

I. Недавное дружинчи

Т1

$$x^2 = y^2$$

а) Сколько функций $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ удовл?

М $\subset \mathbb{R}$: $y = \begin{cases} x, & x \in M \\ -x, & x \notin M \end{cases}$ - функция, удовлетворяющая уравнению.

В силу произвольности М: бесконечно много.

б) Сколько непр. $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ удовл?

$y = x, y = -x, y = |x|, y = -|x|$, остальное не непрерывно.

в) Сколько непр. $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ удовл. уравнению " $y(1) = 1$ "?

$y = x$ и $y = |x|$, в остальных непр. $y(1) = -1$.

г) Сколько непр. $y: [1; 2] \rightarrow \mathbb{R}$ удовл. уравнению $y(1) = 1$?

$y = x$ и $y = |x|$ совпадают на $[1; 2] \Rightarrow$ только $y = x$

Ответ: а) беск. много; б) 4; в) 2; г) 1.

§3 №68(2)

Найти др в точке $(1; 1)$: $x - u = u \ln y$

~~д~~: $D - u'x = u'_x \ln y + u \cdot \frac{y}{x} \cdot u'_x$;

$$x=1, y=1: 1 - u'(1, 1) = u'(1, 1) \ln \frac{u(1, 1)}{1}$$

Донатик

$U(1 + \ln u_0) = 1$; $u_0 = 1$ - ед. корень, т.к. функция слева возрастает. ($u_0 = U(1,1)$)

$$\frac{\partial}{\partial x} : 1 - u'_x = u'_x \ln \frac{y}{1} + U \cdot \frac{y}{1} \cdot \frac{u'_x}{y}$$

$$1 - u'_x = u'_x \ln \frac{y}{1} + U \cdot \frac{y}{1} \cdot \frac{u'_x}{y} \Rightarrow u'_x = \frac{1}{2}.$$

$$\frac{\partial}{\partial y} : -u'_y = u'_y \ln \frac{y}{1} + U \cdot \frac{y}{1} \cdot \frac{u'_y y - U}{y^2}$$

$$-u'_y = u'_y \ln \frac{y}{1} + \frac{U y_0 \cdot 1 - 1}{1} \Rightarrow u'_y = \frac{1}{2}.$$

$$dU = u'_x dx + u'_y dy = \frac{1}{2} dx + \frac{1}{2} dy$$

Ответ: $dU = \frac{1}{2} dx + \frac{1}{2} dy$.

§3.264(1)

Найти dU в точке а) $P = (3; -2; 2)$; б) $P = (3; -2; -1)$

$$U^3 - xU + y = 0;$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \sim 3U^2 \cdot U'_x - U - xU'_x = 0$$

$$a) 4U U'_x - 2 - 3U'_x = 0 \Rightarrow U'_x = \frac{2}{3}$$

б) $3U'_x + 1 - 3U'_x = 0$ U'_x не существует

$$F(x, y, U) = U^3 - xU + y$$

F непрерывно
 F -дифференцируется во всех точках

$$F'_u = 3U^2 - x$$

а) $F'_u(P) = 12 - 3 = 9 \neq 0 \Rightarrow U(x, y) - \text{непрерывно}$

Донатик

дифференцируем

$$dF=0 = 3u^2du - xdu + dx + dy$$

$$12du - 3du - dx + dy = 0$$

$$du = \frac{2}{9}dx - \frac{1}{9}dy$$

8) $F'_u(P) = 3 - 3 = 0$ (не выполняется условие теоремы)

Доказать, что не существует \bar{x} и \bar{u}'
При фиксированном $y = -2$:

$$\begin{aligned} u^3 - xu - 2 &= 0 \\ x &= \frac{u^3 - 2}{u} = u^2 - \frac{2}{u} \\ x'_u &= 2u + \frac{2}{u^2} \neq 0 \end{aligned}$$

Предположим обратное. При фиксированном y :

$$u^3 - xu - 2 = 0$$

Дифференцируем по x :

$$3u^2 \cdot u'_x - u - x \cdot u'_x = 0$$

$$\text{В точке } P: 3u'_x + 3 - 3u'_x = 0 \Rightarrow 1 = 0 \text{ (неверно)}$$

\Rightarrow предположение неверно, u' не существует
в $P = \bar{x}, \bar{u}'$ не существует в P (недостаток)

Ответ: а) $\frac{2}{9}dx - \frac{1}{9}dy$; б) du не существует.

§3 №71

Док-ть: ч $f\left(\frac{x}{y}\right) = x^2 + y^2 + z^2$ определяет

дифференцируемую $z(x,y) \Rightarrow$

$\Rightarrow z$ удовлетворяет $(x^2 - y^2 - z^2) \frac{\partial z}{\partial x} + 2xy \frac{\partial z}{\partial y} = 2xz$

Обе части уравнения можно проанализировать по x и по y .

$$y \cdot \frac{\partial f\left(\frac{x}{y}\right)}{\partial\left(\frac{x}{y}\right)} \cdot \frac{\partial\left(\frac{x}{y}\right)}{\partial x} = 2x + 2z \cdot \frac{\partial z}{\partial x},$$

$$\frac{\partial f\left(\frac{x}{y}\right)}{\partial\left(\frac{x}{y}\right)} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 2z \cdot \frac{\partial z}{\partial x} \quad (1)$$

$$f\left(\frac{x}{y}\right) + y \cdot \frac{\partial f\left(\frac{x}{y}\right)}{\partial\left(\frac{x}{y}\right)} \cdot \frac{\frac{\partial z}{\partial y} \cdot y - z}{y^2} = \partial y + 2z \cdot \frac{\partial z}{\partial y} / \cdot \frac{\partial z}{\partial x}$$

$$f\left(\frac{x}{y}\right) \frac{\partial z}{\partial x} + \left(\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{z}{y} \right) \cdot \frac{\partial f\left(\frac{x}{y}\right)}{\partial\left(\frac{x}{y}\right)} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = \partial y \frac{\partial z}{\partial x} + 2z \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y}$$

Из (1):

$$f\left(\frac{x}{y}\right) \frac{\partial z}{\partial x} + \left(\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{z}{y} \right) \cdot \left(2x + 2z \cdot \frac{\partial z}{\partial x} \right) = \partial y \frac{\partial z}{\partial x} + 2z \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y}$$

$$f\left(\frac{x}{y}\right) \frac{\partial z}{\partial x} + 2x \frac{\partial z}{\partial y} + 2z \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial z}{y} - \frac{\partial z^2}{y} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = \\ = \partial y \frac{\partial z}{\partial x} + 2z \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} / \cdot y$$

$$y f\left(\frac{x}{y}\right) \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + 2xy \frac{\partial z}{\partial y} - 2xz - 2z^2 \frac{\partial z}{\partial x} = \partial y^2 \frac{\partial z}{\partial x}$$

Донатик

Из данного уравнения подставляем $yf(\frac{x}{y})$

$$(x^2+y^2+z^2) \frac{\partial z}{\partial x} + 2xy \frac{\partial z}{\partial y} - 2xz - 2z^2 \frac{\partial z}{\partial x} - 2yz \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

$$(x^2-y^2-z^2) \frac{\partial z}{\partial x} + 2xy \frac{\partial z}{\partial y} = 2xz.$$

§ 3.276

Найти u и v в точке $(1;1)$ (существуют)

$$x = \sqrt{2} e^{u/x} \cos \frac{\sigma}{y}$$

$$y = \sqrt{2} e^{u/x} \sin \frac{\sigma}{y}$$

$$u(1,1) = 0, v(1,1) = \frac{\pi}{4}$$

$f_1(x,y,u,\sigma) = x - \sqrt{2} e^{u/x} \cos \frac{\sigma}{y} = 0$ - дифференцируем

как композицию

$$f_{1x}' = 1 - \sqrt{2} \left(e^{u/x} \cdot \frac{u'_x x - u}{x^2} \cos \frac{\sigma}{y} - e^{u/x} \cdot \sin \frac{\sigma}{y} \cdot \frac{\sigma'_x}{y} \right)$$

$$f_{1x}'(1,1,0, \frac{\pi}{4}) = 1 - u'_x + \sigma'_x = 0 \Rightarrow u'_x - \sigma'_x = 1 \quad (1)$$

$f_2(x,y,u,\sigma) = y - \sqrt{2} e^{u/x} \sin \frac{\sigma}{y} -$ дифференцируем

как композицию.

$$f_{2x}' = - \sqrt{2} \left(e^{u/x} \cdot \frac{u'_x x - u}{x^2} \sin \frac{\sigma}{y} + e^{u/x} \cdot \cos \frac{\sigma}{y} \cdot \frac{\sigma'_x}{y} \right) =$$

$$f_{2x}'(1,1,0, \frac{\pi}{4}) = -u'_x - \sigma'_x = 0 \Rightarrow u'_x + \sigma'_x = 0 \quad (2)$$

$$(1,2) \Rightarrow u'_x = \frac{1}{2}, \sigma'_x = -\frac{1}{2}.$$

Донатик

$$f_{2y}^1 = -\sqrt{2} \left(e^{u_1 x} \cdot \frac{u'_1}{x} \cdot \cos \frac{\sigma}{y} - e^{u_1 x} \cdot \sin \frac{\sigma}{y} \cdot \frac{\sigma'_1 y - \frac{\sigma}{4}}{y^2} \right)$$

$$f_{2y}^1 = 0 = -u'_1 + \sigma'_1 - \frac{\sigma}{4} \quad (3)$$

$$f_{2y}^1 = \pm \sqrt{2} \left(e^{u_1 x} \cdot \frac{u'_1}{x} \cdot \sin \frac{\sigma}{y} + e^{u_1 x} \cdot \cos \frac{\sigma}{y} \cdot \frac{\sigma'_{yy} - \sigma}{y^2} \right)$$

$$f_{2y}^1(1, 1, 0, \frac{\sigma}{4}) = 1 - u'_1 - \sigma'_1 + \frac{\sigma}{4} = 0 \quad (4)$$

$$(3, 4) \Rightarrow u'_1 = \frac{1}{2}, \sigma'_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sigma}{4}.$$

Ответ: $du = u'_x dx + u'_y dy = \frac{1}{2} dx + \frac{1}{2} dy$

$$d\sigma = \sigma'_x dx + \sigma'_y dy = -\frac{1}{2} dx + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sigma}{4}\right) dy.$$

§ 42 ч 3 (6)

$y - u = e^{x+u}$, $u(1, 1) = 0$. найти: d^2u в $(1; 1)$

u -дифференцируемое

$F(x, y, u) = y - u - e^{x+u} = 0$ - дифр., как сложение

$$F'_x = -u'_x - e^{x+u}(u'_x x + u)$$

$$F''_{xx} = -u''_{xx} - e^{x+u}(u''_{xx} x + u)^2 - e^{x+u}(u''_{xx} \cdot x + u'_x + u'_x)$$

$$F'_y = 1 - u'_y - e^{x+u} \cancel{x \cdot u'_y}$$

$$F''_{yy} = -u''_{yy} - e^{x+u} \cdot x^2 u'^2 - e^{x+u} \cdot x \cdot u''_{yy}$$

$$F''_{xy} = -u''_{xy} - e^{x+u} x u'_y (u'_x x + u) - e^{x+u} (x u''_{xy} + u'_y)$$

$$F'_x(1, 1, 0) = -u'_x - u'_x = 0 \Rightarrow u'_x = 0$$

$$F'_y(1, 1, 0) = 1 - u'_y - u'_y = 0 \Rightarrow u'_y = \frac{1}{2}$$

Донатик

$$F_{xx}''(1,1,0) = -U_{xx}'' - (U_x')^2 - U_{xx}'' - \partial U_x' = 0$$

$$-\partial U_{xx}'' - \frac{3}{8} - 0 = 0 \Rightarrow U_{xx}'' = 0$$

$$\partial U_{xx}'' = \frac{5}{4} \Rightarrow U_{xx}'' = \frac{5}{8}$$

$$F_{xy}''(1,1,0) = -U_{xy}'' - U_y'(U_x' + 0) - U_{xy}'' - U_y' = 0$$

$$2U_{xy}'' + \cancel{\partial} \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow U_{xy}'' = -\frac{1}{4}$$

$$F_{yy}''(1,1,0) = -U_{yy}'' - U_y'^2 - U_{yy}'' = 0$$

$$\partial U_{yy}'' + \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow U_{yy}'' = -\frac{1}{8}$$

$$dU = U_{xx}'' dx^2 + 2U_{xy}'' dxdy + U_{yy}'' dy^2 = -\frac{1}{2} dxdy - \frac{1}{8} dy^2$$

Ответ: $dU = -\frac{1}{2} dxdy - \frac{1}{8} dy^2$

§ 4.2 № 46(2)

Ур-ием $f(\frac{x}{u}, \frac{y}{u}) = 0$, где f -дифференцируема,
опр. $u(x, y)$ -дифференцируема.

$$du = ?$$

$$\sigma = \frac{x}{u}, \omega = \frac{y}{u}.$$

$$df = f_\sigma' d\sigma + f_\omega' d\omega = f_\sigma' \cdot \frac{udx - xdu}{u^2} + f_\omega' \cdot \frac{udy - ydu}{u^2}$$

$$df = 0 \Rightarrow u(f_\sigma' dx + f_\omega' dy) = dU(f_\sigma' x + f_\omega' y) \quad (1)$$

$$d^2f = f_{\sigma\sigma}'' d\sigma^2 + 2f_{\sigma\omega} d\sigma d\omega + f_{\omega\omega}'' d\omega^2 + f_{\sigma\sigma}' d^2\sigma + f_{\omega\omega}' d^2\omega = \\ = f_{\sigma\sigma}'' \cdot \frac{(udx - xdu)^2}{u^4} + \partial f_{\sigma\omega}'' \cdot \frac{(udy - ydu)(udx - xdu)}{u^4} +$$

Донатик

$$+ f_{\omega\omega}^{'''} \cdot \frac{(u dy - y du)^2}{u^4} + f_0^1 \cdot d^2\sigma = f_0^1 dx \wedge d\omega - x d^2 u = x d^2 u.$$

$$d^2\sigma = d \left(\frac{u dx - x du}{u^2} \right) = \frac{(du dx - dudx - x d^2 u) u^2 - (udx - x du)}{u^4}$$

$$= \frac{-x u^2 d^2 u - 2u^2 du dx + 2ux dudx}{u^4}$$

Аналогично: $d^2\omega = \frac{-y u^2 d^2 u - 2u^2 du dy + 2uy dudx}{u^4}$

$$f_0^1 d^2\sigma + f_\omega^1 d^2\omega = \frac{1}{u^2} \left(u^2 d^2 u (f_0^1 x + f_\omega^1 y) - 2u^2 du \cdot \right. \\ \cdot \left. (f_0^1 dx + f_\omega^1 dy) + 2u du^2 (f_0^1 x + f_\omega^1 y) \right) = \\ = (\text{в силу равенства (2)}) = \frac{1}{u^4} \cdot u^2 d^2 u (f_0^1 x + f_\omega^1 y).$$

Подставляем в $d^2 f = 0$:

$$f_{00}^{'''} (u dx - x du)^2 + 2f_{0\omega}^{'''} (u dx - x du)(u dy - y du) + \\ + f_{\omega\omega}^{'''} (u dy - y du)^2 = u^2 (f_0^1 x + f_\omega^1 y) d^2 u$$

$$d^2 u = \frac{1}{u^2 (f_0^1 x + f_\omega^1 y)} \left[f_{00}^{'''} (u^2 dx^2 - 2u x du dx + x^2 du^2) + \right. \\ \left. + 2f_{0\omega}^{'''} (u^2 x dy - u x du dy - u y du dx + x y du^2) + \right. \\ \left. + f_{\omega\omega}^{'''} (u^2 dy^2 - 2u y du dy + y^2 du^2) \right] = (\text{ногст. (3)})$$

$$= \frac{1}{(f_0^1 x + f_\omega^1 y)^3} \left[f_{00}^{'''} \left\{ (f_0^1 x + f_\omega^1 y)^2 dx^2 - 2x du (f_0^1 x + f_\omega^1 y) (f_0^1 dx + f_\omega^1 dy) \right\} \right. \\ \left. + (f_0^1 dx + f_\omega^1 dy)^2 x^2 \right] +$$

Донатик

$$\begin{aligned}
& + f_{\omega \omega}^{\rho_1 \rho_1} \left\{ (f_{\omega x}^1 + f_{\omega y}^1)^2 dx dy - (f_{\omega x}^1 x + f_{\omega y}^1 y) (f_{\omega x}^1 dx + f_{\omega y}^1 dy) \right\} \\
& - \cancel{(f_{\omega x}^1 x + f_{\omega y}^1 y)} + (f_{\omega x}^1 x + f_{\omega y}^1 y)^2 \cancel{x y} \\
& + f_{\omega \omega}^{\rho_1 \rho_1} \left\{ (f_{\omega x}^1 x + f_{\omega y}^1 y)^2 dy^2 - 2y dy (f_{\omega x}^1 x + f_{\omega y}^1 y) (f_{\omega x}^1 dx + f_{\omega y}^1 dy) \right\} \\
& + (f_{\omega x}^1 dx + f_{\omega y}^1 dy)^2 y^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A &= f_{\omega}^{\rho_1 \rho_1} x^2 dx^2 + 2 \cancel{f_{\omega}^{\rho_1 \rho_1} f_{\omega}^1 x y dx^2} + f_{\omega}^{\rho_1 \rho_1} y^2 dx^2 - \\
&- 2x dx \left(f_{\omega}^1 x dx + f_{\omega}^1 f_{\omega}^1 x dy + f_{\omega}^1 f_{\omega}^1 y dx + f_{\omega}^1 y dy \right) + \\
&+ \cancel{f_{\omega}^{\rho_1 \rho_1} x^2 dx^2} + 2 \cancel{f_{\omega}^{\rho_1 \rho_1} f_{\omega}^1 x^2 dx dy} + f_{\omega}^{\rho_1 \rho_1} x^2 dy^2 = \\
&= f_{\omega}^{\rho_1 \rho_1} (y dx^2 - 2x y dx dy + x^2 dy) = f_{\omega}^{\rho_1 \rho_1} (y dx - x dy)^2
\end{aligned}$$

Аналогично $C = f_{\sigma}^{\rho_1 \rho_1} (y dx - x dy)^2$

$$\begin{aligned}
B &= f_{\sigma}^{\rho_1 \rho_1} x^2 dx dy + 2 \cancel{f_{\sigma}^{\rho_1 \rho_1} f_{\omega}^1 x y dx dy} + \cancel{f_{\omega}^{\rho_1 \rho_1} y dx dy} - \\
&- \cancel{f_{\sigma}^{\rho_1 \rho_1} x^2 dx dy} - f_{\sigma}^{\rho_1 \rho_1} f_{\omega}^1 x^2 dy^2 - \cancel{f_{\sigma}^{\rho_1 \rho_1} f_{\omega}^1 x y dx dy} - f_{\omega}^{\rho_1 \rho_1} x y dy^2 - \\
&- \cancel{f_{\sigma}^{\rho_1 \rho_1} x y dx^2} - f_{\sigma}^{\rho_1 \rho_1} f_{\omega}^1 x y dx dy - \cancel{f_{\sigma}^{\rho_1 \rho_1} f_{\omega}^1 y^2 dx^2} - \cancel{f_{\omega}^{\rho_1 \rho_1} y^2 dx dy} + \\
&+ \cancel{f_{\sigma}^{\rho_1 \rho_1} x y dx^2} + 2 f_{\sigma}^{\rho_1 \rho_1} f_{\omega}^1 x y dx dy + f_{\omega}^{\rho_1 \rho_1} x y dy^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B &= f_{\sigma}^{\rho_1 \rho_1} x^2 dx dy + 2 \cancel{f_{\sigma}^{\rho_1 \rho_1} f_{\omega}^1 x y dx dy} + \cancel{f_{\omega}^{\rho_1 \rho_1} y^2 dx dy} - \\
&- \cancel{f_{\sigma}^{\rho_1 \rho_1} x^2 dx dy} - f_{\sigma}^{\rho_1 \rho_1} f_{\omega}^1 x^2 dy^2 - \cancel{f_{\sigma}^{\rho_1 \rho_1} f_{\omega}^1 x y dx dy} - \cancel{f_{\omega}^{\rho_1 \rho_1} x y dy^2} - \\
&- \cancel{f_{\sigma}^{\rho_1 \rho_1} x y dx^2} - \cancel{f_{\sigma}^{\rho_1 \rho_1} f_{\omega}^1 x y dx dy} - \cancel{f_{\sigma}^{\rho_1 \rho_1} f_{\omega}^1 y^2 dx^2} - \cancel{f_{\omega}^{\rho_1 \rho_1} y^2 dx dy} + \\
&+ \cancel{f_{\sigma}^{\rho_1 \rho_1} x y dx^2} + 2 f_{\sigma}^{\rho_1 \rho_1} f_{\omega}^1 x y dx dy + \cancel{f_{\omega}^{\rho_1 \rho_1} x y dy^2} = \\
&= f_{\sigma}^{\rho_1 \rho_1} f_{\omega}^1 (x^2 dy^2 - 2 x y dx dy + y^2 dx^2) = - f_{\sigma}^{\rho_1 \rho_1} f_{\omega}^1 (x dy - y dx)^2
\end{aligned}$$

Донатик

$$d^2U = \frac{1}{(f_{\sigma}^1 x + f_{\omega}^1 y)^3} \cdot (xdy - ydx)^2 (f_{\sigma\sigma}^{11} \cdot (f_{\omega}^1)^2 + -2f_{\sigma\omega}^{11} f_{\omega\omega}^{11} + (f_{\sigma}^1)^2 f_{\omega\omega}^{11})$$

$$+ (f_{\sigma}^1)^2 f_{\omega\omega}^{11})$$

Ответ: $d^2U = \frac{(f_{\omega}^1)^2 f_{\sigma\sigma}^{11} - 2f_{\sigma\omega}^{11} f_{\omega\omega}^{11} + (f_{\sigma}^1)^2 f_{\omega\omega}^{11}}{(f_{\sigma}^1 x + f_{\omega}^1 y)^3}$.

$$\cdot (xdy - ydx)^2.$$

Из

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 = 0$$

и \mathbb{R}^n -множество $a = (a_1, \dots, a_n)$: ур-е имеет

и различных корней x_1, \dots, x_n .

Док-ть: и-открыто; таэл $\exists M(a): x_i = x_i(a_1, \dots, a_n)$ — гладкая.

$$F(a_1, \dots, a_n, x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$$

1) $F \in C^\infty$

$$2) F(a_1^o, \dots, a_n^o, x_i^o) = 0$$

$$3) F_x'(a_1^o, \dots, a_n^o, x_i^o) = \sum_{j=1}^n \frac{(x-x_1^o) \dots (x-x_{j-1}^o)}{(x-x_j^o)} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{(x-x_1^o) \dots (x-x_{j-1}^o)}{(x-x_j^o)} +$$

$$+ (x-x_i^o) \dots (x-x_{i-1}^o) (x-x_{i+1}^o) \dots (x-x_n^o) \Big|_{x=x_i^o} \neq 0 \quad (\text{бесну-того что } x_i^o \neq x_j^o \text{ при } i \neq j)$$

Донатик

(1-3) $\Rightarrow \exists \tilde{x}_i : x_i = x_i(a_1, \dots, a_n) \in C^\infty$ (гладкая) в $U_i(a_1^0, \dots, a_n^0)$

В силу гладкости $x_i'(a_1, \dots, a_n)$ ограничена в $U_{\delta i}(a_1^0, \dots, a_n^0)$.

Возьмем $\delta < \min\{\delta_1, \dots, \delta_n, \min_{i+j} \frac{|x_i - x_j|}{\alpha_m}\}$, $|x'_i| \leq m, \forall i$ (в U_i)

теорема дарбу доказана:

$$x_i(a_1, \dots, a_n) - x_i(a_1^0, \dots, a_n^0) = x'_i a_i (a_1^0 + \xi(a_1 - a_1^0), \dots, a_n^0 + \xi(a_n - a_n^0)) \in \xi \in (0, 1)$$

$$|x_i(a_1, \dots, a_n) - x_i(a_1^0, \dots, a_n^0)| \leq m \cdot n \cdot \delta \sum_{j=1}^n |x_i(a_1^0, \dots, a_n^0) - x_j(a_1^0, \dots, a_n^0)| \quad \forall j.$$

Таким образом, в $U(a_1^0, \dots, a_n^0)$ сохраняется условие различности корней.

В силу произвольности бокора $a^0 = (a_1^0, \dots, a_n^0) \in U$:

$\forall a \in U : \exists U(a) : \forall b \in U(a) : \text{белл, т.е. } U\text{-открыто.}$

II. Дифференцирующее отображение, замена переменных

§ 3.2.104

$$x = r \cos^p \varphi, y = r \sin^p \varphi$$

Найти $\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \varphi)}$

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \varphi)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos^p \varphi & r p \sin^{p-1} \varphi \cos \varphi \\ \sin^p \varphi & r p \sin^{p-1} \varphi \cos \varphi \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \cos^p \varphi & -r p \cos^{p-1} \varphi \sin \varphi \\ \sin^p \varphi & r p \sin^{p-1} \varphi \cos \varphi \end{vmatrix} = r p \sin^{p-1} \varphi \cos^{p-1} \varphi (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = r p (\sin \varphi \cos \varphi)^{p-1}$$

Ответ: $r p (\sin \varphi \cos \varphi)^{p-1}$

Т3

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2: u = e^x \cos y, v = e^x \sin y$$

Найти: $\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \neq 0$, ибо f -не биекция

Найти: Единственность f .

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = e^x \cos y \cdot e^x \cos y + e^x \sin y \cdot e^x \sin y = e^{2x} > 0 \quad \forall x.$$

Рассмотрим (x_0, y_0) : $u_0 = e^{x_0} \cos y_0, v_0 = e^{x_0} \sin y_0$

$$u(x_0, y_0) = u(x_0, y_0 + \Delta y)$$

Доказуем взаимно однозначное

$$v(x_0, y_0) = v(x_0, y_0 + \Delta y)$$

$$U^2 + O^2 = e^{2x} > 0 \Rightarrow (0,0) \notin E$$

Рассмотрим произвольную точку $(U_1, O_1) \neq (0,0)$

$$U^2 + O^2 = e^{2x} = U_1^2 + O_1^2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \ln(U_1^2 + O_1^2) \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2} \ln(U_1^2 + O_1^2)$$

$$\cos y_1 = \frac{U_1}{\sqrt{U_1^2 + O_1^2}}, \sin y_1 = \frac{O_1}{\sqrt{U_1^2 + O_1^2}}$$

$$\Rightarrow \exists (x_1, y_1) : f(x_1, y_1) = (U_1, O_1)$$

~~Ответ:~~ Ответ: $E = \mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$

14

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2: x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi, r > 0$$

Выразить $r'_x, r'_y, \varphi'_x, \varphi'_y$ как функции r и φ

$$\begin{cases} 1 = r'_x \cos \varphi - r \sin \varphi \cdot \varphi'_x \\ 0 = r'_x \sin \varphi + r \cos \varphi \cdot \varphi'_x \end{cases}$$

$$\sin \varphi \cdot r \sin^2 \varphi \cdot \varphi'_x = r \cos^2 \varphi \varphi'_x \quad \cos \varphi = r'_x / (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) \Rightarrow$$

$$\sin \varphi = r \varphi'_x \cos^2 \varphi \Rightarrow \varphi'_x = \frac{\sin \varphi}{r \cos^2 \varphi} \Rightarrow r'_x = \cos \varphi$$

$$r'_x = \frac{r \cos \varphi}{\sin \varphi} \cdot \frac{\sin \varphi}{r \cos^2 \varphi} = \frac{\cos \varphi}{\cos^2 \varphi} \quad \varphi'_x = -\frac{r'_x \sin \varphi}{r \cos \varphi} = -\frac{\sin \varphi}{r}$$

$$\begin{cases} 0 = r'_y \cos \varphi - r \sin \varphi \cdot \varphi'_y \\ 1 = r'_y \sin \varphi + r \cos \varphi \cdot \varphi'_y \end{cases}$$

$$\sin \varphi = r'_y \sin^2 \varphi + r'_y \cos^2 \varphi \Rightarrow r'_y = \sin \varphi$$

$$\varphi'_y = \frac{r'_y \cos \varphi}{r \sin \varphi} = \frac{\cos \varphi}{r}$$

$$\text{Ответ: } r'_x = \cos \varphi, r'_y = \sin \varphi, \varphi'_x = -\frac{\sin \varphi}{r}, \varphi'_y = \frac{\cos \varphi}{r}$$

Донатик

№3 №86

$$x \frac{\partial U}{\partial x} + y \frac{\partial U}{\partial y} = 0$$

Решить, преобразовав к полярным координатам.

$$x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi, r > 0, \varphi \in [0; 2\pi)$$

$$r^2 = x^2 + y^2,$$

$$\text{из } T: \frac{\partial r}{\partial x} = \cos \varphi, \frac{\partial r}{\partial y} = \sin \varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{\sin \varphi}{r}, \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\cos \varphi}{r}$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial r} \cos \varphi - \frac{\partial U}{\partial \varphi} \frac{\sin \varphi}{r}$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial r} \sin \varphi + \frac{\partial U}{\partial \varphi} \frac{\cos \varphi}{r}$$

Подставляем в уравнение:

$$r \cos \varphi \left(\frac{\partial U}{\partial r} \sin \varphi + \frac{\partial U}{\partial \varphi} \frac{\cos \varphi}{r} \right) = r \sin \varphi \left(\frac{\partial U}{\partial r} \cos \varphi - \frac{\partial U}{\partial \varphi} \frac{\sin \varphi}{r} \right)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \varphi} = r \frac{\partial U}{\partial r} (\sin \varphi \cos \varphi - \sin \varphi \cos \varphi) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial U}{\partial \varphi} = 0, \text{ и не зависит от } \varphi \quad \Rightarrow$$

$\frac{\partial U}{\partial r}$ - любая функция

$$\rightarrow U(x, y) = f(x^2 + y^2), \text{ где } f \text{ - дифференцируема}$$

Ответ: $U(x, y) = f(x^2 + y^2)$, где f - дифференцируема.

53.088(2)

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z$$

Решим, преобразовав $x=u, y=uv$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1, \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

$$0 = \frac{\partial u}{\partial x} \sigma + \frac{\partial \sigma}{\partial x} u \Rightarrow \frac{\partial \sigma}{\partial x} = -\frac{\sigma}{u}$$

$$1 = \frac{\partial u}{\partial y} \sigma + \frac{\partial \sigma}{\partial y} u \Rightarrow \frac{\partial \sigma}{\partial y} = \frac{1}{u}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial \sigma} \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\sigma}{u} \frac{\partial z}{\partial \sigma}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \sigma} \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial \sigma} \cdot \frac{1}{u}$$

Подставляем:

$$u \left(\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\sigma}{u} \frac{\partial z}{\partial \sigma} \right) + \sigma \frac{1}{u} \frac{\partial z}{\partial \sigma} = z$$

$$u \frac{\partial z}{\partial u} = z \Rightarrow z = u f(\sigma), \text{ где } f \text{ - дифференцируема}$$

Ответ: $z = x f\left(\frac{y}{x}\right)$, где f -дифференцируема

53.090

$$(z-x) \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

Преобразовать, приняв $x=x(y, z)$

$$u=y, \sigma=z, x=x(u, \sigma)$$

$$dx = x'_u du + x'_\sigma d\sigma - x'u dy + x' \sigma dz \Rightarrow$$

$$\Rightarrow dz = \frac{1}{x'_\sigma} dx - \frac{x'_u}{x'_\sigma} dy \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{x'_\sigma}, \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x'_u}{x'_\sigma}$$

$$\text{Подставляем: } (\sigma-x) \cdot \frac{1}{x'_\sigma} + u \cdot \frac{x'_u}{x'_\sigma} = 0 \Rightarrow x'_u = \frac{x-\sigma}{u}$$

$$\text{Ответ: } \frac{\partial x}{\partial y} = \frac{x-z}{y}$$

Донатик

§ 4.049

$\omega = u(x,y) \sigma(x,y)$, функции и исо заданы неявно:

$$\begin{cases} u + \sigma^2 = x \\ u^2 - \sigma^3 = y \end{cases}, \quad u(3;3) = 2, \sigma(3;3) = 1$$

Отображение $F: (x,y) \rightarrow (u,\sigma)$

$$F_1(x,y,u,\sigma) = -x + u + \sigma^2$$

$$F_2(x,y,u,\sigma) = -y + u^2 - \sigma^3$$

$$F_1(3;3;2;1) = F_2(3;3;2;1) = 0$$

$$\frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(u, \sigma)} = \begin{vmatrix} 1 & 2\sigma \\ 2u & -3\sigma^2 \end{vmatrix} = -3\sigma^2 - 4u\sigma = -3 - 8 = -11 \neq 0$$

$$F_1, F_2 \in C^2(3,3,2,1)$$

$$\Rightarrow F \Leftrightarrow \begin{cases} u = u(x,y) \\ \sigma = \sigma(x,y) \end{cases}, \text{ где } u, \sigma \in C^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists u'_x, u'_y, u''_{xy}, \sigma'_x, \sigma'_y, \sigma''_{xy}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}: \begin{cases} u'_x + 2\sigma\sigma'_x = 1 \\ 2u u'_x - 3\sigma^2 \sigma'_x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'_x + 2\sigma\sigma'_x = 1 \\ 4u'_x - 3\sigma'_x = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u'_x(3;3) = \frac{3}{11}, \sigma'_x(3;3) = \frac{4}{11}.$$

$$\frac{\partial}{\partial y}: \begin{cases} u'_y + 2\sigma\sigma'_y = 0 \\ 2u u'_y - 3\sigma^2 \sigma'_y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'_y + 2\sigma\sigma'_y = 0 \\ 4u'_y - 3\sigma'_y = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u'_y(3;3) = \frac{2}{11}, \sigma'_y(3;3) = -\frac{1}{11}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} : \begin{cases} \rho U_{xy}'' + 2\sigma_y' \sigma_x' + 2\sigma U_{xy}'' = 0 \\ 2U_y' U_x' + 2U U_{xy}'' - 3 \cdot 2\sigma \sigma_y' \cdot \sigma_x' - 3 \sigma^2 \sigma_{xy}'' = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \rho U_{xy}'' + 2\sigma_{xy}'' = \frac{8}{121} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4U_{xy}'' - 3\sigma_{xy}'' = -\frac{12}{121} - \frac{24}{121} = -\frac{36}{121} \end{cases}$$

$$11U_{xy}'' = \frac{84}{121} - \frac{36}{121} = -\frac{48}{121} \Rightarrow U_{xy}'' = -\frac{48}{1331}$$

$$2\sigma_{xy}'' = \frac{8}{121} + \frac{48}{1331} = \frac{136}{1331} \Rightarrow \sigma_{xy}'' = \frac{68}{1331}$$

$$\frac{\partial^2 w(3;3)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) (3;3) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} \right) (3;3) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial y} \left(\sigma_y U_x' + u \sigma_x' \right) (3;3) = \left(\sigma_y' U_x' + \sigma_y U_{xy}'' + U_y' \sigma_x' + u \sigma_{xy}'' \right) =$$

$$= -\frac{1}{11} \cdot \frac{3}{11} - \frac{48}{1331} + 2 \cdot \frac{68}{1331} + \frac{2}{11} \cdot \frac{4}{11} = \frac{5}{121} + \frac{8}{121} = \frac{13}{121}$$

Ответ: $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}(3;3) = \frac{13}{121}$.

54058(1)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad u = x - at, \quad \sigma = x + at$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial \sigma}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = -a, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial t} = a$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial \sigma}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial u} \right) = \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) \frac{\partial \sigma}{\partial x} =$$

$$= \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial \sigma} + \frac{\partial^2 z}{\partial \sigma^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial \sigma^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial \sigma} + \frac{\partial^2 z}{\partial \sigma^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial t} = -a \frac{\partial z}{\partial u} + a \frac{\partial z}{\partial \sigma}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial z}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial z}{\partial t} \right) \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{\partial z}{\partial t} \right) \frac{\partial \sigma}{\partial t} = \\ &= -a \left(-a \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + a \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial \sigma} \right) + a \left(-a \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial \sigma} + a \frac{\partial^2 z}{\partial \sigma^2} \right) = \\ &= a^2 \left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - 2 \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial \sigma} + \frac{\partial^2 z}{\partial \sigma^2} \right)\end{aligned}$$

Представляем:

$$a^2 \left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - 2 \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial \sigma} + \frac{\partial^2 z}{\partial \sigma^2} \right) = a^2 / \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial \sigma} + \frac{\partial^2 z}{\partial \sigma^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial \sigma} = 0$$

Ответ: $\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial \sigma} = 0$.

III. Экстремумы функций нескольких

переменных

§ 5 № 81(4)

Найти условие экстремума:

$$u = 2x^2 + 12xy + y^2, \quad x^2 + 4y^2 = 25.$$

$$L = \cancel{2x^2 + 12xy + y^2} + \lambda(x^2 + 4y^2 - 25)$$

$$L_x = 4x + 12y + 2\lambda x = 0 \quad (1)$$

$$L_y = 12x + 2y + 8\lambda y = 0 \quad (2)$$

$$x^2 + 4y^2 = 25 \quad (3)$$

$$(1) \Rightarrow y = -\frac{1}{6}(2+2\lambda)x$$

Подставляем в (2):

$$12x - \frac{1}{3}(2+2\lambda)x = \cancel{8\lambda x} \cdot \frac{1}{3}(2+2\lambda)x = 0$$

$x=0$ ($\Rightarrow y=0$) не подходит в уравнении (3)

$$36 - (2+2\lambda) - 4\lambda(2+2\lambda) = 0$$

$$4\lambda^2 + 8\lambda - 34 = 0$$

$$\lambda = \frac{-9 \pm 25}{8} = -\frac{17}{4}; 2$$

1) $y = -\frac{1}{6}(2 - \frac{17}{4})x = \frac{1}{6} \cdot \frac{9}{4}x = \frac{3}{8}x$. Подставляем в (3):

$$x^2 + 4 \cdot \frac{9}{16}x^2 = 25$$

$$\frac{25}{16}x^2 = 25 \Rightarrow x = \pm 4, y = \frac{3}{8} \pm \frac{3}{2}$$

Донатик

2) $y = -\frac{1}{6} \cdot 4x = -\frac{2}{3}x$. Подставляем в (3):

$$x^2 + 4 \cdot \frac{4}{9} x^2 = 25 \Rightarrow x = \pm 3, y = \mp 2$$

$$dl = 4x dx + 12x dy + 12y dx$$

$$dw = (4x + 12y + 2\lambda x) dx + (12x + 2y + 3\lambda y) dy$$

$$(x, y) = (4, \mp 2), \lambda = -\frac{17}{4}$$

$$dl = (16 + 18 - \frac{17}{4} \cdot 2 \cdot 4) dx + (48 + 3 \mp 8 \cdot \frac{17}{4} \cdot \frac{3}{2}) dy =$$

$$\begin{aligned} d^2w &= 4dx^2 + 12dx dy + 2\lambda dx^2 + 12dx dy + 2dy^2 + 2\lambda dy^2 = \\ &= (4+2\lambda)dx^2 + 24dx dy + (2+8\lambda)dy^2 \end{aligned}$$

$$B = \begin{vmatrix} 4+2\lambda & 12 \\ 12 & 2+8\lambda \end{vmatrix}, \Delta_1 = 4+2\lambda, \Delta_2 = 8+4\lambda+32\lambda+16\lambda^2-144 =$$

$$= 16\lambda^2 + 4(4\lambda^2 + 9\lambda - 36)$$

$$\lambda = -\frac{17}{4}: \Delta_1 = 4 - \frac{17}{2} < 0, \Delta_2 = 4 \left(4 \cdot \frac{17^2}{16} - \frac{9 \cdot 17}{4} - 36 \right) =$$

$$= 17(17-9) - 36 \cdot 4 = 4(34-36) = 0$$

$$\lambda = -\frac{17}{4}: d^2w = -\frac{9}{2}dx^2 + 24dx dy - 36dy^2 =$$

$$= -\frac{1}{2}(3dx - 8dy)^2 < 0 \Rightarrow (\pm 4, \pm \frac{3}{2}) - \text{точки максимума}$$

$$\lambda = 2: d^2w = 8dx^2 + 24dx dy + 18dy^2 = 2(2dx + 3dy)^2 > 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow (\pm 3, \mp 2)$ - точки минимума.

$$U(\pm 4, \pm \frac{3}{2}) = \frac{425}{4}, U(\pm 3, \mp 2) = -50$$

Донатик

Ответ: минимум $u(13; 72) = -50$

максимум $u(14; 1\frac{3}{2}) = \frac{425}{4}$.

§ 5.25 (2)

Найти условное экстремум:

$$u = xy^2z^3, \quad x + y + z = 12, \quad x > 0, y > 0, z > 0$$

$$L = xy^2z^3 + \lambda(x + y + z - 12)$$

$$L_x = y^2z^3 + \lambda = 0 \quad (1)$$

$$L_y = 2xy^2z^3 + \lambda = 0 \quad (2)$$

$$L_z = 3xy^2z^2 + \lambda = 0 \quad (3)$$

$u_3 \quad (2) \Rightarrow x = \frac{-\lambda}{2y^2z^3}$. Подставляем в (3):

$$-3 \cdot \frac{\lambda}{2y^2z^3} \cdot y^2z^2 + \lambda = 0$$

$y = \frac{2}{3}z$. Подставляем в (1):

$$\frac{2^2}{3^2}z^5 = -\lambda \Rightarrow z = -\frac{3^{2/5}}{2^{2/5}}\lambda^{1/5}$$

$$y = \frac{2}{3}z = -\frac{2^{3/5}}{3^{3/5}}\lambda^{1/5}$$

$$x = -\frac{\lambda}{2} \cdot \frac{3^{3/5}}{2^{3/5}} \cdot \frac{1}{\lambda^{1/5}} \cdot \frac{2^{6/5}}{3^{6/5}} \cdot \frac{1}{\lambda^{3/5}} = -\frac{1}{2^{2/5} \cdot 3^{3/5}}\lambda^{1/5}$$

Подставляем в условие:

$$-\lambda^{1/5} \left(\frac{1}{2^{2/5} \cdot 3^{3/5}} + \frac{2^{3/5}}{3^{3/5}} + \frac{3^{2/5}}{2^{2/5}} \right) = 12$$

$$-\lambda^{1/5} \cdot \frac{1+2+3}{2^{2/5} \cdot 3^{3/5}} = 12 \Rightarrow \lambda^{1/5} = -2^{4/5} \cdot 3^{3/5}$$

Критическая точка: $x=2, y=4, z=6$.

Логарифм

$$dL = (y^2z^3 + \lambda)dx + (2xyz^3 + \lambda)dy + (3xy^2z^2 + \lambda)dz$$

$$\begin{aligned} d^2L &= (2yz^3dy + 3y^2z^2dz)dx + (2yz^3dx + 2xz^3dy + 6xyz^2dz)dy + \\ &+ (3y^2z^2dx + 6xyz^2dy + 6xy^2zdz)dz = \\ &= 4yz^3dxdy + 6y^2z^2dxdz + 12xyz^2dydz + 2xz^3dy^2 + \\ &+ 6xy^2zdz^2 \end{aligned}$$

$$d^2L(2,4,6) = 2^5 \cdot 3^2 (12dxdy + 12dxdz + 12dydz + 3dy^2 + dz^2)$$

из условия: $dx = -dy - dz$:

$$\begin{aligned} d^2L(2,4,6) &= 2^5 \cdot 3^2 (-9dy^2 - 12dydz - 11dz^2) = \\ &= -2^5 \cdot 3^2 ((3dy + 2dz)^2 + 7dz^2) \end{aligned}$$

$$d^2L(2,4,6) = 0 \text{ при } dz = 3dy + 2dz = 0 \Rightarrow dx = dy = dz = 0.$$

Значит d^2L -отрицательно определена в точке $(2,4,6) \Rightarrow 2,4,6$ является точкой минимума.

Ответ: $(2,4,6)$ - точка минимума.

§5.26 (1)

$$U = xyz, \text{ при } x+y-z=3, x-y-z=8$$

Найти экстремумы

$$L = xyz + \lambda_1(x+y-z-3) + \lambda_2(x-y-z-8)$$

$$\begin{cases} L'_x = yz + \lambda_1 + \lambda_2 = 0 & (1) \\ L'_y = xz + \lambda_1 - \lambda_2 = 0 & (2) \\ L'_z = xy - \lambda_1 - \lambda_2 = 0 & (3) \\ L'_{\lambda_1} = x+y-z-3=0 & (4) \\ L'_{\lambda_2} = x-y-z-8=0 & (5) \end{cases}$$

Возьмем (5) из (4): $2y = -5 \Rightarrow y = -\frac{5}{2}$.

Складываем (1) и (2): $y(x+z) = 0 \Rightarrow x = -z$

Складываем (4) и (5): $2x - 2z = 11 \Rightarrow z = -\frac{11}{4}$,
 $x = \frac{11}{4}$.

Критическая точка: $\left(\frac{11}{4}, -\frac{5}{2}, -\frac{11}{4}\right) = P$

$$\begin{aligned} d^2L = L''_{xx}dx^2 + L''_{yy}dy^2 + L''_{zz}dz^2 + 2L''_{xy}dxdy + \\ 2L''_{xz}dxdz + 2L''_{yz}dydz = 2z^2dxdy + 2ydzd^2 + 2xdydz \end{aligned}$$

Ограничение на $T_p M$, где $M = \begin{cases} x+y-z=3 \\ x-y-z=8 \end{cases}$:

$$\begin{cases} dx+dy-dz=0 \\ dx-dy-dz=0 \end{cases} \Rightarrow dy=0, dx=dz, \text{ тогда}$$

$$d^2L(P)|_{T_p M} = \cancel{2z^2} \cdot \cancel{2y} \cdot \cancel{2x} \cdot 2 \cdot \left(-\frac{5}{2}\right) dx^2 < 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow P$ -точка условного максимума

Ответ: $\left(\frac{11}{4}; -\frac{5}{2}; -\frac{11}{4}\right)$ — точка максимума.

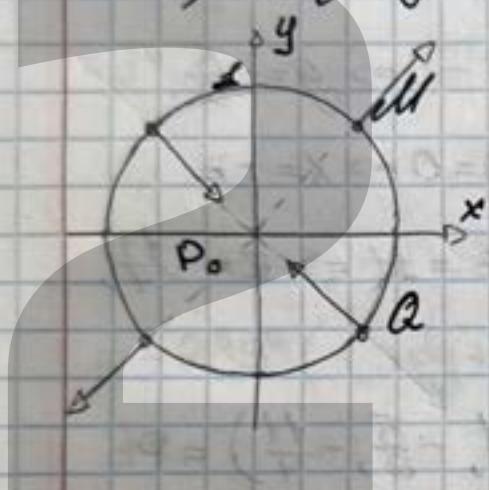
Донатик

§5 №30 (1)

Найти максимум и минимум и на
множестве:

$$U = 3 + 2xy$$

$$\text{a) } M = \{x^2 + y^2 \leq 1\}$$



Пусть $P \in M$, P -точка экстремума

$$dU = 2x dy + 2y dx$$

$$dU = 0 \text{ при } x = y = 0$$

$$d^2U = 4dx dy - \text{неопределённая} \Rightarrow$$

\Rightarrow не является экстремумом

\Rightarrow внутри нет экстремумов

Пусть $Q \in \partial M$, Q -экстремум.

$$L = 3 + 2xy + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$$

$$L_x = 2y + 2\lambda x = 0 \quad (1)$$

$$L_y = 2x + 2\lambda y = 0 \quad (2)$$

$$L_\lambda = x^2 + y^2 - 1 = 0 \quad (3)$$

$$(1) \Rightarrow y = -\lambda x. \text{ Подставляем в (2): } x - \lambda^2 x = 0$$

$x = 0 \Rightarrow y = 0$ - не подходит.

$$\lambda = \pm 1.$$

Донатик

Годстабла 6 (3) находим критические точки: $(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}})$ и $(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \mp \frac{1}{\sqrt{2}})$

$$U(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}})$$

$$\text{grad } U = \begin{vmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} \\ \frac{\partial U}{\partial y} \end{vmatrix}$$

В точках $(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}})$ $\text{grad } U$ направлен

перпендикулярно $\{x^2 + y^2 = 1\}$ изнутри, а

в точках $(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \mp \frac{1}{\sqrt{2}})$ - вовн

$$d^2 L = 2\lambda dx^2 + 4dxdy + 2\lambda dy^2 = 2\lambda(dx+dy)^2$$

$$\text{В } (\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}): \lambda = -1, d^2 L = -2(dx+dy)^2$$

Ограничение на $\Gamma_{\text{рМ}}$: $2xdx + 2ydy = 0 \Rightarrow dx + dy = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow d^2 L < 0 \Rightarrow (\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}})$ являются точками

максимума ~~минимума~~ на $\{x^2 + y^2 = 1\}$, а из направления

$\text{grad } U$ следует, что они являются точками

максимума на $\{x^2 + y^2 \leq 1\}$.

$$U_{\max} = 3 + 2 \cdot \frac{1}{2} = 4$$

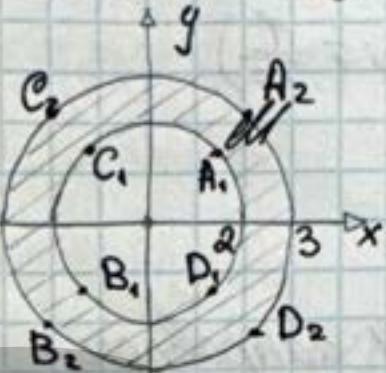
Аналогично точки $(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \mp \frac{1}{\sqrt{2}})$ являются

точками минимума:

$$U_{\min} = 3 - 2 \cdot \frac{1}{2} = 2.$$

Донатик

$$d) \mathcal{U} = \{4 \leq x^2 + y^2 \leq 9\}$$



Аналогично пункту а) вибратор \mathcal{M}° имеет
точки максимума и минимума.

На границе $\partial\mathcal{U}$: $A_1 = (-\sqrt{2}; \sqrt{2})$, $A_2 = (\frac{3}{\sqrt{2}}; \frac{3}{\sqrt{2}})$,
 $B_1 = (-\sqrt{2}; -\sqrt{2})$, $B_2 = (-\frac{3}{\sqrt{2}}, -\frac{3}{\sqrt{2}})$ - точки

условного максимума.

$C_1 = (-\sqrt{2}; \sqrt{2})$, $C_2 = (-\frac{3}{\sqrt{2}}; \frac{3}{\sqrt{2}})$, $D_1 = (\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, $D_2 = (\frac{3}{\sqrt{2}}; -\frac{3}{\sqrt{2}})$ -
точки условного минимума, при этом
градиент направлена так же, но тогда
 A_2 и B_2 являются точками максимума
на границе, но в этих градиентах
вибратор $\mathcal{M}^\circ \Rightarrow$ не являются точками
максимума. Аналогично C_1 и D_1 .

$$U_{\max} = U(A_2) = U(B_2) = 3 + 2 \cdot \frac{9}{2} = 12$$

$$U_{\min} = U(C_2) = U(D_2) = 3 - 2 \cdot \frac{9}{2} = -6$$

Донатик

Ответ: а) $U_{\max} = 4$, $U_{\min} = 2$; б) $U_{\max} = 12$, $U_{\min} = -6$

§ 5.027

Найти условное экстремумы:

1) $U = \sum_{i=1}^n a_i x_i^2$, при $\sum_{i=1}^n x_i = 1$, $a_i > 0$

$$L = \sum_{i=1}^n a_i x_i^2 + \lambda \left(\sum_{i=1}^n x_i - 1 \right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = 2a_i x_i + \lambda = 0 \Rightarrow x_i = -\frac{\lambda}{2a_i}$$

Условие: $\sum_{i=1}^n \left(-\frac{\lambda}{2a_i} \right) = 1 \Rightarrow \lambda = -\frac{2}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}}$

Критическая точка: $x_i = \frac{1}{a_i \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}}$

$$d^2 L = \sum_{i=1}^n 2a_i d x_i^2 - \text{пополнителью определено} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{точка локального минимума. } U = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}}$$

2) $U = \sum_{i=1}^n x_i^2$ при $\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{a_i} = 1$, $a_i > 0$

$$L = \sum_{i=1}^n x_i^2 + \lambda \left(\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{a_i} - 1 \right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = 2x_i + \frac{\lambda}{a_i} = 0 \Rightarrow x_i = -\frac{\lambda}{2a_i}$$

Условие: $\sum_{i=1}^n \left(-\frac{\lambda}{2a_i} \right) = 1 \Rightarrow \lambda = -\frac{2}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i^2}}$

Критическая точка: $x_i = \frac{1}{a_i \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i^2}}$

$$d^2 L = \sum_{i=1}^n 2d x_i^2 - \text{пополнителью определено} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{точка максимума. } U = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i^2}}$$

Донатик

$$3) U = \sum_{i=1}^n x_i^\alpha \text{ при } \sum_{i=1}^n x_i = a, \alpha > 0, a > 0$$

При $\alpha = 1$: $U = \sum_{i=1}^n x_i = a$ (далее $\alpha = 1$ не рассматривается)

$$L = \sum_{i=1}^n x_i^\alpha + \lambda \left(\sum_{i=1}^n x_i - a \right)$$

$$L'_{x_i} = \alpha x_i^{\alpha-1} + \lambda = 0 \Rightarrow x_i = \left(\frac{-\lambda}{\alpha} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}}$$

$$\text{Условие: } n \cdot \left(\frac{-\lambda}{\alpha} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}} = a \Rightarrow x_i = \frac{a}{n}$$

$$d^2 L = \sum_{i=1}^n \alpha(\alpha-1) x_i^{\alpha-2} dx_i^2 = \alpha(\alpha-1) \left(\frac{a}{n} \right)^{\alpha-2} \sum_{i=1}^n dx_i^2$$

$d^2 L$ положительно определено при $\alpha > 1$,

отрицательно определено при $\alpha < 1 \Rightarrow$

\rightarrow минимум при $\alpha > 1$, максимум при $\alpha < 1$.

$$4) U = \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{x_i} \text{ при } \sum_{i=1}^n b_i x_i = 1, a_i > 0, b_i > 0, x_i > 0$$

$$L = \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{x_i} + \lambda \left(\sum_{i=1}^n b_i x_i - 1 \right)$$

$$L'_{x_i} = -\frac{a_i}{x_i^2} + \lambda b_i \Rightarrow x_i^2 = \frac{a_i}{\lambda b_i}$$

$$\text{Условие: } \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{\lambda b_i}} \sqrt{a_i b_i} = 1 \Rightarrow \lambda = \left(\sum_{i=1}^n \sqrt{a_i b_i} \right)^2$$

$$x_i = \frac{\sqrt{a_i}}{\sqrt{b_i} \sqrt{\sum_{j=1}^n \sqrt{a_j b_j}}}$$

$d^2 L = \sum_{i=1}^n \frac{2a_i}{x_i^3} dx_i^2$ - положительно определено (т.к. $x_i > 0$)

\Rightarrow точка минимума.

$$U = \left(\sum_{j=1}^n \sqrt{a_j b_j} \right)^2$$

Донатик

5) $U = \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i}$ при $\sum_{i=1}^n x_i = a$, $\alpha_i > 0$, $a > 0$

$$L = \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i} + \lambda \left(\sum_{i=1}^n x_i - a \right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{\alpha_i}{x_i} \prod_{j=1}^n x_j^{\alpha_j} + \lambda = \frac{\alpha_i U}{x_i} + \lambda = 0 \Rightarrow x_i = -\frac{\alpha_i U}{\lambda}$$

$$\text{Условие: } -\frac{U}{\lambda} \sum_{j=1}^n \alpha_j = a \Rightarrow \lambda = -\frac{U \sum_{j=1}^n \alpha_j}{a}$$

Критическая точка: $x_i = \frac{-\alpha_i U \cdot a}{U \sum_{j=1}^n \alpha_j} = \frac{\alpha_i a}{\sum_{j=1}^n \alpha_j}$

~~Доказательство~~

$$L''_{x_i x_i} = \frac{-\alpha_i}{x_i^2} U + \left(\frac{\alpha_i}{x_i} \right)^2 U = \frac{\alpha_i^2 - \alpha_i}{x_i^2} U = \frac{\alpha_i^2 - \alpha_i}{a^2 \alpha_i^2} \left(\sum_{j=1}^n \alpha_j \right)^2 U$$

$$L''_{x_i x_j} = \frac{\alpha_i}{x_i} \cdot \frac{\alpha_j}{x_j} U = \frac{\alpha_i \alpha_j U}{a^2 \alpha_i \alpha_j} \left(\sum_{j=1}^n \alpha_j \right)^2$$

~~Доказательство~~

Обозначим $B = \frac{U \left(\sum_{j=1}^n \alpha_j \right)^2}{a^2} > 0$, тогда

$$L''_{x_i x_j} = \begin{cases} \left(1 - \frac{1}{\alpha_i}\right) B & \text{при } i=j \\ B & \text{при } i \neq j \end{cases}$$

$$\frac{d^2 L}{B} = \sum_{i=1}^n \frac{L''_{x_i x_i}}{B} dx_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} L''_{x_i x_j} dx_i dx_j =$$

$$= \sum_{i=1}^n dx_i^2 - \sum_{i=1}^n \frac{dx_i^2}{\alpha_i} + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} dx_i dx_j = \left(\sum_{i=1}^n dx_i \right)^2 - \sum_{i=1}^n \frac{dx_i^2}{\alpha_i} =$$

= ~~запись ограничение на РМ~~ = $- \sum_{i=1}^n \frac{dx_i^2}{\alpha_i} \Rightarrow$

$\Rightarrow d^2 L$ отрицательно определено \Rightarrow

\Rightarrow Точка максимума.

Логарифм

$$6) U = \sum_{i=1}^n a_i x_i \text{ при } \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1$$

$$L = \sum_{i=1}^n a_i x_i + \lambda \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - 1 \right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = a_i + 2\lambda x_i = 0$$

Если $\lambda = 0 \Rightarrow a_i = 0$ для всех $i \Rightarrow U = 0$ (такое не рассматривается)

Иначе:

$x_i = -\frac{a_i}{2\lambda}$. Подставляешь в условие:

$$\frac{1}{4\lambda^2} \sum_{j=1}^n a_j^2 = 1 \Rightarrow \lambda = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sum_{j=1}^n a_j^2}, \quad x_i = \mp \frac{a_i}{\sqrt{\sum_{j=1}^n a_j^2}}$$

$$L_{xx_i x_j} = \begin{cases} 2\lambda & \text{при } i=j \\ 0 & \text{при } i \neq j \end{cases} \Rightarrow d^2 L = \sum_{i=1}^n 2 \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\sum_{j=1}^n a_j^2} dx_i^2 = \\ = \pm \sqrt{\sum_{j=1}^n a_j^2} \sum_{i=1}^n dx_i^2$$

$d^2 L$ отрицательно определена \Leftrightarrow при $\lambda < 0$ (минимум) и положительно определена при $\lambda > 0$ (максимум)

$$U = \sum_{i=1}^n a_i \cdot \frac{\mp a_i}{\sqrt{\sum_{j=1}^n a_j^2}} = \mp \sqrt{\sum_{j=1}^n a_j^2}$$

$$\text{Ответ: 1) минимум } x_i = \frac{1}{a_i \sum_{j=1}^n \frac{1}{a_j}} : U = \frac{1}{\sum_{j=1}^n \frac{1}{a_j}}$$

$$2) \text{ максимум } x_i = \frac{1}{a_i \sum_{j=1}^n \frac{1}{a_j^2}} : U = \frac{1}{\sum_{j=1}^n \frac{1}{a_j^2}}$$

Донатик

3) минимум при $d \geq 1$: $x_i = \frac{a}{n}$, $U = \frac{a^d}{n^{d-1}}$

максимум при $d < 1$: $x_i = \frac{a}{n}$, $U = a^d n^{1-d}$

$U = \text{const} = a$ при $d = 1$

4) минимум $x_i = \frac{1}{\sum_{j=1}^n \sqrt{a_j b_j}}$, $\sqrt{\frac{a_i}{b_i}}$: $U = \left(\sum_{j=1}^n \sqrt{a_j b_j} \right)^2$

5) максимум $x_i = \frac{a^d i}{\sum_{j=1}^n d_j}$: $U = \left(\frac{a}{\sum_{j=1}^n d_j} \right)^{\frac{1}{d-1}} \cdot \prod_{i=1}^n d_i^{d_i}$

6) максимум $x_i = \frac{a_i}{\sqrt{\sum_{j=1}^n a_j^2}}$: $U = \sqrt{\sum_{j=1}^n a_j^2}$

минимум $x_i = -\frac{a_i}{\sqrt{\sum_{j=1}^n a_j^2}}$: $U = -\sqrt{\sum_{j=1}^n a_j^2}$

§5.2.36

$$U = \sum_{i,k=1}^n a_{ik} x_i x_k, a_{ik} = a_{ki} \text{ при } \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1.$$

Док-ть, что U_{\max} и U_{\min} равны наибольшему

и наименьшему критериям характеристического

многоглена $A = \|a_{ik}\|$

$$L = \sum_{i,k=1}^n a_{ik} x_i x_k \stackrel{i \neq k}{\leq} \lambda \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - 1 \right)$$

$$L_{x_j}^1 = 2 \sum_{i=1}^n a_{ij} x_i + 2 \sum_{k \neq j} a_{kj} x_k - 2 \lambda x_j = 0$$

В методе Лагранжа получаем систему:

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^n a_{kj} x_k - 2 \lambda x_j = 0 \\ j = 1 \dots n \end{cases}$$

Донатик

Матрица этой системы равна $A - \lambda E$,
 а критическое решение (которое не
 подходит из условия $\sum_{i=1}^n x_i^2 = 1$) существует,
 когда $\det(A - \lambda E) = 0$, то есть λ являются
 собственными значениями матрицы A .

При этом $\forall j: \sum_{k=1}^n a_{kj} x_k = \lambda x_j \Rightarrow$

$$\Rightarrow \mathcal{U} = \sum_{i=1}^n x_i \sum_{k=1}^n a_{ki} x_k = \sum_{i=1}^n x_i \cdot \lambda x_i = \lambda \sum_{i=1}^n x_i^2 = \lambda \Rightarrow$$

\rightarrow в критических точках значение \mathcal{U}
 совпадает с λ .

Таким образом доказано, что если точка P является критической
 и при $\sum_{i=1}^n x_i^2 = 1$, то λ есть корень характеристи-
 ческого многочлена (λ также в обратную
 сторону) и $\mathcal{U}(P) = \lambda \Rightarrow$ максимальное
 и минимальное значение \mathcal{U} совпадают
 с максимальными и минимальными
 корнями характеристического уравнения
 матрицы $\|a_{ik}\|$.

Донатик

IV Кратные интегралы

§8 223

Указать f , непрерывную на измеримом по Жордану X , но не интегрируемую на X .

Достаточное условие непрерывности интегрируемости:

Ограничивающая на замкнутом измеримом множестве функция, у которой множество точек разрыва имеет меру 0 интегрируема на этом множестве.

Выберем множество X незамкнутое, а f неограниченной. Пусть $X = (0; 1] \subset \mathbb{R}$, а $f = \frac{1}{x}$, тогда X -измеримо по Жордану, $f \in Q(X)$

Критерий Коши интегрируемости:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall \tau_1, \tau_2 \quad \forall \theta_{\tau_1}, \theta_{\tau_2}: (|\tau_1| < \delta, |\tau_2| < \delta \Rightarrow \\ \Rightarrow |\theta_{\tau_1} - \theta_{\tau_2}| < \varepsilon)$$

Отрицание:

$$\exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists \tau_1, \tau_2: \exists \theta_{\tau_1}, \theta_{\tau_2}: (|\tau_1|, |\tau_2| < \delta \text{ и } |\theta_{\tau_1} - \theta_{\tau_2}| \geq \varepsilon)$$

Донатик

Рассмотрим (в общем) $\varepsilon = 1$.

Фиксируем произвольный $\delta > 0$.

При $\delta \geq \frac{1}{2}$:

В общем $\gamma_1 = \left\{ [0; \frac{1}{\delta}], [\frac{1}{\delta}; 1] \right\} = \gamma_2$

$\theta_{\gamma_2} = \left\{ \frac{1}{4}; 1 \right\}, \theta_{\gamma_1} = \left\{ \frac{1}{76}; 1 \right\}$

Тогда $|\gamma_1|, |\gamma_2| \leq \frac{1}{\delta} \leq \delta$

При этом $|\theta_{\gamma_1} - \theta_{\gamma_2}| = |(4 \cdot \frac{1}{\delta} + 1 \cdot \frac{1}{2}) - (16 \cdot \frac{1}{\delta} + 1 \cdot \frac{1}{2})| =$
 $= \delta > 1 - \varepsilon$

При $\delta < \frac{1}{2}$:

Разобьём $[0, 1]$ на отрезки $[0; \delta], \dots, [\theta(k-1)\delta, \theta k\delta],$
 $[\theta k\delta; 1]$, при этом $k \in \mathbb{Z}$ -такое что $(k+1)\delta \geq 1$.

Точки ξ_{1i}, ξ_{2i} при $i \geq 1$ в общем
произвольно одинаково на соответствующих
отрезках.

$$\xi_{11} = \delta \quad \xi_{21} = \delta^2$$

Тогда $|\theta_{\gamma_1}|, |\gamma_2| \leq \delta$, при этом

$$|\theta_{\gamma_1} - \theta_{\gamma_2}| = \delta \left| \frac{1}{\delta} - \frac{1}{\delta^2} \right| = \frac{1}{\delta} - 1 > 1 - \varepsilon$$

Таким образом, f -интегрируема на X
(по критерию Коши)

Донатик

§ 8.033

Указате X : $f(X) > 0$ и f , определённую и неограниченную на X , но интегрируемую на X .

Пусть $X = [-1; 0] \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{n} \right\} \right)$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -1 \leq x \leq 0 \\ n, & x = \frac{1}{n} \end{cases}$$

Тогда X -измеримо (т.к. $[-1; 0]$ -измеримо,

$\mu([-1; 0]) = 1$, $\bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{n} \right\}$ -измеримо, $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{n} \right\}) = 0$),

$$\mu X = 1$$

f -неограничена на X .

Докажем интегрируемость по определению:

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall \tau: |\tau| < \delta \exists \theta_{\tau}: |b_{\tau} - a| < \epsilon$$

Фиксируем произвольный $\epsilon > 0$

Выберем $\delta = 4$ (в этом примере $b_{\tau} = 0$ всегда)

Фиксируем произвольное разбиение τ множества X .

Пусть τ_1 - множество всех множеств разбиения τ , которые целиком состоят

из точек $x > 0$, τ_2 - все остальные.

Выберем θ_{τ} : Выбор ξ на множествах из

Лонглик на множествах из τ_2 будем $\xi = f(\xi) = 0$

Тогда $\delta_Y = \sum_{X_i \in T_1} f(z_i) \mu X_i + \sum_{X_i \in T_2} f(z_i) \mu X_i = 0 < \varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow f$ -интегрируема на X и $\int_X f(x) dx = 0$.

§ 8.3.4

Указать исп-ва X_1 и X_2 : $\mu X_1, \mu X_2 > 0$, $X_1 \cap X_2 = \emptyset$ и

f , интегрируемую на X_1 и X_2 , но неинтегрируемую
на $X = X_1 \cup X_2$.

Рассмотрим свойство кратного интеграла:

X_1, X_2 -измеримые, $\mu(X_1 \cap X_2) = 0$, тогда для
интегрируемости f по $X = X_1 \cup X_2$ необходимо,

а при ограниченности f достаточно, чтобы
 f была интегрируема на X_1 и на X_2 .

Чтобы удовлетворить условию будем искать
неограниченную f .

Пусть $X_1 = [-1; 0]$, $X_2 = (0; 1]$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in X_1 \\ \frac{1}{6x}, & x \in X_2. \end{cases}$$

1) Докажем интегрируемость на X_2

Задача 36 (1, 2)

1) Указать измеримое X и f , такое что

$|f|$ интегрируема на X , а f - неинтегрируема на X .
Пусть $X = [0; 1]$, $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \text{- иррациональное} \\ 1, & \text{если } x \text{- рациональное} \end{cases}$

$|f(x)| = 1$ - интегрируема

Рассмотрим некоторое разбиение γ множества X .

В любом измеримом множестве есть как рациональные, так и иррациональные числа, тогда

$$\sum_{i=1}^N \omega(f, X_i) \mu X_i = \sum_{i=1}^N 2 \cdot \mu X_i = 2 \rightarrow 0 \text{ при } |\gamma| \rightarrow 0 \Rightarrow$$

\Rightarrow функция не является интегрируемой по критерию Стадору.

2) Указать $X: \mu X > 0$ и f неограниченную и

интегрируемую на X , такую что $|f|$

интегрируема на X и $\left| \int_X f(x) dx \right| \leq \int_X |f(x)| dx$

В задаче §8.033 приведён пример функции

неограниченной и интегрируемой на X :

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-1; 0] \\ \frac{1}{n}, & x = \frac{1}{n} \end{cases}, \quad X = [-1; 0] \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{n} \right\} \right), \quad \int_X f(x) dx = 0$$

$$f(x) \geq 0 \Rightarrow |f(x)| = f(x) = \int_X |f(x)| dx = 0 \text{ (подходит)}$$

16

$f = f(x, y)$ - определена на $P = [a; b] \times [c; d]$

a) Верно ли, что если $f(x, y)$ интегрируема на $[c; d]$ (y - переменная, x -фиксирован) и $I(x) = \int_c^d f(x, y) dy$ - интегрируема на $[a; b]$, то f интегрируема на P ?

Рассмотрим $f(x, y) = \frac{x-y}{(x+y)^3}$, $[a; b] = [c; d] = [0; 1]$

(Допределаем b $xy=0$ $f(x, y)=0$)

$$I(x) = \int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3} dy = \left\{ \begin{array}{l} x+y=t, \\ dy=dt \end{array} \right\} = \int_x^{x+1} \frac{2x-t}{t^3} dt =$$

$$= 2x \left[\frac{-1}{t^2} + \frac{1}{t} \right] \Big|_{x \rightarrow x+1} = \frac{1}{x+1} - \frac{x}{(x+1)^2} \Big|_{y=0} = \frac{1}{(x+1)^2}$$

f - интегрируема на $[0; 1]$ как функция y ,
 I - интегрируема на $[0; 1]$

Если же взять повторный интеграл в другом порядке, то $I_1(y) = \frac{-1}{(1+y)^2}$

$$\int_0^1 dx \int_0^1 f(x, y) dy = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x)^2}$$

$$\int_0^1 dy \int_0^1 f(x, y) dx = - \int_0^1 \frac{dy}{(1+y)^2}$$

\Rightarrow повторное интеграл не равен \Rightarrow

$\Rightarrow f$ не интегрируема на P

Логика

?) Верно ли, что если f интегрируема на P ,
то функция $f(x,y)$ интегрируема на $[c;d]$
как функция одной переменной y при всех $x \in [a;b]$?

Рассмотрим $f(x,y) = \frac{1}{y}$, $[a; b] = \{0\}$, $[c; d] = [0; 1]$

Тогда двойной интеграл существует и
равен 0, так как при любом разбиении

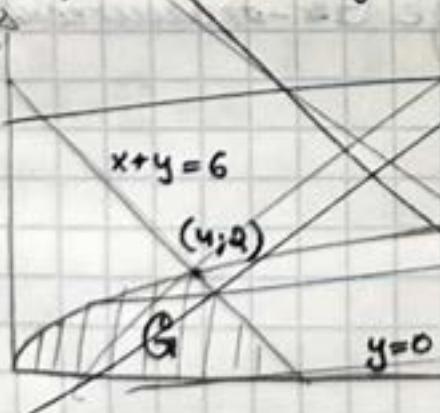
$$\tau \text{ и выборе точек } \xi_i : \Delta \tau = \sum_{i=1}^N f(\xi_i) \mu x_i = \\ = \sum_{i=1}^N f(\xi_i) \cdot 0 = 0$$

При этом $\int_0^1 \frac{dy}{y}$ - расходится \Rightarrow не может
быть интегрируемой
богать сходящимся в силу кратного
интеграла Римана

Ответ: Неверно в обоих пунктах.

Задача 3

Границы $y = 0$, $y = \sqrt{x}$, $x + y = 6$

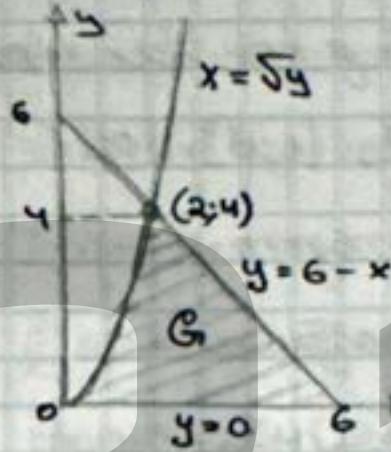


$$\iint_G f(x,y) = \int_0^2 \int_0^{\sqrt{x}}$$

Донатик

§ 8 № 80(3)

График ограничен $y=0$, $x=\sqrt{y}$, $x+y=6$



$$\iint_G f(x, y) dx dy = \int_0^6 dy \int_{\sqrt{y}}^{6-y} f(x, y) dx = \int_0^6 dx \int_0^{x^2} f(x, y) dy,$$

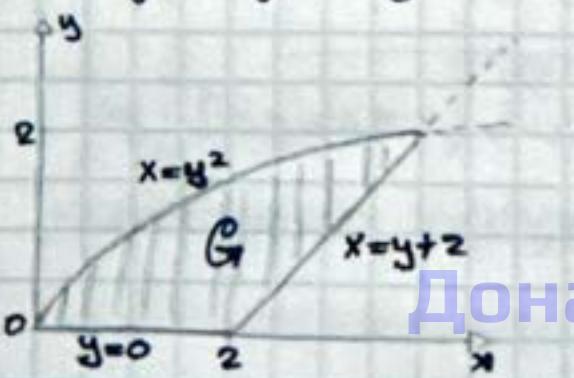
где $\xi(x) = \begin{cases} x^2 & \text{при } 0 \leq x \leq 2 \\ 6-x & \text{при } 2 < x \leq 6 \end{cases}$

§ 8 № 80(4)

Записать повторной интеграл в виде двойного
и нарисовать для него интегрирования.

$$\int_0^2 dy \int_{y^2}^{y+2} f(x, y) dx = \iint_G f(x, y) dx dy, \text{ где } G - \text{ограничено}$$

$$x = y^2, x = y + 2 \text{ и } y = 0$$



Донатик

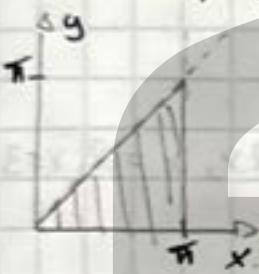
§8.285(2)

Вычислить, поменяв порядок интегрирования.

$$\int_0^{\pi} dy \int_0^y \frac{\sin x}{x} dx$$

$$f(x,y) = \frac{\sin x}{x} - \text{ограничена}$$

множество, по которому происходит интегрирование: G :



Если допределить $f(x,y) = 0$ при $x=0$,

то \mathcal{B} -коштакт и \mathcal{B} -измеримо,

а множество тоже разрыва:

$\{0\} \times [0; \pi] \cap G = \{0\}$ - имеет меру 0,

тогда $\iint_G f(x,y) dxdy$ существует и равен повторяши.

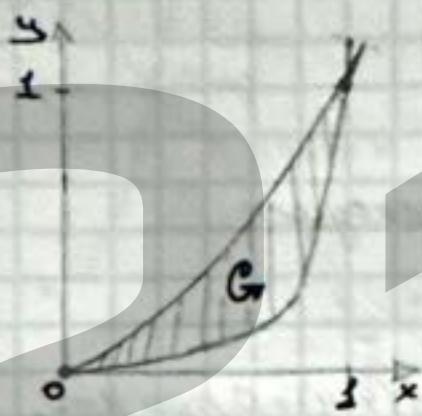
$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} dy \int_0^y \frac{\sin x}{x} dx &= \int_0^{\pi} dx \int_0^x \frac{\sin x}{x} dy = \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} (x-0) dx = \int_0^{\pi} \sin x dx = \\ &= -\cos x \Big|_0^{\pi} = 2. \end{aligned}$$

Донатик

Задача 6

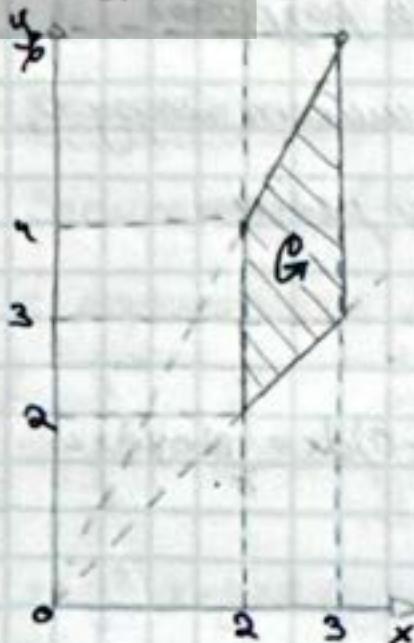
Во всех случаях:

a) $\iint_G \frac{y}{x^2} dx dy$, $G = \{0 < x, x^3 \leq y \leq x^2\}$



$$\begin{aligned}\iint_G \frac{y}{x^2} dx dy &= \int_0^1 dx \int_{x^3}^{x^2} \frac{y}{x^2} dy = - \int_0^1 \frac{x^6 - x^4}{2x^2} dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 (x^4 - x^2) dx = \left. \frac{1}{2} \left(\frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3} \right) \right|_0^1 = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{-2}{15} = +\frac{1}{15}\end{aligned}$$

b) $\iint_G (x+2y) dx dy$, G - ограничено $y=x, y=2x, x=2, x=3$



$$\begin{aligned}\iint_G (x+2y) dx dy &= \int_2^3 dx \int_x^{2x} (x+2y) dy = \\ &= \int_2^3 dx (xy + y^2) \Big|_{y=x}^{y=2x} = \int_2^3 (x \cdot 2x + 4x^2 - x^2 - x^2) dx = \\ &= \int_2^3 4x^2 dx = \left. \frac{4}{3} x^3 \right|_2^3 = \frac{4 \cdot 27}{3} - \frac{4 \cdot 8}{3} = \\ &= \frac{4 \cdot 19}{3} = \frac{76}{3}\end{aligned}$$

Ответ: а) $\frac{1}{15}$; б) $\frac{76}{3}$.

§ 8 № 133 (1)

Заменить порядок интегрирования на (z, y, x) .

$$I = \int_{-a}^a dx \int_{-\sqrt{a^2 - x^2}}^{\sqrt{a^2 - x^2}} dy \int_0^h f(x, y, z) dz$$

Фиксируем $x = x_0 \in [-a; a]$, тогда y шедется

от $-\sqrt{a^2 - x_0^2}$ до $\sqrt{a^2 - x_0^2}$



Тогда при фиксированием y :

x шедется от $-\sqrt{a^2 - y^2}$ до $\sqrt{a^2 - y^2}$

Фиксируем $y = y_0 \in [-a; a]$ (т.к. $\sqrt{a^2 - y^2} \in [0; a]$),

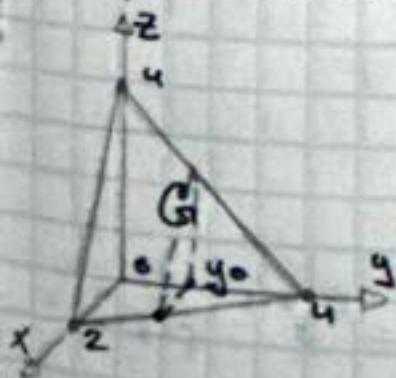
тогда z шедется от 0 до h и $G_{y_0} = [-a; a] \times [0; h]$,

\Rightarrow при фиксированием z : y шедется от -0 до a .

Ответ: $I = \int_0^h dz \int_{-a}^a dy \int_{-\sqrt{a^2 - y^2}}^{\sqrt{a^2 - y^2}} f(x, y, z) dx$

§ 8 № 139 (1)

Вычислить $\iiint_G y dx dy dz$, если G -пирамида, ограниченная $x=0, y=0, z=0$ и $2x+y+z=4$.



Фиксируем $y = y_0 \in [0; 4]$, тогда

x шедется от 0 до $-\frac{1}{2}y_0 + 2$.

Фиксируем $x = x_0 \in [0; -\frac{1}{2}y_0 + 2]$.

Донатик

Тогда z изменяется от 0 до $4-y-2x$

\hat{z}

$$\iiint_G y dx dy dz = \int_0^4 \int_0^{2-\frac{1}{2}y} \int_0^{4-y-2x} y dz dx dy =$$

$$= \int_0^4 y dy \int_0^{2-\frac{1}{2}y} dx (4-y-2x) = \int_0^4 (4(2-\frac{1}{2}y) - y(2-\frac{1}{2}y) - (2-\frac{1}{2}y)^2) y dy = \int_0^4 (8-2y^2 - 2y + \frac{1}{2}y^2 - 4+2y - \frac{1}{4}y^2) y dy =$$

$$= \int_0^4 (4y - 2y^2 + \frac{1}{4}y^3) dy = 2y^2 - \frac{2}{3}y^3 + \frac{1}{16}y^4 \Big|_0^4 =$$

$$= 32 - \frac{8}{3} \cdot 64 + 16 = \frac{16}{3}$$

Ответ: $\frac{16}{3}$

§ 8.0175 (3)

Вычислить интеграл по $Q_n = [0; a]^n$, $n \geq 2$:

$$\int_{Q_n} \sum_{k=1}^n x_k^p dx \quad p > 0, p \neq 0$$

$$\int_{Q_n} \sum_{k=1}^n x_k^p dx = \sum_{k=1}^n \int_{Q_n} x_k^p dx,$$

$$\int_{Q_n} x_k^p dx = \underbrace{\int_0^a dx_1 \cdots \int_0^a dx_n}_{\text{дез } \int dx_k} \int_0^a x_k^p dx_k =$$

$$= \int_0^a x_k^p dx_k \cdot \int_0^a dx_1 \cdots \int_0^a dx_{n-1} \cdot a = \dots = \int_0^a x_k^p dx_k = a^{n-1} \cdot \frac{x_k^{p+1}}{p+1} \Big|_0^a$$

Донатик

$$= a^{n-1} \cdot \frac{a^{p+1}}{p+1} = \frac{a^{n+p}}{p+1}$$

$$\text{Тогда } \int_{Q_n} \sum_{k=1}^n x_k^p dx = \sum_{k=1}^n \frac{a^{n+p}}{p+1} = \frac{n a^{n+p}}{p+1}$$

Ответ: $\frac{n a^{n+p}}{p+1}$

Задача 1

Возчислить $\int_{\Pi} dx$, где Π -пирамида: $\Pi = \{0 \leq x_n \leq \dots \leq x_1 \leq a\}$

x_1 меняется от 0 до a . Фиксируем $x_1 = x_1^o$,

тогда x_2 меняется от 0 до x_2, \dots

Фиксируем $x_k = x_k^o$, тогда x_{k+1} меняется от 0 до x_k^o .

$$\begin{aligned} \int_{\Pi} dx &= \int_0^a dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \dots \int_0^{x_{n-1}} dx_n = \int_0^a dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \dots \int_0^{x_{n-2}} dx_{n-1} = \\ &= \int_0^a dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \dots \int_0^{x_{n-3}} \frac{x_{n-2}}{2} dx_{n-2} = \int_0^a dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \dots \int_0^{x_{n-4}} \frac{x_{n-3}}{2 \cdot 3} dx_{n-3} = \\ &= \dots = \frac{x_1^n}{n!} \Big|_0^a = \frac{a^n}{n!} \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{a^n}{n!}$

Донатик

§ 30 № 106 (2)

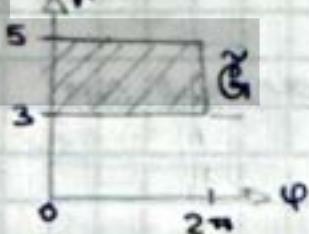
Вычислить, переходя к极坐标系 координатам:

$$\iint_G \frac{dx dy}{x^2 + y^2 - 1}, \text{ где } G = \{ 9 \leq x^2 + y^2 \leq 25 \}$$

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases} \quad \frac{D(x, y)}{D(r, \varphi)} = r$$

Замена переменных:

$$\iint_G \frac{dx dy}{x^2 + y^2 - 1} = \iint_{\tilde{G}} \frac{r dr d\varphi}{r^2 - 1}, \text{ где } \tilde{G} = \{ 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 3 \leq r \leq 5 \}$$



Перейдём к повторному интегралу:

$$\begin{aligned} \iint_{\tilde{G}} \frac{r dr d\varphi}{r^2 - 1} &= \int_0^5 dr \int_0^{2\pi} \frac{r^2 d\varphi}{r^2 - 1} = 2\pi \int_3^5 \frac{r dr}{r^2 - 1} = \pi \int_3^5 \frac{dr}{r^2 - 1} = \\ &= \pi \ln|r^2 - 1| \Big|_3^5 = \pi \ln \frac{24}{8} = \pi \ln 3. \end{aligned}$$

Ответ: $\pi \ln 3$

Донатик

§ 8 № 107(1)

Вычислить, переходя к поларным координатам

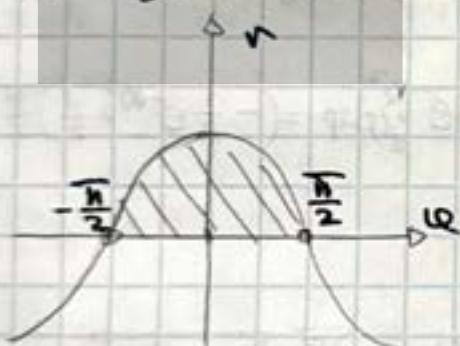
$$\iint_G \frac{y^2}{x^2+y^2} dx dy, \quad G = \{x^2+y^2 \leq ax\}, \quad a > 0$$

$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases}$ $\frac{D(x,y)}{D(r,\varphi)} = r$

Замена переменных:

$$\iint_G \frac{y^2}{x^2+y^2} dx dy = \iint_G \frac{r^2 \sin^2 \varphi}{r^2} \cdot r dr d\varphi = \iint_G \sin^2 \varphi r dr d\varphi$$

$$G = \{r^2 \leq ar \cos \varphi\} = \{r \leq a \cos \varphi\}$$



Т.к. $r \geq 0$, то имеет смысл

только $\varphi \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$

Перейдём к повторяющемуся интегралу:

$$\begin{aligned} \iint_G r \sin^2 \varphi r dr d\varphi &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 \varphi d\varphi \int_0^{a \cos \varphi} r dr = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 \varphi \cdot \frac{a^2 \cos^2 \varphi}{2} d\varphi = \\ &= \frac{a^2}{8} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 2\varphi d\varphi = \frac{a^2}{8} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1 - \cos 4\varphi}{2} d\varphi = \\ &= \frac{a^2}{16} \left(\varphi - \frac{1}{4} \sin 4\varphi \right) \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{a^2}{16} \cdot \pi = \frac{\pi a^2}{16} \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{\pi a^2}{16}$

Донатик

§8.0110

1) Вычислить $\iint_G e^{-(x^2+y^2)} dx dy$, $G = \{x^2+y^2 \leq R^2, x \geq 0, y \geq 0\}$

Перейдём к полярным координатам:

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases}$$

$$\frac{D(x,y)}{D(r,\varphi)} = r$$

$$\iint_G e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \iint_{\tilde{G}} e^{-r^2} r dr d\varphi, \quad \tilde{G} = \{r \leq R, \sin \varphi \geq 0, \cos \varphi \geq 0\} =$$

$$= \{r \leq R, \varphi \in [0; \pi], \varphi \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]\} = \{r \leq R, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}\}$$

Перейдём к повторяющему интегралу:

$$\iint_G e^{-r^2} r dr d\varphi = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^R r e^{-r^2} dr = \int_0^{\pi/2} -\frac{1}{2} e^{-\frac{r^2}{2}} d\varphi = \left(-\frac{1}{2} e^{-\frac{R^2}{2}}, \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{2} =$$

$$= \frac{\pi}{4} (1 - e^{-R^2})$$

2) Док-ть: $\frac{\sqrt{\pi}}{2} \{1 - e^{-R^2}\} < \int_0^a e^{-x^2} dx < \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sqrt{1 - e^{-2a^2}}$

Пусть $I = \int_0^a e^{-x^2} dx = \int_0^a e^{-y^2} dy$

Тогда $I^2 > \int_0^a e^{-x^2} dx \cdot \int_0^a e^{-y^2} dy = \int_0^a e^{-y^2} dy \int_0^a e^{-(x^2+y^2)} dx =$

$$= \iint_G e^{-(x^2+y^2)} dx dy, \text{ где } G = [0;a] \times [0;a]$$

~~$G = \{(x,y) | 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq a\} \subset \{x^2+y^2 \leq a^2, x \geq 0, y \geq 0\} \subset [0;2a]$~~

$\{x^2+y^2 \leq a^2, x \geq 0, y \geq 0\} \subset ([0;a] \times [0;a]) \subset \{x^2+y^2 \leq 2a^2, x \geq 0, y \geq 0\},$

Доказано

, значение $f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$ положительно во

всех точках рассматриваемых исключением -

\Rightarrow из 1-го пункта и пользуясь свойством:

$$f \geq 0 \text{ на } X \text{ и } X_1 \subset X \Rightarrow \int_{X_1} f(x) dx \leq \int_X f(x) dx$$

$$\frac{\pi}{4} (1 - e^{-a^2}) < I^2 < \frac{\pi}{4} (1 - e^{-2a^2}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sqrt{1 - e^{-a^2}} < I < \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sqrt{1 - e^{-2a^2}}$$

3) Вычислить $I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$

Рассмотрим $I(a) = \int_0^a e^{-x^2} dx$.

Как было показано в пункте 2:

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} \sqrt{1 - e^{-a^2}} < I(a) < \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sqrt{1 - e^{-2a^2}},$$

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sqrt{1 - e^{-a^2}} \leq \lim_{a \rightarrow +\infty} I(a) \leq \lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sqrt{1 - e^{-2a^2}},$$

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} \leq I \leq \frac{\sqrt{\pi}}{2} \Rightarrow \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

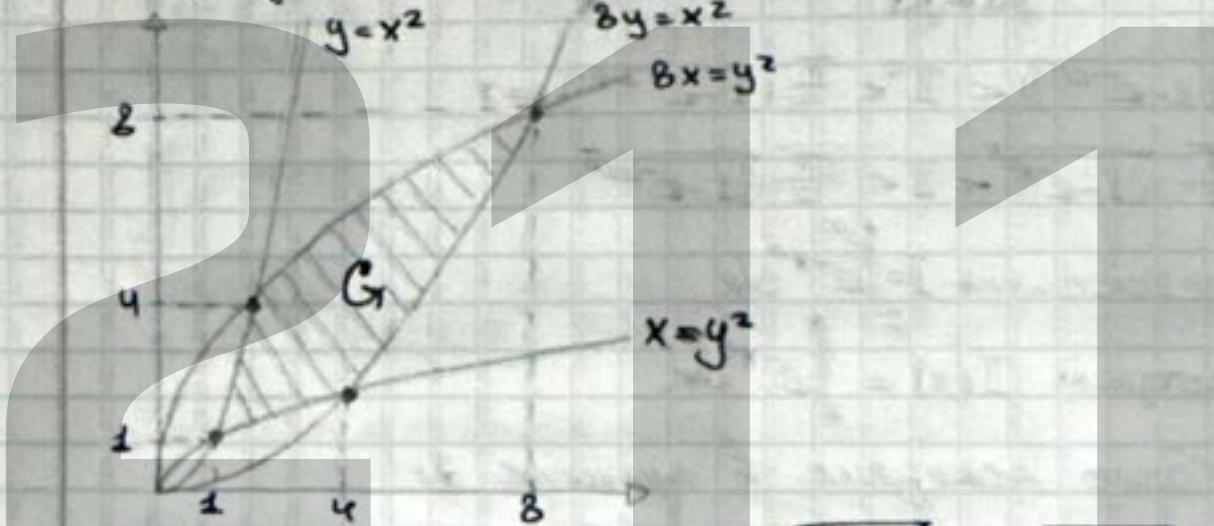
Ответ: 1) $\frac{\pi}{4}(1 - e^{-R^2})$; 3) $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

§ 8 № 24(4)

Вычислить $\iint_G \frac{x}{y} dx dy$, где ограниченное параболами

$$y = x^2, \quad 8y = x^2, \quad x = y^2, \quad 8x = y^2$$

Нарисуем множество G :



Выполним замену $x = \sqrt{u}\sigma$, $y = \sqrt{u}\sigma^2$,

тогда $y = x^2$ переходит в $u = 1$, $8y = x^2$ в $u = 8$,

$$x = y^2 \text{ в } \sigma = 1, \quad 8x = y^2 \text{ в } \sigma = 8$$

$$\text{Тогда } G = [1; 8] \times [1; 8]$$

$$\frac{\partial(x, u)}{\partial(u, \sigma)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial \sigma} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial \sigma} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} \sqrt{\frac{\sigma}{u}} & \frac{1}{3} \sqrt{\frac{u^2}{\sigma^2}} \\ \frac{1}{3} \sqrt{\frac{\sigma^2}{u^2}} & \frac{2}{3} \sqrt{\frac{u}{\sigma}} \end{vmatrix} = \frac{4}{9} - \frac{1}{9} = \frac{1}{3}.$$

$$\iint_G \frac{x}{y} dx dy = \iint_G \sqrt{\frac{u}{\sigma}} \cdot \frac{1}{3} dud\sigma = \frac{1}{3} \int_1^8 \frac{du}{\sigma^{1/3}} \int_1^8 u^{1/3} du =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} (\sigma^{2/3} \Big|_1^8) \cdot \frac{8}{3} (\sigma^{4/3} \Big|_1^8) = \frac{3}{8} \cdot (4-1)(16-1) = \frac{135}{8}$$

Ответ, $\frac{135}{8}$

Донатик

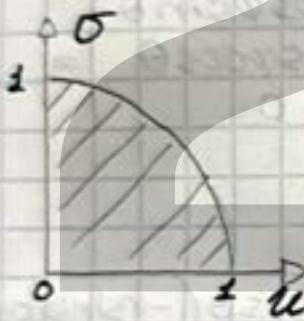
§ 8 № 125(4)

Вычислить $\iint_G x \, dx \, dy$, $G = \{x > 0, y > 0, (\frac{x}{a})^{2/3} + (\frac{y}{b})^{2/3} \leq 1\}$

Введём замену $x = a u^3$, $y = b v^3$.

$$\left| \frac{D(x,y)}{D(u,v)} \right| = \left| \begin{array}{cc} 3au^2 & 0 \\ 0 & 3bv^2 \end{array} \right| = 9abu^2v^2$$

$$G' = \{u > 0, v > 0, u^2 + v^2 \leq 1\}$$



При фиксированном $v = v_0$:

u меняется от 0 до $\sqrt{1 - v_0^2}$

$$\begin{aligned} \iint_G x \, dx \, dy &= \int_0^1 dv \int_0^{\sqrt{1-v^2}} au^3 \cdot 9abu^2v^2 du dv = \\ &= 9a^2b \int_0^1 v^2 dv \int_0^{\sqrt{1-v^2}} u^5 du = 9a^2b \int_0^1 v^2 \cdot \frac{(1-v^2)^3}{6} dv = \\ &= \frac{3}{2}a^2b \int_0^1 (v^2 - 3v^4 + 3v^6 - v^8) dv = \frac{3}{2}a^2b \left(\frac{1}{3} - \frac{3}{5} + \frac{3}{7} - \frac{1}{9}\right) = \\ &= \frac{8a^2b}{105} \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{8a^2b}{105}$

§8 №144 (3)

Возместить, перейдя к сферическим координатам:

$$\iiint_G (x^2 + y^2 - z^2) dx dy dz, \quad G = \{1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}$$

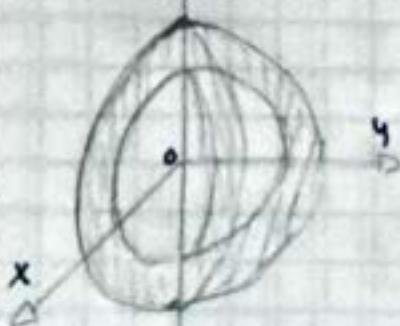
$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \cos \theta \\ y = r \cos \varphi \sin \theta \\ z = r \sin \varphi \end{cases}$$

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \varphi, \theta)} = \begin{vmatrix} \cos \varphi \cos \theta & -r \sin \varphi \cos \theta & -r \cos \varphi \sin \theta \\ \cos \varphi \sin \theta & -r \sin \varphi \sin \theta & r \cos \varphi \cos \theta \\ \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{aligned} &= \cos \varphi \cos \theta \left(-r^2 \cos^2 \varphi \cos \theta \right) + r \sin \varphi \cos \theta \left(-r \sin \varphi \cos \theta \right) \\ &- r \cos \varphi \sin \theta \left(r \cos^2 \varphi \sin \theta + r \sin^2 \varphi \sin \theta \right) = \\ &= -r^2 \cos^3 \varphi \cos^2 \theta - r^2 \sin^2 \varphi \cos \varphi \cos^2 \theta - r^2 \cos \varphi \sin^2 \theta = \\ &= -r^2 \cos \varphi \cos^2 \theta - r^2 \cos \varphi \sin^2 \theta = -r^2 \cos \varphi \end{aligned}$$

Г - четверть полой сферы

$$\tilde{G} = \{1 \leq r \leq 2, \varphi \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}], \theta \in [0; \frac{\pi}{2}]\}$$



$$\iiint_G (x^2 + y^2 - z^2) dx dy dz = \iiint_G (r^2 \cos^2 \varphi - r^2 \sin^2 \varphi) dr d\varphi d\theta =$$

$$= \int_1^2 dr \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\pi/2} r^2 \cos 2\varphi d\theta = \int_1^2 dr \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\pi}{2} r^2 \cos 2\varphi d\varphi =$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_1^2 r^2 dr \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin 2\varphi d\varphi$$

$$= \iiint_G r^2 (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) \cdot r^2 \cos \varphi dr d\varphi d\theta =$$

$$= \int_1^2 dr \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\pi/2} r^4 (2\cos^2 \varphi - 1) \cos \varphi d\theta =$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_1^2 r^4 dr \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 - 2\sin^2 \varphi) d\sin \varphi = \frac{\pi}{2} \int_1^2 r^4 dr \cdot \left(t - 2 \cdot \frac{1}{3} t^3 \right) \Big|_{-1}^1 =$$

$$= \frac{\pi}{2} \left(\frac{r^5}{5} \right) \Big|_1^2 \cdot \left(1 - \frac{2}{3} + 1 - \frac{2}{3} \right) = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{32 - 1}{5} = \frac{31\pi}{15}$$

Ответ: $\frac{31\pi}{15}$

Донатик

§ 8.0145 (B)

Свести кнтеграл к однократному:

$$\iiint_G f\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) dx dy dz, G = \{z^2 \leq x^2 + y^2, x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$$

Перейдём к полярным координатам:

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \cos \theta \\ y = r \cos \varphi \sin \theta \\ z = r \sin \varphi \end{cases}, r \geq 0, \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right], \theta \in \boxed{-\pi; \pi}$$

$$G = \left\{ r^2 \sin^2 \varphi \leq r^2 \cos^2 \varphi \cos^2 \theta + r^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \theta, r \leq R \right\} =$$

$$= \left\{ |\sin \varphi| \leq |\cos \varphi|, 0 \leq r \leq R \right\} = \left\{ \varphi \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right], \theta \in [-\pi; \pi], r \in [0; R] \right\}$$

$$\left| \frac{D(x, y, z)}{D(r, \varphi, \theta)} \right| = r^2 \cos \varphi$$

$$\iiint_G f\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) dx dy dz = \iiint_G f(\operatorname{tg} \varphi) \cdot r^2 \cos \varphi dr d\varphi d\theta =$$

$$= \int_0^R r^2 dr \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_{-\pi/4}^{\pi/4} f(\operatorname{tg} \varphi) \cos \varphi d\varphi \int_0^R r^2 dr \int_{-\pi}^{\pi} d\theta =$$

$$= 2\pi \cdot \frac{R^3}{3} \cdot \int_{-\pi/4}^{\pi/4} f(\operatorname{tg} \varphi) \cos \varphi d\varphi$$

Ответ: $\frac{2\pi R^3}{3} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} f(\operatorname{tg} \varphi) \cos \varphi d\varphi.$

Донатик

§ 8.0146 (2)

Вычислить, переходя к цилиндрическим координатам:

$$\iiint_G (x+y+z) dx dy dz, \text{ где ограничено } x^2+y^2=1, z=0$$

G

$$x+y+z=2$$

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \\ z = t \end{cases}$$

$$\frac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,t)} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$$

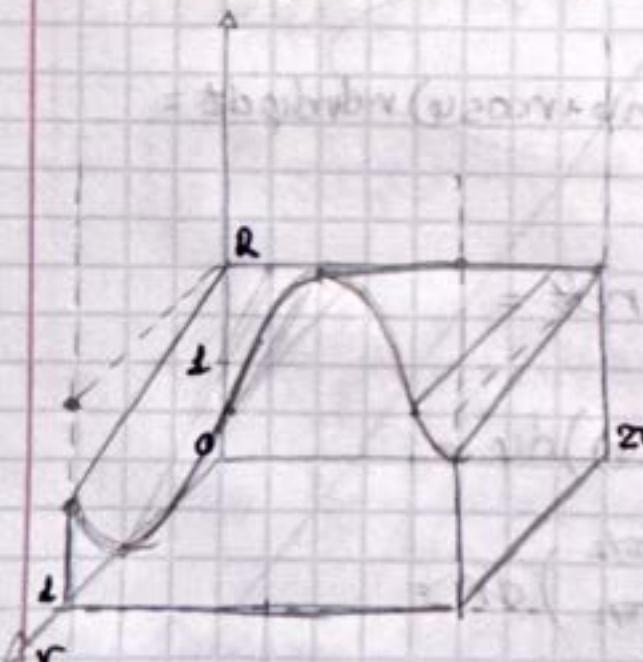
Где ограничено $r=1$, $t=0$ и $t+r \cos \varphi + r \sin \varphi = 2$

$$t=2-\sqrt{2}r \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right)$$

Фиксируем некоторый

$r \in [0;1]$: φ изменяется от 0 до 2π .

Фиксируем некоторый $r \in [0;2]$:
 t изменяется от 0 до $2-\sqrt{2}r \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right)$



Донатик

$$\begin{aligned}
 & \iiint_{\mathbb{G}} (x+y+z) dx dy dz = \iiint_{\tilde{\mathbb{G}}} (r \cos \varphi + r \sin \varphi + t) r dr d\varphi dt = \\
 & = \int_0^1 dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2-\sqrt{2}r \sin(\varphi + \frac{\pi}{4})} (r \cos \varphi + r \sin \varphi + t) dt = \\
 & = \int_0^1 dr \int_0^{2\pi} d\varphi \left(\sin \sin(\varphi + \frac{\pi}{4}) (2 - \sqrt{2}r \sin(\varphi + \frac{\pi}{4})) + \frac{1}{2} (2 - \sqrt{2}r \sin(\varphi + \frac{\pi}{4}))^2 \right) = \\
 & = \int_0^1 dr \int_0^{2\pi} \left(2\sqrt{2}r \sin(\varphi + \frac{\pi}{4}) - 2r^2 \sin^2(\varphi + \frac{\pi}{4}) + 2 - 2\sqrt{2} \sin(\varphi + \frac{\pi}{4}) + \right. \\
 & \quad \left. + r^2 \sin^2(\varphi + \frac{\pi}{4}) \right) d\varphi = \int_0^1 dr \int_0^{2\pi} \left(2 - r^2 \sin^2 \frac{1 - \cos(2\varphi + \frac{\pi}{2})}{2} \right) d\varphi = \\
 & = \int_0^1 r dr \left(4\pi - \frac{1}{2} r^2 \cdot 2\pi - \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sin 2\varphi d\varphi \right) = \\
 & = \int_0^1 r (4\pi - \pi r^2 + \frac{1}{4} \cos 2\varphi \Big|_0^{2\pi}) dr = \\
 & = 4\pi \frac{1}{2} \pi \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot 0 = \frac{\pi^2}{2} \cdot 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}
 \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{3\pi}{4}$.

§3.19.7

Показать, что при $x = a r \cos \varphi \cos \psi$, $y = b r \cos \varphi \sin \psi$

$z = c r \sin \psi$ $x = a r \cos \varphi \cos \psi$, $y = b r \sin \varphi \cos \psi$, $z = c r \sin \varphi$:

якобиан отображения $J = abc r^2 \cos \psi$

Донатик

$$J = \frac{D(x, y, z)}{D(r, \varphi, \psi)} = \begin{vmatrix} r\cos\varphi\cos\psi & -r\sin\varphi\cos\psi & -r\cos\varphi\sin\psi \\ r\sin\varphi\cos\psi & r\cos\varphi\cos\psi & -r\sin\varphi\sin\psi \\ 0 & 0 & r\cos\psi \end{vmatrix} =$$

$$\begin{aligned} &= abc \left[\cos\varphi\cos\psi (r^2\cos\varphi\cos^2\psi) + r\sin\varphi\cos\psi \cdot \right. \\ &\quad \cdot (r\sin\varphi\cos^2\psi + r\sin\varphi\sin^2\psi) + r\cos\varphi\sin\psi \cdot r\cos\varphi\sin\psi\cos\psi \left. \right] \\ &= abc r^2 \left[\cos^2\varphi\cos^2\psi + \sin^2\varphi\cos\psi + \cos^2\varphi\sin\psi\cos^2\psi \right] = \\ &= abc r^2 [\cos^2\varphi\cos\psi + \sin^2\varphi\cos\psi] = abc r^2 \cos\psi. \end{aligned}$$

§ 8.0148 (1)

$$G_1 = \left\{ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \right\}. \text{ Вычислить:}$$

$$\iiint_G \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) dx dy dz.$$

Выполним замену: $\begin{cases} x = r\cos\varphi\cos\psi \\ y = r\sin\varphi\cos\psi \\ z = r\sin\psi \end{cases}$

Как было показано в § 8.0147: $\left| \frac{D(x, y, z)}{D(r, \varphi, \psi)} \right| =$

$$= abc r^2 \cos\psi$$

$$G = \{ r^2 \leq 1 \} = \{ 0 \leq r \leq 1 \}$$

φ изменяется от 0 до 2π , ψ изменяется от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$.

$$\iiint_G \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) dx dy dz = \iiint_{G'} r^2 \cdot abc r^2 \cos\psi dr d\varphi d\psi =$$

Донатик

$$= abc \int_0^1 dr \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\psi \int_0^{2\pi} r^4 \cos \varphi d\varphi = 2\pi abc \int_0^1 dr \int_{-\pi/2}^{\pi/2} r^4 \cos \varphi d\varphi =$$

$$= 2\pi abc \int_0^1 r^4 \cdot 2dr = 4\pi abc \cdot \frac{1}{5}$$

Ответ: $\frac{4}{5}\pi abc$.

§ 8.0150 (в)

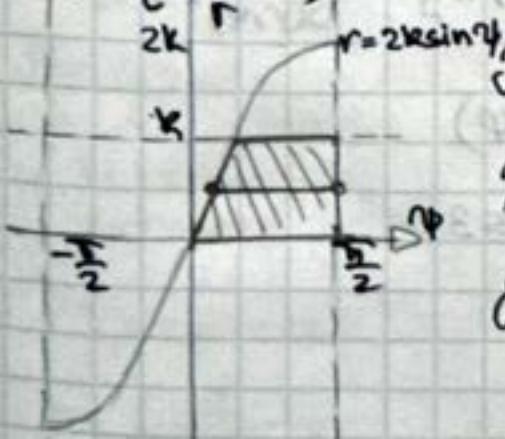
Восчислить $\iiint_G z^2 dx dy dz$, $G = \{x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, x^2 + y^2 + z^2 \leq 2Rz\}$.

Перейдём к сферическим координатам.

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \cos \psi \\ y = r \sin \varphi \cos \psi \\ z = r \sin \psi \end{cases} \quad \left| \frac{D(G, y, z)}{D(r, \varphi, \psi)} \right| = r^2 \cos \psi$$

$$r \geq 0, \varphi \in [0; 2\pi], \psi \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$$

$$G = \left\{ \begin{array}{l} r^2 \leq R^2, \\ r^2 \leq 2Rr \sin \psi \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq r \leq R, \\ r \leq 2R \sin \psi \end{array} \right\}$$



При фиксированном r :

φ меняется от $\arcsin \frac{r}{2R}$ до $\frac{\pi}{2}$

$$\iiint_{G_1} z^2 dx dy dz = \iiint_{\tilde{G}} r^2 \sin^2 \varphi \cos \psi dr d\varphi d\psi =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R dr \int_{\arcsin \frac{r}{2R}}^{\pi/2} r^4 \sin^2 \varphi \cos^2 \psi d\psi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r^4 \left(\frac{\sin^3 \varphi}{3} \right) \Big|_{\arcsin \frac{r}{2R}}^{\pi/2} dr =$$

$$- \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \frac{1}{3} r^4 \left(1 - \frac{r^3}{8R^3} \right) dr = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{R^5}{5} - \frac{1}{3 \cdot 8R^3} \cdot \frac{R^8}{8} \right) d\varphi =$$

$$= \frac{\pi R^5}{3} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{64} \right) = \frac{59\pi R^5}{480}$$

Ответ: $\frac{59\pi R^5}{480}$.

Задача 6)

Найти площадь области, ограниченной кривыми

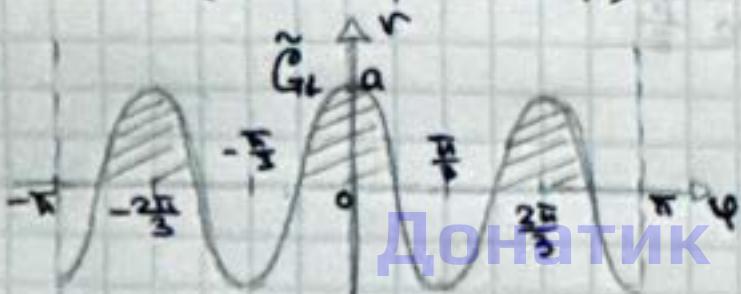
$$(x^2 + y^2)^2 = a(x^3 - 3xy^2), a > 0$$

Перейдём к полярным координатам:

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases}, r \geq 0, \varphi \in [-\pi, \pi] \quad \frac{D(x,y)}{D(r,\varphi)} = r$$

$$r^4 = a \cos \varphi \cdot r^2 (\cos^2 \varphi - 3 \sin^2 \varphi)$$

$$r = a (\cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi) = a \cos 3\varphi$$



Донатик

Множество ограничено длиной кривой σ ,
соответствует \mathcal{G} , заштрихованному на
рисунке.

~~На~~ В силу периодичности $\cos 3\varphi$
все 3 заштрихованные пика равны

$$\begin{aligned} S &= \iint_{\mathcal{G}} 1 \, dx \, dy = \iint_{\mathcal{G}_1} r \, dr \, d\varphi = 3 \iint_{\mathcal{G}_1} r \, dr \, d\varphi = \\ &= 3 \int_{-\pi/6}^{\pi/6} d\varphi \int_0^r r \, dr = \frac{3a^2}{2} \int_{-\pi/6}^{\pi/6} \cos^2 3\varphi \, d\varphi = \frac{3a^2}{2} \int_{-\pi/6}^{\pi/6} (1 + \cos 6\varphi) \, d\varphi = \\ &= \frac{3a^2}{4} \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{\pi a^2}{4}. \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{\pi a^2}{4}$.

§ 9.28 (5)

Найти площадь области, ограниченной

$$(x+y)^4 = a^2(x^2+y^2), \quad x=0, y=0 \quad (x>0, y>0)$$

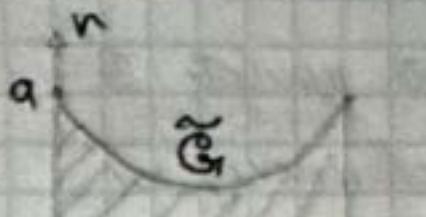
Перейдём к полярным координатам:

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases} \quad r \geq 0, \quad \varphi \in [0, 2\pi], \quad \frac{D(x,y)}{D(r,\varphi)} = r$$

$$r^4 (\sin \varphi + \cos \varphi)^4 = a^2 r^2$$

$$r = \frac{a}{2 \sin(\varphi + \frac{\pi}{4})}, \quad x > 0, y > 0 \Rightarrow \varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

Донатик



Три фиксированные точки
r меняются от 0 до $\frac{a}{\sin^2(\varphi + \frac{\pi}{4})}$

$$0 \quad \frac{\pi}{2} \quad \varphi$$

$$S = \iint_{G_1} dx dy = \iint_{G_1} r dr d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^r r dr =$$

$$= \frac{a^2}{8} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sin^4(\varphi + \frac{\pi}{4})} = \frac{a^2}{8} \int \frac{\operatorname{ctg} \xi}{\sin^2 \xi} \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} =$$

$$= -\frac{a^2}{8} \int (1 + \operatorname{ctg}^2 \xi) d \operatorname{ctg} \xi \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} =$$

$$= -\frac{a^2}{8} \left(\operatorname{ctg} \frac{3\pi}{4} + \frac{1}{3} \operatorname{ctg}^3 \frac{3\pi}{4} \right) = \frac{a^2}{8} \left(-1 - 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \right) = \frac{a^2}{8} \cdot \frac{8}{3} = \frac{a^2}{3}.$$

Ответ: $\frac{a^2}{3}$.

§ 9.10

Найти площадь фигуры, ограниченной

$$(a_1x + b_1y + c_1)^2 + (a_2x + b_2y + c_2)^2 = 1, \text{ если } \Delta = a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$$

$$\alpha = a_1x + b_1y + c_1, \beta = a_2x + b_2y + c_2$$

$$\frac{\|\alpha - c_1\|}{\|\beta - c_2\|} = \frac{\|a_1 \ b_1\|}{\|a_2 \ b_2\|} \cdot \frac{\|x\|}{\|y\|} \Rightarrow \frac{\|x\|}{\|y\|} = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} b_2 & -a_2 \\ -b_1 & a_1 \end{vmatrix} \frac{\|\alpha - c_1\|}{\|\beta - c_2\|}$$

Донатик

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} +\frac{b_2}{\Delta} & -\frac{a_2}{\Delta} \\ -\frac{b_1}{\Delta} & \frac{a_1}{\Delta} \end{vmatrix} = \frac{1}{\Delta^2} (a_1 b_2 - a_2 b_1) = \frac{1}{\Delta}$$

\mathfrak{C} -внешность фигура, ограниченная двумя кривод.

$\tilde{\mathfrak{G}}$ - фигура, ограниченная $U^2 + V^2 = 1$ - круг.

$$S = \iint_{\mathfrak{C}} dx dy - \iint_{\tilde{\mathfrak{G}}} \left| \frac{1}{\Delta} \right| du dv = \frac{1}{|\Delta|} \iint_{\tilde{\mathfrak{G}}} du dv = \frac{1}{|\Delta|}.$$

• Площадь окружности с радиусом 1 $\{ = \frac{\pi}{|\Delta|}$

Ответ: $\frac{\pi}{|\Delta|}$

§ 9 № 13(6)

Найти объём тела, ограниченного поверхностями:

$$y^2 + z^2 = x, \quad x = y$$

цилиндреские

Возополим замену координат на сферические:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi \cos \psi \\ y &= r \sin \varphi \cos \psi \\ z &= r \sin \varphi \sin \psi \end{aligned} \quad \begin{aligned} \varphi &\in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}], \psi \in [0, 2\pi] \\ z &= r \cos \varphi \cos \psi \\ x &= r \sin \varphi \cos \psi \end{aligned}$$

$$\frac{|D(x,y,z)|}{|D(r,\varphi,\psi)|} = r^2 \cos \psi$$

$$\tilde{\mathfrak{G}} = \{ \sin \psi = \sin \varphi \cos \psi, r^2 \cos^2 \psi = r \sin \varphi \}$$

Донатик

$$\begin{cases} x = t \\ y = r \cos \varphi \\ z = r \sin \varphi \end{cases}$$

$$\frac{D(x, y, z)}{D(r, \varphi, t)} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \end{vmatrix} = r$$

\hat{G} $r^2 = t$
 $r \cos \varphi = t$
 $t = r^2$
 $t = r \cos \varphi \Rightarrow$
 r

fixированные значения φ .

$$r^2 \leq t \leq r \cos \varphi, \cos \varphi > 0 \Rightarrow \varphi \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$$

$$V = \iiint_G 1 dx dy dz = \iiint_G r dr d\varphi dt =$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\cos \varphi} dr \int_0^{r \cos \varphi} dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\cos \varphi} (r^2 \cos \varphi - r^3) dr =$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\cos \varphi \cdot \frac{\cos^3 \varphi}{3} - \frac{1}{4} \cos^4 \varphi \right) d\varphi = \frac{1}{12} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4 \varphi d\varphi =$$

$$= \frac{1}{48} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 + \cos 2\varphi)^2 d\varphi = \frac{1}{48} \left(\pi + 2 \cdot \frac{1}{2} \sin 2\varphi \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} \right) +$$

$$+ \frac{1}{48} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1 + \cos 4\varphi}{2} d\varphi = \frac{1}{48} \left(\pi + \frac{1}{2} \pi + \frac{1}{8} \sin 4\varphi \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} \right) =$$

$$= \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{48} \pi = \frac{\pi}{32}$$

Ответ: $\frac{\pi}{32}$ **Донатик**

Б9 №16 (1)

Найти объём, ограниченного $x^2+y^2+z^2=4$ и

$$z=\sqrt{x^2+y^2} \quad (z < \sqrt{x^2+y^2})$$

Перейдём к сферическим координатам:

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \cos \psi \\ y = r \cos \varphi \sin \psi \\ z = r \sin \varphi \end{cases}$$

$$r \geq 0, \varphi \in [0; 2\pi], \psi \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$$

$$\left| \frac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,\psi)} \right| = r^2 \cos \psi$$

Тогда \tilde{G} ограничено $r^2=4$ ($r=2$) и $r \sin \varphi = r \cos \varphi$

$$(\sin \varphi < \cos \varphi), \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{4}\right]$$

На φ условий нет $\Rightarrow \varphi \in [0; 2\pi]$

Таким образом $\tilde{G} = [0; 2] \times [0; 2\pi] \times \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{4}\right]$

$$\begin{aligned} V &= \iiint_{\tilde{G}} 1 \, dx \, dy \, dz = \iiint_{\tilde{G}} r^2 \cos \varphi \, dr \, d\varphi \, d\psi = \\ &= \int_0^2 r^2 dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\pi/2}^{\pi/4} \cos \varphi d\psi = \int_0^2 r^2 dr \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + 1 \right) d\varphi = \\ &= \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \int_0^2 2\pi r^2 dr = \pi (2 + \sqrt{2}) \cdot \frac{8}{3} = \frac{8\pi}{3} (2 + \sqrt{2}) \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{8\pi}{3} (2 + \sqrt{2})$

Задача

Найти объём параллелепипеда, ограниченного плоскостями:

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1$$

$$a_2x + b_2y + c_2z = d_2$$

$$a_3x + b_3y + c_3z = d_3$$

$$\Leftrightarrow \Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0, \quad A = \begin{vmatrix} a_1 b_1 c_1 \\ a_2 b_2 c_2 \\ a_3 b_3 c_3 \end{vmatrix}$$

$$\text{Замена: } \begin{cases} u = a_1x + b_1y + c_1z \\ v = a_2x + b_2y + c_2z \\ w = a_3x + b_3y + c_3z \end{cases}$$

т.к. $\Delta \neq 0$, то x, y, z однозначно выражаются через u, v, w

Факторизируя каждое ур-е системы по u, v, w :

$$\begin{cases} 1 = a_1 \frac{\partial x}{\partial u} + b_1 \frac{\partial y}{\partial u} + c_1 \frac{\partial z}{\partial u} \\ 0 = \dots \\ 0 = \dots \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 b_1 c_1 \\ a_2 b_2 c_2 \\ a_3 b_3 c_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial u} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial u} \end{vmatrix} = A^{-1} \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} (A^{-1})_{11} & (A^{-1})_{12} & (A^{-1})_{13} \\ (A^{-1})_{21} & (A^{-1})_{22} & (A^{-1})_{23} \\ (A^{-1})_{31} & (A^{-1})_{32} & (A^{-1})_{33} \end{vmatrix}, \text{ тогда } \frac{D(R^2 x, y, z)}{D(u, v, w)} = \begin{vmatrix} (A^{-1})_{11} & (A^{-1})_{12} & (A^{-1})_{13} \\ (A^{-1})_{21} & (A^{-1})_{22} & (A^{-1})_{23} \\ (A^{-1})_{31} & (A^{-1})_{32} & (A^{-1})_{33} \end{vmatrix}$$

Донатик

$$= \det A^{-1} = \frac{1}{\det A} = \frac{1}{4}$$

$\tilde{\Gamma}_1$ ограничено $u = \pm d_1, v = \pm d_2, w = \pm d_3$

$$V = \iiint_{\tilde{\Gamma}_1} dx dy dz = \iiint_{\tilde{\Gamma}_1} \frac{1}{|\Delta|} du dv dw = \frac{1}{|\Delta|} \cdot 2d_1 \cdot 2d_2 \cdot 2d_3 = \\ = \frac{8d_1 d_2 d_3}{|\Delta|}$$

Ответ: $\frac{8d_1 d_2 d_3}{|\Delta|}$

§ 9 № 63 (1)

Найти координаты центра масс $[0; a]^3$

с плотностью $\rho = \rho_0 (x+y+z)^2$

$$\text{масса тела: } M = \iiint_{[0;a]^3} \rho dx dy dz = \int_0^a dx \int_0^a dy \int_0^a \rho_0 (x+y+z)^2 dz = \\ = \rho_0 \int_0^a dx \int_0^a dy \left[(x+y)^2 \cdot a + 2(x+y) \cdot \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{3} \right] = \\ = \rho_0 \int_0^a dx \int_0^a (ax^2 + 2axy + ay^2 + a^2x + a^2y + \frac{1}{3}a^3) dy = \\ = \rho_0 \int_0^a \left(a^2x^2 + 2ax \cdot \frac{a^2}{2} + a \cdot \frac{1}{3}a^3 + a^3x + a^2 \cdot \frac{a^2}{2} + \frac{1}{3}a^4 \right) dx = \\ = \rho_0 \int_0^a \left(a^2x^2 + 2a^3x + \frac{7}{6}a^4 \right) dx = \rho_0 \left(a^2 \cdot \frac{a^3}{3} + 2a^3 \cdot \frac{a^2}{2} + \frac{7}{6}a^5 \right) = \\ = \rho_0 a^5 \cdot \frac{2+6+7}{6} = \frac{15}{6} \rho_0 a^5$$

Лонатик

Координаты центра масс по осям x :

$$x_c = \frac{1}{M} \iiint_{[0, a]^3} x \rho dxdydz = \frac{1}{M} \iiint_0^a dx \int_0^a dy \int_0^a x \rho_0 (x+y+z)^2 dz =$$

$$= \frac{\rho_0}{M} \int_0^a x dx \int_0^a dy \left[(x+y)^2 a + 2(x+y) \cdot \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{3} \right] =$$

$$= \frac{\rho_0}{M} \int_0^a x \left(a^2 x^2 + 2ax \frac{a^2}{2} + a \cdot \frac{a^3}{3} + a^3 x + \frac{a^2}{2} \cdot \frac{a^2}{2} + \frac{1}{3} a^4 \right) dx =$$

$$= \frac{\rho_0}{M} \int_0^a \left(a^2 x^3 + 2a^3 x^2 + \frac{a^4}{6} a^4 x \right) dx = \frac{\rho_0}{M} \left(a^2 \cdot \frac{a^4}{4} + 2a^3 \cdot \frac{a^3}{3} + \frac{a^4}{6} a^4 \cdot \frac{a^2}{2} \right) =$$

$$+ \frac{a^4}{6} a^4 \cdot \frac{a^2}{2} \right) = \frac{\rho_0}{M} a^6 \cdot \frac{3 + 8 + 7}{12} = \frac{3}{2} a^6 \cdot \frac{\rho_0}{M} =$$

$$= \frac{3}{2} a^6 \cdot \frac{\rho_0}{\frac{15}{6} \rho_0 a^5} = a \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{5} = \frac{3}{5} a$$

= В силу симметрии $y_c = z_c = x_c = \frac{3}{5} a$

Ответ: $x_c = y_c = z_c = \frac{3}{5} a$.