Опр. Непустое мн-во L' векторов линейного пространства L называется линейным подпространством, если: а) сумма любых векторов из L' принадлежит L'

б) произведение каждого вектора из L' на любое число также принадлежит L'

20.3

1) Да, т.к. удовл. а) и б). Размерность - 1, т.к. любой один ненулевой вектор - базис. Любые ≥ 2 векторов л.з.

2) Да, т.к. удовл. а) и б). Размерность - $n-1$. Т.к. любые n векторов л.н.з. и можно выбрать $n-1$ л.н.з.

3) Да, т.к. удовл. а) и б). Размерность - $n-1$. Т.к. $n-1$ координата выбирается произвольно, а n-ая координата выражается через другие.

4) Нет, не удовл. а)

20.6 (4, 6)

4) Да, т.к. удовл. а) и б). $\frac{1}{2}(n^2 - \overset{\text{диагональ}}{n}) + n = \frac{n(n+1)}{2}$ - размерность, т.к. $\frac{n(n+1)}{2}$ координат независимы.

6) Нет, не удовл. а): $\begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$ и $\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}$ - вырожд. $\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$ - невырожд.

20.7 (7, 8, 10)

7) Очев., да

8) Нет, т.к. нет например нулевого элемента.

10) Нет, т.к. нет обратного элемента для произв. элемента.

20.8 (1)

$\forall\ P(x), Q(x) \in \mathcal{P}^{(n)} \quad P(x)+Q(x) \in \mathcal{P}^{(n)}$

$\forall\ \alpha, P(x) \quad \alpha P(x) \in \mathcal{P}^{(n)}$

1) $P(x)+Q(x) = Q(x)+P(x)$

2) $(P(x)+Q(x))+L(x) = P(x)+(Q(x)+L(x))$

3) $\exists\ 0 : P(x)+0 = P(x)$

4) $\forall\ P(x)\ \exists -P(x)$

5) $\alpha(P(x)+Q(x)) = \alpha P(x) + \alpha Q(x)$

6) $(\alpha+\beta)P(x) = \alpha P(x) + \beta P(x)$

7) $\alpha(\beta P(x)) = (\alpha\beta)P(x)$

8) $1P(x) = P(x)$

Размерность - $n+1$. Базис - $\{1, x, x^2, \dots x^n\}$

20.14(6) $\left\|\begin{matrix}1\\2\\1\\3\end{matrix}\right\| \quad \left\|\begin{matrix}1\\1\\1\\3\end{matrix}\right\| \quad \left\|\begin{matrix}1\\0\\1\\3\end{matrix}\right\| \quad \left\|\begin{matrix}1&1&1\\2&1&0\\1&1&1\\3&3&3\end{matrix}\right\| \underset{\substack{III-I\\IV-3I}}{\sim} \left\|\begin{matrix}1&1&1\\2&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{matrix}\right\|$. Размерность 2. Базис - I и II столб.

20.18 $\left\|\begin{matrix}1&-1\\1&-1\end{matrix}\right\| \quad \left\|\begin{matrix}2&5\\1&3\end{matrix}\right\| \quad \left\|\begin{matrix}1&1\\0&1\end{matrix}\right\| \quad \left\|\begin{matrix}3&4\\5&7\end{matrix}\right\|$

$$\begin{vmatrix}1&2&1&3\\1&1&0&5\\-1&5&1&4\\-1&3&1&7\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1&0&5\\5&1&4\\3&1&7\end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix}1&0&5\\-1&1&4\\-1&1&7\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}1&1&5\\-1&5&4\\-1&3&7\end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix}1&1&0\\-1&5&1\\-1&3&1\end{vmatrix} = 37 \neq 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ столбцы л.н.з. $\Rightarrow$ исходные матрицы л.н.з. т.к. >4 матриц очев. л.н.з., то исх. матрицы образуют базис.

$\left\|\begin{matrix}5&14\\6&13\end{matrix}\right\|$ в этом базисе

$$\left\|\begin{matrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 5 \\ -1 & 5 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & 1 & 7 \end{matrix}\right\| X = \left\|\begin{matrix} 5 \\ 6 \\ 14 \\ 13 \end{matrix}\right\| \quad \Delta_1 = 5\begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 5 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 7 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 6 & 0 & 5 \\ 14 & 1 & 4 \\ 13 & 1 & 7 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 6 & 1 & 5 \\ 14 & 5 & 4 \\ 13 & 3 & 7 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 14 & 5 & 1 \\ 13 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -37$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 6 & 0 & 5 \\ 14 & 1 & 4 \\ 13 & 1 & 7 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ -1 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 7 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 6 & 5 \\ -1 & 14 & 4 \\ 1 & 13 & 7 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & 6 & 0 \\ -1 & 14 & 1 \\ 1 & 13 & 1 \end{vmatrix} = 74$$

$\Delta_3 = -37 \quad \Delta_4 = 37 \Rightarrow$ искомый столбец $- \left\|\begin{matrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{matrix}\right\|$

20.20. Многочлены $(t-\alpha)^k$, $k = \overline{0..n}$ имеют следующие координатные столбцы в базисе $\{1, \dots t^n\}$:

$\|1\,0\,0 \dots 0\|^T$, $\|-\alpha\,1\,0 \dots 0\|^T$, $\| \dots$ $\|-\alpha^k \dots C_k^m t^m (-\alpha)^{k-m} \dots t^k\, 0 \dots 0\|^T$. Ранг матрицы, сост. из них равен $n+1$, т.е. они обр. базис в $\mathcal{P}^{(n)}$. Коорд. столбец произвольного $p_n(t) = \|1\,t \dots t^n\|\,\|p_0\,p_1 \dots p_n\|^T$ в этом базисе: $\|\xi_0 \dots \xi_n\|^T$ находится из решения СЛУ с невырожденной матрицей $(n+1) \times (n+1)$

$$\underbrace{\left\|\begin{matrix} 1 & -\alpha & \dots & (-\alpha)^n \\ 0 & 1 & & \vdots \\ 0 & 0 & & C_n^i t^i (-\alpha)^{n-i} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & t^n \end{matrix}\right\|}_{S} \underbrace{\left\|\begin{matrix} \xi_0 \\ \vdots \\ \xi_n \end{matrix}\right\|}_{\vec{\xi}} = \underbrace{\left\|\begin{matrix} p_0 \\ \vdots \\ p_n \end{matrix}\right\|}_{\vec{p}} \Rightarrow \vec{\xi} = S^{-1}\vec{p}$$

20.22(4) $\left\|\begin{matrix} 6 & 8 & 9 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 0 \end{matrix}\right\| \sim \left\|\begin{matrix} 6 & 0 & -39 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 0 \end{matrix}\right\| \sim \left\|\begin{matrix} 1 & 0 & -\frac{39}{6} & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 0 \end{matrix}\right\| \Rightarrow \Phi = \left\|\begin{matrix} \frac{39}{6} \\ -6 \\ 1 \end{matrix}\right\|$

Т.е. размерность -1. Базис $- \|\frac{39}{6}\ -6\ 1\|^T$

20.23(4) $\left\|\begin{matrix} 1 & 1 & x_1 \\ 1 & 2 & x_2 \\ 1 & 1 & x_3 \\ 1 & 3 & x_4 \end{matrix}\right\| \sim \left\|\begin{matrix} 1 & 1 & x_1 \\ 1 & 2 & x_2 \\ 0 & 0 & x_3 - x_1 \\ 0 & 0 & x_4 - 2x_2 + x_1 \end{matrix}\right\| \Rightarrow$ искомая $\begin{cases} x_3 - x_1 = 0 \\ x_4 - 2x_2 + x_1 = 0 \end{cases}$

20.29 $\vec{e}\,' = \vec{e}\,S$, $\vec{e} = \|\vec{e}_1 \dots \vec{e}_n\|$. Замена векторов - замена столбцов в $\vec{e}$

1) $\vec{e}\,' = \vec{e}\,\underbrace{TS}_{S_1}$. Т.е. $S_1 - S$, у которой поменяли i-ую, j-ую строку

2) $\vec{e}\,'T = \vec{e}\underbrace{ST}_{S_2}$. S_2 - S, у которой поменяли i-ый и j-ый столбец

3) $\vec{e}\,'T_1 \dots T_k = \vec{e}\,T_1 \dots T_k S \Rightarrow \vec{e}\,' = \vec{e}\,T_1 \dots T_k S T_k^{-1} \dots T_1^{-1} =$

$= \vec{e}\,\underbrace{T_1 \dots T_k S T_k \dots T_1}_{S_3}$. T_i - меняем местами i-ый и $n-i$-ый столбец. S_3 - S, у которой строки и столбцы расположены в обратном порядке

№ 20.8(1): Докажем, что $\{1, x, \dots x^n\}$ - базис

Рассм. лин. комб. $c_0 + c_1 x + \dots + c_n x^n$. Пусть $\{1, x, \dots x^n\}$ - не базис, тогда $\exists\, c_0, \dots c_n : c_0 + c_1 x + \dots + c_n x^n \equiv 0$, $c_0^2 + \dots + c_n^2 > 0$

Продифференцируем $c_0 + c_1 x + \dots + c_n x^n$ n раз, получим:

$0 + 0 + \dots + n!\, c_n x \equiv 0 \Rightarrow c_n = 0$, т.е. $c_0 + c_1 x + \dots + c_n x^n =$

$= c_0 + c_1 x + \dots + c_{n-1} x^{n-1}$. Продифференцируем его $n-1$ раз, получим: $(n-1)!\, c_{n-1} x^{n-1} \equiv 0 \Rightarrow c_{n-1} = 0$. Аналогично получаем, что $c_0 = c_1 = \dots = c_n = 0$ $\mathring{x}$! $\Rightarrow \{1, x, \dots x^n\}$ - базис