№2(3)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n}{2n-1} = \frac{3}{2} \quad \text{– Д-ть}$$

$$\forall \varepsilon>0 \quad \exists N(\varepsilon): \forall n \geq N \left|\frac{3n}{2n-1}-\frac{3}{2}\right| < \varepsilon$$

$$3\left|\frac{n}{2n-1}-\frac{1}{2}\right| = 3\left|\frac{2n-(2n-1)}{2(2n-1)}\right| =$$

$$= 3\left|\frac{1}{2(2n-1)}\right| = \frac{3}{2(2n-1)} < \varepsilon$$

$$\frac{3}{2\varepsilon} < 2n-1 \Rightarrow n > \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2\varepsilon}+1\right). \ N(\varepsilon) = \left[\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2\varepsilon}+1\right)\right]+1 \ \blacksquare$$

№13(3) $x_n = \sin\frac{\pi n}{2}$

$\exists\ \exists a: \quad \forall \varepsilon>0 \quad \exists N(\varepsilon)\in\mathbb{N}: \forall n > N(\varepsilon) \Rightarrow$

$\Rightarrow \left|\sin\frac{\pi n}{2} - a\right| < \varepsilon$

$\left.\begin{array}{l} \exists\ n=4k+1,\ k\in\mathbb{Z} \mapsto |1-a|<\varepsilon \quad (\text{т.к. } n>N(\varepsilon)) \\ \exists\ n=4k+3,\ k\in\mathbb{Z} \mapsto |-1-a| = |1+a| < \varepsilon \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ т.к. предел единственен $-a=a \Rightarrow a=0$. Тогда

$\forall \varepsilon>0 \quad \exists N(\varepsilon)\in\mathbb{N}: \forall n>N(\varepsilon) \quad \left|\sin\frac{\pi n}{2}\right| < \varepsilon.$

$\varepsilon = \frac{1}{2}$, $n = 4k+1: 4k+1 > N(\varepsilon) \Rightarrow 1 < \frac{1}{2}$! $\Rightarrow$

$\Rightarrow \nexists a \Rightarrow$ расходится $\blacksquare$

№25(3) $x_n \ge 0,\ n \in \mathbb{N}$ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[p]{x_n} = \sqrt[p]{a},\ p \in \mathbb{N}$

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Rightarrow \forall\, \varepsilon \overbrace{\sqrt[p]{a}^{\,p-1}}^{const} > 0\ \exists N = N(\varepsilon \sqrt[p]{a}^{\,p-1}) : \forall n > N\ |x_n - a| < \varepsilon \sqrt[p]{a}^{\,p-1}$

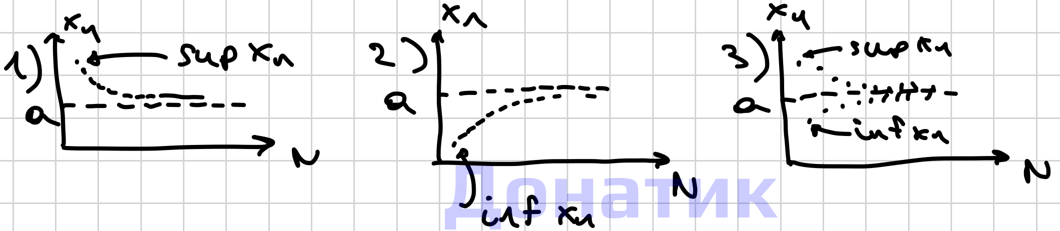
$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) : \forall n > N\ \left|\sqrt[p]{x_n} - \sqrt[p]{a}\right| =$

$$= \left|\sqrt[p]{x_n} - \sqrt[p]{a}\right| \frac{\sqrt[p]{x_n}^{\,p-1} + \sqrt[p]{x_n}^{\,p-2}\sqrt[p]{a} \ldots + \sqrt[p]{x_n}\sqrt[p]{a}^{\,p-2} + \sqrt[p]{a}^{\,p-1}}{\sqrt[p]{x_n}^{\,p-1} + \sqrt[p]{x_n}^{\,p-2}\sqrt[p]{a} \ldots + \sqrt[p]{x_n}\sqrt[p]{a}^{\,p-2} + \sqrt[p]{a}^{\,p-1}} =$$

$$= \frac{|x_n - a|}{\sqrt[p]{x_n}^{\,p-1} + \sqrt[p]{x_n}^{\,p-2}\sqrt[p]{a} \ldots + \sqrt[p]{x_n}\sqrt[p]{a}^{\,p-2} + \sqrt[p]{a}^{\,p-1}} <$$

$$< \frac{|x_n - a|}{\sqrt[p]{a}^{\,p-1}} < \varepsilon \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[p]{x_n} = \sqrt[p]{a}$$

№27. Если $\exists\, x_i > a$ ($x_i < a$) ($x_i > a$; $x_j < a$), то выделим элементы x_n не принадлежащие ε-окрестности a, тогда их кол-во конечное $\Rightarrow$ один из них явл. $\sup x_n$ ($\inf x_n$) (можно найти и sup и inf)



Если таких эл. $\nexists$, то посл. $x_n = const = a \Rightarrow$

$\Rightarrow \sup x_n = \inf x_n = a$ $\blacksquare$

№28.

1) да, т.к. это условие является более строгим чем опр. предела.

2) нет, т.к. не уд. опр. предела.

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N, n \geq N : |x_n - a| < \varepsilon$ не гарантирует, что $\nexists n' \geq N : |x_n - a| > \varepsilon$, что противоречит опр. предела. Напр. $\{0, 1, 1, 1 \ldots\}$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N = 1$ и $n = 1 \geq 1 : |x_n| < \varepsilon$. Но предел-1.

№39(3)

3) $$\lim_{n \to \infty} \left[\frac{n^2}{n+1} - \frac{n^3}{n^2+1} \right] = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{n^4 + n^2 - n^4 - n^3}{(n+1)(n^2+1)} \right] =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left[\frac{n^3\left(\frac{1}{n} - 1\right)}{(n+1)(n^2+1)} \right] = \lim_{n \to \infty} \left[\frac{\left(\frac{1}{n} - 1\right)}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{1}{n^3}\right)} \right] = -1$$

№46. $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \lim\limits_{n \to \infty} y_n = 0$

1) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{x_n}{y_n} = 0$. $x_n = \frac{1}{n^2}$; $y_n = \frac{1}{n}$

2) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{x_n}{y_n} = 1$. $x_n = \frac{1}{n}$; $y_n = \frac{1}{n}$

3) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{x_n}{y_n} = +\infty$; $x_n = \frac{1}{n}$; $y_n = \frac{1}{n^2}$

4) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{x_n}{y_n}$ не сущ.; $x_n = \frac{1}{n}$; $y_n = \frac{(-1)^n}{n}$

№53(б)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{3}\left(\sqrt[3]{1+\frac{3}{n^3}}-1\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{3} \cdot \frac{\frac{3}{n^3}}{\sqrt[3]{1+\frac{3}{n^3}}^{\,2}+\sqrt[3]{1+\frac{3}{n^3}}+1} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{1+\underbrace{\frac{3}{n^3}}_{\to 0}}^{\,2}+\sqrt[3]{1+\underbrace{\frac{3}{n^3}}_{\to 0}}+1} = \frac{1}{3}$$

№7. $|q|<1$, $\lim\limits_{n\to\infty} q^n \overset{?}{=} 0$

$\forall \varepsilon>0 \ \exists N=N(\varepsilon): \forall n>N \ |q^n| = q^n < \varepsilon$

$\log_q(q^n) > \log_q \varepsilon$, т.к. $|q|<1 \Rightarrow \log_q$ - убыв.

$n > \log_q \varepsilon$, т.е. $N(\varepsilon) = [\log_q \varepsilon]+1$

№60. $\forall a>0$: Док-ть: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$

$\forall \varepsilon>0 \ \exists N=N(\varepsilon): \forall n>N \ |\sqrt[n]{a}-1|<\varepsilon$

$a \le 1$: $1-\sqrt[n]{a} < \varepsilon \Leftrightarrow a > (1-\varepsilon)^n$. при $\varepsilon \leqslant 1$ выполн.

нер-во Бернулли: $a > 1-n\varepsilon \Rightarrow n > \frac{1-a}{\varepsilon} \Rightarrow N = \left[\frac{1-a}{\varepsilon}\right]+1$

при $\varepsilon > 1$ $\quad 1-\sqrt[n]{a} < \varepsilon \Leftarrow 1-\sqrt[n]{a} < 1 \Leftrightarrow \sqrt[n]{a} > 0$ - верно.

$a>1$: $\sqrt[n]{a}-1<\varepsilon \Leftrightarrow a < (1+\varepsilon)^n$. $\forall \varepsilon>0$ выполн.

нер-во Бернули: $a < 1+n\varepsilon \Leftarrow n > \frac{a-1}{\varepsilon} \Rightarrow N = \left[\frac{a-1}{\varepsilon}\right]+1$.

т.е. $\forall \varepsilon>0 \ \exists N = \left[\frac{|1-a|}{\varepsilon}\right]+1: \forall n>N \ |\sqrt[n]{a}-1|<\varepsilon$ $\blacksquare$

№63(4)

4) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0$, $|a|>1$, $k\in\mathbb{N}$ – Д-ть.

$n>k+1$: $a^n = (1+(a-1))^n = 1+n(a-1)+C_n^2(a-1)^2+$
$+C_n^3(a-1)^3+\ldots+C_n^k(a-1)^k+\ldots+C_n^n(a-1)^n>$
$C_n^{k+1}(a-1)^k = \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}(a-1)^k = \frac{(a-1)^k}{(k+1)!}\cdot$
$\cdot(n-k)(n-k+1)\ldots(n-1)n = \text{const}\cdot(n^{k+1}+\alpha_k n^k+$
$+\alpha_{k-1}n^{k-1}+\ldots)$

$$\frac{n^k}{a^n} < \frac{n^k}{\text{const}(n^{k+1}+\alpha_k n^k+\ldots)} = \frac{1}{\text{const}(n+\frac{\alpha_k}{n}+\ldots)}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{a^n} < \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\text{const}(n+\frac{\alpha_k}{n}+\ldots)} = 0$$

$$\frac{n^k}{a^n} > 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{a^n} > 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ по Т. о 3 м. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^k}{a^n} = 0$

№64.(3) $x_n = \sqrt[n]{3^n+n\cdot 2^n}$ $\quad x_n \geqslant \sqrt[n]{3^n} = 3$.

$x_n \leq \sqrt[n]{3^n+n\cdot 3^n} = 3\sqrt[n]{1+n} \leqslant 3\sqrt[n+1]{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ по Т. о двух мил. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 3$

№67. $\forall a \ \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$

$n=2k$: $\frac{a^n}{n!} = \frac{a^n}{n(n-1)\ldots(n-\frac{n}{2})\ldots 1} =$

$= \frac{a^n}{n\cdot n(1-\frac{1}{n})\cdot n(1-\frac{2}{n})\ldots n(1-\frac{1}{2})\ldots 1} \leq \frac{a^n}{n^{\frac{n}{2}}} =$

$= \left(\frac{a^2}{n}\right)^{n/2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$n=2k+1$: $\frac{a^n}{n!} = \frac{a^n}{n(n-1)\ldots(n-\frac{n+1}{2})\ldots 1} \leq \frac{a^n}{n^{\frac{n+1}{2}}} \leq$

$\leq \frac{a^n}{n^{n/2}} = \left(\frac{a^2}{n}\right)^{n/2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$\frac{a^n}{n!} > 0$ - очевидно $\Rightarrow$ по Т. о 2 милл. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$ ∎

№71 (1)

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n}$ — ? $\frac{n!}{n^n} = \frac{n}{n}\,\frac{n-1}{n}\,\frac{n-2}{n}\ldots\frac{2}{n}\,\frac{1}{n} =$

$= 1\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\frac{2}{n}\,\frac{1}{n} < 1\cdot 1\cdot 1\cdot\ldots\cdot 1\cdot\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$\frac{n!}{n^n} > 0$ очевидно $\Rightarrow$ по Т. о 2 милл. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$

№164(1)

$x_1 = 13, \ x_{n+1} = \sqrt{12 + x_n}$

$x_{n+1}-x_n=\sqrt{12+x_n}-x_n \vee 0$

$\sqrt{12+x_n} \vee x_n$

$12+x_n \vee x_n^2$

$(4-x_n)(3+x_n)\vee 0 \Rightarrow$ при $x_n>4$ посл-ть монотонно убывает. Сравним x_n с 4

$x_n=\sqrt{12+x_{n-1}} \vee 4 \Leftrightarrow 12+x_{n-1}\vee 16 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x_{n-1}\vee 4 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x_1 \vee 4 \quad x_1=13>4 \Rightarrow$

$\Rightarrow x_n>4 \ \forall n \Rightarrow x_n$ – монотонно убывающ. и огр. снизу 4 $\Rightarrow x_n$ имеет предел.

при $n\to\infty$ $x_n=\sqrt{12+\sqrt{12+\sqrt{12\ldots+\sqrt{12+x_1}}}}$

$x_n^2=12+\sqrt{12+\ldots}=12+x_n$

$x_n^2-x_n-12=0$

$(x_n-4)(x_n+3)=0 \Rightarrow x_n=4$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=4$

220. $x_1>0 \quad x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right),\ a>0 \quad n\in N$

$x_{n+1}=\frac{\sqrt{a}}{2}\left(\frac{x_n}{\sqrt{a}}+\frac{\sqrt{a}}{x_n}\right)>\frac{\sqrt{a}}{2}\cdot 2=\sqrt{a}$ – ограниченная снизу

$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{a}{x_n^2}\right)\geq 1 \Leftrightarrow \frac{a}{x_n^2}\geq 1 \Leftrightarrow \sqrt{a}\geq x_n$ –

неверно $\Rightarrow \frac{x_{n+1}}{x_n}<1$ – монотонно убывающая

огр. + мон. $\Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

$\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$, т.к. x_n – мон. убывающ. и огр. снизу, то $\forall n \; x_n \geq b$, тогда из опр. предела $\Rightarrow$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon): \; x_n - b < \varepsilon$. Тогда

$x_n = b + \alpha_n$, α_n – б.м. Тогда $b + \alpha_{n+1} =$

$$= \frac{1}{2}\left(b + \alpha_n + \frac{a}{b+\alpha_n}\right)$$

$$b + 2\alpha_{n+1} - \alpha_n = \frac{a}{b+\alpha_n}$$

$$b^2 + (2\alpha_{n+1} - \alpha_n)b + b\alpha_n + (2\alpha_{n+1} - \alpha_n)\alpha_n = a$$

$$b^2 + 2\alpha_{n+1}b + \alpha_n(2\alpha_{n+1} - \alpha_n) = a$$

$$n \longrightarrow \infty \Rightarrow \alpha_n \longrightarrow 0 \Rightarrow b^2 = a \Rightarrow b = \sqrt{a}$$

№141(2)

$$x_n = \frac{n+1}{3n-2}$$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon): \; \forall n > N, \; \overset{\in \mathbb{N}}{p} > 0 \quad |x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$

$$\left|\frac{n+1}{3n-2} - \frac{n+p+1}{3n+3p-2}\right| = \left|\frac{\cancel{3n^2} + \cancel{3pn} - \cancel{2n} + \cancel{3n} + 3p - \cancel{2} - \cancel{3n^2} - \cancel{3pn} - \cancel{3n} + \cancel{2n} + 2p + \cancel{2}}{(3n-2)(3n+3p-2)}\right| = \left|\frac{5p}{(3n-2)(3n+3p-2)}\right| = \frac{5}{(3n-2)\left(\frac{3n}{p} + 3 - \frac{2}{p}\right)} <$$

$$< \frac{5}{3n-2} < \varepsilon \Rightarrow 3n - 2 > \frac{5}{\varepsilon} \Leftrightarrow n > \frac{5 + 2\cdot\varepsilon}{3\cdot\varepsilon}, \text{ т.е.}$$

$$N(\varepsilon) = \left[\frac{5+2\cdot\varepsilon}{3\cdot\varepsilon}\right] + 1 \;\blacksquare$$

№143(1)

$$\frac{\sin a}{2}+\frac{\sin 2a}{2^2}+\frac{\sin 3a}{2^3}+\ldots+\frac{\sin na}{2^n}$$

$$\forall \varepsilon>0 \quad \exists\ N=N(\varepsilon):\ \forall n\geq N,\ p>0 \quad |x_{n+p}-x_n|<\varepsilon$$

$$|x_{n+p}-x_n|=\left|\frac{\sin(n+1)a}{2^{n+1}}+\frac{\sin(n+2)a}{2^{n+2}}+\ldots\frac{\sin(n+p)a}{2^{n+p}}\right|<$$

$$<\frac{1}{2^{n+1}}+\ldots+\frac{1}{2^{n+p}}=\frac{1}{2^{n+1}}\left(1+\ldots+\frac{1}{2^{p-1}}\right)=\frac{1}{2^{n+1}}\,\frac{\frac{1}{2^p}-1}{\frac{1}{2}-1}=$$

$$=\frac{1}{2^n}\left(1-\frac{1}{2^p}\right)<\frac{1}{2^n}<\varepsilon \Rightarrow n>\log_2\frac{1}{\varepsilon}$$

$$N(\varepsilon)=\left[\log_2\frac{1}{\varepsilon}\right]+1 \quad \blacksquare$$

№147(5)

Д-ть: $\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{n}{(n+1)^2}$ – расходится

$$\exists\ \varepsilon_0>0 \quad \forall N \quad \exists\ n\geq N,\ p>0 \quad |x_{n+p}-x_n|\geq\varepsilon_0$$

$$\frac{n+1}{(n+2)^2}-\frac{n}{(n+1)^2}>0$$

$$|x_{n+p}-x_n|=\frac{n+1}{(n+2)^2}+\ldots+\frac{n+p}{(n+p+1)^2}\geq p\,\frac{n+p}{(n+p+1)^2}$$

Возьмём $n=N \quad p=3N-1 \quad |x_{n+p}-x_n|\geq$

$$\geq(3N-1)\frac{4N-1}{16N^2}=\frac{12N^2-7N+1}{16N^2}=\frac{3}{4}-\frac{7}{16N}+\frac{1}{16N^2}\geq$$

$$\geq\frac{3}{4}-\frac{7}{16N}\geq\frac{3}{4}-\frac{7}{16}=\frac{5}{16}\Rightarrow \text{расходится}$$

№158.

$$\forall p\in\mathbb{N} \quad \lim_{n\to\infty}|x_{n+p}-x_n|=0$$

$\{x_n\}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$: $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n+p}$ – конечная сумма (p – фиксированное) б.м. послед. – б.м. послед. $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}|x_{n+p}-x_n|=0$

№90(3) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \neq -\infty$

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty \iff \forall \varepsilon>0 \ \exists N=N(\varepsilon): \forall n \geq N$ $x_n < -\varepsilon$

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n \neq -\infty \iff \exists \varepsilon > 0 : \forall N \ \exists n \geq N : x_n > -\varepsilon$

91. $\{x_n\}$ - беск. б. $\iff \forall \varepsilon>0 \ \exists N=N(\varepsilon): \forall n\geq N \ |x_n| > \varepsilon$

$\{x_n\}$ - неогр. $\iff \forall \varepsilon>0 \ \exists N: |x_N| > \varepsilon$

1) беск. б. $\Rightarrow$ неогр.

2) неогр. $\not\Rightarrow$ беск. б.

100(3) Д-ть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$

$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} \geq 1 + n^2 \cdot \frac{1}{n} = 1 + n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$.

№119.

$\boxed{\Rightarrow}$ посл-ть сходится $\Rightarrow$ у неё единственный предел и она ограничена - св-ва сходящ. п-ти

$\boxed{\Leftarrow}$ От противного: Пусть $\{x_{n_k}\}$ - посл-ть, не имеющая подпослед., сходящихся к част. пределу $\{x_n\}$. $\{x_{n_k}\}$ - ограничена так как $\{x_{n_k}\}$ - подпослед. ограниченной послед. $\{x_n\}$ => по Т. Больцано-Вейерштрасса $\{x_{n_k}\}$ имеет частичный предел => => $\{x_n\}$ имеет хотя бы два частичных предела !

№120. $\lim\limits_{k\to\infty} x_{3k} = a \Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} x_{3\cdot 2k} = \lim\limits_{k\to\infty} x_{3(2k-1)} = a$

$\lim x_{2k} = b \Rightarrow \lim x_{3\cdot 2k} = b = a \Rightarrow$

$\lim x_{2k-1} = c \Rightarrow \lim x_{3(2k-1)} = c = a$

$\Rightarrow \lim x_{2k} = \lim x_{2k-1} = a \Rightarrow \lim x_n = a$

№117(1) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$, $\sup\{x_n\}$, $\inf\{x_n\}$ - ?

$$\frac{(-1)^n}{n} + \frac{1+(-1)^n}{2}$$

$\lim\limits_{k\to\infty} x_{2k} = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{1}{2k} + 1 = 1$

$\lim\limits_{k\to\infty} x_{2k-1} = \lim\limits_{k\to\infty} -\frac{1}{2k-1} = 0$

$\Rightarrow \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = 1; \ \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = 0$

$x_{2k} > x_{2k-1}$ $\forall k$; x_{2k} - убывающ.; x_{2k-1} - возраст. =>

$\Rightarrow \sup\{x_n\} = x_2 = \frac{3}{2}$; $\inf\{x_n\} = x_1 = -1$.

№246 (1,2,3)

1) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$

$\frac{const}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ сходится, т.к. x_n и $\frac{1}{n}$ - сходятся

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}(x_1+\ldots+x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{x_1}{n} + \lim_{n\to\infty}\frac{x_2}{n}+\ldots+\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{n} =$$

$$= 0$$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Rightarrow x_n = a+\alpha_n,\ \lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n = 0$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(x_1+\ldots+x_n) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(a+\alpha_1+\ldots+a+\alpha_n) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(na+\underbrace{\alpha_1+\ldots+\alpha_n}_{1)\text{ пункт}}) = a$$

3) $\{x_n\}$ - расходится, но $\exists \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}(x_1+\ldots+x_n)$

$x_n = \sin n$: $\frac{1}{n}(\sin 1+\sin 2+\ldots+\sin n) =$

$$= \frac{1}{n}\left(\frac{2\sin 1\sin 1+2\sin 1\sin 3+\ldots+2\sin 1\sin n}{2\sin 1}\right) +$$

$$+ \frac{1}{n}\left(\frac{2\sin 1\sin 2+2\sin 1\sin 4+\ldots+2\sin 1\sin n}{2\sin 1}\right) =$$

$$= \frac{1}{2n\sin 1}\left(\cos(1-1)-\cos(1+1)+\cos(3-1)-\cos(3+1)+\cos(5-1)-\right.$$

$$\left.-\cos(5+1)+\ldots-\cos(2k-2)+\cos(2k)\right) + \frac{1}{2n\sin 1}\left(\cos(2-1)-\right.$$

$$\left.-\cos(2+1)+\cos(4-1)-\cos(4+1)\ldots-\cos(2k-1)+\cos(2k+1)\right) =$$

$$= \frac{1+\cos(2k)+\cos 1+\cos(2k+1)}{2n\sin 1} \le$$

$2k := 2k+2$, если n - нечётное

$$\le \frac{\frac{1}{2\sin 1}(1+1+1+1)}{n} \le \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$\sin n$ - очевидно расходится