МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Санкт-Петербургский политехнический
университет Петра Великого»

Институт компьютерных наук и кибербезопасности

Высшая школа технологий и искусственного интеллекта

Направление: 02.03.01 Математика и компьютерные науки

Вычислительная математика
Лабораторная работа №3. Кубические сплайны
Вариант 43

Студент,
группа 5130201/30002 ______________ Санько В.В.

Преподаватель,
______________ Пак В.Г.

«_____»____________ 2024г.

Санкт-Петербург, 2024

1 Задание и исходные данные

Цель данной лабораторной работы - научиться строить интерполяционные кубические сплайны для табличных функций.

Задание выглядело следующим образом:

Построить для данной табличной функции интерполяционный кубический сплайн дефекта 1 с заданными граничными условиями. Коэффициенты вычислять с четырьмя знаками после запятой в мантиссе. Проверить все условия, налагаемые на сплайн.

В варианте 43 были следующие исходные данные:

x_i	y_i
0.235	1.2080
0.240	1.2126
0.250	1.2217
0.255	1.2263
0.265	1.2355
0.280	1.2493
0.295	1.2633
0.300	1.2680
0.305	1.2726

Естественный сплайн.

2 Построение кубического сплайна

Воспользуемся формулой из Рис. 1 для нахождения кубического сплайна на отрезке $[x_{i-1}; x_i]$.

$$S_3(x) = P_{3,i}(x) = y_{i-1}\frac{(x-x_i)^2(2(x-x_{i-1})+h_i)}{h_i^3} +$$

$$+s_{i-1}\frac{(x-x_i)^2(x-x_{i-1})}{h_i^2} + y_i\frac{(x-x_{i-1})^2(2(x_i-x)+h_i)}{h_i^3} + s_i\frac{(x-x_{i-1})^2(x-x_i)}{h_i^2}, (1)$$

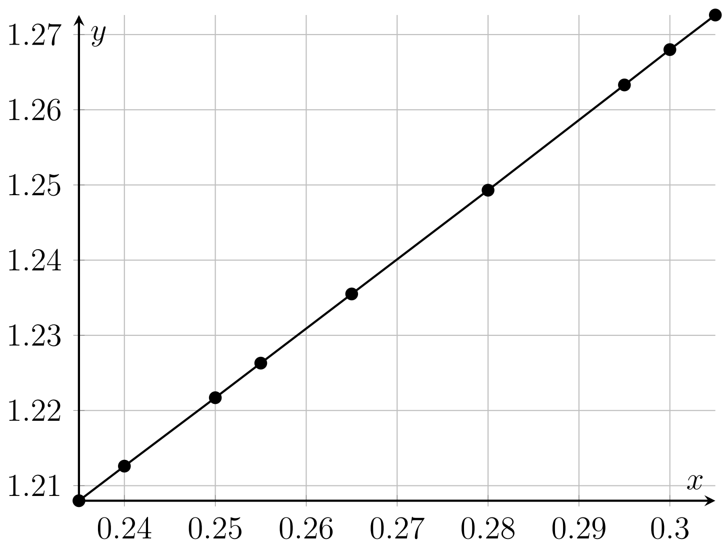
Рис. 1

$$\frac{1}{h_i}s_{i-1} + 2\left(\frac{1}{h_i}+\frac{1}{h_{i+1}}\right)s_i + \frac{1}{h_{i+1}}s_{i+1} = 3\left(\frac{y_i-y_{i-1}}{h_i^2}+\frac{y_{i+1}-y_i}{h_{i+1}^2}\right),$$

Рис. 2

Величины $S_0, S_1, ..., S_n$ для кубического сплайна определяются как решение системы линейных уравнений, полученной из разностных отношений между значениями функции и её производными. Недостающие значения второй производной на границах (для естественного сплайна они равны нулю) вычисляются с использованием односторонних разностных формул для производных в крайних точках. Полученная система решается для нахождения коэффициентов сплайна.

Для выполнения расчетов и проверки полученных результатов использована среда программирования Julia. В ходе вычислений были получены значения сплайна, которые близки к табличным данным, что подтверждает правильность выполнения расчётов. С использованием LaTeX был построен график для наглядной проверки точности интерполяции.



Заключение

В процессе выполнения лабораторной работы я научился строить интерполяционные кубические сплайны для табличных функций.

```julia
using LinearAlgebra
xi = [0.235, 0.240, 0.250, 0.255, 0.260, 0.280, 0.295, 0.300, 0.305]
yi = [1.2080, 1.2126, 1.2217, 1.2263, 1.2355, 1.2493, 1.2633, 1.2680, 1.2726]
h = diff(xi)
b = zeros(length(xi))
for i in 2:length(xi)-1
    b[i] = 3 * ((yi[i+1] - yi[i]) / h[i] - (yi[i] - yi[i-1]) / h[i-1])
end
A = zeros(length(xi), length(xi))
A[1,1] = 1
A[end,end] = 1
for i in 2:length(xi)-1
    A[i, i-1] = h[i-1] / 6
    A[i, i] = (h[i-1] + h[i]) / 3
    A[i, i+1] = h[i] / 6
end
M = A \ b
function cubic_spline(x, i)
    h_i = xi[i+1] - xi[i]
    a = (M[i+1] - M[i]) / (6 * h_i)
    b = M[i] / 2
    c = (yi[i+1] - yi[i]) / h_i - h_i * (M[i+1] + 2 * M[i]) / 6
    d = yi[i]
    return a * (x - xi[i])^3 + b * (x - xi[i])^2 + c * (x - xi[i]) + d
end
println("Значения сплайна в узловых точках:")
for i in 1:length(xi)-1
    println("S($xi[i]) = ", cubic_spline(xi[i], i))
end
println("\nЗначения сплайна в произвольных точках:")
test_points = [0.237, 0.248, 0.265, 0.290, 0.303]
for x in test_points
    for i in 1:length(xi)-1
        if xi[i] <= x <= xi[i+1]
            println("S($x) = ", cubic_spline(x, i))
        end
    end
end
```

```
Значения сплайна в узловых точках:
S([0.235, 0.24, 0.25, 0.255, 0.26, 0.28, 0.295, 0.3, 0.305][i]) = 1.208
S([0.235, 0.24, 0.25, 0.255, 0.26, 0.28, 0.295, 0.3, 0.305][i]) = 1.2126
S([0.235, 0.24, 0.25, 0.255, 0.26, 0.28, 0.295, 0.3, 0.305][i]) = 1.2217
S([0.235, 0.24, 0.25, 0.255, 0.26, 0.28, 0.295, 0.3, 0.305][i]) = 1.2263
S([0.235, 0.24, 0.25, 0.255, 0.26, 0.28, 0.295, 0.3, 0.305][i]) = 1.2355
S([0.235, 0.24, 0.25, 0.255, 0.26, 0.28, 0.295, 0.3, 0.305][i]) = 1.2493
S([0.235, 0.24, 0.25, 0.255, 0.26, 0.28, 0.295, 0.3, 0.305][i]) = 1.2633
S([0.235, 0.24, 0.25, 0.255, 0.26, 0.28, 0.295, 0.3, 0.305][i]) = 1.268

Значения сплайна в произвольных точках:
S(0.237) = 1.2097625382409436
S(0.248) = 1.22058609407245
S(0.265) = 1.2484669978074858
S(0.29) = 1.2570642755971209
S(0.303) = 1.270751806010982
```

Рис. 3