З а м е ч а н и е. Операция $\vee$ вполне аналогична операции объединения $\bigcup$ из алгебры множеств.

5. Логическая операция «и». Обозначение $\wedge$ (&). Если имеют место одновременно свойства A и B, то это записывается в виде $A \wedge B$ или же «A и B», или же $A\&B$.

З а м е ч а н и е. Операция логического «и» вполне аналогична операции пересечения $\bigcap$ в алгебре множеств.

Докажите самостоятельно следующие свойства введенных выше логических операций:

$$\overline{A \vee B} = \overline{A} \wedge \overline{B},\ \overline{A \wedge B} = \overline{A} \vee \overline{B}$$

или

$$\overline{A \vee B} = \overline{A}\&\overline{B},\ \overline{A\&B} = \overline{A} \vee \overline{B}.$$

Будем в дальнейшем использовать знакомые по школьному курсу кванторы $\exists$ и $\forall$. Квантор существования $\exists$ означает выражение «существует» или «существуют». Квантор общности $\forall$ заменяет слова «для любого», «для каждого».

Пусть дано множество X и свойство $A(x)$ (где $x \in X$). Тогда символическая запись $(\forall x \in X)\ (A(x))$ означает: для любого элемента x, принадлежащего множеству X, имеет место $A(x)$ (т. е. выполнено свойство A). Символическая запись $(\exists x \in X)\ (A(x))$ означает: существует элемент x из множества X, для которого выполнено свойство A.

Используя операцию отрицания, имеем

$$\overline{(\forall x \in X)(A(x))} \Leftrightarrow (\exists x \in X)(\overline{A}(x)),$$

а также

$$\overline{(\exists x \in X)(A(x))} \Leftrightarrow (\forall x \in X)(\overline{A}(x)).$$

§ 2. Понятия отображения и функции

О п р е д е л е н и е. *Пусть A и B – два непустых множества. Отображением A в B или функцией, определенной на A со значениями в B, называется соответствие f, которое каждому элементу $x \in A$ соотносит (ставит в соответствие) единственный элемент $y \in B$, обозначаемый через $f(x)$.*

Обозначения для отображения (функции): $A \xrightarrow{f} B$; $f : A \to B$; $f : y = f(x)$, $x \in A$, $y \in B$; $f : x \in A$, $f(x) \in B$; $y = f(x)$, $x \in A$, $y \in B$; $x \to f(x)$. Элемент $f(x)$ при отображении $x \to f(x)$ называется значением функции $f(x)$, принимаемым в точке x. Множество A при отображении $f : A \to B$ называется областью определения или областью существования отображения (функции) f. Множество всех значений функции f называется ее областью значений (или множеством значений). Таким образом, если Y – множество значений функции $f : A \to B$, то $Y = \{y \in B | \exists x \in A \text{ такое, что } f(x) = y\}$. Следует различать отображение f и элемент $f(x)$, соответствующий x при этом отображении.

П р и м е р ы. 1. Равенство $y = x^2$ ставит в соответствие любому $x \in \mathbf{R}$ единственное число $y \in \mathbf{R}$. Например, если $x = 2$, то $y = 4$, если $x = -3$, то $y = 9$. Это равенство задает функцию $x \to x^2$, определенную на множестве $X = \{x \in \mathbf{R} | -\infty < x < +\infty\}$ с областью значений $Y = \{y \in \mathbf{R} | 0 \leq y < +\infty\}$.

Если же обозначить эту функцию символом f, то имеем $f(2) = 4$, $f(-3) = 9$.

2. Равенство $N = n!$ ставит в соответствие любому $n \in \mathbf{N}$ единственное натуральное же число N. Например, если $n = 3$, то $N = 6$, если $n = 5$, то $N = 120$. Таким образом, это равенство задает функцию, определенную на множестве натуральных чисел $\mathbf{N}$ с областью значений, являющейся подмножеством $\mathbf{N} : n \to n!$.

3. Функция $y = \sin x$, $-\infty < x < +\infty$, $y \in [-1, 1]$. Если $f(x) = \sin x$, то $f(0) = 0$, $f(\pi/2) = 1$; $x \to \sin x$.

4. Пусть A есть множество треугольников x на плоскости, а $B = \mathbf{R}$. Поставим в соответствие любому треугольнику $x \in A$ длину его периметра y, тем самым будет задана функция, определенная на множестве всех треугольников плоскости. Аргументом этой функции будет x, значениями аргумента будут различные треугольники, а значениями функции – периметры треугольников.

5. Любому числу $n \in \mathbf{Z}$ поставим в соответствие точку (n, n). Тогда получим отображение множества всех целых чисел $\mathbf{Z}$ в множество всех точек плоскости: $n \to (n, n)$.

О п р е д е л е н и е. *Пусть дано отображение $f : A \to B$. Тогда множество $\Gamma = \{(x, y) \in A \times B | x \in A,\ y = f(x) \in B\}$ называется графиком отображения f.*

6. Пусть A есть отрезок $[-1, 1]$ оси абсцисс OX, а B есть ось ординат OY координатной плоскости XOY, причем Γ есть дуга полуокружности единичного радиуса с центром в начале координат. Тогда Γ есть график отображения

$A \xrightarrow{f} B$, где $f : y = \sqrt{1 - x^2}$, $-1 \leq x \leq 1$, $y \in B$; $x \to \sqrt{1 - x^2}$.

7. Функция, ставящая любому элементу x своей области определения A одно и то же число c, называется постоянной функцией. Графиком постоянной функции $x \to c$ является множество $\Gamma = \{A\} \times \{c\}$. Постоянная функция $x \to c$ иногда обозначается этой же буквой c.

О п р е д е л е н и е. *Отображение $f : A \to A$, определенное равенством $f(x) = x \ \forall x \in A$, называется тождественным.*

З а м е ч а н и е. Если $A \subset B$, то отображение $A \xrightarrow{f} B$, определенное равенством $f(x) = x$, называется канонической инъекцией A в B.

О п р е д е л е н и е. *Если $A \times B$ – декартово произведение множеств A и B, то отображение $\mathrm{pr}_A : A \times B \to A$ (или $(x, y) \to x$), ставящее в соответствие любой паре $(x, y) \in A \times B$ элемент $x \in$*

A, называется проекцией на A. Аналогично определяется проекция $(x, y) \to y$ на B.

Определение. *Пусть $f : A \to B$ – отображение множества A в множество B. Если $X \subset A$, то множество тех элементов $y \in B$, которые в силу отображения f поставлены в соответствие хотя бы одному элементу $x \in X$, называют образом множества X при отображении f и обозначают через $f(X)$. Итак, $f(X) = \{y \in B | \exists x \in X$ такое, что $f(x) = y\}$.*

Замечание. Очевидно, $f(A)$ – это область значений отображения $f : A \to B$.

Пример. Пусть $f : y = x^2$, $x \in [-4, 4]$, $y \in [0, 16]$ и $X = [-1, 1]$. Тогда $f(X) = [0, 1] \subset B = [0, 16]$.

Определение. *Пусть дано отображение $f : A \to B$. Пусть y есть любой элемент множества B. Полным прообразом элемента y при отображении f называется множество всех $x \in A$ таких, что $f(x) = y$.* Полный прообраз элемента $y \in B$ обозначают через $f^{-1}(y)$. Тогда $f^{-1}(y) = \{x \in A | f(x) = y\}$. Аналогично, если $Y \subset B$, то полным прообразом множества Y при отображении $f : A \to B$ называется множество всех $x \in A$ таких, что $f(x) \in Y$, т. е. $f^{-1}(Y) = \{x \in A | \exists y \in Y$ такое, что $f(x) = y\}$.

Пример. $f : y = \sin x$, $x \in [0, 2\pi]$, $y \in [-1, 1]$ (график функции изображен на рис. 1). Тогда

$$f^{-1}(0) = \{0\} \cup \{\pi\} \cup \{2\pi\},\ f^{-1}([-1/2, 1/2]) =$$
$$= [0, \pi/6] \cup [5\pi/6, 7\pi/6] \cup [11\pi/6, 2\pi].$$

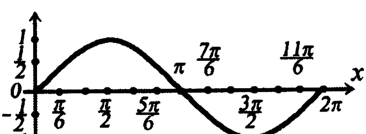

Рис. 1

Определение. *Отображение $f : A \to B$ называется взаимнооднозначным, или инъективным, если полный прообраз $f^{-1}(y)$ каждого элемента $y \in B$ состоит не более чем из одного элемента множества A. Другими словами: отображение f множества A в B называется взаимнооднозначным, или инъективным, если никакие два различных элемента из A не имеют одинаковых образов в B; или отображение $f : A \to B$ есть инъекция, если $\forall x_1, x_2 \in A$ имеем $(x_1 \neq x_2) \Leftrightarrow (f(x_1) \neq f(x_2))$; или если $x_1, x_2 \in A$, то $(x_1 = x_2) \Leftrightarrow (f(x_1) = f(x_2))$.*

Замечание. Каноническая инъекция $x \to x$, $A \to B$ $(A \subset B)$ является взаимнооднозначным отображением.

Определение. *Если область значений отображения $f : A \to B$ совпадает с множеством B, то говорят, что f отображает A на B. Отображение $x \to f(x)$ называется при этом сюръективным.*

Замечание. Отображение $f : A \to B$ есть отображение A на $f(A)$, причем $f(A) \subset B$.

Определение. *Отображение $f : A \to B$ называется биективным, если отображение f является взаимнооднозначным отображением A на B (т. е. биекция является одновременно инъективным и сюръективным отображением).*

Примеры. 1. Пусть отображение $f : A \to B$ задано своим графиком $\Gamma = \{(x, y) \in A \times B | x \in A,\ y = f(x) \in B\}$, изображенным на рис. 2, тогда имеем $f(A) \subset B$, но $f(A) \neq B$.

Заметим, что если отображение f сюръективно, т. е. отображает A на B, то $f(A) = B$, поэтому наше отображение не сюръективно.

2. Пусть отображение $f : A \to B$ задано графиком, изображенным на рис. 3. Тогда $f(A) = B$, т. е. отображение f сюръективно, т. е. отображает A на B.

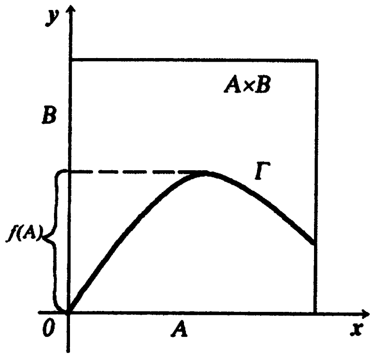

Рис. 2

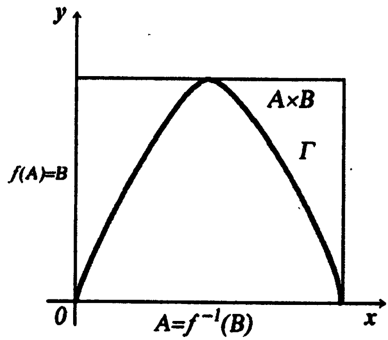

Рис. 3

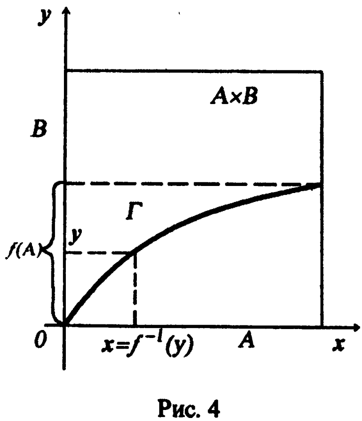

Рис. 4

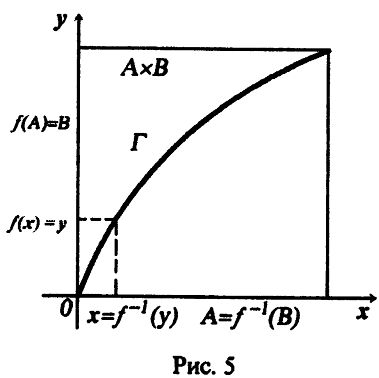

Рис. 5

3. Отображение $f : A \to B$ с графиком, изображенным на рис. 4, есть инъекция A в B, так как любая прямая, параллельная оси Ox и проходящая через точку $(0, y)$, где $y = f(x)$, пересекает график Γ отображения f только в одной точке (x, y) и поэтому любой $y \in f(A)$ имеет полный прообраз $f^{-1}(y)$, состоящий из единственной точки $x \in A$. Отметим, что отображение $f : A \to B$ не сюръективно и поэтому $f^{-1}(y) = \varnothing \ \forall y \in B \setminus f(A)$.

4. Отображение $f : A \to B$ с графиком, изображенным на рис. 5, есть биекция, поскольку $f(A) = B$ (т. е. f сюръективно) и $\forall y \in B$ существует единственный прообраз $x = f^{-1}(y) \in A$ (т. е. f инъективно).

5. Отображение $f : y = x^2$, $x \in [-1, 1] = A$, $y \in [0, 1] = B$ не является инъективным, поскольку, например, $f(-1) = f(1) = 1$, однако отображение $g : y = x^2$, $x \in [0, 1]$, $y \in [0, 1]$ уже инъективно и даже биективно, так как $g([0, 1]) = [0, 1] = B$ и $\forall x_1, x_2 \in [0, 1]$ имеем $(x_1 \neq x_2) \Leftrightarrow (x_1^2 \neq x_2^2)$.

Определение. *Пусть отображение $f : A \to B$ есть биекция и $y \in B = f(A)$. Тогда полный прообраз $f^{-1}(y)$ состоит из единственной точки $x \in A$ такой, что $f(x) = y$. Введем отображение $f^{-1} : y \to x = f^{-1}(y)$ множества B на A. Отображение f^{-1} вновь является биекцией и называется обратным отображением (обратной функцией) или биекцией к f.*

Замечание. Итак, если отображение $f : A \to B$ есть биекция, то обратная биекция $f^{-1} : B \to A$ ставит в соответствие любому $y \in B$ его единственный прообраз $x \in A$.

Замечание. Если отображение $f : A \to B$ не является биекцией (т. е. не является взаимнооднозначным отображением A на B), то обратного отображения не существует.

$$\boxed{\begin{array}{c} \cdot\, x = f^{-1}(y) \\ A = f^{-1}(B) \end{array}} \ \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xleftarrow[f^{-1}]{} \end{array} \ \boxed{\begin{array}{c} \cdot\, y = f(x) \\ B = f(A) \end{array}}$$

Замечание. Если $f : A \to B$ – биекция и $f^{-1} : B \to A$ – обратная биекция, то имеем

$f^{-1}(f(x)) = x \,\forall x \in A = f^{-1}(B)$,

$f(f^{-1}(y)) = y \,\forall y \in B = f(A)$.

Пример. $f : y = x^2$, $x \in [0, 1]$, $y \in [0, 1]$, $(x \to x^2)$, тогда $f^{-1} : x = \sqrt{y}$, $y \in [0, 1]$, $x \in [0, 1]$, $(y \to \sqrt{y})$.

Пусть $f : A \to B$ и $X \subset A$, $Y \subset B$. Отметим некоторые важные соотношения для образов и полных прообразов при отображении f.

1. $f(\varnothing) = \varnothing$.

2. $(X_1 \subset X_2 \subset A) \Rightarrow (f(X_1) \subset f(X_2) \subset B)$. (Доказательства провести самостоятельно).

3. $f(X_1 \cup X_2) = f(X_1) \cup f(X_2) \forall X_1, X_2 \subset A$.

Доказательство. Пусть сначала $y \in f(X_1 \cup X_2)$. Тогда существует $x \in X_1 \cup X_2$ такое, что $f(x) = y$. Но $x \in X_1 \cup X_2$ означает, что или $x \in X_1$, или $x \in X_2$. В случае $x \in X_1$ имеем $y = f(x) \in f(X_1)$; в случае $x \in X_2$ имеем $y = f(x) \in f(X_2)$, т. е. в обоих случаях имеем включение $y \in f(X_1) \cup f(X_2)$, откуда а) $f(X_1 \cup X_2) \subset f(X_1) \cup f(X_2)$.

Пусть теперь $y \in f(X_1) \cup f(X_2)$. Тогда или $y \in f(X_1)$, или $y \in f(X_2)$. В случае $y \in f(X_1)$ $\exists x \in X_1$ такое, что $f(x) = y$, и поскольку $X_1 \subset X_1 \cup X_2$, то $(x \in X_1 \cup X_2) \Rightarrow (y = f(x) \in f(X_1 \cup X_2))$.

В случае $y \in f(X_2)$ $\exists x \in X_2 \subset X_1 \cup X_2$ такое, что $f(x) = y$, т. е. $y \in f(X_1 \cup X_2)$. Итак, в обоих случаях имеем $y \in f(X_1 \cup X_2)$, т. е. имеет место включение б) $f(X_1) \cup f(X_2) \subset f(X_1 \cup X_2)$.

Из а) и б) вытекает утверждение 3.

4. $f(X_1 \cap X_2) \subset f(X_1) \cap f(X_2) \, \forall X_1, X_2 \subset A$. (Доказать самостоятельно.)

Замечание. Равенства $f(X_1 \cap X_2) = f(X_1) \cap f(X_2)$ может и не быть, например, если $f : A \to B$ есть постоянное отображение, т. е. $f(x) = b \, \forall x \in A$ и X_1, $X_2 \subset A$, но $X_1 \cap X_2 = \varnothing$. Тогда $f(X_1 \cap X_2) = f(\varnothing) = \varnothing$, однако $f(X_1) \cap f(X_2) = \{b\} \neq \varnothing$, т. е. $f(X_1) \cap f(X_2) \neq f(X_1 \cap X_2)$.

5. $f^{-1}(\varnothing) = \varnothing$.

Замечание. Может оказаться, что $\exists Y \subset B$ такое, что $f^{-1}(Y) = \varnothing$, хотя $Y \neq \varnothing$.

Пример. Рассмотри отображение $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, где $f : x \to x^2$, тогда $f^{-1}(-1) = \varnothing$.

6. $f^{-1}(Y_1) \subset f^{-1}(Y_2) \, \forall Y_1 \subset Y_2 \subset B$. (Доказать самостоятельно.)

7. $f^{-1}(Y_1 \cup Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cup f^{-1}(Y_2) \, \forall Y_1, Y_2 \subset B$. (Доказать самостоятельно.)

8. $f^{-1}(Y_1 \cap Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cap f^{-1}(Y_2) \, \forall Y_1, Y_2 \subset B$.

Доказательство. Пусть сначала $x \in f^{-1}(Y_1 \cap Y_2)$. Тогда $y = f(x) \in Y_1 \cap Y_2$, но $(y \in Y_1) \Rightarrow (x \in f^{-1}(Y_1))$, а $(y \in Y_2) \Rightarrow (x \in f^{-1}(Y_2))$, т. е. $x \in f^{-1}(Y_1) \cap f^{-1}(Y_2)$, откуда в) $f^{-1}(Y_1 \cap Y_2) \subset f^{-1}(Y_1) \cap f^{-1}(Y_2)$.

Пусть теперь $x \in f^{-1}(Y_1) \cap f^{-1}(Y_2) \neq \varnothing$. Тогда $(x \in f^{-1}(Y_1)) \Rightarrow (y = f(x) \in Y_1)$, а $(x \in f^{-1}(Y_2)) \Rightarrow (y = f(x) \in Y_2)$, т. е. $y = f(x) \in Y_1 \cap Y_2$, откуда имеем $x \in f^{-1}(Y_1 \cap Y_2)$, так что г) $f^{-1}(Y_1) \cap f^{-1}(Y_2) \subset f^{-1}(Y_1 \cap Y_2)$. Из в) и г) вытекает справедливость 8.

9. $f^{-1}(\complement Y) = \complement f^{-1}(Y) \forall Y \subset B$.

Доказательство. Имеем $B = Y \cup \complement Y$, $A = f^{-1}(B) = f^{-1}(Y \cup \complement Y)$. В силу свойства 7 имеем равенство $f^{-1}(Y \cup \complement Y) = f^{-1}(Y) \cup f^{-1}(\complement Y)$. Заметим, что $f^{-1}(Y) \cap f^{-1}(\complement Y) = \varnothing$, так как в противном случае $\exists x \in A$ такое, что $f(x) \in Y \cap \complement Y = \varnothing$. Это невозможно. Итак, имеем $A = f^{-1}(Y) \cup f^{-1}(\complement Y)$, причем $f^{-1}(Y) \cap f^{-1}(\complement Y) = \varnothing$, но тогда $f^{-1}(\complement Y) = A \setminus f^{-1}(Y) = \complement f^{-1}(Y)$.

10. $f^{-1}(f(X)) \supset X \; \forall X \subset A$.

Доказательство. Пусть $x \in X$, тогда $f(x) \in f(X) = Y$ и в силу определения полного прообраза $x \in f^{-1}(Y) = f^{-1}(f(X))$, т. е. $X \subset f^{-1}(f(X))$.

11. $f(f^{-1}(Y)) \subset Y \ \forall Y \subset B$.

Доказательство. Пусть $y \in f(f^{-1}(Y))$, тогда существует $x_0 \in f^{-1}(Y)$ такое, что $f(x_0) = y$. Поскольку $x_0 \in f^{-1}(Y)$, то в силу определения полного прообраза $f(x_0) = y \in Y \Rightarrow f(f^{-1}(Y)) \subset Y$.

Определение. *Если $f : A \to B$ есть отображение с областью определения A и $X \subset A$ – подмножество A, то сужением функции f на X называется функция $f_X : X \to B$, область определения которой есть X, и такая, что $f_X(x) = f(x) \ \forall x \in X$.* Для сужения f_X используется также обозначение $f|X$.

Замечание. Если f_X является сужением функции $f : A \to B$ на $X \subset A$, то функцию f называют продолжением функции $f_X : X \to B$ на множество A.

Пример. $f : y = x^2$, $x \in [-1, 1] = A$, $y \in [0, 1] = B$. Пусть $X = [0, 1] \subset A$, тогда имеем $f|X : y = x^2$, $x \in [0, 1]$, $y \in [0, 1]$.

Определение. *Пусть E, F и G – непустые множества и $f : E \to F$; $g : F \to G$. Тогда композицией (суперпозицией) $g \circ f$ называется отображение E в G, определенное формулой* $(g \circ f)(x) = g(f(x)) \ \forall x \in E$. Заметим, что запись $g \circ f$ производится в порядке, обратном тому, в котором производятся операции g и f. При исследовании композиций полезны диаграммы

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & F \arrow[r, "g"] & G \end{tikzcd}$$

Таким образом, в математическом анализе принято правило, согласно которому в композиции операций $g \circ f$ нужно начинать с операции f, расположенной справа.

Замечание. Если $A \subset E$, то $(g \circ f)(A) = g(f(A))$, если $B \subset G$, то $(g \circ f)^{-1}(B) = f^{-1}(g^{-1}(B)) \subset E$.

Замечание. Композиция отображений ассоциативна, т. е. если $f : E \to F$; $g : F \to G$; $h : G \to H$, то $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$, что проще записывается в виде $h \circ g \circ f$.

На диаграмме это выглядит так:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "g \circ f"] \arrow[rrr, bend left=50, "h \circ (g \circ f)"] \arrow[rrr, bend right=50, "(h \circ g) \circ f"'] & F \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend right, "h \circ g"'] & G \arrow[r, "h"] & H \end{tikzcd}$$

З а м е ч а н и е. Если f^{-1} является биекцией, обратной к $f : E \to F$, то $f^{-1} \circ f = I_E$, где I_E – тождественное отображение E (на E) и $f \circ f^{-1} = I_F$, где I_F – тождественное отображение F (на F).

П р и м е р. Пусть $g : y = u^2$, $u \in (-\infty, +\infty)$, $f : u = x + 1$, $x \in (-\infty, +\infty)$, $u \in (-\infty, +\infty)$, тогда $g \circ f : y = (x+1)^2$, $x \in (-\infty, +\infty)$, $y \in [0, +\infty)$.

При рассмотрении числовых функций $f : A \to B$, где $B \subset \mathbf{R}$ выделяют класс числовых (или действительных) функций одного действительного переменного, т. е. функции $f(x)$ вида $f : A \to B$, где A и B являются подмножествами множества действительных чисел $\mathbf{R}$ ($A \subset \mathbf{R}, B \subset \mathbf{R}$).

З а м е ч а н и е. Функция $n \to f(n)$, определенная на множестве $\mathbf{N}$ всех натуральных чисел, называется (числовой при $f(n) \in \mathbf{R}$) последовательностью. Ее значение, или член последовательности, для данного $n \in \mathbf{N}$ обычно обозначают через a_n, а сама последовательность обозначается символами (a_n) или a_1, a_2, ..., a_n, ... Таким образом, (a_n) есть отображение $n \to a_n$, $n \in \mathbf{N}$.

О п р е д е л е н и е. *Скажем, что числовые функции* $f : y = f(x)$, $x \in X_f$, $y \in Y_f = f(X_f)$ *и* $g : y = g(x)$, $x \in X_g$, $y \in Y_g = g(X_g)$ *совпадают, если: 1) совпадают их области определения* $X_f = X_g$ *и 2)* $f(x) = g(x)\ \forall x \in X = X_f = X_g$.

Простейшими элементарными функциями одного действительного переменного будем называть следующие функции:

1) рациональные функции $f(x) = \dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, $x \in \mathbf{R} \setminus \bigcup\limits_l \{x_l\}$, где $P_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$ и $Q_m(x) = \sum\limits_{k=0}^{m} b_k x^k$ – многочлены и x_l – действительное число, такое, что $Q_m(x_l) = 0$;

2) степенная функция $y = x^\alpha$, $0 < x < +\infty$, $\alpha \in (-\infty, +\infty)$; $0 \leq x < +\infty$, $\alpha \in (0, +\infty)$;

3) показательная функция $y = a^x$, $-\infty < x < +\infty$, $a > 0$, $a \neq 1$;

4) логарифмическая функция $y = \log_a x$, $0 < x < +\infty$, $a > 0$, $a \neq 1$;

5) тригонометрические функции:

$y = \sin x$, $-\infty < x < +\infty$, $-1 \leq y \leq 1$;

$y = \cos x$, $-\infty < x < +\infty$, $-1 \leq y \leq 1$;

$y = \operatorname{tg} x$, $(2k-1)\dfrac{\pi}{2} < x < (2k+1)\dfrac{\pi}{2}$ $(k = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots)$;

$y = \operatorname{ctg} x$, $k\pi < x < (k+1)\pi$ $(k = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots)$;

6) обратные тригонометрические функции:

$y = \arcsin x$, $-1 \leq x \leq 1$, $-\dfrac{\pi}{2} \leq y \leq \dfrac{\pi}{2}$;

$y = \arccos x$, $-1 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq \pi$;

$y = \operatorname{arctg} x$, $-\infty < x < +\infty$, $-\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2}$;

$y = \operatorname{arcctg} x$, $-\infty < x < +\infty$, $0 < y < \pi$.

О п р е д е л е н и е. *Элементарными функциями называются функции, получающиеся из простейших элементарных функций посредством конечного числа арифметических действий или композиций этих функций.*

П р и м е р. Функция $y = |x|$, $x \in (-\infty; +\infty)$ элементарная ($|x| = \sqrt{x^2}$).

П р и м е р. Функция $f(x) = \dfrac{x}{|x|} = \begin{cases} 1, x > 0, \\ -1, x < 0 \end{cases}$ элементарная.

П р и м е р. Функция $\operatorname{sgn} x$ не элементарная.

§ 3. Счетные и несчетные множества

О п р е д е л е н и е. *Пусть A и B – непустые множества. Если существует биекция (т. е. взаимнооднозначное отображение на) $f : A \to B$ множества A на B, то множества A и B называются равномощными.* Запись: $A \sim B$.

Отношение $\sim$ обладает следующими свойствами эквивалентности: 1) $A \sim A$ (рефлексивность); 2) $(A \sim B) \Rightarrow (B \sim A)$ (симметричность); 3) $(A \sim B) \wedge (B \sim C) \Rightarrow (A \sim C)$ (транзитивность).

О п р е д е л е н и е. *Если $\exists n \in \mathbf{N}$ такое, что $A \sim J_n = \{1, 2, \dots, n\}$, то непустое множество A называется конечным, в противном случае непустое множество A называется бесконечным.*

П р и м е р. Множество $A = \{2, 4, 6, \dots, 2n\}$ конечно, так как отображение $k \to 2k$ ($k = 1, 2, \dots, n$) множества J_n на A есть биекция и поэтому $A \sim J_n$.

О п р е д е л е н и е. *Непустое множество A называется счетным, если $A \sim \mathbf{N}$ (где $\mathbf{N}$ – множество натуральных чисел).*

П р и м е р ы:

а) Пусть $A = \{2, 4, 6, \dots, 2n, \dots\}$ – множество всех четных натуральных чисел. Тогда отображение $n \to 2n$ множества $\mathbf{N}$ на A есть биекция, и поэтому $A \sim \mathbf{N}$, т. е. A счетно;

б) рассмотрим множество всех целых чисел $\mathbf{Z}$. Тогда отображение $n \to a_n$, $n \in \mathbf{N}$, где

$$a_n = \begin{cases} n/2 & \text{при } n \text{ четном}, \\ (1 - n)/2 & \text{при } n \text{ нечетном} \end{cases}$$

есть биекция $\mathbf{N}$ на $\mathbf{Z}$, поэтому $\mathbf{Z} \sim \mathbf{N}$, т. е. множество $\mathbf{Z}$ счетно;

в) пусть Δ_1и Δ_2 – любые два отрезка. Построим прямоугольник со сторонами Δ_1 и Δ_2. Тогда диагональ $\Gamma \subset \Delta_1 \times \Delta_2$ этого прямо-