$(u+v)^2$ $(u+v)^3$, ..., лишь вместо степеней u, v стоят производные соответствующих порядков. Сходство станет более полным, если в полученных формулах вместо u, v писать $u^{(0)}$, $v^{(0)}$. Распространяя этот закон на случай любого n, придем к общей формуле*:

$$y^{(n)}=(uv)^{(n)}=\sum_{i=0}^{n} C_n^i u^{(n-i)} v^{(i)}=$$

$$=u^{(n)}v+nu^{(n-1)}v'+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}u^{(n-2)}v''+\ldots$$

$$\ldots+\frac{n(n-1)\ldots(n-i+1)}{1\cdot 2\ldots i}u^{(n-i)}v^{(i)}+\ldots+uv^{(n)}. \qquad (1)$$

Для доказательства её справедливости прибегнем снова к методу математической индукции. Допустим, что при некотором значении n она верна. Если для функций u, v существуют и $(n+1)$-е производные, то можно ещё раз продифференцировать по x; мы получим:

$$y^{(n+1)}=\sum_{i=0}^{n} C_n^i [u^{(n-i)}v^{(i)}]'=\sum_{i=0}^{n} C_n^i u^{(n-i+1)}v^{(i)}+\sum_{i=0}^{n} C_n^i u^{(n-i)}v^{(i+1)}.$$

Объединим теперь слагаемые обеих последних сумм, содержащие одинаковые произведения производных функций u и v (сумма порядков производных в таком произведении, как легко видеть, равна всегда $n+1$). Произведение $u^{(n+1)}v^{(0)}$ входит только в первую сумму (при $i=0$); коэффициент его в этой сумме есть $C_n^0=1$. Точно так же $u^{(0)}v^{(n+1)}$ входит только во вторую сумму (в слагаемое с номером $i=n$), с коэффициентом $C_n^n=1$. Все остальные произведения, входящие в эти суммы, имеют вид $u^{(n+1-k)}v^{(k)}$, причём $1\leqslant k\leqslant n$. Каждое такое произведение встретится как в первой сумме (слагаемое с номером $i=k$), так и во второй сумме (слагаемое с номером $i=k-1$). Сумма соответствующих коэффициентов будет $C_n^k+C_n^{k-1}$. Но, как известно,

$$C_n^k+C_n^{k-1}=C_{n+1}^k.$$

---

* Символ $\sum$ означает сумму однотипных слагаемых. Когда слагаемые эти зависят от одного значка, меняющегося в определённых границах то эти границы и указываются (снизу и сверху). Например,

$$\sum_{i=0}^{n} a_i=a_0+a_1+\ldots+a_n,$$

$$\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{m}, \text{ и т. д.}$$

Таким образом, окончательно находим:

$$y^{(n+1)} = u^{(n+1)}v^{(0)} + \sum_{k=1}^{n} C_{n+1}^{k} u^{[(n+1)-k]} v^{(k)} + u^{(0)}v^{(n+1)} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^{k} u^{[(n+1)-k]} v^{(k)},$$

так как $C_{n+1}^{0} = C_{n+1}^{n+1} = 1$.

Мы получили для $y^{(n+1)}$ выражение, вполне аналогичное выражению (1) (только n заменилось числом $n+1$); этим и доказана справедливость формулы (1) для всех натуральных значений n.

Установленная формула носит название *формулы Лейбница*. Она часто бывает полезна при выводе общих выражений для n-й производной.

Заметим, что такую же формулу можно было бы установить и для n-й производной произведения нескольких сомножителей $y = uv \ldots t$; она имеет сходство с разложением степени многочлена $(u + v + \ldots + t)^n$.

118. Примеры. 1) Найдём при помощи формулы Лейбница (1) производную

$$(x^2 \cdot \cos ax)^{(50)}.$$

Положим $v = x^2$, $u = \cos ax$. Тогда

$$u^{(k)} = a^k \cdot \cos\left(ax + k \cdot \frac{\pi}{2}\right),$$

$$v' = 2x, \quad v'' = 2, \quad v''' = v^{\mathrm{IV}} = \ldots = 0.$$

Таким образом, в формуле (1) все слагаемые, кроме трёх первых, равны нулю, и мы получаем:

$$(uv)^{(50)} = x^2 \cdot a^{50} \cdot \cos\left(ax + 50 \cdot \frac{\pi}{2}\right) + \frac{50}{1} \cdot 2x \cdot a^{49} \cdot \cos\left(ax + 49 \cdot \frac{\pi}{2}\right) +$$

$$+ \frac{50 \cdot 49}{1 \cdot 2} \cdot 2 \cdot a^{48} \cdot \cos\left(ax + 48 \cdot \frac{\pi}{2}\right) = a^{48}\,[(2450 - a^2x^2)\cos ax - 100\,ax \cdot \sin ax].$$

2) Возвращаясь к примеру 7), 116, теперь мы можем получить общее выражение для n-й производной функции

$$y = e^{ax} \cdot \sin bx$$

непосредственно по формуле Лейбница:

$$y^{(n)} = e^{ax}\left[\sin bx\left(a^n - \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}\, a^{n-2}b^2 + \ldots\right) + \right.$$

$$\left. + \cos bx\left(na^{n-1}b - \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}\, a^{n-3}b^3 + \ldots\right)\right].$$

3) Найдём выражение для $(n+1)$-й производной функции $y = \arcsin x$.

Имеем, прежде всего,

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x}},$$

к что, по формуле Лейбница,

$$^{+1} = \left(\frac{1}{\sqrt{1+x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x}}\right)^{(n)} = \left(\frac{1}{\sqrt{1+x}}\right)^{(n)} \frac{1}{\sqrt{1-x}} + n \left(\frac{1}{\sqrt{1+x}}\right)^{(n-1)} \left(\frac{1}{\sqrt{1-x}}\right)' +$$

$$+ \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\left(\frac{1}{\sqrt{1+x}}\right)^{(n-2)} \left(\frac{1}{\sqrt{1-x}}\right)'' + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\frac{1}{\sqrt{1+x}}\right)^{(n-3)} \left(\frac{1}{\sqrt{1-x}}\right)''' + \ldots$$

Если теперь к вычислению последовательных производных от $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ применить формулы, полученные в **116**, 2), то придем к результату

$$^{(n+1)} = \frac{1}{2^n\sqrt{1-x^2}}\left\{\frac{(2n-1)!!}{(1+x)^n} - n\,\frac{(2n-3)!!\,1!!}{(1+x)^{n-1}(1-x)} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{(2n-5)!!\,3!!}{(1+x)^{n-2}(1-x)^2} + \ldots\right\}.$$

4) Требуется найти значения всех последовательных производных функции $\operatorname{arctg} x$ при $x=0$.

Так как $y' = \frac{1}{1+x^2}$, то $y'(1+x^2)=1$. Возьмем n-ю производную от обеих частей го равенства (пользуясь формулой Лейбница):

$$(1+x^2)y^{(n+1)} + 2nx\cdot y^{(n)} + n(n-1)\cdot y^{(n-1)} = 0.$$

пожим здесь $x=0$; если значения производных при $x=0$ отмечать значками 0 зу, то получим:

$$y_0^{(n+1)} = -n(n-1)\cdot y_0^{(n-1)}.$$

При $x=0$ производная $y'' = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$ обращается в 0: $y_0''=0$. Из найден- э соотношения ясно, что всегда $y_0^{(2m)}=0$. Что же касается производных этного порядка, то имеем для них рекуррентную формулу:

$$y_0^{(2m+1)} = -(2m-1)\cdot 2m\cdot y_0^{(2m-1)}.$$

нимая во внимание, что $y_0'=1$, получаем отсюда:

$$y_0^{(2m+1)} = (-1)^m(2m)!.$$

Тот же результат можно было бы получить и из общей формулы примера **116**.

5) То же – для функции $y=\arcsin x$.

Указание. Формулу Лейбница применить к соотношению;

$$(1-x^2)\cdot y'' - x\cdot y' = 0.$$

Ответ: $y_0^{(2m)}=0$, $y_0^{(2m-1)} = 1^2\cdot 3^2 \ldots (2m-1)^2 = [(2m-1)!!]^2$. Этот результат из их выражений в 3) получается не столь просто.

6) *Многочлены Лежандра.* В заключение остановимся на важных многочленах, носящих имя Лежандра (A. M. Legendre). Они определяются равенствами

$$X_n(x) = c_n \frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

где постоянным коэффициентам c_n придаются те или иные значения в зависимости от соображений удобства.

Прежде всего убедимся в том, что многочлен $X_n(x)$ (степени n) имеет n различных вещественных корней, которые все содержатся между -1 и $+1$. Для простоты положим пока $c_n = 1$.

Легко видеть, что многочлен $(x^2-1)^n = (x-1)^n \cdot (x+1)^n$ и его $n-1$ последовательных производных обращаются в нуль при $x = \pm 1$. Тогда первая ее производная, по теореме Ролля **[111]**, будет иметь корень и между -1 и $+1$; по той же теореме, вторая производная будет иметь два корня между -1 и $+1$, и т. д. вплоть до $(n-1)$-й производной, которая, помимо корней -1 и $+1$, будет между ними иметь еще $n-1$ корней. Применив к ней еще раз теорему Ролля, придем к требуемому заключению.

Сохраняя коэффициенты $c_n = 1$, определим теперь значения многочлена $X_n(x)$ при $x = \pm 1$.

По формуле Лейбница, рассматривая степень $(x^2-1)^n$ как произведение $(x+1)^n$ на $(x-1)^n$, можно написать:

$$X_n(x) = (x+1)^n \cdot \frac{d^n(x-1)^n}{dx^n} + C_n^1 \cdot \frac{d(x+1)^n}{dx} \cdot \frac{d^{n-1}(x-1)^n}{dx^{n-1}} + \ldots + \frac{d^n(x+1)^n}{dx^n} \cdot (x-1)^n.$$

Так как все слагаемые, начиная со второго, содержат множитель $x-1$ и, следовательно, обращаются в 0 при $x = 1$, то очевидно: $X_n(1) = 2^n \cdot n!$.

Аналогично получаем: $X_n(-1) = (-1)^n \cdot 2^n \cdot n!$.

Если в формуле, дающей общее определение многочлена Лежандра $X_n(x)$, положить в частности

$$c_n = \frac{1}{2^n \cdot n!},$$

то получится многочлен, который чаще всего встречается; его именно мы будем впредь всегда обозначать через $P_n(x)$. Он характеризуется тем, что в точках $x = 1$ и $x = -1$ принимает значения

$$P_n(1) = 1, \qquad P_n(-1) = (-1)^n.$$

С помощью формулы Лейбница легко установить далее, что многочлены Лежандра $X_n(x)$ удовлетворяют следующему соотношению:

$$(x^2-1)X_n'' + 2x \cdot X_n' - n(n+1)X_n = 0,$$

которое играет важную роль в теории этих многочленов.

В самом деле, полагая $y = (x^2-1)^n$, имеем

$$y' = 2nx \cdot (x^2-1)^{n-1}, \qquad \text{так что} \qquad (x^2-1) \cdot y' = 2nx \cdot y.$$

Возьмем теперь $(n+1)$-е производные от обеих частей последнего равенства; по формуле Лейбница,

$$(x^2-1)y^{(n+2)} + (n+1) \cdot 2x \cdot y^{(n+1)} + \frac{n(n+1)}{2} \cdot 2 \cdot y^{(n)} = 2nx \cdot y^{(n+1)} + (n+1) \cdot 2n \cdot y^{(n)}.$$

Отсюда

$$(x^2-1)y^{(n+2)} + 2xy^{(n+1)} - n(n+1)y^{(n)} = 0,$$

и, по умножении на c_n, получается доказываемое соотношение.

119. Дифференциалы высших порядков. Обратимся теперь к дифференциалам высших порядков; они также определяются индуктивно. Дифференциалом второго порядка или вторым дифференциалом функции $y=f(x)$ в некоторой точке называется дифференциал в этой точке от ее (первого) дифференциала; в обозначениях

$$d^2y=d(dy).$$

Дифференциалом третьего порядка или третьим дифференциалом называется дифференциал от второго дифференциала:

$$d^3y=d(d^2y).$$

Вообще, дифференциалом n-го порядка или n-м дифференциалом функции $y=f(x)$ называется дифференциал от ее $(n-1)$-го дифференциала:

$$d^ny=d(d^{n-1}y).$$

Если пользоваться функциональным обозначением, то последовательные дифференциалы могут быть обозначены так:

$$d^2f(x_0),\ d^3f(x_0),\ \ldots,\ d^nf(x_0),\ \ldots,$$

причем получается возможность указать то частное значение $x=x_0$, при котором дифференциалы берутся.

При вычислении дифференциалов высших порядков очень важно помнить, что dx есть произвольное и независящее от x число, которое при дифференцировании по x надлежит рассматривать как постоянный множитель. В таком случае, будем иметь (все время – предполагая существование соответствующих производных):

$$d^2y=d(dy)=d(y'\cdot dx)=dy'\cdot dx=(y''\cdot dx)\cdot dx=y''\cdot dx^2,$$
$$d^3y=d(d^2y)=d(y''\cdot dx^2)=dy''\cdot dx^2=(y'''dx)\cdot dx^2=y'''\cdot dx^3\ ^{*)},$$

и т. д. Легко угадываемый общий закон

$$d^ny=y^{(n)}\cdot dx^n \tag{2}$$

доказывается методом математической индукции. Из него следует, что

$$y^{(n)}=\frac{d^ny}{dx^n},$$

так что отныне этот символ можно рассматривать как дробь.

Воспользовавшись равенством (2), легко теперь преобразовать формулу Лейбница к дифференциалам. Достаточно умножить обе части ее на dx^n, чтобы получить

$$d^n(uv)=\sum_{i=0}^{n}C_n^i d^{n-i}u\cdot d^iv \qquad (d^0u=u,\ d^0v=v).$$

Сам Лейбниц установил свою формулу именно для дифференциалов.

---

*) Под dx^2, dx^3, ... и т. п. всегда разумеются степени от дифференциала: $(dx)^2$, $(dx)^3$, ... Дифференциал от степени будет обозначаться так: $d(x^2)$, $d(x^3)$, ...

120. Нарушение инвариантности формы для дифференциалов высших порядков. Вспоминая, что (первый) дифференциал функции обладает свойством инвариантности формы, естественно поставить вопрос, обладают ли подобным свойством дифференциалы высших порядков. Покажем, например, что уже второй дифференциал этим свойством не обладает.

Итак, пусть $y=f(x)$ и $x=\varphi(t)$, так что y можно рассматривать как сложную функцию от t: $y=f(\varphi(t))$. Ее (первый) дифференциал по t можно написать в форме $dy=y'_x \cdot dx$, где $dx=x'_t \cdot dt$ есть функция от t. Вычисляем второй дифференциал по t: $d^2y=d(y'_x \cdot dx)=dy'_x \cdot dx+y'_x \cdot d(dx)$. Дифференциал dy'_x можно, снова пользуясь инвариантностью формы (первого) дифференциала, взять в форме $dy'_x=y''_{x^2} \cdot dx$, так что окончательно

$$d^2y=y''_{x^2} \cdot dx^2+y'_x \cdot d^2x, \tag{3}$$

в то время как при независимой переменной x второй дифференциал имел вид $d^2y=y''_{x^2} \cdot dx^2$. Конечно, выражение (3) для d^2y является более общим: если, в частности, x есть независимая переменная, то $d^2x=0$ – и остается один лишь первый член.

Возьмем пример. Пусть $y=x^2$, так что, покуда x – независимая переменная:

$$dy=2x\,dx, \qquad d^2y=2dx^2.$$

Положим теперь $x=t^2$; тогда $y=t^4$, и

$$dy=4t^3dt, \qquad d^2y=12t^2dt^2.$$

Новое выражение для dy может быть получено и из старого, если туда подставить $x=t^2$, $dx=2t\,dt$. Иначе обстоит дело с d^2y: сделав такую же подстановку, мы получим $8t^2\,dt^2$ вместо $12t^2\,dt^2$. Если же продифференцировать равенство $dy=2xdx$ по t, считая x функцией от t, то, наподобие (3), придем к формуле

$$d^2y=2dx^2+2xd^2x.$$

Подставив сюда $x=t^2$, $dx=2t\,dt$, $d^2x=2dt^2$, получим уже правильный результат: $12t^2dt^2$.

Итак, если x перестает быть независимой переменной, то дифференциал второго порядка d^2y выражается через дифференциалы x двучленной формулой (3). Для дифференциалов третьего и дальнейших порядков число добавочных (при переходе к новой независимой переменной) членов еще возрастет. В соответствии с этим в выражениях высших производных $y''_{x^2}, y'''_{x^3}, \ldots$ через дифференциалы

$$y''_{x^2}=\frac{d^2y}{dx^2}, \quad y'''_{x^3}=\frac{d^3y}{dx^3}, \ldots \tag{4}$$

уже нельзя дифференциалы брать по любой переменной, но лишь по переменной x.

121. Параметрическое дифференцирование. Можно, впрочем, написать выражения производных по x и через дифференциалы, взятые по любой переменной t, но они будут гораздо сложнее. Именно, считая все ниже написанные дифференциалы взятыми по t, имеем последовательно

$$y'_x = \frac{dy}{dx}, \quad y''_{x^2} = \left(\frac{dy}{dx}\right)'_x = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = \frac{\frac{dx \cdot d^2y - d^2x \cdot dy}{dx^2}}{dx},$$

т. е.

$$y''_{x^2} = \frac{dx \cdot d^2y - d^2x \cdot dy}{dx^3}; \tag{5}$$

затем,

$$y'''_{x^3} = \left(\frac{dx \cdot d^2y - d^2x \cdot dy}{dx^3}\right)'_x = \frac{d\left(\frac{dx \cdot d^2y - d^2x \cdot dy}{dx^3}\right)}{dx} =$$

$$= \frac{\frac{dx^3(dx\, d^3y - d^3x dy) - 3dx^2 d^2x (dx\, d^2y - d^2x dy)}{dx^6}}{dx}$$

и окончательно:

$$y'''_{x^3} = \frac{dx(dx\, d^3y - d^3x\, dy) - 3d^2x\,(dx\, d^2y - d^2x\, dy)}{dx^5} \tag{6}$$

и т. д. Формулы (5), (6), ... являются наиболее общими; если в них считать x независимой переменной, то $d^2x, d^3x, \ldots$ обратятся в нуль – и мы вернемся к формулам (4).

Полученные нами формулы для производных y по x осуществляют так называемое параметрическое дифференцирование. Если x и y заданы в функции от параметра t:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t),$$

то, как мы видели в **106**, при известных условиях этим определяется и y как функция от x: $y = f(x)$. При наличии последовательных производных от x и y по t существуют соответствующие производные от y по x и выражаются выведенными выше формулами.

Иногда удобнее иметь выражение производных y по x через производные же (а не дифференциалы) от x и y по t. Их легко получить из дифференциальных выражений, разделив числитель и знаменатель, соответственно, на $dt, dt^3, dt^5, \ldots$ Таким путем придем к формулам:

$$y'_x = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{y'_t}{x'_t}, \quad y''_{x^2} = \frac{\frac{dx}{dt} \cdot \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{d^2x}{dt^2} \cdot \frac{dy}{dt}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3} = \frac{x'_t y''_{t^2} - x''_{t^2} y'_t}{(x'_t)^3};$$

аналогично:

$$y'''_{x^3} = \frac{x'_t(x'_t y'''_{t^3} - x'''_{t^3} y'_t) - 3x''_{t^2}(x'_t y''_{t^2} - x''_{t^2} y'_t)}{(x'_t)^5},$$

и т. д.

122. Конечные разности. Пусть функция $f(x)$ определена в некотором промежутке $\mathcal{X}$ и все значения x, которые будут встречаться, считаются принадлежащими этому промежутку. Фиксировав некоторое приращение Δx переменной x (мы будем предполагать, для определенности, $\Delta x > 0$, хотя ничто не мешало бы рассматривать и $\Delta x < 0$), положим

$$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$$

и назовем это выражение первой разностью нашей функции. Второй разностью называется первая разность от первой разности:

$$\Delta^2 f(x) = \Delta[\Delta f(x)] = \Delta f(x + \Delta x) - \Delta f(x) = f(x + 2\Delta x) - 2f(x + \Delta x) + f(x).$$

Высшие разности определяются индуктивно:

$$\Delta^n f(x) = \Delta[\Delta^{n-1} f(x)].$$

Впрочем, для n-й разности может быть установлена и формула

$$\Delta^n f(x) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i C_n^i f(x + \overline{n-i}\,\Delta x) =$$

$$= f(x + n\Delta x) - \frac{n}{1} f(x + \overline{n-1}\,\Delta x) + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} f(x + \overline{n-2}\,\Delta x) - \ldots + (-1)^n f(x),$$

выражающая эту разность непосредственно через значения самой функции $f(x)$ в равноотстоящих точках

$$x,\ x + \Delta x,\ x + 2\Delta x,\ \ldots,\ x + n\Delta x.$$

Эта формула легко доказывается по методу математической индукции, что может быть предоставлено читателю.

Сопоставим теперь эти *конечные разности* с производными и дифференциалами.

Предположим, что функция $f(x)$ имеет $n-1$ непрерывных производных

$$f'(x),\ f''(x),\ \ldots,\ f^{(n-1)}(x)$$

в замкнутом промежутке $[x_0, x_0 + n\Delta x]$ и конечную n-ю производную $f^{(n)}(x)$, по крайней мере, в открытом промежутке $(x_0, x_0 + n\Delta x)$. Тогда имеет место формула

$$\Delta^n f(x_0) = f^{(n)}(\xi_n) \cdot \Delta x^n, \qquad \text{где} \qquad x_0 < \xi_n < x_0 + n\Delta x. \tag{7}$$

При $n = 1$ дело сводится к формуле конечных приращений, которая является простейшим частным случаем формулы (7). Намереваясь провести доказательство нашего утверждения по методу математической индукции, мы допустим справедливость измененной формулы (7), получаемой при замене n на $n-1$, разумеется, при соответственно измененных предположениях, и докажем (7), при сделанных предположениях. Из них следует, что для функции $\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$ в промежутке $[x_0, x_0 + \overline{n-1}\,\Delta x]$ с избытком выполняются условия применимости измененной формулы (7), и мы можем написать

$$\Delta^{n-1}[\Delta f(x_0)] = \Delta^n f(x_0) = [f^{(n-1)}(\xi_{n-1} + \Delta x) - f^{(n-1)}(\xi_{n-1})] \cdot \Delta x^{n-1}, \tag{8}$$

где $x_0 < \xi_{n-1} < x_0 + \overline{n-1}\,\Delta x$. Применяя к правой части этого равенства формулу конечных приращений *), получим непосредственно формулу (7), причем

$$x_0 < \xi_{n-1} < \xi_n < \xi_{n-1} + \Delta x < x_0 + n\,\Delta x.$$

Заметим, что, если производная $f^{(n)}(x)$ существует также в точке x_0 и притом непрерывна в этой точке, то из соотношения (7) при $\Delta x \to 0$ (тогда $\xi_n \to x_0$) следует, что

$$f^{(n)}(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta^n f(x_0)}{\Delta x^n}. \tag{9}$$

Впрочем, эта интересная формула, устанавливающая возможность получения n-й производной с помощью лишь одного предельного перехода, справедлива при единственном предположении, что эта производная существует именно в точке x_0. Это значит, что в некоторой окрестности точки x_0 существуют производные

$$f'(x),\ f''(x),\ \ldots,\ f^{(n-1)}(x)$$

и, следовательно, при достаточно малом Δx, может быть применена формула (8). Ввиду существования производной $f^{(n)}(x_0)$, воспользовавшись формулой (2) n° 96, можем написать

$$f^{(n-1)}(\xi_{n-1}) - f^{(n-1)}(x_0) = f^{(n)}(x_0)\cdot(\xi_{n-1} - x_0) + \alpha\cdot(\xi_{n-1} - x_0)$$

и

$$f^{(n-1)}(\xi_{n-1} + \Delta x) - f^{(n-1)}(x_0) = f^{(n)}(x_0)\cdot(\xi_{n-1} + \Delta x - x_0) + \beta\cdot(\xi_{n-1} + \Delta x - x_0),$$

где α и β зависят от Δx и вместе с ним стремятся к нулю. Отсюда и из (8) вытекает **):

$$\Delta^n f(x_0) = [f^{(n)}(x_0) + \gamma]\cdot\Delta x^n,$$

где γ — новая бесконечная малая. Наконец, деля это равенство почленно на Δx^n и переходя к пределу при $\Delta x \to 0$, придем к формуле (9).

Подчеркнем, что она имеет место лишь в предположении, что существует производная $f^{(n)}(x_0)$. Предел справа может существовать и тогда, когда этой производной нет ***). Рассмотрим, например, функцию, определенную так:

$$f(x) = x^3 \cdot \sin\frac{1}{x} \quad (x \neq 0), \qquad f(0) = 0,$$

взяв $x_0 = 0$. Для нее существует первая производная

$$f'(x) = 3x^2 \cdot \sin\frac{1}{x} - x\cdot\cos\frac{1}{x} \quad (x \neq 0), \qquad f'(0) = 0,$$

но нет в точке 0 второй производной, ибо отношение

$$\frac{f'(0+\Delta x) - f'(0)}{\Delta x} = \frac{3\,\Delta x^2\cdot\sin\frac{1}{\Delta x} - \Delta x\cdot\cos\frac{1}{\Delta x}}{\Delta x} = 3\,\Delta x\cdot\sin\frac{1}{\Delta x} - \cos\frac{1}{\Delta x}$$

*) На что мы имеем право, так как функция $f^{(n-1)}(x)$ непрерывна в промежутке $[\xi_{n-1}, \xi_{n-1} + \Delta x]$, а внутри него имеет конечную производную $f^{(n)}(x)$.

**) Учитывая, что $0 < \xi_{n-1} - x_0 < (n-1)\,\Delta x$ (при $\Delta x > 0$).

***) Так что формула (9) отнюдь не дает нового определения самого понятия n-й производной, равносильного старому!

при $\Delta x \to 0$ предела не имеет. В то же время выражение

$$\frac{\Delta^2 f(0)}{\Delta x^2} = \frac{f(0+2\,\Delta x) - 2f(0+\Delta x) + f(0)}{\Delta x^2} = \frac{8\,\Delta x^3 \cdot \sin\dfrac{1}{2\,\Delta x} - 2\,\Delta x^3 \cdot \sin\dfrac{1}{\Delta x}}{\Delta x^2} =$$

$$= 8\,\Delta x \cdot \sin\frac{1}{2\,\Delta x} - 2\,\Delta x \cdot \sin\frac{1}{\Delta x} \to 0.$$

§ 5. Формула Тейлора

123. Формула Тейлора для многочлена. Если $p(x)$ есть целый многочлен степени n:

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n, \tag{1}$$

то, последовательно дифференцируя его n раз:

$$\begin{aligned}
p'(x) &= a_1 + 2 \cdot a_2 x + 3 \cdot a_3 x^2 + \ldots + n \cdot a_n x^{n-1}, \\
p''(x) &= 1 \cdot 2 \cdot a_2 + 2 \cdot 3 \cdot a_3 x + \ldots + (n-1)n \cdot a_n x^{n-2}, \\
p'''(x) &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot a_3 + \ldots + (n-2)(n-1)n \cdot a_n x^{n-3}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
p^{(n)}(x) &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n \cdot a_n
\end{aligned}$$

и полагая во всех этих формулах $x=0$, найдем выражения коэффициентов многочлена через значения самого многочлена и его производных при $x=0$

$$a_0 = p(0), \qquad a_1 = \frac{p'(0)}{1!}, \qquad a_2 = \frac{p''(0)}{2!},$$

$$a_3 = \frac{p'''(0)}{3!}, \ \ldots, \qquad a_n = \frac{p^{(n)}(0)}{n!}.$$

Подставим эти значения коэффициентов в (1):

$$p(x) = p(0) + \frac{p'(0)}{1!}x + \frac{p''(0)}{2!}x^2 + \frac{p'''(0)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{p^{(n)}(0)}{n!}x^n. \tag{2}$$

Эта формула отличается от (1) записью коэффициентов.

Вместо того чтобы разлагать многочлен по степеням x, можно было бы взять его разложение по степеням $x - x_0$, где x_0 есть некоторое постоянное частное значение x:

$$p(x) = A_0 + A_1(x-x_0) + A_2(x-x_0)^2 + \\ + A_3(x-x_0)^3 + \ldots + A_n(x-x_0)^n. \tag{3}$$

Полагая $x-x_0=\xi$, $p(x)=p(x_0+\xi)=P(\xi)$, для коэффициентов многочлена

$$P(\xi)=A_0+A_1\xi+A_2\xi^2+A_3\xi^3+\ldots+A_n\xi^n$$

имеем, по доказанному, выражения:

$$A_0=P(0),\qquad A_1=\frac{P'(0)}{1!},\qquad A_2=\frac{P''(0)}{2!},$$

$$A_3=\frac{P'''(0)}{3!},\ \ldots,\qquad A_n=\frac{P^{(n)}(0)}{n!}.$$

Но

$$P(\xi)=p(x_0+\xi),\qquad P'(\xi)=p'(x_0+\xi),$$

$$P''(\xi)=p''(x_0+\xi),\ \ldots,$$

так что

$$P(0)=p(x_0),\qquad P'(0)=p'(x_0),\qquad P''(0)=p''(x_0),\ \ldots$$

и

$$\left.\begin{aligned} A_0=p(x_0),\qquad A_1=\frac{p'(x_0)}{1!},\qquad A_2=\frac{p''(x_0)}{2!},\\ A_3=\frac{p'''(x_0)}{3!},\ \ldots,\qquad A_n=\frac{p^{(n)}(x_0)}{n!},\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

т. е. коэффициенты разложения (3) оказались выраженными через значения самого многочлена и его производных при $x=x_0$.

Подставим в (3) выражения (4):

$$p(x)=p(x_0)+\frac{p'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{p''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+$$
$$+\frac{p'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3+\ldots+\frac{p^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n. \tag{5}$$

Формула (5), так же как и ее частный (при $x_0=0$) случай (2), называется формулой Тейлора (B. Taylor)*). Известно, какие важные применения она имеет в алгебре.

Сделаем (полезное для дальнейшего) очевидное замечание, что если многочлен $p(x)$ представлен в виде

$$p(x)=c_0+\frac{c_1}{1!}(x-x_0)+\frac{c_2}{2!}(x-x_0)^2+\frac{c_3}{3!}(x-x_0)^3+\ldots+\frac{c_n}{n!}(x-x_0)^n,$$

то необходимо

$$p(x_0)=c_0,\qquad p'(x_0)=c_1,\qquad p''(x_0)=c_2,\ \ldots,\ p^{(n)}(x_0)=c_n.$$

*) Впрочем, формулу (2) часто называют формулой Маклорена (C. Maclaurin).