24.66.

1) $\varphi(\ker\varphi)=\vec{0}\in\ker\varphi \Rightarrow \varphi(\ker\varphi)\subseteq\ker\varphi \Rightarrow \ker\varphi$ - инв. п/пр

2) $\varphi(\operatorname{Im}\varphi)\subseteq\varphi(\mathcal{L})=\operatorname{Im}\varphi \Rightarrow \operatorname{Im}\varphi$ - инв. п/пр

24.69.

1) $\forall \vec{x}\in(M_1+M_2)\ \exists \vec{x}_1\in M_1, \vec{x}_2\in M_2: \vec{x}=\vec{x}_1+\vec{x}_2$

$\varphi(\vec{x})=\varphi(\vec{x}_1+\vec{x}_2)=\varphi(\vec{x}_1)+\varphi(\vec{x}_2)$

M_1, M_2 - инв. п/пр $\Rightarrow \varphi(\vec{x}_1)\in M_1,\ \varphi(\vec{x}_2)\in M_2 \Rightarrow \varphi(\vec{x}_1)+\varphi(\vec{x}_2)=\varphi(\vec{x})\in(M_1+M_2)$

$\Rightarrow \varphi(M_1+M_2)\subseteq(M_1+M_2)\Rightarrow (M_1+M_2)$ - инв. п/пр. По индукции верно для любого конечного мн-ва

2) $\forall\vec{x}\in(M_1\cap M_2) \hookrightarrow \varphi(\vec{x})\in M_1,\ \varphi(\vec{x})\in M_2 \Rightarrow \varphi(\vec{x})\in(M_1\cap M_2)\Rightarrow$

$\Rightarrow\varphi(M_1\cap M_2)\subseteq(M_1\cap M_2)$. По индукции верно для любого конечного мн-ва.

24.70.

$M: \operatorname{Im}\varphi\subseteq M \Rightarrow \varphi(M)\subseteq \operatorname{Im}\varphi\subseteq M\Rightarrow M$ - инв. п/пр

24.75.

Гомотетия: $\varphi(\vec{x})=\lambda\vec{x}$, то если $\vec{x}\in M$, M - лин. п/пр, то $\lambda\vec{x}\in M\Rightarrow$

$\Rightarrow \forall M\ \ \varphi(M)\subseteq M$, т.е. инвариантны все п/пр

24.78.

n попарно различных собств. значений $\Rightarrow$ собственные вектора образуют базис $\{\vec{s}_i\}_{i=1}^n$. $\forall\vec{x}\in M\ \exists c_i: \vec{x}=\sum_{i=1}^n c_i\vec{s}_i$.

$\varphi(\vec{x})=\varphi(\sum_{i=1}^n c_i\vec{s}_i)=\sum_{i=1}^n\lambda_i c_i\vec{s}_i$. Если M инв. п/пр, то $\sum_{i=1}^n \lambda_i c_i \vec{s}_i\in M$. Т.к.

λ_i различны $M=\langle\vec{s}_i\rangle,\ i: c_i\neq 0$. Т.е. кол-во инв. п/пр - это кол-во таких лин. оболочек $\langle \vec{s}_i \rangle$. Каждое c_i либо равно 0 либо нет => всего способов 2^n.

Т.1.

$$A = \begin{Vmatrix} \cos\pi/2 & -\sin\pi/2 & 0 \\ \sin\pi/2 & \cos\pi/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$ – матрица преобразования

0) Очев., что ед. инвариантным 0-мерным п/п явл. начало системы

1) $|A - \lambda E| = \lambda(-\lambda)(1-\lambda) - (1-\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 + \lambda - 1 = -(1-\lambda)(\lambda^2+1) = 0$

$$\lambda = 1: \begin{Vmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \vec{S}_1 = \vec{O} \quad \begin{Vmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \sim \begin{array}{c} II - \frac{1}{2}II' \\ \frac{I+II}{-2} \\ \end{array} \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \to \vec{S}_1 = \|0\ 0\ 1\|^T$$

$\langle \vec{s}_1 \rangle$, т.е. $\langle \vec{k} \rangle$ – все инв. 1-мерные п/п.

2) $|A^T - \mu E| = 0 \to \mu = 1$ (т.к. экв. $|A - \lambda E|$)

$$\mu = 1: \begin{Vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \vec{S}_2 = \vec{O} \to \vec{S}_2 = \|0\ 0\ 1\|^T$$

$\vec{S}_2^T \vec{x} = 0$, т.е. $\langle \vec{i}, \vec{j} \rangle$ – все инв. 2-мерные п/п.

3) Очев., что $\mathbb{R}^3$ – ед. инв. 3-мерное п/п.