则$\rho(B)=\dfrac{\rho(A)}{\rho(A)+\varepsilon}<1$，因而 $\lim\limits_{k\to+\infty}B^k=O$.

故存在自然数 N，当 $k\geq N$ 时, $(\rho(A)+\varepsilon)^{-k}\|A^k\|=\|(\rho(A)+\varepsilon)^{-k}A^k\|=\|B^k\|<1$,

从而有$\|A^k\|<(\rho(A)+\varepsilon)^k$，即$\|A^k\|^{1/k}<\rho(A)+\varepsilon$.

另一方面，由$\rho(A)^k=\rho(A^k)\leq\|A^k\|$可得$\rho(A)-\varepsilon<\rho(A)\leq\|A^k\|^{1/k}$.

于是有$-\varepsilon<\|A^k\|^{1/k}-\rho(A)<\varepsilon$.

所以$\lim\limits_{k\to+\infty}\|A^k\|^{1/k}=\rho(A)$.

17. 设A 为 n 阶方阵. 证明: $\lim\limits_{k\to+\infty}A^k=I\Leftrightarrow A=I$.

证明: ($\Rightarrow$)设 $A=PJP^{-1}$，其中 $J=\mathrm{diag}(J_1, J_2, \ldots, J_s)$, $J_i=\begin{bmatrix}\lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1\\ & & & \lambda_i\end{bmatrix}_{r_i\times r_i}$, $i=1, 2, \ldots, s$.

则 $\mathrm{diag}(J_1^k, J_2^k, \ldots, J_s^k)=J^k=P^{-1}A^kP$,

其中 $J_i^k=\begin{bmatrix} g(\lambda_i) & g'(\lambda_i) & \cdots & \frac{g^{(r_i-1)}(\lambda_i)}{(r_i-1)!} \\ & g(\lambda_i) & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & g'(\lambda_i) \\ & & & g(\lambda_i)\end{bmatrix}$, $g(x)=x^k$, $i=1, 2, \dots, s$.

由 $\lim\limits_{k\to\infty}A^k=I$ 得 $\lim\limits_{k\to\infty}J^k=\lim\limits_{k\to\infty}P^{-1}A^kP=P^{-1}\lim\limits_{k\to\infty}A^kP=P^{-1}IP^{-1}=I$.

因而 $\begin{bmatrix} \lim\limits_{k\to\infty}\lambda_i^k & \lim\limits_{k\to\infty}k\lambda_i^{k-1} & \cdots & * \\ & \lim\limits_{k\to\infty}\lambda_i^k & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \lim\limits_{k\to\infty}k\lambda_i^{k-1} \\ & & & \lim\limits_{k\to\infty}\lambda_i^k\end{bmatrix}=\lim\limits_{k\to\infty}J_i^k=I_{r_i}$, $i=1, 2, \dots, s$.

由此可得 $\lim\limits_{k\to\infty}\lambda_i^k=1$, 进而有 $\lambda_i=1$, $i=1, 2, \dots, s$.

假若存在 $r_i>1$, 则 $\lim\limits_{k\to\infty}k=\lim\limits_{k\to\infty}k\lambda_i^{k-1}=0$, 但这是不可能的.

故 $r_1=r_2=\dots=r_s=1$.

于是有 $A=PJP^{-1}=P\mathrm{diag}(J_1, J_2, \dots, J_s)P^{-1}=PIP^{-1}=I$.

($\Rightarrow$)若 $A=I$, 则对于任意的正整数 k, 有 $A^k=I$, 故 $\lim\limits_{k\to\infty}A^k=I$.

18. 设 n 阶方阵 A 的谱半径小于 1. 求 $\sum\limits_{m=0}^{\infty}mA^m$.

解: 由 $\sum\limits_{m=0}^{\infty}z^m=(1-z)^{-1}$ $(|z|<1)$逐项求导得 $\sum\limits_{m=1}^{\infty}mz^{m-1}=(1-z)^{-2}$ $(|z|<1)$.

于是有 $\sum\limits_{m=0}^{\infty}mz^m=z\sum\limits_{m=1}^{\infty}mz^{m-1}=z(1-z)^{-2}$ $(|z|<1)$.

因此 $\sum\limits_{m=0}^{\infty}mA^m=A(I-A)^{-2}$.

19. 设 A 为 n 阶方阵. 证明:

(1) $\det(e^A)=e^{\mathrm{tr}A}$.

证明: 设 $A=PJP^{-1}$, 其中 $J=\mathrm{diag}(J_1, J_2, \dots, J_s)$, $J_i=\begin{bmatrix}\lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i\end{bmatrix}_{r_i\times r_i}$, $i=1, 2, \dots, s$.

则 $\mathrm{tr}A=r_1\lambda_1+r_2\lambda_2+\dots+r_s\lambda_s$, $\mathrm{diag}(J_1^k, J_2^k, \dots, J_s^k)=J^k=P^{-1}A^kP$,

其中 $J_i^k=\begin{bmatrix} g(\lambda_i) & g'(\lambda_i) & \cdots & \frac{g^{(r_i-1)}(\lambda_i)}{(r_i-1)!} \\ & g(\lambda_i) & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & g'(\lambda_i) \\ & & & g(\lambda_i)\end{bmatrix}$, $g(x)=x^k$, $i=1, 2, \dots, s$,

于是 $e^A=\sum\limits_{m=0}^{\infty}\frac{A^m}{m!}=\sum\limits_{m=0}^{\infty}\frac{PJ^mP^{-1}}{m!}=P\left(\sum\limits_{m=0}^{\infty}\frac{J^m}{m!}\right)P^{-1}=Pe^JP^{-1}$,

其中 $e^J=\sum\limits_{m=0}^{\infty}\frac{J^m}{m!}=\mathrm{diag}\left(\sum\limits_{m=0}^{\infty}\frac{J_1^m}{m!}, \sum\limits_{m=0}^{\infty}\frac{J_2^m}{m!}, \dots, \sum\limits_{m=0}^{\infty}\frac{J_s^m}{m!}\right)=\mathrm{diag}(e^{J_1}, e^{J_2}, \dots, e^{J_s})$,

$e^{J_i}=\sum\limits_{m=0}^{\infty}\frac{J_i^m}{m!}=\begin{bmatrix}\sum\limits_{m=0}^{\infty}\frac{\lambda_i^m}{m!} & * & \cdots & * \\ & \sum\limits_{m=0}^{\infty}\frac{\lambda_i^m}{m!} & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & * \\ & & & \sum\limits_{m=0}^{\infty}\frac{\lambda_i^m}{m!}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}e^{\lambda_i} & * & \cdots & * \\ & e^{\lambda_i} & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & * \\ & & & e^{\lambda_i}\end{bmatrix}$,

因而 $\det(e^A)=\det(e^J)=(e^{\lambda_1})^{r_1}(e^{\lambda_2})^{r_2}\cdots(e^{\lambda_s})^{r_s}=e^{r_1\lambda_1+r_2\lambda_2+\dots+r_s\lambda_s}=e^{\mathrm{tr}A}$.

(2)若$\|\cdot\|$为相容矩阵范数, 且$\|I\|=1$, 则$\|e^A\|\le e^{\|A\|}$.

证明: $\|e^A\|=\left\|\sum\limits_{m=0}^{\infty}\frac{A^m}{m!}\right\|\le\sum\limits_{m=0}^{\infty}\frac{\|A^m\|}{m!}\le\sum\limits_{m=0}^{\infty}\frac{\|A\|^m}{m!}=e^{\|A\|}$. (注意最后一个等号用到条件$\|I\|=1$.)

(3)以$\|\cdot\|_{m_1}$为例, 证明: 存在非零矩阵 A 使$\|e^A\|_{m_1}>e^{\|A\|_{m_1}}$.

证明: 取 $A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$, 则$\|A\|_{m_1}=1$, $e^A=I+A+O+\dots=I+A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$,

$\|e^A\|_{m_1}=3>e^1=e^{\|A\|_{m_1}}$.

20. 已知 $A=\begin{bmatrix}2&0&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$, 求 e^A, $\sin A$, $\cos A$.

解: 因为 A 是 Jordan 形矩阵, 故由定理 5.4.1 得

$e^A=\begin{bmatrix}e^2&0&0&0\\0&e^1&e^1&0\\0&0&e^1&0\\0&0&0&e^0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}e^2&0&0&0\\0&e&e&0\\0&0&e&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$,

$\sin A=\begin{bmatrix}\sin 2&0&0&0\\0&\sin 1&\cos 1&0\\0&0&\sin 1&0\\0&0&0&\sin 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sin 2&0&0&0\\0&\sin 1&\cos 1&0\\0&0&\sin 1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$,

$\cos A=\begin{bmatrix}\cos 2&0&0&0\\0&\cos 1&-\sin 1&0\\0&0&\cos 1&0\\0&0&0&\cos 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos 2&0&0&0\\0&\cos 1&-\sin 1&0\\0&0&\cos 1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$.

21. 已知 $A=\begin{bmatrix}0&0\\1&-2\end{bmatrix}$, 求 e^A, $\sin A$, $\cos A$.

解: $|\lambda I-A|=\lambda(\lambda+2)$, 所以 A 的特征值为 $\lambda_1=0$, $\lambda_2=-2$,

容易求得对应于 $\lambda_1=0$ 的一个特征值 $\xi_1=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$, 对应于 $\lambda_2=-2$ 的一个特征值 $\xi_2=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$,

令 $P=(\xi_1, \xi_2)=\begin{bmatrix}2&0\\1&1\end{bmatrix}$, $J=\begin{bmatrix}0&0\\0&-2\end{bmatrix}$, 则 $P^{-1}=\begin{bmatrix}1/2&0\\-1/2&1\end{bmatrix}$, 且 $A=PJP^{-1}$.

于是 $e^J=\begin{bmatrix}e^0&0\\0&e^{-2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&e^{-2}\end{bmatrix}$, $\sin J=\begin{bmatrix}\sin 0&0\\0&\sin(-2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&-\sin 2\end{bmatrix}$,

$$\cos J=\begin{bmatrix}\cos 0 & 0\\ 0 & \cos(-2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \cos 2\end{bmatrix},$$

$$e^A=Pe^JP^{-1}=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & e^{-2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1/2 & 0\\ -1/2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 1 & e^{-2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1/2 & 0\\ -1/2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2e^2} & e^{-2}\end{bmatrix},$$

$$\sin A=P(\sin J)P^{-1}=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & -\sin 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1/2 & 0\\ -1/2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & -\sin 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1/2 & 0\\ -1/2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ \frac{\sin 2}{2} & -\sin 2\end{bmatrix},$$

$$\cos A=P(\cos J)P^{-1}=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \cos 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1/2 & 0\\ -1/2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 1 & \cos 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1/2 & 0\\ -1/2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ \frac{1}{2}-\frac{\cos 2}{2} & \cos 2\end{bmatrix}.$$

解: $|\lambda I-A|=\lambda(\lambda+2)$, 所以 A 的最小多项式为 $\lambda(\lambda+2)$,

(1)设 $e^A=aI+bA, f(x)=e^x, g(x)=a+bx$,

则 $f(0)=g(0), f(-2)=g(-2)$, 即 $1=a, e^{-2}=a-2b$,

由此可得 $a=1, b=\frac{1}{2}-\frac{1}{2e^2}$, 因而 $e^A=I+(\frac{1}{2}-\frac{1}{2e^2})A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2e^2} & e^{-2}\end{bmatrix}$.

(2)设 $\sin A=aI+bA, f(x)=\sin x, g(x)=a+bx$,

则 $f(0)=g(0), f(-2)=g(-2)$, 即 $0=a, \sin(-2)=a-2b$,

由此可得 $a=0, b=\frac{\sin 2}{2}$, 因而 $\sin A=\frac{\sin 2}{2}A=\begin{bmatrix}0 & 0\\ \frac{\sin 2}{2} & -\sin 2\end{bmatrix}$.

(3)设 $\cos A=aI+bA, f(x)=\cos x, g(x)=a+bx$,

则 $f(0)=g(0), f(-2)=g(-2)$, 即 $1=a, \cos(-2)=a-2b$,

由此可得 $a=1, b=\frac{1}{2}-\frac{\cos 2}{2}$, 因而 $\cos A=I+(\frac{1}{2}-\frac{\cos 2}{2})A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ \frac{1}{2}-\frac{\cos 2}{2} & \cos 2\end{bmatrix}$.

22. 求 e^{At}, 已知

(1) $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & -2\end{bmatrix}$. (2) $A=\begin{bmatrix}0 & 4\\ 3 & 1\end{bmatrix}$. (3) $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$.

解: (1) $|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 0 & -2\\ 0 & \lambda & 0\\ 1 & 0 & \lambda+2\end{vmatrix}=\lambda\begin{vmatrix}\lambda-1 & -2\\ 1 & \lambda+2\end{vmatrix}=\lambda\begin{vmatrix}\lambda & \lambda\\ 1 & \lambda+2\end{vmatrix}=\lambda^2\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & \lambda+2\end{vmatrix}=\lambda^2(\lambda+1)$.

$A(A+I)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & -1\end{bmatrix}=O$, 可见 A 的最小多项式为 $\lambda(\lambda+1)$.

设 $e^{At}=a(t)I+b(t)A, f(x)=e^{xt}, g(x)=a(t)+b(t)x$,

则 $1=f(0)=g(0)=a(t), e^{-t}=f(-1)=g(-1)=a(t)-b(t)$,

由此可得 $a(t)=1, b(t)=1-e^{-t}$,

因而 $e^{At}=I+(1-e^{-t})A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1-e^{-t} & 0 & 2-2e^{-t}\\ 0 & 0 & 0\\ e^{-t}-1 & 0 & 2e^{-t}-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2-e^{-t} & 0 & 2-2e^{-t}\\ 0 & 1 & 0\\ e^{-t}-1 & 0 & 2e^{-t}-1\end{bmatrix}$.

(2) $|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda & -4\\ -3 & \lambda-1\end{vmatrix}\times(-1)=\begin{vmatrix}\lambda+3 & -\lambda-3\\ -3 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda+3)\begin{vmatrix}1 & -1\\ -3 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda+3)(\lambda-4)$.

可见 A 的特征值为 $\lambda_1=-3, \lambda_2=4$.

容易求得对应于 $\lambda_1=-3$ 的一个特征向量 $\xi_1=\begin{bmatrix}4\\ -3\end{bmatrix}$,

对应于 $\lambda_2=4$ 的一个特征向量 $\xi_2=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$.

令 $P=(\xi_1,\xi_2)=\begin{bmatrix}4 & 1\\ -3 & 1\end{bmatrix}, J=\begin{bmatrix}-3 & 0\\ 0 & 4\end{bmatrix}$, 则 $P^{-1}=\begin{bmatrix}1/7 & -1/7\\ 3/7 & 4/7\end{bmatrix}$, 且 $A=PJP^{-1}$.

于是 $e^{Jt}=\begin{bmatrix}e^{-3t} & 0\\ 0 & e^{4t}\end{bmatrix}$,

$$e^{At}=Pe^{Jt}P^{-1}=\begin{bmatrix}4 & 1\\ -3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^{-3t} & 0\\ 0 & e^{4t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1/7 & -1/7\\ 3/7 & 4/7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4e^{-3t} & e^{4t}\\ -3e^{-3t} & e^{4t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1/7 & -1/7\\ 3/7 & 4/7\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{4}{7}e^{-3t}+\frac{3}{7}e^{4t} & -\frac{4}{7}e^{-3t}+\frac{4}{7}e^{4t}\\ -\frac{3}{7}e^{-3t}+\frac{3}{7}e^{4t} & \frac{3}{7}e^{-3t}+\frac{4}{7}e^{4t}\end{bmatrix}.$$

(3) $|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -2 & -3\\ 0 & \lambda-2 & -3\\ 0 & 0 & \lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)$.

可见 A 的特征值为 $\lambda_1=1, \lambda_2=2, \lambda_3=3$.

容易求得对应特征向量 $\xi_1=\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 0\end{bmatrix}, \xi_2=\begin{bmatrix}2\\ 1\\ 0\end{bmatrix}, \xi_3=\begin{bmatrix}9\\ 6\\ 2\end{bmatrix}$.

令 $P=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\begin{bmatrix}1 & 2 & 9\\ 0 & 1 & 6\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}, J=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$, 则 $P^{-1}=\begin{bmatrix}1 & -2 & 3/2\\ 0 & 1 & -3\\ 0 & 0 & 1/2\end{bmatrix}$, 且 $A=PJP^{-1}$.

于是 $e^{Jt}=\begin{bmatrix}e^t & 0 & 0\\ 0 & e^{2t} & 0\\ 0 & 0 & e^{3t}\end{bmatrix}$,

$$e^{At}=Pe^{Jt}P^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 9\\ 0 & 1 & 6\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^t & 0 & 0\\ 0 & e^{2t} & 0\\ 0 & 0 & e^{3t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -2 & 3/2\\ 0 & 1 & -3\\ 0 & 0 & 1/2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}e^t & 2e^{2t} & 9e^{3t}\\ 0 & e^{2t} & 6e^{3t}\\ 0 & 0 & 2e^{3t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -2 & 3/2\\ 0 & 1 & -3\\ 0 & 0 & 1/2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}e^t & -2e^t+2e^{2t} & \frac{3}{2}e^t-6e^{2t}+\frac{9}{2}e^{3t}\\ 0 & e^{2t} & -3e^{2t}+3e^{3t}\\ 0 & 0 & e^{3t}\end{bmatrix}.$$

23. 设 $A\in C^{n\times n}, X_0, b\in C^{n\times 1}$, 且 $\det A\neq 0$, 证明:

$$\begin{cases}\frac{d}{dt}X(t)=AX(t)+b,\\ X(0)=X_0\end{cases}$$

的解为 $X(t)=e^{At}X_0+A^{-1}e^{At}b-A^{-1}b$, 且若 A 的特征值的实部全为负, 则 $\lim\limits_{t\to+\infty}X(t)=-A^{-1}b$ (t 为实变量).

证明: 根据定理 5.5.4, $X(t)=e^{At}X_0+e^{At}\int_0^t e^{-A\tau}b\,d\tau$.

根据定理 5.5.4, $\frac{\mathrm{d}e^{-At}}{\mathrm{d}t}=-Ae^{-At}$.

又因为 $\det A\neq 0$, 所以 A 可逆, 于是有 $e^{-At}=\frac{\mathrm{d}(-A^{-1}e^{-At})}{\mathrm{d}t}$,

$$\int_0^t e^{-A\tau}\mathrm{d}\tau=-A^{-1}e^{-A\tau}\Big|_0^t=-A^{-1}e^{-At}+A^{-1},$$

$$X(t)=e^{At}X_0+e^{At}\int_0^t e^{-A\tau}b\,\mathrm{d}\tau=e^{At}X_0+e^{At}\left(\int_0^t e^{-A\tau}\mathrm{d}\tau\right)b=e^{At}X_0+e^{At}(-A^{-1}e^{-At}+A^{-1})b$$
$$=e^{At}X_0-A^{-1}b+e^{At}A^{-1}b=e^{At}X_0+A^{-1}e^{At}b-A^{-1}b.$$

设 $A=PJP^{-1}$, 其中 $J=\mathrm{diag}(J_1, J_2, \dots, J_s)$, $J_i=\begin{bmatrix}\lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1\\ & & & \lambda_i\end{bmatrix}_{r_i\times r_i}$, $i=1, 2, \dots, s$.

则 $e^{Jt}=\mathrm{diag}(e^{J_1t}, e^{J_2t}, \dots, e^{J_st})$, 其中 $e^{J_it}=\begin{bmatrix}e^{\lambda_it} & te^{\lambda_it} & \cdots & t^{r_i-1}e^{\lambda_it}/(r_i-1)!\\ & e^{\lambda_it} & \ddots & \vdots\\ & & \ddots & te^{\lambda_it}\\ & & & e^{\lambda_it}\end{bmatrix}_{r_i\times r_i}$, $i=1, 2, \dots, s$.

若 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 的实部全为负, t 为实变量,

则 $\lim\limits_{t\to+\infty}e^{Jt}=\mathrm{diag}(\lim\limits_{t\to+\infty}e^{J_1t}, \lim\limits_{t\to+\infty}e^{J_2t}, \dots, \lim\limits_{t\to+\infty}e^{J_st})=O$,

$\lim\limits_{t\to+\infty}e^{At}=P\lim\limits_{t\to+\infty}e^{Jt}P^{-1}=O$,

$\lim\limits_{t\to+\infty}X(t)=\lim\limits_{t\to+\infty}(e^{At}X_0+A^{-1}e^{At}b-A^{-1}b)=\lim\limits_{t\to+\infty}e^{At}X_0+A^{-1}\lim\limits_{t\to+\infty}e^{At}b-A^{-1}b=-A^{-1}b$.

24. 完成定理 5.6.1 的证明, 并求 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X^{\mathrm{T}}}(\mathrm{tr}AX)$, 其中 A 为常量矩阵.

定理 5.6.1 设 $f(x), g(x)$ 均为 $n\times s$ 矩阵 $X=(x_{ij})_{n\times s}$ 的数量函数, 且可导, $a, b\in\mathbb{R}$, 则

(1) $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}X^{\mathrm{T}}}=\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}X}\right)^{\mathrm{T}}$.

(2) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X}[af(X)+bg(X)]=a\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}X}+b\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}X}$.

(3) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X}[f(X)g(X)]=g(X)\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}X}+f(X)\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}X}$.

证明: (略).

25. 完成定理 5.6.2 中(1)(2)(3)的证明.

定理 5.6.2 设 $A(X), B(X)\in\mathbb{R}^{s\times t}, X\in\mathbb{R}^{m\times 1}, f(X)\in\mathbb{R}$, A, B, f 均可导, $a, b\in\mathbb{R}$, $M\in\mathbb{R}^{n\times s}$, 则

(1) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X^{\mathrm{T}}}(aA+bB)=a\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}X^{\mathrm{T}}}+b\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}X^{\mathrm{T}}}$.

(2) $\frac{\mathrm{d}A^{\mathrm{T}}}{\mathrm{d}X}=\left(\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}X^{\mathrm{T}}}\right)^{\mathrm{T}}$.

(3) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X^{\mathrm{T}}}[MA(X)]=M\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}X^{\mathrm{T}}}$.

证明: (略).

26. 设 $X=(x_{ij})_{n\times n}$, 求 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X}\mathrm{tr}X^2$ 及 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X}\mathrm{tr}X^{\mathrm{T}}X$.

解: (略).

****

************************* 《工程矩阵理论》第一版 习题 5 *************************

****

14. 设 $\|\cdot\|$ 为相容矩阵范数, 若 A 可逆, 则称 $\kappa(A)=\|A\|\cdot\|A^{-1}\|$ 为 A 的条件数. 证明:

(1) $\kappa(A)\geq 1$.

证明: 因为 $\|I\|\cdot\|I\|\geq\|II\|=\|I\|>0$,

所以 $\kappa(A)=\|A\|\cdot\|A^{-1}\|\geq\|AA^{-1}\|=\|I\|\geq 1$.

(2) $\kappa(AB)\leq\kappa(A)\kappa(B)$.

证明: $\kappa(AB)=\|AB\|\cdot\|(AB)^{-1}\|=\|AB\|\cdot\|B^{-1}A^{-1}\|\leq\|A\|\cdot\|B\|\cdot\|B^{-1}\|\cdot\|A^{-1}\|=\kappa(A)\kappa(B)$.

(3)酉矩阵关于 $\|\cdot\|_2$ 的条件数为 1.

证明: 设 A 为酉矩阵, 即 $A^{\mathrm{H}}A=AA^{\mathrm{H}}=I$,

则 $\|A\|_2=\rho(A^{\mathrm{H}}A)^{1/2}=\rho(I)^{1/2}=1$,

$\|A^{-1}\|_2=\|A^{\mathrm{H}}\|_2=\rho[(A^{\mathrm{H}})^{\mathrm{H}}A^{\mathrm{H}}]^{1/2}=\rho(AA^{\mathrm{H}})^{1/2}=\rho(I)^{1/2}=1$,

故 $\kappa(A)=\|A\|_2\cdot\|A^{-1}\|_2=1$.

15. 设 $\|\cdot\|$ 为相容矩阵范数, $A, H\in\mathbb{C}^{n\times n}$, A 可逆, 且 $\|A^{-1}H\|<1$, 证明:

(1)给 A 以摄动 H, 则 $A+H$ 仍可逆.

证明: 对于任意的 n 维非零列向量 X, 由 $\|A^{-1}H\|<1$ 可得

$\|(I+A^{-1}H)X\|=\|X-(-A^{-1}H)X\|\geq\|X\|-\|-A^{-1}H\|\cdot\|X\|=\|X\|-\|A^{-1}H\|\cdot\|X\|$
$=(1-\|A^{-1}H\|)\|X\|>0$,

可见 $(I+A^{-1}H)X\neq 0$.

因此 $I+A^{-1}H$ 可逆, 进而有 $A+H=A(I+A^{-1}H)$ 可逆.

(2)存在 F, 使得 $(A+H)^{-1}=(I+F)A^{-1}$.

证明: $(A+H)^{-1}=[A(I+A^{-1}H)]^{-1}=(I+A^{-1}H)^{-1}A^{-1}$.

令 $B=A^{-1}H$, 则 $\rho(-B)=\rho(B)\leq\|B\|=\|A^{-1}H\|<1$.

令 $F=-B+B^2-B^3+\dots$, 则

$(A+H)^{-1}=(I+A^{-1}H)^{-1}A^{-1}=(I+B)^{-1}A^{-1}=(I-B+B^2-B^3+\dots)^{-1}A^{-1}=(I+F)A^{-1}$.

(3) A 摄动后, 逆矩阵的相对误差满足 $\frac{\|A^{-1}-(A+H)^{-1}\|}{\|A^{-1}\|}\leq\|F\|\leq\frac{\|A^{-1}H\|}{1-\|A^{-1}H\|}$.

证明: 对于任意的 n 阶可逆阵 C,

由 $\|C\|\cdot\|C^{-1}\|\geq\|CC^{-1}\|=\|I\|\geq 1$ 可得 $\|C^{-1}\|\geq\|C\|^{-1}$.

由(2)得 $(A+H)^{-1}=(I+F)A^{-1}=A^{-1}+FA^{-1}$.

于是有 $\|A^{-1}-(A+H)^{-1}\|=\|-FA^{-1}\|=\|FA^{-1}\|\leq\|F\|\cdot\|A^{-1}\|$,

进而有 $\|F\|\geq\frac{\|A^{-1}-(A+H)^{-1}\|}{\|A^{-1}\|}$.

另一方面, 由 $(I+A^{-1}H)^{-1}=(A+H)^{-1}A=I+F$ 得 $(I+A^{-1}H)(I+F)=I$,

即 $I+F+A^{-1}H+A^{-1}HF=I$, 故 $F+A^{-1}H=-A^{-1}HF$.

于是有 $\|F\|-\|A^{-1}H\|\leq\|F+A^{-1}H\|=\|-A^{-1}HF\|=\|A^{-1}HF\|\leq\|A^{-1}H\|\cdot\|F\|$,

因而 $\|F\|(1-\|A^{-1}H\|)=\|F\|-\|A^{-1}H\|\cdot\|F\|\leq\|A^{-1}H\|$,

进而有 $\|F\|\leq\frac{\|A^{-1}H\|}{1-\|A^{-1}H\|}$.

(4) 若 $\|A^{-1}\|\cdot\|H\|<1$, 则 $\|F\|\leq\frac{\kappa(A)\|H\|/\|A\|}{1-\kappa(A)\|H\|/\|A\|}$.

证明：因为$\|A^{-1}H\| \le \|A^{-1}\|\cdot\|H\| < 1$，所以 $1-\|A^{-1}H\| \ge 1-\|A^{-1}\|\cdot\|H\| > 0$.

根据(3)可得$\|F\| \le \dfrac{\|A^{-1}H\|}{1-\|A^{-1}H\|} \le \dfrac{\|A^{-1}\|\cdot\|H\|}{1-\|A^{-1}\|\cdot\|H\|} = \dfrac{\kappa(A)\|H\|/\|A\|}{1-\kappa(A)\|H\|/\|A\|}$.

注：由(3)与(4)可见，$\kappa(A)$过大，相对误差就大．因此称条件数$\kappa(A)$较大的 A 是病态的，$\kappa(A)$较小的 A 为良态的.

16. 设 n 阶方阵 A 可逆，B 不可逆．证明：

(1) $\det[I-A^{-1}(A-B)]=0$.

证明：B 不可逆$\Rightarrow \det B=0$

$$\Rightarrow \det[I-A^{-1}(A-B)] = \det(I-I+A^{-1}B) = \det(A^{-1}B) = \det A^{-1}\det B = 0.$$

(2)对任一种相容矩阵范数均有$\kappa(A) \ge \dfrac{\|A\|}{\|A-B\|}$.

证明：由(1)可见 1 是$A^{-1}(A-B)$的一个特征值，

因此 $1 \le \rho[A^{-1}(A-B)] \le \|A^{-1}(A-B)\| \le \|A^{-1}\|\cdot\|A-B\|$,

故$\|A\| \le \|A\|\cdot\|A^{-1}\|\cdot\|A-B\| = \kappa(A)\|A-B\|$，由此可得$\kappa(A) \ge \dfrac{\|A\|}{\|A-B\|}$.

20. $A=\begin{bmatrix}1&0&3\\0&1&3\\0&0&1\end{bmatrix}=I+B$.

(1)分别求 e^{It} 与 e^{Bt}，利用定理 5.5.1(2)求 e^{At}.

解：$e^{It}=\sum\limits_{m=0}^{\infty}\dfrac{(It)^m}{m!}=\left(\sum\limits_{m=0}^{\infty}\dfrac{t^m}{m!}\right)I=e^tI.$

$$e^{Bt}=I+Bt+O+\ldots=\begin{bmatrix}1&0&3t\\0&1&3t\\0&0&1\end{bmatrix}.$$

因为$(It)(Bt)=t^2B=(Bt)(It)$,

所以 $e^{At}=e^{(I+B)t}=e^{It+Bt}=e^{It}e^{Bt}=e^tI\begin{bmatrix}1&0&3t\\0&1&3t\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}e^t&0&3te^t\\0&e^t&3te^t\\0&0&e^t\end{bmatrix}$.

(2)求 A 的最小多项式，化 e^{At} 为有限项和求之.

解：$|\lambda I-A|=(\lambda-1)^3$.

$$A-I=\begin{bmatrix}0&0&3\\0&0&3\\0&0&0\end{bmatrix}\ne O,\ (A-I)^2=\begin{bmatrix}0&0&3\\0&0&3\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&3\\0&0&3\\0&0&0\end{bmatrix}=O.$$

可见 A 的最小多项式为$(\lambda-1)^2$.

设 $e^{At}=a(t)I+b(t)A$, $f(x)=e^{xt}$, $g(x)=a(t)+b(t)x$,

则 $e^t=f(1)=g(1)=a(t)+b(t)$, $te^t=f'(1)=g'(1)=b(t)$,

由此可得 $a(t)=e^t-te^t$, $b(t)=te^t$,

因而 $e^{At}=(e^t-te^t)I+te^tA=\begin{bmatrix}e^t&0&3te^t\\0&e^t&3te^t\\0&0&e^t\end{bmatrix}$.

21. $A=\begin{bmatrix}1&0&3\\0&1&3\\0&0&1\end{bmatrix}$，求 $\sin A$.

解：$|\lambda I-A|=(\lambda-1)^3$.

$$A-I=\begin{bmatrix}0&0&3\\0&0&3\\0&0&0\end{bmatrix}\ne O,\ (A-I)^2=\begin{bmatrix}0&0&3\\0&0&3\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&3\\0&0&3\\0&0&0\end{bmatrix}=O.$$

可见 A 的最小多项式为$(\lambda-1)^2$.

设 $\sin A=aI+bA$, $f(x)=\sin x$, $g(x)=a+bx$,

则 $\sin 1=f(1)=g(1)=a+b$, $\cos 1=f'(1)=g'(1)=b$,

由此可得 $a=\sin 1-\cos 1$, $b=\cos 1$,

因而 $\sin A=(\sin 1-\cos 1)I+\cos 1A=\begin{bmatrix}\sin 1&0&3\cos 1\\0&\sin 1&3\cos 1\\0&0&\sin 1\end{bmatrix}$.

1. 证明: (1) $\begin{bmatrix} A \\ O \end{bmatrix}^+ = (A^+, O)$.

证明: ① $\begin{bmatrix} A \\ O \end{bmatrix}(A^+, O)\begin{bmatrix} A \\ O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AA^+ & O \\ O & O \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A \\ O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AA^+A \\ O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ O \end{bmatrix}$,

② $(A^+, O)\begin{bmatrix} A \\ O \end{bmatrix}(A^+, O) = A^+A(A^+, O) = (A^+AA^+, O) = (A^+, O)$,

③ $\left(\begin{bmatrix} A \\ O \end{bmatrix}(A^+,\ O)\right)^{\mathrm{H}} = \begin{bmatrix} AA^+ & O \\ O & O \end{bmatrix}^{\mathrm{H}} = \begin{bmatrix} (AA^+)^{\mathrm{H}} & O \\ O & O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AA^+ & O \\ O & O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ O \end{bmatrix}(A^+, O)$.

④ $\left((A^+,\ O)\begin{bmatrix} A \\ O \end{bmatrix}\right)^{\mathrm{H}} = (A^+A)^{\mathrm{H}} = A^+A = (A^+, O)\begin{bmatrix} A \\ O \end{bmatrix}$.

(2) $(A, O)^+ = \begin{bmatrix} A^+ \\ O \end{bmatrix}$.

证明: ① $(A, O)\begin{bmatrix} A^+ \\ O \end{bmatrix}(A, O) = AA^+(A, O) = (AA^+A, O) = (A, O)$,

② $\begin{bmatrix} A^+ \\ O \end{bmatrix}(A, O)\begin{bmatrix} A^+ \\ O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^+A & O \\ O & O \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A \\ O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^+AA^+ \\ O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^+ \\ O \end{bmatrix}$,

③ $\left((A,\ O)\begin{bmatrix} A^+ \\ O \end{bmatrix}\right)^{\mathrm{H}} = (AA^+)^{\mathrm{H}} = AA^+ = (A, O)\begin{bmatrix} A^+ \\ O \end{bmatrix}$.

④ $\left(\begin{bmatrix} A^+ \\ O \end{bmatrix}(A,\ O)\right)^{\mathrm{H}} = \begin{bmatrix} A^+A & O \\ O & O \end{bmatrix}^{\mathrm{H}} = \begin{bmatrix} (A^+A)^{\mathrm{H}} & O \\ O & O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^+A & O \\ O & O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^+ \\ O \end{bmatrix}(A, O)$.

2. 证明: (1) $\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}^+ = \begin{bmatrix} A^+ & O \\ O & B^+ \end{bmatrix}$.

证明: ① $\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A^+ & O \\ O & B^+ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AA^+A & O \\ O & BB^+B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}$,

② $\begin{bmatrix} A^+ & O \\ O & B^+ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A^+ & O \\ O & B^+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^+AA^+ & O \\ O & B^+BB^+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^+ & O \\ O & B^+ \end{bmatrix}$,

③ $\left(\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A^+ & O \\ O & B^+ \end{bmatrix}\right)^{\mathrm{H}} = \begin{bmatrix} AA^+ & O \\ O & BB^+ \end{bmatrix}^{\mathrm{H}} = \begin{bmatrix} (AA^+)^{\mathrm{H}} & O \\ O & (BB^+)^{\mathrm{H}} \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} AA^+ & O \\ O & BB^+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A^+ & O \\ O & B^+ \end{bmatrix}$.

④ $\left(\begin{bmatrix} A^+ & O \\ O & B^+ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}\right)^{\mathrm{H}} = \begin{bmatrix} A^+A & O \\ O & B^+B \end{bmatrix}^{\mathrm{H}} = \begin{bmatrix} (A^+A)^{\mathrm{H}} & O \\ O & (B^+B)^{\mathrm{H}} \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} A^+A & O \\ O & B^+B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^+ & O \\ O & B^+ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}$

(2) $\begin{bmatrix} O & A \\ B & O \end{bmatrix}^+ = \begin{bmatrix} O & B^+ \\ A^+ & O \end{bmatrix}$.

证明: ① $\begin{bmatrix} O & A \\ B & O \end{bmatrix}\begin{bmatrix} O & B^+ \\ A^+ & O \end{bmatrix}\begin{bmatrix} O & A \\ B & O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AA^+ & O \\ O & BB^+ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} O & A \\ B & O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} O & AA^+A \\ BB^+B & O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} O & A \\ B & O \end{bmatrix}$,

② $\begin{bmatrix} O & B^+ \\ A^+ & O \end{bmatrix}\begin{bmatrix} O & A \\ B & O \end{bmatrix}\begin{bmatrix} O & B^+ \\ A^+ & O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B^+B & O \\ O & A^+A \end{bmatrix}\begin{bmatrix} O & B^+ \\ A^+ & O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} O & B^+BB^+ \\ A^+AA^+ & O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} O & B^+ \\ A^+ & O \end{bmatrix}$,

③ $\left(\begin{bmatrix} O & A \\ B & O \end{bmatrix}\begin{bmatrix} O & B^+ \\ A^+ & O \end{bmatrix}\right)^{\mathrm{H}} = \begin{bmatrix} AA^+ & O \\ O & BB^+ \end{bmatrix}^{\mathrm{H}} = \begin{bmatrix} (AA^+)^{\mathrm{H}} & O \\ O & (BB^+)^{\mathrm{H}} \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} AA^+ & O \\ O & BB^+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} O & A \\ B & O \end{bmatrix}\begin{bmatrix} O & B^+ \\ A^+ & O \end{bmatrix}$.

④ $\left(\begin{bmatrix} O & B^+ \\ A^+ & O \end{bmatrix}\begin{bmatrix} O & A \\ B & O \end{bmatrix}\right)^{\mathrm{H}} = \begin{bmatrix} B^+B & O \\ O & A^+A \end{bmatrix}^{\mathrm{H}} = \begin{bmatrix} (B^+B)^{\mathrm{H}} & O \\ O & (A^+A)^{\mathrm{H}} \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} B^+B & O \\ O & A^+A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} O & B^+ \\ A^+ & O \end{bmatrix}\begin{bmatrix} O & A \\ B & O \end{bmatrix}$.

3. 问: $(AB)^+ = B^+A^+$是否成立?
答: 一般情况下$(AB)^+ = B^+A^+$未必成立. 例如,

$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, 则 $A^+ = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, B^+ = B^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$,

$AB = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, (AB)^+ = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, B^+A^+ = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 5 & -5 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$.

4. 证明: 若 $A^2 = A = A^{\mathrm{H}}$, 则 $A^+ = A$.
证明: ① $AAA = A^2A = AA = A^2 = A$,
② $(AA)^{\mathrm{H}} = A^{\mathrm{H}}A^{\mathrm{H}} = AA$.

5. 设α, β为已知的 n 维非零列向量, $A = \alpha\beta^{\mathrm{H}}$, 求 A^+.
解: 因为α, β为 n 维非零列向量,
所以 $A = \alpha\beta^{\mathrm{H}}$ 为 A 的满秩分解.
由此可得 $A^+ = \beta(\beta^{\mathrm{H}}\beta)^{-1}(\alpha^{\mathrm{H}}\alpha)^{-1}\alpha^{\mathrm{H}} = (\beta^{\mathrm{H}}\beta)^{-1}(\alpha^{\mathrm{H}}\alpha)^{-1}\beta\alpha^{\mathrm{H}} = (\beta^{\mathrm{H}}\beta)^{-1}(\alpha^{\mathrm{H}}\alpha)^{-1}A^{\mathrm{H}}$.

6. 设 $A \in \mathbb{C}^{s\times n}$, $r(A) = 1$, 证明: $A^+ = (\mathrm{tr}A^{\mathrm{H}}A)^{-1}A^{\mathrm{H}}$.
证明: 因为 $r(A) = 1$,

所以 A 的奇值分解为 $A = U\begin{bmatrix} \sqrt{\lambda} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}V^{\mathrm{H}}$, 其中$\lambda$为 $A^{\mathrm{H}}A$ 的非零特征值.

于是 $A^+ = V\begin{bmatrix} 1/\sqrt{\lambda} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}U^{\mathrm{H}} = \lambda^{-1}V\begin{bmatrix} \sqrt{\lambda} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}U^{\mathrm{H}} = \lambda^{-1}A^{\mathrm{H}} = (\mathrm{tr}A^{\mathrm{H}}A)^{-1}A^{\mathrm{H}}$.

证明: 因为 $A \in \mathbb{C}^{s\times n}$, $r(A) = 1$, 所以 A 的满秩分解为 $A = \alpha\beta^{\mathrm{H}}$,
其中α为 s 维非零列向量, β为 n 维非零列向量.
由此可得 $\mathrm{tr}A^{\mathrm{H}}A = \mathrm{tr}(\beta\alpha^{\mathrm{H}}\alpha\beta^{\mathrm{H}}) = (\alpha^{\mathrm{H}}\alpha)\mathrm{tr}(\beta\beta^{\mathrm{H}}) = (\alpha^{\mathrm{H}}\alpha)\mathrm{tr}(\beta^{\mathrm{H}}\beta) = (\alpha^{\mathrm{H}}\alpha)(\beta^{\mathrm{H}}\beta)$.
$A^+ = \beta(\beta^{\mathrm{H}}\beta)^{-1}(\alpha^{\mathrm{H}}\alpha)^{-1}\alpha^{\mathrm{H}} = (\beta^{\mathrm{H}}\beta)^{-1}(\alpha^{\mathrm{H}}\alpha)^{-1}\beta\alpha^{\mathrm{H}} = (\mathrm{tr}A^{\mathrm{H}}A)^{-1}A^{\mathrm{H}}$.

7. 证明: 若 $AB^{\mathrm{H}} = O, B^{\mathrm{H}}A = O$, 则$(A+B)^+ = A^+ + B^+$.
证明: $AB^{\mathrm{H}} = O \Rightarrow AB^+ = AB^+BB^+ = A(B^+B)^{\mathrm{H}}B^+ = AB^{\mathrm{H}}(B^+)^{\mathrm{H}}B^+ = O$;
$AB^{\mathrm{H}} = O \Rightarrow BA^{\mathrm{H}} = (AB^{\mathrm{H}})^{\mathrm{H}} = O \Rightarrow BA^+ = O$;
$B^{\mathrm{H}}A = O \Rightarrow B^+A = B^+BB^+A = B^+(BB^+)^{\mathrm{H}}A = B^+(B^+)^{\mathrm{H}}B^{\mathrm{H}}A = O$;

$B^{H}A=O\Rightarrow A^{H}B=(B^{H}A)^{H}=O\Rightarrow A^{+}B=O$,

于是有

① $(A+B)(A^{+}+B^{+})(A+B)=AA^{+}A+BB^{+}B=A+B$;

② $(A^{+}+B^{+})(A+B)(A^{+}+B^{+})=A^{+}AA^{+}+B^{+}BB^{+}=A^{+}+B^{+}$;

③ $[(A+B)(A^{+}+B^{+})]^{H}=(AA^{+}+BB^{+})^{H}=(AA^{+})^{H}+(BB^{+})^{H}=AA^{+}+BB^{+}$
$=(A+B)(A^{+}+B^{+})$;

④ $[(A^{+}+B^{+})(A+B)]^{H}=(A^{+}A+B^{+}B)^{H}=(A^{+}A)^{H}+(B^{+}B)^{H}=A^{+}A+B^{+}B$
$=(A^{+}+B^{+})(A+B)$.

8. 完善定理 6.1.2 的证明.

定理 6.1.2 设 $A\in\mathbb{C}^{m\times n}$，则

(1) $(A^{+})^{+}=A$.

证明: ① $A^{+}AA^{+}=A^{+}$; ② $AA^{+}A=A$; ③ $(A^{+}A)^{H}=A^{+}A$; ④ $(AA^{+})^{H}=AA^{+}$.

(2) $(A^{H})^{+}=(A^{+})^{H}$.

证明: ① $A^{H}(A^{+})^{H}A^{H}=(AA^{+}A)^{H}=A^{H}$; ② $(A^{+})^{H}A^{H}(A^{+})^{H}=(A^{+}AA^{+})^{H}=(A^{+})^{H}$;
③ $[A^{H}(A^{+})^{H}]^{H}=A^{+}A=(A^{+}A)^{H}=A^{H}(A^{+})^{H}$; ④ $[(A^{+})^{H}A^{H}]^{H}=AA^{+}=(AA^{+})^{H}=(A^{+})^{H}A^{H}$.

(3) $(A^{T})^{+}=(A^{+})^{T}$.

证明: ① $A^{T}(A^{+})^{T}A^{T}=(AA^{+}A)^{T}=A^{T}$;
② $(A^{+})^{T}A^{T}(A^{+})^{T}=(A^{+}AA^{+})^{T}=(A^{+})^{T}$;
③ $[A^{T}(A^{+})^{T}]^{H}=[(A^{+}A)^{T}]^{H}=[(A^{+}A)^{H}]^{T}=(A^{+}A)^{T}=A^{T}(A^{+})^{T}$;
④ $[(A^{+})^{H}A^{H}]^{H}=AA^{+}=(AA^{+})^{H}=(A^{+})^{H}A^{H}$.

(4) $(kA)^{+}=k^{+}A^{+}$，其中 $k\in\mathbb{C}$, $k^{+}=\begin{cases}\dfrac{1}{k}, & k\neq 0,\\ 0, & k=0.\end{cases}$

证明: 当 $k=0$ 时, $kA=O$, $(kA)^{+}=O=0A^{+}$,
当 $k\neq 0$ 时,
① $(kA)(k^{+}A^{+})(kA)=(kk^{+}k)(AA^{+}A)=kA$; ② $(k^{+}A^{+})(kA)(k^{+}A^{+})=(k^{+}kk^{+})(A^{+}AA^{+})=k^{+}A^{+}$;
③ $[(kA)(k^{+}A^{+})]^{H}=(kk^{+})(AA^{+})^{H}=(kk^{+})(AA^{+})=(kA)(k^{+}A^{+})$;
④ $[(k^{+}A^{+})(kA)]^{H}=(k^{+}k)(A^{+}A)^{H}=(k^{+}k)(AA^{+})=(k^{+}A^{+})(kA)$.

(5) $A^{H}=A^{H}AA^{+}=A^{+}AA^{H}$.

证明: $A^{H}=(AA^{+}A)^{H}=A^{H}(AA^{+})^{H}=A^{H}AA^{+}$, $A^{H}=(AA^{+}A)^{H}=(A^{+}A)^{H}A^{H}=A^{+}AA^{H}$.

(6) $(A^{H}A)^{+}=A^{+}(A^{H})^{+}$, $(AA^{H})^{+}=(A^{H})^{+}A^{+}$.

证明: ① $(A^{H}A)A^{+}(A^{H})^{+}(A^{H}A)=A^{H}AA^{+}(A^{+})^{H}A^{H}A=A^{H}AA^{+}(AA^{+})^{H}A$
$=A^{H}AA^{+}AA^{+}A=A^{H}AA^{+}A=A^{H}A$;

② $A^{+}(A^{H})^{+}(A^{H}A)A^{+}(A^{H})^{+}=A^{+}(A^{+})^{H}A^{H}AA^{+}(A^{H})^{+}=A^{+}(AA^{+})^{H}AA^{+}(A^{H})^{+}$
$=A^{+}AA^{+}AA^{+}(A^{H})^{+}=A^{+}AA^{+}(A^{H})^{+}=A^{+}(A^{H})^{+}$;

③ $[(A^{H}A)A^{+}(A^{H})^{+}]^{H}=[(A^{H})^{+}]^{H}(A^{+})^{H}A^{H}(A^{H})^{H}=A^{+}(A^{+})^{H}A^{H}A=A^{+}(AA^{+})^{H}A$
$=A^{+}AA^{+}A=A^{+}A=(A^{+}A)^{H}=[A^{+}(AA^{+})A]^{H}=A^{H}(AA^{+})^{H}(A^{+})^{H}$
$=A^{H}AA^{+}(A^{+})^{H}=(A^{H}A)A^{+}(A^{H})^{+}$;

④ $[A^{+}(A^{H})^{+}(A^{H}A)]^{H}=A^{H}(A^{H})^{H}[(A^{H})^{+}]^{H}(A^{+})^{H}=A^{H}AA^{+}(A^{+})^{H}=A^{H}(AA^{+})^{H}(A^{+})^{H}$
$=[A^{+}(AA^{+})A]^{H}=(A^{+}A)^{H}=A^{+}A=A^{+}(AA^{+})A$
$=A^{+}(AA^{+})^{H}A=A^{+}(A^{+})^{H}A^{H}A=A^{+}(A^{H})^{+}(A^{H}A)$.

由①-④可知 $(A^{H}A)^{+}=A^{+}(A^{H})^{+}$,
因而 $(AA^{H})^{+}=[(A^{H})^{H}A^{H}]^{+}=(A^{H})^{+}[(A^{H})^{H}]^{+}=(A^{H})^{+}A^{+}$.

(7) $A^{+}=(A^{H}A)^{+}A^{H}=A^{H}(AA^{H})^{+}$.

证明: $(A^{H}A)^{+}A^{H}=A^{+}(A^{H})^{+}A^{H}=A^{+}(A^{+})^{H}A^{H}=A^{+}(AA^{+})^{H}=A^{+}AA^{+}=A^{+}$.
$A^{H}(AA^{H})^{+}=A^{H}(A^{H})^{+}A^{+}=A^{H}(A^{+})^{H}A^{+}=(A^{+}A)^{H}A^{+}=A^{+}AA^{+}=A^{+}$.

(8) $(UAV)^{+}=V^{H}A^{+}U^{H}$，其中 U, V 为酉矩阵.

证明: 设 A 的奇值分解为 $A=P\begin{bmatrix}D & O\\ O & O\end{bmatrix}_{s\times n}Q^{H}$,

其中 $D=\mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1},\sqrt{\lambda_2},\ldots,\sqrt{\lambda_r})$, $\lambda_1\geq\lambda_2\geq\ldots\geq\lambda_r>0$ 为 $A^{H}A$ 的非零特征值,

P, Q 分别为 s 阶与 n 阶的酉矩阵,

则 UP, VQ 也分别为 s 阶与 n 阶的酉矩阵, $UAV=UP\begin{bmatrix}D & O\\ O & O\end{bmatrix}_{s\times n}(V^{H}Q)^{H}$,

由定理 6.1.1 得

$$A^{+}=Q\begin{bmatrix}D^{-1} & O\\ O & O\end{bmatrix}_{n\times s}P^{H},\ (UAV)^{+}=V^{H}Q\begin{bmatrix}D^{-1} & O\\ O & O\end{bmatrix}_{n\times s}(UP)^{H}=V^{H}A^{+}U^{H}.$$

(9) $A^{+}AB=A^{+}AC\Leftrightarrow AB=AC$.

证明: $(\Rightarrow)$ $A^{+}AB=A^{+}AC\Rightarrow AB=AA^{+}AB=AA^{+}AC=AC$.
$(\Leftarrow)$ $AB=AC\Rightarrow A^{+}AB=A^{+}AC$.

9. 用适当的方法求下列矩阵的广义逆 A^{+}.

(1) $A=\begin{bmatrix}0 & c\\ a & 0\\ b & 0\end{bmatrix}$，其中复数 a, b, c 满足 $c\neq 0$, $|a|^2+|b|^2\neq 0$.

解: $A^{H}A=\begin{bmatrix}0 & \bar a & \bar b\\ \bar c & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & c\\ a & 0\\ b & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}|a|^2+|b|^2 & 0\\ 0 & |c|^2\end{bmatrix}$, $(A^{H}A)^{-1}=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{|a|^2+|b|^2} & 0\\ 0 & \dfrac{1}{|c|^2}\end{bmatrix}$,

$$A^{+}=(A^{H}A)^{-1}A^{H}=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{|a|^2+|b|^2} & 0\\ 0 & \dfrac{1}{|c|^2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & \bar a & \bar b\\ \bar c & 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & \dfrac{\bar a}{|a|^2+|b|^2} & \dfrac{\bar b}{|a|^2+|b|^2}\\ \dfrac{\bar c}{|c|^2} & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

(2) $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & 0 & -2\end{bmatrix}$,

解: A 的满秩分解为 $A=\alpha\beta^{H}$，其中 $\alpha=\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}$, $\beta=\begin{bmatrix}1\\ 0\\ -1\end{bmatrix}$,

$\alpha^{H}\alpha=5$, $\beta^{H}\beta=2$,

$$A^{+}=\beta^{H}(\beta^{H}\beta)^{-1}(\alpha^{H}\alpha)^{-1}\alpha=(\beta^{H}\beta)^{-1}(\alpha^{H}\alpha)^{-1}\beta^{H}\alpha=(\beta^{H}\beta)^{-1}(\alpha^{H}\alpha)^{-1}A^{H}=\frac{1}{10}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 0\\ -1 & -2\end{bmatrix}.$$

(3) $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 3\end{bmatrix}^{T}$,

解: $A^{\mathrm{H}}A=\begin{bmatrix}1&1&2\\1&0&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\1&0\\2&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6&7\\7&10\end{bmatrix}$, $(A^{\mathrm{H}}A)^{-1}=\frac{1}{11}\begin{bmatrix}10&-7\\-7&6\end{bmatrix}$,

$A^+=(A^{\mathrm{H}}A)^{-1}A^{\mathrm{H}}=\frac{1}{11}\begin{bmatrix}10&-7\\-7&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&2\\1&0&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&10&-1\\-1&-7&4\end{bmatrix}$.

(4) $A=\begin{bmatrix}\mathrm{i}&-1&0\\0&\mathrm{i}&1\end{bmatrix}$.

解: $AA^{\mathrm{H}}=\begin{bmatrix}\mathrm{i}&-1&0\\0&\mathrm{i}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\mathrm{i}&0\\-1&-\mathrm{i}\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&\mathrm{i}\\-\mathrm{i}&2\end{bmatrix}$, $(AA^{\mathrm{H}})^{-1}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}2&-\mathrm{i}\\\mathrm{i}&2\end{bmatrix}$,

$A^+=A^{\mathrm{H}}(AA^{\mathrm{H}})^{-1}=\begin{bmatrix}-\mathrm{i}&0\\-1&-\mathrm{i}\\0&1\end{bmatrix}\frac{1}{3}\begin{bmatrix}2&-\mathrm{i}\\\mathrm{i}&2\end{bmatrix}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}-2\mathrm{i}&-1\\-1&-\mathrm{i}\\\mathrm{i}&2\end{bmatrix}$.

10. 证明: 线性方程组 $Ax=b$ 有解当且仅当 $AA^+b=b$.

证明: ($\Rightarrow$)设线性方程组 $Ax=b$ 有解 $x=\xi$,

则 $AA^+b=AA^+(A\xi)=(AA^+A)\xi=A\xi=b$.

($\Leftarrow$)设 $AA^+b=b$, 则线性方程组 $Ax=b$ 有解 $x=A^+b$.

11. 用 $A\{1\}$表示满足 Penrose 第一个方程 $AGA=A$ 的 G 之集合.

证明: $A^-\in A\{1\}\Leftrightarrow A^-b$ 是方程组 $Ax=b$ 的解, $\forall b\in \mathrm{R}(A)$.

证明: ($\Rightarrow$)设 $A^-\in A\{1\}$, $b\in\mathrm{R}(A)$, 则存在ξ使得 $b=A\xi$,

于是 $A(A^-b)=A[A^-(A\xi)]=(AA^-A)\xi=A\xi=b$, 可见 A^-b 是方程组 $Ax=b$ 的解.

($\Leftarrow$)设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_s)$, 则$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_s\in\mathrm{R}(A)$.

若$\forall b\in\mathrm{R}(A)$, A^-b 是方程组 $Ax=b$ 的解,

则 $AA^-A=AA^-(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_s)=(AA^-\alpha_1,AA^-\alpha_2,\dots,AA^-\alpha_s)=(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_s)=A$.

可见 $A^-\in A\{1\}$.

12. 设 $A\in\mathbb{C}^{s\times n}$, 证明:

(1)若 $\mathrm{r}(A)=n$, 则$\forall A^-\in A\{1\}$, $A^-A=I_n$.

证明: $\forall A^-\in A\{1\}$, 有 $AA^-A=A$, 故 $A(A^-A-I_n)=O$.

若 $\mathrm{r}(A)=n$, 则 $Ax=0$ 只有解, 因而 $A^-A-I_n=O$, 即 $A^-A=I_n$.

(2)若 $\mathrm{r}(A)=s$, 则$\forall A^-\in A\{1\}$, $AA^-=I_s$.

证明: $\forall A^-\in A\{1\}$, 有 $AA^-A=A$, 故 $(AA^--I_s)A=O$, 从而 $A^{\mathrm{T}}(AA^--I_s)^{\mathrm{T}}=O$.

若 $\mathrm{r}(A)=s$, 则 $\mathrm{r}(A^{\mathrm{T}})=s$, $A^{\mathrm{T}}x=0$ 只有解, 因而$(AA^--I_s)^{\mathrm{T}}=O$, 故 $AA^-=I_s$.

13. 设 A^-意义如第 11 题. 证明:

(1) $\mathrm{r}(A^-)\ge\mathrm{r}(A)=\mathrm{r}(AA^-)=\mathrm{r}(A^-A)$.

证明: $AA^-A=A\Rightarrow\mathrm{r}(A^-)\ge\mathrm{r}(A)$.

$AA^-A=A\Rightarrow\mathrm{r}(A)\le\mathrm{r}(A^-A)\le\mathrm{r}(A)\Rightarrow\mathrm{r}(A)=\mathrm{r}(A^-A)$.

$AA^-A=A\Rightarrow\mathrm{r}(A)\le\mathrm{r}(AA^-)\le\mathrm{r}(A)\Rightarrow\mathrm{r}(A)=\mathrm{r}(AA^-)$.

(2) AA^-与 A^-A 均为幂等阵.

证明: $AA^-A=A\Rightarrow(AA^-)^2=(AA^-)(AA^-)=(AA^-A)A^-=AA^-$.

$AA^-A=A\Rightarrow(A^-A)^2=(A^-A)(A^-A)=A^-(AA^-A)=A^-A$.

14. 设 $A\in\mathbb{C}^{s\times n}$, 记为 $A\{1,2\}$满足 $AGA=A$ 与 $GAG=G$ 之 G 的集合.

证明: $\mathbb{C}^n=\mathrm{K}(A)\oplus\mathrm{R}(G)$, 其中 $G\in A\{1,2\}$.

证明: 对于任意的$\alpha\in\mathbb{C}^n$, 有 $A(\alpha-GA\alpha)=A\alpha-AGA\alpha=A\alpha-A\alpha=0$,

可见$\alpha-GA\alpha\in\mathrm{K}(A)$, 其中 $GA\alpha\in\mathrm{R}(G)$,

于是有$\alpha=(\alpha-GA\alpha)+GA\alpha\in\mathrm{K}(A)+\mathrm{R}(G)$,

因此$\mathbb{C}^n\subseteq\mathrm{K}(A)+\mathrm{R}(G)\subseteq\mathbb{C}^n$, 即$\mathbb{C}^n=\mathrm{K}(A)+\mathrm{R}(G)$.

另一方面, 对于任意的$\beta\in\mathrm{K}(A)\cap\mathrm{R}(G)$, 有 $A\beta=0$ 而且存在$\alpha\in\mathbb{C}^n$使得$\beta=G\alpha$.

故$\beta=G\alpha=(GAG)\alpha=GA\beta=G0=0$,

可见 $\mathrm{K}(A)\cap\mathrm{R}(G)=\{0\}$.

综上所述, $\mathbb{C}^n=\mathrm{K}(A)\oplus\mathrm{R}(G)$.

15. 若 G 满足 $AGA=A$, $(AG)^{\mathrm{H}}=AG$, 则记 $G\in A\{1,3\}$.

证明: $\forall b\in\mathbb{C}^s$, Gb 是 $Ax=b$ 的最小二乘解, 其中 $G\in A\{1,3\}$.

证明: 对于任意的 $b\in\mathbb{C}^s$, 有

$A^{\mathrm{H}}(AGb-b)=A^{\mathrm{H}}AGb-A^{\mathrm{H}}b=A^{\mathrm{H}}(AG)^{\mathrm{H}}b-A^{\mathrm{H}}b=(AGA)^{\mathrm{H}}b-A^{\mathrm{H}}b=A^{\mathrm{H}}b-A^{\mathrm{H}}b=0$,

故 $AGb-b\in[\mathrm{R}(A)]^{\perp}$, 因而 Gb 是 $Ax=b$ 的最小二乘解.

16. 若 G 满足 $AGA=A$, $(GA)^{\mathrm{H}}=GA$.

证明: $\forall b\in\mathrm{R}(A)$, $Gb=A^+b$, 故 Gb 是 $Ax=b$ 的极小最小二乘解.

证明: 对于任意的 $b\in\mathrm{R}(A)$, 存在 a 使得 $b=Aa$, 于是

$Gb=GAa=G(AA^+A)a=(GA)(A^+A)a=(GA)^{\mathrm{H}}(A^+A)^{\mathrm{H}}a=[(A^+A)(GA)]^{\mathrm{H}}a=(A^+A)^{\mathrm{H}}a$
$=A^+Aa=A^+b$,

故 Gb 是 $Ax=b$ 的极小最小二乘解.

17. 设 $A\in\mathbb{C}^{s\times n}$, 若存在 $B\in\mathbb{C}^{n\times s}$ 使 $BA=I_n$, 则称 A 左可逆, B 为 A 的左逆.

证明: 若 $A\in\mathbb{C}^{s\times n}$, 则下列命题等价:

(1) A 左可逆.

(2) $s\ge n=\mathrm{r}(A)$.

(3) A 的列向量组线性无关.

(4) A 的核是零子空间.

证明: (1)$\Rightarrow$(2) A 左可逆 $\Rightarrow$ 存在 $B\in\mathbb{C}^{n\times s}$ 使 $BA=I_n$

$\Rightarrow s\ge\mathrm{r}(B)\ge\mathrm{r}(BA)=\mathrm{r}(I_n)=n\ge\mathrm{r}(A)\ge\mathrm{r}(BA)=\mathrm{r}(I_n)=n$

$\Rightarrow s\ge n=\mathrm{r}(A)$.

(2)$\Rightarrow$(3) $n=\mathrm{r}(A)\Rightarrow A$ 的列向量组的秩为 $n\Rightarrow A$ 的列向量组线性无关.

(3)$\Rightarrow$(4) A 的列向量组线性无关 $\Rightarrow$ 齐次线性方程组 $Ax=0$ 只有零解

$\Rightarrow\mathrm{K}(A)=\{\alpha\in\mathbb{C}^n\mid A\alpha=0\}=\{0\}$.

(4)$\Rightarrow$(1)由 $AA^+A=A$ 得 $A(A^+A-I_n)=AA^+A-A=O$.

可见 A^+A-I_n 的列向量均属于 A 的核.

若 A 的核是零子空间, 则 A^+A-I_n 的列向量均为零, 即 $A^+A-I_n=O$,

因而 $A^+A=I_n$, 可见 A 左可逆.

18. 设 $A\in\mathbb{C}^{s\times n}$, B 为 A 的左逆. 证明:

(1) $(AB)^2=AB$.

证明: B 为 A 的左逆 $\Rightarrow BA=I\Rightarrow(AB)^2=(AB)(AB)=A(BA)B=AIB=AB$.

(2) $ABX=X$, $\forall X\in\mathrm{R}(A)$.

证明: 对于任意的 $X\in\mathrm{R}(A)$, 存在ξ使得 $X=A\xi$, 于是有

$X=A\xi=AI\xi=A(BA)\xi=AB(A\xi)=ABX$.

(3) $\dim\mathrm{R}(A)+\dim\mathrm{K}(B)=s$.

证明: 对于任意的$\alpha\in\mathbb{C}^s$, 有 $B(\alpha-AB\alpha)=B\alpha-BAB\alpha=B\alpha-B\alpha=0$,

可见$\alpha - AB\alpha \in \mathrm{K}(B)$，其中 $AB\alpha \in \mathrm{R}(A)$，

于是有$\alpha = (\alpha - AB\alpha) + AB\alpha \in \mathrm{K}(B) + \mathrm{R}(A)$，

因此$\mathbb{C}^s \subseteq \mathrm{K}(B) + \mathrm{R}(A) \subseteq \mathbb{C}^s$，即$\mathbb{C}^s = \mathrm{K}(B) + \mathrm{R}(A)$.

另一方面，对于任意的$\beta \in \mathrm{K}(B) \cap \mathrm{R}(A)$，有 $B\beta = 0$ 而且存在$\alpha \in \mathbb{C}^s$ 使得$\beta = A\alpha$.

故$\beta = A\alpha = (ABA)\alpha = AB\beta = A0 = 0$，

可见 $\mathrm{K}(B) \cap \mathrm{R}(A) = \{0\}$.

综上所述，$\mathbb{C}^s = \mathrm{K}(B) \oplus \mathrm{R}(A)$，因而 $\dim \mathrm{R}(A) + \dim \mathrm{K}(B) = \dim \mathbb{C}^s = s$.

(4)方程组 $Ax = b$ 有解 $\Leftrightarrow (I_s - AB)b = 0$，且有解时，解唯一为 $x = Bb$.

证明：($\Rightarrow$)方程组 $Ax = b$ 有解 $x = \xi \Rightarrow (I_s - AB)b = (I_s - AB)A\xi = A\xi - ABA\xi = A\xi - A\xi = 0$.

此时，$\xi = I\xi = BA\xi = Bb$，可见 $Ax = b$ 有唯一解 $x = Bb$.

($\Leftarrow$) $(I_s - AB)b = 0 \Rightarrow ABb = b \Rightarrow$方程组 $Ax = b$ 有解 $x = Bb$.