1 неделя

1.100

Дано: $\nu = 1$ моль, $i = 5$, $\delta Q = 2dU$, P_1, $\frac{V}{V_1} = \frac{1}{2}$

Найти: P

$$\delta Q = dU + \delta A = dU + PdV = -2dU \Rightarrow PdV = -3dU = \frac{15}{2}\nu R dT$$

$$PV = \nu RT \Rightarrow \nu R dT = PdV + VdP$$

Получаем: $2PdV = -15PdV + 15VdP$

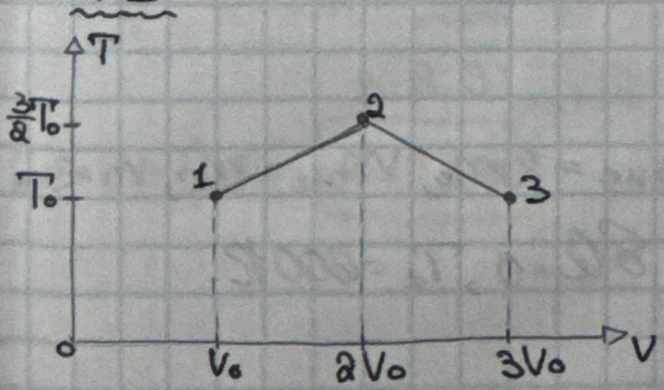
$$17PdV = -15VdP$$

$$\int_{V_1}^{V}\frac{dV}{V} = -\frac{15}{17}\int_{P_1}^{P}\frac{dP}{P}$$

$$\ln\frac{V}{V_1} = \ln\left(\frac{P}{P_1}\right)^{-15/17} = \ln\left(\frac{P_1}{P}\right)^{15/17} \Rightarrow$$

$$\boxed{P = P_1\left(\frac{V_1}{V}\right)^{\frac{17}{15}} = 2^{17/15}P_1 \approx 2{,}19\,P_1}$$

T1



Дано: идеальный газ,
$\nu = 1$ моль

Найти: ΔC (в точке 2)

Процесс 1-2: $\frac{V - V_0}{2V_0 - V_0} = \frac{T - T_0}{\frac{3}{2}T_0 - T_0} \Rightarrow V = V_0\left(1 + \frac{2T - 2T_0}{T_0}\right)$

В ~~точке 2:~~

$$V = V_0\left(\frac{2T}{T_0} - 1\right)$$

$$\delta Q = C_V dT + PdV = C_V dT + \frac{RT}{V_0\left(\frac{2T}{T_0}-1\right)} \cdot \frac{2V_0}{T_0} dT$$

$$C = \frac{\delta Q}{dT} = C_V + \frac{2RT}{2T - T_0}$$

В точке 2: $C_{12} = C_V + R \cdot \frac{3T_0}{3T_0 - T_0} = C_V + \frac{3}{2}R$

Процесс 2-3: $\frac{V - 2V_0}{V_0} - \frac{T - \frac{3}{2}T_0}{-\frac{1}{2}T_0} = 0$

$$V = V_0\left(5 - 2\frac{T}{T_0}\right)$$

$$\delta Q = C_V dT + PdV = C_V dT + \frac{RTT_0}{V_0(5T_0 - 2T)} \cdot \frac{2V_0}{T_0}(-dT)$$

$$C = \frac{\delta Q}{dT} = C_V - R \cdot \frac{2T}{5T_0 - 2T}$$

В точке 2: $C_{23} = C_V - R \cdot \frac{3T_0}{2T_0} = C_V - \frac{3}{2}R.$

Таким образом: $\Delta C = C_V - \frac{3}{2}R - C_V - \frac{3}{2}R = -3R$

Ответ: $\boxed{\Delta C = -3R}$

21.75

Дано: $He : H_2 = 2:1$ $(m_{He} = 2m_0,\ m_{H_2} = m_0,\ m = 3m_0)$

$P: P_1 = 8$ атм $\to P_2 = 1$ атм, $\delta Q = 0$, $T_1 = 600\ K$

Найти: T_2

$$\nu_{He} = \frac{2m_0}{\mu_{He}} = \frac{2m_0}{2\mu_{H_2}} = \frac{m_0}{\mu_{H_2}} = \nu_{H_2} = \nu.$$

$P_{He}V = \nu RT$, $P_{H_2}V = \nu RT$

$PV = 2\nu RT$

$\cancel{\delta Q = (\nu C_{VHe} + \nu C_{VH_2})\, dT + PdV}$

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{\nu C_{pHe} + \nu C_{pH_2}}{\nu C_{VHe} + \nu C_{VH_2}} = \frac{\frac{5}{2}R + \frac{7}{2}R}{\frac{3}{2}R + \frac{5}{2}R} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}.$$

$$PV^{\gamma} = const \Rightarrow \frac{(PV)^{\gamma}}{P^{\gamma-1}} = const \Rightarrow \frac{T^{\gamma}}{P^{\gamma-1}} = const$$

$$\frac{T_2^{3/2}}{T_1^{3/2}} = \frac{P_2^{1/2}}{P_1^{1/2}} \Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \sqrt[3]{\frac{P_2}{P_1}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{T_2 = \frac{1}{2}T_1 = 300K}$$

№1.83

Дано: $T = 600°C$, $C_p = 0,14 \frac{Дж}{г \cdot К}$, $A = 126,9$

Найти: α – часть диссоциированных молекул

$$2AC_p = 2 \cdot \alpha \cdot \frac{5}{2}R + (1-\alpha) \cdot \frac{7}{2}R = \frac{3}{2}\alpha R + \frac{7}{2}R$$

$$3\alpha + 7 = \frac{4AC_p}{R} \qquad \alpha = \frac{4AC_p}{3R} - \frac{7}{3}$$

$$\alpha = \frac{4 \cdot 126,9 \frac{г}{моль} \cdot 0,14 \frac{Дж}{г \cdot К}}{3 \cdot 8,31 \frac{Дж}{моль \cdot К}} - \frac{7}{3} \approx 0,52$$

Ответ: $\boxed{\alpha \approx 0,52}$

2 неделя

23.52

Дано: 1-2 и 3-4 - адиабаты, 2-3 и 4-1 - изохоры, T_{max}, T_{min}, $i=3$

Найти: A_{max}

Решение:

На адиабате: $PV^{\gamma} = const \Rightarrow \cancel{\frac{T^{\gamma}}{P^{\gamma-1}} = const}$ $TV^{\gamma-1} = const$

Для одноатомного идеального газа:

$\gamma = \frac{i+2}{i} = \frac{5}{3} \Rightarrow T\text{-max}$ при ~~p-max~~ $V\text{-min} \Rightarrow$

$\Rightarrow T_{max} = T_1,\ T_{min} = T_3$

$A_{12} = \Delta U_{12} = -\frac{3}{2}\nu R(T_2 - T_{max})$

$A_{34} = -\Delta U_{34} = -\frac{3}{2}\nu R(T_4 - T_{min})$

$A = \frac{3}{2}\nu R(T_{max} - T_2 + T_{min} - T_4)$

Пусть $V_3 = \alpha V_4$ $\quad T_4 V_4^{\gamma-1} = T_3 V_3^{\gamma-1} =$

$= T_{min} \cdot \alpha^{\gamma-1} \cdot V_4^{\gamma-1} \Rightarrow T_4 = T_{min} \cdot \alpha^{\gamma-1}$

$T_1 V_4^{\gamma-1} = T_2 V_3^{\gamma-1} = T_2 \cdot \alpha^{\gamma-1} \cdot V_4^{\gamma-1} \Rightarrow$

$\Rightarrow T_2 = \frac{1}{\alpha^{\gamma-1}} T_{max}$

Подставляем: $A = \frac{3}{2}\nu R\left(T_{max}\left(1 - \frac{1}{\alpha^{\gamma-1}}\right) + T_{min}(1 - \alpha^{\gamma

Обозначим $t = \alpha^{\gamma - 1}$ — параметр

$$A = \frac{3}{2}\nu R\left(T_{max}\frac{t-1}{t} - T_{min}(t-1)\right)$$

$$f(t) = \frac{A}{\frac{3}{2}\nu R} = T_{max}\cdot\frac{t-1}{t} - T_{min}(t-1)$$

$$f'(t) = T_{max}\cdot\frac{1\cdot t-(t-1)}{t^2} - T_{min} = T_{max}\cdot\frac{1}{t^2} - T_{min} = 0$$

$t = \sqrt{\frac{T_{max}}{T_{min}}}$ — при таком значении параметра достигается максимум

$$A_{max} = \frac{3}{2}\nu R\left(T_{max}\cdot\left(1-\sqrt{\frac{T_{min}}{T_{max}}}\right) - T_{min}\left(\sqrt{\frac{T_{max}}{T_{min}}}-1\right)\right) =$$

$$= \frac{3}{2}R\left(T_{max} + T_{min} - 2\sqrt{T_{max}T_{min}}\right)$$

Ответ: $\boxed{A_{max} = \frac{3}{2}R\left(\sqrt{T_{max}} - \sqrt{T_{min}}\right)^2}$

№3.47

Дано:

$T_{уп} = 299^\circ K$,

$\Delta T = 5^\circ K$

$T_к = 21^\circ K$

Найти: $\frac{P_2}{P_1}$

$$P_1 = \eta\cdot P_{уп} = \frac{T_{уп}-T_к}{T_{уп}}\cdot\alpha(T_{уп}-T_к)$$

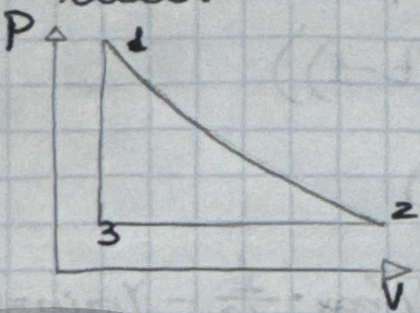
$$P_2 = \frac{(T_{уп}-T_к+\Delta T)^2}{T_{уп}+\Delta T}$$

Тогда: $\frac{P_2}{P_1} = \left(\frac{T_{уп}+\Delta T-T_к}{T_{уп}-T_к}\right)^2\cdot\frac{T_{уп}}{T_{уп}+\Delta T} =$

$$= \left(1+\frac{\Delta T}{T_{уп}-T_к}\right)^2\cdot\frac{T_{уп}}{T_{уп}+\Delta T}.$$

$\boxed{\frac{P_2}{P_1} \simeq 4}$

24.15



Дано: $\frac{\Delta S_{max}}{C_v} = b = \frac{1}{5}$,

$\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{4}{3}$

Найти: η.

$$|\Delta S_{23}| = |\Delta S_{31}| = \Delta S_{max}$$

$$\Delta S_{23} = \int_2^3 \frac{C_p dT}{T} = C_p \ln\frac{T_3}{T_2} < 0 \Rightarrow \frac{T_2}{T_3} = e^{\frac{\Delta S_{max}}{C_p}} = e^{b/\gamma}$$

$$\Delta S_{31} = \int_3^1 \frac{C_v dT}{T} = C_v \ln\frac{T_1}{T_3} > 0 \Rightarrow \frac{T_1}{T_3} = e^{\frac{\Delta S_{max}}{C_v}} = e^{b}$$

$\cancel{T_2}$

$$Q_+ = Q_{31} = C_v (T_1 - T_3)$$

$$Q_- = Q_{32} = C_p (T_2 - T_3)$$

$$\eta = 1 - \frac{Q_-}{Q_+} = 1 - \frac{C_p}{C_v} \cdot \frac{T_2 - T_3}{T_1 - T_3} = 1 - \gamma\,\frac{e^{b/\gamma} - 1}{e^{b} - 1} \simeq 0{,}0254$$

Ответ: $\boxed{\eta = 1 - \gamma \cdot \frac{e^{b/\gamma} - 1}{e^{b} - 1} \simeq 0{,}0254}$

24.73

Дано: Нагрев: $C_1 = \alpha T$, Охлаждение: $C_2 = \beta\sqrt{T}$, замкнутый цикл, $2\beta = 3\alpha\sqrt{T_1}$, $T_{min} = T_1$

Найти: η.

Решение:

$dS_1 = C_1 \frac{dT}{T} = \alpha dT \Rightarrow \Delta S_1 = \alpha(T_2 - T_1)$, где T_2 – конечная температура нагрева.

$$dS_2 = -C_2\frac{dT}{T} = -\beta T^{-1/2} dT$$

$$\Delta S_2 = -\beta(-2)(T_1^{1/2} - T_2^{1/2})$$

Цикл замкнутый $\Rightarrow \Delta S_1 + \Delta S_2 = 0$

$$\alpha(T_2 - T_1) = 2\beta(\sqrt{T_2} - \sqrt{T_1}) = 3\alpha\sqrt{T_1}(\sqrt{T_2} - \sqrt{T_1})$$

$$(\sqrt{T_2} - \sqrt{T_1})(\sqrt{T_2} + \sqrt{T_1}) = 3\sqrt{T_1}(\sqrt{T_2} - \sqrt{T_1})$$

$$\sqrt{T_2} = 2\sqrt{T_1} \Rightarrow T_2 = 4T_1.$$

$$\delta Q_1 = C_1 dT = \alpha T dT \Rightarrow \Delta Q_1 = Q_+ = \frac{\alpha}{2}(T_2^2 - T_1^2) = \frac{15}{2}\alpha T_1^2$$

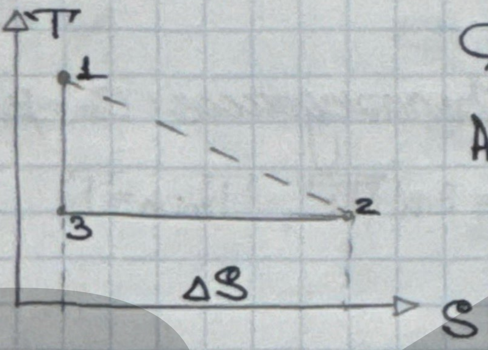
$$\delta Q_2 = C_2 dT = \beta\sqrt{T} dT \Rightarrow \Delta Q_2 = Q_- = \beta\cdot\frac{2}{3}(T_2^{3/2} - T_1^{3/2})$$

$$\cancel{\eta = 1 - \frac{Q_-}{Q_+} = 1 - \frac{\frac{15}{2}\alpha T_1^2}{\frac{2\beta}{3}\cdot 7T_1^{3/2}} = \frac{15\alpha T_1^2}{14\cdot\frac{3\alpha\sqrt{T_1}}{3}\cdot T}}$$

$$\eta = 1 - \frac{Q_-}{Q_+} = 1 - \frac{\frac{1}{3}\cdot 3\alpha\sqrt{T_1}\,\cancel{2}\cdot 7T_1^{3/2}}{\frac{15}{2}\alpha T_1^2} = \boxed{\frac{1}{15}}$$

3 неделя

№4.47



Дано: $T_1 = 300\,К$, $T_2 = T = 200\,К$,

$A = |A_{23} + A_{31}| = 15\,кДж$, $\nu = 10\,моль$

Найти: ΔS

$$\cancel{2\text{-}3:\quad dS = \frac{PdV}{T} = \frac{\nu R}{V}dV \Rightarrow \Delta S = \nu R \ln\frac{V_2}{V_3}}$$

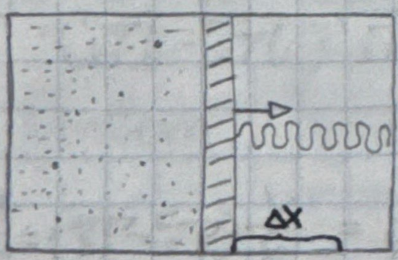
$$2\text{-}3:\quad A_{23} = Q_{23} = -T\Delta S \quad (\Delta S > 0)$$

$$3\text{-}1:\quad A_{31} = -\Delta U_{31} = \nu C_v (T_3 - T_1)$$

$$|A_{23} + A_{31}| = A = \nu C_v (T_1 - T) + T\Delta S \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta S = \frac{A}{T} - \nu C_v \left(\frac{T_1}{T} - 1\right) = 12{,}65\,\frac{Дж}{К}}$$

Т3



Дано: $\nu = 1\,моль$, $t = 25°C$,

$\Delta x(0) = 0$, $P_к = \frac{P_0}{n}$, $n = 3$

Найти: ΔS

$$1)\ P_к S = k\Delta x_2 \Rightarrow P_к \Delta V = k\Delta x^2$$

$$2)\ Q = 0 \Rightarrow A = -\Delta U \Rightarrow \frac{k\Delta x^2}{2} = -C_v (T_к - T_0)$$

$$C_v (T_0 - T_к) = \frac{1}{2} P_к \Delta V = \frac{P_0 \Delta V}{2n}.$$

$$\begin{cases} P_0 V_0 = \nu R T_0 \\ \frac{P_0}{n}(V_0 + \Delta V) = \nu R T_к \end{cases} \rightarrow P_0 \Delta V = \nu R (n T_к - T_0)$$

Таким образом: $C_V(T_0 - T_k) = \frac{\nu R}{2n}(nT_k - T_0)$

$\frac{5}{2}R\nu(T_0 - T_k) = \frac{\nu R}{2n}(nT_k - T_0)$

$5nT_0 - 5nT_k = nT_k - T_0$

$6nT_k = (5n+1)T_0 \Rightarrow \frac{T_k}{T_0} = \frac{5n+1}{6n}.$

$\Delta S = C_V \ln\frac{T_k}{T_0} + \nu R \ln\frac{V_k}{V_0} = \cancel{\nu C_P \ln\frac{5n+1}{6n} + \nu R \ln n} =$

$\cancel{= \nu R\left(\frac{7}{2}\ln\frac{5n+1}{6n} + \nu R \ln n\right)}$

$P_0V_0 = \nu R T_0$

$P_0V_k = \nu R T_k \cdot n \Rightarrow \frac{V_k}{V_0} = n \cdot \frac{T_k}{T_0}$

$$\boxed{\Delta S = \frac{5}{2}\nu R \ln\left(\frac{5n+1}{6n}\right) + \nu R \ln\left(\frac{5n+1}{6}\right) \approx 0{,}7R}$$

№5.32

Свободная энергия: $\Psi = -\frac{RT}{2}\ln(AT^3V^2)$

Найти: C_P.

Решение:

$\Psi = U - TS \Rightarrow d\Psi = dU - TdS - SdT = -\delta A - \cancel{TdS} -$

$- SdT$

$S = -\left(\frac{\partial\Psi}{\partial T}\right)_V \Rightarrow S = +\frac{R}{2}\ln(AT^3V^2) + \frac{RT}{2}\frac{3AT^2V^2}{AT^3V^2} =$

$= \frac{R}{2}\left(\ln(AT^3V^2) + 3\right)$

$$C_V = \left(\frac{\partial Q}{\partial T}\right)_V = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V = T\cdot\frac{R}{2}\cdot\frac{1}{AT^3V^2}\cdot 3AT^2V^2 =$$

$$= \frac{3}{2}R$$

$$C_P = C_V + R = \frac{5}{2}R.$$

Ответ: $\boxed{C_P = \frac{5}{2}R}$

2.5.54

$$f = aT\left[\frac{L}{L_0} - \left(\frac{L_0}{L}\right)^2\right] \qquad a = 0{,}013\ \frac{Н}{К},\ L_0 = 1м$$

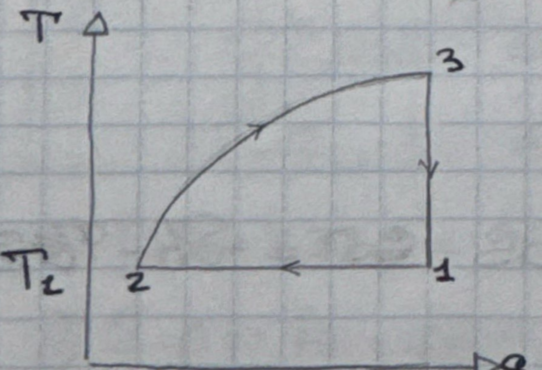
1-2: $T_1 = 300К = const$, $L = 2м$

2-3: $L = const$

3-1: $\delta Q = 0$

$C_L = 1{,}2\ \frac{Дж}{К}$

Найти: $Q_{пол}$, $Q_{отд}$.



$$\delta Q_{12} = \delta A_{12} = -f\,dL =$$

$$= aT_1\left[\left(\frac{L_0}{L}\right)^2 - \frac{L}{L_0}\right]dL$$

$$Q_{12} = aT_1\left[L_0^2\cdot\left(-\frac{1}{L}\right) - \frac{L^2}{2L_0}\right]\Bigg|$$

$$= aT_1\left[-\frac{L_0^2}{2L_0} - \frac{4L_0^2}{2L_0} + L_0 + \frac{L_0}{2}\right]$$

$$= -aT_1L_0 = -3{,}9\ Дж$$

$$\Delta S = C_L \ln\frac{T_3}{T_1} = -\frac{Q_{12}}{T_1} = aL_0$$

$$T_3 = T_1 e^{aL_0/C_L}$$

$$\delta A_{23} = f dL = 0$$

$$\delta Q_{23} = dU_{23} \Rightarrow Q_{23} = C_L(T_3 - T_1) = C_L T_1\left(e^{\frac{aL_0}{C_L}} - 1\right)$$

$Q_{23} \simeq 3,92$ Дж

Ответ: $\boxed{\begin{array}{l} Q_{пол} = C_L T_1\left(\exp\left(\frac{aL_0}{C_L}\right) - 1\right) \simeq 3,92 \text{ Дж} \\ Q_{отд} = -aT_1 L_0 = 3,9 \text{ Дж} \end{array}}$

4 неделя

№ 5.63

Дано: адиабатическое сжатие,

при $\frac{\Delta V}{V} = 0{,}01$: $\frac{\Delta T}{T} = 0{,}028$,

$\alpha = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P = 5{,}7 \cdot 10^{-5} \text{K}^{-1}$, $c_V = 0{,}23 \frac{\text{Дж}}{\text{г} \cdot \text{К}}$,

$\rho = 10{,}5 \frac{\text{г}}{\text{см}^3}$

Найти: $\beta_T = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T$

Решение:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T \cdot \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_P = -1;$$

Так как $\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_P = \frac{1}{\alpha V}$ и $\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right) = -\beta_T V$:

$$\frac{\beta_T}{\alpha} \cdot \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V = 1;$$

Отсюда: $\frac{\beta_T}{\alpha} = \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V = \frac{\partial(T,V)}{\partial(P,V)} = \frac{\partial(T,V)}{\partial(T,S)} =$

$= \left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_T$ (1)

$$\left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_T \cdot \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S = -1$$

Из условия: $\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S \simeq -\frac{\Delta T}{\Delta V}$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V = \frac{1}{T}\left(\frac{\partial Q}{\partial T}\right)_V = \frac{1}{T} c_V m = \frac{1}{T} c_V \rho V$$

Тогда: $\left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_T \cdot \frac{c_V \rho V \Delta T}{T \Delta V} \simeq +1 \Rightarrow \left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_T \simeq \frac{T \Delta V}{c_V \rho V \Delta T}$

Подставляем в (1):

$$\boxed{\beta_T \simeq \frac{\alpha T \Delta V}{C_v \rho V \Delta T} = \frac{\alpha \left(\frac{\Delta V}{V}\right)}{C_v \rho \left(\frac{\Delta T}{T}\right)} \simeq 8{,}4 \cdot 10^{-12}\ \text{Па}^{-1}}$$

T4

Дано: $C_v = aVT^3$, a - константа.

$\cancel{-\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T = \varkappa}$ $\quad -V\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T = \varkappa$

Найти: $C_p - C_v$ как функцию от V и T.

Решение:

$$\delta Q = CdT = dU + PdV = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV + PdV$$

Пусть $p = \text{const}$:

$$C_p - C_v = \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P \left(\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + P\right) \qquad (1)$$

$$dU = \delta Q - \delta A = TdS - PdV$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T - P = T\frac{\partial(V,P)}{\partial(V,T)} - P = T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V - P$$

Подставляем в (1):

$$C_p - C_v = \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P \cdot T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V \cdot \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T = -1 \Rightarrow \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P = -\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V \cdot \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T$$

Таким образом $C_p - C_v = -T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V^2 \cdot \left(-\frac{V}{\varkappa}\right) =$

$$= \frac{TV}{\varkappa}\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V^2. \qquad (2)$$

Найдём $\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V$:

$$\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V = \frac{\partial(P,V)}{\partial(T,V)} = \frac{\partial(T,S)}{\partial(T,V)} = \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T$$

$$\left(\frac{\partial C_V}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial}{\partial V}\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V \cdot T\right)_T = T\,\frac{\partial^2 S}{\partial V\,\partial T} =$$

$$= T\left(\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T\right)_V$$

С другой стороны $\left(\frac{\partial C_V}{\partial V}\right)_T = aT^3$

$$\left(\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T\right)_V = aT^2;$$

Интегрируем (т.к. S-функция от V и T)

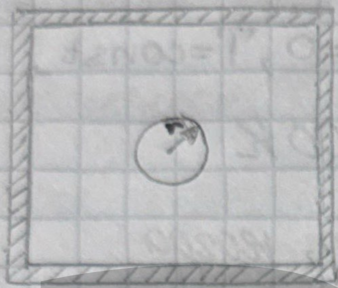
$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V = \frac{1}{3}aT^3.$$

Подставляем в (2):

$$C_P - C_V = \frac{TV}{k}\cdot\frac{1}{9}a^2T^6 = \frac{a^2VT^7}{9k}$$

Ответ: $\boxed{C_P - C_V = \frac{a^2VT^7}{9k}}$

№12.9



Дано: $r = 5$ см, $\nu = 0{,}1$ моль, $T = 290$ К, $\sigma = 70\ \frac{\text{дин}}{\text{см}}$, $\frac{d\sigma}{dT} = -0{,}15\ \frac{\text{дин}}{\text{см}\cdot\text{К}}$

Найти: ΔT: если лопнет

Решение:

$$F_{пов} = \sigma\Pi = U - TS$$

$$\sigma d\Pi + \Pi d\sigma = dU - TdS - SdT = -\delta A - SdT = \sigma d\Pi - SdT$$

Отсюда $S = -\Pi\frac{d\sigma}{dT}$

$$U = \sigma\Pi + TS = \sigma\Pi - T\Pi\frac{d\sigma}{dT} = \Pi\left(\sigma - T\frac{d\sigma}{dT}\right)$$

Когда пузырёк лопнул, вся его внутренняя энергия перешла в тепло.

$$Q = \underbrace{2}\,\Pi\left(\sigma - T\frac{d\sigma}{dT}\right)$$ т.к. 2 поверхности.

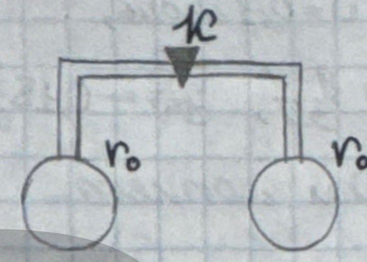
$\delta A = 0$, т.к. $V = const$

$$Q = \Delta U_{возд.} = C_V \nu \Delta T$$

Отсюда $\Delta T = \frac{2\cdot 4\pi r^2\left(\sigma - T\frac{d\sigma}{dT}\right)}{C_V\nu}$, $C_V = \frac{5}{2}R$

Ответ: $\boxed{\Delta T = \frac{8\pi r^2}{C_V\nu}\left(\sigma - T\frac{d\sigma}{dT}\right) \approx 3{,}4\cdot10^{-3}\ \text{К}}$

№12.38



$P=0$

Дано: $r_0 = 5\text{см}$, $P=0$, $T=\text{const}$, $\sigma = 30\,\frac{\text{дин}}{\text{см}}$, $T = 300\,К$

Что произойдёт, когда кран откроется?

Найти: ΔS

Решение:

1. После открывания К воздух перетечёт в один пузырь.

$\cancel{U = F + TS = \sigma\Pi - \Pi T \frac{d\sigma}{dT} = \Pi\left(\sigma - T\frac{d\sigma}{dT}\right)}$

$\cancel{\left(\frac{\partial U}{\partial \Pi}\right)_{T,\sigma,\frac{d\sigma}{dT}} = \sigma - T\frac{d\sigma}{dT}} \;\Big|\; \cancel{\Rightarrow \left(\frac{\partial U}{\partial \Pi}\right)_{T,\sigma,\frac{d\sigma}{dT}} > 0}$

$\sigma > 0,\ \frac{d\sigma}{dT} < 0,\ T > 0$

~~Значит минимум потенциальной энергии при минимальной площади.~~

~~Лаплас~~ Добавочное давление по формуле Лапласа: $\Delta p = \frac{2\sigma}{r}$.

Пузыри не могут быть одного размера, значит ~~при одинаковом~~ в одном из них давление будет больше.

$r_1 > r_2 \Rightarrow \Delta p_1 < \Delta p_2$

То есть если у одного из пузырей радиус меньше, то давление в нём больше и при соединении он продолжит уменьшаться всё быстрее.

2. $\Delta S = C_p \nu \ln \frac{T_к}{T_н} - \nu R \ln \frac{P_к}{P_н} = -\nu R \ln \frac{P_к}{P_н}$

$P_к = 2 \cdot \frac{2\sigma}{r_к}, \; P_0 = 2 \cdot \frac{2\sigma}{r_0} \Rightarrow \frac{P_к}{P_0} = \frac{r_0}{r_к}.$

$$\begin{cases} P_0 \cdot 2 \cdot \frac{4}{3}\pi r_0^3 = \nu RT \\ P_к \cdot \frac{4}{3}\pi r_0^3 = \nu RT \end{cases} \Rightarrow \frac{2r_0^2}{r_к^2} = 1 \Rightarrow \frac{r_0}{r_к} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

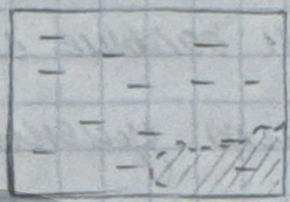
Тогда $\Delta S = \frac{1}{2}\nu R \ln 2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{3}\pi r_0^3 \cdot \frac{1}{T} \cdot \frac{4\sigma}{r_0} =$

$= \frac{16\pi \ln 2 \, \sigma r_0^2}{3T}$

Ответ: $\boxed{\Delta S = \frac{16\pi \ln 2}{3} \cdot \frac{\sigma r_0^2}{T} \approx 2{,}9 \cdot 10^{-6} \frac{Дж}{К}}$

5 неделя

T6



Дано: 1) Полностью заполнен водой

2) 10% – лёд

$\rho_в = 1\ \frac{г}{см^3}$, $q = 330\ \frac{Дж}{г}$,

$\beta_в = 4{,}8 \cdot 10^{-5}\ атм^{-1}$, $\rho_л = 0{,}92\ \frac{г}{см^3}$

Найти: t.

$t = \Delta T$ (т.к. $T_0 = 273\,°K$)

$$\frac{\Delta P}{\Delta T} = \frac{q}{T\left(\frac{1}{\rho_в} - \frac{1}{\rho_л}\right)} = \frac{q\rho_л\rho_в}{T(\rho_л - \rho_в)} \qquad (1)$$

$$\beta_в = -\frac{1}{V}\frac{\Delta V}{\Delta P} = -\frac{m}{V} \cdot \frac{\left(\frac{1}{\rho_в'} - \frac{1}{\rho_в}\right)}{\Delta P} \qquad (2)$$

$$\left.\begin{aligned} V_0 &= \rho_в \cdot m_0 \\ V_л' &= \rho_л \cdot \frac{1}{10} m_0 \\ V_в' &= \rho_в' \cdot \frac{9}{10} m_0 \end{aligned}\right| \Rightarrow \frac{9}{10}\rho_в' = \rho_в - \frac{1}{10}\rho_л$$

$$\rho_в' = \frac{1}{9}(10\rho_в - \rho_л).$$

Подставляем $\rho_в'$ и ΔP из (1) в (2):

$$\beta_в = -\frac{\rho_в}{\cancel{\ldots}} \cdot \frac{-\frac{1}{9}(\rho_в - \rho_л) \cdot T(\rho_л - \rho_в)}{\frac{1}{9}(10\rho_в - \rho_л)\rho_в \cdot q\rho_в\rho_л\,\Delta T} =$$

$$= -\frac{T(\rho_в - \rho_л)^2}{q\rho_в\rho_л(10\rho_в - \rho_л)\Delta T}$$

Отсюда $\Delta T = -\dfrac{T(\rho_в - \rho_л)^2}{9\rho_в \rho_л (10\rho_в - \rho_л)\beta_в}$

Ответ: $\boxed{t \approx -\dfrac{T(\rho_в - \rho_л)^2}{9\rho_в \rho_л (10\rho_в - \rho_л)\beta_т} \approx -1{,}3^\circ C}$

№11.74

Дано: $S_{ж} = \dfrac{RT}{\Theta}$, где $\Theta \approx 0{,}46^\circ K$, $S_{тв} = 0{,}7R$,

при $T_1 = 0{,}25^\circ K$ затвердевает при $P_1 \approx 29$ атм,

$T_2 = 0{,}1^\circ K$, $\Delta V = V_{ж} - V_{тв} = 1{,}25\,см^3$

Найти: P_2

$$\frac{dP}{dT} \approx \frac{dS}{dV} = \frac{S_{ж} - S_{тв}}{V_{ж} - V_{тв}} = \frac{R\left(\frac{T}{\Theta} - 0{,}7\right)}{\Delta V}$$

$$\int_1^2 dP \approx \frac{R}{\Delta V}\int_1^2 \left(\frac{T}{\Theta} - 0{,}7\right) dT$$

$$P_2 - P_1 \approx \frac{R}{\Delta V}(T_2 - T_1)\cdot\left[\frac{T_1 + T_2}{2\Theta} - 0{,}7\right]$$

Ответ: $\boxed{P_2 \approx P_1 + \dfrac{R(T_2 - T_1)}{\Delta V}\left(\dfrac{T_1 + T_2}{2\Theta} - 0{,}7\right) \approx 32 атм}$

№11.78

Дано: $V=10$л, при охлаждении до $t=0°C$:

$m=6{,}7$г - конденсируется, $\lambda=40{,}7$ кДж/моль

Найти: ΔT

Решение:

$$\frac{dP}{dT}=\frac{\lambda}{T\upsilon_n}=\frac{\lambda P}{RT^2}$$

$$PV=\nu RT$$

$$PdV+VdP=\nu RdT$$

$$\frac{dV}{V}+\frac{dP}{P}=\frac{dT}{T}$$

$$\frac{dV}{V}\cdot\frac{1}{dT}+\frac{1}{P}\cdot\frac{dP}{dT}=\frac{1}{T}$$

$$\frac{dV}{V}\cdot\frac{1}{dT}+\frac{\lambda}{RT^2}=\frac{1}{T}$$

$$\frac{\Delta V}{V}=\frac{\Delta T}{T}\left(1-\frac{\lambda}{RT}\right)=\frac{\Delta T(RT-\lambda)}{RT^2}$$

$$\Delta T=\frac{\Delta V}{V}\cdot\frac{RT^2}{RT-\lambda}.$$

Здесь $\frac{\Delta V}{V}=\frac{V-V_0}{V_0}$, где

$$\cancel{PV=\frac{m}{\mu}R(T_0+\Delta T)}$$

$$P_0V_0=\nu RT_0$$

$$\cancel{\frac{\Delta V}{V}=\frac{mR(T_0+\Delta T)P_0}{P\mu\cdot\nu RT_0}-1\approx\frac{mRP_0}{}}$$

$$\frac{\Delta V}{V}=\cancel{\frac{P_0}{T}\cdot\frac{T_0}{P_0}}\ \frac{\nu R\left(\frac{T}{P}-\frac{T_0}{P_0}\right)}{\frac{\nu RT_0}{P_0}}=\frac{P_0T}{PT_0}-1$$

$$PV = \nu RT \Rightarrow \frac{P}{T} = \frac{mR}{\mu V}$$

Таким образом $\frac{\Delta V}{V_0} = \frac{P_0}{T_0} \cdot \frac{\mu V}{mR} - 1$

Подставляем в формулу для ΔT:

$$\boxed{\Delta T = \left(\frac{P_0 \mu V}{T_0 m R} - 1\right) \cdot \left(\frac{RT}{RT - \lambda}\right) T \approx 4^\circ K}$$

Решение:

$$\frac{dP}{dT} = \frac{\lambda}{T \sigma_n} = \frac{\lambda P}{RT^2} = \frac{\lambda m}{\mu V T} \quad (1)$$

$$PV = \nu RT \Rightarrow V dP = \nu R dT + d\nu\, RT$$

$$\cancel{V \cdot \frac{\lambda P}{RT^2} dT = \nu R dT + d\nu\, RT} \text{ из (1)}$$

Если бы давление было $P_0 = 10^5$ Па и $T_0 = 373^\circ K$, то $\nu = \frac{P_0 V}{RT_0}$ – кол-во воды, сконденсировавшейся в таком процессе.

В данных условиях сконденсировалось $\nu' = \frac{m}{\mu}$ воды. То есть $\Delta \nu = \frac{m}{\mu} - \frac{P_0 V}{RT_0}$

$$\cancel{\left(\frac{V\lambda P_0}{RT_0^2} - \frac{mR}{\mu}\right)\Delta T}$$

$$\frac{\lambda m}{\mu T}\Delta T = \frac{m}{\mu} R \Delta T + RT\left(\frac{m}{\mu} - \frac{P_0 V}{RT}\right)$$

$$\frac{m}{\mu}\left(\frac{\lambda}{T_0} - R\right)\Delta T = \left(\frac{m}{\mu} - \frac{P_0 V}{RT_0}\right)RT_0$$

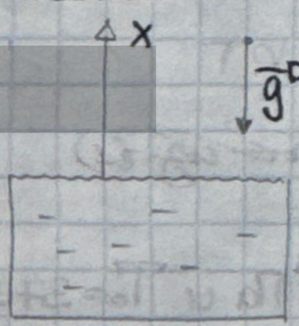
$$\frac{m}{\mu}\,\frac{\lambda - RT_0}{RT_0}\,\Delta T = \left(\frac{m}{\mu} - \frac{P_0 V}{RT_0}\right)T_0$$

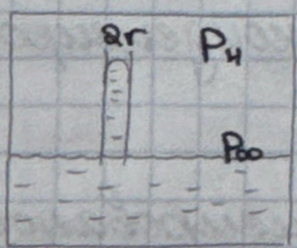
$$\Delta T = \frac{\mu}{m}\cdot\frac{RT_0^2}{\lambda - RT_0}\cdot\left(\frac{m}{\mu} - \frac{P_0 V}{RT_0}\right) =$$

$$= T_0\cdot\frac{RT_0}{\lambda - RT_0}\left(1 - \frac{P_0 V\mu}{mRT_0}\right)$$

Ответ: $\boxed{\Delta T = T_0\cdot\frac{RT_0}{\lambda - RT_0}\left(1 - \frac{P_0 V\mu}{mRT_0}\right) \simeq 4°K}$

№12.48





Дано: $r = 10^{-6}$ см, $T = 293$ К,

$\sigma = 487\ \frac{дин}{см}$, $\mu = 200{,}6\ \frac{г}{моль}$,

$\rho = 13{,}55\ \frac{г}{см^3}$

Найти: $\frac{P_r}{P_\infty}$

Решение:

1) $\begin{cases} dP = -\rho g\,dx \\ PV = \frac{m}{\mu}RT \rightarrow P = \frac{\rho}{\mu}RT \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow dP = -\frac{P\mu g\,dx}{RT}$

$\frac{dP}{P} = -\frac{\mu g\,dx}{RT} \Rightarrow P = P_0\exp\left(-\frac{\mu g h}{RT}\right)$

Рассмотрим подъём в капилляре

с углом смачивания $\theta = \pi$ (модель капли)

$$P_н = P_{\cancel{нас}.\infty}\,\cancel{\xi}\,\exp\left(-\frac{\mu g}{RT}\cdot\frac{2\sigma}{\rho g r}\cos\theta\right) =$$

$$= P_\infty \exp\left(\frac{2\sigma\mu}{\rho r RT}\right)$$

Так как равновесие установлено: $P_r = P_н$

(давление возле капли равно давлению насыщенного пара, чтобы капля не испарялась)

$$\boxed{\frac{P_r}{P_\infty} = \exp\left(\frac{2\sigma\mu}{\rho r RT}\right) \simeq 1{,}8}$$

6 неделя

26.41

Дано: 1) $T=T_0=const$: $V_0 \to \frac{1}{2}V_0$

2) Расширяется в вакуум $\frac{1}{2}V_0 \to 2V_0$

Известны: a, b, c_v

Найти: ΔS

Решение:

$$dS=\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T dV+\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V dT=\frac{\partial(S,T)}{\partial(V,T)}dV+\frac{c_v dT}{T}=$$

$$=\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V dV+\frac{c_v dT}{T}.$$

Уравнение Ван-дер-Ваальса:

$$\left(P+\frac{a}{V^2}\right)(V-b)=RT$$

Отсюда:

$$R\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V=V-b$$

Подставляем в выражение для dS:

$$dS=\frac{RdV}{V-b}+\frac{c_v dT}{T}.$$

Отсюда $\Delta S=R\ln\frac{2V_0-b}{V_0-b}+c_v\ln\frac{T_k}{T_0}.$

При расширении в вакуум $\Delta U = 0$

$$c_v T_0 - \frac{a}{\frac{1}{2}V_0} = c_v T_k - \frac{a}{2V_0}$$

$$T_k = T_0 - \frac{3a}{2c_v V_0}$$

Таким образом $\boxed{\Delta S = R\ln\frac{2V_0-b}{V_0-b} + c_v\ln\left(1-\frac{3a}{2c_vV_0T_0}\right)}$

№6.73

Дано: $\Delta P_1 = \Delta P_2 = \Delta P$ - мало, $\frac{T_{кр}}{T} = 0{,}4$, $\frac{V_{кр}}{V} = 0{,}09$

Найти: $\frac{\Delta T_H}{\Delta T_S}$

Решение:

$$\frac{\Delta T_H}{\Delta T_S} = \frac{\Delta T_H}{\Delta P}\cdot\frac{\Delta P}{\Delta T_S} \approx \cancel{\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_H} \cdot \frac{(\partial T/\partial P)_H}{(\partial T/\partial P)_S} \quad (1)$$

$$dH = \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_P dT + \left(\frac{\partial H}{\partial P}\right)_T dP = C_p dT + \left(\frac{\partial H}{\partial P}\right)_T dP$$

$$dH = PdV + VdP + dU = TdS + VdP$$

Отсюда $\left(\frac{\partial H}{\partial P}\right)_T = T\left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_T + V = V - T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P$

Подставляем $\left(\frac{\partial H}{\partial P}\right)_T$ в выражение для dH:

$$dH = C_p dT + VdP - T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P dP.$$

Таким образом $\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_H = \frac{1}{C_p}\left[T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P - V\right] \quad (2)$

$$\cancel{dS = \frac{\partial S}{\partial}} \quad dS = \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_P dT + \left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_T dP = \frac{C_p dT}{T} - \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P$$

Отсюда $\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_S = \frac{T}{C_p}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P$

Подставляем (2) и (3) в (1):

$$\frac{\Delta T_и}{\Delta T_s} = \frac{\frac{1}{C_p}\left[T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p - V\right]}{\frac{T}{C_p}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p} = 1 - \frac{V}{T}\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_p \qquad (4)$$

Уравнение Ван-дер-Ваальса:

$$\left(P+\frac{a}{V^2}\right)(V-b) = RT$$

$$R\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_p = -\frac{2a}{V^3}(V-b) + P + \frac{a}{V^2} = \frac{RT}{V-b} - \frac{2a}{V^2} + \frac{2ab}{V^3}.$$

Выразим a и b через критические параметры:

$$V_{кр} = 3b \Rightarrow b = \frac{1}{3}V_{кр}$$

$$T_{кр} = \frac{8a}{27Rb} \Rightarrow a = \frac{27}{8}R\cdot\frac{1}{3}V_{кр}T_{кр} = \frac{9}{8}RV_{кр}T_{кр}.$$

Находим $\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_p = \frac{T}{V-\frac{1}{3}V_{кр}} - \frac{9}{4}V_{кр}T_{кр}\cdot\frac{1}{V^2} + \frac{9}{4}\cdot\frac{1}{V^3}\cdot V_{кр}^2T_{кр}\frac{1}{3}$

Подставляем в (4):

$$\boxed{\frac{\Delta T_и}{\Delta T_s} \simeq 1 - \frac{1}{1-\frac{1}{3}\frac{V_{кр}}{V}} + \frac{9}{4}\frac{V_{кр}}{V}\frac{T_{кр}}{T} - \frac{3}{4}\cdot\left(\frac{V_{кр}}{V}\right)^2\cdot\frac{T_{кр}}{T} \simeq 0{,}048}$$

26.87

N_2 расширяется в процессе Джоуля-Томсона. Вначале газ Ван-дер-Ваальса, в конце сильно разреженный. $T_0 = 3T_{кр}$, $T_{кр} = 126$ К, $V_{кр} = 114 \frac{см^3}{моль}$

Найти: V_0 и $T_к$: $T_к - min$

Решение:

Энтальпия H сохраняется:

$$U_0 + P_0 V_0 = U_1 + P_1 V_1$$

$$C_V T_0 - \frac{a}{V_0} + \left(\frac{RT_0}{V_0 - b} - \frac{a}{V_0^2} \right) V_0 = C_V T_к + RT_к.$$

Отсюда $T_к = \frac{1}{C_V + R} \left(\left(C_V + \frac{RV_0}{V_0 - b} \right) T_0 - \frac{2a}{V_0} \right)$

Охлаждение максимально, когда $\frac{\partial T_к}{\partial V_0} = 0$

$$\frac{\partial T_к}{\partial V_0} = \frac{1}{C_V + R} \left(RT_0 \cdot \frac{V_0 - b - V_0}{(V_0 - b)^2} + \frac{2a}{V_0^2} \right) = 0;$$

$$\frac{2a}{V_0^2} = \frac{RbT_0}{(V_0 - b)^2}$$

$$\left(1 - \frac{b}{V_0} \right)^2 = \frac{Rb \cdot 3T_{кр}}{2a} = \frac{3Rb}{2a} \cdot \frac{8a}{27Rb} = \frac{4}{9}$$

Отсюда $1 - \frac{b}{V_0} = \frac{2}{3}$, $\frac{b}{V_0} = \frac{1}{3}$, $V_0 = 3b = 3 \cdot \frac{1}{3} V_{кр} = V_{кр}$.

$$\cancel{T_к = \frac{1}{C_V + R} \left(3RT_{кр} \cdot \frac{\frac{1}{3} V_{кр}}{V_{кр} - \frac{1}{3} V_{кр}} + \frac{2a}{V_0} \right) =}$$

$$\cancel{= \frac{1}{C_V + R} \left(\frac{27R \cdot \frac{1}{3} V_{кр} T_{кр}}{8 V_{кр}} - \frac{3}{2} RT_{кр} \right) = \frac{\frac{3}{2} R}{C_V + R} \left(\frac{3}{4} - \right.}$$

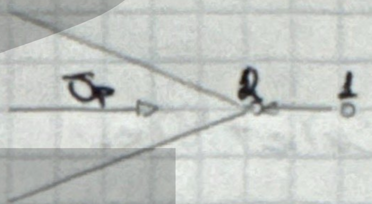
Находим $T_к$:

$$T_к = \frac{1}{C_v+R}\left(3\left(C_v + \frac{R V_{кр}}{V_{кр}-\frac{1}{3}V_{кр}}\right)T_{кр} - \frac{2}{V_{кр}}\cdot\frac{27R}{8}T_{кр}\frac{1}{3}V_{кр}\right) =$$

$$= \frac{3T_{кр}}{C_v+R}\left(C_v + \frac{3}{2}R - \frac{3}{4}R\right) = 3T_{кр}\left(1-\frac{R}{4(C_v+R)}\right) = \frac{39}{14}T_{кр}$$

Ответ: $\boxed{V_0 = V_{кр} = 114\,\frac{см^3}{моль},\quad T_к = \frac{39}{14}T_{кр} = 351\,°K}$

22.20



Дано: $M = \frac{v_p}{v_{зв}} = 1$, $v'_{2} = 0$, $P_в = 0{,}3$ атм

Найти: P_p.

Решение:

В состоянии 1: $P_1 = P_в$, $v_1 = 0$

В состоянии 2: $P_2 = P_p$, $v_2 = v_p$.

Уравнение Бернулли:

$$PV + U + \frac{\mu v^2}{2} = const$$

$$P_в V_1 + C_v T_1 = P_p V_2 + C_v T_2 + \frac{\mu v_p^2}{2}$$

$$C_p T_1 = C_p T_2 + \frac{\mu v_p^2}{2};$$

$$T_2 = T_1 + \frac{\mu v_p^2}{2C_p}$$

Процесс адиабатический, следовательно $\frac{T^\gamma}{P^{\gamma-1}} = const$

$$P_p = P_в\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

$v_{зв} = \sqrt{\gamma \frac{RT_x}{\mu}}$, значит $T_x = \frac{\mu v_{зв}^2}{\gamma R}$.

Таким образом: $P_P = P_B\left[1 + \frac{\mu v_{зв}^2}{\gamma R}\cdot\frac{\mu v_P^2}{2C_P}\cdot\frac{\gamma R}{\mu v_{зв}^2}\right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} =$

$= P_B\left[1+\frac{R}{2C_V}M^2\right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = P_B\left[1+\frac{1}{2}(\gamma-1)M^2\right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$

Ответ: $\boxed{P_P \approx P_B\left[1+\frac{1}{2}(\gamma-1)M^2\right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = 0{,}57\ атм}$