§17

5(3) $f_n(x)=\frac{\ln nx}{nx^2}$, $E=[1;+\infty)$

$x_0\ge 1$: $f_n(x_0)=\frac{\ln nx_0}{nx_0^2}\xrightarrow{n\to\infty}0$, т.е. $f_n\xrightarrow[E]{}0$

$\frac{\ln x}{x}<1\ \forall x\ge 1$

$|f_n(x)-f(x)|=f_n(x)=\frac{\ln nx}{nx^2}\le\frac{\ln nx}{nx}=\frac{\ln n}{nx}+\frac{\ln x}{nx}\le\frac{\ln n}{n}+\frac{1}{n}<\varepsilon\ \forall n\ge N(\varepsilon)$

$\Rightarrow f_n\underset{E}{\rightrightarrows}0$

8(2) $f_n(x)=\frac{nx^2}{1+2n+x}$, $E_1=[0;1]$, $E_2=[1;+\infty)$

$x_0\in E_1, x_0\in E_2$: $f_n(x_0)=\frac{x_0^2}{1/n+2+x_0/n}\xrightarrow{n\to\infty}\frac12 x^2$, т.е. $f_n\xrightarrow[E_i]{}\frac12x^2$

$|f_n(x)-f(x)|=\left|\frac{nx^2}{1+2n+x}-\frac12x^2\right|=x^2\left|\frac{2n-(1+2n+x)}{2(1+2n+x)}\right|=\frac{x^2(1+x)}{2(1+2n+x)}$ (*)

На E_1: (*) $\le\frac{1+x}{2(1+2n+x)}<\frac{1+1}{2(1+2n+0)}=\frac{1}{1+2n}<\varepsilon\Rightarrow f_n\underset{E_1}{\rightrightarrows}\frac12x^2$

На E_2: $\forall n\ \exists x_n=2n-1$: $|f_n(x_n)-f(x_n)|=\frac{(2n-1)^2\cdot 2n}{8n}\ge\frac18=\varepsilon_0\Rightarrow$

$\Rightarrow f_n\xrightarrow[E_2]{}\frac12x^2$ неравномерно

9(3) $f_n(x)=e^{-(x-n)^2}$, $E_1=[-2;2]$, $E_2=\mathbb{R}$

$x_0\in E_1, x_0\in E_2$: $f_n(x_0)=e^{-(x_0-n)^2}\xrightarrow{n\to\infty}0$, т.е. $f_n\xrightarrow[E_i]{}0$

$|f_n(x)-f(x)|=f_n(x)=e^{-(x-n)^2}=e^{-x^2+2xn-n^2}\underset{\text{на } E_1}{\le} e^{2xn-n^2}\le e^{4n-n^2}<\varepsilon\Rightarrow f_n\underset{E_1}{\rightrightarrows}0$

на E_2: $\forall n\ \exists x_n=n$: $f_n(x_n)=e^{-(n-n)^2}=1\Rightarrow f_n\xrightarrow[E_2]{}0$ неравномерно

10(1) $f_n(x)=n\,\mathrm{arctg}\frac{1}{nx}$, $E_1=(0;2)$, $E_2=(2;+\infty)$

$x_0\in E_1, x_0\in E_2$: $f_n(x_0)=n\,\mathrm{arctg}\frac{1}{nx_0}\overset{n\to\infty}{\sim}n\cdot\frac{1}{nx_0}=\frac{1}{x_0}$, т.е. $f_n\xrightarrow[E_i]{}\frac1x$

$|f_n(x)-f(x)|=\left|n\,\mathrm{arctg}\frac{1}{nx}-\frac1x\right|\ominus$

$\mathrm{arctg}\,t=t+R(t)$ при $|t|<\delta\to0$, где $|R(t)|\le c\cdot t^3$, $c=\mathrm{const}$

$0<t:=\frac{1}{nx}\overset{\text{на } E_2}{<}\frac{1}{2n}=\delta\ \forall n\ge N\Rightarrow\mathrm{arctg}\frac{1}{nx}=\frac{1}{nx}+R_n(x)$, $|R_n(x)|\le c\cdot\frac{1}{(nx)^3}\le c\cdot\frac{1}{8n^3}$

$\ominus\left|\frac1x+nR_n(x)-\frac1x\right|\le\frac{c}{8\cdot n^2}<\varepsilon\Rightarrow f_n\underset{E_2}{\rightrightarrows}\frac1x$

на $E_1: \forall n\ \exists x_n=\frac{1}{n}: |f_n(x_n)-f(x)|=|n\operatorname{arctg}1-n|=n(1-\frac{\pi}{4})\geq 1-\frac{\pi}{4}=\varepsilon_0 \Rightarrow$

$\Rightarrow f_n \xrightarrow[E_1]{} \frac{1}{x}$ неравномерно

<u>11(5)</u> $f_n(x)=n^2x^2e^{-nx}$, $E_1=[0;+\infty)$, $E_2=[\delta;+\infty)$, $\delta>0$

$x_0\in E_1, x_0\in E_2: f_n(x_0)=n^2x_0^2e^{-nx_0}\xrightarrow{n\to\infty}0$, т.е. $f_n\xrightarrow[E_i]{}0$

$|f_n(x)-f(x)|=f_n(x)=n^2x^2e^{-nx}=\frac{n^2x^2}{e^{nx}}<\frac{n^2x^2}{1+nx+\frac{1}{2}(nx)^2+\frac{1}{6}(nx)^3}\overset{\text{на } E_2}{<}\frac{n^2x^2}{\frac{1}{6}(nx)^3}=\frac{6}{nx}<$

$<\frac{1}{n\delta}<\varepsilon\Rightarrow f_n\underset{E_2}{\rightrightarrows}0$

на $E_1: \forall n\ \exists x_n=\frac{1}{n}: f_n(x_n)=e^{-1}=\varepsilon_0\Rightarrow f_n\xrightarrow[E_1]{}0$ неравномерно

<u>12(5)</u> $f_n(x)=\ln(x^2+1/n)$, $E_1=(0;+\infty)$, $E_2=(a;+\infty)$, $a>0$

$x_0\in E_1, x_0\in E_2: f_n(x_0)=\ln(x_0^2+1/n)\xrightarrow{n\to\infty}\ln x_0^2=2\ln x_0$, т.е. $f_n\xrightarrow[E_i]{}2\ln x$

$|f_n(x)-f(x)|=|\ln(x^2+1/n)-2\ln x|=|2\ln x+\ln(1+\frac{1}{nx^2})-2\ln x|=|\ln(1+\frac{1}{nx^2})|<$

$<\frac{1}{nx^2}\overset{\text{на } E_2}{<}\frac{1}{na^2}<\varepsilon\Rightarrow f_n\underset{E_2}{\rightrightarrows}2\ln x$

на $E_1: \forall n\ \exists x_n=\frac{1}{\sqrt{n}}: |f_n(x)-f(x)|=|\ln(1+\frac{1}{nx_n^2})|=\ln 2=\varepsilon_0\Rightarrow f_n\xrightarrow[E_1]{}2\ln x$

неравномерно

<u>13(2)</u> $f_n(x)=\cos(\frac{\pi}{2}x^n)$, $E_1=(0;\alpha)$, $0<\alpha<1$, $E_2=(0;1)$

$x_0\in E_1, x_0\in E_2: f_n(x_0)=\cos(\frac{\pi}{2}x_0^n)\xrightarrow{n\to\infty}\cos 0=1$, т.е. $f_n\xrightarrow[E_i]{}1$

$|f_n(x)-f(x)|=|\cos(\frac{\pi}{2}x^n)-1|\circleddash$

$\cos t=1+R(t)$ при $|t|<\delta\to 0$, где $|R(t)|\leq ct^2$, $c=\text{const}$

на E_1 $\frac{\pi}{2}x^n<\frac{\pi}{2}\alpha^n=\delta$.

$\circleddash|1+R_n(x)-1|=|R_n(x)|\leq c\cdot\frac{\pi}{2}x^{2n}<c\cdot\frac{\pi}{2}\alpha^{2n}<\varepsilon\Rightarrow f_n\underset{E_1}{\rightrightarrows}1$

на $E_2: \forall n\ \exists x_n=(\frac{1}{2})^{1/n}: |f_n(x)-f(x)|=|\cos(\frac{\pi}{4})-1|=1-\frac{\sqrt{2}}{2}=\varepsilon_0\Rightarrow f_n\xrightarrow[E_2]{}1$

неравномерно

<u>Т.3.</u> $E=[0;1]$

а) $f_n(x) = x^n - x^{n+1},\ n \in \mathbb{N}$

$x_0 \in E:\ f_n(x_0) = x_0^n - x_0^{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} 0$, т.е. $f_n \xrightarrow[E]{} 0$

$\sup\limits_{x\in E} |f_n(x) - f(x)| = \sup\limits_{x \in E} f_n(x) = f_n(x_{max})$

$x_{max}:\ f_n'(x_{max}) = n x_{max}^{n-1} - (n+1) x_{max}^n = 0 \overset{x_{max}\neq 0}{\Rightarrow} x_{max} = \frac{n}{n+1}$

$f_n(x_{max}) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) = \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{x\in E} |f_n(x) - f(x)| = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_{max}) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = 0 \Leftrightarrow f_n \overset{E}{\rightrightarrows} 0$

б) $f_n(x) = x^n - x^{2n},\ n \in \mathbb{N}$

$x_0 \in E:\ f_n(x_0) = x_0^n - x_0^{2n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$, т.е. $f_n \xrightarrow[E]{} 0$

$\forall n\ \exists x_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{1/n}:\ |f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} = \varepsilon_0 \Rightarrow f_n(x) \xrightarrow[E]{} 0$ неравномерно

$\boxed{\S 18}$

8(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} nx}{x^4 + n^3\sqrt{n}}$, $E = (-\infty; +\infty)$

$|a_n(x)| = \left|\frac{\operatorname{arctg} nx}{x^4 + n^3\sqrt{n}}\right| \leq \frac{\pi/2}{x^4 + n^3\sqrt{n}} \leq \frac{\pi/2}{n^3\sqrt{n}} = \alpha_n$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ сх-ся $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} nx}{x^4 + n^3\sqrt{n}}$ по пр. Вейерштрасса сх-ся равномерно на E

13(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{arctg} \frac{x}{x^2+n^2}\right)^2$, $E = [0; +\infty)$

$\operatorname{arctg} t < t\ \forall t > 0 \Rightarrow |a_n(x)| = \left(\operatorname{arctg} \frac{x}{x^2+n^2}\right)^2 < \left(\frac{x}{x^2+n^2}\right)^2 = \frac{x^2}{x^4 + 2x^2n^2 + n^4} <$

$< \frac{x^2}{2n^2x^2} = \frac{1}{2n^2} = \alpha_n$. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ сх-ся $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{arctg} \frac{x}{x^2+n^2}\right)^2$ по пр. Вейерштрасса сх-ся равномерно на E

20(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{x}{3^n}$, $E = [0; +\infty)$

$\exists \varepsilon_0 = 1\ \ \exists n_0 \in \mathbb{N}:\ \forall n \geq n_0\ \ \exists x_n = 3^n \cdot \frac{\pi}{2} \in E:\ |a_n(x_n)| = 2^n \geq 1 = \varepsilon_0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ по критерию Коши $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{x}{3^n}$ не сх-ся равномерно.

$\sin t < t\ \forall t > 0 \Rightarrow |a_n(x_0)| = |2^n \sin \frac{x_0}{3^n}| < x_0 (\frac{2}{3})^n \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ сх-ся абсолютно. Итог: $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{x}{3^n}$ сх-ся неравномерно.

<u>21(1)</u> $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+\sqrt{n}}$, $E = [0; +\infty)$

$\alpha_n(x) = \frac{1}{x+\sqrt{n}}$, $\beta_n(x) = (-1)^n$. $\{\alpha_n(x)\}$ монотонно стремится к нулю. Частичные суммы $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n(x)$ ограничены. Тогда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+\sqrt{n}}$ равномерно сх-ся по пр. Дирихле.

<u>22(1)</u> $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx \sin x}{\sqrt[3]{n+x}}$, $E = [0; +\infty)$

$\alpha_n(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{n+x}}$, $\beta_n(x) = \sin nx \sin x$. $\{\alpha_n(x)\}$ монотонно стремится к нулю. Частичные суммы $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n(x)$ ограничены, т.к.

$\sum_{n=1}^{N} \sin nx \sin x = \sin x \sum_{n=1}^{N} \sin nx = \sin x \frac{1}{2\sin x/2} \sum_{n=1}^{N} 2 \sin(\frac{n+\frac{1}{2}+n-\frac{1}{2}}{2} x) \sin(\frac{n+\frac{1}{2}-n+\frac{1}{2}}{2}) = \frac{\sin x}{2\sin x/2} \sum_{n=1}^{N} \cos(n-\frac{1}{2})x - \cos(n+\frac{1}{2})x = \cos x/2 - \cos(N+1/2)x$. Тогда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx \sin x}{\sqrt[3]{n+x}}$ равномерно сх-ся по Дирихле.

<u>29(4)</u> $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1+\frac{x^2}{n^2})$, $E_1 = [0; a]$, $a > 0$, $E_2 = [1; +\infty)$

$\ln(1+t) < t$, $\forall t > 0 \Rightarrow |a_n(x)| < \frac{x^2}{n^2} \underset{\text{на } E_1}{\leq} \frac{a^2}{n^2} = \alpha_n$. $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ сх-ся $\Rightarrow$ по пр. Вейерштрасса $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1+\frac{x^2}{n^2})$ равномерно сх-ся на E_1

на E_2: $\forall n\ \exists x_n = n \in E_2 : |a_n(x_n)| = \ln 2 = \varepsilon_0 \Rightarrow a_n \underset{E_2}{\not\rightrightarrows} 0 \Rightarrow$ по необх. условию равн. сх-ти $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1+\frac{x^2}{n^2})$ не явл. равномерно сходящимся на E_2. (по необх. усл. равн. сх)

$x_0 \in E_2$: $|a_n(x_0)| = \ln(1+\frac{x_0^2}{n^2}) < \frac{x_0^2}{n^2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \ln(1+\frac{x^2}{n^2})$ сх-ся неравномерно на E_2.

<u>29(7)</u> $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^2}{1+n^{5/2}x^6}$, $E_1 = (0; 1)$, $E_2 = (1; +\infty)$

$|a_n(x)| = \frac{nx^2}{1+n^{5/2}x^6} \leq \frac{nx^2}{n^{5/2}x^6} \overset{E_2}{\leq} \frac{nx^2}{n^{5/2}x^2} = \frac{1}{n^{3/2}} = \alpha_n$. $\sum^{\infty} \alpha^n$ сх-ся $\Rightarrow$ по пр. Вейерштрасся $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{nx^2}{1+n^{5/2}x^6}$ сх-ся равномерно на E_2.

на E_1: $\forall n\ \exists x_n = n^{-5/12} \in E_1 : |a_n(x)| = \frac{1}{2} n^{1/6} = \varepsilon_0 \Rightarrow a_n \underset{E_1}{\not\rightrightarrows} 0 \Rightarrow$ по необх. условию равн. сх-ти $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{nx^2}{1+n^{5/2}x^6}$ не явл. равномерно сходящимся на E_1.

$x_0 \in E_1 : \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{nx_0^2}{1+n^{5/2}x_0^6} = x_0^2 \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1/n + n^{3/2}x_0^6}$ - сх-ся $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{nx^2}{1+n^{5/2}x^6}$ сх-ся неравномерно на E_1.

<u>36(5)</u> $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x}{x^2-nx+n^2}$, $E_1=(0;1)$, $E_2=(1;+\infty)$

на E_1: для $n=1$ $\frac{x}{x^2-x+1} \le \frac{1}{-1/4+1} = \frac{4}{3} = \alpha_1$. $\forall n>1\ |a_n(x)| = \frac{x}{x^2-nx+n^2} < \frac{1}{x^2-nx+n^2} < \frac{1}{-nx+n^2} < \frac{1}{-n+n^2} = \alpha_n$. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ сх-ся $\Rightarrow$ по пр. Вейерштрасса $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x}{x^2-nx+n^2}$ сх-ся равномерно на E_1.

на E_2: $\exists \varepsilon_0 = \frac{1}{2} : \forall m \in \mathbb{N}\ \exists n \ge m\ \exists p = n\ \exists \tilde{x} = n \cdot \left| \sum\limits_{k=n+1}^{n+p} \frac{\tilde{x}}{\tilde{x}^2 - k\tilde{x} + k^2} \right| =$
$= \sum\limits_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k} > \frac{1}{n+p} + \ldots + \frac{1}{n+p} = \frac{p}{n+p} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2} = \varepsilon_0 \Rightarrow$ по кр. Коши $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x}{x^2-nx+n^2}$ не является равномерно сходящимся на E_2.

$x_0 \in E_2 : \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x_0}{x_0^2 - nx_0 + n^2}$ - сх-ся $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x}{x^2-nx+n^2}$ сх-ся неравномерно на E_2.

<u>Т.4.</u> $E_1=(0,1)$; $E_2=(1,+\infty)$

a) $f_n(x) = x \sin \frac{1}{(xn)^2}$

$x_0>0$: $f_n(x) = x_0 \sin \frac{1}{(x_0 n)^2} < \frac{1}{x_0 n^2} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \Rightarrow f_n \xrightarrow[E_i]{n\to\infty} 0$

$\forall x>0 \hookrightarrow \sin t \le \sqrt{t}$. При $t \ge 1$ - очевидно, при $t<1$ $\sin \le t < \sqrt{t} \Rightarrow$

$\Rightarrow f_n(x) \le \frac{x}{xn} = \frac{1}{n} \Rightarrow f_n \overset{n\to\infty}{\underset{E_i}{\rightrightarrows}} 0$

на E_2: $f_n(x) < \frac{1}{xn^2} < \frac{1}{n^2} = \alpha_n$. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ - сх-ся $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сх-ся равномерно на E_2.

на E_1: $\exists \varepsilon_0 = \sin \frac{1}{4} > 0\ \forall m \in \mathbb{N}\ \exists n \ge m\ \exists p = n\ \exists \tilde{x} = \frac{1}{n} : \left| \sum\limits_{k=n+1}^{n+p} f_k(\tilde{x}) \right| =$

$= \left|\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{n}\sin\frac{n^2}{k^2}\right| > n\cdot\frac{1}{n}\sin\frac{n^2}{(2n)^2} = \sin\frac{1}{4} = \varepsilon_0 \Rightarrow$ по кр. Коши $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ не сх-ся равномерно

$\forall x_0\in E_1: \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0) < \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x_0 n^2}$ - сх-ся $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сх-ся неравномерно на E_1.

б) $f_n(x) = \dfrac{\sin\frac{xn}{x^2+n^2}}{1+\ln^2 n}$

$x_0>0: f_n(x_0) < \frac{1}{n\ln^2 n} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \Rightarrow f_n \xrightarrow[E_i]{n\to\infty} 0$

на E_1: $f_n(x) < \dfrac{\sin\frac{1\cdot n}{1+n^2}}{1+\ln^2 n} < \dfrac{1}{n\ln^2 n} \Rightarrow f_n \overset{n\to\infty}{\underset{E_1}{\rightrightarrows}} 0$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}$ сх-ся $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сх-ся равномерно на E_1.

на E_2: $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in E_2}|f_n(x)| = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{1+\ln^2 n} = 0 \Rightarrow f_n \overset{n\to\infty}{\underset{E_2}{\rightrightarrows}} 0$

$\exists\varepsilon_0 = 1\ \forall m\in\mathbb{N}\ \exists n\geq m\ \exists p = 2\max\{n,n_0\} - n$, где $n_0: \frac{n_0}{1+\ln^2 n_0}\sin\frac{2}{5} > 1$ $\exists\tilde{x} = n$:

$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(\tilde{x})\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{n+p}\dfrac{\sin\frac{nk}{n^2+k^2}}{1+\ln^2 n}\right| \geq p\dfrac{\sin\frac{2n\max\{n,n_0\}}{n^2+4n\max\{n,n_0\}}}{1+\ln^2 n}$ (*) $\qquad n\geq n_0$

Если $\max\{n,n_0\} = n$, то $(*) = n\dfrac{\sin\frac{2}{5}}{1+\ln^2 n} \geq n_0\dfrac{\sin\frac{2}{5}}{1+\ln^2 n_0} > 1 = \varepsilon_0$

т.к. $f(x) = x\frac{c}{1+\ln^2 x}$, $c>0$ возрастает, т.к. $f'(x) = c\frac{(1-\ln x)^2}{(1+\ln^2 x)^2} > 0$

Если $\max\{n,n_0\} = n_0$, то $(*) = (2n_0 - n)\dfrac{\sin\frac{2nn_0}{n^2+4n_0^2}}{1+\ln^2 n} \geq n_0\dfrac{\sin\frac{2}{5}}{1+\ln^2 n_0} > 1 = \varepsilon_0$

т.к. $n_0\geq n$, то $2n_0 - n\geq n_0$; $\sin\frac{2nn_0}{n^2+n_0^2} = \sin\frac{2\frac{n_0}{n}}{1+4(\frac{n_0}{n})^2} \geq \sin\frac{2}{5}$, т.к. $g(x) = \sin\frac{2x}{1+4x^2}$ убывает на $[1,+\infty)$ $\left(g'(x) = \frac{2(1+4x^2)-16x^2}{(1+4x^2)^2}\cos\frac{2x}{1+4x^2} = \underset{<0}{\frac{2-8x^2}{(1+4x^2)^2}}\ \underset{>0}{\cos\frac{2x}{1+4x^2}} < 0\right)$;

$\frac{1}{1+\ln^2 n} \geq \frac{1}{1+\ln^2 n_0}$, т.к. $\frac{1}{1+\ln^2 x}$ убывает

Итак, по кр. Коши $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ не сх-ся равномерно

$\forall x_0\in E_2: \sum_{n-1}^{\infty} f_n(x_0) < \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}$ - сх-ся $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сх-ся неравномерно на E_2.