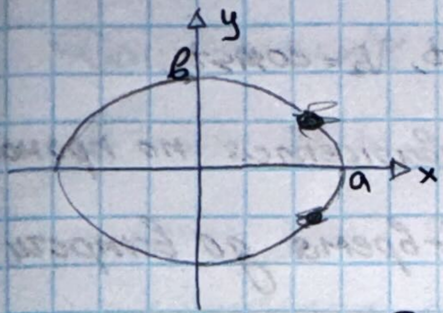
I. Кинематика точки

№1.12



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

$\vec{w} \parallel Oy$, $x=\frac{\sqrt{3}}{2}a$, $y=\frac{1}{2}b$, $v_x=v_0=\text{const}$

Найти: w

Решение:

$v_x=\dot{x}=v_0$ (по условию); $w_x=0$

Дифференцируем уравнение эллипса по времени:

$$\cancel{\frac{2x\dot{x}}{a^2}+\frac{2y\dot{y}}{b^2}=0 \Rightarrow \frac{1}{a^2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a\,\dot{x}+\frac{1}{b^2}\cdot\frac{1}{2}b\cdot\dot{y}=0}$$

$$\cancel{\frac{\sqrt{3}}{a}v_0=-\frac{\dot{y}}{b} \Rightarrow \dot{y}=-\frac{\sqrt{3}b}{a}v_0}$$

$$\frac{2x\dot{x}}{a^2}+\frac{2y\dot{y}}{b^2}=0 \Rightarrow -\left(\frac{b}{a}\right)^2\cdot\frac{x}{y}v_0=\dot{y},\quad \dot{y}(x_0,y_0)=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{\sqrt{3}a}{b}v_0=-\frac{\sqrt{3}b}{a}v_0$$

$$\ddot{y}=-\left(\frac{b}{a}\right)^2 v_0\cdot\frac{\dot{x}y-x\dot{y}}{y^2}$$

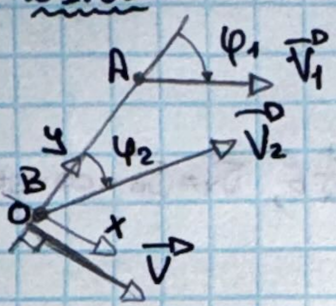
Подставляем $x=\frac{\sqrt{3}}{2}a$, $y=\frac{1}{2}b$, $\dot{x}=v_0$, $\dot{y}=-\frac{\sqrt{3}b}{a}v_0$:

$$\ddot{y}=w_y=-\left(\frac{b}{a}\right)^2 v_0\cdot\frac{v_0\cdot\frac{1}{2}b+\frac{\sqrt{3}}{2}a\cdot\frac{\sqrt{3}b}{a}v_0}{\frac{1}{4}b^2}=$$

$$=-\frac{4v_0^2}{a^2}\cdot\left(\frac{1}{2}b+\frac{3}{2}b\right)=-\frac{8v_0^2 b}{a^2}$$

Ответ: $w_x=0$, $w_y=-\frac{8b}{a^2}v_0^2$, $|w|=\frac{8v_0^2 b}{a^2}$.

№1.30



Дано: $V_1 = const$, $V_2 = const$,

$V_1 \sin\varphi_1 = V_2 \sin\varphi_2$, A движется по прямой

Найти: $AB = r(t)$, T - время до встречи

Решение:

$\vec{V} \perp AB$, $V = V_1 \sin\varphi_1 \; (= V_2 \sin\varphi_2)$

Рассмотрим СО xOy; движущуюся с пост. $\vec{V} \perp AB$.

$V'_{1x} = 0$, $V'_{2x} = 0$, $V'_{1y} = V_1 \cos\varphi_1$, $V'_{2y} = V_2 \cos\varphi_2$

$y_B(t) = 0 + V'_{2y} t = V_2 \cos\varphi_2 \cdot t$

$y_A(t) = r_0 + V'_{1y} t = r_0 + V_1 \cos\varphi_1 t$

$\cancel{r(t) = r_0 + (V_1 \cos\varphi_1 - V_2 \cos\varphi_2) t}$

$r(t) = r_0 - (V_2 \cos\varphi_2 - V_1 \cos\varphi_1) t$

$r(T) = 0 \Rightarrow T = \dfrac{r_0}{V_2 \cos\varphi_2 - V_1 \cos\varphi_1}$

Ответ: $r(t) = r_0 - (V_2 \cos\varphi_2 - V_1 \cos\varphi_1) t$, $T = \dfrac{r_0}{V_2 \cos\varphi_2 - V_1 \cos\varphi_1}$

№1.37 (в)

Дано: $x = \sigma\tau$, $y = \frac{\tau^2 - \sigma^2}{2}$, $z = z$

Найти: V, w_σ, w_τ, w_z

Решение:

$$V = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} = \sqrt{(\sigma\dot{\tau} + \dot{\sigma}\tau)^2 + (\tau\dot{\tau} - \sigma\dot{\sigma})^2 + \dot{z}^2} =$$

$$= \sqrt{(\sigma\dot{\tau})^2 + (\dot{\sigma}\tau)^2 + (\tau\dot{\tau})^2 + (\sigma\dot{\sigma})^2 + \dot{z}^2} = \sqrt{\sigma^2(\dot{\tau}^2 + \dot{\sigma}^2) + \tau^2(\dot{\tau}^2 + \dot{\sigma}^2) + \dot{z}^2} =$$

$$= \sqrt{(\dot{\sigma}^2 + \dot{\tau}^2)(\sigma^2 + \tau^2) + \dot{z}^2}$$

$$w_j = \left(\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial q^j}\right)^2\right)^{-1/2}\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}^j}\left(\frac{V^2}{2}\right) - \frac{\partial}{\partial q^j}\left(\frac{V^2}{2}\right)\right]$$

$$w_\sigma = \frac{1}{2}(\tau^2 + \sigma^2)^{-1/2}\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{\sigma}}\left((\dot{\sigma}^2 + \dot{\tau}^2)(\sigma^2 + \tau^2) + \dot{z}^2\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial}{\partial \sigma}\left((\dot{\sigma}^2 + \dot{\tau}^2)(\sigma^2 + \tau^2) + \dot{z}^2\right)\right] = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\tau^2 + \sigma^2}}\left[\frac{d}{dt}\left(2\dot{\sigma}(\sigma^2 + \tau^2)\right) - \right.$$

$$\left. - 2\sigma(\dot{\sigma}^2 + \dot{\tau}^2)\right] = \frac{1}{\sqrt{\tau^2 + \sigma^2}}\left[\frac{d}{dt}\left(\dot{\sigma}(\sigma^2 + \tau^2)\right) - \sigma(\dot{\sigma}^2 + \dot{\tau}^2)\right]$$

$$w_\tau = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\tau^2 + \sigma^2}}\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{\tau}}\left((\dot{\sigma}^2 + \dot{\tau}^2)(\sigma^2 + \tau^2) + \dot{z}^2\right) - \frac{\partial}{\partial \tau}\left((\dot{\sigma}^2 + \dot{\tau}^2)\right.\right.$$

$$\left.\left. \cdot(\sigma^2 + \tau^2) + \dot{z}^2\right)\right] = \frac{1}{\sqrt{\tau^2 + \sigma^2}}\left[\frac{d}{dt}\left(\dot{\tau}(\sigma^2 + \tau^2)\right) - \tau(\dot{\sigma}^2 + \dot{\tau}^2)\right]$$

$$w_z = \ddot{z}$$

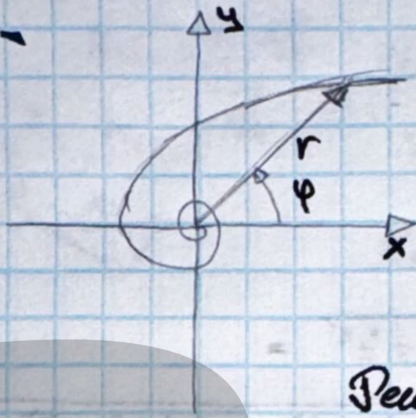
Ответ: $V = \sqrt{(\dot{\sigma}^2 + \dot{\tau}^2)(\sigma^2 + \tau^2) + \dot{z}^2}$

$$w_\sigma = \frac{1}{\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}}\left[\frac{d}{dt}\left(\dot{\sigma}(\sigma^2 + \tau^2)\right) - \sigma(\dot{\sigma}^2 + \dot{\tau}^2)\right]$$

$$w_\tau = \frac{1}{\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}}\left[\frac{d}{dt}\left(\dot{\tau}(\sigma^2 + \tau^2)\right) - \tau(\dot{\sigma}^2 + \dot{\tau}^2)\right]$$

$$w_z = \ddot{z}$$

T1



Дано: $r=\frac{1}{\varphi^2}$, $\sigma=1$ - секториальная скорость. $\varphi=1$ (в данный момент времени)

Найти: w_n, w_τ, S

Решение:

$$dS=\frac{1}{2}r\cdot r\cdot\sin(d\varphi)=\frac{1}{2}r^2d\varphi$$ (площадь треугольника)

$$\sigma=\frac{dS}{dt}=\frac{1}{2}r^2\frac{d\varphi}{dt}=\frac{1}{2\varphi^4}\dot\varphi$$

$$\dot\varphi=2\varphi^4\sigma$$

$$\ddot\varphi=2\sigma\cdot4\varphi^3\dot\varphi=8\sigma\varphi^3\cdot2\sigma\varphi^4=16\sigma^2\varphi^7$$

$$\dot r=\frac{dr}{dt}=\frac{dr}{d\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{dt}=-\frac{2}{\varphi^3}\cdot\dot\varphi=-\frac{2}{\varphi^3}\cdot2\sigma\varphi^4=-4\sigma\varphi$$

$$\ddot r=-4\sigma\dot\varphi=-4\sigma\cdot2\sigma\varphi^4=-8\sigma^2\varphi^4$$

$$\vec r=\left\|\begin{matrix}r\cos\varphi\\ r\sin\varphi\\ 0\end{matrix}\right\| \quad \vec V=\left\|\begin{matrix}\dot r\cos\varphi-r\sin\varphi\dot\varphi\\ \dot r\sin\varphi+r\cos\varphi\dot\varphi\\ 0\end{matrix}\right\|$$

$$\cancel{\vec W=\left\|\begin{matrix}\ddot r\cos\varphi-2\dot r\sin\varphi\dot\varphi-r\cos\varphi\dot\varphi^2-r\sin\varphi\ddot\varphi\\ \ddot r\sin\varphi+2\dot r\cos\varphi\dot\varphi-r\sin\varphi\dot\varphi^2+r\cos\varphi\ddot\varphi\\ 0\end{matrix}\right\|}$$

$$|\vec V|^2=\dot r^2\cos\varphi+r^2\sin^2\varphi\dot\varphi^2-2r\dot r\sin\varphi\cos\varphi\dot\varphi+\dot r^2\sin^2\varphi+$$

$$+r^2\cos^2\varphi\dot\varphi^2+2r\dot r\sin\varphi\cos\varphi\dot\varphi=\dot r^2+r^2\dot\varphi^2$$

$$\cancel{\vec W_\tau=\frac{dV}{dt}=\frac{1}{2\sqrt{\dot r^2+r^2\dot\varphi^2}}(2\dot r\ddot r+2r\dot r\dot\varphi^2+2r^2\dot\varphi\ddot\varphi)=}$$

$$\cancel{=\frac{(-4\sigma\varphi)(-8\sigma^2\varphi^4)+\frac{1}{\varphi^2}(-4\sigma\varphi)\cdot4\varphi^8\sigma^2+\frac{1}{\varphi^4}\cdot2\varphi^4\sigma\cdot16\sigma^2\varphi^7}{\sqrt{16\sigma^2\varphi^2+\frac{1}{\varphi^4}\cdot4\varphi^8\sigma^2}}=}$$

$$w_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{\dot r^2 + r^2\dot\varphi^2}}\left(2\dot r\ddot r + 2r\dot r\dot\varphi^2 + 2r^2\dot\varphi\ddot\varphi\right) =$$

$$= \frac{(-4b\varphi)(-8b^2\varphi^4) + \frac{1}{\varphi^2}(-4b\varphi)(4b^2\varphi^8) + \frac{1}{\varphi^4}(-2b\varphi^4)(16b^2\varphi^7)}{\sqrt{16b^2\varphi^2 + \frac{1}{\varphi^4}\cdot 4b^2\varphi^8}} =$$

$$= \frac{32b^3\varphi^5 - 16b^3\varphi^7 + 32b^3\varphi^7}{2b\varphi\sqrt{4+\varphi^2}} = \frac{8b^2\varphi^4(2+\varphi^2)}{\sqrt{4+\varphi^2}}$$

В полярных координатах:

$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi$

$$w_r = \left(\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2\right)^{-1/2}\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot r}\left(\frac{v^2}{2}\right) - \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v^2}{2}\right)\right] =$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\cdot 2\dot r\right) - \frac{1}{2}\cdot 2r\dot\varphi^2 = \ddot r - r\dot\varphi^2$$

$$w_\varphi = \left(\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2\right)^{-1/2}\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot\varphi}\left(\frac{v^2}{2}\right) - \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{v^2}{2}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}r^2\cdot 2\dot\varphi\right) = \frac{1}{r}\left(2r\dot r\dot\varphi + r^2\ddot\varphi\right) =$$

$$= 2\dot r\dot\varphi + r\ddot\varphi$$

$w^2 = w_r^2 + w_\varphi^2$ (т.к. координатные оси перпендикулярны)

$$w^2 = (\ddot r - r\dot\varphi^2)^2 + (2\dot r\dot\varphi + r\ddot\varphi)^2 = \left(-8b^2\varphi^4 - \frac{1}{\varphi^2}\cdot 4b^2\varphi^8\right)^2 +$$

$$+\left(-2\cdot 4b\varphi\cdot 2b\varphi^4 + \frac{1}{\varphi^2}\cdot 16b^2\varphi^7\right)^2 = \left(4b^2\varphi^4(2+\varphi^2)\right)^2$$

$$w_n^2 = w^2 - w_\tau^2 = 16b^4\varphi^8(2+\varphi^2)^2 - \frac{64b^4\varphi^8(2+\varphi^2)^2}{4+\varphi^2} =$$

$$= 16b^4\varphi^8(2+\varphi^2)^2\left(1 - \frac{4}{4+\varphi^2}\right) = \frac{16b^4\varphi^{10}(2+\varphi^2)^2}{4+\varphi^2}$$

$$W_n = \frac{4b^2\varphi^5(2+\varphi^2)}{\sqrt{4+\varphi^2}}$$

При $\varphi = 1$: $W_\tau = \frac{24}{\sqrt5}$, $W_n = \frac{12}{\sqrt5}$

$$W_n = \frac{v^2}{\rho} \Rightarrow \rho = \frac{v^2}{W_n} = \frac{\dot r^2 + r^2\dot\varphi^2}{4b^2\varphi^5(2+\varphi^2)}\cdot\sqrt{4+\varphi^2} =$$

$$= \frac{16b^2\varphi^2 + \frac{1}{\varphi^4}\cdot 4b^2\varphi^8}{4b^2\varphi^5(2+\varphi^2)}\sqrt{4+\varphi^2} =$$

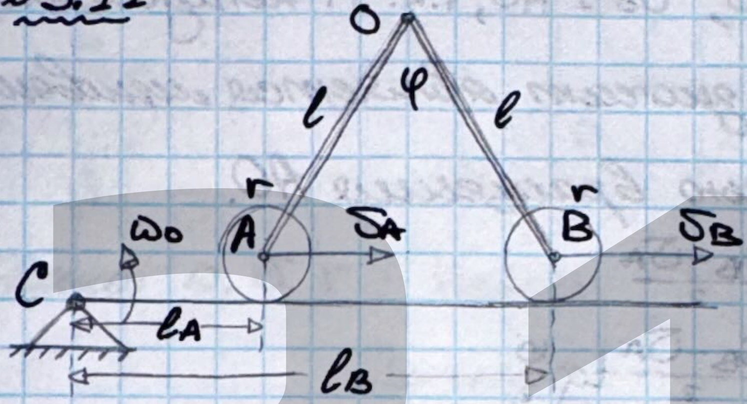
$$= \frac{4b^2\varphi^2(4+\varphi^2)^{3/2}}{4b^2\varphi^5(2+\varphi^2)} = \frac{(4+\varphi^2)^{3/2}}{\varphi^3(2+\varphi^2)} = \frac{5\sqrt5}{3}$$

<u>**Ответ:**</u> $W_\tau = \frac{24}{\sqrt5}$, $W_n = \frac{12}{\sqrt5}$, $\rho = \frac{5\sqrt5}{3}$.

II. Кинематика твёрдого тела

II.1 Плоскопараллельное движение

23.11



Дано: l_A, l_B, r, l, ω_0, ϑ_A и ϑ_B – относительно прямой

Найти: $\vec{\vartheta}_O$

Решение:

xCy – неподвижная система отсчёта

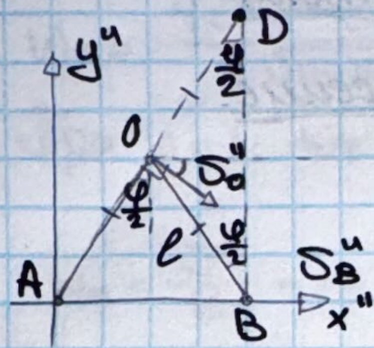
x'Cy' – вращающаяся с угловой скоростью ω_0 вокруг точки C.

x"Ay" – Ось x" совпадает с AB, начало отсчёта движется со скоростью ϑ_A относительно системы x'Cy'.

В x"Ay": (см. рис. на след. стр.)

$\vartheta_B'' = \vartheta_B - \vartheta_A$, $\vartheta_O'' = l\cdot\omega_{BO}$, $\vartheta_B'' = 2l\cos\frac{\varphi}{2}\cdot\omega_{BO} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \vartheta_O'' = \frac{\vartheta_B-\vartheta_A}{2\cos\frac{\varphi}{2}}$$



Точка D – мгновенная ось вращения ВО, $\vec{v}_O'' \perp AO$, т.к. A неподвижна, а значит является мгновенной осью вращения AO.

$$v''_{Ox} = v''_O \cos\frac{\varphi}{2} = \frac{v_B - v_A}{2}$$

$$v''_{Oy} = v''_O \sin\frac{\varphi}{2} = \frac{v_B - v_A}{2}\, tg\frac{\varphi}{2}$$

Возвращаемся в $x'Cy'$: $\vec{v}_O' = \vec{v}_O'' + \vec{v}_A =$

$$= \begin{Vmatrix} \frac{v_B - v_A}{2} \\ \frac{v_B - v_A}{2}\, tg\frac{\varphi}{2} \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} v_A \\ 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \frac{v_A + v_B}{2} \\ \frac{v_B - v_A}{2}\, tg\frac{\varphi}{2} \end{Vmatrix}$$

$$\vec{v}_O = \vec{v}_O' + \vec{\omega}_O \times \vec{r}_O =$$

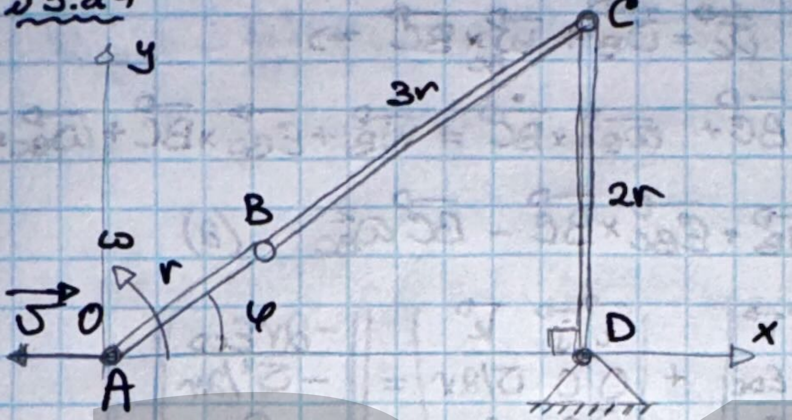
$$\vec{\omega}_O \times \vec{r}_O = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega_0 \\ \frac{1}{2}(l_A + l_B) & r + l\cos\frac{\varphi}{2} & 0 \end{vmatrix} = \begin{Vmatrix} -\omega_0 r + l\omega_0 \cos\frac{\varphi}{2} \\ \frac{\omega_0 (l_A + l_B)}{2} \\ 0 \end{Vmatrix}$$

$$\vec{v}_O = \begin{Vmatrix} \frac{v_A + v_B}{2} \\ \cancel{\omega_0(l_A+l_B)}\ \frac{v_B - v_A}{2}\, tg\frac{\varphi}{2} \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} -\omega_0 r + \omega_0 l\cos\frac{\varphi}{2} \\ \frac{\omega_0 (l_A + l_B)}{2} \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} \frac{v_A + v_B}{2} - \omega_0 r + \omega_0 l\cos\frac{\varphi}{2} \\ \frac{v_B - v_A}{2}\, tg\frac{\varphi}{2} + \frac{\omega_0 (l_A + l_B)}{2} \end{Vmatrix}$$

Ответ: $v_O^2 = \left(\frac{v_A + v_B}{2} - \omega_0 r + \omega_0 l\cos\frac{\varphi}{2}\right)^2 + \left(\frac{v_B - v_A}{2}\, tg\frac{\varphi}{2} + \frac{\omega_0 (l_A + l_B)}{2}\right)^2$

№3.24

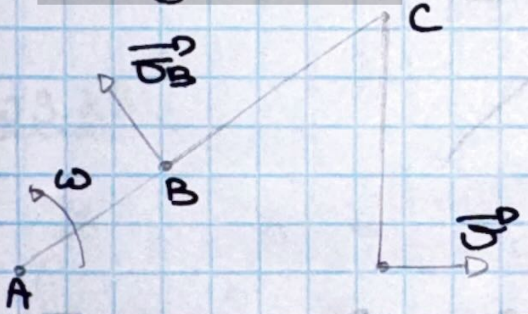


Дано: ω, v, r ; Найти: v_C, ω_C

Решение:

xOy - неподвижная СК, x'Ay' - подвижная, движется со скоростью $\vec{v}$.

В x'Ay':



Точка A неподвижна – центр вращения => $\Rightarrow \vec{v}_B{}' \perp AC$, $\vec{w}_B{}' \parallel AC$, $w_B' = \omega^2 r$, при этом система движется с постоянной ск. $\vec{v} \Rightarrow \vec{w}_B = \vec{w}_B{}'$

Из того что $\vec{v}_B \perp BC$ следует, что C - ось вращения ($v_C' = 0$)

BC, $\omega_{BC} = \frac{v_B}{3r} = \frac{\omega r}{3r} = \frac{1}{3}\omega$

Аналогично $\omega_{CD} = \frac{v_D}{2r} = \frac{v}{2r}$;

$v_C' = 0 \Rightarrow v_C = \vec{v}$

~~$\vec{w}_C$~~ $\vec{v}_C = \vec{\omega}_{DC} \times \vec{DC} \Rightarrow \dot{\vec{v}}_C = \vec{\varepsilon}_{DC} \times \vec{DC} + \vec{\omega}_{DC} \times \vec{v}_C$ (1)

С другой стороны $\vec{v}_C = \vec{v}_B + \vec{\omega}_{BC} \times \vec{BC} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \dot{\vec{v}}_C = \dot{\vec{v}}_B + \vec{\varepsilon}_{BC} \times \vec{BC} + \vec{\omega}_{BC} \times \dot{\vec{BC}} = \vec{W}_B + \vec{\varepsilon}_{BC} \times \vec{BC} + \vec{\omega}_{BC} \times (\vec{\omega}_{BC} \times \vec{BC}) = \vec{W}_B + \vec{\varepsilon}_{BC} \times \vec{BC} - \vec{BC}\,\omega_{BC}^2 \quad (2)$$

$$(1) \Rightarrow \vec{W}_C = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \varepsilon_{DC} \\ 0 & 2r & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & v/2r \\ -v & 0 & 0 \end{vmatrix} = \left\| \begin{matrix} -2r\varepsilon_{CD} \\ -v^2/2r \\ 0 \end{matrix} \right\|$$

~~(2) => $\vec{W}_C = \left\| \begin{matrix} -\sqrt{3}/2 \cdot \omega^2 r \\ -1/2 \cdot \omega^2 r \\ 0 \end{matrix} \right\| + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \varepsilon_{BC} \\ 3\sqrt{3} r/2 & 3r/2 & 0 \end{vmatrix} - \left\| \begin{matrix} \frac{3\sqrt{3}}{2} r\omega^2/9 \\ \frac{3}{2} r\omega^2/9 \\ 0 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \sqrt{3}\omega^2 r - \frac{\sqrt{3}}{2} r\varepsilon_{BC} \\ \omega^2 r + \frac{3\sqrt{3}}{2} r\varepsilon_{BC} \\ 0 \end{matrix} \right\|$~~

~~Равенство W_{Cx}: $-\frac{v^2}{2r} = \omega^2 r + \frac{3\sqrt{3}}{2} r\varepsilon_{BC} \Rightarrow$~~

~~$\Rightarrow \varepsilon_{BC} = \frac{2}{3\sqrt{3} r}$~~

~~$= \left\| \begin{matrix} -\frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} r\omega^2 - \frac{\sqrt{3}}{2} r\varepsilon_{BC} \\ -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} r\omega^2 + 3\sqrt{3} \end{matrix} \right\|$~~

$$(2) \Rightarrow \vec{W}_C = \left\| \begin{matrix} -\frac{\sqrt{3}}{2}\omega^2 r \\ -\frac{1}{2}\omega^2 r \\ 0 \end{matrix} \right\| + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \varepsilon_{BC} \\ 3r \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} & 3r \cdot \frac{1}{2} & 0 \end{vmatrix} - \left\| \begin{matrix} \frac{3\sqrt{3} r}{2} \cdot \frac{\omega^2}{9} \\ \frac{3r}{2} \cdot \frac{\omega^2}{9} \\ 0 \end{matrix} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{matrix} -\frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\omega^2 r \\ -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}\omega^2 r \\ 0 \end{matrix} \right\| + \left\| \begin{matrix} -\frac{3}{2} r\varepsilon_{BC} \\ \frac{3\sqrt{3}}{2} r\varepsilon_{BC} \\ 0 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} -\frac{2}{\sqrt{3}}\omega^2 r - \frac{3}{2} r\varepsilon_{BC} \\ -\frac{2}{3}\omega^2 r + \frac{3\sqrt{3}}{2} r\varepsilon_{BC} \\ 0 \end{matrix} \right\|$$

Равенство у-координат: $-\frac{v^2}{2r} = -\frac{2}{3}\omega^2 r + \frac{3\sqrt{3} r}{2}\varepsilon_{BC} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \varepsilon_{BC} = \frac{2}{3\sqrt{3} r}\left(\frac{2}{3}\omega^2 r - \frac{v^2}{2r}\right) = \frac{1}{3\sqrt{3}}\left(\frac{4\omega^2}{3} - \frac{v^2}{r^2}\right)$$

$$w_{Cy} = -\frac{v^2}{2r} \quad (\text{из } 1)$$

$$w_{Cx} = \cancel{\frac{1}{3}\omega^2 r + \frac{3\sqrt{3}}{2}} - \frac{2}{\sqrt{3}}\omega^2 r - \frac{\sqrt{3}}{2} r \cdot \frac{1}{3\sqrt{3}}\left(\frac{4\omega^2}{3} - \frac{v^2}{r^2}\right) =$$

$$= \frac{-2}{\sqrt{3}}\omega^2 r - \frac{2\omega^2 r}{3\sqrt{3}} + \frac{v^2}{2\sqrt{3}r} \quad (\text{из } 2) = -\frac{8\omega^2 r}{3\sqrt{3}} + \frac{v^2}{2\sqrt{3}r}$$

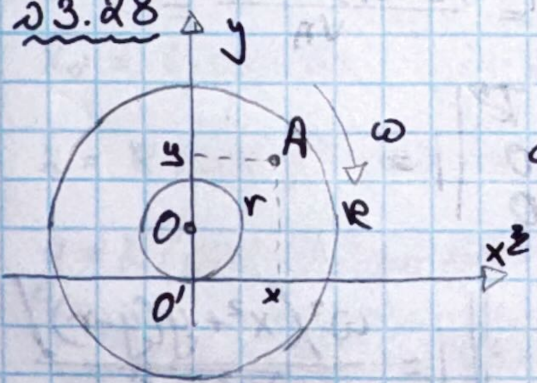
$$w_C^2 = \frac{v^4}{4r^2} + \frac{64\omega^4 r^2}{27} + \frac{v^4}{12r^2} - 2\cdot\frac{8\omega^2 r}{3\sqrt{3}}\cdot\frac{v^2}{2\sqrt{3}r} =$$

$$= \frac{v^4}{3r^2} + \frac{64}{27}\omega^4 r^2 - \frac{8}{9}\omega^2 v^2 = \frac{1}{81r^2}\left(3\left(9v^4 + 64\omega^4 r^4 - 24\omega^2 v^2 r^2\right)\right)$$

$$w_C = \frac{1}{9r}\sqrt{3\left(9v^4 + 64\omega^4 r^4 - 24\omega^2 v^2 r^2\right)}$$

Ответ: $v_C = v$, $w_C = \frac{1}{9r}\sqrt{3\left(9v^4 + 64\omega^4 r^4 - 24\omega^2 v^2 r^2\right)}$

23.28



Дано: вал катится без проскальзования, r, R

Найти: ГМТ: $\rho_{мцс} = \rho_{кр}$

Решение:

Мгновенный центр скоростей — точка O' (т.к. проскальзования нет)

$$\rho_{AO'} = \rho_{мцс} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Движущаяся вместе с центром вала СО:

$$\vec{V}_A' = \vec{\omega} \times \vec{r}_A'$$

$$\vec{W}_A' = -\omega^2 \vec{r}_A'$$

$$\vec{V}_{CO} = const \Rightarrow \vec{W}_A = \vec{W}_A' = -\omega^2 \begin{Vmatrix} x \\ y-r \\ 0 \end{Vmatrix}$$

$$\vec{V}_A = \vec{V}_O + \vec{V}_A' = \begin{Vmatrix} \omega r \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & -\omega \\ x & y-r & 0 \end{vmatrix} = \begin{Vmatrix} \omega y \\ -\omega x \\ 0 \end{Vmatrix}$$

$$\rho_{кр} = \frac{V_A^2}{W_n}$$

$$\vec{W}_A = \vec{W}_\tau + \vec{W}_n$$

$$W_\tau = \cancel{(W_A, \upsilon_A)} \frac{W_A \upsilon_A \cos\varphi}{\upsilon_A} = W_A \cos\varphi$$

$$|\vec{W}_n| = |\vec{W}_A| \sin\varphi = \frac{|W_A V_A \sin\varphi|}{V_A} = \frac{|[\vec{W}_A, \vec{V}_A]|}{V_A} =$$

$$= \frac{1}{\omega\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \left| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\omega^2 x & -\omega^2(y-r) & 0 \\ \omega y & -\omega x & 0 \end{vmatrix} \right| =$$

$$= \frac{1}{\omega\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \left| \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega^3 x^2 + \omega^3 y(y-r) \end{Vmatrix} \right| = \frac{\omega^2 (x^2 + y(y-r))}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

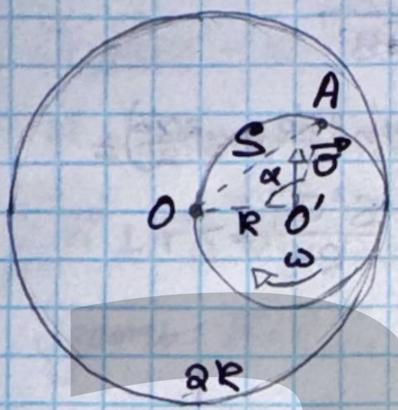
$$\rho_{кр} = \frac{\omega^2 (x^2+y^2)^{3/2}}{\omega^2 (x^2 + y(y-r))} = \sqrt{x^2+y^2} = \rho_{МЦС}$$

(0,0) - выколота

$$\Rightarrow x^2+y^2 = |x^2+y^2-ry| \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y=0 \\ x^2+y^2-\frac{1}{2}ry+\frac{1}{16}r^2 = \frac{1}{16}r^2 \end{array} \right.$$

Ответ: $\left[\begin{array}{l} y=0 \\ x^2+\left(y-\frac{r}{4}\right)^2 = \left(\frac{r}{4}\right)^2, \quad (x,y) \neq 0. \end{array} \right.$

Д3.41



Дано: $v = const$, R, $2R$

Найти: траекторию A, $v(S)$, $w(S)$

Решение:

$\omega = \frac{v}{R}$.

В СО, движущейся вместе с точкой O':

$\alpha = \alpha_0 + \omega t = \alpha_0 + \frac{vt}{R}$, $S^2 = 2R^2(1-\cos\alpha_0) \Rightarrow \cos\alpha_0 = 1 - \frac{S^2}{2R^2}$

$x' = -R\cos\alpha = -R\cos\left(\alpha_0 + \frac{vt}{R}\right)$

$y' = R\sin\alpha = R\sin\left(\alpha_0 + \frac{vt}{R}\right)$

$x_{O'} = R\cos\frac{v}{R}t$, $y_{O'} = R\sin\frac{v}{R}t$

$$x = R\left(\cos\frac{vt}{R} - \cos\left(\alpha_0 + \frac{vt}{R}\right)\right) = 2R\sin\frac{\alpha_0}{2}\overset{\sin}{\cancel{\cos}}\left(\frac{\alpha_0}{2} + \frac{vt}{R}\right) \quad (1)$$

$$y = R\left(\sin\frac{vt}{R} + \sin\left(\alpha_0 + \frac{vt}{R}\right)\right) = 2R\cos\frac{\alpha_0}{2}\sin\left(\frac{\alpha_0}{2} + \frac{vt}{R}\right)$$

$$\vec{v} = \begin{Vmatrix} 2R\sin\frac{\alpha_0}{2}\cos\left(\frac{\alpha_0}{2} + \frac{vt}{R}\right)\cdot\frac{v}{R} \\ 2R\cos\frac{\alpha_0}{2}\cos\left(\frac{\alpha_0}{2} + \frac{vt}{R}\right)\cdot\frac{v}{R} \end{Vmatrix} \quad (2)$$

$$\vec{w} = \begin{Vmatrix} -2\frac{v^2}{R}\sin\frac{\alpha_0}{2}\sin\left(\frac{\alpha_0}{2} + \frac{vt}{R}\right) \\ -2\frac{v^2}{R}\cos\frac{\alpha_0}{2}\sin\left(\frac{\alpha_0}{2} + \frac{vt}{R}\right) \end{Vmatrix} \quad (3)$$

(1) $\Rightarrow$ точка движется по диаметру на прямой AO

(2), при $t=0$: $v(S)^2 = \left(2v\sin\frac{\alpha_0}{2}\cos\frac{\alpha_0}{2}\right)^2 + \left(2v\cos^2\frac{\alpha_0}{2}\right)^2 =$

$= 4\upsilon^2\left(\sin^2\frac{\alpha_0}{2}+\cos^2\frac{\alpha_0}{2}\right)\cos^2\frac{\alpha_0}{2} = 4\upsilon^2\cdot\frac{1+\cos\alpha_0}{2} =$

$= 2\upsilon^2\left(2 - \frac{S^2}{2R^2}\right) \Rightarrow \upsilon(S) = \frac{\upsilon}{R}\sqrt{4R^2 - S^2}$

(3) при $t=0$: $w(S)^2 = 4\frac{\upsilon^4}{R^2}\left(\sin^4\frac{\alpha_0}{2}+\sin^2\frac{\alpha_0}{2}\cos^2\frac{\alpha_0}{2}\right) =$

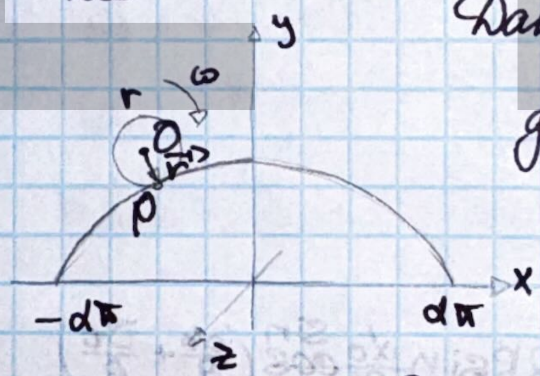
$= 4\frac{\upsilon^4}{R^2}\cdot\frac{1-\cos\alpha_0}{2} = 2\cdot\frac{\upsilon^4}{R^2}\cdot\frac{S^2}{2R^2} = \frac{S^2\upsilon^4}{R^4} \Rightarrow$

$\Rightarrow w(S) = \frac{\upsilon^2}{R^2}S$

<u>Ответ</u>: Точки движутся по диаметрам,

$v(S) = \frac{\upsilon}{R}\sqrt{4R^2-S^2}$, $w(S) = \frac{\upsilon^2}{R^2}S$.

<u>T2</u>



Дано: $x=\alpha(\theta+\sin\theta)$, $y=\alpha(1+\cos\theta)$,

диск катится без проскальзывания,

для O: $\theta=\theta(t)$

Найти: $W_{МЦС} = W(\theta,\dot\theta)$

Решение:

Диск катится без проскальзывания $\Rightarrow$ P - мгновенный центр скоростей.

$\vec r_P = \begin{Vmatrix} x(\theta)\\ y(\theta)\end{Vmatrix} = \alpha\begin{Vmatrix}\theta+\sin\theta\\ 1+\cos\theta\end{Vmatrix}$

$\cancel{\vec v = \alpha\begin{Vmatrix}\dot\theta+\dot\theta\cos\theta\\ -\dot\theta\sin\theta\end{Vmatrix}}$ $\cancel{\vec W = \alpha\begin{Vmatrix}\ddot\theta+\ddot\theta\cos\theta-\dot\theta^2\sin\theta\\ -\ddot\theta\sin\theta-\dot\theta^2\cos\theta\end{Vmatrix}}$

$\cancel{w = \alpha\sqrt{\ddot\theta^2+\ddot\theta^2+\dot\theta^4+2\ddot\theta^2\cos\theta-2\dot\theta^2\ddot\theta\sin\theta-2\dot\theta^2\ddot\theta\sin\theta\cos\theta+2\dot\theta^2\ddot\theta\sin\theta\cos\theta}} =$

$= \alpha\sqrt{2\ddot\theta^2(1+\cos\theta)+\dot\theta^4-2\dot\theta^2\ddot\theta\sin\theta}$

~~Ответ: $w = \alpha\sqrt{2\ddot\theta^2(1+\cos\theta)}$~~

$\vec r$ - нормальна к циклоиде

$\vec n \perp \vec r\,'_\theta = \begin{Vmatrix} 1+\cos\theta \\ -\sin\theta \end{Vmatrix}$

Пусть $\vec n = \begin{Vmatrix} \sin\theta \\ 1+\cos\theta \end{Vmatrix}$, тогда $-\vec r = \vec n \cdot \frac{r}{n} =$

$= \frac{r}{\sqrt{2+2\cos\theta}}\begin{Vmatrix} \sin\theta \\ 1+\cos\theta \end{Vmatrix} = r\begin{Vmatrix} \frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cdot\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}}\cdot\sqrt{\frac{2}{1+\cos\theta}} \end{Vmatrix} =$

$= r\begin{Vmatrix} \sin\frac{\theta}{2} \\ \cos\frac{\theta}{2} \end{Vmatrix}$ - подходит по знакам, $\cos\frac{\theta}{2}>0$ при $\theta\in[-\pi;\pi]$

$\vec r_0 = \vec r_P - \vec r = \begin{Vmatrix} \alpha(\theta+\sin\theta)+r\sin\frac{\theta}{2} \\ \alpha(1+\cos\theta)+r\cos\frac{\theta}{2} \end{Vmatrix}$

Условие ~~сж~~ качения без проскальзывания:

$\vec V_P = \vec V_0 + \vec\omega\times\vec r = \vec 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} \vec i & \vec j & \vec k \\ 0 & 0 & \omega \\ -r\sin\frac{\theta}{2} & -r\cos\frac{\theta}{2} & 0 \end{vmatrix} = -\dot{\vec r}_0 =$

$= -\begin{Vmatrix} \alpha(1+\cos\theta)+\frac{1}{2}r\cos\frac{\theta}{2} \\ -\alpha\sin\theta-\frac{1}{2}r\sin\frac{\theta}{2} \\ 0 \end{Vmatrix}\dot\theta \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{Vmatrix} \omega r\cos\frac{\theta}{2} \\ -\omega r\sin\frac{\theta}{2} \end{Vmatrix} = \dot\theta\begin{Vmatrix} -\alpha(1+\cos\theta)-\frac{1}{2}r\cos\frac{\theta}{2} \\ \alpha\sin\theta+\frac{1}{2}r\sin\frac{\theta}{2} \end{Vmatrix}$

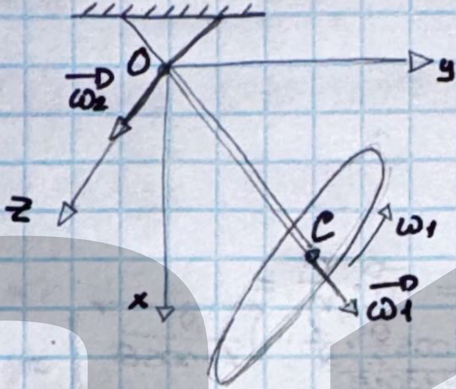
Отсюда $\omega = -\frac{\alpha\sin\theta+\frac{1}{2}r\sin\frac{\theta}{2}}{r\sin\frac{\theta}{2}}\dot\theta = -\dot\theta\left(\frac{1}{2}+\frac{2\alpha}{r}\cos\frac{\theta}{2}\right)$

$\left.\begin{aligned} &\vec w_P = \vec w_0 + \vec\varepsilon\times\vec r + \vec\omega\times\dot{\vec r} - \omega^2\vec r \\ &\vec w_0 = -\vec\omega\times\vec r \Rightarrow \vec w_0 = -\vec\varepsilon\times\vec r - \vec\omega\times\dot{\vec r} \end{aligned}\right| \Rightarrow w_P = \omega^2 r = \dot\theta^2 r\left(\frac{1}{2}+\frac{2\alpha\cos\frac{\theta}{2}}{r}\right)^2$

Ответ: $w_P = \dot\theta^2 r\left(\frac{1}{2}+\frac{2\alpha}{r}\cos\frac{\theta}{2}\right)^2.$

II.2 Пространственное движение

№ 4.7



Дано: ω_1, $\varphi = \varphi_0 \sin(\omega_0 t)$

Найти: $\vec{\omega}_g$, $\vec{\varepsilon}_g$

Решение:

$$\vec{\omega}_2 = \left\| \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ \varphi_0 \omega_0 \cos(\omega_0 t) \end{matrix} \right\|, \quad \omega_1 = \left\| \begin{matrix} \omega_1 \cos\varphi \\ \omega_1 \sin\varphi \\ 0 \end{matrix} \right\|$$

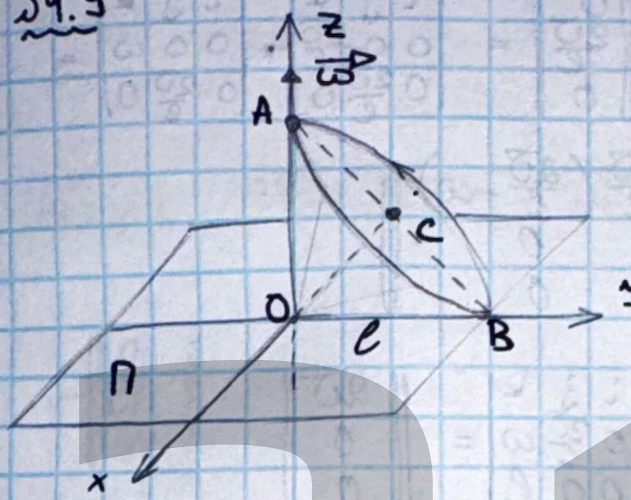
$$\vec{\omega}_g = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 = \left\| \begin{matrix} \omega_1 \cos\varphi \\ \omega_1 \sin\varphi \\ \varphi_0 \omega_0 \cos(\omega_0 t) \end{matrix} \right\|$$

$$\vec{\varepsilon}_g = \dot{\vec{\omega}}_g = \left\| \begin{matrix} -\omega_1 \sin\varphi \cdot \varphi_0 \cos(\omega_0 t) \\ \omega_1 \cos\varphi \cdot \varphi_0 \cos(\omega_0 t) \\ -\varphi_0 \omega_0^2 \sin(\omega_0 t) \end{matrix} \right\|$$

Ответ: $$\vec{\omega}_g = \left\| \begin{matrix} \omega_1 \cos[\varphi_0 \sin(\omega_0 t)] \\ \omega_1 \sin[\varphi_0 \sin(\omega_0 t)] \\ \varphi_0 \omega_0 \cos(\omega_0 t) \end{matrix} \right\|$$

$$\vec{\varepsilon}_g = \left\| \begin{matrix} -\omega_1 \varphi_0 \sin[\varphi_0 \sin(\omega_0 t)] \cos(\omega_0 t) \\ \omega_1 \varphi_0 \cos[\varphi_0 \sin(\omega_0 t)] \cos(\omega_0 t) \\ -\varphi_0 \omega_0^2 \sin(\omega_0 t) \end{matrix} \right\|$$

№4.9



Дано: П вращается с угловой скоростью $\vec{\omega}$ (вокруг Oz), C движется с постоянной скоростью v относительно П, l, $90°$

Найти: $\vec{\omega}_{абс}$ и $\vec{\varepsilon}_{абс}$, $\vec{v}$ и $\vec{w}$ для точек A, B и C

Решение:

$x'y'z'$ - СО, вращающаяся с угловой скоростью $\vec{\omega}$, в ней $\vec{v}_B' = \vec{\omega}' \times \vec{r}_B = 0 \Rightarrow \vec{\omega}' \parallel Oy$

$$\vec{\omega}' = \begin{Vmatrix} 0 \\ \omega' \\ 0 \end{Vmatrix}, \quad \vec{v}_C = \vec{\omega}' \times \vec{r}_C = \begin{Vmatrix} i & j & k \\ 0 & \omega_1 & 0 \\ \frac{l}{2} & \frac{l}{2} & \frac{l}{2} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \frac{\omega' l}{2} \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega' = \frac{2v}{l}.$$

$$\vec{\omega}_{абс} = \vec{\omega}_{отн} + \vec{\omega}_{пер} = \begin{Vmatrix} 0 \\ 2v/l \\ 0 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 \\ 2v/l \\ \omega \end{Vmatrix}$$

$$\vec{\varepsilon}_{абс} = \vec{\varepsilon}_{пер} + \vec{\varepsilon}_{отн} + \vec{\omega}_{пер} \times \vec{\omega}_{отн} = \vec{\varepsilon}_{отн} + \vec{\omega}_{пер} \times \vec{\omega}_{отн} =$$

$$= \vec{\varepsilon}_{абс}' + \vec{\omega}_{пер} \times \vec{\omega}_{отн} = \vec{\varepsilon}_{пер}' + \vec{\varepsilon}_{отн}' + \vec{\omega}_{пер}' \times \vec{\omega}_{отн}' + \vec{\omega}_{пер} \times \vec{\omega}_{отн},$$ здесь

совершён переход к системе отсчёта, вращающейся вокруг Oz вместе с точкой C

$$\vec{\varepsilon}_{абс} = \begin{Vmatrix}0\\0\\-\frac{2\upsilon}{l}\end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix}0\\ \frac{2\upsilon}{l}\\0\end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix}0\\0\\\omega\end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix}0\\\frac{2\upsilon}{l}\\0\end{Vmatrix} = \begin{vmatrix} i&j&k\\0&0&-\frac{2\upsilon}{l}\\0&\frac{2\upsilon}{l}&0\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}i&j&k\\0&0&\omega\\0&\frac{2\upsilon}{l}&0\end{vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix}+\frac{4\upsilon^2}{l^2}\\0\\0\end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix}-\frac{2\upsilon\omega}{l}\\0\\0\end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix}\frac{2\upsilon}{l}\left(\frac{2\upsilon}{l}-\omega\right)\\0\\0\end{Vmatrix}$$

$$\vec{\upsilon}_{A(абс)} = \vec{\upsilon}_O + \vec{\omega}_{абс} \times \vec{r}_A = \begin{vmatrix} i&j&k\\0&\frac{2\upsilon}{l}&\omega\\0&0&l\end{vmatrix} = \begin{Vmatrix}2\upsilon\\0\\0\end{Vmatrix}$$

$$\vec{W}_{A(абс)} = \vec{W}_{A(отн)} + \cancel{\vec{W}_{A(кор)}}^{\,0} + \vec{W}_{A(пер)} = \cancel{\vec{W}_O} + \vec{\varepsilon}_{абс} \times \vec{r}_{OA} + \vec{\omega}_{абс} \times \vec{\omega}_{абс} \times$$

$$\times \vec{r}_A =$$

$$= \begin{Vmatrix}\frac{2\upsilon}{l}\left(\frac{2\upsilon}{l}-\omega\right)\\0\\0\end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix}0\\0\\l\end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix}0\\\frac{2\upsilon}{l}\\\omega\end{Vmatrix} \xi \cdot \omega l - \begin{Vmatrix}0\\0\\l\end{Vmatrix}\left(\frac{4\upsilon^2}{l^2}+\omega^2\right) =$$

$$= \begin{Vmatrix}0\\-2\upsilon\left(\frac{2\upsilon}{l}-\omega\right)\\0\end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix}0\\2\upsilon\omega\\-\frac{4\upsilon^2}{l}\end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix}0\\-\frac{4\upsilon^2}{l}+4\upsilon\omega\\-\frac{4\upsilon^2}{l}\end{Vmatrix} =$$

$$\vec{\upsilon}_{B(абс)} = \begin{vmatrix} i&j&k\\0&\frac{2\upsilon}{l}&\omega\\0&l&0\end{vmatrix} = \begin{Vmatrix}-\omega l\\0\\0\end{Vmatrix}$$

$$\vec{W}_{B(абс)} = \vec{W}_{B(отн)} + \vec{W}_{B(кор)} + \vec{W}_{B(пер)} = \begin{Vmatrix}\frac{2\upsilon}{l}\left(\frac{2\upsilon}{l}-\omega\right)\\0\\0\end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix}0\\l\\0\end{Vmatrix} +$$

$$+ \begin{Vmatrix}0\\\frac{2\upsilon}{l}\\\omega\end{Vmatrix} \cdot 2\upsilon - \begin{Vmatrix}0\\l\\0\end{Vmatrix} \cdot \left(\frac{4\upsilon^2}{l^2}+\omega^2\right) = \begin{Vmatrix}0\\0+\frac{4\upsilon^2}{l}-\frac{4\upsilon^2}{l}-\omega^2 l\\+2\upsilon\left(\frac{2\upsilon}{l}-\omega\right)+2\upsilon\omega\end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix}0\\-\omega^2 l\\4\upsilon^2/l\end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix}0\\-\omega^2 l\\\frac{4\upsilon^2}{l}\end{Vmatrix}$$

$$\vec{v}_{C(абс)} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & \frac{2v}{l} & \omega \\ 0 & \frac{l}{2} & \frac{l}{2} \end{vmatrix} = \begin{Vmatrix} v - \frac{\omega l}{2} \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix}$$

$$\vec{w}_{C(абс)} = \cancel{\vec{w}_O + \ldots} \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{2v}{l}\left(\frac{2v}{l}-\omega\right) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{l}{2} & \frac{l}{2} \end{vmatrix} + \begin{Vmatrix} 0 \\ \frac{2v}{l} \\ \omega \end{Vmatrix} \cdot \left(v + \frac{\omega l}{2}\right) -$$

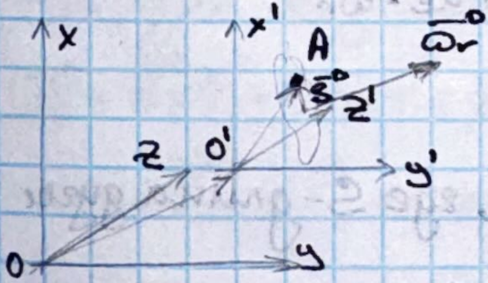
$$- \begin{Vmatrix} 0 \\ l/2 \\ l/2 \end{Vmatrix} \cdot \left(\frac{4v^2}{l^2} + \omega^2\right) = \begin{Vmatrix} 0 + 0 - \cancel{2v^2}\,0 \\ v\left(\frac{2v}{l}-\omega\right) + \left(\frac{2v^2}{l} + v\omega\right) - \frac{2v^2}{l} - \frac{\omega^2 l}{2} \\ v\left(\frac{2v}{l}-\omega\right) + \left(v\omega + \frac{\omega^2 l}{2}\right) - \frac{2v^2}{l} - \frac{\omega^2 l}{2} \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} 0 \\ \frac{2v^2}{l} - \frac{\omega^2 l}{2} \\ 0 \end{Vmatrix}$$

Ответ: $\vec{v}_A = \begin{Vmatrix} 2v \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix}$, $\vec{v}_B = \begin{Vmatrix} -\omega l \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix}$, $\vec{v}_C = \begin{Vmatrix} v - \frac{\omega l}{2} \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix}$

$\vec{w}_A = \begin{Vmatrix} 0 \\ -\cancel{\frac{4v}{l}}\,4v\left(\frac{v}{l}-\omega\right) \\ -\frac{4v^2}{l} \end{Vmatrix}$, $\vec{w}_B = \begin{Vmatrix} 0 \\ -\omega^2 l \\ \frac{4v^2}{l} \end{Vmatrix}$ $\vec{w}_C = \begin{Vmatrix} 0 \\ \frac{2v^2}{l} - \frac{\omega^2 l}{2} \\ 0 \end{Vmatrix}$

24.13



Дано: $\vec{\omega}_r, \vec{\varepsilon}_r$ – в подвижной СО,

$\vec{\omega}_e$ и $\vec{\varepsilon}_e$ – подвижная СО относительно неподвижной.

Найти: $\vec{\omega}$ и $\vec{\varepsilon}$ – абсолютные

Решение:

~~Ввиду взаимной однозначности между векторами и кососимметричными матрицами:~~ $\vec{\omega} = \vec{\omega}_e + \vec{\omega}_r$

~~Удля/ матрицы~~:

$\vec{v}_{отн} = v_A = \dot{\vec{r}}_2 + \vec{\omega}_r \times \vec{\rho}$ ($\vec{\rho}$ - радиус вектор от полюса тела)

$$\vec{v}_{абс} = \underbrace{\vec{v}_{полюс} + \vec{\omega} \times \vec{\rho}}_{1} = \dot{\vec{r}}_1 + \vec{v}_{отн} + \vec{\omega}_e \times (\vec{\rho} + \vec{r}_2) =$$

$$= \underbrace{\dot{\vec{r}}_1 + \dot{\vec{r}}_2 + \vec{\omega}_e \times \vec{r}_2 + (\vec{\omega}_r + \vec{\omega}_e) \times \vec{\rho}}_{2}$$

Приравнивая (1) и (2), получаем $\vec{\omega} = \vec{\omega}_e + \vec{\omega}_r$

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d\vec{\omega}_e}{dt} + \frac{d\vec{\omega}_r}{dt} = \vec{\varepsilon}_e + (\vec{\varepsilon}_r + \vec{\omega}_e \times \vec{\omega}_r)$$

Второе слагаемое возникает из-за $\dot{\vec{e}}_k = \vec{\omega} \times \vec{e}_k$.

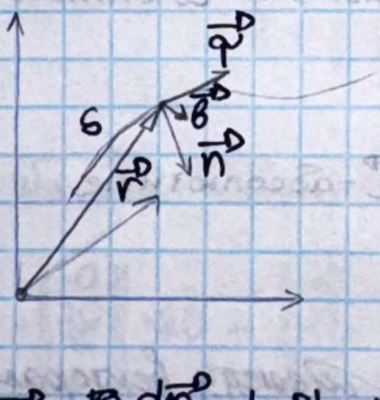
$$\vec{a} = \sum a_k \vec{e}_k \Rightarrow \dot{\vec{a}} = \sum \dot{a}_k \vec{e}_k + \sum a_k \vec{\omega} \times \vec{e}_k =$$

$$= \frac{\tilde{d}\vec{a}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{a}$$

относительно неподвижной СО

Ответ: $\vec{\omega} = \vec{\omega}_r + \vec{\omega}_e$, $\vec{\varepsilon} = \vec{\varepsilon}_e + \vec{\varepsilon}_r + \vec{\omega}_e \times \vec{\omega}_r$

о4.32



Дано: $\vec{r}(s)$, где s - длина дуги траектории

Найти: $\vec{\omega}$ - угловую скорость $\vec{\tau}, \vec{n}, \vec{b}$

Решение:

$\vec{\tau} = \frac{d\vec{r}}{ds}$, $|\vec{\tau}| = 1$.

$\vec{\tau}'_s = \frac{d}{ds}\left(\frac{d\vec{r}}{ds}\right) = \frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\cdot\cancel{\frac{ds}{ds}} = k\cdot\vec{n}$, $|\vec{n}|=1$, $k=\left|\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\right|$

$\vec{n}\perp\vec{\tau}$, так как $(\vec{\tau}\cdot\vec{\tau})=1 \Rightarrow 2(\vec{\tau}\cdot\vec{\tau}'_s)=0$

$\vec{b}=\vec{\tau}\times\vec{n}$

Аналогично $\vec{\tau}$: $(\vec{b}\cdot\vec{b})=1 \Rightarrow \vec{b}'_s\perp\vec{b}$ и $\vec{n}'_s\perp\vec{n}$

Тогда

$\vec{\tau}'_s = k\vec{n}$

$\vec{n}'_s = \cancel{a\vec{\tau}+b\vec{n}}\ \alpha_1\vec{\tau}+\beta_1\vec{b}$

$\vec{b}'_s = \alpha_2\vec{\tau}+\beta_2\vec{n}$

из $\vec{b}=\vec{\tau}\times\vec{n}$: $\vec{b}'_s = [\vec{\tau}'_s\times\vec{n}]+[\vec{\tau}\times\vec{n}'_s] \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha_2\vec{\tau}+\beta_2\vec{n} = \vec{\tau}\times(\alpha_1\vec{\tau}+\beta_1\vec{b}) = -\beta_1\vec{n}$, отсюда

$\alpha_2=0$, $\beta_2=-\beta_1$, β_2 обозначается $-\varkappa$ — модуль кручения.

$\vec{n}=\vec{b}\times\vec{\tau} \Rightarrow \alpha_1\vec{\tau}+\varkappa\vec{b} = -\varkappa[\vec{n}\times\vec{\tau}]+[\vec{b}\times k\vec{n}] =$

$= +\varkappa\vec{b}-k\vec{\tau}$, откуда $\alpha_1=-k$

Получаем:

$$\begin{cases} \vec{\tau}'_s = k\vec{n} \\ \vec{n}'_s = -k\vec{\tau}+\varkappa\vec{b} \\ \vec{b}'_s = -\varkappa\vec{n} \end{cases}$$

Здесь $k=\left|\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\right|$, $\varkappa = -(\vec{b}'_s\cdot\vec{n}) = -((\vec{\tau}'_s\times\vec{n}+\vec{\tau}\times\vec{n}'_s)\cdot\vec{n}) =$

$$= -\left([\vec{\tau}\times\vec{n}'_s]\cdot\vec{n}\right) = -\left(\left[\vec{r}'_s \times \left(\frac{\vec{r}''_{ss}}{k}\right)'_s\right]\cdot\frac{\vec{r}''_{ss}}{k}\right) =$$

$$= -\left(\left[\vec{r}'_s \times \left(\frac{\vec{r}'''_{sss}k - \vec{r}''_{ss}k'_s}{k^2}\right)\right]\cdot\frac{\vec{r}''_{ss}}{k}\right) =$$

$$= -\frac{1}{k^2}\left(\vec{r}'_s, \vec{r}'''_{sss}, \vec{r}''_{ss}\right) + \frac{k'_s}{k^3}\left(\vec{r}'_s, \vec{r}''_{ss}, \vec{r}''_{ss}\right) =$$

$$= \frac{\left(\vec{r}'_s, \vec{r}''_{ss}, \vec{r}'''_{sss}\right)}{k^2}$$

$$\dot{\vec{\tau}} = [\vec{\omega}\times\vec{\tau}] = \vec{\tau}'_s\cdot\dot{s} = k\vec{n}\sigma \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_\tau & \omega_n & \omega_b \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 \\ +\omega_b \\ -\omega_n \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 \\ k\sigma \\ 0 \end{Vmatrix} \Rightarrow \omega_n = 0,\ \omega_b = k\sigma$$

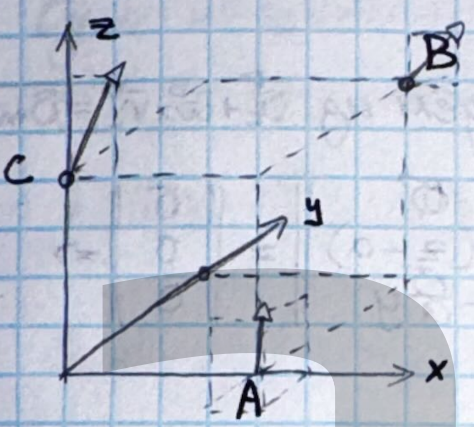
$$\dot{\vec{b}} = \vec{b}'_s\cdot\dot{s} = -\varkappa\sigma\vec{n} = [\vec{\omega}\times\vec{b}] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_\tau & \omega_n & \omega_b \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{Vmatrix} \omega_n \\ -\omega_\tau \\ 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 \\ -\varkappa\sigma \\ 0 \end{Vmatrix} \Rightarrow \omega_\tau = \varkappa\sigma$$

<u>Ответ</u>: $\vec{\omega} = \varkappa\sigma\vec{\tau} + k\sigma\vec{b}$, где $k - |\vec{r}''_{ss}|$,

$\varkappa = \frac{\left(\vec{r}'_s, \vec{r}''_{ss}, \vec{r}'''_{sss}\right)}{k^2}$, $\sigma = \dot{s}$

№4.47



Дано: $A(a,0,0)$, $B(a,a,a)$, $C(0,0,a)$, $v_A(v,-v,2v)$, $v_B(v,0,v)$, $v_C(v,0,2v)$

Найти кинематический винт тела.

Решение:

Найдём угловую скорость вращения тела, выбрав C как полюс

$$\vec{v}_A = \vec{v}_C + \vec{\omega}\times\vec{CA} \Rightarrow \begin{Vmatrix} v \\ -v \\ 2v \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} v \\ 0 \\ 2v \end{Vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ a & 0 & -a \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} v-\omega_y a \\ \omega_x a+\omega_z a \\ 2v-\omega_y a \end{Vmatrix} \Rightarrow \omega_y = 0,\ \omega_x+\omega_z = -\frac{v}{a}$$

$$\vec{v}_B = \vec{v}_C + \vec{\omega}\times\vec{CB} \Rightarrow \begin{Vmatrix} v \\ 0 \\ v \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} v \\ 0 \\ 2v \end{Vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_x & 0 & \omega_z \\ a & a & 0 \end{vmatrix} = \begin{Vmatrix} v-\omega_z a \\ \omega_z a \\ 2v+\omega_x a \end{Vmatrix}$$

Окончательно получаем $\omega_x = -\frac{v}{a}$, $\omega_y = \omega_z = 0$

Скорость любой точки тела $\vec{v} = \vec{v}_C + \vec{\omega}\times\vec{r}_C$, ~~где~~

~~$\vec{v}_0$ – скорость поступательного движения~~, при

~~этом $\vec{v}_0 \parallel \vec{\omega}$~~ Скорость точек на винте

параллельна $\vec{\omega}$, то есть $\vec{v}_{min} = \frac{(\vec{v}_A,\vec{\omega})\vec{\omega}}{\omega^2}$

$$= \begin{Vmatrix} -v/a \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix} \cdot \frac{-\frac{v^2}{a}}{\frac{v^2}{a^2}} = \begin{Vmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix}$$

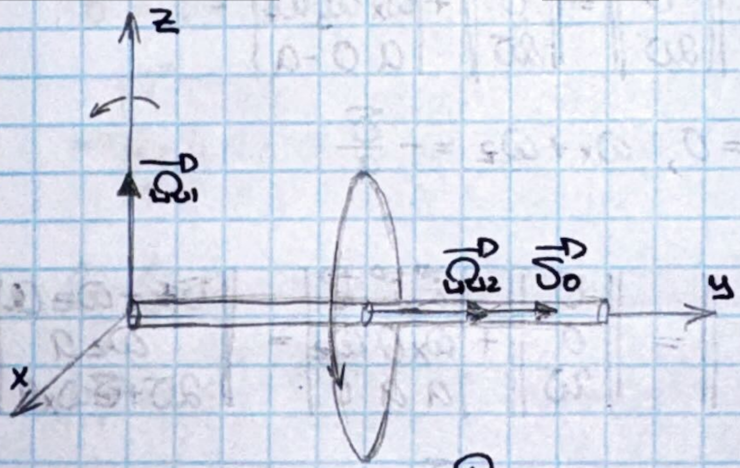
3) Уравнение винта найдём из $\vec{v}_c + \vec{\omega} \times \vec{r}_c = \vec{v}_{min}$

$$\begin{Vmatrix} v \\ 0 \\ 2v \end{Vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\frac{v}{a} & 0 & 0 \\ (x-0) & (y-0) & (z-a) \end{vmatrix} = \begin{Vmatrix} v \\ \frac{v}{a}(z-a) \\ 2v - \frac{v}{a} y \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x}{1} = \frac{y-2a}{0} = \frac{z-a}{0}$$

Ответ: 3) $x = \frac{y-2a}{0} = \frac{z-a}{0}$

T3



Дано: Ω_1, Ω_2, v_0

Найти: $\vec{\Omega}$, ось винта, $\vec{v}_{min}$ - скорости точек на оси винта

Решение:

Рассмотрим СО $x'y'z'$ вращающуюся с угловой скоростью $\vec{\Omega}_1$, в ней $\vec{\Omega}_{диска} = \vec{\Omega}_{отн} = \vec{\Omega}_2$ и $\vec{r}_A = \vec{v}_0 t + \vec{r}_0$. Примем $\vec{r}_0 = \vec{0}$.

$\vec{\Omega} = \vec{\Omega}_{пер} + \vec{\Omega}_{отн} = \vec{\Omega}_1 + \vec{\Omega}_2$.

Пусть в рассматриваемый момент времени Oy и направление стержня совпадают

$$\vec{v}_A = \frac{d}{dt}(\vec{r}_A) = \frac{d}{dt}(v_0 t \vec{e}_y^{\,\prime}) = v_0 \vec{e}_y^{\,\prime} + v_0 t\,[\vec{\Omega}_1 \times \vec{e}_y^{\,\prime}] =$$

$$= \cancel{v_0 e_y}\ \vec{v}_0 + \vec{\Omega}_1 \times \vec{r}_A$$

Скорость любой точки диска: $\vec{v} = \vec{v}_A + \vec{\Omega} \times \vec{r}^{\,\prime}$;

у точек на оси винта скорость минимальна

и равна $\vec{v}_{min} = \dfrac{(\vec{v}_A, \vec{\Omega})\vec{\Omega}}{\Omega^2} = \dfrac{(\vec{v}_0 + \vec{\Omega}_1 \times \vec{r}_A, \vec{\Omega}_1 + \vec{\Omega}_2)\vec{\Omega}}{\Omega_1^2 + \Omega_2^2} =$

$$= \frac{0 + 0 + \Omega_2 v_0 + 0}{\Omega_1^2 + \Omega_2^2}(\vec{\Omega}_1 + \vec{\Omega}_2)$$

Найдём некоторую точку оси винта для которой $(\vec{r}_1^{\,\prime}, \vec{\Omega}) = 0$

$$\vec{v}_A + \vec{\Omega} \times \vec{r}_1^{\,\prime} = \frac{\Omega_2 v_0}{\Omega_1^2 + \Omega_2^2}\vec{\Omega}$$

$$\vec{\Omega} \times \vec{v}_A + \vec{\Omega} \times [\vec{\Omega} \times \vec{r}_1^{\,\prime}] = \vec{0}$$

$$\vec{\Omega}(\vec{\Omega}, \vec{r}_1^{\,\prime}) - \vec{r}_1^{\,\prime}\Omega^2 = \vec{\Omega} \times \vec{v}_A \Rightarrow \vec{r}_1^{\,\prime} = \frac{\vec{v}_A \times \vec{\Omega}}{\Omega^2} =$$

$$= \frac{[\vec{v}_0 + \vec{\Omega}_1 \times \vec{r}_A \times \vec{\Omega}_1 + \vec{\Omega}_2]}{\Omega^2} = \frac{1}{\Omega^2}\left(\cancel{[\vec{v}_0 \times \vec{\Omega}_1] + \vec{\Omega}_1(\vec{\Omega}_1, \vec{r}_A)} - \right.$$

$$\cancel{- \vec{r}_A \Omega_1^2 + \vec{v}_0 \times \vec{\Omega}_2} +$$

$$= \frac{1}{\Omega^2}\left(\vec{v}_0 \times \vec{\Omega}_1 + \vec{r}_A \Omega_1^2 - \vec{\Omega}_1(\vec{\Omega}_1, \vec{r}_A) + \vec{v}_0 \times \vec{\Omega}_2 + \vec{r}_A(\vec{\Omega}_1, \vec{\Omega}_2) - \right.$$

$$\left. - \vec{\Omega}_1(\vec{\Omega}_2, \vec{r}_A)\right) = \frac{1}{\Omega^2}\left(\begin{Vmatrix} v_0\Omega_1 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 0 \\ v_0 t \Omega_1^2 \\ 0 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} x & & \\ y & & \\ z & & \\ \Omega_1 & \Omega_2 & v_0 t \end{Vmatrix} \right)$$

$$(\vec{\Omega}_1+\vec{\Omega}_2)\times(\vec{v}_0+\vec{\Omega}_1\times\vec{r}_A)+\vec{\Omega}(\vec{\Omega},\vec{r}_1\,')-\vec{r}_1\,'\Omega^2=0$$

$$\vec{\Omega}_1\times\vec{v}_0+\vec{\Omega}_1\cancel{(\vec{\Omega}_1,\vec{r}_A)}^{\,0}-\vec{r}_A\Omega_1^2+\cancel{\vec{\Omega}_2\times\vec{v}_0}^{\,0}+\vec{\Omega}_1(\vec{\Omega}_2,\vec{r}_A)-$$

$$-\vec{r}_A\cancel{(\vec{\Omega}_1,\vec{\Omega}_2)}^{\,0}=\vec{r}_1\,'\Omega^2$$

$$\vec{r}_1\,'=\frac{1}{\Omega_1^2+\Omega_2^2}\left(\begin{Vmatrix}-\Omega_1 v_0\\0\\0\end{Vmatrix}-\begin{Vmatrix}0\\\Omega_1^2 v_0 t\\0\end{Vmatrix}+\begin{Vmatrix}0\\0\\\Omega_1\Omega_2 v_0 t\end{Vmatrix}\right)=$$

$$=\frac{1}{\Omega_1^2+\Omega_2^2}\begin{Vmatrix}-\Omega_1 v_0\\-\Omega_1^2 v_0 t\\\Omega_1\Omega_2 v_0 t\end{Vmatrix}$$

Радиус вектор этой точки:

$$\vec{r}_1=\vec{r}_A+\vec{r}_1\,'=\frac{1}{\Omega_1^2+\Omega_2^2}\begin{Vmatrix}-\Omega_1 v_0\\-\Omega_1^2 v_0 t+(\Omega_1^2+\Omega_2^2)v_0 t\\\Omega_1\Omega_2 v_0 t\end{Vmatrix}$$

Прямая оси винта:

$$\vec{r}=\vec{r}_1+\frac{\lambda\vec{\Omega}}{\Omega_1^2+\Omega_2^2}=\frac{1}{\Omega_1^2+\Omega_2^2}\begin{Vmatrix}-\Omega_1 v_0\\\Omega_2^2 v_0 t+\lambda\Omega_2\\\Omega_1\Omega_2 v_0 t+\lambda\Omega_1\end{Vmatrix}$$

<u>Ответ</u>: $\vec{\Omega}=\vec{\Omega}_1+\vec{\Omega}_2$, $\vec{r}=\frac{1}{\Omega_1^2+\Omega_2^2}\begin{Vmatrix}-\Omega_1 v_0\\\Omega_2^2 v_0 t\\\Omega_1\Omega_2 v_0 t\end{Vmatrix}+\lambda\begin{Vmatrix}0\\\Omega_2\\\Omega_1\end{Vmatrix}$, $\lambda\in\mathbb{R}$,

$$v_{min}=\frac{\Omega_2(\vec{\Omega}_1+\vec{\Omega}_2)}{\Omega_1^2+\Omega_2^2}v_0.$$

<u>Т4</u>

Дано: $A=\begin{Vmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&-1\end{Vmatrix}$. Найти: $\vec{e}$ и φ

Решение:

Перейдём в базис e': $S=\begin{Vmatrix}\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt2}&0\\\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt2}&0\\0&0&1\end{Vmatrix}$

$S\bar{X}' = \bar{X}$, $X = AX_0 \Rightarrow SX' = ASX_0' \Rightarrow A' = S^{-1}AS = S^{T}AS$

$$A' = \begin{Vmatrix} \frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt2} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \frac{1}{\sqrt2} & -\frac{1}{\sqrt2} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt2} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt2} & -\frac{1}{\sqrt2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \frac{1}{\sqrt2} & -\frac{1}{\sqrt2} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{Vmatrix}_{\varphi=\pi}$$ – матрица

поворота вокруг $\vec{e}_x{}' = \frac{1}{\sqrt2}\vec{e}_x + \frac{1}{\sqrt2}\vec{e}_y$ на угол $\varphi = \pi$

<u>Ответ</u>: $\vec{e} = \begin{Vmatrix} 1/\sqrt2 \\ 1/\sqrt2 \\ 0 \end{Vmatrix}$, $\varphi = \pi$

<u>15</u>

Дано: $\omega = const$. Записать решение уравнений Пуассона $\dot{A} = A\hat{\omega}$ и $\dot{A} = \hat{\omega}A$ для угловой скорости заданной в неподвижном и связанном базисе.

Решение:

$e^X = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{X^n}{n!}$, ~~будем искать A в виде ce^X~~

$\cancel{\dot{A} = C\sum_{n=0}^{\infty}\frac{X^n}{n!} = Ce^X =}$ Докажем, что $A = A(t_0)e^{\hat{\omega}(t-t_0)}$

– решение для $\dot{A} = A\hat{\omega}$:

$\cancel{\dot{A} = A(t_0)\sum_{n=0}^{\infty}\dot{\left(\frac{(t-t_0)^n}{n!}\right)}\hat{\omega}^n = A(t_0)\hat{\omega}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(t-t_0)^{n-1}}{(n-1)!}\hat{\omega}^{n-1} = A(t_0)}$

$\dot{A} = A(t_0)\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(t-t_0)^n\hat{\omega}^n}{n!}\right)'_t = A(t_0)\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(t-t_0)^{n-1}}{(n-1)!}\hat{\omega}^{n-1}\right)\hat{\omega} =$

$= A(t_0) e^{\hat{\omega}(t-t_0)} \hat{\omega}$ – верно.

Аналогично для второго уравнения:

$$A(t) = e^{\hat{\omega}(t-t_0)} A(t_0)$$

$$\dot{A} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(t-t_0)^{n-1}}{(n-1)!} \hat{\omega}^{n-1}\right) \hat{\omega} A(t_0) = \hat{\omega} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t-t_0)^n}{n!} \hat{\omega}^n\right) A(t_0) =$$

$$= \hat{\omega} A$$

<u>Ответ:</u> $A = A(t_0) e^{\hat{\omega}(t-t_0)}$ для $\dot{A} = A\hat{\omega}$ и $A = \cancel{A} e^{\hat{\omega}(t-t_0)} A(t_0)$ для $\dot{A} = \hat{\omega} A$

II.3 Кватернионы

№4.61 (б)

Найти все решения: $\Lambda\circ X^2 = X\circ\Lambda$

$X=0$ – решение. Рассмотрим $X\neq 0$:

$\|\Lambda\|\cdot\|X\|^2 = \|X\|\cdot\|\Lambda\| \Rightarrow \|X\|=1$ (или $\|\Lambda\|=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \Lambda=0 \Rightarrow X$ – любое)

$\|X\|=1 \Rightarrow X$ ~~зада~~ и $X^{-1}=\tilde{X}$ задают поворот, который сохраняет скалярную часть кватерниона.

1) $\cancel{X}$ $\Lambda\circ X = \underbrace{X\circ\Lambda\circ\tilde{X}}_{\text{поворот}} \Rightarrow \lambda_0 = \lambda_0 x_0 - (\vec{\lambda},\vec{x})$

2) $\tilde{X}\circ\tilde{X}\circ\Lambda\circ X\circ X = \tilde{X}\circ\Lambda \Rightarrow \lambda_0 = \lambda_0 x_0 + (\vec{\lambda},\vec{x})$

Из (1) и (2) $\Rightarrow (\vec{\lambda},\vec{x})=0$, тогда $\lambda_0=\lambda_0 x_0$.

В общем случае $\lambda_0\neq 0 \Rightarrow x_0=1$, но

$\|X\| = x_0^2+\vec{x}^2 = 1+\vec{x}^2 \geqslant 1$ и $\|X\|=1 \Rightarrow \vec{x}=\vec{0}$,

тогда $X=1$

Ответ: $X=1$.

№4.69

Дано: 1) Ox $180°$, Oy $90°$

2) Oy $90°$, Ox $180°$

Найти: $\Lambda_{отн}$ (параметры Родрига - Гамильтона)

Решение:

1) $\Lambda_{11} = \cos\frac{\pi}{2} + i_1 \sin\frac{\pi}{2} = i_1$, $\Lambda_{12} = \cos\frac{\pi}{4} + i_2 \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i_2)$

2) $\Lambda_{21} = \cos\frac{\pi}{4} + i_2 \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i_2)$, $\Lambda_{22} = \cos\frac{\pi}{2} + i_1 \sin\frac{\pi}{2} = i_1$

Повороты заданы относительно собственных осей $\Rightarrow \Lambda_1 = \Lambda_{11} \circ \Lambda_{12} = \frac{1}{\sqrt{2}}(i_1 + i_3)$, $\Lambda_2 = \Lambda_{21} \circ \Lambda_{22} = \frac{1}{\sqrt{2}}(i_1 - i_3)$

Относительное положение: $\Lambda_1 = \Lambda_{отн} \circ \Lambda_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \Lambda_{отн} = \Lambda_1 \circ \Lambda_2^{-1} = \frac{1}{2}(i_1 + i_3)(-i_1 + i_3) = \frac{1}{2}(-i_1^2 + i_1 i_3 - i_3 i_1 + i_3^2) = \frac{1}{2} \cdot 2 i_1 i_3 = -i_2 \Rightarrow \Lambda_{отн} = \| 0\ 0\ -1\ 0 \|^T$

$\lambda_0 = \cos\frac{\varphi}{2} = 0$, $\lambda_1 = x \sin\frac{\varphi}{2} = 0$, $\lambda_2 = y \sin\frac{\varphi}{2} = -1$, $\lambda_3 = z \sin\frac{\varphi}{2} = 0$

Ответ: $\Lambda_{отн} = \| 0\ 0\ -1\ 0 \|^T$.

№ 4.100

Дано: в неподв. базисе $\vec{\Omega} = \vec{i}_1 \dot{\psi}(t) \cos\varphi(t) + \vec{i}_2 \dot{\psi}(t) \cdot$
$\cdot \sin\varphi(t) + \vec{i}_3 \dot{\varphi}(t)$

Найти: $\Lambda(t)$

Решение:

$$\vec{\Omega} = \dot{\psi}(t)\left[\vec{i}_1 \cos\varphi(t) + \vec{i}_2 \sin\varphi(t)\right] + \vec{i}_3 \dot{\varphi}(t)$$

Это соответствует вращению вектора угловой скорости $\dot{\psi}$ вокруг $\vec{i}_3$

$$\Lambda_{i_3}(t) = \cos\frac{\varphi(t)}{2} + \vec{i}_3 \sin\frac{\varphi(t)}{2}$$

$\Lambda_{отн}(t) = \cancel{\cos\frac{\varphi(t)}{2}} + \cos\frac{\psi(t)}{2} + \vec{i}_1 \sin\frac{\psi(t)}{2}$ – во вращающейся СО. ~~Будем считать, что в текущий момент времени $\vec{i}_1 \uparrow\uparrow \vec{i}_3$ тогда~~ по правилу сложения пассивных поворотов:

$$\Lambda(t) = \Lambda_{i_3}(t) \circ \Lambda_{отн}(t) = \cos\frac{\varphi(t)}{2}\cos\frac{\psi(t)}{2} + \vec{i}_1 \cos\frac{\varphi(t)}{2}\sin\frac{\psi(t)}{2} +$$
$$+ \vec{i}_2 \sin\frac{\varphi(t)}{2}\sin\frac{\psi(t)}{2} + \vec{i}_3 \sin\frac{\varphi(t)}{2}\cos\frac{\psi(t)}{2}$$

Ответ: $\Lambda(t) = \cos\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\psi}{2} + \vec{i}_1 \cos\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\psi}{2} +$
$+ \vec{i}_2 \sin\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\psi}{2} + \vec{i}_3 \sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\psi}{2}$

№6

Найти общее решение: $\dot{\Lambda} = A \circ \Lambda + \Lambda \circ B$

Будем искать решение в виде $\Lambda = \Lambda_1 e^{Bt}$

$$\dot{(e^{Bt})} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B^n t^{n-1}}{(n-1)!} = Be^{Bt} = e^{Bt}B$$

Подставляем:

$$\dot{\Lambda}_1 e^{Bt} + \Lambda_1 e^{Bt} B = A\Lambda_1 e^{Bt} + \Lambda_1 e^{Bt} B$$

$$\dot{\Lambda}_1 = A\Lambda_1$$

Будем искать решение в виде $\Lambda_1 = e^{At}\Lambda_0$:

$$Ae^{At}\Lambda_0 + e^{At}\dot{\Lambda}_0 = Ae^{At}\Lambda_0 \Rightarrow \dot{\Lambda}_0 = 0 \Rightarrow \Lambda_0 = const$$

Тогда общее решение имеет вид

$$\Lambda = e^{At}\Lambda_0 e^{Bt}$$

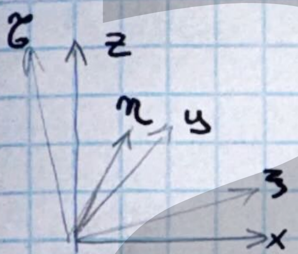
Ответ: $\Lambda = e^{At}\Lambda_0 e^{Bt}$, $\Lambda_0 \in Q$

T7

Дано: O - неподвижна, прецессия $\vec{\Omega} = \vec{\dot{\Phi}} + \vec{\dot{\Psi}}$, $\vec{\dot{\Phi}}$ - в связанной, $\vec{\dot{\Psi}}$ - в неподвижной

Найти: $\Lambda(t)$ - относительно начального

Решение:



$$\vec{\Omega} = \vec{\dot{\Psi}}_x + \Lambda(t)\,\vec{\dot{\Phi}}_\xi\,\Lambda^{-1}(t) = \vec{\dot{\Psi}} + \Lambda(t)\,\vec{\dot{\Phi}}\,\Lambda^{-1}(t)$$

Рассмотрим малый поворот на $\Delta\vec{\varphi} = \varphi\vec{e}$:

$$\Delta\Lambda = \cos\frac{\Delta\varphi}{2} + \vec{e}\sin\frac{\Delta\varphi}{2} \approx 1 + \frac{\Delta\vec{\varphi}}{2}.$$

$$\Lambda(t+\Delta t) \approx \left(1 + \frac{\Delta\vec{\varphi}}{2}\right)\circ\Lambda(t) \Rightarrow \dot{\Lambda}(t) = \frac{1}{2}\vec{\Omega}_x \circ \Lambda(t) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\vec{\dot{\Psi}} + \Lambda(t)\,\vec{\dot{\Phi}}\,\Lambda^{-1}(t)\right)\circ\Lambda(t) = \frac{1}{2}\vec{\dot{\Psi}}\circ\Lambda(t) + \Lambda(t)\circ\frac{1}{2}\vec{\dot{\Phi}}$$

Как было показано в T6: если $\vec{\dot{\Psi}} = const$ и $\vec{\dot{\Phi}} = const$,

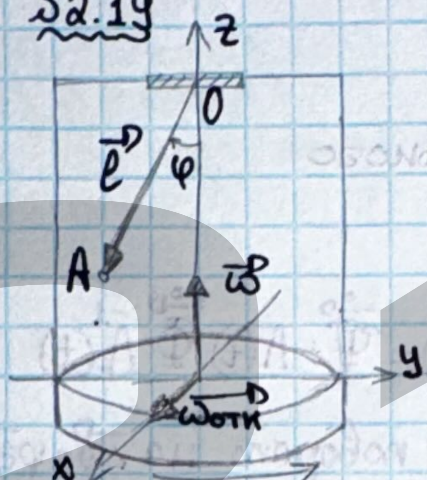
то $\Lambda(t) = \exp\left(\frac{1}{2}\vec{\dot{\Psi}}t\right)\Lambda_0\exp\left(\frac{1}{2}\vec{\dot{\Phi}}t\right)$

$\Lambda_0 = 1 \Rightarrow \Lambda(t) = \exp\left[\frac{1}{2}\left(\vec{\dot{\Psi}} + \vec{\dot{\Phi}}\right)t\right]$

Ответ: $\Lambda(t) = \exp\left[\frac{1}{2}\left(\vec{\dot{\Psi}} + \vec{\dot{\Phi}}\right)t\right]$

III Сложное движение точки и твёрдого тела

№2.19



Дано: $\varphi = \varphi_0 \sin(\omega_0 t)$, ω, $t = \frac{\pi}{2\omega_0}$, l

Найти: v_A, w_A

Решение:

$$\vec{\omega}_{абс} = \vec{\omega}_{пер} + \vec{\omega}_{отн} = \vec{\omega} + \vec{\varphi}_0 \omega_0 \cos(\omega_0 t), \text{ где } \vec{\varphi}_0 = \begin{Vmatrix} \varphi_0 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix}$$

$$\vec{v}_A = \vec{v}_O + \vec{\omega}_{абс} \times \vec{l} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \varphi_0\omega_0\cos(\omega_0 t) & 0 & \omega \\ 0 & l\sin\varphi & l\cos\varphi \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} -\omega l \sin\varphi \\ -\omega_0 l \varphi_0 \cos(\omega_0 t)\cos\varphi \\ \omega_0 l \varphi_0 \cos(\omega_0 t) \sin\varphi \end{Vmatrix}$$

$$t = \frac{\pi}{2\omega_0}: \vec{v}_A = \begin{Vmatrix} -\omega l \sin\varphi_0 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix} \Rightarrow v_A = \omega l \sin\varphi_0$$

$$\vec{w}_A = \vec{w}_O + \cancel{\vec{\varepsilon}_\omega \times \vec{l}} + \vec{\omega}_{пер} \times [\vec{\omega}_{пер} \times \vec{l}] + 2[\vec{\omega}_{пер} \times \vec{v}_{отн}] + \vec{w}_{отн}$$

$$\cancel{\omega_{абс}} \quad \vec{v}_{отн} = \dot{\vec{l}} = l\dot{\varphi} \begin{Vmatrix} 0 \\ -\cos\varphi \\ \sin\varphi \end{Vmatrix}_{t=\frac{\pi}{2\omega_0}} = \vec{0}$$

$$\vec{w}_{отн} = \dot{\vec{v}}_{отн} = l\ddot{\varphi} \begin{Vmatrix} 0 \\ -\cos\varphi \\ \sin\varphi \end{Vmatrix}_{t=\frac{\pi}{2\omega_0}} + \vec{0} = l\varphi_0\omega_0^2 \begin{Vmatrix} 0 \\ -\cos\varphi_0 \\ \sin\varphi_0 \end{Vmatrix}$$

$$\vec{w}_A = \vec{\omega}\cdot(\vec{\omega},\vec{l}) - \vec{l}\omega^2 + \vec{w}_{отн} = -\omega l\cos\varphi_0 \begin{Vmatrix}0\\0\\\omega_0\end{Vmatrix} - l\omega^2\begin{Vmatrix}0\\\sin\varphi_0\\-\cos\varphi_0\end{Vmatrix} +$$

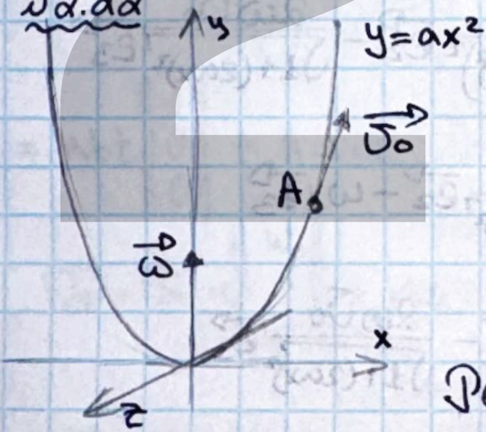
$$+ l\varphi_0\omega_0^2 \begin{Vmatrix}0\\-\cos\varphi_0\\\sin\varphi_0\end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix}0\\-\omega^2 l\sin\varphi_0 - \omega_0^2 l\varphi_0\cos\varphi_0\\ -\omega^2 l\cos\varphi_0 + \omega^2 l\cos\varphi_0 + \omega^2 l\varphi_0\sin\varphi_0\end{Vmatrix} =$$

$$= l\begin{Vmatrix}0\\ -\omega^2\sin\varphi_0-\omega_0^2\varphi_0\cos\varphi_0\\ \omega_0^2\varphi_0\sin\varphi_0\end{Vmatrix} \Rightarrow w_A = l\sqrt{\omega^4\sin^2\varphi_0+\omega^2\omega_0^2\varphi_0\sin(2\varphi_0)+\omega_0^4\varphi_0^2}$$

Ответ: $v_A = l\omega\sin\varphi_0$

$$w_A = l\sqrt{\omega^4\sin^2\varphi_0+\omega^2\omega_0^2\varphi_0\sin(2\varphi_0)+\omega_0^4\varphi_0^2}$$

№2.22



Дано: $y=ax^2$, $\vec{\omega}$, v_0

Найти: $\vec{v}_A$, $\vec{w}_A$

Решение:

$$\vec{v}_0 = v_0\vec{\tau} = v_0\frac{d\vec{r}}{dS} = v_0\frac{1}{\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}}\begin{Vmatrix}dx\\dy\\0\end{Vmatrix} = v_0\frac{1}{\sqrt{1+(2ax)^2}}\begin{Vmatrix}1\\2ax\\0\end{Vmatrix}$$

$$\vec{v}_A = \vec{\omega}\times\vec{r}_A + \vec{v}_0 = \begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\0&\omega&0\\x&ax^2&0\end{vmatrix} + \frac{v_0}{\sqrt{1+(2ax)^2}}\begin{Vmatrix}1\\2ax\\0\end{Vmatrix} =$$

$$= \frac{v_0}{\sqrt{1+(2ax)^2}}\vec{e}_1 + \frac{2axv_0}{\sqrt{1+(2ax)^2}}\vec{e}_2 \cancel{+} -\omega x\vec{e}_3$$

$$\vec{w}_{отн} = \vec{v}'_{отн\,t} = \vec{v}'_{отн\,x}\cdot x'_t = \frac{v_0}{\sqrt{1+(2ax)^2}}\left[-\frac{1}{2}\frac{2(2ax)2a}{(1+(2ax)^2)^{3/2}}\vec{e}_1 + \right.$$

$$\left. + \frac{2a\sqrt{1+(2ax)^2} - 2ax\cdot\frac{1}{2}\frac{2(2ax)2a}{\sqrt{1+(2ax)^2}}}{1+(2ax)^2}\vec{e}_2\right] =$$

$$= \frac{v_0}{\sqrt{1+(2ax)^2}}\left(-\frac{4a^2x}{(1+(2ax)^2)^{3/2}}\vec{e}_1 + \frac{2a}{(1+(2ax)^2)^{3/2}}\vec{e}_2\right)$$

$$\vec{W}_A = \cancel{\vec{W}_0}^{\,0} + \cancel{\vec{\varepsilon}\times\vec{r}_A}^{\,0} + \vec{\omega}\times[\vec{\omega}\times\vec{r}_A] + 2[\vec{\omega}\times\vec{v}_{отн}] + \vec{W}_{отн} =$$

$$= \vec{\omega}(\vec{\omega},\vec{r}_A) - \vec{r}_A\omega^2 + \frac{2\omega v_0}{\sqrt{1+(2ax)^2}}\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & \omega & 0\\ 1 & 2ax & 0\end{vmatrix} + \vec{W}_{отн} =$$

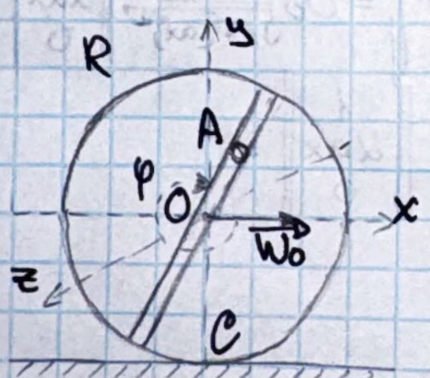
$$= \begin{Vmatrix}0\\ \omega\\ 0\end{Vmatrix}\omega a x^2 - \begin{Vmatrix}x\\ ax^2\\ 0\end{Vmatrix}\omega^2 - \frac{2v_0\omega}{\sqrt{1+(2ax)^2}}\begin{Vmatrix}0\\ 0\\ 1\end{Vmatrix} + \vec{W}_{отн} =$$

$$= -\left(\omega^2x + \frac{4a^2xv_0^2}{(1+(2ax)^2)^2}\right)\vec{e}_1 + \frac{2av_0^2}{(1+(2ax)^2)^2}\vec{e}_2 - \frac{2\omega v_0}{\sqrt{1+(2ax)^2}}\vec{e}_3$$

<u>Ответ</u>: $\vec{v}_A = \frac{v_0}{\sqrt{1+(2ax)^2}}\vec{e}_1 + \frac{2axv_0}{\sqrt{1+(2ax)^2}}\vec{e}_2 - \omega x\vec{e}_3$

$$\vec{W}_A = -\left(\omega^2x + \frac{4a^2xv_0^2}{(1+(2ax)^2)^2}\right)\vec{e}_1 + \frac{2av_0^2}{(1+(2ax)^2)^2}\vec{e}_2 - \frac{2\omega v_0}{\sqrt{1+(2ax)^2}}\vec{e}_3$$

<u>22.35</u>



Дано: $W_0 = const$, $OA = a\sin(\omega t)$, R,

$a \le R$, $v(0) = 0$, $\varphi(0) = 0$

Найти: v_A, W_A

Решение:

$$\vec{v}_C = \vec{v}_O + \vec{\Omega}_1 \times \vec{OC} = \begin{Vmatrix} W_0 t \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \Omega_1 \\ 0 & -R & 0 \end{vmatrix} = \begin{Vmatrix} W_0 t + \Omega_1 R \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{\Omega}_1 = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{W_0 t}{R} \end{Vmatrix}$$

$$\vec{\varphi} = \int_0^t \vec{\Omega}_1(\tau)\,d\tau = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{W_0 t^2}{2R} \end{Vmatrix} \Rightarrow \vec{OA} = \begin{Vmatrix} OA\cos\varphi \\ OA\sin\varphi \\ 0 \end{Vmatrix}, \text{ где } \varphi = -\frac{W_0 t^2}{2R}$$

$$\vec{v}_A = \vec{v}_O + \dot{\vec{OA}} = \begin{Vmatrix} W_0 t \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix} + a \begin{Vmatrix} \omega\cos(\omega t)\cos\varphi + \frac{W_0 t}{R}\sin(\omega t)\sin\varphi \\ \omega\cos(\omega t)\sin\varphi - \frac{W_0 t}{R}\sin(\omega t)\cos\varphi \\ 0 \end{Vmatrix} =$$

$$= W_0 t \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix} + a\omega\cos(\omega t) \begin{Vmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{Vmatrix} + a\frac{W_0 t}{R}\sin(\omega t) \begin{Vmatrix} \sin\varphi \\ -\cos\varphi \\ 0 \end{Vmatrix}$$

$$\vec{W}_A = \dot{\vec{v}}_A = \begin{Vmatrix} W_0 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix} + a\omega\cos(\omega t)\left(-\frac{W_0 t}{R}\right) \begin{Vmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{Vmatrix} -$$

$$- a\omega^2\sin(\omega t) \begin{Vmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{Vmatrix} + a\omega\frac{W_0 t}{R}\cos(\omega t) \begin{Vmatrix} \sin\varphi \\ -\cos\varphi \\ 0 \end{Vmatrix} -$$

$$- a\frac{W_0^2 t^2}{R^2}\sin(\omega t) \begin{Vmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{Vmatrix} + a\frac{W_0}{R}\sin(\omega t) \begin{Vmatrix} \sin\varphi \\ -\cos\varphi \\ 0 \end{Vmatrix} =$$

$$= \Big(W_0 + 2a\omega\frac{W_0 t}{R}\cos(\omega t)\sin\varphi - a\Big(\omega^2 + \Big(\frac{W_0 t}{R}\Big)^2\Big)\sin(\omega t)\cos\varphi + a\frac{W_0}{R}\sin(\omega t)\sin\varphi\Big)\vec{e}_1 + \Big(-2a\frac{W_0 t}{R}\omega\cos(\omega t)\cos\varphi -$$

$$- a\Big(\omega^2 + \Big(\frac{W_0 t}{R}\Big)^2\Big)\sin(\omega t)\sin\varphi - a\frac{W_0}{R}\sin(\omega t)\cos\varphi\Big)\vec{e}_2$$

Ответ: $\vec{v}_A = \left(W_0 t + a\omega\cos(\omega t)\cos\varphi + a\frac{W_0 t}{R}\sin(\omega t)\sin\varphi\right)\vec{e_1} +$

$+ \left(a\omega\cos(\omega t)\sin\varphi - a\frac{W_0 t}{R}\sin(\omega t)\cos\varphi\right)\vec{e_2}$

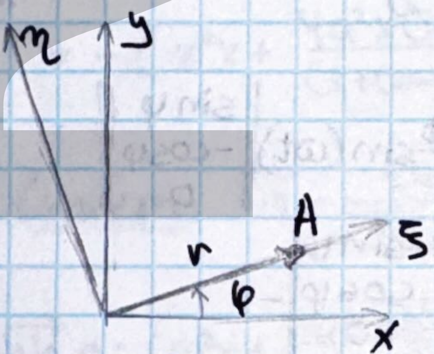
$\vec{W_A} = \left(W_0 + 2a\frac{W_0 t}{R}\omega\cos(\omega t)\sin\varphi - a\left(\omega^2 + \left(\frac{W_0 t}{R}\right)^2\right)\sin(\omega t)\cos\varphi +\right.$

$\left. + a\frac{W_0}{R}\sin(\omega t)\sin\varphi\right)\vec{e_1} + \left(-2a\frac{W_0 t}{R}\omega\cos(\omega t)\cos\varphi -\right.$

$\left. - a\left(\omega^2 + \left(\frac{W_0 t}{R}\right)^2\right)\sin(\omega t)\sin\varphi - a\frac{W_0}{R}\sin(\omega t)\cos\varphi\right)\vec{e_2},$

где $\varphi = -\frac{W_0 t^2}{2R}$

22.43



Дано: движение A задано в неподв. Oxy как $r(t), \varphi(t)$

$O\xi\eta$: $\vec{\xi} \uparrow\uparrow \vec{r}$

Ввести пост. $Bx'y'$, чтобы $\vec{v_e}$ и $\vec{v_r}$ поменялись ролями.

Найти для A: $\vec{v_e}, \vec{v_r}, \vec{w_e}, \vec{w_r}, \vec{w_c}$

Решение:

$\vec{v_r} = \vec{\xi}\,\dot{r}(t)$, $\vec{v_e} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ (изначально), $\vec{\omega} \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{Vmatrix}$

Теперь движение вместе с системой есть поступательное движение вместе с точкой B, тогда для выполнения условия необходимо $\vec{v}_B = \vec{\xi}\,\dot{r}(t) \Rightarrow \vec{r}_B = \int \dot{r}(t)\,dt \begin{Vmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\\ 0\end{Vmatrix} =$

$$= (r(t)+C)\begin{Vmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\\ 0\end{Vmatrix}, \quad C\in\mathbb{R}$$

Для этой СО и точки A:

$$\vec{v}_e = \vec{v}_B = \dot{r}\begin{Vmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{Vmatrix}$$

$$\vec{v}_r = \vec{\omega}\times\vec{r}_A = \begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & 0 & \dot{\varphi}\\ \cos\varphi & \sin\varphi & 0\end{vmatrix} r = r\dot{\varphi}\begin{Vmatrix}-\sin\varphi\\ \cos\varphi\end{Vmatrix}$$

$$\vec{w}_r = \dot{\vec{v}}_r = \dot{r}\dot{\varphi}\begin{Vmatrix}-\sin\varphi\\ \cos\varphi\end{Vmatrix} + r\ddot{\varphi}\begin{Vmatrix}-\sin\varphi\\ \cos\varphi\end{Vmatrix} + r\dot{\varphi}^2\begin{Vmatrix}-\cos\varphi\\ -\sin\varphi\end{Vmatrix}$$

$$\vec{w}_e = \dot{\vec{v}}_e = \ddot{r}\begin{Vmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{Vmatrix} + \dot{r}\dot{\varphi}\begin{Vmatrix}-\sin\varphi\\ \cos\varphi\end{Vmatrix}$$

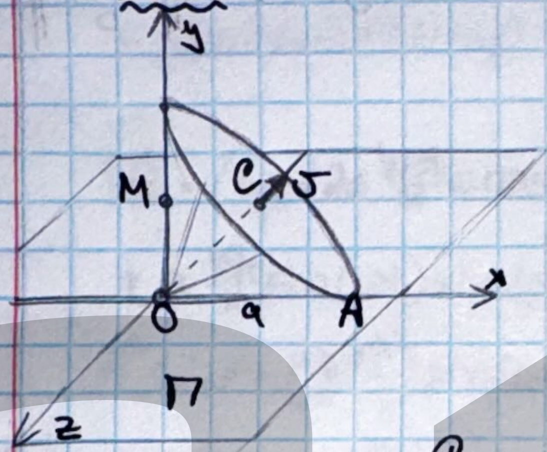
$\vec{w}_c \equiv 0$, т.к. $\omega_{Bx'y'} = 0$

__Ответ__: $\vec{v}_r = \begin{Vmatrix}-r\dot{\varphi}\sin\varphi\\ r\dot{\varphi}\cos\varphi\end{Vmatrix}$, $\vec{v}_e = \begin{Vmatrix}\dot{r}\cos\varphi\\ \dot{r}\sin\varphi\end{Vmatrix}$,

$$\vec{w}_r = \begin{Vmatrix}-\dot{r}\dot{\varphi}\sin\varphi - r\ddot{\varphi}\sin\varphi - r\dot{\varphi}^2\cos\varphi\\ \dot{r}\dot{\varphi}\cos\varphi + r\ddot{\varphi}\cos\varphi - r\dot{\varphi}^2\sin\varphi\end{Vmatrix}$$

$$\vec{w}_e = \begin{Vmatrix}\ddot{r}\cos\varphi - \dot{r}\dot{\varphi}\sin\varphi\\ \ddot{r}\sin\varphi + \dot{r}\dot{\varphi}\cos\varphi\end{Vmatrix}, \quad \vec{w}_c = \vec{0}.$$

04.55



Дано: $\upsilon(t)$, $OM = f(t)$, t: $OM \perp П$

Найти: w_M

Решение:

Движение точки M представимо в виде вращения вокруг Oy, вращения вокруг оси конуса и поступательного движения вдоль образующей.

$$\vec{\upsilon}_A = (\vec{\Omega}_1 + \vec{\omega}) \times \vec{r}_A + \vec{\upsilon}_O = (\vec{\Omega}_1 + \vec{\omega}) \times \vec{r}_A = \vec{0}$$

$$\vec{\Omega}_1 = \begin{Vmatrix} 0 \\ \Omega_1 \\ 0 \end{Vmatrix}, \quad \vec{\omega} = \begin{Vmatrix} -\frac{\omega}{\sqrt{2}} \\ -\frac{\omega}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{Vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\frac{\omega}{\sqrt{2}} & -\frac{\omega}{\sqrt{2}} + \Omega_1 & 0 \\ a & 0 & 0 \end{vmatrix} = \vec{0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega = \sqrt{2}\,\Omega_1$$

$$\vec{\upsilon}_C = (\vec{\Omega}_1 + \vec{\omega}) \times \vec{r}_C = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\Omega_1 & 0 & 0 \\ a/2 & a/2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{a\Omega_1}{2} \end{Vmatrix} \Rightarrow$$

$$\vec{\upsilon}_C = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ -\upsilon \end{Vmatrix}, \text{ откуда } \Omega_1 = \frac{2\upsilon}{a}$$

Получаем $\vec{\Omega} = \begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix} \frac{2v}{a}$, $\vec{\omega} = \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix} \left(-\frac{2v}{a}\right)$

$$\vec{W}_M = \cancel{\vec{W}_0}^{\,0} + \cancel{[\vec{\varepsilon}_{\Omega} \times \vec{r}_M]}^{\,0} + \vec{\Omega} \times \cancel{[\vec{\Omega} \times \vec{r}_M]}^{\,0} + 2[\vec{\Omega} \times \vec{v}_{отн}] + \vec{W}_{отн}$$

$$\vec{v}_{отн} = \vec{\omega} \times \vec{r}_M + \vec{v}_{пост}$$

$$\vec{W}_{отн} = \cancel{\vec{W}_0}^{\,0} + [\vec{\varepsilon}_{\omega} \times \vec{r}_M] + \vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times \vec{r}_M] + 2[\vec{\omega} \times \vec{v}_{пост}] + \vec{W}_{пост} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{W}_M = 2\vec{\Omega} \times [\vec{\omega} \times \vec{r}_M] + \cancel{2\vec{\Omega} \times \vec{v}_{пост}}^{\,0} + \vec{\varepsilon}_{\omega} \times \vec{r}_M +$$

$$+ \vec{\omega}(\vec{\omega}, \vec{r}_M) - \vec{r}_M \omega^2 + 2\vec{\omega} \times \vec{v}_{пост} + \vec{W}_{пост} =$$

$$= 2(\vec{\Omega}, \vec{r}_M)\vec{\omega} - 2(\vec{\Omega}, \vec{\omega})\vec{r}_M + \vec{\varepsilon}_{\omega} \times \vec{r}_M + (\vec{\omega}, \vec{r}_M)\vec{\omega} -$$

$$-\omega^2 \vec{r}_M + 2\vec{\omega} \times \vec{v}_{пост} + \vec{W}_{пост} =$$

$$= 2\frac{2v}{a} f \left(-\frac{2v}{a}\right) \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix} - 2\left(-\frac{4v^2}{a^2}\right) f \begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix} + \left(-\frac{2\dot{v}}{a}\right) f \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} +$$

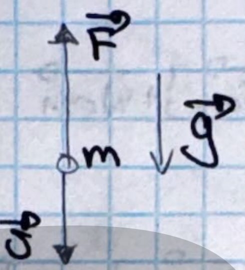
$$+ \left(-\frac{2v}{a}\right)^2 f \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix} - \frac{8v^2}{a^2} f \begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix} + 2\left(-\frac{2v}{a}\right)\dot{f} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} + \ddot{f} \begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} -\frac{4v^2 f}{a^2} \\ \ddot{f} - \frac{4v^2 f}{a^2} \\ -\frac{2\dot{v} f}{a} - \frac{4v\dot{f}}{a} \end{Vmatrix}$$

Ответ: $w_M = \sqrt{\left(\frac{4v^2 f}{a^2}\right)^2 + \left(\ddot{f} - \frac{4v^2 f}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{2\dot{v} f}{a} + \frac{4v\dot{f}}{a}\right)^2}$

IV Основные теоремы динамики в ИСО и НИСО

№5.12



Дано: $\vec{F} = -\alpha\vec{v} - \beta v^2$, $v(0)=0$, m, g

Найти: $v(t)$, $\lim\limits_{t\to\infty} v(t)$

Решение:

$m\dot{v} = -\alpha v - \beta v^2 + mg$ — 3-й закон Ньютона

$$\frac{m\,dv}{\beta v^2 + \alpha v \mp mg} = -dt$$

$$v^2 \mp \frac{\alpha}{\beta} v \mp \frac{m}{\beta} g = 0$$

$$D = \frac{\alpha^2}{\beta^2} + 4\frac{mg}{\beta} > 0$$

$$v_{1,2} = \left(-\frac{\alpha}{\beta} \pm \sqrt{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 + 4\frac{mg}{\beta}}\right)\cdot\frac{1}{2}$$

$$\frac{dv}{(v-v_1)(v-v_2)} = -\frac{\beta}{m}dt$$

$$\frac{1}{(v-v_1)(v-v_2)} = \frac{A}{v-v_1} + \frac{B}{v-v_2} = \frac{(A+B)v - (Av_2 + Bv_1)}{(v-v_1)(v-v_2)}$$

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ Av_2 + Bv_1 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \dfrac{1}{v_1 - v_2} \\ B = \dfrac{1}{v_2 - v_1} = -A \end{cases}$$

Интегрируем:

$$A\ln|v - v_1| + B\ln|v - v_2| = -\frac{\beta}{m}t + C$$

$$A\ln\left|\frac{v-v_1}{v-v_2}\right| = -\frac{\beta}{m}t + C$$

Из $\sigma(0)=0 \Rightarrow A\ln\left|\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right| = C$, тогда:

$$A\ln\left|\frac{\sigma_2(\sigma-\sigma_1)}{\sigma_1(\sigma-\sigma_2)}\right| = -\frac{\beta}{m}t$$

$$\left|\frac{\sigma_2(\sigma-\sigma_1)}{\sigma_1(\sigma-\sigma_2)}\right| = \exp\left(-\frac{\beta t}{m}(\sigma_1-\sigma_2)\right)$$

$\sigma_1>0,\ \sigma_2<0,\ \sigma>\sigma_2,\ \sigma<\sigma_1$

$$\frac{-\sigma_2(\sigma_1-\sigma)}{\sigma_1(\sigma-\sigma_2)} = \exp\Big(\underbrace{-\frac{\beta}{m}t(\sigma_1-\sigma_2)}_{k}\Big)$$

$$\sigma_2\sigma - \sigma_1\sigma_2 = \sigma_1\sigma\cancel{\exp k}\, e^k - \sigma_1\sigma_2 e^k$$

$$\sigma(\sigma_2 - \sigma_1 e^k) = \sigma_1\sigma_2(1-e^k)$$

$$\sigma = \frac{\sigma_1\sigma_2(1-e^k)}{\sigma_2-\sigma_1 e^k} =$$

$$= \frac{+(1-e^k)\cdot\frac{1}{4}\left(\frac{\alpha^2}{\beta^2}-\frac{\alpha^2}{\beta^2}-\frac{4mg}{\beta}\right)}{-\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{\beta}+\sqrt{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2+\frac{4mg}{\beta}}\right)-\frac{1}{2}\left(-\frac{\alpha}{\beta}+\sqrt{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2+\frac{4mg}{\beta}}\right)e^k} =$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{+\frac{4mg}{\beta}(1-e^k)}{\frac{\alpha}{\beta}(1-e^k)+\sqrt{\frac{\alpha^2}{\beta^2}+\frac{4mg}{\beta}}\,(1+e^k)} =$$

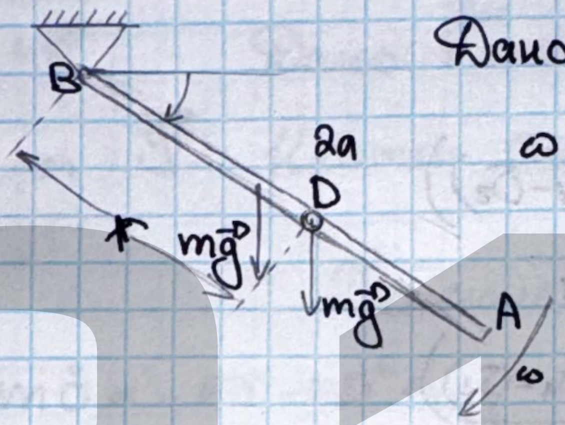
$$= \frac{2mg}{\alpha+\beta\sqrt{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2+\frac{4mg}{\beta}}\ \mathrm{cth}\left(-\frac{\beta}{2m}t\sqrt{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2+\frac{4mg}{\beta}}\right)}$$

Обозначим $\lambda = -\frac{\beta}{2m}\sqrt{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2+\frac{4mg}{\beta}} = -\frac{1}{2m}\sqrt{\alpha^2+4mg\beta} < 0$

$\sigma = \dfrac{2mg}{\alpha+2m\lambda\,\mathrm{cth}(\lambda t)}$, $\lim\limits_{t\to\infty}\sigma = \dfrac{2mg}{\alpha - 2m\lambda}$

<u>Ответ</u>: $\sigma = \dfrac{2mg}{\alpha+2m\lambda\,\mathrm{cth}(\lambda t)}$, $\lim\limits_{t\to\infty}\sigma(t) = \dfrac{2mg}{\alpha-2m\lambda}$, $\lambda = -\dfrac{\sqrt{\alpha^2+4mg\beta}}{2m}$

№6.16



Дано: D движется так, что

$\omega = const$, $\varphi(0) = 0$, $r(0) = 2a$

Найти: T (D достигнет A)

Решение:

$$I_B^{\sigma} = \int_0^{2a} \rho\, dx \cdot x^2 = \frac{1}{3}\rho \cdot (2a)^3 = \frac{1}{3} m \cdot (2a)^2 = \frac{4}{3} m a^2$$

$$I_B^{D} = m r^2$$

$$I_B = m\left(r^2 + \frac{4}{3}a^2\right)$$

$$\vec{K}_B = I_B \vec{\omega}, \quad K_B = m\omega\left(r^2 + \frac{4}{3}a^2\right)$$

$$\dot{K}_B = m\omega \cdot 2r \cdot \dot{r}$$

$$M_B^{ext} = mg \cdot \frac{2a}{2}\cos\varphi + mg\, r\cos\varphi = mg(a+r)\cos\varphi =$$

$$= mg(a+r)\cos(\omega t)$$

$$\dot{\vec{K}}_B = \vec{M}_B^{ext} \Rightarrow \dot{K}_B = M_B^{ext} \Rightarrow 2r\dot{r} = \frac{g}{\omega}(a+r)\cos(\omega t)$$

$$\frac{2r\,dr}{a+r} = \frac{g}{\omega}\cos(\omega t)\,dt$$

$$\int \frac{2(a+r)\,dr}{a+r} - \int \frac{2a\,dr}{a+r} = \int \frac{g}{\omega}\cos(\omega t)\,dt$$

$$2r - 2a\ln(a+r) = \frac{g}{\omega^2}\sin(\omega t) + C$$

$$r(0)=\delta \Rightarrow 2a\delta - 2a\ln(a+a\delta) = C$$

$$2(r-a\delta) - 2a\ln\left(\frac{a+r}{a+a\delta}\right) = \frac{g}{\omega^2}\sin(\omega t)$$

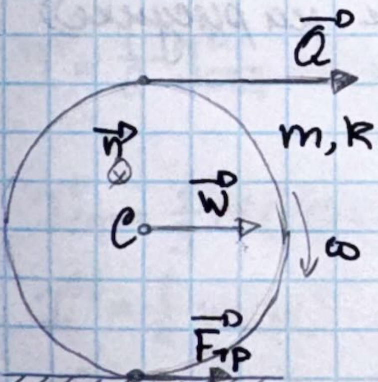
$t=T$: $r=2a \Rightarrow$

$$\Rightarrow 2(2a-a\delta) - 2a\ln\left(\frac{3a}{a+a\delta}\right) = \frac{g}{\omega^2}\sin(\omega T)$$

$$T = \frac{1}{\omega}\arcsin\left[\frac{2\omega^2}{g}a\left((2-\delta) - \ln\frac{3}{1+\delta}\right)\right]$$

<u>Ответ</u>: $T = \frac{1}{\omega}\arcsin\left[\frac{2\omega^2}{g}a\left((2-\delta) - \ln\frac{3}{1+\delta}\right)\right]$

<u>№6.28</u>



Дано: m; R; 1) $Q = \frac{1}{3}mg$; 2) $Q = mg$,

$f = \frac{1}{8}$

Найти: w, ε

Решение:

Предположим, что проскальзывания нет, тогда $F_{тр} \le fN$

3-закон Ньютона: $m\vec{w} = \vec{Q} + \vec{F}_{тр} \Rightarrow mw = Q + F_{тр}$

$\vec{K}_c = \frac{1}{2}mR^2\omega\vec{n}$ $\vec{M}_c = (QR - F_{тр}R)\vec{n}$

$\dot{\vec{K}}_c = \vec{M}_c \Rightarrow \frac{1}{2}mR^2\varepsilon = QR - F_{тр}R$

Из отсутствия проскальзывания также

имеем $\omega = \frac{\dot{S}_c}{R}$, $\varepsilon = \frac{W_c}{R}$

$$\begin{cases} mW = Q + F_{тр} \\ \frac{1}{2}mW = Q - F_{тр} \end{cases} \Bigg| \Rightarrow 2F_{тр} = \frac{1}{2}mW,\ 2Q = \frac{3}{2}mW$$

$F_{тр} = \frac{1}{3}Q$

1) $Q = \frac{1}{3}mg$: $F_{тр} = \frac{1}{9}mg < \frac{1}{8}mg = f \cdot N \Rightarrow$ проскальзывания

нет, предположение верное

$W = \frac{4}{3m} \cdot \frac{1}{3}mg = \frac{4}{9}g$, $\varepsilon = \frac{4}{9}\frac{g}{R}$

2) $Q = mg$: $F_{тр} = \frac{1}{3}mg > f \cdot N \Rightarrow$ предположение неверное

Пусть $\vec{F}_{тр}$ направлено вправо (как на рисунке)

$$\begin{cases} mW = Q + fmg = (f+1)mg \\ \frac{1}{2}m\varepsilon R = Q - fmg = (1-f)mg \end{cases}$$

$W = (f+1)g = \frac{9}{8}g$

$\varepsilon = \frac{2}{R}(1-f)g = \frac{7}{4}\frac{g}{R}$

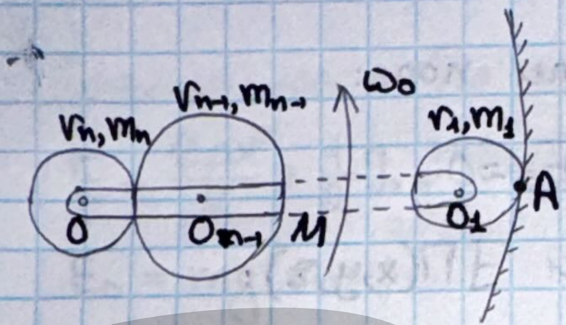
$W < \varepsilon R \Rightarrow$ предположение про направление $\vec{F}_{тр}$

верное.

<u>Ответ</u>: 1) $W = \frac{4}{9}g$, $\varepsilon = \frac{4}{9}\frac{g}{R}$;

2) $W = \frac{9}{8}g$, $\varepsilon = \frac{7}{4}\frac{g}{R}$;

№7.5



Дано: r_i, m_i, M, ω_0

Найти: T

Решение:

Проскальзывания между шестерёнками нет =>

$$\Rightarrow \omega_1 r_1 = -\omega_0 R = -\omega_0\left(r_n + 2\sum_{i=1}^{n-1} r_i\right),$$

$$\omega_2 r_2 = -\omega_1 r_1, \ldots$$

$$\omega_i r_i = (-1)^i \omega_0\left(r_n + 2\sum_{i=1}^{n-1} r_i\right)$$

$$T = \frac{1}{2} J^O_{ст.}\omega_0^2 + \frac{1}{2}\sum J_i^O \omega_0^2 + \frac{1}{2}\sum J_i^{O_i}\omega_i^2$$

$$\omega_i^2 = \frac{\omega_0^2\left(r_n + 2\sum_{i=1}^{n-1} r_i\right)^2}{r_i^2}$$

$$J^O_{ст} = \frac{1}{3} M\left(r_1 + r_n + 2\sum_{i=2}^{n-1} r_i\right)^2$$

$$J_i^{O_i} = \frac{1}{2} m_i r_i^2$$

$$J_i^O = \frac{1}{2} m_i r_i^2 + m_i \cdot OO_i^2 = m_i\left(\frac{r_i^2}{2} + \left(2\sum_{j=i+1}^{n-1} r_i + r_i + r_n\right)\right)$$

Ответ:

$$T = \frac{\omega_0^2}{2}\left[\frac{1}{3} M\left(r_1 + r_n + 2\sum_{i=2}^{n-1} r_i\right)^2 + \sum_{i=1}^{n} m_i\left(\frac{r_i^2}{2} + \left(r_i + r_n + 2\sum_{j=i+1}^{n-1} r_j\right)^2 + \frac{1}{2}\left(r_n + 2\sum_{j=1}^{n-1} r_j\right)^2\right)\right]$$

Д7.13

Выяснить, потенциально ли поле:

$F_x = -\frac{y}{(x-y)^2}$, $F_y = \frac{x}{(x-y)^2}$, $F_z = 0$

Поле потенциально, если $\exists \Pi(x,y,z)$:

$\vec{F} = \operatorname{grad}\Pi$

То есть $\frac{\partial \Pi}{\partial x} = \frac{y}{(x-y)^2}$, $\frac{\partial \Pi}{\partial y} = -\frac{x}{(x-y)^2}$, $\frac{\partial \Pi}{\partial z} = 0$

$y = const$:

$$\Pi = \int \frac{y\,dx}{(x-y)^2} = y\cdot\left(-\frac{1}{x-y}\right) + C(y) = -\frac{y}{x-y} + C(y)$$

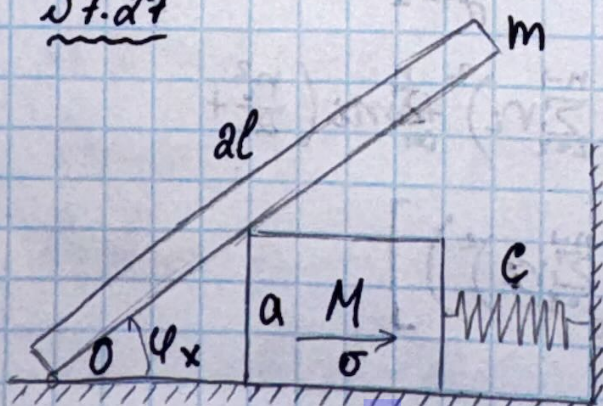
$$\frac{\partial \Pi}{\partial y} = -\frac{x-y+y}{(x-y)^2} + C'(y) \Rightarrow C'(y) = 0$$

Для $\Pi(x,y,z) = -\frac{y}{x-y} + C$: $\vec{F} = -\operatorname{grad}\Pi \Rightarrow$

$\Rightarrow \vec{F}$ – потенциальное поле

Ответ: поле потенциально, $\Pi = -\frac{y}{x-y} + C$

Д7.27



Дано: $m, M, 2l, c, a, \varphi_0,$

$v(0) = 0$, $\varphi(0) = \varphi_0$, $\Delta x(0) = 0$

Найти: $v(\varphi)$

Решение:

Трения нет (по условию) -> E=const

$$E=\frac{c\Delta x^2}{2}+\frac{1}{2}J_0\dot{\varphi}^2+\frac{M\upsilon^2}{2}+mgl\sin\varphi=const$$

$$E_0=mgl\sin\varphi_0$$

$$\frac{a}{x}=tg\varphi \Rightarrow x=a\,ctg\varphi,\quad \Delta x=a(ctg\varphi-ctg\varphi_0)$$

$$J_0=\frac{1}{3}m\cdot(2l)^2=\frac{4}{3}ml^2$$

$$\upsilon=\dot{x}=-\frac{a}{\sin^2\varphi}\dot{\varphi} \Rightarrow \dot{\varphi}^2=\frac{\upsilon^2}{a^2}\sin^4\varphi$$

$$ca^2(ctg\varphi-ctg\varphi_0)^2+\frac{4}{3}ml^2\cdot\frac{\upsilon^2}{a^2}\sin^4\varphi+M\upsilon^2+$$

$$+2mgl\sin\varphi=2mgl\sin\varphi_0$$

$$\upsilon^2\left(3M+4m\cancel{l^2}\frac{l^2}{a^2}\sin^4\varphi\right)=\left(2mgl(\sin\varphi_0-\sin\varphi)-\right.$$

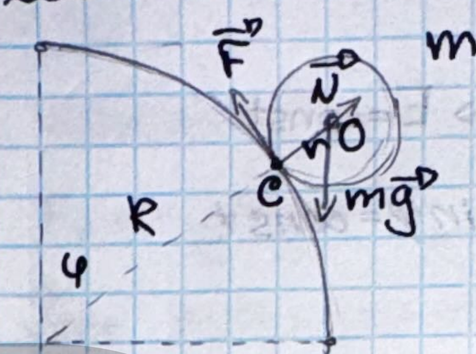
$$\left.-ca^2(ctg\varphi-ctg\varphi_0)^2\right)\cdot 3$$

$$\upsilon^2=\frac{3a^2\left[2mgl(\sin\varphi_0-\sin\varphi)-ca^2(ctg\varphi_0-ctg\varphi)^2\right]}{3Ma^2+4ml^2\sin^4\varphi}$$

Ответ:

$$\upsilon=\sqrt{\frac{3a^2\left[2mgl(\sin\varphi_0-\sin\varphi)-ca^2(ctg\varphi_0-ctg\varphi)\right]}{3Ma^2+4ml^2\sin^4\varphi}}$$

№7.44



Дано: $m, r, R, \varphi_0 = \varphi(0) \to 0, f$

Найти: φ: без проскальзывания; $\upsilon(\varphi)$, $N(\varphi)$, $F_{тр}(\varphi)$

Решение:

$$\vec{K_C} = \vec{K_O} + \vec{r_{CO}} \times \ldots = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2}mr^2\omega \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ -mr\upsilon_0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2}mr^2\omega - mr\upsilon_0 \end{Vmatrix}$$

Проскальзывания нет $\Rightarrow \upsilon_0 = \omega r \Rightarrow \vec{K_C} = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{3}{2}mr\upsilon_0 \end{Vmatrix}$

$$\dot{\vec{K_C}} = \vec{M_C} + m[\vec{\upsilon_0} \times \vec{\upsilon_C}]$$

Проскальзования нет $\Rightarrow \vec{\upsilon_C} = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \dot{\vec{K_C}} = \vec{M_C} = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ -mgr\sin\varphi \end{Vmatrix} \Rightarrow \frac{3}{2}mrw_0^\tau = mgr\sin\varphi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow w_0^\tau = \frac{2}{3}g\sin\varphi$$

II з-н Ньютона на ось перпендикулярную $\vec{R}$:

$$m w_0^\tau = mg\sin\varphi - F_{тр} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F = \frac{1}{3}mg\sin\varphi$$

Проскальзывание появится, когда $F = fN$

$$mW_0^n = -m\frac{v_0^2}{R+r} = N - mg\cos\varphi$$

$$\frac{1}{3}mg\sin\varphi = fm\left(g\cos\varphi - \frac{1}{R+r}v_0^2\right)$$

v_0 найдём из закона сохранения энергии:

$$\Delta T + \Delta\Pi = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{mv_0^2}{2} + \frac{mr^2\omega^2}{4} = -mg(R+r) + mg(R+r)\cos\varphi$$

$$\frac{3}{4}mv_0^2 = mg(R+r)(1-\cos\varphi)$$

$v_0^2 = \frac{4}{3}g(R+r)(1-\cos\varphi)$, тогда

$$\frac{1}{3}g\sin\varphi = fg\cos\varphi - f\cdot\frac{4}{3}(1-\cos\varphi)g =$$

$$= \frac{7}{3}fg\cos\varphi - \frac{4}{3}fg$$

$$\sin\varphi = 7f\cos\varphi - 4f$$

$$\frac{7f}{\sqrt{1+49f^2}}\cos\varphi - \frac{1}{\sqrt{1+49f^2}}\sin\varphi = \frac{4f}{\sqrt{1+49f^2}}$$

$$\xi:\ \cos\xi = \frac{7f}{\sqrt{1+49f^2}},\quad \sin\xi = \frac{1}{\sqrt{1+49f^2}}$$

$$\cos(\varphi+\xi) = \frac{4}{7}\cos\xi$$

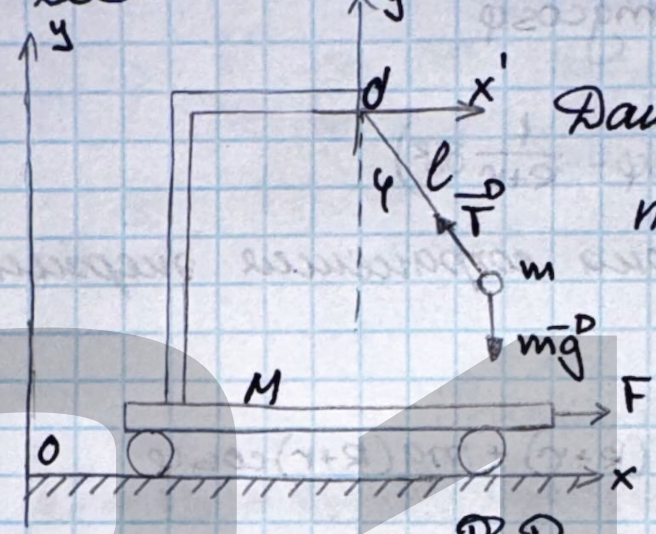
$$\varphi = \arccos\left[\frac{4f}{\sqrt{1+49f^2}}\right]\ \cancel{\frac{7f}{\sqrt{1+49f^2}}}\ \arccos\left[\frac{7f}{\sqrt{1+49f^2}}\right]$$

<u>Ответ:</u> $\varphi = \arccos\left[\frac{4f}{\sqrt{1+49f^2}}\right] - \arccos\left[\frac{7f}{\sqrt{1+49f^2}}\right]$

$v(\varphi) = \sqrt{\frac{4}{3}g(R+r)(1-\cos\varphi)}$, $F(\varphi) = \frac{1}{3}mg\sin\varphi$

$N(\varphi) = mg\left(\frac{7}{3}\cos\varphi - \frac{4}{3}\right)$

№ 9.14



Дано: M, m, l, движение такое, что $\dot{\varphi} = \omega_0 = const$

Найти: F

Решение:

В СО $O'x'y'$:

$x' = l\sin\varphi$, $y' = -l\cos\varphi$

$x = x_{O'} + x'$, $y = y_{O'} + y'$

$\ddot{x} = w_{O'} - l\sin\varphi\cdot\omega_0^2$, $\ddot{y} = 0 + l\cos\varphi\,\omega_0^2$

III закон Ньютона:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -T\sin\varphi & (1) \\ m\ddot{y} = -T\cos\varphi + mg & (2) \end{cases}$$

$(1) \Rightarrow T = -\frac{m\ddot{x}}{\sin\varphi}$, подставляем в (2):

$$ml\cos\varphi\cdot\omega_0^2 = +\frac{m(w_{O'} - l\sin\varphi\,\omega_0^2)}{\sin\varphi}\cdot\cos\varphi + mg$$

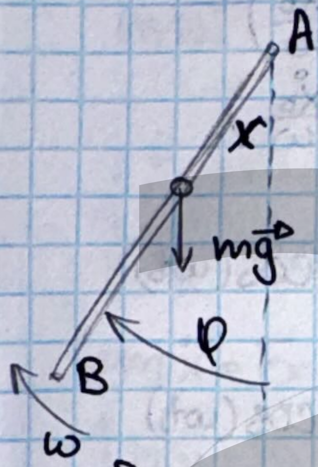
$$w_{O'} = l\sin\varphi\,\omega_0^2 + \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\left(l\cos\varphi\,\omega_0^2 + g\right) =$$

$$= 2l\omega_0^2\sin\varphi + g\,tg\varphi$$

$w_{O'} = w_{тележки} \Rightarrow F = (m+M)w_{O'}$

Ответ: $F=(m+M)(2l\omega^2\sin\varphi+g\,tg\,\varphi)$

№9.20



Дано: $\omega=const$, кольцо массивно,

$x(0)=x_0$, $\dot x(0)=\dot x_0$, $\varphi(0)=0$

Найти: $x(t)$

Решение:

$$\vec\Phi = m\vec g + \vec F_{пер} + \vec F_{кор}$$

$$\vec F_{пер} = \cancel{-m\vec w_A} + \cancel{m[\vec\varepsilon\times\vec r]} - m[\vec\omega\times[\vec\omega\times\vec r]]$$

$$\vec F_{кор} = -2m[\vec\omega\times\vec v_{отн}]$$

$\vec v_{отн}\uparrow\uparrow\vec r \Rightarrow \vec F_{кор}\perp\vec r$, тогда $\Phi_r = mg\cos\varphi+m\omega^2x$

III закон Ньютона для вращающейся НИСО:

$$m\ddot{\vec r}_{отн}=\vec\Phi \Rightarrow m\ddot x = mg\cos\varphi+m\omega^2x$$

$$\ddot x-\omega^2x=g\cos(\omega t)$$

$\lambda^2-\omega^2=0 \Rightarrow \lambda=\pm\omega$, общее решение однородного уравнения $x_{общ}=C_1e^{+\omega t}+C_2e^{-\omega t}$

Частное решение неоднородного уравнения ищем в виде $x=A\cos(\omega t)+B\sin(\omega t)$

$B=0$, $-2\omega^2A\cos(\omega t)=g\cos(\omega t) \Rightarrow A=-\dfrac{g}{2\omega^2}$

$$x_{част} = -\frac{g}{2\omega^2}\cos(\omega t)$$

$$x = C_1 e^{\omega t} + C_2 e^{-\omega t} - \frac{g}{2\omega^2}\cos(\omega t)$$

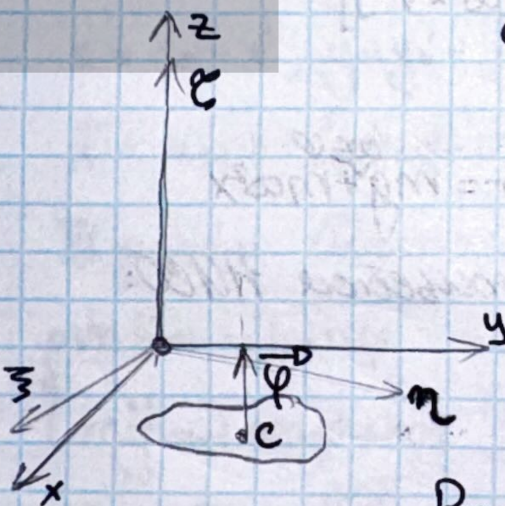
$$\begin{cases} x_0 = C_1 + C_2 - \frac{g}{2\omega^2} \\ \dot{x}_0 = C_1\omega - C_2\omega \end{cases} \Rightarrow C_1 = \frac{1}{2}\left(x_0 + \frac{g}{2\omega^2} + \frac{\dot{x}_0}{\omega}\right)$$

$$C_2 = \frac{1}{2}\left(x_0 + \frac{g}{2\omega^2} - \frac{\dot{x}_0}{\omega}\right)$$

$$x(t) = \left(x_0 + \frac{g}{2\omega^2}\right)\operatorname{ch}(\omega t) + \frac{\dot{x}_0}{\omega}\operatorname{sh}(\omega t) - \frac{g}{2\omega^2}\cos(\omega t)$$

<u>Ответ:</u> $x = \left(x_0 + \frac{g}{2\omega^2}\right)\operatorname{ch}(\omega t) + \frac{\dot{x}_0}{\omega}\operatorname{sh}(\omega t) - \frac{g}{2\omega^2}\cos(\omega t)$

<u>29.33</u>



Дано: m, тело движется в плоскости Oxy, вращается с $\omega(t)$ вокруг ~~Oz~~ Cz, J_z

Найти: уравнение движения.

Решение:

Рассмотрим СО $O\xi\eta\zeta$, вращающуюся с угловой скоростью $\omega(t)$ вокруг Oz.

В ней все точки тела движутся поступательно вместе с центром масс.

$$\vec\Phi = \vec F - \vec J_{пер} - \vec J_{кор} = \vec F - m[\vec\varepsilon\times\vec r] - m[\vec\omega\times[\vec\omega\times\vec r]] - m\vec W_0 - 2m[\vec\omega\times\vec v]$$

$$m\vec W_c = \vec\Phi = \vec E\begin{Vmatrix}F_x\\F_y\\0\end{Vmatrix} - m\begin{vmatrix}\vec i & \vec j & \vec k\\0&0&\dot\omega\\x&y&0\end{vmatrix} + m\omega^2\begin{Vmatrix}x\\y\\0\end{Vmatrix} - 2m\begin{vmatrix}i&j&k\\0&0&\omega\\\dot x&\dot y&0\end{vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix}F_x + m(y\dot\omega + \omega^2 x + 2\dot y\omega)\\F_y + m(-x\dot\omega + \omega^2 y - 2\dot x\omega)\end{Vmatrix}$$

$$\begin{cases} m\ddot x = F_x + m(y\dot\omega + \omega^2 x + 2\omega\dot y)\\ m\ddot y = F_y + m(-x\ddot\omega + \omega^2 y - 2\omega\dot x)\end{cases}$$

$$\vec K_0 = J_0\vec\omega = (J_c + mr^2)\dot{\vec\varphi}$$

$$\vec M_0 = \sum \vec r_i\times\vec F_i = \sum(\vec r_c + \vec r_i')\times\vec F_i = \vec r_c\times\vec F + \vec M_c$$

$$\dot{\vec K}_0 = (J_c + mr^2)\ddot{\vec\varphi} + 2mr\dot r\dot{\vec\varphi} = \begin{vmatrix}i&j&k\\x&y&0\\F_x&F_y&0\end{vmatrix} + \vec M_c =$$

$$= \begin{Vmatrix}0\\0\\xF_y - yF_x\end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix}0\\0\\M_c\end{Vmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (J_c + mr^2)\ddot\varphi$$

$$\dot{\vec K}_{отн} = J_z\ddot{\vec\varphi} = \vec M_z + \vec M_{кор} + \vec M_{пер}$$

$$\vec M_{кор} = \sum\vec r_i\times(-2m_i[\vec\omega\times\dot{\vec r}_i]) = -2\sum m_i\vec\omega(\vec r_i, \dot{\vec r}_i) =$$

$$= -2\vec\omega\sum(\vec r_i, m_i\dot{\vec r}_i)$$

$$\sum m_i\dot{\vec r}_i = \dot{\vec r}_c\sum m_i \to \sum m_i(\vec r_i, \dot{\vec r}_i) = \vec r\sum m_i\dot{\vec r}_i = \vec r\dot{\vec r} =$$

$$= r\dot r \Rightarrow \vec M_{кор} = -2\vec\omega r\dot r$$

$$\vec{M}_{пер} = -\sum \vec{r}_i \times \{m_i(\cancel{\vec{W}_0}^{\,0} + \vec{\varepsilon}\times\vec{r}_i + \vec{\omega}\times[\vec{\omega}\times\vec{r}_i])\} =$$

$$= -\sum m_i\left(\vec{\varepsilon} r_i^2 - \cancel{\vec{r}_i(\vec{\varepsilon},\vec{r}_i)}^{\,0} + \vec{r}_i\times\left(\cancel{\vec{\omega}(\vec{\omega},\vec{r}_i)} - \vec{r}_i\,\omega^2\right)\right) =$$

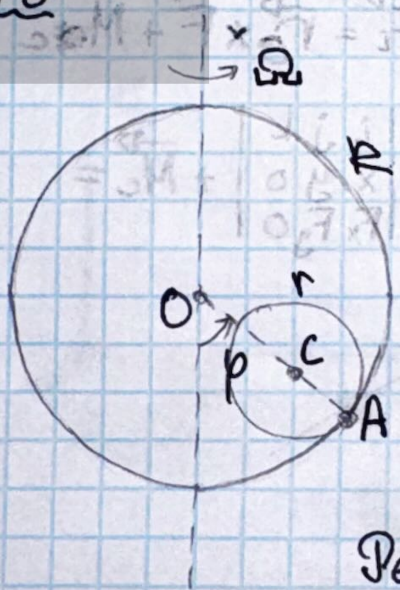
$$= -\dot{\vec{\omega}}\sum m_i r_i^2 = -\dot{\vec{\omega}} J_z$$

В проекции на вертикальную Ось:

$$J_z\ddot{\varphi} = M_z - 2\omega r\dot{r} - J_z\dot{\omega}$$

Ответ:
$$\begin{cases} m\ddot{x} = F_x + m(\dot{\omega}y + \omega^2 x + 2\omega\dot{y}) \\ m\ddot{y} = F_y + m(-\dot{\omega}x + \omega^2 y - 2\omega\dot{x}) \\ J_z\ddot{\varphi} = M_z - 2\omega r\dot{r} - J_z\dot{\omega} \end{cases}$$

18



Дано: $R, r, \Omega = const$, $\varphi(0) = \varphi_0$, $v(\varphi_0) = v_0$

Найти: $v(\varphi)$

Решение:

$\vec{J}_{кор} = -2m[\vec{\Omega}\times\dot{\vec{r}}_{отн}]$ – перпендикулярна плоскости рисунка, должна компенсироваться

$$\vec{J}_{пер} = -m\vec{W}_0 - m\vec{\varepsilon}_{\Omega}\times\vec{r}_{отн} - m\vec{\Omega}\times[\vec{\Omega}\times\vec{r}_{отн}] =$$

$= -m\vec{\Omega_1}\times[\vec{\Omega_1}\times\vec{v}_{отн}]$ – направлена от оси

$\vec{J}_{пер}$ – центробежная сила, она совершает работу.

Пусть φ изменился на $d\varphi$, тогда

$$\delta A = \cancel{\pm} m\Omega_1^2(R-r)\sin\varphi \cdot (R-r)d\varphi\cdot\cos\varphi$$

$$A = \int_{\varphi_0}^{\varphi}\delta A = m\Omega_1^2(R-r)^2\,\frac{\sin^2\varphi - \sin^2\varphi_0}{2}$$

$$T = \cancel{T_c} T_c + T_{отнс} = \frac{1}{2}mv_c^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}mr^2\omega^2$$

$$v_A = v_c - \omega r = 0 \Rightarrow T = \frac{1}{2}mv_c^2 + \frac{1}{4}mv_c^2 = \frac{3}{4}mv_c^2$$

Тогда $\Delta T = \frac{3}{4}m(v^2 - v_0^2)$

$$\Pi = -mg(R-r)\cos\varphi \Rightarrow \Delta\Pi = mg(R-r)(\cos\varphi_0 - \cos\varphi)$$

$\Delta T + \Delta\Pi = A \Rightarrow$

$$\frac{3}{2}\cancel{m}(v^2 - v_0^2) = \Omega_1^2(R-r)^2(\sin^2\varphi - \sin^2\varphi_0) - 2g(R-r)(\cos\varphi_0 - \cos\varphi)$$

$$v^2 = v_0^2 + \frac{2}{3}(R-r)\left[\Omega_1^2(R-r)(\sin^2\varphi - \sin^2\varphi_0) - 2g(\cos\varphi_0 - \cos\varphi)\right]$$

<u>Ответ</u>: $v = \sqrt{v_0^2 + \frac{2}{3}(R-r)\left[(R-r)\Omega_1^2(\sin^2\varphi - \sin^2\varphi_0) - 2g(\cos\varphi_0 - \cos\varphi)\right]}$

V Движение точки в центральном поле.

08.16

Дано: $\Pi(r) = \frac{\mu m}{r}$, $r(0) = r_0$, $\varphi(0) = 0$, $\dot r(0) = V_0 \sin\alpha$,

$r(0)\dot\varphi(0) = V_0 \cos\alpha$

Найти параметры траектории точки

Решение:

$$E = \Pi + T = const \Rightarrow \frac{\mu m}{r} + \frac{m\dot r^2}{2} + \frac{m r^2 \dot\varphi^2}{2} = const \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{\mu \dot r}{r^2} + \dot r \ddot r + r \dot r \dot\varphi^2 + r^2 \dot\varphi \ddot\varphi = 0$$

$$\vec{Q} = const \Rightarrow r^2 \dot\varphi = c = const$$

$$\dot\varphi = \frac{c}{r^2}, \quad \dot r = r' \cdot \dot\varphi = \frac{c r'}{r^2}$$

$$\ddot\varphi = -\frac{2c}{r^3}\dot r = -\frac{2c^2 r'}{r^5}$$

$$\ddot r = \frac{d}{d\varphi}\left(\frac{c r'}{r^2}\right) \cdot \frac{c}{r^2} = \frac{c^2}{r^6}\left(r'' r^2 - 2r'^2 r\right) = \frac{c^2}{r^5}\left(r'' r - 2r'^2\right)$$

$$-\frac{\mu}{r^2} \cdot \frac{c r'}{r^2} + \frac{c r'}{r^2} \cdot \frac{c^2}{r^5}\left(r'' r - 2r'^2\right) + r \cdot \frac{c r'}{r^2} \cdot \frac{c^2}{r^4} + r^2 \cdot \frac{c}{r^2} \cdot \left(-\frac{2c^2 r'}{r^5}\right) = 0$$

$$-\mu r' + \frac{c^2 r'}{r^3}\left(r'' r - 2r'^2\right) - \frac{c^2 r'}{r} = 0$$

$$-\mu + \frac{c^2}{r^3}\left(r'' r - 2r'^2\right) - \frac{c^2}{r} = 0$$

Замена: $r = \frac{1}{u}$, $r' = -\frac{u'}{u^2}$, $r'' = -\frac{u'' u^2 - 2u'^2 u}{u^4}$

$$-\mu - c^2u^3\cdot\left(\frac{1}{u}\cdot\frac{2u'^2-u''u}{u^3}-2\frac{u'^2}{u^4}\right)-c^2u=0$$

$$\mu + c^2u'' + c^2u = 0$$

$$u''+u=-\frac{\mu}{c^2} \Rightarrow u=-\frac{\mu}{c^2}+A\cos(\varphi-\varphi_1)$$

Начальное значения:

$$\frac{1}{r_0}=-\frac{\mu}{c^2}+A\cos\varphi_1 \qquad (1)$$

$$\dot r=\frac{cr'}{r^2}=-c\frac{u'}{u^2}\cdot u^2=-cu'=Ac\sin(\varphi+\varphi_1)$$

$$\dot r(0)=Ac\sin\varphi_1=V_0\sin\alpha \qquad (2)$$

Подставляем $A=\dfrac{V_0\sin\alpha}{c\sin\varphi_1}$ из (2) в (1):

$$\frac{1}{r_0}+\frac{\mu}{c^2}=\frac{V_0\sin\alpha}{c\sin\varphi_1}\cos\varphi_1$$

$$\operatorname{tg}\varphi_1=\frac{V_0\sin\alpha\cdot r_0c^2}{c(c^2+\mu r_0)}=\frac{r_0V_0\sin\alpha\cdot r_0V_0\cos\alpha}{r_0^2V_0^2\cos^2\alpha+\mu r_0}=$$

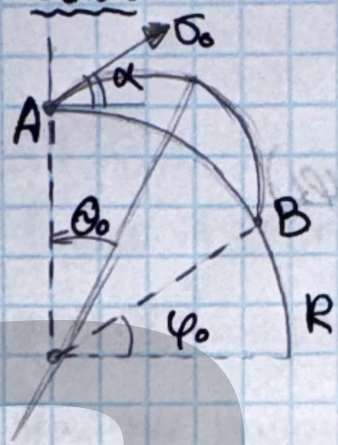
$$=\frac{r_0V_0^2\sin\alpha\cos\alpha}{r_0V_0^2\cos^2\alpha+\mu}$$

$$r=\frac{-\frac{c^2}{\mu}}{1-\frac{c^2}{\mu}A\cos(\varphi+\varphi_1)}=\frac{-p}{1+e\cos(\varphi+\varphi_1)}$$

Ответ: $r=\dfrac{-p}{1+e\cos(\varphi+\varphi_1)}$, где $\varphi_1=\operatorname{arctg}\left[\dfrac{r_0V_0^2\sin\alpha\cos\alpha}{r_0V_0^2\cos^2\alpha+\mu}\right]$,

$$p=\frac{r_0^2V_0^2\cos^2\alpha}{\mu},\quad e=-p\cdot\frac{V_0\sin\alpha}{r_0V_0\cos\alpha\sin\varphi_1}=-\frac{r_0V_0^2\sin\alpha\cos\alpha}{\mu\sin\varphi_1}$$

№8.26



Дано: R, φ_0

Найти: $\alpha: v_0 - \min$, e, p

Решение:

Из задачи 8.26:

$\frac{1}{r} = \frac{\gamma}{c^2} + A\cos(\theta+\theta_1)$, угол θ отсчитываем от биссектрисы

$\cos(\theta_1-\theta_0)=\cos(\theta_1+\theta_0) \Rightarrow \theta_1 = 0$

$\frac{1}{r} = u = \frac{\gamma}{c^2}+A\cos\theta$

Обозначим $\theta_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)$

В точках A и B:

$\frac{1}{R} - \frac{\gamma}{c^2} = A\cos\theta_0$ (1)

$\dot r = \frac{dr}{d\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{dt} = r'\cdot\frac{c}{r^2} = -cu'$

$\dot r = -c(-A\sin(-\theta_0)) = -cA\sin\theta_0 = v_0\sin\alpha$ (2)

Из (2): $A = -\frac{v_0\sin\alpha}{Rv_0\cos\alpha\cdot\sin\theta_0} = \frac{-\operatorname{tg}\alpha}{R\sin\theta_0}$

Подставляем в (1):

$\frac{1}{R} - \frac{\gamma}{R^2v_0^2\cos^2\alpha} = -\frac{\operatorname{tg}\alpha}{R\operatorname{tg}\theta_0}$

$$\frac{R^2 v_0^2\cos^2\alpha}{r} = \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{tg\alpha}{R\,tg\theta_0}}$$

$$R^2 v_0^2 = \frac{rR}{\cos^2\alpha + \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{tg\theta_0}}$$

v_0 – минамальна, когда $\left(\cos^2\alpha + \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{tg\theta_0}\right)'_\alpha = 0$

$$\left(\frac{1}{2}(1+\cos2\alpha) + \frac{\sin2\alpha}{2tg\theta_0}\right)'_\alpha = 0$$

$$-\sin2\alpha + \frac{\cos2\alpha}{tg\theta_0} = 0 \Rightarrow tg2\alpha = \frac{1}{tg\theta_0} = \frac{\sin2\theta_0}{1-\cos2\theta_0} =$$

$$= \frac{\cos\varphi}{1-\sin\varphi}$$

$$r = \frac{p}{1+e\cos\theta} \Rightarrow p = \frac{c^2}{r} = \frac{R^2 v_0^2\cos^2\alpha}{r} =$$

$$= \frac{R\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha + \sin\alpha\cos\alpha\cdot tg2\alpha} = R\cdot\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha + 2\frac{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}} =$$

$$= \frac{R\cos2\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha+2\sin^2\alpha} = R\cos2\alpha$$

$$e = A\cdot p = \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{p}\right)\frac{p}{\cos\theta_0} = \frac{\frac{p}{R}-1}{\cos\theta_0} = \frac{\cos2\alpha-1}{\cos\theta_0} =$$

$$= \frac{\cos2\alpha-1}{\sin2\alpha} = -tg\alpha$$

Ответ: $tg2\alpha = \frac{\cos\varphi}{1-\sin\varphi}$, $p = R\cos2\alpha$, $e = -tg\alpha$.

№8.27

Дано: $\Pi(r) = -\frac{\alpha}{r} + \frac{\beta}{r^2}$

Найти: параметры траектории

Решение:

$$w_i = \frac{1}{H_i}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\left(\frac{V^2}{2}\right)\right) - \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{V^2}{2}\right)\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_i \cdot \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}\right| = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i}$$

В полярных координатах: $T = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2)$

$$F_r \cdot 1 = m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)$$

$$F(r) = -\frac{\partial \Pi}{\partial r} = -\frac{\alpha}{r^2} + \frac{2\beta}{r^3}$$

$$r^2\dot{\varphi} = c \ (= const)$$

$$\dot{r} = r'_\varphi \dot{\varphi} = r'_\varphi \frac{c}{r^2}$$

$$\ddot{r} = \left(\frac{r'_\varphi c}{r^2}\right)'_\varphi \dot{\varphi} = c \cdot \frac{r''_{\varphi\varphi} r^2 - 2r'^2_\varphi r}{r^4} \cdot \frac{c}{r^2} = \frac{c^2}{r^5}\left(r''_{\varphi\varphi} r - 2r'^2_\varphi\right)$$

$$\frac{F(r)}{m} = \frac{c^2}{r^5}\left(r''_{\varphi\varphi} r - 2r'^2_\varphi\right) - r \cdot \frac{c^2}{r^4}$$

Замена Бине: $r = \frac{1}{u}$, $r'_\varphi = -\frac{u'_\varphi}{u^2}$, $r''_{\varphi\varphi} = \frac{2u'^2_\varphi - u''_{\varphi\varphi} u}{u^3}$

$$\frac{F\left(\frac{1}{u}\right)}{mc^2} = u^4 \cdot \frac{2u'^2_\varphi - u''_{\varphi\varphi} u}{u^3} - 2 \cdot \frac{u'^2_\varphi}{u^4} \cdot u^5 - u^3 = -u^2 u''_{\varphi\varphi} - u^3$$

Тогда $u''_{\varphi\varphi} + u = \frac{-F\left(\frac{1}{u}\right)}{mc^2u^2}$

$$u''_{\varphi\varphi}+u=-\frac{1}{mc^2u^2}\left(-\alpha u^2+2\beta u^3\right)=\frac{\alpha}{mc^2}-\frac{2\beta}{mc^2}u$$

$$u''_{\varphi\varphi}+\left(1+\frac{2\beta}{mc^2}\right)u=\frac{\alpha}{mc^2}$$

Общее решение однородного:

$$u_{общ}=A\cos\left(\sqrt{1+\frac{2\beta}{mc^2}}\,\varphi+\theta\right)$$

Частное решение: $u_ч=\frac{\alpha}{mc^2}$, тогда

$$u=\frac{1}{r}=\frac{\alpha}{\omega^2 mc^2}+A\cos\left(\overset{\omega}{\cancel{\sqrt{1+\frac{2\beta}{mc^2}}}}\,\varphi+\theta\right)$$

$$r=\frac{p}{1+e\cos(\omega\varphi+\theta)},\quad \omega^2=1+\frac{2\beta}{mc^2},\quad p=\frac{mc^2\omega^2}{\alpha},$$

$$e=A\cdot\frac{mc^2\omega^2}{\alpha}$$

<u>Ответ:</u> $r=\frac{p}{1+e\cos(\omega\varphi+\theta)}$, где $\omega=\sqrt{1+\frac{2\beta}{mc^2}}$,

$p=\frac{mc^2\omega^2}{\alpha}$, $e=const$, $c=const$

№8.56

E – эксцентрическая аномалия (угол в параметрическом уравнении эллипса), φ – истинная аномалия (полярный угол), $n=\frac{2\pi}{T}$ – средняя угловая скорость обращения,

$$\cos\varphi=\frac{\cos E-e}{1-e\cos E},\quad \sin\varphi=\frac{\sqrt{1-e^2}\sin E}{1-e\cos E}$$

Показать выполнение ур-ия Кеплера:

$$E - e\sin E = n(t - t_0)$$

Решение:

$$2S = \int_{t_0}^{t} c\,dt = \int_0^{\varphi} r^2 \frac{d\varphi}{\cancel{dt}}\cancel{dt} = c(t - t_0) \quad (1)$$

$$r^2 = \left(\frac{p}{1+e\cos\varphi}\right)^2 = \frac{p^2}{\left(1 + e\,\frac{\cos E - e}{1 - e\cos E}\right)^2} = \frac{p^2(1-e\cos E)^2}{(1-e^2)^2}$$

$$d(\sin\varphi) = \cos\varphi\, d\varphi \Rightarrow d\varphi = \frac{1-e\cos E}{\cos E - e}\cdot d\left(\frac{\sqrt{1-e^2}\sin E}{1-e\cos E}\right) =$$

$$= \frac{1-e\cos E}{\cos E - e}\cdot\sqrt{1-e^2}\cdot\frac{\cos E(1-e\cos E) - \sin E\cdot e\sin E}{(1-e\cos E)^2}\,dE =$$

$$= \frac{\sqrt{1-e^2}\,dE}{1-e\cos E}$$

Подставляем в (1):

$$\int_0^E \frac{p^2(1-e\cos E)^2}{(1-e^2)^2}\cdot\frac{\sqrt{1-e^2}}{1-e\cos E}\,dE = c(t-t_0)$$

$$\frac{p^2}{(1-e^2)^{3/2}}(E - e\sin E) = c(t-t_0) \quad (2)$$

c – двойная секториальная скорость $\Rightarrow$

$$cT = 2\pi ab$$

$$e=\sqrt{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2},\ p=\frac{b^2}{a} \Rightarrow a=\frac{p}{1-e^2},\ b=\frac{p}{\sqrt{1-e^2}}$$

Подставляем в (2):

$$\frac{p^2}{(1-e^2)^{3/2}}(E-e\sin E)=\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{p}{1-e^2}\cdot\frac{p}{\sqrt{1-e^2}}(t-t_0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E-e\sin E=n(t-t_0).$$