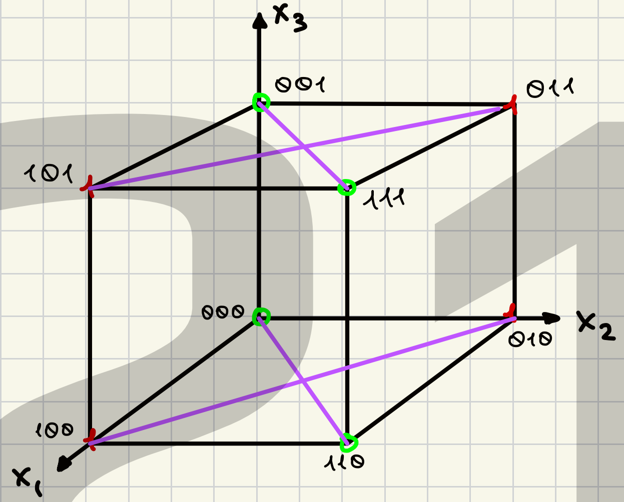
ДЗ 12

№1. $f(x_1,x_2,x_3) = 00111100$



x_1	x_2	x_3	$f(x_1,x_2,x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

Как видно из рисунка, ф-ция не меняет своего значения при изменении x_1 (фиолетовые линии) $\Rightarrow$ x_3 – фиктивная, x_1, x_2 – существ.

ДНФ: $f(x_1,x_2,x_3) = \bigvee\limits_{f(x_1,x_2,x_3)=1} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n} = \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \vee$

$\bar{x}_1 x_2 x_3 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 = \bar{x}_1 x_2 (\bar{x}_3 \vee x_3) \vee x_1 \bar{x}_2 (\bar{x}_3 \vee x_3) =$

$= \bar{x}_1 x_2 \vee x_1 \bar{x}_2 = x_1 \oplus x_2$

КНФ: $f(x_1,x_2,x_3) = \bigwedge\limits_{f(x_1,x_2,x_3)=0} (x_1^{\bar{\alpha}_1} \vee x_2^{\bar{\alpha}_2} \vee x_3^{\bar{\alpha}_3}) =$

$= (x_1 \vee x_2 \vee x_3)(x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3) =$

$= (x_1 \vee x_2 \vee x_1 x_2 \vee x_1 x_3 \vee x_2 x_3 \vee x_1 \bar{x}_3 \vee x_2 \bar{x}_3)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 x_3 \vee \bar{x}_2 x_3 \vee$

$\vee \bar{x}_1 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_3) = (x_1 \vee x_2 \vee x_1 x_2)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2) = x_1 \bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 x_2 = x_1 \oplus x_2$

№2. 0 в $\{\neg(x_1 \to x_2)\}$?

Да, пример $\overline{\overline{x_1 \to x_2} \to x_1}$

x_1	x_2	$\overline{x_1 \to x_2}$	$\overline{\overline{x_1 \to x_2} \to x_1}$
0	0	0	0
0	1	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0

№3.

x	y	z	$MAJ(x,y,z)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

$$MAJ(x,y,z) = a_{000} \oplus a_{001}z \oplus a_{010}y \oplus a_{011}yz \oplus$$
$$\oplus a_{100}x \oplus a_{101}xz \oplus a_{110}xy \oplus a_{111}xyz$$

Подставляя соответств. x, y, z из таблицы:

$a_{000} = 0$; $a_{001} = 0$; $a_{010} = 0$; $a_{011} = 1$; $a_{100} = 0$;

$a_{101} = 1$; $a_{110} = 1$; $a_{111} = 0$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ искомое $MAJ(x,y,z) = yz \oplus xz \oplus xy$

№4. $x_1 \vee x_2 = x_1 \oplus x_2 \oplus x_1x_2$. $\exists$ $m(n)$ – искомое

Докажем по индукции, что $m(n) = 2^n - 1$

База $n=1$: $m=2^1-1=1$ - верно

Шаг: $\exists$ верно для $n-1$

n: $(x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_m) \vee x_n = (x_1 \oplus \ldots \oplus x_m) \oplus$

$\oplus x_n \oplus (x_1 \oplus \ldots \oplus x_m) x_n = x_1 \oplus \ldots \oplus x_m \oplus x_n \oplus x_1 x_n \oplus \ldots$

$\oplus x_m x_n$ Тогда $m(n) = m(n-1) + 1 + m(n-1) =$

$= 2m(n-1) + 1 = 2(2^{n-1} - 1) + 1 = 2^n - 1$ $\blacksquare$

№5. $x|x = \overline{(xx)} = \bar{x}$

$(x|y)|y = \overline{(xy)}|y = (\bar{x} \vee \bar{y})|y = \overline{(\bar{x} y \vee 1)} =$

$(x|(y|y))|(y|y) = (x|\bar{y})|\bar{y} = \overline{x\bar{y}}|\bar{y} =$

$= (\bar{x} \vee y)|\bar{y} = \overline{(\bar{x}\bar{y} \vee y\bar{y})} = x \vee y$

$(x|y)|(x|y) = \overline{(x|y)} = xy$. Через $|$ выраж. $\neg, \vee, \wedge \Rightarrow$

$\Rightarrow$ через $|$ выраж. КНФ и ДНФ $\blacksquare$

№6. $\forall\, x, y$ $x \vee y \in T_1$; $x \to y \in T_1$. Но существуют ф-ции, которые не принимают значение 1 на единичном наборе.

№7.

x	y	z	$MAJ(x,y,z)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

x	y	z	$\overline{MAJ(\bar{x},\bar{y},\bar{z})}$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Из таблиц видно, что MAJ - самодвойственная ф-ция. $\neg$ тоже самодвойственная ф-ция $\Rightarrow$ любая их композиция - самодвойственная ф-ция. Но существуют несамодвойственные ф-ции. Значит базис $\{\neg, MAJ(x,y,z)\}$ не полный.

№8. f - немонотонная $\Rightarrow \exists\ A=(a_1 \ldots a_n)$ и $B = (b_1 \ldots b_n)$: $[a \leq b \ \&\&\ f(A) > f(B) \ \&\&\ \exists\, i: a_i < b_i] \Rightarrow$ $\Rightarrow f(A)=1,\ f(B)=0$. Возьмём такие A и B, что $\exists!\, i: a_i < b_i$. От нас требуется доказать, что $\exists\ g(X,i) = \overline{x_i}$, где $X=(x_1 \ldots x_i \ldots x_n)$, g - выражается через через $0, 1, f$. Построим g:

$g(X,i) = f(\alpha_1, \ldots x_i, \ldots \alpha_n)$, где α_j строятся так: если $a_j = b_j = 0$, то $\alpha_j = 0$, если $a_j = b_j = 1$, то $\alpha_j = 1$. Остаётся только i-ая позиция, на которую мы ставим x_i. Тогда, если $x_i = 0$, то $x_i = a_i$, т.е. $g(X,i) = f(A) = 1$. А если $x_i = 1$, то $x_i = b_i$, т.е. $g(X,i) = f(B) = 0$. Т.е. мы получили $g(X,i) = \overline{x_i}$ ■

№9. Разложим монотонную f в СДНФ. Заметим, что $f(\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, 0, \alpha_{i+1}, \dots \alpha_n) = f(\alpha_1, \dots \alpha_{i-1}, 1, \dots \alpha_n)$, т.е. в разложении f нет отрицания x_i => её можно представить в КНФ|ДНФ виде комбинаций $(\wedge, \vee, 1, 0)$.

№10.

а) $PAR(x_1, \dots x_n) = x_1 \oplus \dots \oplus x_n$

б) Допустим мы можем представить $PAR(x_1, \dots, x_{n-1})$ без отрицаний. Тогда $PAR(x_1 \dots x_n) = PAR(PAR(x_1 \dots x_{n-1}), x_n) = PAR(x_1 \dots x_{n-1}) \oplus x_n =$

$= \overline{PAR(x_1 \dots x_{n-1})}\, x_n \vee PAR(x_1 \dots x_{n-1})\, \overline{x_n}$ $\mathring{x}$!