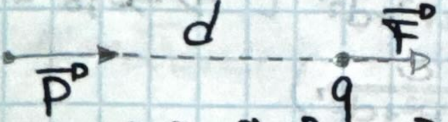
1.7



Дано: $\vec p$, d, q

Найти: $\vec F$

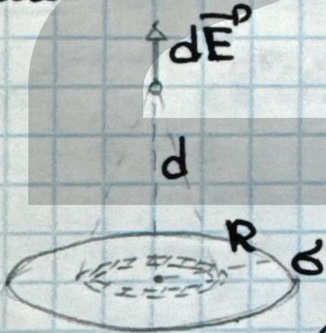
$$\vec E = \frac{3(\vec p, \vec r)\vec r}{r^5} - \frac{\vec p}{r^3}$$

$\vec E$ направлено вдоль прямой

$$E = \frac{3p}{r^3} - \frac{p}{r^3} = \frac{2p}{r^3} = \frac{2p}{d^3}$$ – вдоль прямой, $\vec F = q\vec E$

Ответ: $\boxed{F = \frac{2pq}{d^3}}$, вдоль прямой

1.10



Дано: d, R, σ

Найти: E.

Решение:

Рассмотрим кольцо радиуса r:

$\varkappa = \frac{q}{2\pi r}$, q – заряд кольца

$$dE = \frac{\varkappa \cdot r d\varphi}{r^2+d^2} \cdot \frac{d}{\sqrt{r^2+d^2}} \Rightarrow E = \frac{dr\varkappa}{(r^2+d^2)^{3/2}} \cdot 2\pi =$$

$$= \frac{dr \cdot 2\pi}{(r^2+d^2)^{3/2}} \cdot \frac{q}{2\pi r} = \frac{qd}{(r^2+d^2)^{3/2}}$$ – напряжённость

создаваемая кольцом радиуса r

диск: $dq = \sigma \cdot 2\pi r dr$, $dE = \frac{2\pi r d\sigma dr}{(r^2+d^2)^{3/2}}$

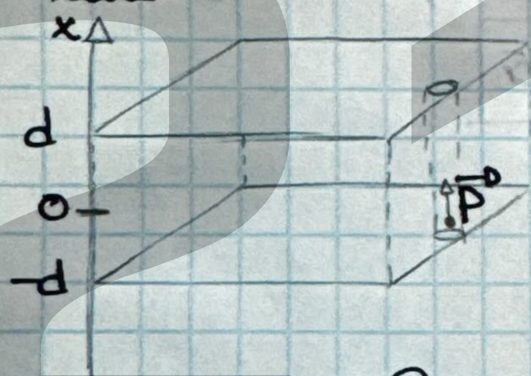
$$E = \int_0^R \frac{2\pi r d\sigma dr}{(r^2+d^2)^{3/2}} = \frac{2\pi d\sigma}{d^3} \int_0^R \frac{r dr}{(r^2+d^2)^{3/2} \cdot \frac{1}{d^3}} =$$

$$= \cancel{2\pi\sigma d}\ \pi\sigma d \int_0^R \frac{dr^2}{(r^2+d^2)^{3/2}} = \pi\sigma d \cdot \frac{1}{\sqrt{r^2+d^2}} \cdot (-2) \Big|_0^R =$$

$$= -\frac{2\pi\sigma d}{\sqrt{R^2+d^2}} + \frac{2\pi\sigma d}{d} = 2\pi\sigma\left(1 - \frac{d}{\sqrt{R^2+d^2}}\right)$$

$$\boxed{\text{Ответ: } E = 2\pi\sigma\left(1 - \frac{d}{\sqrt{d^2+R^2}}\right)}$$

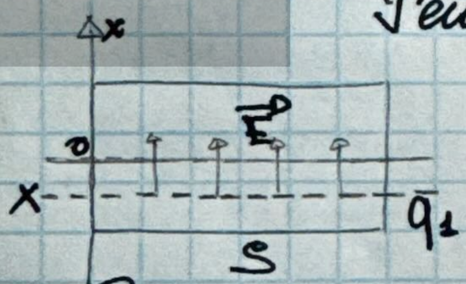
21.16



Дано: d, $\rho = \rho_0 \frac{x}{d}$, p, m

Найти: T

Решение:



Рассмотрим слой с координатой x:

Заряд того, что находится ниже x:

$$q_1 = \int_{-d}^{x} \rho_0 \frac{t}{d} \cdot S\,dt = \frac{\rho_0 S}{2d} t^2 \Big|_{-d}^{x} = \frac{\rho_0 S}{2d}(x^2 - d^2)$$

т. Гаусса: $4\pi q_1 = E_1 S \Rightarrow E_1 = \frac{2\pi\rho_0}{d}(x^2 - d^2)$ $(E<0)$

Когда диполь имеет координату x:

$$\vec{F} = (\vec{p}, \nabla)\vec{E} = \left(p_x \frac{\partial}{\partial x} + 0 \cdot \frac{\partial}{\partial y} + 0 \cdot \frac{\partial}{\partial z}\right)\vec{E} = p \left\| \begin{matrix} \frac{\partial E}{\partial x} \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right\|$$

$\vec{F}$ направлено вдоль Ox, $F = p \cdot \frac{2\pi\rho_0}{d} \cdot 2x$

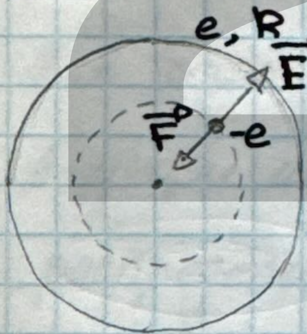
Ускорение: $a=\frac{F}{m}=\frac{4\pi p\rho_0}{md}x$

Колебания возможны, когда при $x<0$ $a>0$, то есть $\vec{p}$ имеет обратное направление, либо $\rho_0<0$.

$\omega^2=\frac{4\pi p\rho_0}{md}$, $T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{2\sqrt{\pi}}\cdot\sqrt{\frac{md}{p\rho_0}}=\sqrt{\frac{\pi md}{p\rho_0}}$

$$\boxed{\text{Ответ: } T=\sqrt{\frac{\pi md}{p\rho_0}}}$$

№1.17



Дано: $e=1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл, $R=10^{-8}$ см

Найти: $\rho(r)$: колебания, ν

Решение:

Рассмотрим сферу радиуса r:

т. Гаусса: $4\pi q(r)=4\pi r^2E(r)$, где $q(r)$ - заряд внутри сферы.

Получаем: $q(r)=r^2E(r)$ $\vec{E}$ - от центра.

Сила, действующая на электрон: $F=eE(r)$ - к центру

$-\ddot{r}=\frac{F}{m}=\frac{eE(r)}{m}$.

Колебания при $E(r)=c\cdot r$.

Отсюда $q(r) = r^2 E(r) = cr^3 \Rightarrow \rho(r) = const = \frac{e}{\frac{4}{3}\pi R^3} =$
$= \frac{3e}{4\pi R^3}$.

$$E(r) = \frac{q(r)}{r^2} = \frac{1}{r^2} \cdot \left(\frac{r}{R}\right)^3 e = \frac{re}{R^3}.$$

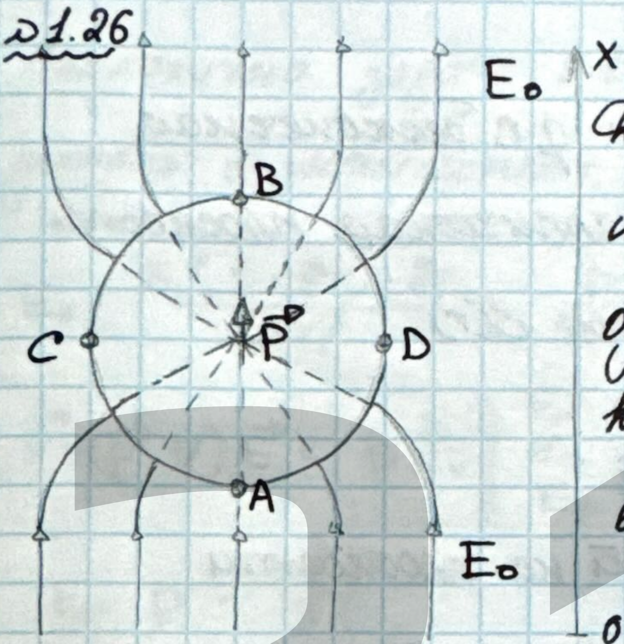
$$\ddot{r} + \frac{e}{m} \cdot \frac{e}{R^3} r = 0$$

$$\omega = \sqrt{\frac{e^2}{mR^3}}, \quad \nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{e^2}{mR^3}} = \frac{1}{2 \cdot 3{,}14} \cdot \sqrt{\frac{(1{,}6 \cdot 10^{-19} Кл)^2}{9{,}1 \cdot 10^{-28} г \cdot (10^{-8} см)^3}} \simeq$$
$\simeq 2{,}5 \cdot 10^{15}$ Гц

$$\boxed{\text{Ответ: } \rho = const = \frac{3e}{4\pi R^3}, \ \nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{e^2}{mR^3}} \simeq 2{,}5 \cdot 10^{15} \text{ Гц}}$$

№1.26

2 неделя



Дано: металлический шар помещён во внешнее однородном поле E_0. Как изменится поле в точках A, B, C и D?

Решение:

Как было показано в задаче 1.23: чтобы внутри шара было поле $-\vec{E_0}$: заряд должен распределиться так, чтобы он был эквивалентен диполю с $\vec{p} = -R^3(-\vec{E_0}) = \vec{E_0}\cdot R^3$

Тогда $E_{Ax} = E_0 + \frac{3(-E_0R^4)(-R)}{R^5} - \frac{E_0R^3}{R^3} = 3E_0$, $E_{Ay}=0$

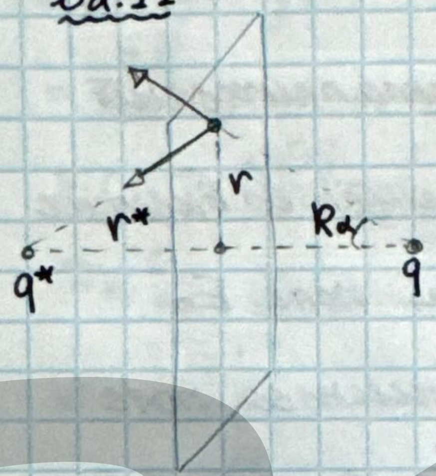
$E_{Bx} = E_0 + \frac{3(E_0R^4)R}{R^5} - \frac{E_0R^3}{R^3} = 3E_0$, $E_{By}=0$

$E_{Cx} = E_0 + \frac{3\cdot 0}{R^5}R - \frac{E_0R^3}{R^3} = 0$, $E_{Cy}=0$

$E_{Dx} = E_{Dy} = 0$

Ответ: $\boxed{\text{в точках A и B поле возрастёт в 3 раза, в C и D станет нулевым}}$

№2.11



Дано: q, r, бесконечная металлическая плоскость

Найти: $\sigma(r)$

Решение:

Пусть индуцированный на плоскости заряд эквивалентен заряду $q^* = -q$ на расстоянии $r^* = R$ от плоскости. Тогда $\varphi(r) = 0$ для всех r.

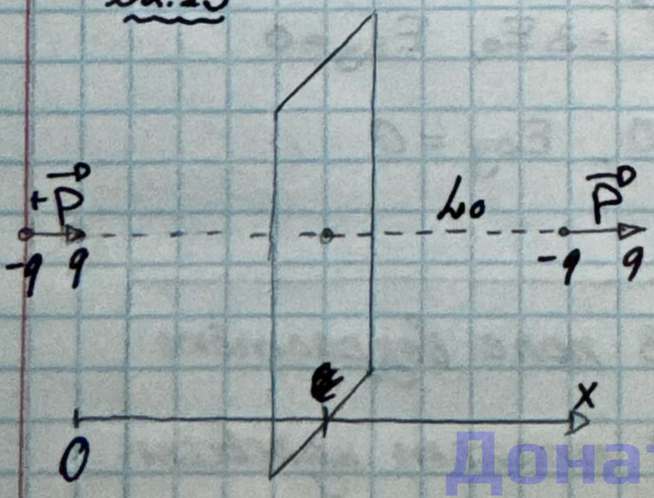
В силу теоремы единственности:

$$E(r) = 2 \cdot \frac{q}{R^2 + r^2} \cdot \cos\alpha = \frac{2q}{R^2+r^2} \cdot \frac{R}{\sqrt{R^2+r^2}} = \frac{2Rq}{(R^2+r^2)^{3/2}}$$

$$E(r) = 2\pi\sigma(r) \Rightarrow \sigma(r) = \frac{\cancel{2} Rq}{2\pi (R^2+r^2)^{3/2}}$$

Ответ: $\boxed{\sigma(r) = \frac{Rq}{2\pi (R^2+r^2)^{3/2}}}$

№2.15



Дано: $p = 4 \cdot 10^{-10}$ Кл·см, $L_0 = 1$см, $L = 2$см

Найти: F, $A: L_0 \to L$

Аналогично задаче 2.11: плоскость эквивалентна диполь с моментом $\vec{p}$ на таком же расстоянии.

$$E_x = \frac{3(p\cdot x)\cdot x}{(x)^5} - \frac{p}{(x)^3} = \frac{2p}{x^3}$$

$$\vec{F} = (\vec{p},\nabla)\vec{E} = p\frac{\partial}{\partial x}\begin{Vmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} p\frac{\partial E_x}{\partial x} \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix}$$ логично из симметрии

$$F_x = p\cdot\frac{-6p}{x^4}$$

При $x = 2L_0$: $F = -\frac{6p^2}{(2L_0)^4} = -\frac{3p^2}{8L_0^4}$

$$A = -\frac{1}{2}\int_{2L_0}^{2L} F_x\, d\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}\int_{2L_0}^{2L}\frac{6p^2}{x^4}dx = -\frac{1}{8}\cdot\frac{6p^2}{x^3}\Bigg|_{2L_0}^{2L} = -2p^2\left(\frac{1}{8L^3}-\frac{1}{8L_0^3}\right) =$$

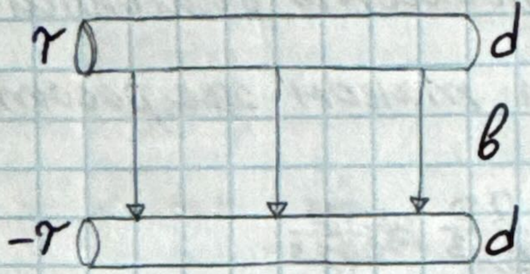
$$= \frac{p^2}{8}\left(\frac{1}{L_0^3}-\frac{1}{L^3}\right)$$

$$|F| = \frac{3\left(4\cdot 10^{-10}\,Кл\cdot см\cdot 3\cdot 10^9\,\frac{ед\,СГС}{Кл}\right)^2}{8\cdot(1см)^4} = 0{,}54\ г\cdot\frac{см}{с^2} = 0{,}54\ дин$$

$$A = \frac{(1{,}2\ ед\,СГС\cdot см)^2}{8}\left(\frac{1}{1см^3}-\frac{1}{8см^3}\right) \approx 0{,}16\ эрг$$

Ответ: $\boxed{F = \frac{3p^2}{8L_0^2} \approx 0{,}54\,дин,\quad A = \frac{p^2}{8}\left(\frac{1}{L_0^3}-\frac{1}{L^3}\right) \approx 0{,}16\,эрг}$

№2.48



Дано: $E_{max} = 30\,\frac{кВ}{см}$,

$d = 1\,см$, $в = 5\,см$

Найти: $\Delta\varphi_{max}$

Решение:

Поле цилиндра на расстоянии r от оси $(r > \frac{d}{2})$:

$$E = \frac{2\tau}{r}$$

$$E(r) = \frac{2\tau}{r} + \frac{2\tau}{в - r} = 2\tau\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{в - r}\right)$$

Максимум при $\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{в-r}\right)'_r = 0 \Rightarrow$ при $r = \frac{в}{2}$.

$$E_{max} = 2\tau \cdot \frac{2}{в} \cdot 2 = \frac{8\tau}{в} \Rightarrow \tau = \frac{1}{8} в E_{max}.$$

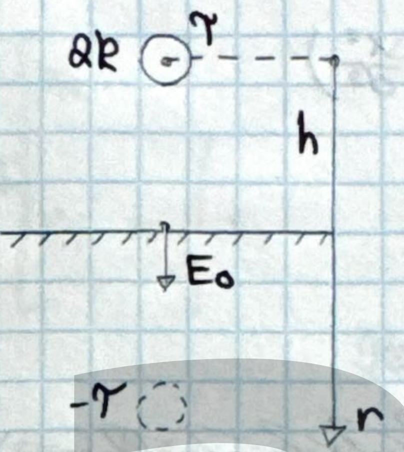
$$\Delta\varphi = -\int_{\frac{1}{2}d}^{в - \frac{1}{2}d} E\,dr = -2\tau\left(\ln r - \ln(в - r)\right)\Big|_{\frac{1}{2}d}^{в - \frac{1}{2}d} =$$

$$= -2\tau\left(\ln\left(в - \tfrac{1}{2}d\right) - \ln\left(\tfrac{1}{2}d\right) - \ln\left(\tfrac{1}{2}d\right) + \ln\left(в - \tfrac{1}{2}d\right)\right) =$$

$$= -4\tau \ln\frac{2в - d}{d} = -\frac{1}{2} в E_{max} \ln\frac{2в - d}{d}$$

Ответ: $\boxed{\Delta\varphi_{max} = \cancel{4\tau \ln\left(\frac{2в}{d} - 1\right)}\ \frac{1}{2} в E_{max} \ln\frac{2в - d}{d} = 691\ ед\ СГС \approx 207\ кВ}$

Т2.1



Дано: $R = 1$ см, $h = 4$ м, $E_0 = 750\ \frac{В}{м}$

Найти: φ пр.

Решение:

Поле цилиндра на расстоянии r от оси:

$$E(r) = \frac{2\tau}{r}.$$

Заменяем плоскость на зеркальный провод, заряженный другим знаком.

$$E_0 = \frac{2\tau}{h} \cdot 2 = \frac{4\tau}{h} \Rightarrow \tau = \frac{1}{4} h E_0$$

$$E(r) = \frac{2\tau}{r} + \frac{2\tau}{2h-r}$$

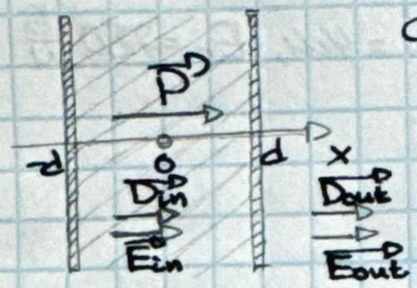
$$\varphi = -\int_h^R E(r)dr = -2\tau\left(\ln\frac{r}{2h-r}\right)\Big|_h^R = -2\tau\left\{\ln\frac{R}{2h-R} \approx\right.$$

$$\approx 2\tau \ln\frac{2h}{R} = \frac{1}{2} h E_0 \ln\frac{2h}{R}$$

Ответ: $\boxed{\varphi \approx \frac{1}{2} h E_0 \ln\frac{2h}{R} \approx 10 \text{ кВ}}$

3 неделя

Т3.1



Дано: $\vec P(x) = \vec P_0\left(1+\frac{x^2}{d^2}\right)$

Найти: U

Решение:

~~$\oint\limits_{граница} \vec D \cdot d\vec S = 4\pi q_{ст} = 0$ (т.к. сторонних зарядов нет) =>~~

Граничное условия: $D_{out} - D_{in} = 4\pi\sigma_{ст} = 0$ (т.к. сторонних зарядов нет. => $D_{in} = 0$

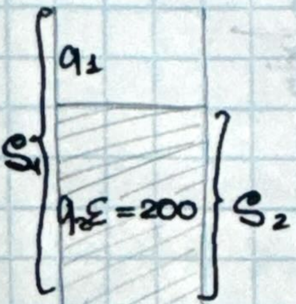
$\vec D = \vec E + 4\pi \vec P \Rightarrow \vec E(x) = -4\pi \vec P_0\left(1+\frac{x^2}{d^2}\right)$

$$U = \left|\int_{-d}^{+d} \vec E(x)\, d\vec x\right| = 4\pi P_0 \int_{-d}^{d}\left(1+\frac{x^2}{d^2}\right)dx = 4\pi P_0\left(2d + \frac{d^3}{3d^2}\cdot 2\right) =$$

$$= \frac{32}{3}\pi P_0 d$$

Ответ: $\boxed{U = \frac{32}{3}\pi P_0 d}$

№3.30



Дано: $\varepsilon = 200$, $S_1 = 1 м^2$, индукция увеличивается в $\alpha = 40$ раз

Найти: S_2

Решение:

До введения индукция $\vec{D} = \vec{E_0}$

После: $\vec{D} = \vec{E_s} + 4\pi\vec{P} = \varepsilon\vec{E}$ (внутри области, занимаемой прокладкой)

В задаче считаем, что сохраняются заряды пластин.

$\Delta\varphi_{\text{без прокладки}} = \Delta\varphi_{\text{с прокладкой}} \Rightarrow \frac{q_1}{C_1} = \frac{q_2}{C_2}$,

$C_1 = \frac{S_1 - S_2}{4\pi d}$, $C_2 = \frac{\varepsilon S_2}{4\pi d} \Rightarrow q_2 = \frac{\varepsilon S_2}{S_1 - S_2} q_1$.

До введения прокладки: $C_0 = \frac{S_1}{4\pi d}$, $\Delta\varphi_0 = \frac{4\pi d q}{S_1}$

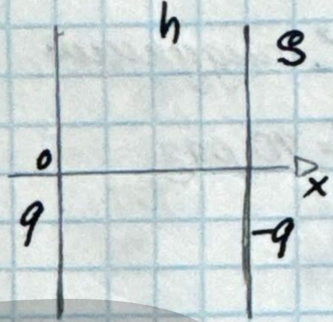
$$q_1 + q_2 = q \Rightarrow q_1 \cdot \frac{S_1 - S_2 + \varepsilon S_2}{S_1 - S_2} = q \Rightarrow q_1 = \frac{S_1 - S_2}{S_1 - S_2 + \varepsilon S_2} q$$

Тогда $$\Delta\varphi = \frac{4\pi d q_1}{S_1 - S_2} = \frac{4\pi d}{S_1 - S_2} \cdot \frac{S_1 - S_2}{S_1 - S_2 + \varepsilon S_2} \cdot \cancel{\frac{4\pi d q}{S_1}} \frac{S_1 \Delta\varphi_0}{4\pi d} = \frac{S_1}{S_1 - S_2 + \varepsilon S_2} \Delta\varphi_0$$

D увеличится в α раз, когда $\Delta\varphi$ увеличится в $\frac{\alpha}{\varepsilon}$ раз $\Rightarrow \alpha = \frac{\varepsilon S_1}{S_1 - S_2 + \varepsilon S_2} \Rightarrow S_2 = \frac{\varepsilon - \alpha}{\varepsilon - 1} \frac{S_1}{\alpha} \approx 200 см^2$

Ответ: $\boxed{S_2 = \frac{\varepsilon - \alpha}{\varepsilon - 1} \cdot \frac{S_1}{\alpha} \approx 200 см^2}$

T3.2



Дано: $h, S, q, \varepsilon(x) = \dfrac{2}{1+\frac{x}{h}}$

Найти: $\rho_{пол}(x)$, C

Решение:

$E = \dfrac{4\pi q}{\varepsilon S}$ – внутри конденсатора

$D = E + 4\pi P = \varepsilon E \Rightarrow P = \dfrac{\varepsilon - 1}{4\pi} E = (\varepsilon - 1)\dfrac{q}{\varepsilon S}$

$\operatorname{div}\vec{P} = -\rho_{пол} \Rightarrow \rho_{пол} = -\dfrac{\partial}{\partial x}\left((\varepsilon - 1)\dfrac{q}{\varepsilon S}\right) =$

$= \dfrac{-q}{S}\dfrac{\partial}{\partial x}\left(1 - \dfrac{1+\frac{x}{h}}{2}\right) = +\dfrac{q}{S}\cdot\dfrac{1}{2h} = \dfrac{q}{2hS}$ – не зависит от x.

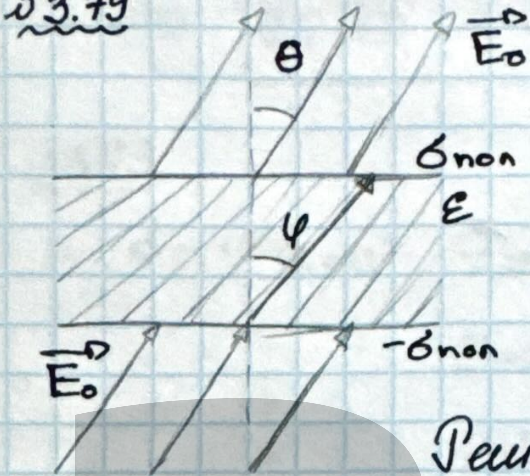
$\cancel{U = \dfrac{4\pi q}{S}\int_0^h \dfrac{2dx}{1+\frac{x}{h}} = \dfrac{8\pi q h}{S}\int_0^1 \dfrac{d\xi}{1+\xi} = \dfrac{8\pi q h}{S}}$

$U = \dfrac{4\pi q}{S}\int_0^h \dfrac{1+\frac{x}{h}}{2}dx = \dfrac{4\pi q}{2S}\cdot\left(h + \dfrac{h^2}{2h}\right) = \dfrac{2\pi q}{S}\cdot\dfrac{3}{2}h = \dfrac{3\pi q h}{S}$

$C = \dfrac{q}{U} = \dfrac{S}{3\pi h}$

Ответ: $\boxed{\rho_{пол} = \dfrac{q}{2hS},\ C = \dfrac{S}{3\pi h}.}$

№3.79



Дано: $\vec{E_0}$ - однородное, θ, ε;

Найти: 1) $\sigma_{пол}$, 2) $\vec{P}$

Решение

$D_{out\,n} - D_{in\,n} = 4\pi\sigma_{ст} = 0$ (т.к. сторонних зарядов нет) $\Rightarrow D_{out\,n} = D_{in\,n}$

$$\left.\begin{aligned} D_{out\,n} &= E_{out\,n} \\ D_{in\,n} &= \varepsilon\cdot E_{in\,n} \end{aligned}\right| \Rightarrow E_{in\,n} = \frac{E_0\cos\theta}{\varepsilon}$$

$E_{in\,\tau} = E_{out\,\tau}$ (граничное условие) $\Rightarrow E_{in\,\tau} = E_0\sin\theta$.

$$\vec{E} + 4\pi\vec{P} = \vec{D} = \varepsilon\vec{E} \Rightarrow \vec{P} = \frac{\varepsilon-1}{4\pi}\vec{E}$$

$$P_n = \frac{\varepsilon-1}{4\pi}\cdot\frac{E_0\cos\theta}{\varepsilon}, \quad P_\tau = \frac{\varepsilon-1}{4\pi}\cdot E_0\sin\theta$$

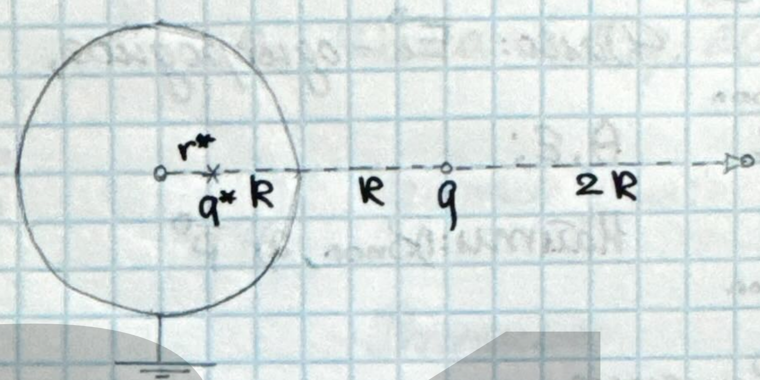
$$\sigma_{пол} = P_n = \frac{(\varepsilon-1)}{4\pi\varepsilon}E_0\cos\theta$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{P_\tau}{P_n} = \varepsilon\operatorname{tg}\theta$$

$$P = \frac{\varepsilon-1}{4\pi\varepsilon}\sqrt{\cos^2\theta + \varepsilon^2\sin^2\theta}$$

Ответ: $\boxed{1)\ \sigma_{пол} = \frac{\varepsilon-1}{4\pi\varepsilon}E_0\cos\theta;\ 2)\ P = \frac{\varepsilon-1}{4\pi\varepsilon}\sqrt{\cos^2\theta+\varepsilon^2\sin^2\theta},\ \operatorname{tg}\varphi = \varepsilon\operatorname{tg}\theta}$

4 неделя Т4.2



Дано: q, $2R \to 4R$, R;

Найти: A, $\Delta W_{инд}$

Решение:

В задаче 2.20 показано, что заземлённая сфера эквивалентна $q^* = -\frac{R}{d} q$ на расстоянии $r^* = \frac{R^2}{d}$ от центра

$$F = \frac{q q^*}{(d - r^*)^2} = -\frac{q^2 R}{d\left(d - \frac{R^2}{d}\right)^2} = -\frac{q^2 R d}{(d^2 - R^2)^2}$$

$$A = -\int_{2R}^{4R} \frac{q^2 R x}{(x^2 - R^2)^2} dx = -\frac{1}{2} q^2 R \int_{(2R)^2}^{(4R)^2} \frac{d\xi}{(\xi - R^2)^2} = \frac{1}{2} q^2 R \left. \frac{1}{\xi - R^2} \right|_{4R^2}^{16R^2} =$$

$$= \frac{1}{2} q^2 R \left(\frac{1}{15R^2} - \frac{1}{3R^2} \right) = -\frac{2q^2}{15R}$$

$$A_{внеш} = -A = \frac{2q^2}{15R}$$

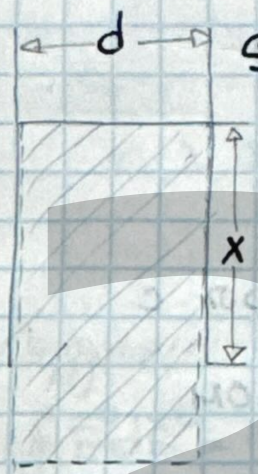
$$A_{внеш} = \Delta W_{вз} + \Delta W_{инд}$$

$$\Delta W_{вз} = \frac{q^*(4R)\, q}{4R - r^*(4R)} - \frac{q^*(2R)\, q}{2R - r^*(2R)} = -\frac{\frac{R}{4R} q^2}{4R - \frac{R^2}{4R}} + \frac{\frac{R}{2R} q^2}{2R - \frac{R^2}{2R}} =$$

$$= -\frac{q^2}{15R} + \frac{q^2}{3R} = +\frac{4q^2}{15R} \Rightarrow \Delta W_{инд} = -\frac{2q^2}{15R}$$

Ответ: $\boxed{A_{внеш} = \frac{2q^2}{15R}, \ \Delta W_{инд} = -\frac{2q^2}{15R}}$

№3.73



$S = a^2$ Дано: пластины - квадратные,

$S = a^2, d, \varepsilon, m$

Найти: x - положение равновесия

Решение:

$C_1 = \frac{a(a-x)}{4\pi d}$, $C_2 = \frac{\varepsilon a x}{4\pi d}$, $C = C_1 + C_2 = \frac{a}{4\pi d}(a - x + \varepsilon x)$

Заряд пластин сохраняется => $W_E = \frac{q^2}{2C}$ - зависит только от x.

В положении равновесия $W = W_E + W_{mg}$ - минимальна =>

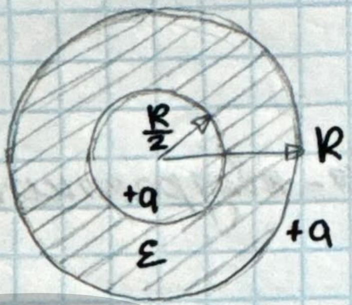
$$\frac{d}{dx}\left(\frac{2q^2\pi d}{a(a-x+\varepsilon x)} + mgx\right) = 0;$$

$$\frac{2q^2\pi d}{a} \cdot \frac{-1}{(a-x+\varepsilon x)^2} \cdot (\varepsilon - 1) + mg = 0$$

$$(a + (\varepsilon - 1)x)^2 = \frac{2\pi q^2 d(\varepsilon - 1)}{mga} \Rightarrow x = \frac{1}{\varepsilon - 1}\left(\sqrt{\frac{2\pi q^2 d(\varepsilon-1)}{mga}} - a\right)$$

Ответ: $\boxed{x = \frac{1}{\varepsilon - 1}\left(\sqrt{\frac{2\pi q^2 d(\varepsilon - 1)}{mga}} - a\right)}$

Т4.3



Дано: $R,\ q,\ \varepsilon = 2$

Найти: W

Решение:

Рассмотрим систему как две сферы с зарядами $+q$ и $-q$ с диэлектриком (конденсатор) и сферу радиуса R с зарядом $2q$.

$$\Delta\varphi = \int_{R/2}^{R} \frac{q}{r^2}\,dr = q\left(-\frac{1}{R} + \frac{2}{R}\right) = \frac{q}{R} \Rightarrow C_0 = R$$

С диэлектриком: $C = \varepsilon R$, тогда

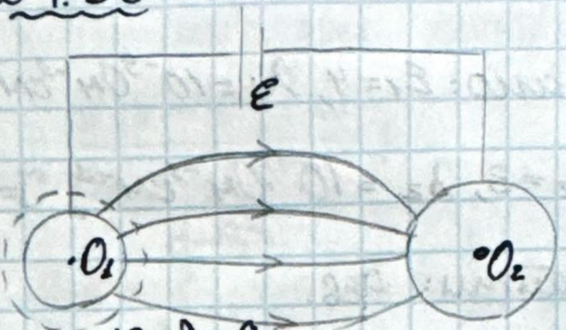
$$W_{конд} = \frac{q^2}{2C} = \frac{q^2}{2\varepsilon R}$$

$$W_{сф} = \int_{R}^{+\infty} \left(\frac{2q}{r^2}\right)^2 \cdot \frac{1}{8\pi} \cdot 4\pi r^2\,dr = 2q^2 \int_{R}^{+\infty} \frac{dr}{r^2} = \frac{2q^2}{R}$$

$$W = W_{конд} + W_{сф} = \frac{q^2}{R}\left(\frac{1}{2\varepsilon} + 2\right) = \frac{9}{4}\,\frac{q^2}{R}$$

Ответ: $\boxed{W = \frac{q^2}{R}\left(2 + \frac{1}{2\varepsilon}\right) = \frac{9}{4}\,\frac{q^2}{R}}$

№4.36



r_1, λ_1, q_1 $\quad$ r_2, λ_2, q_2

Дано: $r_1, r_2, \lambda_1, \lambda_2, \mathcal{E}$

Найти: q_1, q_2

Решение:

Окружим „r_1" поверхностью:

$$\oint \vec{E} d\vec{S} = 4\pi q_1$$

Закон Ома: $\vec{j}_1 = \lambda_1 \vec{E}$

$$I_1 = \oint \vec{j} d\vec{S} = \lambda_1 \oint \vec{E} d\vec{S} = 4\pi \lambda_1 q_1$$

Аналогично:

$$I_2 = \cancel{\pm} 4\pi \lambda_2 q_2$$

Токи равны $\Rightarrow \lambda_1 q_1 = -\lambda_2 q_2$ (–, т.к. I_1 - вытекает, I_2 - втекает)

$$\Delta\varphi = \int_{O_2}^{\infty} \frac{q_2}{r^2} dr + \int_{\infty}^{O_1} \frac{q_1}{r^2} dr = \frac{q_1}{r_1} - \frac{q_2}{r_2} = \mathcal{E}$$

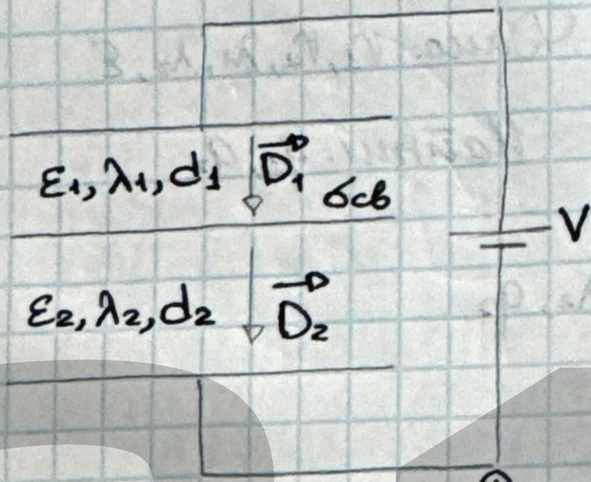
$$q_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} q_2$$

$$-q_2\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1 r_1} + \frac{1}{r_2}\right) = \mathcal{E} \Rightarrow q_2 = \frac{-\mathcal{E} r_1}{\frac{\lambda_2}{\lambda_1} + \frac{r_1}{r_2}}$$

$$q_1\left(\frac{1}{r_1} + \frac{\lambda_1}{\lambda_2 r_2}\right) = \mathcal{E} \Rightarrow q_1 = \frac{\mathcal{E} r_2}{\frac{\lambda_1}{\lambda_2} + \frac{r_2}{r_1}}$$

Ответ: $\boxed{q_1 = \frac{\mathcal{E} r_2}{\frac{\lambda_1}{\lambda_2} + \frac{r_2}{r_1}}, \quad q_2 = \frac{-\mathcal{E} r_1}{\frac{\lambda_2}{\lambda_1} + \frac{r_1}{r_2}}}$

№4.23



Дано: $\varepsilon_1 = 4$, $\lambda_1 = 10^{-9}$ Ом$^{-1}$см$^{-1}$

$\varepsilon_2 = 3$, $\lambda_2 = 10^{-12}$ Ом$^{-1}$см$^{-1}$, $J = 10^{-7}$ А

Найти: $q_{св}$.

Решение:

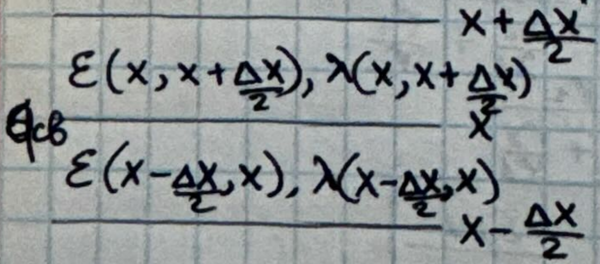
Рассмотрим сначала конденсатор, состоящий из двух диэлектриков...

Граничные условия: $D_2 - D_1 = 4\pi\sigma_{св}$ =>

$$\Rightarrow \sigma_{св} = \frac{1}{4\pi}(\varepsilon_2 E_2 - \varepsilon_1 E_1) = \frac{1}{4\pi}\left(\varepsilon_2 \frac{j}{\lambda_2} - \varepsilon_1 \frac{j}{\lambda_1}\right) =$$

$$= \frac{J}{4\pi S}\left(\frac{\varepsilon_2}{\lambda_2} - \frac{\varepsilon_1}{\lambda_1}\right) \Rightarrow q_{св} = \frac{J}{4\pi}\left(\frac{\varepsilon_2}{\lambda_2} - \frac{\varepsilon_1}{\lambda_1}\right)$$

Если $\lambda(x)$ и $\varepsilon(x)$ – произвольные непрерывные функции, то разбиваем конденсатор на множество очень тонких толщинок Δx:



Для каждой полоски $q_{св}(x) = \frac{J}{4\pi}\left(\frac{\varepsilon(x, x+\frac{\Delta x}{2})}{\lambda(x, x+\frac{\Delta x}{2})} - \right.$

$$\left. - \frac{\varepsilon(x-\frac{\Delta x}{2}, x)}{\lambda(x-\frac{\Delta x}{2}, x)}\right)$$

$$q_{св} = \sum_{x=\frac{\Delta x}{2}}^{d-\frac{\Delta x}{2}} q_{св}(x) = \{\text{ряд свёртывается}\} =$$

$$= \frac{J}{4\pi}\left(\frac{\varepsilon(d-\frac{\Delta x}{2}; d)}{\lambda(d-\frac{\Delta x}{2}; d)} - \frac{\varepsilon(0, \frac{\Delta x}{2})}{\lambda(0, \frac{\Delta x}{2})}\right)$$

При стремлении Δx к нулю: $q_{св} = \frac{J}{4\pi}\left(\frac{\varepsilon_2}{\lambda_2} - \frac{\varepsilon_1}{\lambda_1}\right) =$

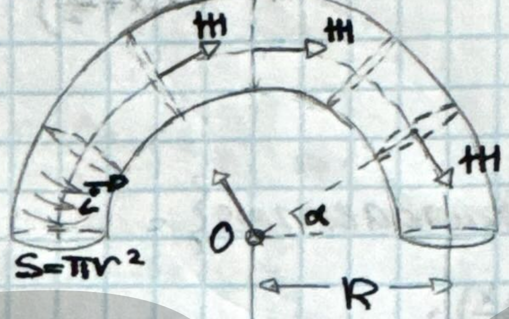
$$= \frac{10^{-7}\,А \cdot \frac{c}{10}\,\frac{ед.\,СГС}{А}}{4\pi}\left(\frac{9}{\text{[illegible]}} - \frac{81}{10^{-9}}\right) Ом \cdot см \cdot \frac{10^{9}}{c^2}\,\frac{ед.\,СГС}{Ом} \approx$$

≈ 79 ед. СГС

Ответ: $\boxed{q_{св} = \frac{J}{4\pi}\left(\frac{\varepsilon_2}{\lambda_2} - \frac{\varepsilon_1}{\lambda_1}\right) \approx 79 \text{ ед. СГС}}$

5 неделя

5.12



Дано: r, R, i

Найти: B в точке O.

Решение:

Разобьём соленоид на маленькие витки с током.

Будем считать, что $R >> r$, тогда поле, создаваемое одним витком - поле на оси этого витка, рассчитываемое как поле магнитного диполя.

$$\vec{m} = \frac{I\vec{S}}{c}$$

$$d\vec{B} = -\frac{\vec{m}}{R^3} = -\frac{I\vec{S}}{cR^3}$$

$$dB_x = -\frac{IS}{cR^3}\sin\alpha$$

$$dB_y = +\frac{IS}{cR^3}\cos\alpha$$

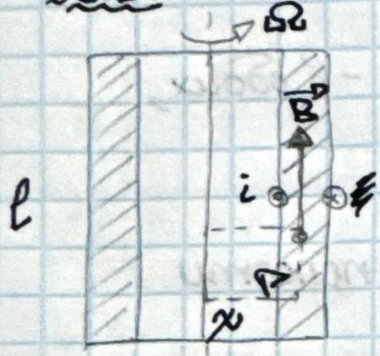
$$B_x = +\frac{IS}{cR^3}\cos\alpha\Big|_0^{\pi} = \frac{2IS}{cR^3}$$

$$B_y = \frac{IS}{cR^3}\sin\alpha\Big|_0^{\pi} = 0$$

$$B = \frac{2IS}{cR^3} = \frac{2\pi r^2 I}{cR^3} = \frac{2\pi i}{c}\left(\frac{r}{R}\right)^2$$

Ответ: $B = \frac{2\pi i}{c}\left(\frac{r}{R}\right)^2$

№5.14



Дано: $\varkappa = 1$ ед. СГС, $\Omega = 1000\ \frac{\text{рад}}{\text{с}}$

1) цилиндр из металла

2) цилиндр из диэлектрика $\varepsilon = 3$

Найти: B, B_{in} и B_{out} в сл 1 и 2

Решение:

1) На внутренней поверхности: $-\sigma$, такое что

$l \cdot \varkappa = 2\pi r l \sigma \Rightarrow \sigma = \frac{\varkappa}{2\pi r}$ (поле внутри металла 0)

На поверхности образуется ток с поверхностной плотностью $i = v\sigma = \Omega r \cdot \frac{\varkappa}{2\pi r} = \frac{\varkappa\Omega}{2\pi}$.

Теорема о циркуляции для контура Г:

$B \cdot l = \frac{4\pi}{c} \cdot i l \Rightarrow B = \frac{4\pi}{c} \cdot \frac{\varkappa\Omega}{2\pi} = \frac{2\varkappa\Omega}{c}$

Для контура меньшего размера:

$B_{in} l = 0 \Rightarrow B_{in} = 0$, аналогично $B_{out} = 0$

2) $E + 4\pi P = \varepsilon E \Rightarrow P = \frac{1}{4\pi}(\varepsilon - 1) \cdot \frac{2\varkappa}{\varepsilon r}$

Внутри и снаружи аналогично: $B_{in} = B_{out} = 0$

$\sigma = P = \frac{(\varepsilon-1)\varkappa}{2\pi r}$, $B = \frac{4\pi}{c} \cdot i = \frac{4\pi}{c} \cdot \Omega r \cdot \frac{(\varepsilon-1)\varkappa}{\varepsilon 2\pi r} =$

$= \frac{2(\varepsilon-1)\varkappa\Omega}{\varepsilon c}$

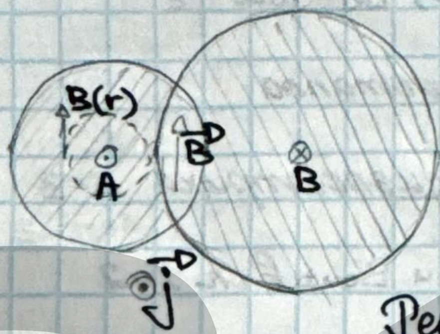
Ответ: $\boxed{B_{in} = B_{out} = 0;\ 1)\ B = \frac{2\varkappa\Omega}{c} \approx 0{,}7 \cdot 10^{-7}\ \text{Гс};\ 2)\ B = \frac{2(\varepsilon-1)\varkappa\Omega}{\varepsilon c} = 0{,}44 \cdot 10^{-7}\ \text{Гс}}$

№5.23

Дано: $j = 10^3 \frac{A}{см^2}$ – в обоих,

$AB = d = 5см$

Найти: $\vec{B}$ – в полости



Решение:

Будем считать $\vec{j}$ направленным на наблюдателя.

Теорема о циркуляции для цилиндра:

$$B(r)\cdot 2\pi r = \frac{4\pi}{c}\cdot j\cdot \pi r^2 \Rightarrow B(r) = \frac{2\pi}{c} r j$$

Для A: $\vec{B}_A = \frac{2\pi}{c}[\vec{r}_A \times \vec{j}]$

Для B: $\vec{B}_B = -\frac{2\pi}{c}[\vec{r}_B \times \vec{j}]$

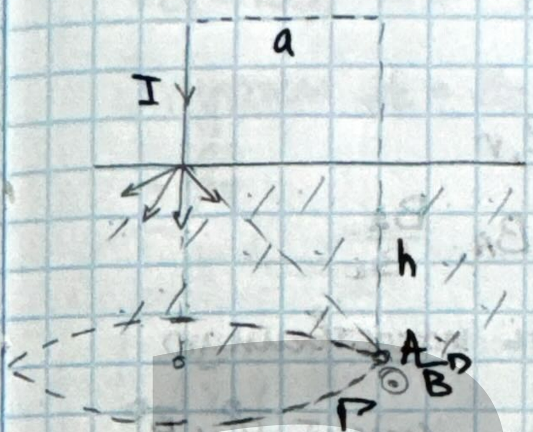
$$\vec{B} = \frac{2\pi}{c}[\vec{r}_A - \vec{r}_B \times \vec{j}] = \frac{2\pi}{c}[\vec{BA} \times \vec{j}] -$$

– на рисунке вверх.

$$B = \frac{2\pi}{c} jd = \frac{2\pi}{c}\cdot\left(10^3 \frac{A}{см^2}\cdot \frac{c}{10}\,\frac{ед.СГС}{A}\right)\cdot 5см \simeq 3141\ Гс$$

Ответ: $\boxed{\vec{B} \text{ на рисунке вверх, } B = \frac{2\pi}{c} jd \simeq 3141\ Гс}$

T5.1



Дано: $I, a, h = \frac{a}{\sqrt{3}}$

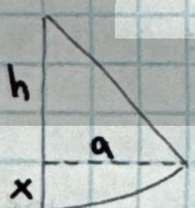
Найти: B в точке A

Решение:

Рассмотрим контур Γ. В силу симметрии:

$$B_A \cdot 2\pi a = \frac{4\pi}{c} I_\Gamma$$

$$I_\Gamma = I \cdot \frac{\Omega}{4\pi/2}$$



Площадь сегмента: $S = 2\pi\sqrt{a^2+h^2}\cdot x =$

$$= 2\pi\sqrt{a^2+h^2}\left(\sqrt{a^2+h^2}-h\right)$$

$$\Omega = \frac{S}{a^2+h^2} = 2\pi\cdot\frac{\left(a^2+h^2-h\sqrt{a^2+h^2}\right)}{a^2+h^2} =$$

$$= 2\pi\left(1-\frac{h}{\sqrt{a^2+h^2}}\right).$$

Тогда $B\cdot a = \frac{2}{c}\cdot I\cdot\frac{2\pi}{2\pi}\left(1-\frac{h}{\sqrt{a^2+h^2}}\right) \Rightarrow$

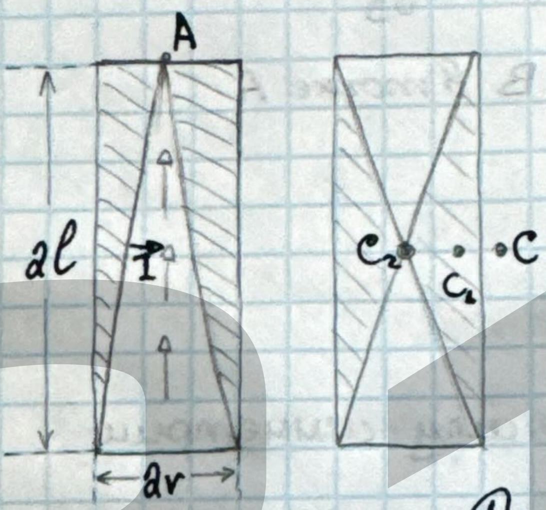
$$\Rightarrow B = \frac{2I}{ca}\left(1-\frac{h}{\sqrt{a^2+h^2}}\right) = \frac{2I}{ca}\left(1-\frac{a/\sqrt{3}}{\sqrt{a^2+\frac{1}{3}a^2}}\right) =$$

$$= \frac{2I}{ca}\left(1-\frac{1}{2}\right) = \frac{I}{ca}$$

Ответ: $\vec{B}$ направлено на наблюдателя

$$B = \frac{2I}{ca}\left(1-\frac{h}{\sqrt{a^2+h^2}}\right) = \frac{I}{ca}$$

6 неделя | №6.5



Дано: I, l, r

Найти: B_A, $\frac{B_A}{B_c}$

Начертить качественную картину ~~линий~~ $\vec H$ и $\vec B$

Решение:

$$\vec I = \frac{\vec{M}}{V} = \frac{J_{мол} S/c}{2lS}\vec n = \frac{J_{мол}}{2lc}\vec n = \frac{\vec i_{мол}}{c}$$

Эти токи создают поле в точке A:

$$B_A = \frac{i}{c}\Omega_A$$

Считая, что $r \ll l$: $\Omega_A \approx 2\pi - \frac{\pi r^2}{(2l)^2} = 2\pi\left(1 - \frac{r^2}{8l^2}\right)$

$$B_A = \frac{i}{c}\Omega_A = 2\pi I\left(1 - \frac{r^2}{8l^2}\right)$$

Из граничных условий: $\{\vec H_\tau\} = \frac{4\pi}{c}[\vec i_{ст} \times \vec n]$ в точках C и C_1, при этом из симметрии $\vec H \parallel \vec I$ =>

=> $H_c = H_{c1}$

Внутри цилиндра поле однородно => $H_{c1} = H_{c2}$

Найдё B_{c2}:

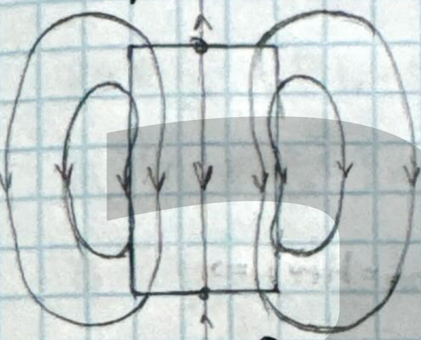
$$\Omega_c \approx 4\pi - 2\cdot\frac{\pi r^2}{l^2} = 2\pi\left(2 - \frac{r^2}{l^2}\right)$$

$$B_{c2} = 2\pi I\left(2 - \frac{r^2}{l^2}\right)$$

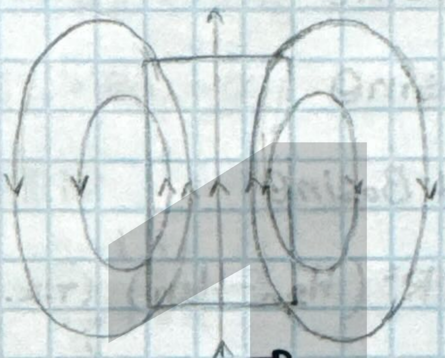
$H_{c2} = B_{c2} - 4\pi I = -2\pi I \frac{r^2}{\ell^2}$

Получаем $H_c = B_c = -2\pi I \frac{r^2}{\ell^2}$, тогда $\left|\frac{B_A}{B_c}\right| = \frac{2\pi I\left(1 - \frac{r^2}{8\ell^2}\right)}{2\pi I \frac{r^2}{\ell^2}} \simeq$

$\simeq \frac{\ell^2}{r^2}$



Поле $\vec{H}$



Поле $\vec{B}$

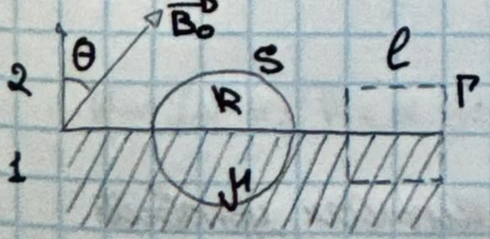
Снаружи поля $\vec{H}$ и $\vec{B}$ совпадают

Внутри посередине $\vec{H} \uparrow\downarrow \vec{B}$

Во всех остальных точках качественный вид $\vec{H}$ представлен на рисунке $\vec{H} = \vec{B} - 4\pi \vec{I}$

Ответ: $\boxed{B_A \simeq 2\pi I\left(1 - \frac{r^2}{8\ell^2}\right) \simeq 2\pi I. \quad \frac{B_A}{B_c} \simeq \frac{\ell^2}{r^2}}$

№6.9



Дано: $B_0, \mu, \theta, S, R, \ell$

Найти: $\oint_S \vec{H} d\vec{S}$; $\oint_L \vec{B} d\vec{\ell}$

Решение:

Из граничных условий: $B_{1n} = B_{2n}$, $H_{1\tau} = H_{2\tau}$

$$B_{1n} = \mu H_{1n} \Rightarrow \quad H_{1n} = \frac{1}{\mu} B_0 \cos\theta, \quad H_{2n} = B_0 \cos\theta = B_{1n} = B_{2n}$$
и
$$B_{2n} = H_{2n}$$

$$H_{2\tau} = B_{2\tau} = B_0 \sin\theta$$

$$H_{1\tau} = H_{2\tau} = B_0 \sin\theta$$

$$B_{1\tau} = \mu H_{1\tau} = \mu B_0 \sin\theta$$

1) $\oint_S \vec{H} d\vec{S} = \pi R^2 (H_{2n} - H_{1n})$ (т.к. $H_{2\tau} = H_{1\tau}$) $\Rightarrow$

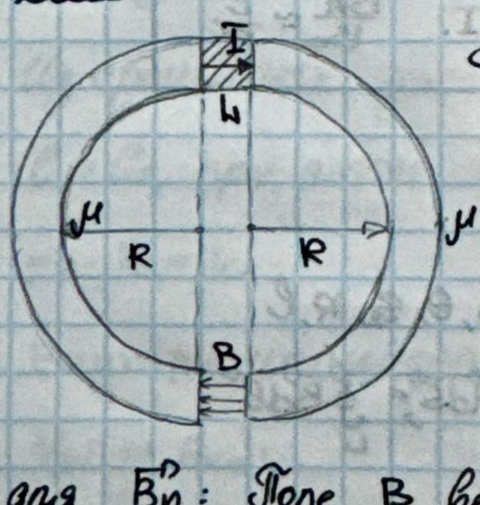
$\Rightarrow \oint_S \vec{H} d\vec{S} = \pi R^2 B_0 \cos\theta \left(1 - \frac{1}{\mu}\right)$

2) $\oint_\Gamma \vec{B} d\vec{l} = \cancel{B_{1\tau} l - B_1}\ B_{2\tau} l - B_{2n}(l - x) - B_{1n} x -$

$- B_{1\tau} l + B_{1n} x + B_{2n}(l - x) = B_0 l \sin\theta (1 - \mu)$

Ответ: $\boxed{\oint_S \vec{H} d\vec{S} = \pi R^2 B_0 \cos\theta \left(1 - \frac{1}{\mu}\right); \ \oint_\Gamma \vec{B} d\vec{l} = l B_0 \sin\theta (1 - \mu)}$

№6.18



Дано: $\mu \gg 1$, I, L, R

Найти: B

Решение:

В силу граничных условий для $\vec{B_n}$: Поле B везде одинаково ($\{\vec{B_n}\} = 0$)

$\vec{H}_{магн} = \vec{B} - 4\pi \vec{I}$, $H_{магн} = B - 4\pi I$

$H_{серд} = \frac{1}{\mu} B$

$H_{зазор} = B$

$\oint \vec{H} d\vec{l} = \frac{4\pi}{c} I_{ст} = 0 \Rightarrow 2\pi R H_{серд.} + L H_{магн} + L H_{зазор} = 0$

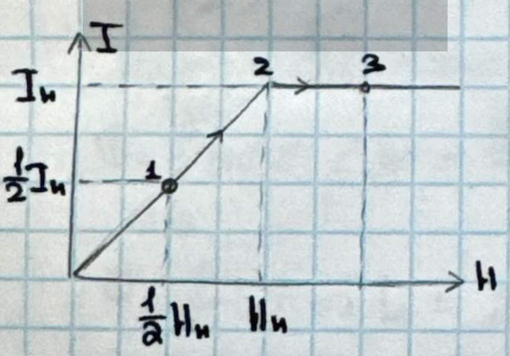
$2\pi R \frac{B}{\mu} + BL - 4\pi I L + BL = 0$

$B\left(2L + \frac{2\pi R}{\mu}\right) = 4\pi I L$

$B = \frac{4\pi L \mu}{2L\mu + 2\pi R} I = \frac{2\pi L \mu}{L\mu + \pi R} I$

Ответ: $\boxed{B = \frac{2\pi L \mu}{L\mu + \pi R} I}$

Т6.1



Дано: тороидальная катушка, $I(H)$, I увеличивается в 3 раза, B увеличивается в 21

Найти: μ при $H < H_н$

Решение:

$H \sim I_{ст} \Rightarrow H_3 = 3H_1 = \frac{3}{2} H_н$ – конечное значение

На 1–2: $B = \mu H = H + 4\pi I \rightarrow 4\pi I = (\mu - 1) H$

$B_1 = \mu \cdot \frac{1}{2} H_н$, $4\pi I_2 = (\mu - 1) H_н$

$B_3 = H_3 + 4\pi I_2 = \frac{3}{2} H_н + (\mu - 1) H_н = (\mu + \frac{1}{2}) H_н$

$$\frac{B_3}{B_1} = 2,1 = \frac{2\mu+1}{\mu} = 2 + \frac{1}{\mu} \Rightarrow \frac{1}{\mu} = 0,1; \mu = 10$$

Ответ: $\boxed{\mu = 10}$

№5.28 7 неделя

Дано: $l = 400$ мм, $D = 20$ мм, $d = 1$ мм

Найти: L

Решение:

Найдём поток через заштрихованную поверхность:

$r < \cancel{\frac{d}{2} :\ B \cdot 2\pi r = \frac{4\pi}{c} \cdot \frac{\pi r^2}{\pi d^2/4} \mathcal{I} \Rightarrow B = \frac{8\mathcal{J} r}{c d^2}}$ $\quad B = \frac{8\mathcal{J} r}{c d^2}$

$\cancel{\Phi = \int_0^{d/2} B(r)}$ $\quad \Phi_1 = \frac{\mathcal{J} l}{c} \rightarrow L_1 = l = 1$ мм (далее пренебрегаем)

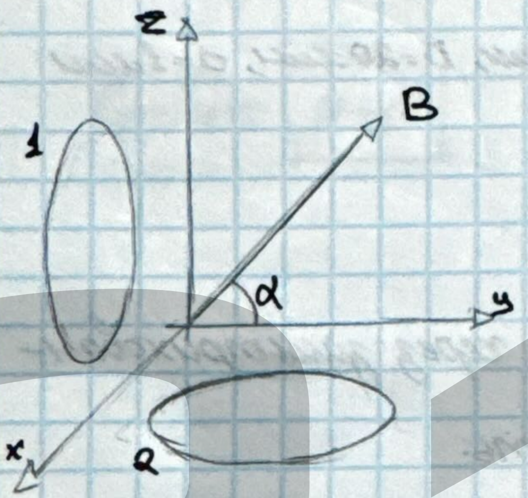
$B(r) = \frac{2\mathcal{J}}{cr}$ – поле провода с током

$$\Phi = \int_{d/2}^{D/2} B(r)\, l\, dr = \frac{2\mathcal{J} l}{c} \int_{d/2}^{D/2} \frac{dr}{r} = \frac{2\mathcal{J} l}{c} \ln\frac{D}{d}$$

$$\Phi = \frac{1}{c} L \mathcal{J} \Rightarrow L = 2 l \ln\frac{D}{d} \simeq 240 \text{ см}$$

Ответ: $\boxed{L = 2l \cdot \ln\frac{D}{d} \simeq 240 \text{ см}}$

17.1



Дано: $S_1 = S_2 = S$, сверхпроводники, B - плавно возрастает, $\left|\frac{I_2}{I_1}\right| = 2$, $\alpha = \operatorname{arctg} 3$

Найти: M

Решение:

$\Phi_{B1} = BS\cos\alpha, \quad \Phi_{B2} = BS\sin\alpha$

В сверхпроводниках $\mathcal{E}_{ind} = -\frac{1}{c}\frac{d\Phi}{dt} = 0 \Rightarrow \Phi = const$

Изначально $\Phi_0 = 0$ (при $B = 0$)

$\Phi_1 = BS\cos\alpha - L|I_1| - M|I_2| = \Phi_0$

$\Phi_2 = BS\sin\alpha - L|I_2| - M|I_1| = \Phi_0$

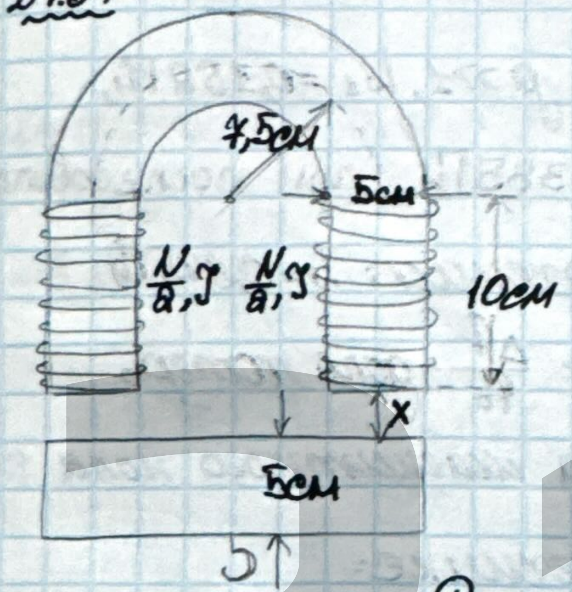
$$\begin{cases} L|I_1| + M|I_2| = BS\cos\alpha \\ M|I_1| + L|I_2| = BS\sin\alpha \end{cases} \Rightarrow \frac{M + L\left|\frac{I_2}{I_1}\right|}{L + M\left|\frac{I_2}{I_1}\right|} = \operatorname{tg}\alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M\left(1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \left|\frac{I_2}{I_1}\right|\right) = L\operatorname{tg}\alpha - L\left|\frac{I_2}{I_1}\right|$$

$$M = L\,\frac{\operatorname{tg}\alpha - \left|\frac{I_2}{I_1}\right|}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \left|\frac{I_2}{I_1}\right|} = -\frac{1}{5}L$$

Ответ: $\boxed{M = -\frac{1}{5}L}$

№7.64



Дано: размеры на рисунке,

$N=200$, $J=2A$, $\mu=200$

Найти: F

Решение:

Будем считать, что $B=\text{const}$ (при $\mu \gg 1$ рассеиваемость мала)

Длина магнитного контура:

$$l = 2\cdot 10\text{см} + \pi\cdot 7{,}5\text{см} + 2{,}5\text{см}\cdot 2 + 15\text{см} \approx 63{,}6\text{см}$$

$$\oint \vec{H}d\vec{l} = \frac{B}{\mu}\cdot l + B\cdot 2x = \frac{4\pi}{c}JN \Rightarrow B = \frac{4\pi JN}{c\left(2x+\frac{l}{\mu}\right)}$$

$$W = \frac{B^2}{8\pi}\cdot S\cdot 2x + \frac{B^2}{8\pi\mu}Sl, \text{ где } S = 25\text{см}^2$$

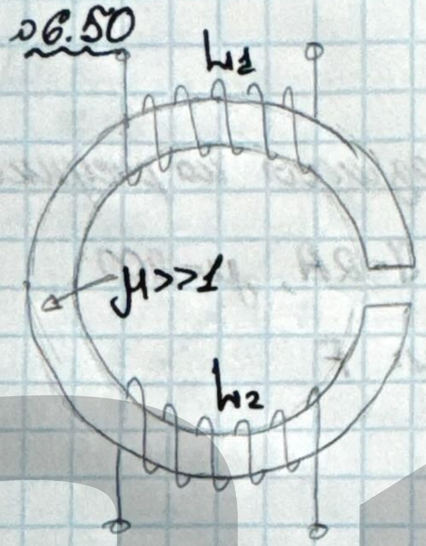
$$W = \frac{B^2 S}{8\pi}\left(2x+\frac{l}{\mu}\right) = \frac{16\pi^2 J^2 N^2}{c^2\left(2x+\frac{l}{\mu}\right)^2}\cdot\frac{S}{8\pi}\left(2x+\frac{l}{\mu}\right) =$$

$$= \frac{2\pi J^2 N^2 S}{c^2\left(2x+\frac{l}{\mu}\right)}$$

$$F = -\frac{\partial W}{\partial x} = \frac{4\pi J^2 N^2 S}{c^2\left(2x+\frac{l}{\mu}\right)^2} \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{4\pi J^2 N^2 S \mu^2}{c^2 l^2} = 49\cdot 10^5 \text{дин}$$

Ответ: $\boxed{F = \frac{4\pi J^2 N^2 \mu^2 S}{c^2 l^2} = 49\cdot 10^5 \text{дин} = 49\,H}$

№6.50



Дано: $\mu >> 1$, $L_1 = 0{,}152$ Гн, $L_2 = 0{,}385$ Гн, при последовательном подключении: $L = 0{,}945$ Гн

Найти: $\frac{\Delta\Phi}{\Phi_0}$ - доля потерь потока магнитного поля в сердечнике.

Решение.

Из теоремы взаимности:

$$\begin{cases} c\Phi_1 = L_1 J_1 + M J_2 \\ c\Phi_2 = M J_1 + L_2 J_2 \end{cases}$$

При последовательном подключении: $J_1 = J_2 = J$

$$c\Phi = c(\Phi_1 + \Phi_2) = (L_1 + L_2 + 2M)J = LJ \Rightarrow M = \frac{1}{2}(L - L_1 - L_2)$$

Если бы потерь не было, то из задачи 5.30:

$$M_0 = \sqrt{L_1 L_2} \cancel{= c\Phi_0 = L(\sqrt{L_1} + \sqrt{L_2})^2 J}$$

$$\cancel{c\Delta\Phi = L((\sqrt{L_1} + \sqrt{L_2})^2 - L)J}$$

~~Таким образом~~ $\cancel{\frac{\Delta\Phi}{\Phi_0} = 1 - \frac{L}{(\sqrt{L_1} + \sqrt{L_2})^2}}$

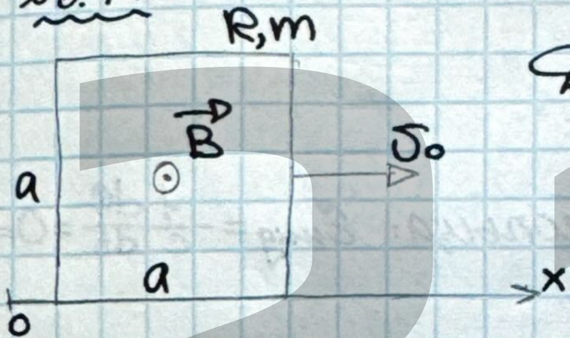
Потери обусловлены потоком магнитного поля в сердечнике, поэтому

$$\frac{\Delta\Phi}{\Phi_0} = \frac{\frac{1}{c}M_0 J - \frac{1}{c}MJ}{\frac{1}{c}M_0 J} = \frac{M_0 - M}{M_0} =$$

$$= 1 - \frac{L - L_1 - L_2}{2\sqrt{L_1 L_2}} \approx 15{,}7\%$$

Ответ: $\boxed{\frac{\Delta\Phi}{\Phi_0} = 1 - \frac{L - L_1 - L_2}{2\sqrt{L_1 L_2}} \approx 16\%}$

№8.47



Дано: $a, R, v_0, \frac{dB}{dx} = k$

Найти: $v(t)$

Решение:

$$\mathcal{E}_{ind} = -\frac{1}{c}\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{1}{c}a^2 \cdot \frac{dB}{dt} = -\frac{a^2}{c} \cdot \frac{dB}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = -\frac{a^2 v k}{c}$$

Мощность тепловых потерь:

$$P_{тепл} = \frac{\mathcal{E}_{ind}^2}{R} = \frac{a^4 k^2}{c^2 R} v^2$$

За время dt: $dQ_{тепл} = \frac{a^4 k^2}{c^2 R} v^2 dt$

$$dE_{кин} = d\left(\frac{m v^2}{2}\right) = m v \, dv$$

Закон сохранения энергии: $dE_{кин} + dQ_{тепл} = 0$

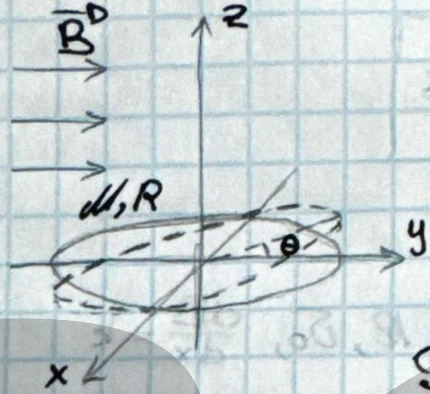
$$m\,dv = -\frac{a^4 k^2}{c^2 R} v\,dt \Rightarrow \frac{dv}{v} = -\frac{a^4 k^2}{m c^2 R} dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v = v_0 \exp\left(-\frac{a^4 k^2 t}{m c^2 R}\right)$$

Ответ: $\boxed{v = v_0 \exp\left(-\frac{a^4 k^2 t}{m c^2 R}\right)}$

8 неделя

Т8.1



Дано: M, R, B, L, кольцо сверхпроводящее

Найти: T

Решение:

Для сверхпроводящего кольца: $\mathcal{E}_{инд} = -\frac{1}{c}\frac{d\Phi}{dt} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \Phi = const$

При повороте вокруг оси x на угол θ:

$\Phi = BS\sin\theta - \frac{1}{c}IL = 0$ (при $\theta = 0$ $\Phi = 0$)

То есть в кольце возникает ток $I = \frac{cBS}{L}\sin\theta$, компенсирующий поток поля $\vec{B}$.

Кольцо эквивалентно магнитному диполю с моментом $\mathfrak{M} = \frac{IS}{c} = \frac{BS^2}{L}\sin\theta$

На диполь действует момент механических сил $\vec{M} = |[\vec{\mathfrak{M}} \times \vec{B}]| = \mathfrak{M}B\cos\theta = \frac{B^2S^2}{L}\sin\theta\cos\theta \approx \frac{B^2S^2}{L}\theta$

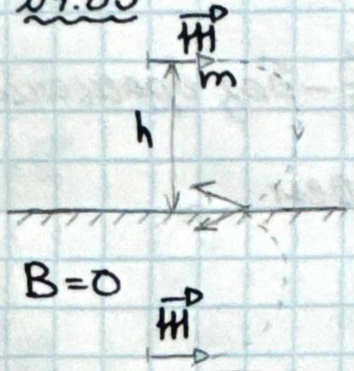
Момент инерции кольца относительно Ox:

$I_x = \frac{1}{2}MR^2$, тогда $I_x\ddot{\theta} = -\frac{B^2S^2}{L}\theta$, откуда

$\omega = \frac{BS}{\sqrt{\frac{1}{2}LMR^2}} = \frac{\pi R \cancel{^2} B}{\sqrt{\frac{1}{2}LM}} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\sqrt{2LM}}{BR}$

Ответ: $\boxed{T = \frac{\sqrt{2LM}}{BR}}$

№7.83



Дано: $\mathfrak{m} = 10^3$ Гс·см^3, $m = 10$ г,

магнитик парит над сверхпроводником

Найти: h

Решение:

Система эквивалентна диполю, отражённому в плоскости (выполнение граничных условий очевидно из симметрии)

Нижний диполь создаёт поле $\vec{B} = \frac{3(\vec{\mathfrak{m}},\vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{\mathfrak{m}}}{r^3} = -\frac{\vec{\mathfrak{m}}}{r^3}$

Энергия взаимодействия: $W_B = -(\vec{\mathfrak{m}},\vec{B}) = \frac{\mathfrak{m}^2}{r^3} \cancel{\frac{\mathfrak{m}^2}{8h^3}}$

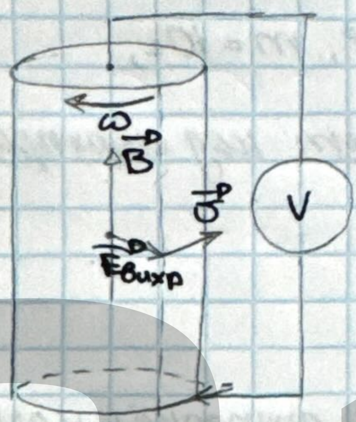
Полная энергия $\Pi = \frac{\mathfrak{m}^2}{r^3} + mgh$

Минимум при $\Pi' = 0$, то есть $mg - \frac{3\mathfrak{m}^2}{(2h)^4} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow h = \frac{1}{2}\sqrt[4]{\frac{3\mathfrak{m}^2}{mg}} \approx 2{,}09$ см

Ответ: $\boxed{h = \frac{1}{2}\sqrt[4]{\frac{3\mathfrak{m}^2}{mg}} \approx 2{,}09 \text{ см}}$

Т8.2



Дано: $E_0 = 30\,\frac{кВ}{см}$ – без вращения,

$\omega = 10^3\,\frac{рад}{с}$, $r = 30$ см

Найти: $\Delta\varphi$

Решение:

Изначально (без вращения) заряд распределён по поверхности и $E_0 = \frac{2\varkappa}{r} \Rightarrow \varkappa = \frac{1}{2}E_0 r$

При вращении заряда q: $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{E}_{вихр}) + \frac{q}{c}[\vec{v}\times\vec{B}] = q\vec{E}_{вихр} + \frac{q}{c}[\vec{v}\times\vec{B}]$. При переходе в СО, в которой $\vec{v} \overset{!}{=} 0$: $\vec{F} = q\vec{E}_{вихр}$, откуда $\vec{E}_{вихр} = \frac{1}{c}[\vec{v}\times\vec{B}]$ – направлено по радиусу.

Из-за вращения на поверхности возникает ток

$i = \frac{I}{l} = \frac{1}{l}\cdot\frac{\omega r}{2\pi r}\cdot\varkappa l = \frac{\omega\varkappa}{2\pi}$

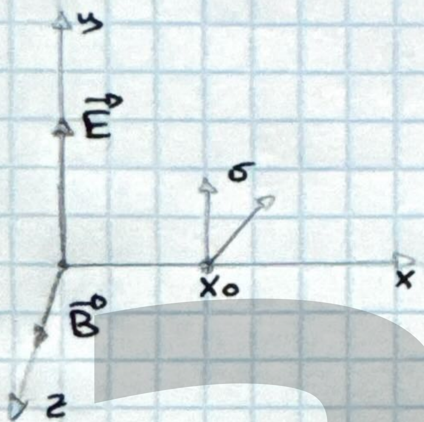
Поле (как в соленоиде): $B = \frac{4\pi}{c}i = \frac{2\omega\varkappa}{c}$

Как было показано выше: $E = \frac{1}{c}\frac{2\omega\varkappa}{c}\cdot\omega x$,

$\Delta\varphi = \int_0^r E\,dx = \frac{2\omega^2\varkappa}{c^2}\cdot\frac{r^2}{2} = \frac{\omega^2 r^3 E_0}{2c^2} \approx 0{,}45$ мкВ

Ответ: $\boxed{\Delta\varphi = \frac{\omega^2 r^3 E_0}{2c^2} = 0{,}45\text{ мкВ}}$

№8.34



Дано: x_0, $\vec{E} \parallel Oy$, $\vec{B} \parallel Oz$, $E \ll B$, $v \ll c$

Найти: T, l - снова в одной точке

Решение:

Перейдём в СО, в которой $\vec{E}' = 0$:

$\vec{F} = q\vec{E} + \frac{q}{c}[\vec{v} \times \vec{B}]$ - в лабораторной СО

$\vec{F} = q\vec{E} + \frac{q}{c}[\vec{v}_0 \times \vec{B}] + \frac{q}{c}[\vec{v}' \times \vec{B}]$

$\vec{E}' = 0$ при $\vec{E} = -\frac{1}{c}[\vec{v}_0 \times \vec{B}]$

Пусть $\vec{v}_0 = \alpha[\vec{E} \times \vec{B}]$, тогда $\vec{E} = \frac{\alpha}{c}\vec{B} \times [\vec{E} \times \vec{B}] =$

$= \frac{\alpha}{c}B^2\vec{E}$, откуда $\alpha = \frac{c}{B^2}$, то есть $\vec{v}_0 = \frac{c}{B^2}[\vec{E} \times \vec{B}]$

На электрон действует сила $\vec{F} = \frac{e}{c}[\vec{v}' \times \vec{B}]$ -

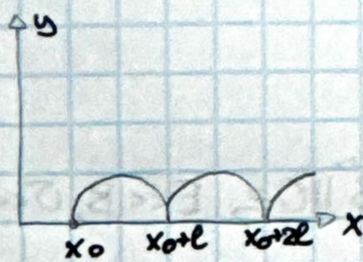
- движение по окружности

$\frac{e}{c}v'B = m\frac{v'^2}{r} \Rightarrow r = \frac{mv'c}{eB}$, $\frac{1}{\omega} = \frac{mc}{eB}$, $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi mc}{eB}$

Точкой, в которой встретятся электроны в подвижной СО является x_0', то есть $l = v_0 T =$

$= \cancel{\frac{e}{c}v'B \cdot \frac{2\pi mc}{eB}} \; \frac{c}{B^2}EB \cdot \frac{2\pi mc}{eB} = \frac{2\pi mc^2 E}{eB^2}$

При $v = 0$: циклоида (т.к. в подвижной СО: $\vec{v}' = -\vec{v}_0 \parallel Ox$)



Ответ: $\boxed{T = \frac{2\pi mc}{eB}, \ l = \frac{2\pi mc^2 E}{eB^2}}$