29.5.

$$\left.\begin{array}{l}\text{Самосопряжённое} \Rightarrow A = \Gamma^{-1} A^T \Gamma \\ \text{Ортогональное} \Rightarrow A^T \Gamma A = \Gamma\end{array}\right| \Rightarrow E = \Gamma^{-1}\Gamma = \Gamma^{-1} A^T \Gamma A =$$

$= \Gamma^{-1}(\Gamma A \Gamma^{-1})\Gamma A = A^2$, т.е. $A = A^{-1} \Rightarrow A$ - отражение, центр. симметрия или тожд. пр-е.

29.14(1,4)

1) $\begin{Vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{Vmatrix}$ - да, т.к. $A = A^T \Rightarrow$ например в ОНБ самосопр.

4) $A = \begin{Vmatrix} 4 & -3 \\ 12 & -8 \end{Vmatrix}$

$$|A - \lambda E| = (4-\lambda)(-8-\lambda) + 36 = \lambda^2 + 4\lambda + 4 = (\lambda+2)^2 = 0$$

$$\begin{Vmatrix} 6 & -3 \\ 12 & -6 \end{Vmatrix} \vec{s}_1 = \vec{0} \quad \begin{Vmatrix} 6 & -3 \\ 12 & -6 \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 2 & -1 \end{Vmatrix} \to \vec{s}_1 = \begin{Vmatrix} 1 & 2 \end{Vmatrix}^T$$

Т.к. собс. вектор один, не существует ОНБ из собс. векторов. Однако для самосопряж. пр-я такой ОНБ сущ. $\Rightarrow$ <u>Ответ:</u> нет.

29.17.

A, B - самосопр., т.е. $A = \Gamma^{-1} A^T \Gamma$, $B = \Gamma^{-1} B^T \Gamma$

$\boxed{A, B \text{ - перестановочны} \Rightarrow AB \text{ - самосопр.}}$: $AB = \Gamma^{-1} A^T \Gamma \Gamma^{-1} B^T \Gamma =$

$= \Gamma^{-1} A^T B^T \Gamma = \Gamma^{-1}(BA)^T \Gamma = \Gamma^{-1}(AB)^T \Gamma = \Gamma \Rightarrow AB$ - самосопр.

$\boxed{AB \text{ - самосопр.} \Rightarrow A, B \text{ - перестановочны}}$: $BA = \Gamma^{-1} B^T \Gamma \Gamma^{-1} A^T \Gamma =$

$= \Gamma^{-1} B^T A^T \Gamma = \Gamma^{-1}(AB)^T \Gamma = AB \Rightarrow A, B$ - перестановочны

29.19(7,10)

7) $A = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{Vmatrix}$.

$$|A-\lambda E| = 1-3\lambda+3\lambda^2-\lambda^3-4+4\lambda-12+4\lambda-12+4\lambda = -(3-\lambda)^2(3+\lambda)=0$$

$$\lambda=3:\ \left\|\begin{matrix}-2&2&2\\2&-2&-2\\2&-2&-2\end{matrix}\right\|\vec{S}_{1,2}=\vec{0} \qquad \left\|\begin{matrix}-2&2&2\\2&-2&-2\\2&-2&-2\end{matrix}\right\| \sim \left\|\begin{matrix}1&-1&-1\end{matrix}\right\| \Rightarrow \vec{S}_1=\left\|\begin{matrix}1\\1\\0\end{matrix}\right\|,\ \vec{S}_2=\left\|\begin{matrix}1\\0\\1\end{matrix}\right\|$$

$$\lambda=-3:\ \left\|\begin{matrix}4&2&2\\2&4&-2\\2&-2&4\end{matrix}\right\|\vec{S}_3=\vec{0} \qquad \left\|\begin{matrix}4&2&2\\2&4&-2\end{matrix}\right\| \sim \begin{matrix}\frac{I+II}{6}\\ II-2I'\end{matrix}\left\|\begin{matrix}1&1&0\\0&2&-2\end{matrix}\right\| \Rightarrow \vec{S}_3=\left\|\begin{matrix}-1\\1\\1\end{matrix}\right\|$$

Как было показано в №9 КР 2, для преобразования с симметричной матрицей собс. вектора, соответств. различн собственным значениям, ортогональны => ортогонализировать нужно только значения для одинаковых собств. значений.

$$\vec{b}_2=\vec{S}_2-\frac{(\vec{S}_1,\vec{S}_2)}{(\vec{S}_1,\vec{S}_1)}\vec{S}_1=\|1\ 0\ 1\|^T-\frac{1}{2}\|1\ 1\ 0\|^T=\|1/2\ -1/2\ 1\|^T$$

$$S=\left\|\begin{matrix}1/\sqrt{2}&1/\sqrt{6}&-1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{2}&-1/\sqrt{6}&1/\sqrt{3}\\0&2/\sqrt{6}&1/\sqrt{3}\end{matrix}\right\| \qquad A_{\vec{S}}=\left\|\begin{matrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&-3\end{matrix}\right\|$$

10) $A=\left\|\begin{matrix}1&-1&2\\-1&1&-2\\2&-2&4\end{matrix}\right\|$

$$|A-\lambda E| = 4-8\lambda+4\lambda^2-\lambda+2\lambda^2-\lambda^3-4+4\lambda+5\lambda=\lambda^2(6-\lambda)=0$$

$$\lambda=0:\ \left\|\begin{matrix}1&-1&2\\-1&1&-2\\2&-2&4\end{matrix}\right\|\vec{S}_{1,2}=\vec{0} \qquad \left\|\begin{matrix}1&-1&2\\-1&1&-2\\2&-2&4\end{matrix}\right\| \sim \|1\ -1\ 2\| \Rightarrow \vec{S}_1=\left\|\begin{matrix}1\\1\\0\end{matrix}\right\|,\ \vec{S}_2=\left\|\begin{matrix}-2\\0\\1\end{matrix}\right\|$$

$$\lambda=6:\ \left\|\begin{matrix}-5&-1&2\\-1&-5&-2\\2&-2&-2\end{matrix}\right\|\vec{S}_3=\vec{0} \qquad \begin{matrix}-\frac{I+II}{6}\\ -\frac{II+I'}{4}\end{matrix}\left\|\begin{matrix}1&1&0\\0&1&1/2\end{matrix}\right\| \Rightarrow \vec{S}_3=\|1\ -1\ 2\|^T$$

$$\vec{b}_2=\|-2\ 0\ 1\|^T-\frac{-2}{2}\|1\ 1\ 0\|^T=\|-1\ 1\ 1\|^T$$

$$S=\left\|\begin{matrix}1/\sqrt{2}&-1/\sqrt{3}&1/\sqrt{6}\\1/\sqrt{2}&1/\sqrt{3}&-1/\sqrt{6}\\0&1/\sqrt{3}&2/\sqrt{6}\end{matrix}\right\| \qquad A_{\vec{S}}=\left\|\begin{matrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&6\end{matrix}\right\|$$

29.45.

1) $A = \begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix}$

$|A-\lambda E| = (1-\lambda)^2+1 = \lambda^2-2\lambda+2=0 \to \lambda = \frac{2\pm\sqrt{4-8}}{2} = 1\pm i$

$|\lambda| = |1\pm i| = 2 \neq 1$ => у собс. векторов длина не сохр. => не ортогональное

2) $A = \begin{Vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix}$

$|A-\lambda E| = (2-\lambda)(1-\lambda)-1 = \lambda^2-3\lambda+1=0 \Rightarrow \lambda = \frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$

$\exists \lambda \neq \pm 1$, т.е. для собс. векторов не сохр. ортогональность пр-я => <u>Ответ:</u> нет.

29.47(1)

$A = \begin{Vmatrix} 4 & 2 \\ 7 & 1 \end{Vmatrix}, B = \begin{Vmatrix} 8 & 2 \\ 1 & -1 \end{Vmatrix}$ $\quad A \xrightarrow{\varphi} B \quad$ $\varphi: \mathcal{A}$ - матрица пр-я

$$\mathcal{A}A = B \to \mathcal{A} = BA^{-1}: \begin{Vmatrix} 4 & 2 \\ 7 & 1 \\ \hline 8 & 2 \\ 1 & -1 \end{Vmatrix} \sim \begin{array}{cc} -\frac{I-7II}{10} & II-2I' \\ \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \hline 3/5 & 4/5 \\ -4/5 & 3/5 \end{Vmatrix} \end{array} \to \mathcal{A} = \begin{Vmatrix} 3/5 & 4/5 \\ -4/5 & 3/5 \end{Vmatrix} \text{ в ОНБ}$$

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{A}\mathcal{A}^T &= \begin{Vmatrix} 3/5 & 4/5 \\ -4/5 & 3/5 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 3/5 & -4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} \\ \mathcal{A}^T\mathcal{A} &= \begin{Vmatrix} 3/5 & -4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 3/5 & 4/5 \\ -4/5 & 3/5 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} \end{aligned}\right\} \mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A}^T \text{ и } \Gamma = E \Rightarrow$$

=> φ - ортогональное