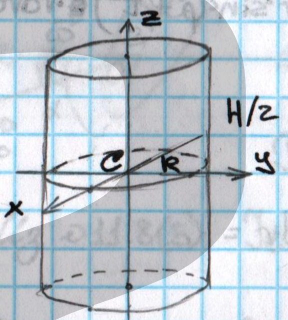
VI Геометрия масс

Динамика твёрдого тела

№11.8 (б)



Найти главные центральные моменты инерции однородного цилиндра радиуса R и высоты H. Масса цилиндра M.

Решение:

Ось Cz является главной всилу осевой симметрии тела

Оси Cx и Cy являются главными в силу плоскостной симметрии тела (относительно плоскостей Cyz и Cxz соответственно)

Таким образом, изображённый на рисунке базис является собственным и тензор инерции симметричен.

G - множество точек цилиндра.

Замена координат: $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ z = t$

$\tilde{G} = \{0 \le r \le R,\ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ -\frac{H}{2} \le t \le \frac{H}{2}\}$

$$\left|\frac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,t)}\right| = r$$

В силу симметрии $A=B$

$$A=B=\iiint\limits_{G} \rho\,(y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_{\tilde{G}} \rho\,(r^2\sin^2\varphi + t^2)\cdot r\,dr\,d\varphi\,dt$$

$$= \rho\int_0^R dr\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-H/2}^{H/2} (r^3\sin^2\varphi + t^2 r)\,dt =$$

$$= \rho\int_0^R dr\int_0^{2\pi}\left(r^3 H\cdot\frac{1-\cos 2\varphi}{2} + r\frac{H^3}{12}\right)dr =$$

$$= \frac{\rho H}{2}\int_0^R 2\pi\left(r^3 + \frac{rH^2}{6}\right)dr =$$

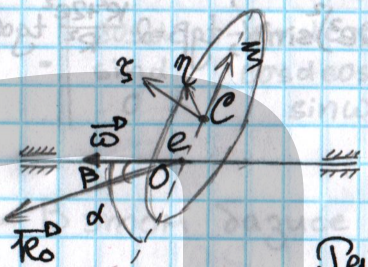
$$= \pi\rho H\cdot\left(\frac{R^4}{4}+\frac{R^2H^2}{12}\right) = \frac{1}{12}\left(\pi R^2 H\cdot\rho\right)\left(3R^2+H^2\right) = \frac{1}{12}M(3R^2+H^2)$$

$$C=\iiint\limits_{G}\rho\,(x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_{\tilde{G}}\rho\, r^3\,dr\,d\varphi\,dt =$$

$$= \rho\int_0^R dr\int_0^{2\pi} d\varphi\int_{-H/2}^{H/2} r^3\,dt = \rho H\cdot 2\pi\cdot\frac{R^4}{4} = \frac{1}{2}\left(\pi R^2\cdot H\cdot\rho\right)R^2 = \frac{1}{2}MR^2$$

<u>Ответ</u>: $A=B=\frac{1}{12}M(3R^2+H^2)$, $C=\frac{1}{2}MR^2$.

№11.16



Дано: Однородный диск радиуса R и массы m, e, ω, α

Найти: K_O, β

Решение:

Из №11.8(5): $J_{C\xi\eta\zeta} = \begin{Vmatrix} \frac{1}{4}mR^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}mR^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}mR^2 \end{Vmatrix}$

По теореме Гюйгенса-Штейнера:

$$J_{O\xi\eta\zeta} = J_{C\xi\eta\zeta} + m\begin{Vmatrix} \eta^2+\zeta^2 & -\xi\eta & -\xi\zeta \\ -\xi\eta & \xi^2+\zeta^2 & -\eta\zeta \\ -\xi\zeta & -\eta\zeta & \xi^2+\eta^2 \end{Vmatrix}, \text{ где}$$

$$\vec{e} = \begin{Vmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} e \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix} \Rightarrow$$

$$J_{O\xi\eta\zeta} = \begin{Vmatrix} \frac{1}{4}mR^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}mR^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}mR^2 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & me^2 & 0 \\ 0 & 0 & me^2 \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} \frac{1}{4}mR^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}mR^2+me^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}mR^2+me^2 \end{Vmatrix}$$

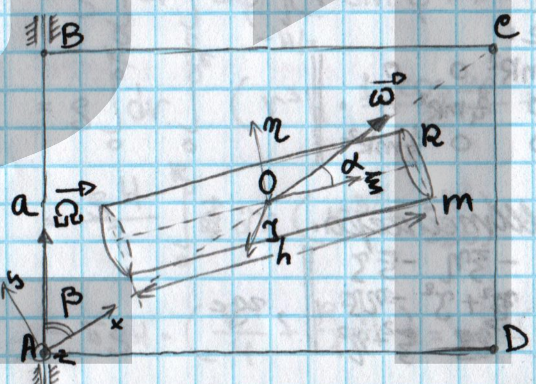
$$\vec{\omega} = \begin{Vmatrix} -\omega\cos\alpha \\ 0 \\ \omega\sin\alpha \end{Vmatrix}$$

$$\vec{K_O} = J_O\vec{\omega} = \begin{Vmatrix} -\frac{1}{4}mR^2\omega\cos\alpha \\ 0 \\ \frac{1}{2}m(R^2+2e^2)\omega\sin\alpha \end{Vmatrix} = \frac{m\omega}{4}\begin{Vmatrix} -R^2\cos\alpha \\ 0 \\ 2(R^2+2e^2)\sin\alpha \end{Vmatrix}$$

$$tg\beta = \frac{|K_{O\eta}|}{|K_{O\xi}|} = \left(\frac{R^2\cos\alpha}{2(R^2+2e^2)\sin\alpha}\right)^{-1} = 2\frac{R^2+2e^2}{R^2}tg\alpha$$

<u>Ответ</u>: $K_O = \frac{m\omega}{4}\sqrt{R^4\cos^2\alpha + 4(R^2+2e^2)^2\sin^2\alpha}$, $tg\beta = 2\frac{R^2+2e^2}{R^2}tg\alpha$.

№11.21



Дано: $R, h, m, \alpha, \beta, a, AO = OC$

Найти: T

Решение:

Базис $O\xi\eta\zeta$ получен из базиса $Axyz$ поворотом вокруг Ox на угол ωt и поворотом вокруг $O\zeta$ на угол α.

$$S_1 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\omega t & -\sin\omega t \\ 0 & \sin\omega t & \cos\omega t \end{Vmatrix} \qquad S_2 = \begin{Vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

$$S = S_2 S_1 = \begin{Vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\omega t & -\sin\omega t \\ 0 & \sin\omega t & \cos\omega t \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha\cos\omega t & \sin\alpha\sin\omega t \\ \sin\alpha & \cos\alpha\cos\omega t & -\cos\alpha\sin\omega t \\ 0 & \sin\omega t & \cos\omega t \end{Vmatrix}$$

В этом базисе $\vec{\omega}_{абс} = S \begin{Vmatrix} \omega + \Omega\cos\beta \\ \Omega\sin\beta \\ 0 \end{Vmatrix} =$

$$= \begin{Vmatrix} \omega\cos\alpha + \Omega\cos\alpha\cos\beta - \Omega\sin\alpha\sin\beta\cos\omega t \\ \omega\sin\alpha + \Omega\sin\alpha\cos\beta + \Omega\cos\alpha\sin\beta\cos\omega t \\ \Omega\sin\beta\sin\omega t \end{Vmatrix}$$

$$J_{O\xi\eta\zeta} = \begin{Vmatrix} \frac{1}{2}mR^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12}m(3R^2+h^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12}m(3R^2+h^2) \end{Vmatrix}$$

(из задачи 211.8(5))

$$T_{отн} = \frac{1}{2}\vec{\omega}^T J_{O\xi\eta\zeta}\vec{\omega} = \frac{1}{4}mR^2(\omega\cos\alpha + \Omega\cos\alpha\cos\beta - \Omega\sin\alpha\sin\beta\cos\omega t)^2 + \frac{1}{24}m(3R^2+h^2)(\omega\sin\alpha + \Omega\sin\alpha\cos\beta + \Omega\cos\alpha\sin\beta\cos\omega t)^2 + \frac{1}{24}m(3R^2+h^2)(\Omega\sin\beta\sin\omega t)^2$$

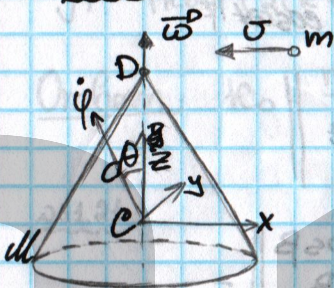
$$T = T_0 + T_{отн} = \frac{1}{2}m\Omega^2 \cdot AO^2 \cdot \cos^2\beta + T_{отн}$$

$$2AO\cos\alpha = a$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{8}m(\Omega a\, tg\beta)^2$$

<u>Ответ</u>: $T = \frac{1}{8}m\Omega^2 a^2 tg^2\beta + \frac{1}{4}mR^2(\omega\cos\alpha + \Omega\cos\alpha\cos\beta - \Omega\sin\alpha\sin\beta\cos\omega t)^2 + \frac{1}{24}m(3R^2+h^2)(\omega\sin\alpha + \Omega\sin\alpha\cos\beta + \Omega\cos\alpha\sin\beta\cos\omega t)^2 + \frac{1}{24}m(3R^2+h^2)(\Omega\sin\beta\sin\omega t)^2$

№11.54



Дано: $A=B\neq C$, ω, m, σ, d

Описать движение

Решение:

$$\vec{K}_C = J\vec{\omega} = A\vec{\omega}_1 + (C-A)r$$

$$\vec{\omega}_1 = \frac{\vec{K}_C}{A} + \frac{A-C}{A}\begin{Vmatrix}0\\0\\r\end{Vmatrix}$$

$$Cr = \text{const} \Rightarrow \begin{Vmatrix}0\\0\\r\end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix}0\\0\\\omega\end{Vmatrix}$$

$$\vec{K}_C = \begin{Vmatrix}0\\0\\C\omega\end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix}0\\-md\sigma\\0\end{Vmatrix}$$ – сохраняется после удара

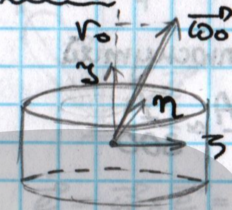
$$\dot\psi = \frac{1}{A}\sqrt{(C\omega)^2 + (md\sigma)^2}$$ – скорость прецессии

$$\vec{\dot\varphi} = \frac{A-C}{A}\begin{Vmatrix}0\\0\\r\end{Vmatrix} \Rightarrow \dot\varphi = \frac{A-C}{A}\omega$$ – собственное вращени

$$\theta = \operatorname{arctg}\frac{m\sigma d}{C\omega}$$ – угол нутации.

Ответ: $\dot\psi = \dfrac{\sqrt{C^2\omega^2 + m^2d^2\sigma^2}}{A}$, $\dot\varphi = \dfrac{A-C}{A}\omega$, $\theta = \operatorname{arctg}\dfrac{m\sigma d}{C\omega}$.

№ 11.59



Дано: ω_0, r_0, $A = B + C$

Найти движение гироскопа.

Решение:

$$\vec{K} = \begin{Vmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} p_0 \\ 0 \\ r_0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} Ap_0 \\ 0 \\ Cr_0 \end{Vmatrix}$$

(~~$q_0 = 0$, а~~ базис выбирается так, чтобы $q_0 = 0$, $p_0 = \sqrt{\omega_0^2 - r_0^2}$)

$$\dot{\psi} = \frac{1}{A}\sqrt{A^2 p_0^2 + C^2 r_0^2} = \sqrt{\left(\frac{C}{A}\right)^2 r_0^2 + \omega_0^2 - r_0^2} \Rightarrow$$

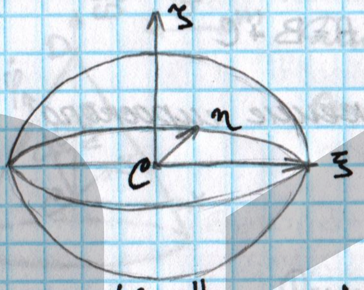
$$\dot{\varphi} = \frac{A-C}{A}\begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ r_0 \end{Vmatrix} \cdot \frac{A-C}{A} \Rightarrow \dot{\varphi} = \frac{A-C}{A} r_0$$

$$tg\,\theta = \frac{Ap_0}{Cr_0} = \frac{A}{C}\sqrt{\left(\frac{\omega_0}{r_0}\right)^2 - 1}$$

Движение является регулярной прецессией

Ответ: $\dot{\psi} = \sqrt{\left(\frac{C}{A}\right)^2 r_0^2 + \omega_0^2 - r_0^2}$, $\dot{\varphi} = \frac{A-C}{A} r_0$, $tg\,\theta = \frac{A}{C}\sqrt{\left(\frac{\omega_0}{r_0}\right)^2 - 1}$

№11.65



Дано: Земля - сплюснутый сфероид, $\alpha = \frac{C-A}{A} \approx \frac{1}{300}$

Найти: T_ψ, T_φ

$$\vec{K} = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ C\omega_з \end{Vmatrix}, \quad \vec{\omega_з} = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_з \end{Vmatrix}$$

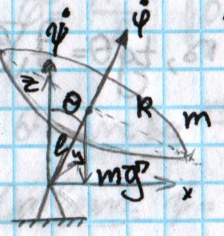
$$\dot{\psi} = \frac{1}{A}|\vec{K}| = \frac{C}{A}\omega_з = (\alpha+1)\omega_з \Rightarrow \frac{2\pi}{T_\psi} = (\alpha+1)\frac{2\pi}{T_з} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_\psi = \frac{T_з}{\alpha+1} \approx 1 \text{ сутки}$$

$$\dot{\varphi} = \frac{|A-C|}{A}\omega_з = \alpha\omega_з \Rightarrow \frac{2\pi}{T_\varphi} = \alpha\frac{2\pi}{T_з} \Rightarrow T_\varphi = \frac{T_з}{\alpha} \approx 300 \text{ суток}$$

Ответ: $T_\psi = \frac{T_з}{\alpha+1} \approx 1$ сутки, $T_\varphi = \frac{T_з}{\alpha} \approx 300$ суток

№11.69



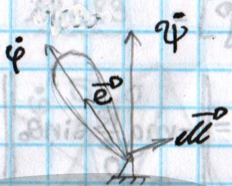
Дано: $R, m, l = \frac{R}{2}, \psi_0 = 0, \varphi_0 = 0, \theta_0 = \frac{\pi}{4},$

$\dot{\psi}_0 = \sqrt{\frac{g}{9R}}, \dot{\varphi}_0 = \sqrt{\frac{9g}{R}}, \dot{\theta}_0 = 0$

Определить движение диска.

Решение

Докажем, что движение является регулярной прецессией



$$\vec\omega = \vec\omega_\perp + \vec\omega_\parallel \quad (\vec\omega_\parallel \parallel \vec e)$$

$$\dot{\vec e} = \vec\omega\times\vec e = \vec\omega_\perp \times \vec e \Rightarrow \vec e\times\dot{\vec e} = \vec e\times[\vec\omega_\perp\times\vec e] =$$

$$= \vec\omega_\perp \vec e^{\,2} - \vec e(\vec\omega_\perp,\vec e) = \vec\omega_\perp$$

$$\vec K = \begin{Vmatrix} A&0&0\\0&A&0\\0&0&C\end{Vmatrix}\vec\omega = A\vec\omega_\perp + C\vec\omega_\parallel$$

$C\vec\omega_\parallel = Cr\vec e = H\vec e$, H-собственный кин. момент

$$\vec K = A\vec e\times\dot{\vec e} + H\vec e$$

$$\dot{\vec K} = A\dot{\vec e}\times\dot{\vec e} + A\vec e\times\ddot{\vec e} + \dot H\vec e + H\dot{\vec e} = A\vec e\times\ddot{\vec e} + \dot H\vec e + H\dot{\vec e}$$

$$\begin{cases} A\vec e\times\ddot{\vec e} + H\dot{\vec e} = \vec M_\perp \\ \dot H\vec e = \vec M_\parallel \end{cases}$$

Для регулярной прецессии: $\dot\varphi = const$, $\dot\psi = const$

$\theta = const \Rightarrow H = Cr = C(\dot\varphi + \dot\psi\cos\theta) = const \Rightarrow \vec M_\parallel = 0$

$$\dot{\vec e} = \dot{\vec\psi}\times\vec e, \quad \vec e = \frac{\dot{\vec\varphi}}{\dot\varphi}$$

$$\ddot{\vec e} = \ddot{\vec\psi}\times\vec e + \dot{\vec\psi}\times\dot{\vec e} = \dot{\vec\psi}\times[\dot{\vec\psi}\times\vec e] = \dot{\vec\psi}(\dot{\vec\psi},\vec e) - \dot\psi^2\vec e$$

$$A\vec e\times\left(\dot{\vec\psi}(\dot{\vec\psi},\vec e) - \dot\psi^2\vec e\right) + H\dot{\vec\psi}\times\vec e = \vec M_\perp$$

$$-A(\dot{\vec\psi},\vec e)[\dot{\vec\psi}\times\vec e] + H\dot{\vec\psi}\times\vec e = \vec M_\perp$$

$$\vec M_\perp = \dot{\vec\psi}\times\frac{\dot{\vec\varphi}}{\dot\varphi}\left(C\dot\varphi + C\dot\psi\cos\theta - A\dot\psi\cos\theta\right) = \dot{\vec\psi}\times\dot{\vec\varphi}\left(C + (C-A)\frac{\dot\psi}{\dot\varphi}\cos\theta\right)$$

Момент силы тяжести: $\vec{M}_{g_0} = [\vec{l} \times m\vec{g}] =$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ l\sin\theta_0 & 0 & l\cos\theta_0 \\ 0 & 0 & -mg \end{vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 \\ -mgl\sin\theta_0 \\ 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 \\ -mg\frac{R}{2}\sin\theta_0 \\ 0 \end{Vmatrix}$$

$\vec{M}_{g_0} \perp \vec{e} \Rightarrow$ выполнено условие $M_{\parallel} = 0$

$$\dot{\vec{\psi}} \times \dot{\vec{\varphi}} \left(C\dot{\varphi} + (C-A)\frac{\dot{\psi}}{\dot{\varphi}}\cos\theta \right) =$$

$|\dot{\vec{\psi}} \times \dot{\vec{\varphi}}| = \frac{g}{R}\sin\theta$ - направлен по Oy

$C = \frac{1}{2}mR^2, \; A = B = \frac{1}{4}mR^2 + ml^2 = \frac{1}{2}mR^2$

$$= \frac{g}{R}\sin\theta \left(\frac{1}{2}mR^2 + \left(\frac{1}{2}mR^2 - \frac{1}{2}mR^2\right)\frac{\dot{\psi}}{\dot{\varphi}}\cos\theta \right) =$$

$= mg\frac{R}{2}\sin\theta$ - совпадает с $\vec{M}_g \Rightarrow$

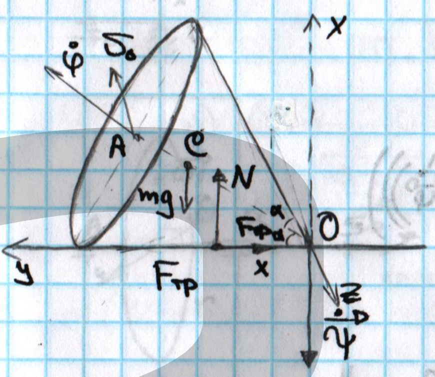
$\Rightarrow \vec{M}_g$ поддерживает регулярную прецессию.

$\dot{\varphi} = const, \; \dot{\psi} = const, \; \theta = const$

Ответ: движение - регулярная прецессия:

$\dot{\varphi} = \sqrt{\frac{gg}{R}}, \; \dot{\psi} = \sqrt{\frac{g}{gR}}, \; \theta = \frac{\pi}{4}$

№11.83



Дано: α, R, h, $R = \operatorname{tg}\alpha \cdot h$, υ_0, A, B, C

Найти: $\vec{R}$, x

$A = B = \frac{3}{80} m (4R^2 + h^2)$, $C = \frac{3}{10} m R^2$

Решение:

II з-н Ньютона в проекции на Ox: $N - mg = 0 \Rightarrow N = mg$

$R_z = 0$, поскольку конус катится равномерно

$F_{тр}$ вызывает нормальное ускорение $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{\upsilon_0^2}{\frac{3}{4} h \cos\alpha} \cdot m = F_{тр}$ ($\frac{3}{4}h$, т.к. для конуса центр масс находится на расстоянии $\frac{3}{4}h$ от вершины)

$$\vec{\dot{\psi}} \times \vec{r_A} = \left\| \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ -\upsilon_0 \end{matrix} \right\| = \left| \begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\dot{\psi} & 0 & 0 \\ h\sin\alpha & h\cos\alpha & 0 \end{matrix} \right| = \left\| \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ -h\dot{\psi}\cos\alpha \end{matrix} \right\| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \dot{\psi} = \frac{\upsilon_0}{h\cos\alpha}$$

$\upsilon_C = \dot{\psi} \cdot \frac{3}{4} h\cos\alpha = \frac{3}{4}\upsilon_0$ (точка O неподвижна, т.к. она касается поверхности, а значит её скорость 0)

Таким образом $F_{тр} = m \cdot \frac{3}{4} \frac{\upsilon_0^2}{h\cos\alpha} = \frac{3}{4} \frac{\upsilon_0^2 \sqrt{R^2+h^2}}{h^2} m$

$\vec{M} = \vec{x}\vec{N} + \vec{r_C} \times m\vec{g}$ - направлен по оси z

$$M_z = mg\left(\frac{3}{4}h\cos\alpha - x\right)$$

$$\dot\varphi\sin\alpha = \dot\psi \Rightarrow \dot\varphi = \frac{\delta_0}{h\sin\alpha\cos\alpha}$$

Для поддержания прецессии:

$$M_z = \left(\vec{\dot\psi}\times\vec{\dot\varphi}\left(C + (C-A)\frac{\dot\psi}{\dot\varphi}\cos(\widehat{\vec{\dot\psi},\vec{\dot\varphi}})\right)\right)_z$$

$$\widehat{\vec{\dot\psi},\vec{\dot\varphi}} = 90^\circ + \alpha$$

$$\vec{\dot\psi}\times\vec{\dot\varphi} = \begin{vmatrix} \vec i & \vec j & \vec k \\ -\dot\psi & 0 & 0 \\ \dot\varphi\sin\alpha & \dot\varphi\cos\alpha & 0 \end{vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ -\dot\psi\dot\varphi\cos\alpha \end{Vmatrix}$$

$$mg\left(\frac{3}{4}h\cos\alpha - x\right) = -\dot\psi\dot\varphi\cos\alpha\, m\left(\frac{3}{10}R^2 + \left(\frac{3}{10}R^2 - \frac{3}{80}(4R^2+h^2)\right)\sin\alpha\cos(\ldots\right.$$

$$= -\frac{m\delta_0^2\cos\alpha}{h^2\cos^2\alpha\sin\alpha}\cdot\frac{3}{20}\left(2R^2 - \left(2R^2 - \frac{1}{4}(4R^2+h^2)\right)\sin^2\alpha\right) =$$

$$= -\frac{m\delta_0^2\cancel{\cos\alpha}}{h^2\sin\alpha\cos\alpha}\cdot\frac{3}{20}\left(2R^2 - \cancel{2}\left(R^2 - \frac{1}{4}h^2\right)\cdot\frac{R^2}{R^2+h^2}\right) =$$

$$= -\frac{3}{20}m\frac{\delta_0^2(R^2+h^2)}{h^3R}\cdot\frac{2R^4 + 2R^2h^2 - R^4 + \frac{1}{4}R^2h^2}{R^2+h^2}$$

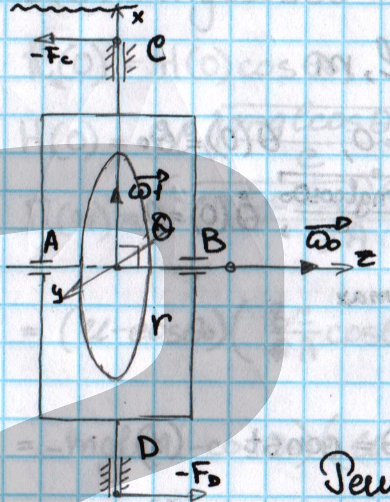
$$x = \frac{3}{4}h\cos\alpha + \frac{3}{20}\frac{\delta_0^2}{gh^3R}\left(R^4 + \frac{9}{4}R^2h^2\right) =$$

$$= \frac{3}{4}\frac{h^2}{\sqrt{R^2+h^2}} + \frac{3}{20}\frac{\delta_0^2R}{gh}\left(\left(\frac{R}{h}\right)^2 + \frac{9}{4}\right)$$

Ответ: $\vec N = mg$, $F_{тр} = \frac{3}{4}m\frac{\delta_0^2\sqrt{R^2+h^2}}{h^2}$

$$x = \frac{3}{4}\frac{h^2}{\sqrt{R^2+h^2}} + \frac{3}{20}\frac{\delta_0^2R}{gh}\left(\left(\frac{R}{h}\right)^2 + \frac{9}{4}\right)$$

№11.113



Дано: m, масса распределена по ободу, r, ω_1, ω_0

Найти: F_C, F_D

Решение:

Движение является регулярной прецессией. Для её поддержания:

$\vec{M} = \vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}_0 \left(C + (C-A)\frac{\omega_1}{\omega_0}\cos\theta\right)$.

$\theta = 90^\circ$, $C = mr^2 \Rightarrow \vec{M} = mr^2 \vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}_0$

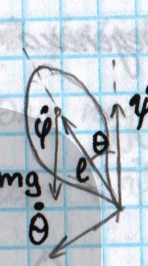
$\vec{M}$ направлен по Oy, $M_y = -mr^2\omega_1\omega_0$

Для создания такого момента в подшипниках C и D должны действовать равные по модулю силы F_D и F_C: $2F_D \cdot \frac{l}{2} = M_y$ (силы направлены по Ox)

$F_C = F_D = \frac{1}{l}|M_y| = \frac{mr^2}{l}\omega_1\omega_0$

Ответ: $F_C = F_D = \frac{mr^2}{l}\omega_1\omega_0$.

№11.131 (1)



Дано: $A = B = 2C$, l, m

$\psi(0)=0$, $\varphi(0)=0$, $\theta(0)=\theta_0$

$\dot\psi(0)=0$, $\dot\varphi(0)=4\sqrt{\frac{mgl\cos\theta_0}{C}}$, $\dot\theta(0)=0$

Найти: θ_{min} и θ_{max}

Решение:

$$E=\frac{1}{2}A\left(\dot\theta^2+\dot\psi^2\sin^2\theta\right)+mgl\cos\theta=\text{const} \qquad (1)$$

$$K_z=A\dot\psi\sin^2\theta+H\cos\theta=\text{const} \qquad (2)$$

$$H=C\left(\dot\varphi+\dot\psi\cos\theta\right)=\text{const} \qquad (3)$$

$$(2)\Rightarrow \dot\psi=\frac{K_z-H\cos\theta}{A\sin^2\theta}$$

Подставляем в (1):

$$E=\frac{1}{2}A\dot\theta^2+\frac{(K_z-H\cos\theta)^2}{2A\sin^2\theta}+mgl\cos\theta$$

$$E(1-\cos^2\theta)=\frac{1}{2}A(\dot\theta\sin\theta)^2+\frac{(K_z-H\cos\theta)^2}{2A}+mgl\cos\theta(1-\cos^2\theta)$$

Замена: $u=\cos\theta$, тогда $\dot u=-\dot\theta\sin\theta$

$$E(1-u^2)=\frac{1}{2}A\dot u^2+\frac{(K_z-uH)^2}{2A}+mglu(1-u^2)$$

Движение возможно, когда $\Pi(u)=\frac{(K_z-uH)^2}{2A}+$

$+mglu(1-u^2)-E(1-u^2)<0$ (т.е. $A\dot u^2>0$)

$$E(0) = mgl\cos\theta_0$$

$$K_z(0) = H(0)\cos\theta_0,$$

$$H(0) = 4c\sqrt{\frac{mgl\cos\theta_0}{c}} = 4\sqrt{mgl\cdot c\cos\theta_0}$$

$$\Pi(u) = \frac{\left(4\sqrt{mgl\cdot c\cos\theta_0}\right)^2(u-\cos\theta_0)^2}{2A} + mgl(1-u^2)(u-\cos\theta_0) =$$

$$= (u-\cos\theta_0)\left(\frac{8c}{A}\cos\theta_0(u-\cos\theta_0) + 1 - u^2\right)mgl =$$

$$= -mgl(u-\cos\theta_0)\left(u^2 - \frac{8c}{A}\cos\theta_0\, u + \frac{8c}{A}\cos^2\theta_0 - 1\right) =$$

$$= -mgl(u-\cos\theta_0)(u^2 - 4\cos\theta_0\, u + 4\cos^2\theta_0 - 1) =$$

$$= -mgl(u-\cos\theta_0)\left(u - \frac{4\cos\theta_0+2}{2}\right)\left(u - \frac{4\cos\theta_0-2}{2}\right) =$$

$$= -mgl(u-\cos\theta_0)(u-(2\cos\theta_0+1))(u-(2\cos\theta_0-1))$$

~~θ_{min}~~ $\cos\theta_{min} = \cos\theta_0 \Rightarrow \theta_{min} = \theta_0$

$\cos\theta_{max} = 2\cos\theta_0 - 1 \Rightarrow \theta_{max} = \arccos(2\cos\theta_0 - 1)$

<u>Ответ</u>: $\theta_{min} = \theta_0$, $\theta_{max} = \arccos(2\cos\theta_0 - 1)$

VII Уравнения Лагранжа

№12.6 (а)

Интегрируема ли дифференциальная связь:

$$x\dot{z} + (y^2 - x^2 - z)\dot{x} + (z - y^2 - xy)\dot{y} = 0$$

Обозначим $P = y^2 - x^2 - z$, $Q = z - y^2 - xy$, $R = x$

$$P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0.$$

Уравнение интегрируемо, если $\exists F(x,y,z)$ и $\mu(x,y,z)$:

$$dF = \mu P\,dx + \mu Q\,dy + \mu R\,dz$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \mu P, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \mu Q, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = \mu R$$

Из равенства смешанных производных:

$$\begin{cases} \mu_y P + \mu P_y = \mu_x Q + \mu Q_x & / \cdot R \\ \mu_z P + \mu P_z = \mu_x R + \mu R_x & / \cdot Q \\ \mu_z Q + \mu Q_z = \mu_y R + \mu R_y & / \cdot P \end{cases}$$

$$\begin{cases} -RQ\mu_x + PR\mu_y = \mu R(Q_x - P_y) & (1) \\ -RQ\mu_x + PQ\mu_z = \mu Q(R_x - P_z) & (2) \\ -PR\mu_y + PQ\mu_z = \mu P(R_y - Q_z) & (3) \end{cases}$$

$$(1) - (2) + (3) \Rightarrow R(Q_x - P_y) - Q(R_x - P_z) + P(R_y - Q_z) = 0$$

$\frac{\partial P}{\partial z} = -1, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 2y$

$\frac{\partial Q}{\partial x} = -y, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = 1$

$\frac{\partial R}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial R}{\partial y} = 0$

Подставляем:

$x(-y-2y) - (z-y^2-xy)\cdot 2 + (y^2-x^2-z)(-1) \overset{?}{=} 0$

$-3xy - 2z + 2y^2 + 2xy - y^2 + x^2 + z \overset{?}{=} 0$

$y^2 + x^2 - z - xy \overset{?}{=} 0$ – не является тождеством $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ связь неинтегрируема.

<u>Ответ</u>: Связь неинтегрируема.

<u>№ 12.7(в)</u>

$\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k} \quad x = \sqrt{\xi\eta}\cos\varphi,\ y = \sqrt{\xi\eta}\sin\varphi,\ z = \frac{\xi-\eta}{2}$

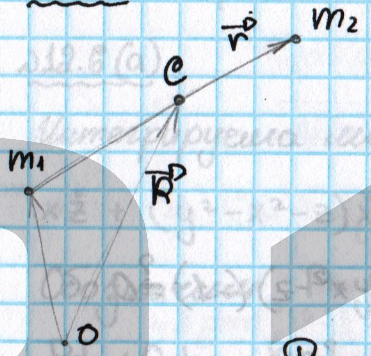
Найти обобщённые силы Q_ξ, Q_η, Q_φ

$Q_\xi = F_x\frac{\partial x}{\partial \xi} + F_y\frac{\partial y}{\partial \xi} + F_z\frac{\partial z}{\partial \xi} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\eta}{\xi}}\cos\varphi\, F_x + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\eta}{\xi}}\sin\varphi\, F_y +$
$+ \frac{1}{2}F_z$

$Q_\eta = F_x\frac{\partial x}{\partial \eta} + F_y\frac{\partial y}{\partial \eta} + F_z\frac{\partial z}{\partial \eta} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\xi}{\eta}}\cos\varphi\, F_x + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\xi}{\eta}}\sin\varphi\, F_y - \frac{1}{2}F_z$

$Q_\varphi = F_x\frac{\partial x}{\partial \varphi} + F_y\frac{\partial y}{\partial \varphi} + F_z\frac{\partial z}{\partial \varphi} = -\sqrt{\xi\eta}\sin\varphi\, F_x + \sqrt{\xi\eta}\sin\varphi\, F_y.$

№12.13



Дано: m_1, m_2, $F = -c(r - r_0)$

Составить уравнения Лагранжа и вписать их 1ые интегралы.

Решение:

$$\vec{R} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1+m_2}$$

$$\vec{r}_{c1} = \vec{r}_1 - \vec{R} = -\frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{r}$$

$$\vec{r}_{c2} = \vec{r}_2 - \vec{R} = \frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{r}$$

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{\vec{r}}_1^{\,2} + \frac{1}{2}m_2\dot{\vec{r}}_2^{\,2} = \frac{1}{2}m_1\left(\dot{\vec{R}} - \frac{m_2}{m_1+m_2}\dot{\vec{r}}\right)^2 +$$

$$+\frac{1}{2}m_2\left(\dot{\vec{R}} + \frac{m_1}{m_1+m_2}\dot{\vec{r}}\right)^2 = \frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{\vec{R}}^2 +$$

$$+\frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\dot{\vec{r}}^2$$

Обобщённые координаты:

координаты C: x, y, z: $\dot{\vec{R}}^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2$

сферические координаты $\vec{r}$:

$$\dot{\vec{r}}^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2$$

Сила F потенциальна $\Rightarrow \Pi(r) = \frac{1}{2}c(r-r_0)^2$

Функция Лагранжа: $L = T - \Pi = \frac{1}{2}(m_1+m_2)(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2) +$

$$+\frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2\right) - \frac{1}{2}c(r-r_0)^2$$

Подставляем в уравнение Лагранжа 2-го рода:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = Q_k^* = 0$$

1) $q_k = x; y; z$ (в силу симметрии одинаково)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}(m_1+m_2)\cdot 2\dot x\right) = 0 \Rightarrow (m_1+m_2)\dot x = const$$

Аналогично $(m_1+m_2)\dot y = const$, $(m_1+m_2)\dot z = const$

2) $q_k = \varphi$:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\cdot r^2\sin^2\theta\cdot 2\dot\varphi\right) - 0 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cancel{\frac{2}{2}}\frac{m_1m_2}{m_1+m_2} r^2\sin^2\theta\,\dot\varphi = const = p_\varphi$$

3) $q_k = r$:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\cdot 2\dot r\right) - \left(\frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\cdot 2r\left(\dot\theta^2 + \sin^2\theta\,\dot\varphi^2\right) - c(r-r_0)\right) = 0$$

$$\cancel{\frac{2}{2}}\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\left(\ddot r - r\dot\theta^2 - r\sin^2\theta\,\dot\varphi^2\right) + c(r-r_0) = 0$$

4) $q_k = \theta$:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\cdot r^2\cdot 2\dot\theta\right) - \frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\cdot r^2\cdot\dot\varphi^2\cdot 2\sin\theta\cos\theta = 0$$

L не зависит от t (явно) и непотенциальных сил нет $\Rightarrow H = \sum_{k=1}^{6}\frac{\partial L}{\partial \dot q_k}\dot q_k - L = const$ (интеграл обобщённой энергии)

$$H = (m_1+m_2)(\dot x\cdot\dot x + \dot y\cdot\dot y + \dot z\cdot\dot z) + \frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\left(\dot r^2 + r^2\dot\theta^2 + r^2\sin^2\theta\,\dot\varphi^2\right) -$$

$$- \frac{1}{2}(m_1+m_2)\left(\dot x^2 + \dot y^2 + \dot z^2\right) - \frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\left(\dot r^2 + r^2\dot\theta^2 + r^2\sin^2\theta\,\dot\varphi^2\right) +$$

$$+ \frac{1}{2}c(r-r_0)^2$$

Из (1) => $\frac{1}{2}(m_1+m_2)(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)=const$

Из (2) => $\frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}r^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2=\frac{1}{2}\left(\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}r^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}\right)^2\cdot$

$\cdot\frac{m_1+m_2}{m_1m_2}\cdot\frac{1}{r^2\sin^2\theta}=\frac{1}{2}p_\varphi^2\frac{m_1+m_2}{m_1m_2r^2\sin^2\theta}$

$$2H=\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2)+p_\varphi^2\cdot\frac{m_1+m_2}{m_1m_2r^2\sin^2\theta}+c(r-r_0)^2=const$$

Ответ: $(m_1+m_2)\dot{x}=const$, $(m_1+m_2)\dot{y}=const$, $(m_1+m_2)\dot{z}=const$

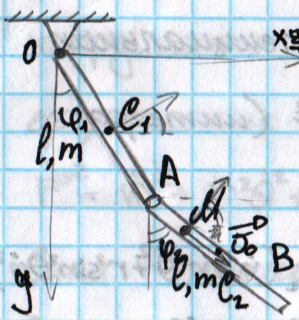
(сохранение импульса системы)

$p_\varphi=\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}r^2\dot{\varphi}\sin^2\theta=const$ (закон сохранения момента импульса в системе центра масс)

$\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2)+p_\varphi^2\cdot\frac{m_1+m_2}{m_1m_2r^2\sin^2\theta}+c(r-r_0)^2=const$

(сохранение полной энергии системы)

№12.30



Дано: m, l, M, v_0, $AM(t=0)=0$

Составить функцию Лагранжа.

Решение:

$$J_{c1} = \frac{1}{12} m l^2 = J_{c2} \Rightarrow T_{1\,ц.м.} = \frac{1}{2} J_{c1} \dot\varphi_1^2 = \frac{1}{24} m l^2 \dot\varphi_1^2$$

$$T_1 = \frac{1}{2} m v_{c1}^2 + T_{1\,ц.м.} = \frac{1}{2} m \left(\frac{l}{2}\dot\varphi_1\right)^2 + \frac{1}{24} m l^2 \dot\varphi_1^2 =$$

$$= \frac{1}{6} m l^2 \dot\varphi_1^2$$

$$\cancel{T_2 = \frac{1}{2} m \left(l\dot\varphi_1 + \frac{l}{2}\dot\varphi_2\right)^2}$$

$$\vec{v}_{c2} = \dot\varphi_1 l \left\| \begin{matrix} -\cos\varphi_1 \\ \sin\varphi_1 \\ 0 \end{matrix} \right\| + \dot\varphi_2 \frac{l}{2} \left\| \begin{matrix} -\cos\varphi_2 \\ \sin\varphi_2 \\ 0 \end{matrix} \right\| = l \left\| \begin{matrix} +\dot\varphi_1\cos\varphi_1 + \frac{1}{2}\dot\varphi_2\cos\varphi_2 \\ -\dot\varphi_1\sin\varphi_1 - \frac{1}{2}\dot\varphi_2\sin\varphi_2 \\ 0 \end{matrix} \right\| \to$$

$$\to v_{c2}^2 = l^2\left(\dot\varphi_1^2 + \frac{1}{4}\dot\varphi_2^2 + \dot\varphi_1\dot\varphi_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2)\right) =$$

$$= l^2\left(\dot\varphi_1^2 + \frac{1}{4}\dot\varphi_2^2 + \dot\varphi_1\dot\varphi_2\cos(\varphi_1-\varphi_2)\right)$$

$$T_2 = \frac{1}{24} m l^2 \dot\varphi_2^2 + \frac{1}{2} m \left(\dot\varphi_1^2 + \frac{1}{4}\dot\varphi_2^2 + \dot\varphi_1\dot\varphi_2\cos(\varphi_1-\varphi_2)\right)$$

$$\vec{v}_M = \dot\varphi_1 l \left\| \begin{matrix} +\cos\varphi_1 \\ -\sin\varphi_1 \\ 0 \end{matrix} \right\| + \dot\varphi_2 \cdot v_0 t \left\| \begin{matrix} +\cos\varphi_2 \\ -\sin\varphi_2 \\ 0 \end{matrix} \right\| + v_0 \left\| \begin{matrix} \sin\varphi_2 \\ \cos\varphi_2 \\ 0 \end{matrix} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{matrix} \dot\varphi_1 l\cos\varphi_1 + \dot\varphi_2 v_0 t\cos\varphi_2 + v_0\sin\varphi_2 \\ -\dot\varphi_1 l\sin\varphi_1 - \dot\varphi_2 v_0 t\sin\varphi_2 + v_0\cos\varphi_2 \\ 0 \end{matrix} \right\|$$

$$v_M^2 = \left(\dot\varphi_1^2 l^2 + \dot\varphi_2^2 v_0^2 t^2 + v_0^2 + 2\dot\varphi_1\dot\varphi_2 l v_0 t\cos(\varphi_1-\varphi_2) + \right.$$

$$\left. + 2\dot\varphi_1 l v_0 \sin(\varphi_2-\varphi_1) + 2\dot\varphi_2 v_0^2 t(\sin\varphi_2\cos\varphi_2 - \sin\varphi_2\cos\varphi_2)\right) =$$

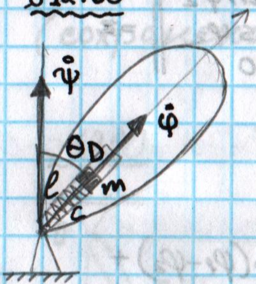
$$= \left(\dot\varphi_1^2 l^2 + \dot\varphi_2^2 v_0^2 t^2 + v_0^2 + 2\varphi_1\varphi_2 l v_0 t\cos(\varphi_2-\varphi_1) + 2\dot\varphi_1 l v_0\sin(\varphi_2-\varphi_1)\right)$$

$$T_M = \frac{1}{2} M v_M^2$$

$$\Pi = -mg\frac{l}{2}\cos\varphi_1 - mgl\cos\varphi_1 - mg\frac{l}{2}\cos\varphi_2 -$$
$$- Mgl\cos\varphi_1 - Mg\upsilon_0 t\cos\varphi_2$$

$$L = T_1 + T_2 + T_M - \Pi = \frac{1}{6}ml^2\dot\varphi_1^2 + \frac{1}{2}ml^2\dot\varphi_1^2 + \frac{1}{6}ml^2\dot\varphi_2^2 +$$
$$+ \frac{1}{2}m\dot\varphi_1\dot\varphi_2\cos(\varphi_2-\varphi_1) + \frac{1}{2}Ml^2\dot\varphi_1^2 + \frac{1}{2}M\upsilon_0^2t^2\dot\varphi_2^2 + \frac{1}{2}M\upsilon_0^2 +$$
$$+ M\dot\varphi_1\dot\varphi_2\cos(\varphi_2-\varphi_1) + M\dot\varphi_1\upsilon_0 l\sin(\varphi_2-\varphi_1) +$$
$$+ \left(\frac{3}{2}m + M\right)lg\cos\varphi_1 + \left(\frac{1}{2}ml + M\upsilon_0 t\right)g\sin\varphi_2 =$$
$$= \left(\frac{2}{3}ml^2 + \frac{1}{2}Ml^2\right)\dot\varphi_1^2 + \left(\frac{1}{6}ml^2 + \frac{1}{2}M\upsilon_0^2t^2\right)\dot\varphi_2^2 +$$
$$+ \left(\frac{1}{2}m + M\right)\dot\varphi_1\dot\varphi_2\cos(\varphi_2-\varphi_1) + M\dot\varphi_1\upsilon_0 l\sin(\varphi_2-\varphi_1) + \frac{1}{2}M\upsilon_0^2 +$$
$$+ \left(\frac{3}{2}m + M\right)lg\cos\varphi_1 + \left(\frac{1}{2}ml + M\upsilon_0 t\right)g\sin\varphi_2 \rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot\varphi_i} - \frac{\partial L}{\partial\varphi_i} = 0$$

№12.60



Дано: $A = B \neq C$, m, l_0, c, l (расстояние до ц.м.)
Составить уравнения Лагранжа и выписать их первые интегралы.

Решение:

$$\vec\omega = \begin{Vmatrix} p \\ q \\ r \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \dot\psi\sin\theta\sin\varphi + \dot\theta\cos\varphi \\ \dot\psi\sin\theta\cos\varphi - \dot\theta\sin\varphi \\ \dot\psi\cos\theta + \dot\varphi \end{Vmatrix}$$ – координаты в главных осях.

Количество степеней свободы: 4 $(\varphi, \psi, \theta, x)$

$$T = \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) + \frac{1}{2} m v_D^2$$

$$v_D = \begin{Vmatrix} p \\ q \\ r \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ x \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{x} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} qx \\ -px \\ \dot{x} \end{Vmatrix} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2}(A + mx^2)(p^2 + q^2) + \frac{1}{2}Cr^2 + \frac{1}{2} m\dot{x}^2 =$$

$$= \frac{1}{2}(A + mx^2)\cdot(\dot{\psi}^2 \sin^2\theta + \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}C(\dot{\psi}\cos^2\theta + \dot{\varphi})^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

$$\Pi = mgx\cos\theta + Mgl\cos\theta + \frac{1}{2}c(x - l_0)^2$$

$$L = T - \Pi = \frac{1}{2}(A + mx^2)(\dot{\psi}^2\sin^2\theta + \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}C(\dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi})^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2 -$$

$$- (mx + Ml)g\cos\theta - \frac{1}{2}c(x - l_0)^2.$$

1) $\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = C(\dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi}) = Cr$

Ур-ие Лагранжа: $C\dot{r} = 0$

Интеграл: $Cr = C(\dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi}) = const$

2) $\frac{\partial L}{\partial \psi} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = (A + mx^2)\cdot\dot{\psi}\sin^2\theta + C(\dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi})\cos\theta$

Ур-ие Лагранжа: $\frac{d}{dt}\left((A + mx^2)\dot{\psi}\sin^2\theta + C(\dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi})\cos\theta\right) = 0$

Интеграл: $(A + mx^2)\dot{\psi}\sin^2\theta + C(\dot{\psi}\cos^2\theta + \dot{\varphi}\cos\theta) = const$

3) $\frac{\partial L}{\partial \theta} = (A + mx^2)\dot{\psi}^2\sin\theta\cos\theta - C(\dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi})\dot{\psi}\sin\theta +$

$+ (mx + Ml)g\sin\theta$

$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = (A + mx^2)\dot{\theta}$

Уравнение Лагранжа: $(A + mx^2)\ddot{\theta} + 2mx\dot{x}\dot{\theta} -$

$-(A+mx^2)\dot\psi^2\sin\theta\cos\theta + C(\dot\psi\cos\theta+\dot\varphi)\dot\psi\sin\theta -$

$-(mx+Ml)g\sin\theta = 0.$

$$\ddot\theta + \frac{2mx\dot x\dot\theta}{A+mx^2} - \dot\psi^2\sin\theta\cos\theta + \frac{C(\dot\psi\cos\theta+\dot\varphi)\dot\psi\sin\theta}{A+mx^2} - \frac{(mx+Ml)g\sin\theta}{A+mx^2} = 0$$

4) ~~L не зависит явно~~

$$\frac{\partial L}{\partial x} = mx(\dot\psi^2\sin^2\theta+\dot\theta^2) - mg\cos\theta - c(x-l_0)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot x} = m\dot x$$

Уравнение Лагранжа: $m\ddot x - mx(\dot\psi^2\sin^2\theta+\dot\theta^2)+mg\cos\theta+c(x-$

L не зависит явно от $t \Rightarrow H = \sum \frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\dot q_i - L = const$

$H = C(\dot\psi\cos\theta+\dot\varphi)\dot\varphi + (A+mx^2)\dot\psi^2\sin^2\theta + C(\dot\psi\cos\theta+\dot\varphi)\dot\psi\cos\theta +$

$+(A+mx^2)\dot\theta^2 + m\dot x^2 - \frac{1}{2}(A+mx^2)(\dot\psi^2\sin^2\theta+\dot\theta^2) - \frac{1}{2}C(\dot\psi\cos\theta+\dot\varphi)^2 -$

$-\frac{1}{2}mx^2 + (mx+Ml)g\cos\theta + \frac{1}{2}c(x-l_0)^2 =$

$= \frac{1}{2}(A+mx^2)\dot\theta^2 + \frac{1}{2}C(\dot\psi\cos\theta+\dot\varphi)^2 + \frac{1}{2}m\dot x^2 +$

$+ (mx+Ml)g\cos\theta + \frac{1}{2}c(x-l_0)^2$

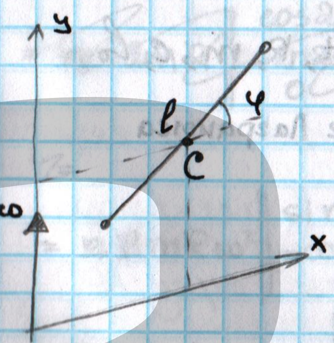
Ответ: $\frac{1}{2}(A+mx^2)\dot\theta^2 + \frac{1}{2}C(\dot\psi\cos\theta+\dot\varphi)^2 + \frac{1}{2}m\dot x^2 +$

$+ (mx+Ml)g\cos\theta + \frac{1}{2}c(x-l_0)^2 = const$

$(A+mx^2)\dot\psi\sin^2\theta + C(\dot\psi\cos\theta+\dot\varphi)\cdot\dot\psi\cos\theta = const$

$C(\dot\psi\cos\theta+\dot\varphi) = const$

Э12.61



Дано: $\omega(t)$

Составить уравнения Лагранжа.

Решение:

Обобщённые координаты: x, y, φ

$$T = T_C + T_{отн} = \frac{1}{2}m\left(x^2\omega^2 + \dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{12}ml^2\left(\dot{\varphi}^2 + \omega^2\cos^2\varphi\right)$$

$$\Pi = mgy$$

$$L = T - \Pi$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = \frac{1}{12}ml^2\omega^2\sin\varphi\cos\varphi = \frac{1}{12}ml^2\cdot\frac{1}{2}\omega^2\sin 2\varphi$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{1}{12}ml^2\dot{\varphi}$$

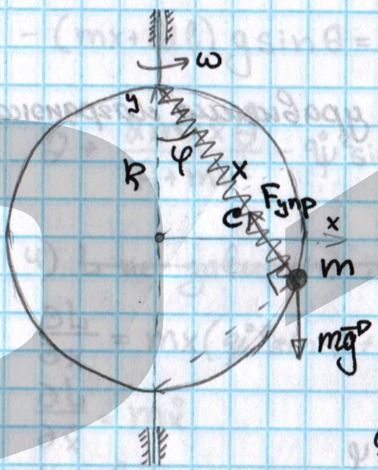
$$\Rightarrow \ddot{\varphi} - \frac{1}{2}\omega^2\sin 2\varphi = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = m\omega^2 x, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \Rightarrow \ddot{x} - \omega^2 x = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = -mg, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} \Rightarrow \ddot{y} + g = 0$$

Ответ: $\ddot{\varphi} - \frac{1}{2}\omega^2\sin 2\varphi = 0$, $\ddot{x} - \omega^2 x = 0$, $\ddot{y} + g = 0$.

№12.67



Дано: $\omega = const$, R, m, c, l_0

Найти: ур-ие Лагранжа

Решение:

Параметры: x, φ

Уравнение связи: $x = 2R\cos\varphi$

Обобщённая координата: φ

$$\vec{r} = \begin{Vmatrix} x\sin\varphi \\ R - x\cos\varphi \\ 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 \\ R \\ 0 \end{Vmatrix} + R \begin{Vmatrix} \sin 2\varphi \\ -\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\cdot 2 \\ 0 \end{Vmatrix} =$$

$$= R \begin{Vmatrix} \sin 2\varphi \\ -\cos 2\varphi \\ 0 \end{Vmatrix} \Rightarrow \vec{v} = 2R \begin{Vmatrix} \cos 2\varphi \\ \sin 2\varphi \\ 0 \end{Vmatrix}$$

$$J_{кор} = -2m[\vec{\omega} \times \vec{v}] = -2mR \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & \omega & 0 \\ \cos 2\varphi & \sin 2\varphi & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -4mR \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ -\omega\cos 2\varphi \end{Vmatrix} = 4mR\omega\cos 2\varphi \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix}$$

$Q_{пер} = 0$ (т.к. $\frac{\partial z}{\partial \varphi} = 0$)

$$J_{пер} = -m[\vec{\omega}\times[\vec{\omega}\times\vec{r}]] = -m\vec{\omega}(\vec{\omega},\vec{r}) + m\vec{r}\omega^2 =$$

$$= \cancel{2mR\begin{Vmatrix}\cos2\varphi\\ \sin2\varphi\\ 0\end{Vmatrix} + m\begin{Vmatrix}0\\ \omega\\ 0\end{Vmatrix}\omega\cdot 2R\cos2\varphi} =$$

$$=$$

$$= mR\omega^2\begin{Vmatrix}\sin2\varphi\\ -\cos2\varphi\\ 0\end{Vmatrix} + m\begin{Vmatrix}0\\ \omega\\ 0\end{Vmatrix}\omega R\cos2\varphi =$$

$$= mR\omega^2\sin2\varphi\begin{Vmatrix}1\\ 0\\ 0\end{Vmatrix}$$

$$Q_{пер} = mR\omega^2\sin2\varphi\cdot\frac{\partial x}{\partial\varphi} = mR\omega^2\sin2\varphi\cdot R\cos2\varphi\cdot 2 =$$

$$= 2mR^2\omega^2\sin2\varphi\cos2\varphi$$

$$Q_{mg} = -mg\cdot\frac{\partial y}{\partial\varphi} = -mg\cdot R\cdot 2\sin2\varphi = -2mgR\sin2\varphi$$

$$F_{упр} = \begin{Vmatrix}c(x-l_0)\sin\varphi\\ c(x-l_0)\cos\varphi\\ 0\end{Vmatrix} = c(2R\cos\varphi - l_0)\begin{Vmatrix}-\sin\varphi\\ \cos\varphi\\ 0\end{Vmatrix}$$

$$Q_{упр} = c(2R\cos\varphi - l_0)(-R\cdot 2\cos2\varphi\sin\varphi + R\cdot 2\sin2\varphi\cos\varphi) =$$

$$= 2Rc(2R\cos\varphi - l_0)(\sin2\varphi\cos\varphi - \sin\varphi\cos2\varphi) =$$

$$= 2Rc(2R\cos\varphi - l_0)\sin\varphi$$

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + x^2\dot{\varphi}^2) = 2mR^2\sin^2\varphi\,\dot{\varphi}^2 + 2mR^2\cos^2\varphi\,\dot{\varphi}^2 = 2mR^2\dot{\varphi}^2$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial\varphi} = Q_{пер} + Q_{mg} + Q_{упр}$$

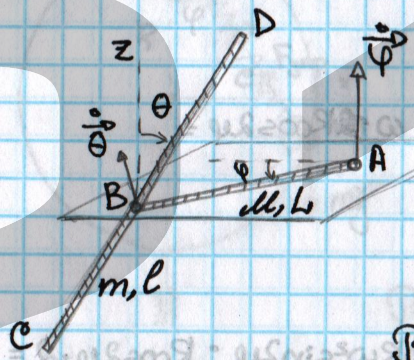
$$4mR^2\ddot{\varphi} = 2mR^2\left(\omega^2\sin2\varphi\cos2\varphi - \frac{g}{R}\sin2\varphi + \frac{c}{m}\left(2\cos\varphi - \frac{l_0}{R}\right)\sin\varphi\right)$$

Ответ: $2\ddot{\varphi} = \frac{1}{2}\omega^2\sin(4\varphi) - \frac{g}{R}\sin(2\varphi) + \frac{c}{m}\left(2\cos\varphi - \frac{l_0}{R}\right)\sin\varphi$

№12.73

Дано: M, L, m, l,

A неподвижна, B – середина CD, CD – в плоскости, проходящей через AB



Решение:

Обобщённые координаты: φ и θ.

Действует одна потенциальная сила, она компенсируется $\Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = 0$

$$T = \frac{1}{2}\frac{1}{3}ML^2\dot\varphi^2 + \frac{1}{2}mL^2\dot\varphi^2 + \frac{1}{12}ml^2\dot\theta^2 + \frac{1}{2}J_{Oz}\dot\varphi^2$$

$$J_{Oz} = \int\limits_{\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \rho\, dx \cdot x^2\sin^2\theta = \frac{m}{l}\sin^2\theta\cdot\frac{l^3}{3\cdot 8}\cdot 2 = \frac{1}{12}ml^2\sin^2\theta$$

$$T = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}ML^2 + mL^2 + \frac{1}{12}ml^2\sin^2\theta\right)\dot\varphi^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{12}ml^2\dot\theta^2$$

~~Ур-ия~~ Лагранжа:

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0,\quad \frac{\partial T}{\partial \dot\varphi} = \left(\frac{1}{3}ML^2 + mL^2 + \frac{1}{12}ml^2\sin^2\theta\right)\dot\varphi$$

$$\cancel{\left(\frac{1}{3}ML^2+mL^2+\frac{1}{12}ml^2\sin^2\theta\right)\dot\varphi=const}\ 0$$

$$\left(\frac{1}{3}ML^2+mL^2+\frac{1}{12}ml^2\sin^2\theta\right)\dot\varphi=const$$

$T=L$ не зависит явно от $t \Rightarrow H=\sum \frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\dot q_i - L = const$

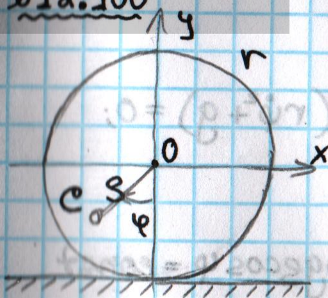
$$H=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}ML^2+mL^2+\frac{1}{12}ml^2\sin^2\theta\right)\dot\varphi^2+\frac{1}{2}\frac{1}{12}ml^2\dot\theta^2=const$$

Ответ. интегралы:

$$\left(\frac{1}{3}ML^2+mL^2+\frac{1}{12}ml^2\sin^2\theta\right)\dot\varphi=const=C_\varphi$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{C_\varphi^2}{\frac{1}{3}ML^2+mL^2+\frac{1}{12}ml^2\sin^2\theta}+\frac{1}{2}\frac{ml^2}{12}\dot\theta^2=H=const.$$

№12.100



Дано: $J_{Oz}=J,\ s,\ m,\ r$

Составить уравнение Лагранжа, найти 1-ый интеграл.

Решение:

$$J_{Cz}=J_{Oz}-ms^2$$

$$\vec r^{\,C}_{отн}=\begin{Vmatrix}-s\sin\varphi\\-s\cos\varphi\end{Vmatrix}\Rightarrow \vec v^{\,C}_{отн}=-s\dot\varphi\begin{Vmatrix}\cos\varphi\\-\sin\varphi\end{Vmatrix}$$

$$\vec v_C=\begin{Vmatrix}r\dot\varphi\\0\end{Vmatrix}+\begin{Vmatrix}-s\dot\varphi\cos\varphi\\s\dot\varphi\sin\varphi\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}r-s\cos\varphi\\s\sin\varphi\end{Vmatrix}\dot\varphi$$

$$T=\frac{1}{2}J_{Cz}\dot\varphi^2+\frac{1}{2}mv_C^2=\frac{1}{2}(J-m\rho^2)\dot\varphi^2+\frac{1}{2}m(r^2+\rho^2-2r\rho\cos\varphi)\dot\varphi^2$$

$$=\frac{1}{2}(J+mr^2-2m\rho r\cos\varphi)\dot\varphi^2$$

$$\Pi=-mg\rho\cos\varphi$$

$$L=\frac{1}{2}(J+mr^2-2m\rho r\cos\varphi)\dot\varphi^2+mg\rho\cos\varphi$$

$$\frac{\partial L}{\partial\dot\varphi}=(J+mr^2-2m\rho r\cos\varphi)\dot\varphi$$

$$\frac{\partial L}{\partial\varphi}=+m\rho r\sin\varphi\cdot\dot\varphi^2-mg\rho\sin\varphi$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot\varphi}-\frac{\partial L}{\partial\varphi}=0$$

$$(J+mr^2-2m\rho r\cos\varphi)\ddot\varphi+2m\rho r\sin\varphi\,\dot\varphi^2-m\rho r\sin\varphi\,\dot\varphi^2+$$

$$+mg\rho\sin\varphi=0$$

$$(J+mr^2-2m\rho r\cos\varphi)\ddot\varphi+m\rho\sin\varphi(r\dot\varphi^2+g)=0;$$

$$H=\frac{\partial L}{\partial\dot\varphi}\dot\varphi-L=const$$

$$\frac{1}{2}(J+mr^2-2m\rho r\cos\varphi)\dot\varphi^2-mg\rho\cos\varphi=const$$

<u>Ответ</u>: $(J+mr^2-2m\rho r\cos\varphi)\ddot\varphi+m\rho\sin\varphi(r\dot\varphi^2+g)=0$

$\frac{1}{2}(J+mr^2-2m\rho r\cos\varphi)\dot\varphi^2-mg\rho\cos\varphi=H=const.$