I. Линейные уравнения с постоянными коэффициентами

С §8 № 3

$y'' + 3y' + 2y = 0$

Характеристическое уравнение:

$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$

$\lambda = \frac{-3 \pm 1}{2} = -2; -1$ – оба корня кратности 1 =>

$\Rightarrow y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x}$

Ответ: $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

С §8 № 12

$y'' - 6y' + 9y = 0$

Характеристическое уравнение:

$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$

$(\lambda - 3)^2 = 0 \Rightarrow \lambda = 3$ кратности 2 =>

$\Rightarrow y = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x}$

Ответ: $y = e^{3x}(C_1 + C_2 x)$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

С §8 № 19

$y''' - 3y'' + 7y' - 5y = 0$

Характеристическое уравнение:

$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 7\lambda - 5 = 0;$

$\lambda=1$ - корень $\Rightarrow (\lambda-1)(\lambda^2-2\lambda+5)=0$

$\lambda=1,\ \lambda=\frac{2\pm 4i}{2}=1\pm 2i$ - все корни кратности 1 $\Rightarrow$

$\Rightarrow y=C_1e^x+C_2e^x\sin 2x+C_3e^x\cos 2x$

Ответ: $y=(C_1+C_2\sin 2x+C_3\cos 2x)e^x,\ C_1,C_2,C_3\in\mathbb{R}$

С§8 №35

$y^{(IV)}+8y''+16y=0$

Характеристическое уравнение:

$\lambda^4+8\lambda^2+16=0$

$(\lambda^2+4)^2=0$

$\lambda^2=-4 \Rightarrow \lambda=\pm 2i$ - каждый кратности 2 $\Rightarrow$

$\Rightarrow y=C_1e^{0\cdot x}\sin 2x+C_2e^{0x}\cdot x\cdot\sin 2x+C_3e^{0\cdot x}\cos 2x+$

$+C_4e^{0\cdot x}\cdot x\cos 2x$

Ответ: $y=(C_1+C_2x)\sin 2x+(C_3+C_4x)\cos 2x,\ C_1,C_2,C_3,C_4\in\mathbb{R}$

С§8 №40

$y''+2y'+y-x^2e^{-x}$

Характеристическое уравнение:

$\lambda^2+2\lambda+1=0$

$\lambda=-1$ - кратности 2 $\Rightarrow y_0=(C_1+C_2x)e^{-x}$

$\mu=-1$ - является корнем характеристического уравнения порядка 2 => возникает резонанс ~~порядка~~ порядка 2. $m=2$ - степень $P_m(x)=x^2$

$$y_r=x^2Q_2(x)e^{-x}=(ax^4+bx^3+cx^2)e^{-x}$$

$$y_r'=\left[-(ax^4+bx^3+cx^2)+(4ax^3+3bx^2+2cx)\right]e^{-x}=$$

$$=(-ax^4-bx^3+4ax^3-cx^2+3bx^2+2cx)e^{-x}$$

$$y_r''=\left[-(-ax^4-bx^3+4ax^3-cx^2+3bx^2+2cx)+(-4ax^3-3bx^2+12ax^2-2cx+6bx+2c)\right]e^{-x}$$

Подставляем:

$$ax^4+(b-4a-4a)x^3+(c-3b-3b+12a)x^2+(-2c-2c+6b)x+2c-$$

$$-2ax^4-2bx^3+8ax^3-2cx^2+6bx^2+4cx+ax^4+bx^3+cx^2=x^2$$

Заметим, что $c=0$ (справа коэффициент при x^0 – 0)

$$0\cdot ax^4+0\cdot bx^3+12ax^2+6bx=x^2 \Rightarrow b=0,\ a=\frac{1}{12} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_r=\frac{1}{12}x^4e^{-x} \Rightarrow y=y_0+y_r=(C_1+C_2x)e^{-x}+\frac{x^4}{12}e^{-x}$$

Ответ: $y=(C_1+C_2x)e^{-x}+\frac{x^4}{12}e^{-x},\ C_1,C_2\in\mathbb{R}$

С §8 №43

$$y''-y=e^x\cos x$$

Характеристическое уравнение: $\lambda^2-1=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda = \pm 1 \Rightarrow y_0 = C_1e^x + C_2e^{-x}$

$m = 0$ - степень $P_m(x) = 1$

$\mu = 1 + i$: μ и $\bar{\mu}$ не являются корнями характеристического уравнения $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ резонанса нет, тогда $y_r = e^x(A\cos x + B\sin x)$

$y_r' = e^x((A+B)\cos x + (B-A)\sin x)$

$y_r'' = e^x(2B\cos x - 2A\sin x)$

$y_r'' - y_r = e^x((2B-A)\cos x - (2A+B)\sin x) = e^x\cos x \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2B - A = 1 \\ 2A + B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -\frac{1}{5} \\ B = \frac{2}{5} \end{cases} \Rightarrow y_r = e^x\left(-\frac{1}{5}\cos x + \frac{2}{5}\sin x\right) \Rightarrow$$

$\Rightarrow y = y_0 + y_r = C_1e^x + C_2e^{-x} + \frac{1}{5}e^x(2\sin x - \cos x)$

<u>Ответ:</u> $y = C_1e^x + C_2e^{-x} + \frac{1}{5}e^x(2\sin x - \cos x)$

<u>C§8 №71</u>

$y'' + y = 2\sin x \cdot \sin 2x = 2 \cdot \frac{1}{2}(\cos x - \cos 3x) = \cos x - \cos 3x$

Характеристическое уравнение:

$\lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm i$ - оба корня кратности 1

~~Найдём частное решение для~~

~~$y'' + y = \cos x$~~

$m=0, \mu=i$: μ и $\bar{\mu}$ являются корнями характеристического уравнения кратности 1 =>

=> резонанс порядка 1

$y_{ч_1} = x e^{0 \cdot x}(A\cos x + B\sin x) = x(A\cos x + B\sin x)$

$y'_{ч_1} = A\cos x + B\sin x - Ax\sin x + Bx\cos x$

$y''_{ч_1} = -A\sin x + B\cos x - A\sin x + B\cos x - Ax\cos x - Bx\sin x$

$y''_{ч_1} + y_{ч_1} = -2A\sin x + 2B\cos x = \cos x \Rightarrow A=0, B=\frac{1}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow y_{ч_1} = \frac{1}{2}x\sin x$

Найдём частное решение $y''+y=-\cos 3x$

$m=0, \mu=3i$: μ и $\bar{\mu}$ не являются корнями характеристического уравнения, резонанса нет => $y_{ч_2} = A\cos 3x + B\sin 3x$

$y'_{ч_2} = -3A\sin 3x + 3B\cos 3x$

$y''_{ч_2} = -9A\cos 3x - 9B\sin 3x$

$y''_{ч_2} = -8A\cos 3x - 8B\sin 3x = -\cos 3x \Rightarrow A = \frac{1}{8}, B=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow y_{ч_2} = \frac{1}{8}\cos 3x$

$y_ч = y_{ч_1} + y_{ч_2} = \frac{1}{2}x\sin x + \frac{1}{8}\cos 3x$ – частное решение данного уравнения.

Общее решение однородного: $y_o = C_1\sin x + C_2\cos x$

Частное решение $y''+y=\cos x$

$m=0, \mu=i$: μ и $\bar{\mu}$ являются корнями характеристического уравнения, резонанс есть

$y_{r_1}=x^1(A\cos x+B\sin x)$

$y_{r_1}'=A\cos x+B\sin x-Ax\sin x+Bx\cos x$

$y_{r_1}''=-A\sin x+B\cos x-A\sin x+B\cos x-Ax\cos x-Bx\sin x$

$y_{r_1}''+y_{r_1}=-2A\sin x+2B\cos x=\cos x\to A=0, B=\frac{1}{2}\Rightarrow$

$\Rightarrow y_{r_1}=\frac{1}{2}x\sin x$

$y=y_0+y_r=y_0+y_{r_1}+y_{r_2}=C_1\sin x+C_2\cos x+\frac{1}{2}x\sin x+\frac{1}{8}\cos 3x$

<u>Ответ</u>: $y=C_1\sin x+C_2\cos x+\frac{1}{2}x\sin x+\frac{1}{8}\cos 3x$, $C_1, C_2\in\mathbb{R}$

<u>С§8№82</u>

$y'''+y'=4+10e^{2x}$

Характеристическое уравнение:

$\lambda^3+\lambda=0\Rightarrow\lambda=0, \lambda=\pm i$

Общее решение однородного: $y_0=C_1+C_2\cos x+C_3\sin x$

Частное решение $y'''+y'=4$: $y_{r_1}=4x$ (удовлетворяет)

Частное решение $y'''+y'=10e^{2x}$.

$m=0, \mu=2$ – не является корнем характеристического уравнения => резонанса нет =>

$\Rightarrow y_{ч_2} = Ae^{2x}$

$y'_{ч_2} = 2Ae^{2x}$, $y''_{ч_2} = 8Ae^{2x}$, подставляем:

$10Ae^{2x} = 10e^{2x} \Rightarrow A=1$, $y_{ч_2} = e^{2x}$

$y = y_o + y_ч = y_o + y_{ч_1} + y_{ч_2} = C_1 + C_2\cos x + C_3\sin x + 4x + e^{2x}$

Ответ: $y = C_1 + C_2\cos x + C_3\sin x + 4x + e^{2x}$; $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$

С§8 ○154

$y'' - 3y' + 2y = \dfrac{e^x}{1+e^x}$

Характеристическое уравнение:

$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda = \dfrac{3\pm1}{2} = 1; 2$

Общее решение однородного $y''-3y'+2y=0$:

$y = C_1e^x + C_2e^{2x}$; Вариация постоянных: $(C_1=C_1(x), C_2=C_2(x))$:

$$\begin{cases} C_1'(x)e^x + C_2'(x)\cdot e^{2x} = 0 & (1) \\ C_1'(x)e^x + 2C_2'(x)e^{2x} = \dfrac{e^x}{1(1+e^x)} & (2) \end{cases}$$

$(2)-(1) \Rightarrow C_2'(x) = \dfrac{e^x}{e^{2x}(1+e^x)} \Rightarrow C_1'(x) = -e^x \cdot \dfrac{e^x}{e^{2x}(1+e^x)} =$

$= -\dfrac{1}{1+e^x}$

$C_1(x) = \int \frac{dx}{1+e^x} = \left\{ e^x = t,\ x = \ln t,\ dx = \frac{dt}{t} \right\} =$

$= -\int \frac{dt}{t(1+t)} = -\int \frac{dt}{t} + \int \frac{dt}{1+t} = -\ln|t| + \ln|t+1| + C_1 =$

$= C_1 + \ln \frac{1+e^x}{e^x} = C_1 + \ln(1+e^x) - x$

$C_2(x) = \int \frac{dx}{e^x(1+e^x)} = \left\{ e^x = t,\ x = \ln t,\ dx = \frac{dt}{t} \right\} =$

$= \int \frac{dt}{t^2(1+t)} = \int \left(-\frac{t+1}{t^2} + \frac{1}{1+t} \right) dt = -\int \frac{dt}{t} + \int \frac{dt}{t^2} + \int \frac{dt}{1+t} =$

$= \ln(1+e^x) - x - \frac{1}{e^x} + C_2$

Подставляем: $y = (C_1 + \ln(1+e^x) - x)e^x + (C_2 + \ln(1+e^x) -$
$- x - e^{-x})e^{2x} = C_1e^x + C_2e^{2x} + (e^x + e^{2x})(\ln(1+e^x) - x) - e^x$

<u>Ответ:</u> $y = C_1e^x + C_2e^{2x} + (e^x + e^{2x})(\ln(1+e^x) - x) - e^x$

$C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$

<u>С§8 №160</u>

$y'' - 4y = (15 - 16x^2)\sqrt{x}$

Характеристическое уравнение:

$\lambda^2 - 4 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 2$

Общее решение однородного $y'' - 4y = 0$:

$y = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x}$

Вариация постоянных ($C_1=C_1(x)$, $C_2=C_2(x)$)

$$\begin{cases} C_1'(x)\cdot e^{2x}+C_2'(x)e^{-2x}=0 \\ 2C_1'(x)\cdot e^{2x}-2C_2'(x)e^{-2x}=\dfrac{(15-16x^2)\sqrt{x}}{1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1'(x)e^{2x}+C_2'(x)e^{-2x}=0 & (1) \\ C_1'(x)e^{2x}-C_2'(x)e^{-2x}=\dfrac{(15-16x^2)\sqrt{x}}{2} & (2) \end{cases}$$

$$(1)+(2) \Rightarrow C_1'(x)=\frac{(15-16x^2)\sqrt{x}}{4e^{2x}} \Rightarrow$$

$$C_1(x)=\int\frac{(15-16x^2)\sqrt{x}}{4e^{2x}}dx=\frac{15}{4}\int e^{-2x}\cdot\frac{2}{3}d\,x^{3/2}-4\int x^{5/2}e^{-2x}dx=$$

$$=\frac{5}{2}\left(x^{3/2}e^{-2x}-\int x^{3/2}\cdot(-2)e^{-2x}dx\right)-4\int x^{5/2}e^{-2x}dx=$$

$$=\frac{5}{2}x^{3/2}e^{-2x}+5\int e^{-2x}\cdot\frac{2}{5}d\,x^{5/2}-4\int x^{5/2}e^{-2x}dx=$$

$$=\frac{5}{2}x^{3/2}e^{-2x}+2\left(e^{-2x}x^{5/2}-\int x^{5/2}(-2)e^{-2x}dx\right)-4\int x^{5/2}e^{-2x}dx=$$

$$=\frac{5}{2}x^{3/2}e^{-2x}+2x^{5/2}e^{-2x}+C_1$$

$$(1)-(2) \Rightarrow C_2'(x)=-\frac{(15-16x^2)\sqrt{x}}{4e^{-2x}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_2(x)=\int\frac{(16x^2-15)\sqrt{x}}{4}e^{2x}dx=4\int x^{5/2}e^{2x}dx-$$

$$-\frac{15}{4}\int e^{2x}\cdot\frac{2}{3}d\,x^{3/2}=4\int x^{5/2}e^{2x}dx-\frac{5}{2}\Big(x^{3/2}e^{2x}-$$

$$-\int x^{3/2}\cdot 2e^{2x}dx\Big)=4\int x^{5/2}e^{2x}dx-\frac{5}{2}x^{3/2}e^{2x}+5\int e^{2x}\cdot\frac{2}{5}d\,x^{5/2}=$$

$= 4\int x^{5/2}e^{2x}dx - \frac{5}{2}x^{3/2}e^{2x} + 2\left(x^{5/2}e^{2x} - \int x^{5/2}\cdot 2e^{2x}dx\right) =$

$= -\frac{5}{2}x^{3/2}e^{2x} + 2x^{5/2}e^{2x} + C_2$

Подставляем:

$y = \left(-\frac{5}{2}x^{3/2}e^{2x} + 2x^{5/2}e^{2x} + C_2\right)e^{-2x} + \left(\frac{5}{2}x^{3/2}e^{-2x} + 2x^{5/2}e^{-2x} + C_1\right)e^{2x} =$

$= 4x^2\sqrt{x} + C_1e^{2x} + C_2e^{-2x}$

Ответ: $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x} + 4x^2\sqrt{x}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

С§8 №196

$x^2y'' - 2y = -2x^3$, $x > 0$

Замена: $x = e^t$

$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = e^{-t}y'_t$

$y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{-e^{-t}y'_t + e^{-t}y''_{tt}}{e^t} =$

$= (y''_{tt} - y'_t)e^{-2t}$

$e^{2t}\cdot e^{-2t}(y''_{tt} - y'_t) - 2y = -2e^{3t}$

$y''_{tt} - y'_t - 2y = -2e^{3t}$

Характеристическое уравнение:

$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{1 \pm 3}{2} = -1; 2$

~~Част~~ Общее решение однородного:

$y_0 = C_1e^{-t} + C_2e^{2t}$

Частное решение неоднородного:

$m=0$, $\mu=3$ – резонанса нет $\Rightarrow y_ч = Ae^{3t}$

$y'_{ч\,t} = 3Ae^{3t}$, $y''_{ч\,tt} = 9Ae^{3t}$, подставляем:

$9Ae^{3t} - 3Ae^{3t} - 2Ae^{3t} = -2e^{3t}$

$4Ae^{3t} = -2e^{3t} \Rightarrow A = -\frac{1}{2} \Rightarrow y_ч = -\frac{1}{2}e^{3t}$

$y = y_0 + y_ч = C_1e^{-t} + C_2e^{2t} - \frac{1}{2}e^{3t} = \frac{C_1}{x} + C_2x^2 - \frac{1}{2}x^3$

Ответ: $y = \frac{C_1}{x} + C_2x^2 - \frac{1}{2}x^3$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

С §8 №204

$x^2y'' + 3xy' - 3y = -\frac{3}{x^2}$, $x>0$

$x = e^t$, $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = e^{-t}y'_t$, $y''_{xx} = (y''_{tt} - y'_t)e^{-2t}$

$e^{2t}e^{-2t}(y''_{tt} - y'_t) + 3e^{t}e^{-t}y'_t - 3y = -3e^{-2t}$

$y''_{tt} + 2y'_t - 3y = -3e^{-2t}$

Характеристическое уравнение:

$\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{-2 \pm 4}{2} = -3; 1$

Общее решение однородного: $y_0 = C_1e^{-3t} + C_2e^{t}$

Частное решение неоднородного:

$m=0$, $\mu=-2$ – резонанса нет, $y_ч = Ae^{-2t}$

$y_r' = -2Ae^{-2t}$, $y_r'' = 4Ae^{-2t}$, подставляем:

$4Ae^{-2t} - 4Ae^{-2t} - 3Ae^{-2t} = -3e^{-2t} \Rightarrow A = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow y_r = e^{-2t}$

$y = y_0 + y_r = C_1 e^{-3t} + C_2 e^{t} + e^{-2t} = \frac{C_1}{x^3} + C_2 x + \frac{1}{x^2}$

Ответ: $y = \frac{C_1}{x^3} + C_2 x + \frac{1}{x^2}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

№613

Построить линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами, имеющее данное частное решение: $y_r = x^2 e^x$

Для некоторого набора корней характеристического уравнения $\lambda_1, \dots \lambda_m$ с кратностями $k_1, \dots k_m$ образуется набор линейно независимых решений: $\{e^{\lambda_1 x}, \dots x^{k_1 - 1} e^{\lambda_1 x}, \dots, e^{\lambda_m x}, \dots x^{k_m - 1} e^{\lambda_m x}\}$

Среди них будет $y_r = x^2 e^x$, если есть корень $\lambda = 1$ с кратностью $k = 3$. Если это все корни, то порядок минимален $\Rightarrow$

$\Rightarrow y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$

Ответ: $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$.

№616

То же что в №613 для $y_r = xe^x\cos 2x$

Аналогично, только в данном случае λ комплексные, ~~набор~~ для $\lambda = a \pm bi$ с кратностью k каждый образует $\{e^{ax}\cos bx, e^{ax}\sin bx, \dots$
$x^{k-1}e^{ax}\cos bx, x^{k-1}e^{ax}\sin bx\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda = 1 \pm 2i$ кратности 2.

Характеристическое уравнение:

$$(\lambda - (1+2i))^2(\lambda - (1-2i))^2 = (\lambda^2 - (1-2i+1+2i)\lambda + (1+4))^2 =$$
$$= (\lambda^2 - 2\lambda + 5)^2 = \lambda^4 + 4\lambda^2 + 25 - 4\lambda^3 + 10\lambda^2 - 20\lambda =$$
$$= \lambda^4 - 4\lambda^3 + 14\lambda^2 - 20\lambda + 25$$

Дифференциальное уравнение:

$$y^{IV} - 4y''' + 14y'' - 20y' + 25y = 0$$

Ответ: $y^{IV} - 4y''' + 14y'' - 20y' + 25y = 0$

№617

То же самое что в №613 для $y_{r1} = xe^x$, $y_{r2} = e^{-x}$

Аналогично: $\lambda_1 = 1$ кратности 2

$\lambda_2 = -1$ кратности 1

Характеристическое уравнение:

$(\lambda-1)^2(\lambda+1)=0$

$(\lambda^2-2\lambda+1)(\lambda+1)=0$

$\lambda^3-2\lambda^2+\lambda+\lambda^2-2\lambda+1=0$

$\lambda^3-\lambda^2-\lambda+1=0$

Дифференциальное уравнение:

$y'''-y''-y'+y=0$

<u>Ответ:</u> $y'''-y''-y'+y=0$.

1

При каких значениях a: $y''+ay=\sin x$:

а) имеет хотя бы одно ограниченное решение?

б) имеет ровно одно периодическое решение?

1) $a<0$: $a=-\omega^2$, $\omega>0$

$y''-\omega^2 y=\sin x$

Характеристическое:

$\lambda^2-\omega^2=0 \Rightarrow \lambda=\pm\omega \Rightarrow y_0=C_1e^{\omega x}+C_2e^{-\omega x}$

$\mu=i$ – резонанса нет $\Rightarrow y_ч=A\sin x+B\cos x$

$y_ч'=A\cos x-B\sin x$, $y_ч''=-A\sin x-B\cos x$;

$-(A+\omega^2 A)\sin x-(B+\omega^2 B)\cos x=\sin x$

$A+\omega^2 A=-1 \Rightarrow A=-\frac{1}{1+\omega^2}$, $B=0$

а) Верно: $y=-\frac{1}{1+\omega^2}\sin x+0\cdot e^{\omega x}+0\cdot e^{-\omega x}$ – ограниченное

б) Верно: $y=-\frac{1}{1+\omega^2}\sin x+0\cdot e^{\omega x}+0\cdot e^{-\omega x}$ – периодическое, любой другой выбор констант даёт непериодическое решение.

2) $a\geq 0$, $a\neq 1$: $a=\omega^2$, $\omega>0$

$y''+\omega^2 y=\sin x$

Характеристическое:

$\lambda^2+\omega^2=0 \Rightarrow \lambda=\pm i\omega \Rightarrow y_0=C_1\sin(\omega x)+C_2\cos(\omega x)$

$\mu=i$ – не является корнем $\Rightarrow y_r=A\sin x+B\cos x$

$y_r'=A\cos x-B\sin x$, $y_r''=-A\sin x-B\cos x$

$\Rightarrow (\omega^2-1)A\sin x+(\omega^2\cancel{B}-1)B\cos x=\sin x \Rightarrow$

$\Rightarrow B=0$, $A=\frac{1}{\omega^2-1}$, получаем:

$y=C_1\sin(\omega x)+C_2\cos(\omega x)+\frac{1}{\omega^2-1}\sin x$

Периоды $\sin\omega x$, $\cos\omega x$ и $\sin x$ соизмеримы, если $\omega=\sqrt{a}$ – рациональное число $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ б) неверно, все решения периодические

б) верно, если $\omega=\sqrt{a}$ – иррациональное: $y=\frac{1}{\omega^2-1}\sin x$

а) $y=\frac{1}{\omega^2-1}\sin x$ – ограниченное

3) $a=1$:

$y''+y=\sin x$

$\lambda=\pm i$

$\mu=i$ – резонанс есть

$y=C_1\sin x+C_2\cos x+(A\sin x+B\cos x)x$, $A=0$

а) ограниченных решений нет

б) периодических нет

<u>Ответ:</u> а) при $a\neq+1$; б) $a<0$ или $a>0$ и $\sqrt{a}$ – иррациональное.

II Линейные системы с постоянными коэффициентами

С§11 з2

$$\begin{cases} \dot{x} = 10x - 6y \\ \dot{y} = 18x - 11y \end{cases} \qquad A = \begin{Vmatrix} 10 & -6 \\ 18 & -11 \end{Vmatrix}$$

Характеристическое уравнение: $\det(A - \lambda E) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (10-\lambda)(-11-\lambda) - (-6)\cdot 18 = 0$

$-110 + \lambda + \lambda^2 + 108 = 0$

$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$

$\lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = -2;\ 1$ – оба корня кратности 1

$\lambda_1 = -2:\ (A - \lambda_1 E)\vec{h}_1 = \vec{0}:$

$$\begin{Vmatrix} 12 & -6 \\ 18 & -9 \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix} \Rightarrow \vec{h}_1 = \begin{Vmatrix} 1 \\ 2 \end{Vmatrix}$$

$\lambda_2 = 1:\ (A - \lambda_2 E)\vec{h}_2 = \vec{0}:$

$$\begin{Vmatrix} 9 & -6 \\ 18 & -12 \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 3 & -2 \\ 3 & -2 \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix} \Rightarrow \vec{h}_2 = \begin{Vmatrix} 2 \\ 3 \end{Vmatrix}$$

Общее решение системы: $\begin{Vmatrix} x \\ y \end{Vmatrix} = C_1 \begin{Vmatrix} 1 \\ 2 \end{Vmatrix} e^{-2t} + C_2 \begin{Vmatrix} 2 \\ 3 \end{Vmatrix} e^{t}$

Ответ: $\begin{Vmatrix} x \\ y \end{Vmatrix} = C_1 \begin{Vmatrix} 1 \\ 2 \end{Vmatrix} e^{-2t} + C_2 \begin{Vmatrix} 2 \\ 3 \end{Vmatrix} e^{t}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

C §11.08

$$\begin{cases} \dot{x} = -5x - 10y \\ \dot{y} = 5x + 5y \end{cases} \qquad A = \begin{Vmatrix} -5 & -10 \\ 5 & 5 \end{Vmatrix}$$

Характеристическое уравнение:

$\det(A - \lambda E) = 0;$

$(-5-\lambda)(5-\lambda) + 50 = 0;$

$-25 - 5\lambda + 5\lambda + \lambda^2 + 50 = 0$

$\lambda^2 + 25 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm 5i$

$\lambda_1 = 5i: \ (A - \lambda_1 E)\vec{h}_1 = \vec{0}$

$$\begin{Vmatrix} -5-5\lambda i & -10 \\ 5 & 5-5\lambda i \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 1 & 1-i \\ +1+i & +2 \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 1 & 1-i \\ 0 & 2-(1+i)(1-i) \end{Vmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{Vmatrix} 1 & 1-i \\ 0 & 2-(1-i^2) \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 1 & 1-i \\ 0 & 0 \end{Vmatrix} \Rightarrow \vec{h}_1 = \begin{Vmatrix} i-1 \\ 1 \end{Vmatrix}$$

$$\vec{h}_1 e^{\lambda_1 t} = \begin{Vmatrix} i-1 \\ 1 \end{Vmatrix} (\cos 5t + i \sin 5t) = \cancel{i\begin{Vmatrix} \cos 5t \\ 0 \end{Vmatrix}}$$

$$= i\begin{Vmatrix} \cos 5t \\ 0 \end{Vmatrix} - \begin{Vmatrix} \sin 5t \\ 0 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} -1 \\ 1 \end{Vmatrix} \cos 5t + i \begin{Vmatrix} -1 \\ 1 \end{Vmatrix} \sin 5t =$$

$$= \underbrace{\begin{Vmatrix} -\sin 5t - \cos 5t \\ \cos 5t \end{Vmatrix}}_{Re(\vec{h}_1 e^{\lambda_1 t})} + i \underbrace{\begin{Vmatrix} \cos 5t - \sin 5t \\ \sin 5t \end{Vmatrix}}_{Im(\vec{h}_1 e^{\lambda_1 t})}$$

$$y = C_1 Re(\vec{h}_1 e^{\lambda_1 t}) + C_2 Im(\vec{h}_1 e^{\lambda_1 t})$$

<u>Ответ</u>: $y = C_1 \begin{Vmatrix} \sin 5t + \cos 5t \\ -\cos 5t \end{Vmatrix} + C_2 \begin{Vmatrix} \cos 5t - \sin 5t \\ \sin 5t \end{Vmatrix}, \ C_1, C_2 \in R$

С §11 о 11

$$\begin{cases} \dot{x} = 6x + y \\ \dot{y} = -16x - 2y \end{cases} \qquad A = \begin{Vmatrix} 6 & 1 \\ -16 & -2 \end{Vmatrix}$$

Характеристическое уравнение:

$\det(A - \lambda E) = 0;$

$(6-\lambda)(-2-\lambda) + 16 = 0;$

$-12 + 2\lambda - 6\lambda + \lambda^2 + 16 = 0$

$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$

$(\lambda - 2)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2$ – кратности 2

Собственные вектора: $(A - \lambda_1 E)\vec{h} = \vec{0}$

$\begin{Vmatrix} 4 & 1 \\ -16 & -4 \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix} \Rightarrow \vec{h}_1 = \begin{Vmatrix} -1 \\ 4 \end{Vmatrix}$ – 1 собственный

Присоединенный: $A\vec{h}_2 = \lambda \vec{h}_2 + \vec{h}_1$:

$\left\| \begin{array}{cc|c} 4 & 1 & -1 \\ -16 & -4 & 4 \end{array} \right\| \sim \left\| \begin{array}{cc|c} 4 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & -1 \end{array} \right\| \sim \left\| \begin{array}{cc|c} 4 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right\| \Rightarrow$

$\Rightarrow \vec{h}_2 = \begin{Vmatrix} -\frac{1}{4} \\ 0 \end{Vmatrix} + C \begin{Vmatrix} -\frac{1}{4} \\ 1 \end{Vmatrix}$, выберем $\vec{h}_2 = \begin{Vmatrix} -1 \\ 3 \end{Vmatrix}$

Тогда общее решение:

$$\begin{Vmatrix} x \\ y \end{Vmatrix} = C_1 e^{2t} \vec{h}_1 + C_2 e^{2t}(t\vec{h}_1 + \vec{h}_2) = C_1 \begin{Vmatrix} -1 \\ 4 \end{Vmatrix} e^{2t} + C_2 \left(t \begin{Vmatrix} -1 \\ 4 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} -1 \\ 3 \end{Vmatrix} \right) e^{2t}$$

Ответ: $\begin{Vmatrix} x \\ y \end{Vmatrix} = \left(C_1 \begin{Vmatrix} -1 \\ 4 \end{Vmatrix} + C_2 \left(\begin{Vmatrix} -1 \\ 4 \end{Vmatrix} t + \begin{Vmatrix} -1 \\ 3 \end{Vmatrix} \right) \right) e^{2t}$

С§11 №18

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x + 2y - z \\ \dot{y} = -6x + 2y - 2z \\ \dot{z} = -6x - 2y - z \end{cases} \qquad A = \begin{Vmatrix} -2 & +2 & -1 \\ -6 & 2 & -2 \\ -6 & -2 & -1 \end{Vmatrix}$$

$\det(A - \lambda E) = 0 \Rightarrow$

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & 2 & -1 \\ -6 & 2-\lambda & -2 \\ -6 & -2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda+2)\big((\lambda+1)(\lambda-2)-4\big) -$$

$$-2\big(6(\lambda+1)-12\big) - 1\cdot\big(12-6(\lambda-2)\big) =$$

$$= -(\lambda+2)(\lambda^2-\lambda-6) - 2\cdot 6(\lambda-1) + 6(\lambda-4) =$$

$$= -\lambda^3 + \lambda^2 + 6\lambda - 2\lambda^2 + 2\lambda + 12 - 12\lambda + 12 + 6\lambda - 24 =$$

$$= -\lambda^3 - \lambda^2 + 2\lambda = 0 \Rightarrow -\lambda(\lambda^2+\lambda-2) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\lambda(\lambda+2)(\lambda-1) = 0$$

$\lambda_1 = 0$ кратности 1: базис из собственных векторов:

$$\begin{Vmatrix} -2 & 2 & -1 \\ -6 & 2 & -2 \\ -6 & -2 & -1 \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 1 \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -4 & 1 \end{Vmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{Vmatrix} 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \Rightarrow h_1^0 = \begin{Vmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{Vmatrix} \text{ (при } z=4)$$

$\lambda_2 = -2$ кратности 1: базис из собственных векторов:

$$\begin{Vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -6 & 4 & -2 \\ -6 & -2 & 1 \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & -6 & 3 \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{Vmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \Rightarrow \vec{h}_2 = \begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{Vmatrix}$$

$\lambda_3 = 1$ кратности 1: базис из собственных векторов:

$$\begin{Vmatrix} -3 & 2 & -1 \\ -6 & 1 & -2 \\ -6 & -2 & -2 \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{h}_3 = \begin{Vmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{Vmatrix}$$

Общее решение система: $y = C_1 \vec{h}_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 \vec{h}_2 e^{\lambda_2 t} + C_3 \vec{h}_3 e^{\lambda_3 t}$

Ответ: $y = C_1 \begin{Vmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{Vmatrix} + C_2 \begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{Vmatrix} e^{-2t} + C_3 \begin{Vmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{Vmatrix} e^{t}$, $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$

С §11 o29

$$\begin{cases} \dot{x} = x + 2y + 3z \\ \dot{y} = 2x + 4y + 6z \\ \dot{z} = 3x + 6y + 9z \end{cases} \qquad A = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{Vmatrix}$$

Характеристическое уравнение:

$\det(A - \lambda E) = 0$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 2 & 4-\lambda & 6 \\ 3 & 6 & 9-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(36 - 9\lambda - 4\lambda + \lambda^2 - 36) -$$

$$-2(18 - 2\lambda - 18) + 3(12 - 12 + 3\lambda) = (1-\lambda)\lambda(\lambda - 13) +$$

$$+ 4\lambda + 9\lambda = \lambda((1-\lambda)(\lambda - 13) + 13) =$$

$$= \lambda(-13 + 13\lambda + \lambda - \lambda^2 + 13) = \lambda^2(14 - \lambda)$$

$\lambda_1 = 0$ кратности 2:

$$\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \Rightarrow \begin{Vmatrix} x \\ y \\ z \end{Vmatrix} = C_1 \begin{Vmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix} + C_2 \begin{Vmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{h}_1 = \begin{Vmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix} \text{ и } \vec{h}_2 = \begin{Vmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix} \text{ — базис}$$

$\lambda_2 = 14$ кратности 1:

$$\begin{Vmatrix} -13 & 2 & 3 \\ 2 & -10 & 6 \\ 3 & 6 & -5 \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 0 & -63 & 42 \\ 0 & 21 & -14 \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{Vmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \Rightarrow \vec{h}_3 = \begin{Vmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{Vmatrix}$$

Ответ: $\begin{Vmatrix} x \\ y \\ z \end{Vmatrix} = C_1 \begin{Vmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix} + C_2 \begin{Vmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix} + C_3 \begin{Vmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{Vmatrix} e^{14t}$

С §11 №39

$$\begin{cases} \dot{x} = x - 6y + 3z \\ \dot{y} = -8x + 6z \\ \dot{z} = 3x - 12y + 7z \end{cases} \qquad A = \begin{Vmatrix} 1 & -6 & 3 \\ -8 & 0 & 6 \\ 3 & -12 & 7 \end{Vmatrix}$$

Характеристическое уравнение:

$\det(A - \lambda E) = 0;$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -6 & 3 \\ -8 & -\lambda & 6 \\ 3 & -12 & 7-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2 - 7\lambda + 6\cdot 12) + 6(8\lambda - 56 - 18) +$$

$$+ 3(3\lambda + 8\cdot 12) = \lambda^2 - 7\lambda + 72 - \lambda^3 + 7\lambda^2 - 72\lambda + 48\lambda - 444 +$$

$$+ 9\lambda + 288 = -\lambda^3 + 8\lambda^2 - 22\lambda - 84 = 0$$

$\lambda_1 = 2$ – корень $\Rightarrow -(\lambda+2)(\lambda^2 - 10\lambda + 42) = 0$

$D = 100 - 4\cdot 42 = 100 - 168 = -68 = -4\cdot 17 \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda_{2,3} = \frac{10 \pm 2i\sqrt{17}}{2} = 5 \pm \sqrt{17}i$

$\lambda_1 = -2$ – кратности 1:

$$\begin{Vmatrix} 3 & -6 & 3 \\ -8 & 2 & 6 \\ 3 & -12 & 9 \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -4 & 1 & 3 \\ 1 & -4 & 3 \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -7 & 7 \\ 0 & -2 & 2 \end{Vmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{Vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \Rightarrow \vec{h}_1 = \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Vmatrix}$$

$\lambda_2 = 5 + \sqrt{17}i$, собственный вектор:

$$\begin{Vmatrix} -4-\sqrt{17}i & -6 & 3 \\ -8 & -5-\sqrt{17}i & 6 \\ 3 & -12 & 2-\sqrt{17}i \end{Vmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{Vmatrix} 1 & -4 & \frac{2}{3} - \frac{\sqrt{17}}{3}i \\ -4-\sqrt{17}i & -6 & 3 \\ -8 & -5-\sqrt{17}i & 6 \end{Vmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{Vmatrix} 1 & -4 & \frac{2}{3} - \frac{\sqrt{17}}{3}i \\ 0 & -22-4\sqrt{17}i & \frac{34}{3} - \frac{2\sqrt{17}}{3}i \\ 0 & -37-\sqrt{17}i & \frac{34}{3} - \frac{8\sqrt{17}}{3}i \end{Vmatrix} \sim$$

$$\frac{\frac{34}{3} - \frac{2\sqrt{17}}{3}i}{-22-4\sqrt{17}i} = \frac{\frac{34}{3} - \frac{8\sqrt{17}}{3}i}{-37-\sqrt{17}i} = -\frac{17-5\sqrt{17}i}{63}$$

$$\sim \begin{Vmatrix} 1 & 0 & -\frac{26}{63} - \frac{\sqrt{17}}{63}i \\ 0 & 1 & -\frac{17}{63} + \frac{5\sqrt{17}}{63}i \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \Rightarrow \vec{h}_2 = \begin{Vmatrix} 26+\sqrt{17}i \\ 17-5\sqrt{17}i \\ 63 \end{Vmatrix}$$

$$\vec{h}_2 e^{\lambda_2 t} = \left(\begin{Vmatrix} 26 \\ 17 \\ 63 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} \sqrt{17} \\ -5\sqrt{17} \\ 0 \end{Vmatrix} i \right) e^{5t} \left(\cos(\sqrt{17}t) + i\sin(\sqrt{17}t) \right) =$$

$$= \begin{Vmatrix} 26\cos(\sqrt{17}t) - \sqrt{17}\sin(\sqrt{17}t) \\ 17\cos(\sqrt{17}t) + 5\sqrt{17}\sin(\sqrt{17}t) \\ 63\cos(\sqrt{17}t) \end{Vmatrix} e^{5t} +$$

$$+ i \begin{Vmatrix} 26\sin(\sqrt{17}t) + \sqrt{17}\cos(\sqrt{17}t) \\ 17\sin(\sqrt{17}t) - 5\sqrt{17}\cos(\sqrt{17}t) \\ 63\sin(\sqrt{17}t) \end{Vmatrix} e^{5t}$$

Ответ: $\begin{Vmatrix} x \\ y \\ z \end{Vmatrix} = C_1 \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Vmatrix} e^{-2t} + C_2 \begin{Vmatrix} 26\cos(\sqrt{17}t) - \sqrt{17}\sin(\sqrt{17}t) \\ 17\cos(\sqrt{17}t) + 5\sqrt{17}\sin(\sqrt{17}t) \\ 63\cos(\sqrt{17}t) \end{Vmatrix} e^{5t} +$

$+ C_3 \begin{Vmatrix} 26\sin(\sqrt{17}t) + \sqrt{17}\cos(\sqrt{17}t) \\ 17\sin(\sqrt{17}t) - 5\sqrt{17}\cos(\sqrt{17}t) \\ 63\sin(\sqrt{17}t) \end{Vmatrix} e^{5t}$

С § 11 № 56

$$\begin{cases} \dot{x} = 4x - 7y - z \\ \dot{y} = 2x - 3y - z \\ \dot{z} = -2x + 2y + 3z \end{cases} \qquad A = \begin{Vmatrix} 4 & -7 & -1 \\ 2 & -3 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \end{Vmatrix}$$

Характеристическое уравнение:

$\det(A - \lambda E) = 0$

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & -7 & -1 \\ 2 & -3-\lambda & -1 \\ -2 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)((\lambda-3)(\lambda+3)+2) + 7(6-2\lambda-2) -$$

$$-(4-6-2\lambda) = (4-\lambda)(\lambda^2-7) - 14(\lambda-2) + 2(\lambda+1) =$$

$$= 4\lambda^2 - 28 - \lambda^3 + 7\lambda - 14\lambda + 28 + 2\lambda + 2 =$$

$$= -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 5\lambda + 2 = 0$$

$\lambda_1 = 1$ - корень

$-(\lambda-1)(\lambda^2 - 3\lambda + 2) = 0$

$\lambda_{2,3} = \frac{3 \pm 1}{2} = 1; 2$

$\lambda_1 = 1$ – кратности 2:

$$\begin{Vmatrix} 3 & -7 & -1 \\ 2 & -4 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{Vmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \Rightarrow \vec{h}_1 = \begin{Vmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{Vmatrix}$$ – только 1 собственный вектор.

Присоединённый: $A\vec{h}_2 = \lambda \vec{h}_2 + \vec{h}_1$,

$$\left\Vert\begin{array}{ccc|c} 3 & -7 & -1 & 3 \\ 2 & -4 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right\Vert \sim \left\Vert\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -4 & 2 & 6 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \end{array}\right\Vert \sim$$

$$\sim \left\Vert\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right\Vert \sim \left\Vert\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right\Vert \Rightarrow$$

$\rightarrow$ Выбираем $\vec{h}_2 = \begin{Vmatrix} -\frac{5}{2} \\ -\frac{3}{2} \\ 0 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{Vmatrix}$

$\lambda_3 = 2$ кратности 1:

$$\begin{Vmatrix} 2 & -7 & -1 \\ 2 & -5 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 1 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \vec{h}_3 = \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{Vmatrix}$

Общее решение системы: $y = C_1\vec{h}_1 e^t + C_2(\vec{h}_2 + \vec{h}_1 t)e^t + C_3\vec{h}_3$

Ответ: $y = C_1 \begin{Vmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{Vmatrix} e^t + C_2 \left(\begin{Vmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{Vmatrix} t \right) e^t + C_3 \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{Vmatrix} e^{2t}$

С §8 с74

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - 5y - 8z \\ \dot{y} = 7x - 11y - 17z \\ \dot{z} = -3x + 4y + 6z \end{cases} \qquad A = \begin{Vmatrix} 2 & -5 & -8 \\ 7 & -11 & -17 \\ -3 & 4 & 6 \end{Vmatrix}$$

Характеристическое уравнение:

$\det(A - \lambda E) = 0$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -5 & -8 \\ 7 & -11-\lambda & -17 \\ -3 & 4 & 6-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\big((\lambda-6)(\lambda+11) + 17\cdot 4\big) +$$

$$+5(42 - 7\lambda - 51) - 8(28 - 33 - 3\lambda) = (2-\lambda)(\lambda^2 + 5\lambda + 2) -$$

$$-5(7\lambda + 9) + 8(3\lambda + 5) = 2\lambda^2 + 10\lambda + 4 - \lambda^3 - 5\lambda^2 - 2\lambda -$$

$$-35\lambda - 45 + 24\lambda + 40 = -\lambda^3 - 3\lambda^2 - 3\lambda - 1 = -(\lambda+1)^3 = 0$$

$\lambda = -1$ кратности 3. Собственный вектор:

$$\begin{Vmatrix} 3 & -5 & -8 \\ 7 & -10 & -17 \\ -3 & 4 & 7 \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 3 & -5 & -8 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \vec{h}_1 = \begin{Vmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{Vmatrix}$ – 1 собственный вектор

Присоединённые:

$A\vec{h}_2 = \lambda \vec{h}_2 + \vec{h}_1$

$$\left\|\begin{array}{ccc|c} 3 & -5 & -8 & 1 \\ 7 & -10 & -17 & -1 \\ -3 & 4 & 7 & 1 \end{array}\right\| \sim \left\|\begin{array}{ccc|c} 3 & -5 & -8 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right\| \sim$$

$$\sim \left\|\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right\| \Rightarrow \vec{h}_2 = \begin{Vmatrix} -3 \\ -2 \\ 0 \end{Vmatrix} + C\begin{Vmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{Vmatrix}, \quad \vec{h}_2 = \begin{Vmatrix} -3 \\ -2 \\ 0 \end{Vmatrix}$$

$A\vec{h}_3 = \lambda \vec{h}_3 + \vec{h}_2$

$$\left\|\begin{array}{ccc|c} 3 & -5 & -8 & -3 \\ 7 & -10 & -17 & -2 \\ -3 & 4 & 7 & 0 \end{array}\right\| \sim \left\|\begin{array}{ccc|c} 3 & -5 & -8 & -3 \\ 1 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \end{array}\right\| \sim \left\|\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right\| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{h}_3 = \begin{Vmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{Vmatrix} + C\begin{Vmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{Vmatrix} \cancel{7}; \quad \vec{h}_3 = \begin{Vmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{Vmatrix}$$

Общее решение системы:

$$\begin{Vmatrix} x \\ y \\ z \end{Vmatrix} = \left[C_1\vec{h}_1 + C_2\left(\vec{h}_2 + t\vec{h}_1\right) + C_3\left(\vec{h}_3 + t\vec{h}_2 + \frac{t^2}{2}\vec{h}_1\right)\right]e^{-t}$$

<u>Ответ</u>: $$\begin{Vmatrix} x \\ y \\ z \end{Vmatrix} = C_1\begin{Vmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{Vmatrix}e^{-t} + C_2\left(\begin{Vmatrix} -3 \\ -2 \\ 0 \end{Vmatrix} + t\begin{Vmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{Vmatrix}\right)e^{-t} +$$

$$+ C_3\left(\begin{Vmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{Vmatrix} + t\begin{Vmatrix} -3 \\ -2 \\ 0 \end{Vmatrix} + \frac{t^2}{2}\begin{Vmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{Vmatrix}\right)e^{-t}$$

С §11 №88

$$\begin{cases} \dot{x} = 9x - 6y - 2z \\ \dot{y} = 18x - 12y - 3z \\ \dot{z} = 18x - 9y - 6z \end{cases} \qquad A = \begin{Vmatrix} 9 & -6 & -2 \\ 18 & -12 & -3 \\ 18 & -9 & -6 \end{Vmatrix}$$

Характеристическое уравнение:

$\det(A - \lambda E) = 0;$

$$\begin{vmatrix} 9-\lambda & -6 & -2 \\ 18 & -12-\lambda & -3 \\ 18 & -9 & -6-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9-\lambda & -6 & -2 \\ 18 & -12-\lambda & -3 \\ 0 & 3+\lambda & -3-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= -(\lambda+3) \begin{vmatrix} 9-\lambda & -6 & -2 \\ 18 & -12-\lambda & -3 \\ 0 & -1 & +1 \end{vmatrix} = -(\lambda+3)\big(3(\lambda-9) + 2\cdot 18 +$$

$$+ (\lambda-9)(\lambda+12) + 6\cdot 18\big) = -(\lambda+3)(3\lambda+9+\lambda^2+3\lambda+0) =$$

$$= -(\lambda+3)(\lambda^2+6\lambda+9) = -(\lambda+3)^3$$

Собственные вектора для $\lambda=-3$ кратности 3:

$$\begin{Vmatrix} 12 & -6 & -2 \\ 18 & -9 & -3 \\ 18 & -9 & -3 \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 6 & -3 & -1 \\ 6 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 6 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{Vmatrix} x \\ y \\ z \end{Vmatrix} = C_2 \begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{Vmatrix} + C_3 \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \end{Vmatrix} \quad \vec{h}_1 = \begin{Vmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{Vmatrix} \quad \vec{h}_2 = \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \end{Vmatrix}$$

$\vec{h}_1$ – это такой вектор, к которому можно подобрать присоединённый $\vec{h}_2$

$$A\vec{h}_2 = \lambda\vec{h}_2 + \vec{h}_1, \quad \vec{h}_1 = \alpha\vec{f}_1 + \beta\vec{f}_2 = \begin{Vmatrix} \alpha \\ \beta \\ 6\alpha-3\beta \end{Vmatrix}$$

$$\left\|\begin{array}{ccc|c} -12 & -6 & -2 & \alpha \\ 18 & -9 & -3 & \beta \\ 18 & -9 & -3 & 6\alpha-3\beta \end{array}\right\| \sim \left\|\begin{array}{ccc|c} 6 & -3 & -1 & +\frac{\alpha}{2} \\ 6 & -3 & -1 & +\frac{\beta}{3} \\ 6 & -3 & -1 & 2\alpha-\beta \end{array}\right\| \sim$$

$$\sim \left\|\begin{array}{ccc|c} 6 & -3 & -1 & \frac{\alpha}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\beta}{3}-\frac{\alpha}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2}\alpha-\beta \end{array}\right\| \text{ - совместна при } 3\alpha=2\beta$$

$$\vec{h}_1 = \begin{Vmatrix} \alpha \\ \beta \\ 6\alpha-3\beta \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \frac{2}{3} \\ 1 \\ 1 \end{Vmatrix}\beta = \begin{Vmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{Vmatrix} \quad (\beta=3)$$

Находим $\vec{h}_2$:

$$\left\|\begin{array}{ccc|c} 6 & -3 & -1 & \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right\| \Rightarrow \vec{h}_2 = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{Vmatrix}$$

В качестве $\vec{h}_3$ выбираем любой собственный вектор неколлинеарный $\vec{h}_1$, например $\vec{f}_1$

<u>Ответ</u>: $\begin{Vmatrix} x \\ y \\ z \end{Vmatrix} = C_1 \begin{Vmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{Vmatrix} e^{-3t} + C_2\left(\begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{Vmatrix} + t\begin{Vmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{Vmatrix}\right)e^{-3t} + C_3\begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{Vmatrix} e^{-3t}$

<u>С§8№152</u>

$$\begin{cases} \dot{x} = 4x - y \\ \dot{y} = x + 2y + 2e^{3t} \end{cases} \qquad A = \begin{Vmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{Vmatrix}$$

Однородное:

$$\det(A-\lambda E)=0;$$

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-4)(\lambda-2)+1 = \lambda^2-6\lambda+9 = (\lambda-3)^2$$

$\lambda = 3$ кратности 2:

$$\left\| \begin{matrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{matrix} \right\| \sim \left\| \begin{matrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{matrix} \right\| \Rightarrow \vec{h}_1 = \left\| \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} \right\| - \text{собственный}$$

Присоединённый: $A\vec{h}_2 = \lambda \vec{h}_2 + \vec{h}_1$

$$\left\| \begin{matrix} 1 & -1 & | & 1 \\ 1 & -1 & | & 1 \end{matrix} \right\| \sim \left\| \begin{matrix} 1 & -1 & | & -1 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{matrix} \right\| \Rightarrow \vec{h}_2 = \left\| \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \right\|$$

Общее решение однородного:

$$\left\| \begin{matrix} x_o \\ y_o \end{matrix} \right\| = C_1 \left\| \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} \right\| e^{3t} + C_2 \left(\left\| \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \right\| + t \left\| \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} \right\| \right) e^{3t}$$

Частное решение неоднородного:

$$\mu = 3 - \text{собственное значение} \Rightarrow \left\| \begin{matrix} x_r \\ y_r \end{matrix} \right\| = \vec{Q}_{0+2}(t) e^{3t} =$$

$$= \left\| \begin{matrix} a_1t^2+b_1t+c_1 \\ a_2t^2+b_2t+c_2 \end{matrix} \right\| e^{3t}$$

$$\left\| \begin{matrix} \dot{x}_r \\ \dot{y}_r \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 3a_1t^2+(2a_1+3b_1)t+3c_1+b_1 \\ 3a_2t^2+(2a_2+3b_2)t+3c_2+b_2 \end{matrix} \right\| e^{3t}$$

$$\left\| \begin{matrix} 3a_1t^2+(2a_1+3b_1)t+b_1+3c_1 \\ 3a_2t^2+(2a_2+3b_2)t+b_2+3c_2 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} a_1t^2+b_1t+c_1 \\ a_2t^2+b_2t+c_2 \end{matrix} \right\| + \left\| \begin{matrix} 0 \\ 2 \end{matrix} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{matrix} (4a_1-a_2)t^2+(4b_1-b_2)t+4c_1-c_2 \\ (a_1+2a_2)t^2+(b_1+2b_2)t+c_1+2c_2+2 \end{matrix} \right\|$$

$$\begin{cases} 3a_1 = 4a_1 - a_2 \\ 3a_2 = a_1 + 2a_2 \\ 2a_1 + 3b_1 = 4b_1 - b_2 \\ 2a_2 + 3b_2 = b_1 + 2b_2 \\ b_1 + 3c_1 = 4c_1 - c_2 \\ b_2 + 3c_2 = c_1 + 2c_2 + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a_1 = b_1 - b_2 & (1) \\ 2a_2 = b_1 - b_2 & (2) \\ b_1 = c_1 - c_2 & (3) \\ b_2 = c_1 - c_2 + 2 & (4) \end{cases}$$

$(3)-(4) \Rightarrow b_1 - b_2 = -2$. Подставляем в (1) и (2):

$a_1 = a_2 = -1$

Выбираем $b_2 = c_2 = 0$

$$\begin{cases} b_1 = -2 \\ c_1 = b_1 = -2 \\ a_1 = a_2 = -1,\ b_2 = c_2 = 0 \end{cases}$$

Тогда $\begin{Vmatrix} x_r \\ y_r \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -t^2 - 2t - 2 \\ -t^2 \end{Vmatrix} e^{3t}$

Общее решение неоднородного: $\begin{Vmatrix} x \\ y \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} x_r \\ y_r \end{Vmatrix}$

<u>Ответ:</u> $\begin{Vmatrix} x \\ y \end{Vmatrix} = C_1 \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \end{Vmatrix} e^{3t} + C_2 \left(\begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \end{Vmatrix} + t \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \end{Vmatrix} \right) e^{3t} -$

$- \begin{Vmatrix} t^2 + 2t + 2 \\ t^2 \end{Vmatrix} e^{3t}$

С § 11 с159

$$\begin{cases} \dot{x} = -3x - 4y + 4z + \sin t + \cos t \\ \dot{y} = 3x + 4y - 5z - \sin t - \cos t \\ \dot{z} = x + y - 2z \end{cases}$$

$A = \begin{Vmatrix} -3 & -4 & 4 \\ 3 & 4 & -5 \\ 1 & 1 & -2 \end{Vmatrix}$; В векторном виде:

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x} + \begin{Vmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{Vmatrix} \sin t + \begin{Vmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{Vmatrix} \cos t$$

Однородное уравнение: $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$

$\det(A - \lambda E) = 0$

$$\begin{vmatrix} -3-\lambda & -4 & 4 \\ 3 & 4-\lambda & -5 \\ 1 & 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2-\lambda \\ 0 & \lambda-1 & 4+(\lambda+3)(-2-\lambda) \\ 0 & 1-\lambda & 3\lambda+1 \end{vmatrix} =$$

$$= (\lambda-1)\left(3\lambda + 1 + (4 - \lambda^2 - 5\lambda - 6)\right) = -(\lambda-1)(\lambda+1)^2$$

$\lambda_1 = 1$ кратности 1:

$$\begin{Vmatrix} -4 & -4 & 4 \\ 3 & 3 & -5 \\ 1 & 1 & -3 \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \Rightarrow \vec{h}_1 = \begin{Vmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix}$$

$\lambda_2 = -1$ кратности 2:

$$\begin{Vmatrix} -2 & -4 & 4 \\ 3 & 5 & -5 \\ 1 & 1 & -1 \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ 1 собственный вектор $\vec{h}_2 = \begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{Vmatrix}$

Присоединённый: $A\vec{h}_3 = \lambda \vec{h}_3 + \vec{h}_2$

$$\left\| \begin{array}{ccc|c} -2 & -4 & +4 & 0 \\ 3 & 5 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right\| \sim \left\| \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \end{array} \right\| \sim$$

$$\sim \left\| \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\| \sim \left\| \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\| \to \vec{h}_3 = \begin{Vmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{Vmatrix}$$

Общее решение однородного:

$$\begin{Vmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{Vmatrix} = C_1 \begin{Vmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix} e^{t} + C_2 \begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{Vmatrix} e^{-t} + C_3 \left(\begin{Vmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{Vmatrix} + t \begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{Vmatrix} \right) e^{-t}$$

Частное решение неоднородного $\dot{\vec{x}} = A\vec{x} + \begin{Vmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{Vmatrix} (\sin t + \cos t)$

$\mu = i$ - не является корнем характеристического уравнения, резонанса нет.

Ищем решение в виде $\vec{x}_r = \begin{Vmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{Vmatrix} (A\sin t + B\cos t) =$

$$= \begin{Vmatrix} a_1 \sin t + a_2 \cos t \\ b_1 \sin t + b_2 \cos t \\ c_1 \sin t + c_2 \cos t \end{Vmatrix}$$

$$\dot{\vec{x}}_r = \begin{Vmatrix} a_1 \cos t - a_2 \sin t \\ b_1 \cos t - b_2 \sin t \\ c_1 \cos t - c_2 \sin t \end{Vmatrix}$$

$$A\vec{x_r} = \begin{Vmatrix} -3 & -4 & 4 \\ 3 & 4 & -5 \\ 1 & 1 & -2 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} a_1\sin t + a_2\cos t \\ b_1\sin t + b_2\cos t \\ c_1\sin t + c_2\cos t \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} (-3a_1 - 4b_1 + 4c_1)\sin t + (-3a_2 - 4b_2 + 4c_2)\cos t \\ (3a_1 + 4b_1 - 5c_1)\sin t + (3a_2 + 4b_2 - 5c_2)\cos t \\ (a_1 + b_1 - 2c_1)\sin t + (a_2 + b_2 - 2c_2)\cos t \end{Vmatrix}$$

Подставляем:

$$\begin{cases} -a_2 = -3a_1 - 4b_1 + 4c_1 + 1 \\ a_1 = -3a_2 - 4b_2 + 4c_2 + 1 \\ -b_2 = 3a_1 + 4b_1 - 5c_1 - 1 \\ b_1 = 3a_2 + 4b_2 - 5c_2 - 1 \\ -c_2 = a_1 + b_1 - 2c_1 \\ c_1 = a_2 + b_2 - 2c_2 \end{cases}$$

$a_1 = b_1 = c_1 = 0$, $a_2 = -1$, $b_2 = 1$ – подходит

тогда $\begin{Vmatrix} x_r \\ y_r \\ z_r \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -\cos t \\ \cos t \\ 0 \end{Vmatrix}$

Общее решение системы: $\begin{Vmatrix} x \\ y \\ z \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} x_r \\ y_r \\ z_r \end{Vmatrix}$

<u>Ответ</u>: $\begin{Vmatrix} x \\ y \\ z \end{Vmatrix} = C_1 \begin{Vmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix} e^{t} + C_2 \begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{Vmatrix} e^{-t} + C_3\left(\begin{Vmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{Vmatrix} + t \begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{Vmatrix} \right) e^{-t} + \begin{Vmatrix} -\cos t \\ \cos t \\ 0 \end{Vmatrix}$

С §11 №184

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x + y + t\ln t \\ \dot{y} = -4x + 2y + 2t\ln t \end{cases} \qquad A = \begin{Vmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 2 \end{Vmatrix}$$

В векторном виде:

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x} + \begin{Vmatrix} 1 \\ 2 \end{Vmatrix} t\ln t$$

Однородное уравнение $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$

$\det(A - \lambda E) = 0$

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 \\ -4 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-2)(\lambda+2) + 4 = \lambda^2$$

$\lambda = 0$ кратности 2:

$$\begin{Vmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 2 \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} +2 & -1 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix} \Rightarrow \vec{h}_1 = \begin{Vmatrix} 1 \\ 2 \end{Vmatrix} \text{ - 1 собственный}$$

вектор

Присоединённый $A\vec{h}_2 = \lambda\vec{h}_2 + \vec{h}_1$

$$\left\Vert\begin{array}{cc|c} -2 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 2 \end{array}\right\Vert \sim \left\Vert\begin{array}{cc|c} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right\Vert \Rightarrow \vec{h}_2 = \begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \end{Vmatrix}$$

Общее решение однородного:

$$\begin{Vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{Vmatrix} = C_1 \begin{Vmatrix} 1 \\ 2 \end{Vmatrix} + C_2 \left(\begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \end{Vmatrix} + t \begin{Vmatrix} 1 \\ 2 \end{Vmatrix} \right)$$

Вариация постоянных: $C_1 = C_1(t)$, $C_2 = C_2(t)$

$$\dot{C}_1\left\|\begin{matrix}1\\2\end{matrix}\right\| + \dot{C}_2\left(\left\|\begin{matrix}0\\1\end{matrix}\right\| + t\left\|\begin{matrix}1\\2\end{matrix}\right\|\right) = t\ln t$$

$$\begin{cases} \dot{C}_1 + \dot{C}_2 t = t\ln t & (1) \\ 2\dot{C}_1 + \dot{C}_2 + 2\dot{C}_2 t = 2t\ln t & (2) \end{cases}$$

$(2)-(1)\cdot 2 \Rightarrow \dot{C}_2 = 0 \Rightarrow C_2(t) = C_2$

$(1) \Rightarrow \dot{C}_1 = t\ln t \Rightarrow C_1(t) = \int t\ln t\,dt = \frac{1}{2}\int \ln t\,dt^2 =$

$= \frac{1}{2}t^2\ln t - \frac{1}{2}\int t^2\frac{dt}{t} = \frac{1}{2}t^2\ln t - \frac{1}{4}t^2 + C_1 = \frac{1}{4}t^2(2\ln t - 1) + C_1$

Подставляем:

$x = C_1(t) + t\cdot C_2(t) = \frac{1}{4}t^2(2\ln t - 1) + C_1 + C_2 t$

$y = 2C_1(t) + C_2(t) + C_2(t)\cdot 2t = \frac{1}{2}t^2(2\ln t - 1) + 2C_1 + C_2 + 2tC_2$

<u>Ответ</u>: $x = C_1 + C_2 t + \frac{1}{4}t^2(2\ln t - 1)$

$y = 2C_1 + C_2 + 2C_2 t + \frac{1}{2}t^2(2\ln t - 1)$

III Матричная экспонента

С §11 № 118

$$\begin{cases} \dot{x} = x + 2y \\ \dot{y} = 2x + y \end{cases} \quad x(0) = c_1,\ y(0) = c_2$$

В векторной форме:

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x}, \quad A = \begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{Vmatrix}$$

$$\vec{x} = e^{At}\vec{C}, \quad \vec{C} = \begin{Vmatrix} c_1 \\ c_2 \end{Vmatrix}$$

Строим базис из собственных векторов:

$$\det(A - \lambda E) = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{2 \pm 4}{2} = -1;\ 3$$

$\lambda_1 = -1$:

$$\begin{Vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{Vmatrix} = A - \lambda_1 E \sim \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix} \Rightarrow \vec{h}_1 = \begin{Vmatrix} -1 \\ 1 \end{Vmatrix}$$

$\lambda_2 = 3$:

$$\begin{Vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{Vmatrix} = A - \lambda_2 E \sim \begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix} \Rightarrow \vec{h}_2 = \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \end{Vmatrix}$$

В этом базисе $A' = \begin{Vmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{Vmatrix}$, $A'^n = \begin{Vmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{Vmatrix}$

$$e^{A't} = E + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A'^n t^n}{n!} = \begin{Vmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{Vmatrix}$$

$A = SA'S^{-1}$, $A^2 = SA'S^{-1}SA'S^{-1} = SA'^2S^{-1}, \dots$

$A^n = SA'^nS^{-1}$

$$e^{At} = E + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A^n t^n}{n!} = S\left(E + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A'^n t^n}{n!}\right)S^{-1} = S\, e^{A't} S^{-1}$$

$$S = \begin{Vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix}$$

$$\left\Vert\begin{array}{cc|cc} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right\Vert \sim \left\Vert\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right\Vert \sim \left\Vert\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right\Vert, \quad \underbrace{\begin{matrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{matrix}}_{S^{-1}}$$

$$e^{At} = \frac{1}{2}\begin{Vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\begin{Vmatrix} -e^{-t} & e^{3t} \\ e^{-t} & e^{3t} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{Vmatrix} e^{-t}+e^{3t} & e^{3t}-e^{-t} \\ e^{3t}-e^{-t} & e^{3t}+e^{-t} \end{Vmatrix}$$

<u>Ответ:</u> $\begin{Vmatrix} x \\ y \end{Vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{Vmatrix} e^{3t}+e^{-t} & e^{3t}-e^{-t} \\ e^{3t}-e^{-t} & e^{3t}+e^{-t} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} C_1 \\ C_2 \end{Vmatrix}$

$C_1 = C_2 = 1$: $\begin{Vmatrix} x \\ y \end{Vmatrix} = \cancel{\frac{2}{2}} \begin{Vmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{Vmatrix}$

С §11 № 122

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x + y \\ \dot{y} = -x + 5y \end{cases} \qquad x(0) = C_1,\ y(0) = C_2$$

В векторной форме:

$\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$; $A = \begin{Vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 5 \end{Vmatrix}$

Решение: $\vec{x} = e^{At}\vec{C}$, $\vec{C} = \begin{Vmatrix} C_1 \\ C_2 \end{Vmatrix}$

Базис из собственных векторов:

$\det(A - \lambda E) = 0$

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ -1 & 5-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 8\lambda + 15 + 1 = (\lambda - 4)^2 = 0$$

$\lambda_1 = 4$ кратности 2:

$$\begin{Vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix} \Rightarrow \vec{h}_1 = \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \end{Vmatrix}$$

Присоединённый: $A\vec{h}_2 = \lambda_1\vec{h}_2 + \vec{h}_1$

$$\left\Vert \begin{matrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} \right\Vert \sim \left\Vert \begin{matrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} -1 \\ 0 \end{matrix} \right\Vert \Rightarrow \vec{h}_2 = \begin{Vmatrix} -1 \\ 0 \end{Vmatrix}$$

В базисе из Жордановых цепочек:

$$A' = \Vert J_1(\lambda_1) \Vert = \begin{Vmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{Vmatrix}$$

Матрица перехода: $S = \begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}$

$$\begin{Vmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{Vmatrix} \Rightarrow S^{-1} = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{Vmatrix}$$

$$e^{A't} = e^{(\lambda_1 E + B)t} \overset{\text{поскольку } EB=BE}{=} e^{\lambda_1 t E} \cdot e^{Bt}, \quad B = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

$B^2 = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}$, $B^n = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}$ при $n \geq 2$, тогда

$$e^{A't} = e^{\lambda_1 t} E \left(E + \frac{B}{1!} t + 0 \right) = e^{\lambda_1 t} \begin{Vmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} = e^{4t} \begin{Vmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

$$e^{At} = S e^{A't} S^{-1} = e^{4t} \begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{Vmatrix} =$$

$$= e^{4t} \begin{Vmatrix} 1 & t-1 \\ 1 & t \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{Vmatrix} = e^{4t} \begin{Vmatrix} 1-t & t \\ -t & 1+t \end{Vmatrix}$$

Ответ: $\begin{Vmatrix} x \\ y \end{Vmatrix} = e^{4t} \begin{Vmatrix} 1-t & t \\ -t & 1+t \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} C_1 \\ C_2 \end{Vmatrix}$

$C_1 = C_2 = 1$: $\begin{Vmatrix} x \\ y \end{Vmatrix} = e^{4t} \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \end{Vmatrix}$

С §11 №130

$$\begin{cases} \dot{x} = x + y \\ \dot{y} = -2x + 3y \end{cases} \quad x(0) = C_1, \; y(0) = C_2$$

В векторной форме:

$\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$, $A = \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{Vmatrix}$

Решение: $\vec{x} = e^{At} \vec{C}$, $\vec{C} = \begin{Vmatrix} C_1 \\ C_2 \end{Vmatrix}$

Собственные значения:

$\det(A-\lambda E)=0$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2-4\lambda+5=0$$

$D=16-20=-4=(2i)^2$

$$\lambda_{1,2}=\frac{4\pm 2i}{2}=2\pm i$$

Базис из собственных векторов:

$\lambda_1=2+i$ кратности 1:

$$\begin{Vmatrix} -1-i & 1 \\ -2 & 1-i \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 1 & -\frac{1-i}{2} \\ 1 & -\frac{1-i}{2} \end{Vmatrix} \Rightarrow \vec{h}_1=\begin{Vmatrix} 1-i \\ 2 \end{Vmatrix}$$

$\lambda_2=2-i$ кратности 1:

$$\begin{Vmatrix} -1+i & 1 \\ -2 & 1+i \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 1 & -\frac{1+i}{2} \\ 1 & -\frac{1+i}{2} \end{Vmatrix} \Rightarrow \vec{h}_2=\begin{Vmatrix} 1+i \\ 2 \end{Vmatrix}$$

$$S=\begin{Vmatrix} 1-i & 1+i \\ 2 & 2 \end{Vmatrix}$$

$$\left\Vert\begin{array}{cc|cc} 1-i & 1+i & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right\Vert \sim \left\Vert\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 2i & 1 & \frac{1}{2}(i-1) \end{array}\right\Vert \sim$$

$$\sim \left\Vert\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{i}{2} & \frac{i+1}{4} \end{array}\right\Vert \sim \left\Vert\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{i}{2} & \frac{1-i}{4} \\ 0 & 1 & -\frac{i}{2} & \frac{1+i}{4} \end{array}\right\Vert \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S^{-1}=\frac{1}{4}\begin{Vmatrix} 2i & 1-i \\ -2i & 1+i \end{Vmatrix}$$

В базисе $\{\vec{h}_1, \vec{h}_2\}$: $A' = \begin{Vmatrix} 2+i & 0 \\ 0 & 2-i \end{Vmatrix}$

$$e^{A't} = \begin{Vmatrix} e^{(2+i)t} & 0 \\ 0 & e^{(2-i)t} \end{Vmatrix} = e^{2t} \begin{Vmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{Vmatrix}$$

$$e^{At} = S e^{A't} S^{-1} = \frac{1}{4} e^{2t} \begin{Vmatrix} 1-i & 1+i \\ 2 & 2 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 2i & 1-i \\ -2i & 1+i \end{Vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{4} e^{2t} \begin{Vmatrix} (1-i)e^{it} & (1+i)e^{-it} \\ 2e^{it} & 2e^{-it} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 2i & 1-i \\ -2i & 1+i \end{Vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{4} e^{2t} \begin{Vmatrix} 2i(1-i)e^{it} - 2i(1+i)e^{-it} & (1-i)^2 e^{it} + (1+i)^2 e^{-it} \\ 4ie^{it} - 4ie^{-it} & 2(1-i)e^{it} + 2(1+i)e^{-it} \end{Vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{4} e^{2t} \begin{Vmatrix} 2i\left((e^{it} - e^{-it}) - i(e^{it} + e^{-it})\right) & -2ie^{it} + 2ie^{-it} \\ 4i(e^{it} - e^{-it}) & 2\left((e^{it} + e^{-it}) - (e^{it} - e^{-it})i\right) \end{Vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{4} e^{2t} \begin{Vmatrix} 4i(i\sin t - i\cos t) & -4i \cdot i\sin t \\ 8i \cdot i\sin t & 2(2\cos t - i \cdot 2i\sin t) \end{Vmatrix} =$$

$$= e^{2t} \begin{Vmatrix} \cos t - \sin t & \sin t \\ -2\sin t & \cos t + \sin t \end{Vmatrix}$$

<u>Ответ</u>: $\begin{Vmatrix} x \\ y \end{Vmatrix} = e^{2t} \begin{Vmatrix} \cos t - \sin t & \sin t \\ -2\sin t & \cos t + \sin t \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} C_1 \\ C_2 \end{Vmatrix}$

$C_1 = C_2 = 1$: $\begin{Vmatrix} x \\ y \end{Vmatrix} = e^{2t} \begin{Vmatrix} \cos t \\ \cos t - \sin t \end{Vmatrix}$

T2

$\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$

$$A' = \begin{Vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{Vmatrix}$$ – в базисе $\{\vec{h}_1, \vec{h}_2, \vec{h}_3, \vec{h}_4, \vec{h}_5\}$

а) Записать в общем виде решение системы

$\lambda_1 = 2$ кратности 3

$\dim E_{\lambda_1} = 1$, $\vec{h}_1$ – собственный вектор,

$\vec{h}_2$ – присоединённый к $\vec{h}_1$, $\vec{h}_3$ – присоединённый к $\vec{h}_2$

$\lambda_2 = 3$ кратности 2

$\dim E_{\lambda_2} = 2$, $\vec{h}_4$ и $\vec{h}_5$ – собственные вектора

Тогда общее решение записывается в виде:

$$\vec{x} = c_1\vec{h}_1 e^{2t} + c_2(\vec{h}_2 + t\vec{h}_1)e^{2t} + c_3\left(\vec{h}_3 + t\vec{h}_2 + \frac{t^2}{2}\vec{h}_3\right)e^{2t} + c_4\vec{h}_4 e^{3t} + c_5\vec{h}_5 e^{3t}$$

б) Найти $e^{A'}$

$$e^{A'} = \begin{Vmatrix} e^{B} & 0 \\ 0 & e^{C} \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{Vmatrix}, \quad C = \begin{Vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{Vmatrix}$$

$$e^{B}=e^{\begin{Vmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{Vmatrix}+\begin{Vmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{Vmatrix}}=e^{2E+\begin{Vmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{Vmatrix}}\underset{*}{=}e^{2}\cdot e^{\overbrace{\begin{Vmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{Vmatrix}}^{D}}$$

(*) равенство можно записать поскольку D и E коммутируют

$$D^{2}=\begin{Vmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{Vmatrix}$$

$$D^{3}=\begin{Vmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{Vmatrix}=0$$

$$e^{D}=E+\frac{D}{1!}+\frac{D^{2}}{2!}+0+0+\ldots=\begin{Vmatrix}1&1&\frac{1}{2}\\0&1&1\\0&0&1\end{Vmatrix}\Rightarrow e^{B}=e^{2}\begin{Vmatrix}1&1&\frac{1}{2}\\0&1&1\\0&0&1\end{Vmatrix}$$

$$e^{C}=\begin{Vmatrix}e^{3}&0\\0&e^{3}\end{Vmatrix}$$

$$e^{A'}=\begin{Vmatrix}e^{2}&e^{2}&\frac{e^{2}}{2}&0&0\\0&e^{2}&e^{2}&0&0\\0&0&e^{2}&0&0\\0&0&0&e^{3}&0\\0&0&0&0&e^{3}\end{Vmatrix}$$

<u>Ответ:</u> а) $\vec{x}=c_1\vec{h}_1e^{2t}+c_2(\vec{h}_2+t\vec{h}_1)e^{2t}+c_3(\vec{h}_3+t\vec{h}_2+\frac{t^{2}}{2}\vec{h}_3)+$

$+c_4\vec{h}_4e^{3t}+c_5\vec{h}_5e^{3t}$

б)

$$e^{A'}=\begin{Vmatrix}e^{2}&e^{2}&\frac{e^{2}}{2}&0&0\\0&e^{2}&e^{2}&0&0\\0&0&e^{2}&0&0\\0&0&0&e^{3}&0\\0&0&0&0&e^{3}\end{Vmatrix}$$

IV. Операционный метод

С§8 №173

$$y'' - y' - 2y = 3te^t \quad y(0)=0,\ y'(0)=1,\ t>0$$

$$y(t) \doteqdot Y(p)$$

$$y'(t) \doteqdot pY(p) - y(+0) = pY(p)$$

$$y''(t) \doteqdot p^2Y(p) - py(+0) - y'(+0) = p^2Y(p) - 1$$

$$3te^t \doteqdot 3\cdot\frac{1!}{(p-1)^{1+1}} = \frac{3}{(p-1)^2}$$

$$p^2Y(p) - 1 - pY(p) - 2Y(p) = \frac{3}{(p-1)^2}$$

$$Y(p) = \left(\frac{3}{(p-1)^2} + 1\right)\cdot\frac{1}{p^2-p-2} =$$

$$= \frac{p^2-3p+4}{(p-1)^2(p+1)(p-2)} = \frac{Ap+B}{(p-1)^2} + \frac{C}{p+1} + \frac{D}{p-2} =$$

$$= \frac{Ap^2 + Ap + Bp + B + Cp^2 - 2Cp + C}{(p-1)^2(p+1)} + \frac{D}{p-2} =$$

$$= \frac{(A+C)p^2 + (A+B-2C)p + (B+C)}{(p-1)^2(p+1)} + \frac{D}{p-2} =$$

$$= \Big[(A+C)p^3 - 2(A+C)p^2 + (A+B-2C)p^2 - 2(A+B-2C)p +$$

$$+ (B+C)p - 2(B+C) + D(p^3 - 2p^2 + p + p^2 - 2p + 1)\Big]\cdot\frac{1}{\dots} =$$

$$= \left[(A+C+D)p^3 + (-A+B-4C-D)p^2 + (-2A-B+5C-D)p + \right.$$
$$\left. + (-2B-2C+D)\right] \cdot \frac{1}{\dots}$$

$$\begin{cases} A+C+D=0 \\ -A+B-4C-D=0 \\ -2A-B+5C-D=0 \\ -2B-2C+D=3 \end{cases} \quad \left\|\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -4 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 1 & 3 \end{array}\right\| \sim \left\|\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 1 & 3 \end{array}\right\| \sim$$

$$\sim \left\|\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 1 & 3 \end{array}\right\| \sim \left\|\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right\|$$

$3D = 3 \Rightarrow D = 1$

$4C + D = 0 \Rightarrow C = -\frac{1}{4}$

$B - 3C = 0 \Rightarrow B = -\frac{3}{4}$

$A + C + D = 0 \Rightarrow A - \frac{1}{4} + 1 = 0 \Rightarrow A = -\frac{3}{4}$

$$\bar{Y}(p) = -\frac{3}{4}\frac{p+1}{(p-1)^2} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{p+1} + \frac{1}{p-2} = -\frac{3}{4}\underbrace{\frac{p-1}{(p-1)^2}}_{e^t} - \frac{3}{4}\cdot\underbrace{\frac{2}{(p-1)^2}}_{2e^t \cdot t} -$$
$$- \frac{1}{4}\underbrace{\frac{1}{p+1}}_{e^{-t}} + \underbrace{\frac{1}{p-2}}_{e^{2t}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = -\frac{3}{4}(1+2t)e^t - \frac{1}{4}e^{-t} + e^{2t}$$

<u>Ответ</u>: $y = -\frac{3}{4}(1+2t)e^t - \frac{1}{4}e^{-t} + e^{2t}$

С §8 №182

$$y'' + 4y = 4(\cos 2t + \sin 2t) \quad y(0)=0,\ y'(0)=1$$

$$y \risingdotseq Y(p)$$

$$y' \risingdotseq pY(p) - y(+0) = pY(p)$$

$$y'' \risingdotseq p^2Y(p) - py(+0) - y'(+0) = p^2Y(p) - 1$$

$$\sin 2t \risingdotseq \frac{2}{p^2+4}$$

$$\cos 2t \risingdotseq \frac{p}{p^2+4}$$

$$p^2Y(p) - 1 + 4Y(p) = 4\cdot\frac{p+2}{p^2+4}$$

$$Y(p)(p^2+4) = \frac{4p+8+p^2+4}{p^2+4}$$

$$Y(p) = \frac{p^2+4p+12}{(p^2+4)^2} =$$

$$= \frac{2(p^2+4)}{(p^2+4)^2} + \frac{-p^2+4p+4}{(p^2+4)^2} =$$

$$= \underbrace{\frac{2}{p^2+4}}_{\sin 2t} - \underbrace{\frac{p^2-4}{(p^2+4)^2}}_{t\cos 2t} + \underbrace{\frac{4p}{(p^2+4)^2}}_{t\sin 2t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = (1+t)\sin 2t - t\cos 2t$$

Ответ: $y = (1+t)\sin 2t - t\cos 2t$

C § 11 № 189

$$\begin{cases} \dot{x} = x + y + e^{2t} \\ \dot{y} = -2x + 4y + e^{2t} \end{cases} \qquad x(0)=1,\ y(0)=2$$

$x \fallingdotseq X(p)$, $\dot{x} \fallingdotseq pX(p) - x(+0) = pX(p) - 1$

$y \fallingdotseq Y(p)$, $\dot{y} \fallingdotseq pY(p) - 2$

$e^{2t} \fallingdotseq \cancel{p}\dfrac{1}{p-2}$

$$\begin{cases} pX(p) - 1 = X(p) + Y(p) + \dfrac{1}{p-2} & (1) \\ pY(p) - 2 = -2X(p) + 4Y(p) + \dfrac{1}{p-2} & (2) \end{cases}$$

$(1) \Rightarrow Y(p) = X(p)(p-1) - 1 - \dfrac{1}{p-2}$. Подставляем в (2):

$(p^2-p)X(p) - p - \dfrac{p}{p-2} - 2 = -2X(p) + 4(p-1)X(p) - 4 - \dfrac{4}{p-2} + \dfrac{1}{p-2}$;

$X(p)(p^2 - p + 2 - 4p + 4) = -2 + \dfrac{p}{p-2} + p - \dfrac{3}{p-2} =$

$= \dfrac{-2p + 4 + p + p^2 - 2p - 3}{p-2} = \dfrac{p^2 - 3p + 1}{p-2}$

$X(p) = \dfrac{p^2 - 3p + 1}{(p-2)^2(p-3)} = \dfrac{Ap + B}{(p-2)^2} + \dfrac{C}{p-3} =$

$= \dfrac{Ap^2 - 3Ap + Bp - 3B + Cp^2 - 4Cp + 4C}{(p-2)^2(p-3)} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} A + C = 1 \\ -3A + B - 4C = -3 \\ -3B + 4C = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 - C \\ -3 + 3C + B - 4C = -3 \\ -3B + 4C = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 - C \\ B = C \\ -3C + 4C = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 1 \\ C = 1 \end{cases}$$

$$X(p)=\underbrace{\frac{1}{(p-2)^2}}_{te^{2t}}+\underbrace{\frac{1}{p-3}}_{e^{3t}} \Rightarrow x=te^{2t}+e^{3t}$$

$$Y(p)=(p-1)\cdot\frac{p^2-3p+1}{(p-2)^2(p-3)}-1-\frac{1}{p-2}=$$

$$=\frac{(p^3-3p^2+p-p^2+3p-1)-(p-3)(p^2-4p+4)-(p-2)(p-3)}{(p-2)^2(p-3)}=$$

$$=\frac{\cancel{p^3}-4p^2+4p-1\cancel{-p^3}+4p^2-4p+3p^2-12p+12-p^2+5p-6}{(p-2)^2(p-3)}=$$

$$=\frac{2p^2-7p+5}{(p-2)^2(p-3)}=\frac{Ap+B}{(p-2)^2}+\frac{C}{p-3}=$$

$$=\frac{(A+C)p^2+(-3A+B-4C)p+(-3B+4C)}{(p-2)^2(p-3)}$$

$$\begin{cases}A+C=2\\-3A+B-4C=-7\\-3B+4C=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=2-C\\-6+3C+B-4C=-7\\-3B+4C=5\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}A=2-C\\B=-1+C\\3-3C+4C=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=0\\B=1\\C=2\end{cases}$$

$$Y(p)=\underbrace{\frac{1}{(p-2)^2}}_{te^{2t}}+\underbrace{\frac{2}{(p-3)}}_{e^{3t}} \Rightarrow y=te^{2t}+2e^{3t}$$

<u>Ответ</u>: $x=te^{2t}+e^{3t}$, $y=te^{2t}+2e^{3t}$

С §11 №194

$$\begin{cases} \dot{x} = 4x+5y+4 \\ \dot{y} = -4x-4y+4t \end{cases} \quad x(0)=0,\ y(0)=3$$

$x \risingdotseq X(p)$, $\dot{x} \risingdotseq X(p)p - 0 = pX(p)$

$y(t) \risingdotseq Y(p)$, $\dot{y} \risingdotseq pY(p) - 3$

$t \risingdotseq \frac{1}{p^2}$, $1 \risingdotseq \frac{1}{p}$

$$\begin{cases} pX(p) = 4X(p) + 5Y(p) + 4/p & (1) \\ pY(p) - 3 = -4X(p) - 4Y(p) + \frac{4}{p^2} & (2) \end{cases}$$

(1) $\Rightarrow Y(p) = \frac{1}{5}pX(p) - \frac{4}{5}X(p) - \frac{4}{5}$; $-\frac{4}{5}p$ подставляем в (2):

$\frac{1}{5}p^2X(p) - \frac{4}{5}pX(p) - \frac{4}{5}p - 3 = -4X(p) - \frac{4}{5}pX(p) +$ $-\frac{4}{5}p^2$

$+ \frac{16}{5}X(p) + \frac{16}{5} + \frac{4}{p^2}$

$\frac{1}{5}X(p)\left(p^2 - 4p + 20 + 4p - 16\right) = \frac{4}{5}p + 3 + \frac{16}{5} + \frac{4}{p^2}$

$X(p)\ (p^2 + 4) = 4p + 15 + 16 + \frac{20}{p^2} = \frac{4p^3 + 31p^2 + 20}{p^2}$

$X(p) = \frac{4p^3 + 31p^2 + 20}{p^2(p^2+4)} = \frac{Ap+B}{p^2} + \frac{Cp+D}{p^2+4} =$

$= \frac{Ap^3 + Bp^2 + 4Ap + 4B + Cp^3 + Dp^2}{p^2(p^2+4)}$

$$\begin{cases} A+C=4 \\ B+D=31 \\ 4A=0 \\ 4B=20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=0 \\ B=5 \\ D=26 \\ C=4 \end{cases}$$

$$\cancel{X(p) = \frac{1}{p^2} + \frac{4p+30}{p^2+4}}$$

$$(1) \Rightarrow y(p) = \frac{1}{5}\left(pX(p) - 4X(p) - \frac{4}{p}\right)$$

Подставляем в (2):

$$\frac{1}{5}\left(p^2X(p) - 4pX(p) - 4\right) - 3 = -\frac{1}{5}\left(4pX(p) - 16X(p) - \frac{16}{p}\right) - 4X(p) + \frac{4}{p^2}$$

$$p^2X(p) - 4pX(p) - 4 - 15 = -4pX(p) + 16X(p) + \frac{16}{p} - 20X(p) + \frac{20}{p^2}$$

$$X(p)\left(p^2+4\right) = 19 + \frac{16}{p} + \frac{20}{p^2} = \frac{19p^2 + 16p + 20}{p^2}$$

$$X(p) = \frac{19p^2 + 16p + 20}{p^2(p^2+4)} = \frac{Ap+B}{p^2} + \frac{Cp+D}{p^2+4} =$$

$$= \frac{Ap^3 + 4Ap + Bp^2 + 4B + Cp^3 + Dp^2}{p^2(p^2+4)} =$$

$$= \frac{\cancel{Ap^3}(A+C)p^3 + (B+D)p^2 + 4Ap + 4B}{p^2(p^2+4)}$$

$$\begin{cases} A+C=0 \\ B+D=19 \\ 4A=16 \\ 4B=20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=4 \\ B=5 \\ C=-4 \\ D=14 \end{cases}$$

$$X(p) = \frac{4p+5}{p^2} + \frac{-4p+14}{p^2+4} = \underbrace{\frac{4}{p}}_{4} + \underbrace{\frac{5}{p^2}}_{5t} - 4\underbrace{\frac{p}{p^2+4}}_{\cos 2t} + 7\underbrace{\frac{2}{p^2+4}}_{\sin 2t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(t) = 4 + 5t - 4\cos 2t + 7\sin 2t$$

$$Y(p)=\frac{1}{5}\left((p-4)\cdot\frac{19p^2+16p+20}{p^2(p^2+4)}-\frac{4}{p}\right)=$$

$$=\frac{1}{5}\left\{\frac{19p^3+16p^2+20p-76p^2-64p-80-4(p^3+4p)}{p^2(p^2+4)}\right\}=$$

$$=\frac{1}{5}\cdot\frac{15p^3-60p^2-60p-80}{p^2(p^2+4)}=\frac{1}{5}\left(\frac{Ap+B}{p^2}+\frac{Cp+D}{p^2+4}\right)=$$

$$=\frac{1}{5}\cdot\frac{(A+C)p^3+(B+D)p^2+4Ap+4B}{p^2(p^2+4)}$$

$$\begin{cases}A+C=15\\ B+D=-60\\ 4A=-60\\ 4B=-80\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=-15\\ B=-20\\ C=30\\ D=-40\end{cases}$$

$$Y(p)=\frac{1}{5}\cdot\frac{-15p-20}{p^2}+\frac{1}{5}\cdot\frac{30p-40}{p^2+4}=$$

$$=-\underbrace{\frac{3}{p}}_{3}-\underbrace{\frac{4}{p^2}}_{4t}+6\underbrace{\frac{p}{p^2+4}}_{\cos 2t}-4\underbrace{\frac{2}{p^2+4}}_{\sin 2t}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(t)=-3-4t+6\cos 2t-4\sin 2t$$

<u>Ответ:</u> $x(t)=4+5t-4\cos 2t+7\sin 2t$

$y(t)=-3-4t+6\cos 2t-4\sin 2t$