1 неделя

№15.45(1,8)

1) Вычислить $\begin{Vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{Vmatrix}^{-1}$

$$\left\|\begin{array}{cc|cc} 3 & 5 & 1 & 0 \\ 5 & 9 & 0 & 1 \end{array}\right\| \sim \left\|\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 5 & 9 & 0 & 1 \end{array}\right\| \sim \cancel{\left\|\begin{array}{cc} 1 & \frac{5}{3} \\ 5 & 9 \end{array}\right\|} \left\|\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & -\frac{5}{3} & 1 \end{array}\right\| \sim \left\|\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \end{array}\right\| \sim$$

$$\sim \left\|\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{9}{2} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \end{array}\right\| \Rightarrow \begin{Vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{Vmatrix}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{Vmatrix} 9 & -5 \\ -5 & 3 \end{Vmatrix}$$

8) Вычислить $\begin{Vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{Vmatrix}^{-1}$

$$\left\|\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right\| \sim \left\|\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 3 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right\| \sim \left\|\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 3 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 3 & 3 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \end{array}\right\| \sim$$

$$\sim \left\|\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} \end{array}\right\| \sim \left\|\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} \end{array}\right\| \Rightarrow \begin{Vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{Vmatrix}^{-1} = \frac{1}{9}\begin{Vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{Vmatrix}$$

№15.48(1,3,6)

Проверить, справедливо ли тождество:

1) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

$a^T_{ij} = a_{ji}$, $\quad a^{-1}_{ij} = \dfrac{(-1)^{i+j} M_{ji}}{\det A}$

$$\left((A^T)^{-1}\right)_{ij} = \frac{(-1)^{i+j} M^T_{ji}}{\det A^T} = \frac{(-1)^{i+j} M_{ij}}{\det A}$$

$$\left((A^{-1})^T\right)_{ij} = (A^{-1})_{ji} = \frac{(-1)^{i+j} M_{ij}}{\det A}$$

$\Rightarrow (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

3) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

$$\left.\begin{aligned}(AB)\cdot(B^{-1}A^{-1}) &= A\cdot(BB^{-1})A^{-1} = (AE)A^{-1} = AA^{-1} = E\\ (B^{-1}A^{-1})\cdot(AB) &= B^{-1}(A^{-1}A)B = (B^{-1}E)B = B^{-1}B = E\end{aligned}\right| \Rightarrow$$

$\Rightarrow (AB)\cdot(B^{-1}A^{-1}) = (B^{-1}A^{-1})\cdot(AB) = E \Rightarrow$

$\Rightarrow (B^{-1}A^{-1}) = (AB^{-1})$

6) $(A+B)^{-1} = A^{-1}+B^{-1}$

Пусть $A = B = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$

$A+B = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}\cdot 2 = \begin{Vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{Vmatrix}$

$$\left.\begin{aligned}(A+B)^{-1} &= \frac{1}{2\cdot 2-0}\begin{Vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{Vmatrix}\\ A^{-1}+B^{-1} &= A+B = \begin{Vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{Vmatrix}\end{aligned}\right| \Rightarrow (A+B)^{-1} \neq A^{-1}+B^{-1} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ тождество не является истинным всегда.

№15.65 (12)

Найти X:

$$\begin{Vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{Vmatrix}\cdot X = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{Vmatrix}$$

Найдём $\begin{Vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{Vmatrix}^{-1}$:

$$\left\Vert\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right\Vert \sim \left\Vert\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right\Vert \sim \left\Vert\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{array}\right\Vert$$

211
Донатик

$$A=\begin{Vmatrix}2&-1&0\\0&2&-1\\-1&-1&1\end{Vmatrix}\qquad B=\begin{Vmatrix}1&0\\0&1\\-1&-1\end{Vmatrix}$$

$(A|B)\sim(E|X)$

$$\left\Vert\begin{array}{ccc|cc}2&-1&0&1&0\\0&2&-1&0&1\\-1&-1&1&-1&-1\end{array}\right\Vert\sim\left\Vert\begin{array}{ccc|cc}1&0&0&0&0\\0&2&-1&0&1\\0&1&1&-1&-1\end{array}\right\Vert\sim\left\Vert\begin{array}{ccc|cc}1&0&0&0&0\\0&0&1&-2&-1\\0&1&-1&1&1\end{array}\right\Vert\sim$$

$$\sim\left\Vert\begin{array}{ccc|cc}1&0&0&0&0\\0&1&0&-1&0\\0&0&1&-2&-1\end{array}\right\Vert\Rightarrow X=\begin{Vmatrix}0&0\\-1&0\\-2&-1\end{Vmatrix}$$

№16.18 (22, 28)

Вычислить ранг матрицы:

22) $$\begin{Vmatrix}2&4&6&1\\1&2&3&1\\-3&-6&-9&1\\1&2&3&1\end{Vmatrix}\sim\begin{Vmatrix}1&2&3&1\\0&0&0&-1\\0&0&0&4\\0&0&0&0\end{Vmatrix}\sim\begin{Vmatrix}1&2&3&1\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{Vmatrix}\sim$$

$$\sim\left\Vert\begin{array}{cc|cc}1&1&3&2\\0&1&0&0\\\hline 0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right\Vert\Rightarrow rg\,A=2$$

28) $$\begin{Vmatrix}0&1&1&\cdots&1&1\\-1&0&1&\cdots&1&1\\-1&-1&0&\cdots&1&1\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\-1&-1&-1&\cdots&0&1\\-1&-1&-1&\cdots&-1&0\end{Vmatrix}\sim\begin{Vmatrix}1&1&1&\cdots&1&0\\0&1&2&\cdots&2&1\\0&0&1&\cdots&2&1\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1&1\\0&1&1&\cdots&1&1\end{Vmatrix}$$

211
Донатик

Вычитаем из $\vec{a_n}$ $\vec{a_2}$:

$\vec{a_n} \to \|0\,0\,{-1} \cdots {-1}\,0\| \to \|0\,0\,1 \cdots 1\,0\|$

Вычитаем из $\vec{a_n}$ $\vec{a_3}$:

$\vec{a_n} \to \|0\,0\,0\,{-1} \cdots {-1}\,{-1}\| \to \|0\,0\,0\,1 \cdots 1\,1\|$

И так далее, последний шаг:

Если $n-1$ - чётное, то $\vec{a_n} \to \|0\,0\,0 \ldots 0\,0\|$

Если $n-1$ - нечётное, то $\vec{a_n} \to \|0\,0\,0 \cdots 0\,1\|$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \operatorname{rg} A = \begin{cases} n, \text{ если } n \,\vdots\, 2 \\ n-1, \text{ если } n \,\not\vdots\, 2 \end{cases}$

№16.19 (3,5)

Вычислить ранг матрицы:

3) $\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & \alpha \\ 1 & \alpha^2 & \alpha^2 \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha-1 & \alpha-1 \\ 0 & \alpha^2-1 & \alpha^2-1 \end{Vmatrix}$

Если $\alpha = 1$, то $\sim \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \Rightarrow \operatorname{rg} A = 1$

Если $\alpha = -1$, то $\sim \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \Rightarrow \operatorname{rg} A = 2$

В остальных случаях: $\sim \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha-1 & \alpha-1 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \Rightarrow \operatorname{rg} A = 2$

$\operatorname{rg} A = \begin{cases} 1, \text{ если } \alpha = 1 \\ 2, \text{ если } \alpha \neq 1 \end{cases}$

211

Донатик

5) $\begin{Vmatrix}1&\lambda&-1&2\\2&-1&\lambda&5\\1&10&-6&1\end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix}1&\lambda&-1&2\\0&-1-2\lambda&\lambda+2&1\\0&10-\lambda&-5&-1\end{Vmatrix}$

$1+2\lambda=0 \Rightarrow \sim \begin{Vmatrix}1&-\frac{1}{2}&-1&2\\0&0&\frac{3}{2}&1\\0&\frac{21}{2}&-5&-1\end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix}1&-\frac{1}{2}&-1&2\\0&\frac{21}{2}&-5&-1\\0&0&\frac{3}{2}&1\end{Vmatrix} \Rightarrow rgA=3$

$1+2\lambda\neq0 \Rightarrow$

$$\sim\begin{Vmatrix}1&-\frac{1}{2}&-1&2\\0&1&-\frac{\lambda+2}{1+2\lambda}&-\frac{1}{1+2\lambda}\\0&0&-5+(10-\lambda)\cdot\frac{\lambda+2}{1+2\lambda}&-1+(10-\lambda)\cdot\frac{1}{1+2\lambda}\end{Vmatrix}=$$

$$=\begin{Vmatrix}1&-\frac{1}{2}&-1&2\\0&1&-\frac{\lambda+2}{1+2\lambda}&\frac{-1}{1+2\lambda}\\0&0&\frac{15-2\lambda-\lambda^2}{1+2\lambda}&\frac{9-3\lambda}{1+2\lambda}\end{Vmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{Vmatrix}1&-\frac{1}{2}&-1&2\\0&1&-\frac{\lambda+2}{1+2\lambda}&\frac{-1}{1+2\lambda}\\0&0&\lambda^2+2\lambda-15&3(\lambda-3)\end{Vmatrix}$$

$\lambda^2+2\lambda-15=0 \Rightarrow \lambda=\frac{-2\pm8}{2}=-5;\ 3 \Rightarrow rgA=2$ при $\lambda=3$

$$rgA=\begin{cases}2, \text{ при } \lambda=3\\3, \text{ при } \lambda\neq3\end{cases}$$

Т1

$\begin{Vmatrix}2&4&6&1\\1&2&3&1\\-3&-6&-9&1\\1&2&3&1\end{Vmatrix}$ ~~минор~~ $rgA=2 \Rightarrow$ системы базисных ~~вв~~ строк и столбцов состоят из 2-ух элементов

211
Донатик

Столбцы $\begin{Vmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{Vmatrix}$ и $\begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{Vmatrix}$ - линейно независимы =>

=> базисные для данной матрицы.

Строки $\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \end{Vmatrix}$ и $\begin{Vmatrix} 2 & 4 & 6 & 1 \end{Vmatrix}$ - линейно независимы

=> базисные для данной матрицы

Базисный минор: $\begin{Vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix}$

211

Донатик

№17.1 (3)

Выписать расширенную матрицу, решить:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 3 \\ x_1 + x_3 = 3 \end{cases}$$

$$\tilde{A} = \left\| \begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right\| \sim \left\| \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -5 & -6 \\ 0 & 1 & -3 & -4 \end{array} \right\| \sim \left\| \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -5 & -6 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array} \right\| \sim \left\| \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right\| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\| \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{matrix} \right\|$$

№18.1 (2, 10)

Выписать матрицу коэффициентов, решить:

2) $x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$

$A = \| 1 \ \ -1 \ \ 2 \|$

$rgA = r = 1 < 3 = n \Rightarrow$ бесконечно много решений

Базисная: x_1

$x_1 = x_2 - 2x_3$

$$\left\| \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{matrix} \right\| = \overset{h_2}{\cancel{x_2}} \left\| \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{matrix} \right\| + \overset{h_3}{\cancel{x_3}} \left\| \begin{matrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{matrix} \right\|, \text{ где } h_2, h_3 \in \mathbb{R}$$

211
Донатик

10) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_5 = 0 \end{cases}$

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & -1 \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 3 & -1 \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 1 \end{Vmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{Vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 1 \end{Vmatrix}$$

$r = rg A = 2 < 5 = n \Rightarrow$ бесконечно много решений

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x_3 - 2x_4 + x_5 \\ x_2 &= -2x_3 + 3x_4 - x_5 \end{aligned}\right\} \text{– базисные}$$

$$\begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{Vmatrix} = h_3 \begin{Vmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix} + h_4 \begin{Vmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix} + h_5 \begin{Vmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix}, \text{ где } h_3, h_4, h_5 \in \mathbb{R}$$

№19.6 (4, 21, 23)

~~Решить~~ Составить и решить систему линейных уравнений по расширенной матрице:

4) $\left\Vert\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 0 & 2 \end{array}\right\Vert \sim \left\Vert\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \end{array}\right\Vert \sim \left\Vert\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right\Vert \Rightarrow$

$\Rightarrow$ решений нет, система несовместна

21) $\left\Vert\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 7 & -3 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right\Vert \sim \left\Vert\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 7 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 8 & -4 & 2 \end{array}\right\Vert \sim \left\Vert\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 7 & -3 & 2 \\ 0 & -3 & -12 & +6 & -3 \\ 0 & 1 & 4 & -2 & 1 \end{array}\right\Vert \sim$

Донатик

$$\sim\left\|\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 7 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right\| \sim \left\|\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right\|$$

$rg A = 2 < 3 = n \Rightarrow$ бесконечно много решений

$$\begin{cases} x_1 = -3x_3 + x_4 + 1 \\ x_2 = -4x_3 + 2x_4 + 1 \end{cases}$$ – базисные переменные

$$\left\|\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array}\right\| = h_3 \left\|\begin{array}{c} -3 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{array}\right\| + h_4 \left\|\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{array}\right\| + \left\|\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right\|,$$ где $h_3, h_4 \in \mathbb{R}$

23) $$\left\|\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & -3 & 6 & -5 & 2 \\ 8 & -1 & 2 & 3 & -2 \end{array}\right\| \sim \left\|\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & -8 & 9 & -1 \\ 0 & -11 & 22 & -23 & 4 \\ 0 & -33 & 66 & -69 & 0 \end{array}\right\| \sim \left\|\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & -8 & 9 & -1 \\ 0 & -11 & 22 & -23 & 4 \\ 0 & -11 & 22 & -23 & 0 \end{array}\right\| \sim$$

$$\sim \left\|\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & -8 & 9 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & \frac{23}{11} & 0 \end{array}\right\| \sim \left\|\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & -8 & 9 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & \frac{23}{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right\| \Rightarrow rg\tilde{A} = rgA + 1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ решений нет, система несовместна.

4) $$\left\|\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 0 & 2 \end{array}\right\| \sim \left\|\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \end{array}\right\| \sim \left\|\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right\|$$

$rg A = 2 < 3 = n \Rightarrow$ бесконечно много решений

x_1 и x_2 – базисные

$$\left\|\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array}\right\| = h_3 \left\|\begin{array}{c} -2 \\ -2 \\ 1 \end{array}\right\| + \left\|\begin{array}{c} -1 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right\|,$$ где $h_3 \in \mathbb{R}$

211
Донатик

№19.7 (2)

Составить систему, найти значения параметра, при которых система совместна и решить её:

$$\left\|\begin{array}{ccc|c} -2 & 4 & -3 & \lambda \\ 4 & 4 & 7 & 5 \\ 1 & 4 & 2 & 7 \end{array}\right\| \sim \left\|\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 7 \\ 0 & -12 & -1 & -23 \\ 0 & 12 & 1 & 14+2\lambda \end{array}\right\| \sim \left\|\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 7 \\ 0 & 12 & 1 & +23 \\ 0 & 0 & 0 & 2(\lambda-9) \end{array}\right\|$$

Система несовместна, если $\lambda - 9 \neq 0$

Совместна: $\lambda = 9$:

$$\left\|\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 7 \\ 0 & 4 & \frac{1}{3} & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right\| \sim \left\|\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{5}{3} & 4 \\ 0 & 1 & \frac{1}{12} & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right\|$$

$$\left\|\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array}\right\| = h_3 \left\|\begin{array}{c} -\frac{5}{3} \\ -\frac{1}{12} \\ 1 \end{array}\right\| + \left\|\begin{array}{c} 4 \\ \frac{3}{4} \\ 0 \end{array}\right\|, \text{ где } h_3 \in \mathbb{R}$$

$$\left\|\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 7 \\ 0 & 4 & \frac{1}{3} & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right\| \sim \left\|\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{5}{3} & 7 \\ 0 & 1 & \frac{1}{12} & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right\|$$

$$\left\|\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array}\right\| = h_3 \left\|\begin{array}{c} -\frac{5}{3} \\ -\frac{1}{12} \\ 1 \end{array}\right\| + \left\|\begin{array}{c} 7 \\ \frac{3}{4} \\ 0 \end{array}\right\|$$

$$\left\|\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 7 \\ 0 & 4 & \frac{1}{3} & +\frac{23}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right\| \sim \left\|\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{5}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{12} & +\frac{23}{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right\|$$

$$\left\|\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array}\right\| = h_3'' \left\|\begin{array}{c} -\frac{5}{3} \\ -\frac{1}{12} \\ 1 \end{array}\right\| + \left\|\begin{array}{c} -\frac{2}{3} \\ +\frac{23}{12} \\ 0 \end{array}\right\| = (h_3' - 1) \left\|\begin{array}{c} -\frac{5}{3} \\ -\frac{1}{12} \\ 1 \end{array}\right\| + \left\|\begin{array}{c} -\frac{2}{3} \\ +\frac{23}{12} \\ 0 \end{array}\right\| =$$

211

Донатик

$$= -12h_3 \begin{Vmatrix} -\frac{5}{3} \\ -\frac{1}{12} \\ 1 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 1 \\ +2 \\ -1 \end{Vmatrix} = h_3 \begin{Vmatrix} +20 \\ +1 \\ -12 \end{Vmatrix} + \cancel{\begin{Vmatrix} 13 \\ 2 \\ 1 \end{Vmatrix}} \begin{Vmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{Vmatrix}, \text{ где } h_3 \in \mathbb{R}$$

№ 19.10

$$\left\Vert \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} & b_n \end{array} \right\Vert, \text{ где}$$

$$\begin{Vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{Vmatrix} = \sum_{j=1}^{m} \begin{Vmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{Vmatrix} \Rightarrow b_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}$$

Рассмотрим i-е уравнение:

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}.$$

Пусть $x_j = 1 \ \forall j$, тогда уравнение выполнено

В силу произвольности i: $(1, 1, \ldots 1)$ - решение любого из уравнений системы $\Rightarrow$

$\Rightarrow (1, 1, \ldots 1)$ - частное решение системы.

№ 19.13

Док-ть, что если столбцы основной матрицы линейно независимы, то система имеет не более одного решения

211
Донатик

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} a_{12} \dots a_{1m} \\ \vdots \\ a_{n1} a_{n2} \dots a_{nm} \end{Vmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{Vmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{Vmatrix}$$

Пусть $(x_1, x_2, \dots x_m)$ - решение

$$\vec{a_j} = \begin{Vmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{Vmatrix} \Rightarrow \sum_{j=1}^{m} x_j \vec{a_j} = \vec{b} \quad (1)$$

Пусть есть решение $(x_1', x_2', \dots x_m')$, где $\exists j: x_j' \neq x_j$

Тогда $\sum_{j=1}^{m} x_j' \vec{a_j} = \vec{b}$ (2)

$(2) - (1) \Rightarrow \sum_{j=1}^{m} (x_j' - x_j)\vec{a_j} = 0$

Обозначим $\lambda_j = x_j' - x_j$, тогда $\sum_{j=1}^{m} \lambda_j^2 \neq 0$ $\Big| \Rightarrow$

$\Rightarrow \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \vec{a_j} = 0$ и $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \dots + \lambda_m^2 \neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \vec{a_1}, \vec{a_2}, \dots \vec{a_m}$ - линейно зависимы ч.т.д.

№19.14.

Доказать, что если строки основной матрицы линейно независимы, то система уравнений совместна при любом столбце свободных членов.

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} a_{12} \dots a_{1m} \\ a_{21} a_{22} \dots a_{2m} \\ \vdots \\ a_{n1} a_{n2} \dots a_{nm} \end{Vmatrix} \quad \tilde{A} = \left\Vert \begin{array}{c|c} a_{11} a_{12} \dots a_{1m} & b_1 \\ a_{21} a_{22} \dots a_{2m} & b_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_{n1} a_{n2} \dots a_{nm} & b_n \end{array} \right\Vert$$

Пусть система несовместна, тогда

211
Донатик

$$\tilde{A} \sim \left\|\begin{array}{cc|c|c} 1 & * & * & * \\ & \ddots & & \\ 0 & 1 & & \\ \hline & 0 & 0 & x \end{array}\right\|, \text{ где } x \neq 0$$

Значит $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{\tilde{a}_i} = \|0\,0 \dots 0 \,|\, x\|$

$\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{\tilde{a}_i} = \left\| \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{a_i} \,\middle|\, \sum\limits_{i=1}^{n} b_i \right\|$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{a_i} = 0$, где $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \neq 0 \Rightarrow$ строки A линейно зависимы $\overset{0}{x}$ $\Rightarrow$ система совместна.

№18.17 (2)

Найти хотя бы одну однородную систему линейных уравнений с фундаментальной матрицей:

$$A = \left\|\begin{matrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ -4 & -1 \end{matrix}\right\|$$

$$\left\|\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{matrix}\right\| = h_1 \left\|\begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -4 \end{matrix}\right\| + h_2 \left\|\begin{matrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{matrix}\right\| + \left\|\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}\right\| \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = h_1 \\ x_2 = h_1 - h_2 \\ x_3 = h_2 \\ x_4 = -4h_1 - h_2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ 4x_1 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

211
Донатик

3 неделя №20.3 ②

Выяснить, является ли подпространством множество векторов в n-мерном пространстве. Если да, то найти его размерность:

① Множество X векторов вида $\vec{x} = \|x, x, \dots x\|^T$

~~Аксиомы~~

1) $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$ — очевидно из свойств чисел

2) $\vec{x} + (\vec{y} + \vec{z}) = (\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z}$ — также очевидно из свойств чисел

3) $\vec{0} \in X$, т.к. все его координаты равны

4) $\forall \vec{x} = \|x, \dots x\|^T \in X \quad \exists (-\vec{x}) = \|-x, \dots -x\|^T$

Т.к. все координаты $(-\vec{x})$ равны между собой, то $(-\vec{x}) \in X$

Аксиомы (5-8) выполняются очевидно, так как X - подмножество пространства.

Рассмотрим $\vec{e} = \|1 1 \dots 1\|^T$

$\forall \vec{x} \in X \quad \exists \lambda = \frac{|\vec{x}|}{|\vec{e}|} : \vec{x} = \lambda \vec{e}$

$\vec{e}$ - один вектор => он линейно независим

=> $\{\vec{e}\}$ - базис => $\dim X = 1$

211
Донатик

② $X = \{ \vec{x} \mid \vec{x} = \|0 \; x_2 \dots x_n\|^T \}$

Аксиомы выполняются очевидно, так как $\vec{x}$ - элемент линейного пространства, $\vec{0} \in X$

Рассмотрим вектора $\vec{e_2} = \|010\dots0\|^T$, $\vec{e_3} = \|001\dots0\|^T$, ... $\vec{e_n} = \|000\dots1\|^T$ - линейно независимы

$\forall \vec{x} \in X$ $\cancel{\exists \; x_2, \dots x_n : x_i = \dots}$ $: \vec{x} = \|0 \; x_2 \dots x_n\|^T :$

$\vec{x} = \sum_{i=2}^{n} x_i \vec{e_i} \Rightarrow \{\vec{e_2}, \dots \vec{e_n}\}$ - базис $\Rightarrow \dim X = n-1$

③ $X = \{ \vec{x} \mid \vec{x} = \|x_1 \dots x_n\|^T, \sum_{i=1}^{n} x_i = 0$

1) $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$ - очевидно выполняется.

2) $\vec{x} + (\vec{y} + \vec{z}) = (\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z}$ - очевидно выполняется

3) $\exists \, \vec{0} = \|0 \dots 0\|^T \; \sum_{i=1}^{n} 0 = 0 \Rightarrow \vec{0} \in X$; $\forall \vec{x} \mapsto \vec{x} + \vec{0} = \vec{x}$

4) $\forall \vec{x} \in X : \vec{x} = \|x_1 \dots x_n\|^T \; \exists \, (-\vec{x}) = \|-x_1 \dots -x_n\|^T$

$\sum_{i=1}^{n} (-x_i) = -\sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \Rightarrow (-\vec{x}) \in X$, $\vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{0}$

(5-8) - выполняются очевидно

~~Рассмотрим вектора~~ $\cancel{\vec{e_1} = \|100\dots0\|^T, \dots \vec{e_{n-1}} = \|000\dots10\|^T}$

Рассмотрим вектора $\vec{e_1} = \|1 \; -1 \; 0 \; 0 \dots 0 \; 0\|^T$, $\vec{e_2} = \|0 \; 1 \; -1 \; 0 \dots 0 \; 0\|^T$, ... $\vec{e_{n-1}} = \|0 \; 0 \; 0 \; 0 \dots 1 \; -1\|^T$

$\vec{e_i} \in X$, $\{\vec{e_i}\}$ - линейно независимая

211

Донатик

система векторов

$x_1' = x_1$

$x_2 = -x_1' + x_2' \Rightarrow x_2' = x_1 + x_2$

$\vdots$

$x_i = -x_{i-1}' + x_i' \Rightarrow x_i' = \sum_{k=1}^{i} x_i$

Таким образом $\forall \vec{x} \in X: \exists x_1' \ldots x_{n-1}': \vec{x} = \sum_{i=1}^{n-1} x_i' \vec{e_i} \Rightarrow$

$\Rightarrow \{\vec{e_1} \ldots \vec{e_{n-1}}\}$ – базис $\Rightarrow \dim X = n-1$

(4) $X = \{\vec{x} \mid \vec{x} = \|x_1 \ldots x_n\|, \sum_{i=1}^{n} x_i = 1\}$

Не является подпространством, т.к. $\vec{0} \notin X$.

Ответ: 1) подпространство, $\dim X = 1$

2) подпространство, $\dim X = n-1$

3) подпространство, $\dim X = n-1$

4) не подпространство

№20.6 (4,6)

Является ли данное множество матриц $A_{n \times n}$ линейным подпространством в пространстве всех матриц порядка n:

4) Множество X симметрических матриц.

211

Донатик

$A_{n\times n} \in X \Rightarrow A = \|a_{ij}\|$, где $\forall i,j \in \overline{1\ldots n} \mapsto$

$a_{ij} = a_{ji}$

Проверка аксиом:

1. $A+B=B+A$ – выполнено, т.к. подмножество линейного пространства.
2. $A+(B+C)=(A+B)+C$ – выполнено, т.к. подмножество линейного пространства.
3. $\exists\, O = \|0\| : \forall A \in X \mapsto A+O=A$
4. $\forall A \in X \mapsto -A=(-1)\cdot A \in X$
5. $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$ – выполнено, т.к. является подмножеством линейного пространства.

(6-8) – выполнены аналогично.

Рассмотрим матрицы: K_{ij}, такие что $(K_{ij})_{ij} = (K_{ij})_{ji} = 1$, $(K_{ij})_{em}=0$, если $e,m \neq i,j$

Очевидно, $\forall A \in X\ \exists\ x_{11}, x_{12}, \ldots x_{1n}, x_{22}, \ldots x_{2n} \ldots x_{nn}$:

$A = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} x_{ij} K_{ij} \Rightarrow \{K_{ij} \mid 1 \le i \le j \le n\}$ – базис $\Rightarrow$

$\Rightarrow \dim X = \dfrac{n(n+1)}{2}$

Донатик

б) Множество X вырожденных матриц.

Пусть $n=2$. Рассмотрим $A=\begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$ и $B=\begin{Vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix}$

$\det A = 0 = \det B \Rightarrow A, B \in X$.

$A+B=\begin{Vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{Vmatrix}$ $\det(A+B)=1 \rightarrow A+B \notin X$ $\Bigg| \Rightarrow$

$\Rightarrow X$ не является линейным подпространством

Ответ: 4) подпространство, $\dim X = \frac{n(n+1)}{2}$

б) не подпространство.

№20.7 (7, 8, 10)

Образует ли данное множество функций на отрезке $[a,b]$ линейное пространство относительно обычных операций сложения и умножения на число:

~~7) $X=\{f \mid f(a)=0\}$~~

~~1. $f(x)+g(x)=g(x)+f(x)$~~

~~2. $f(x)+(g(x)+h(x))=(f(x)+g(x))+h(x)$~~

~~вы~~ Множество функций (без дополнительных условий) образуют линейное пространств относительно данных операций (следует из арифметических свойств).

Будем доказывать для следующих подмножеств, что они являются или не являются линейными подпространствами:

7) $X = \{f \mid f(a) = 0\}$

1. $f, g \in X$ $\cancel{f+g=F}$ $F(x) = f(x) + g(x)$

$F(a) = f(a) + g(a) = 0 \Rightarrow F \in X$

2. $f \in X$, $\lambda \in \mathbb{R}$ $F(x) = \lambda f(x)$

$F(a) = \lambda f(a) = 0 \Rightarrow F \in X$

3. $0 \in X$ (здесь $0 = \{0(x) = 0\}$)

Таким образом X является линейным пространством

8) $X = \{f \mid f(a) = 1\}$

Пусть $0 (\cancel{0(x)=0}) \in X$. Тогда $\exists g(x) \in X$

$\forall f \in X \longmapsto f(x) + g(x) = f(x) \Rightarrow g(x) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow g(a) = 0 \Rightarrow g \notin X$

Полученное противоречие говорит о том, что $\cancel{0 \notin X}$ $\nexists 0 \Rightarrow X$ - не линейное

211
Донатик

пространство.

10) $X = \{f \mid \forall x_1, x_2 \in [a,b]: x_2 > x_1 \mapsto f(x_2) > f(x_1)\}$

Аналогично пункту 8): $g(x)=0$ не является монотонно возрастающей =>

=> ~~8~~ 0 не принадлежит X =>

=> X - не линейное пространство.

Ответ: 4) да; 8) нет; 10) нет.

№20.8 (1)

Доказать, что $\forall n \in \mathbb{N}$ множество $\mathcal{P}^{(n)}$ образует конечномерное линейное пространство. Найти размерность и указать базис.

$P(x) = \sum_{i=0}^{n} p_i x^i$, $P(x) \in \mathcal{P}^{(n)}$

1. $P, Q \in \mathcal{P}^{(n)}$ $P(x) + Q(x) = \sum_{i=0}^{n} (p_i + q_i) x^i$ =>

=> $P(x) + Q(x) \in \mathcal{P}^{(n)}$

2. $P \in \mathcal{P}^{(n)}$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\lambda P(x) = \lambda \sum_{i=0}^{n} p_i x^i = \sum_{i=0}^{n} (p_i \lambda) x^i \in \mathcal{P}^{(n)}$$

3. 8 аксиом выполнены так как они справедливы для любых функций

(1-3) => $\mathcal{P}^{(n)}$ - линейное пространство

Базис в $\mathcal{P}^{(n)}$: $\{x^0, x^1, \ldots x^n\}$

Докажем это: $P(x) \in \mathcal{P}^{(n)} \Rightarrow P(x) = \sum_{i=0}^{n} p_i x^i \Rightarrow$

$\Rightarrow \{x^0, \ldots x^n\}$ - базис.

Размерность: $\dim \mathcal{P}^{(n)} = n+1$.

№20.14 (б)

Найти размерность и базис линейной оболочки $\mathcal{L}(c_{196}, c_{198}, c_{202})$, где

$$c_{196} = \begin{Vmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{Vmatrix}, \quad c_{198} = \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{Vmatrix}, \quad c_{202} = \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{Vmatrix}$$

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

$\dim(\mathcal{L}(c_{196}, c_{198}, c_{202})) = \operatorname{rg} A = 2$

Базис: $\{c_{196}, c_{198}\}$

№20.18

Док-ть, что A_5, A_{10}, A_{13} и A_6 образуют базис в пространстве матриц порядка 2. Найти координатный столбец A_{26}.

21

Донатик

$A_5 = \left\| \begin{matrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{matrix} \right\|$ $A_{10} = \left\| \begin{matrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{matrix} \right\|$ $A_{13} = \left\| \begin{matrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{matrix} \right\|$ $A_6 = \left\| \begin{matrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{matrix} \right\|$ $A_{26} = \left\| \begin{matrix} 5 & 14 \\ 6 & 13 \end{matrix} \right\|$

$$\left\| \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ -1 & 5 & 1 & 4 & 14 \\ 4 & 1 & 0 & 5 & 6 \\ -1 & 3 & 1 & 7 & 13 \end{array} \right\| \sim \left\| \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 7 & 2 & 7 & 19 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 2 & 10 & 18 \end{array} \right\| \sim \left\| \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -b & & \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & & & & \end{array} \right\|$$

$$\sim \left\| \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & \frac{2}{7} & 1 & \frac{19}{7} \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 5 & 2 & 10 & 18 \end{array} \right\| \sim \left\| \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \frac{3}{7} & 1 & -\frac{3}{7} \\ 0 & 1 & \frac{2}{7} & 1 & \frac{19}{7} \\ 0 & 0 & \frac{5}{7} & -3 & \frac{26}{7} \\ 0 & 0 & \frac{4}{7} & 5 & \frac{31}{7} \end{array} \right\| \sim \left\| \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 6 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & \frac{45}{7} \\ 0 & 0 & [illegible] & \frac{21}{5} & \frac{26}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{35}{4} & \frac{31}{4} \end{array} \right\| \sim$$

$$\sim \left\| \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 6 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & \frac{45}{7} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{21}{5} & \frac{26}{5} \\ 0 & 0 & 0 & & \end{array} \right\|$$

$$\left\| \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ -1 & 5 & 1 & 4 & 14 \\ 1 & 1 & 0 & 5 & 6 \\ -1 & 3 & 1 & 7 & 13 \end{array} \right\| \sim \left\| \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 7 & 2 & 7 & 19 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 2 & 10 & 18 \end{array} \right\| \sim \left\| \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 21 & 26 \\ 0 & 0 & -3 & 20 & 23 \end{array} \right\| \sim$$

$$\sim \left\| \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -19 & -20 \\ 0 & 0 & 0 & -37 & -37 \end{array} \right\| \sim \left\| \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right\| \Rightarrow A_5, A_{10}, A_{13}, A_6$$

образуют базис, координатный столбец A_{26} в этом базисе: $\left\| \begin{matrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{matrix} \right\|$

211
Донатик

№20.20

Док-ть, что многочлены $1, (t-\alpha), \dots (t-\alpha)^n$ образуют базис в пространстве многочленов степени не ~~не~~ выше n $P^{(n)}$ и найти координатный столбец произвольного многочлена $p_n(t)$

Рассмотрим $q(t) = \lambda_0 \cdot 1 + \lambda_1 \cdot (t-\alpha) + \dots + \lambda_n (t-\alpha)^n \equiv 0$

Пусть k - максимальный из номеров i, таких что $\lambda_i \neq 0$, тогда $q(t)$ - невырожденный многочлен степени k, а значит имеет не более чем k корней.

Так как $q(t) \equiv 0$, то $\forall i \in \overline{0 \dots n} \mapsto \lambda_i = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ ~~мы~~ данные многочлены линейно независимы.

Произвольный $P_n(t)$ разложим по формуле Тейлора: $P_n(t) = P_n(\alpha) + \frac{P_n'(\alpha)}{1!}(t-\alpha) + \dots + \frac{P_n^{(n)}(\alpha)}{n!}(t-\alpha)^n + r_n(t)$

По формуле Лагранжа: $r_n(t) = \frac{P_n^{(n+1)}(\xi)(t-\alpha)^{n+1}}{(n+1)!} = 0$. Таким образом $P_n(t) = \sum\limits_{i=0}^{n} P^{(i)}(\alpha) \cdot \frac{1}{i!}(t-\alpha)^i$

211

Донатик

$\{1, (t-\alpha), (t-\alpha)^2, \dots (t-\alpha)^n\}$ – образуют базис так как они линейно независимы и

$\forall P_n(t) \in \mathcal{P}^{(n)} \ \exists\, p_0, p_1 \dots p_n : P_n(t) = \sum_{i=0}^{n} p_i (t-\alpha)^i$

Координатный столбец для произвольного $P_n(t) \in \mathcal{P}^{(n)}$: $\left\| P_n(\alpha), \frac{P_n'(\alpha)}{1!}, \frac{P_n''(\alpha)}{2!}, \dots \frac{P_n^{(n)}(\alpha)}{n!} \right\|^T$

<u>№20.22(4)</u>

Найти размерность и базис линейного подпространства, заданного в некотором базисе системой линейных уравнений

$A_{391}\vec{X} = \vec{0}$

$$\begin{Vmatrix} 6 & 8 & 9 \\ 0 & 1 & 6 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Vmatrix} = \cancel{\begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix}} \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \end{Vmatrix}$$

$$\begin{Vmatrix} 6 & 8 & 9 \\ 0 & 1 & 6 \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 1 & \frac{4}{3} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 6 \end{Vmatrix} \sim \left\| \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -\frac{13}{2} \\ 0 & 1 & 6 \end{array} \right\|$$

$$\vec{X} = C_3 \begin{Vmatrix} +\frac{13}{2} \\ -6 \\ 1 \end{Vmatrix} = C_3 \begin{Vmatrix} 13 \\ -12 \\ 2 \end{Vmatrix}$$ – размерность 1,

базис: $\| 13 \ -12 \ 2 \|^T$

211
Донатик

№20.23 (и)

Составить систему линейных уравнений, определяющую линейную оболочку данной системы столбцов: C_{166}, C_{196}

$$C_{166} = \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{Vmatrix}, \quad C_{196} = \begin{Vmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{Vmatrix}; \qquad \Phi = \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{Vmatrix}$$

$\vec{x} = \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Vmatrix}$ является решением искомой системы уравнений $\Leftrightarrow \vec{x} = c_1 \cdot C_{166} + c_2 \cdot C_{196}$ (является линейной комбинацией), значит, добавление столбца $\vec{x}$ не меняет ~~матрицу Φ~~ ранг матрицы Φ

$$\left\Vert\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x_1 \\ 1 & 2 & x_2 \\ 1 & 1 & x_3 \\ 1 & 3 & x_4 \end{array}\right\Vert \sim \left\Vert\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 - x_1 \\ 0 & 0 & x_3 - x_1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2}(x_4 - x_1) \end{array}\right\Vert \sim \left\Vert\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2x_1 - x_2 \\ 0 & 1 & x_2 - x_1 \\ \hline 0 & 0 & x_3 - x_1 \\ 0 & 0 & -x_2 + \frac{1}{2}(x_4 + x_1) \end{array}\right\Vert$$

$\mathrm{rg}\,\Phi = 2$; Искомая система:

$$\begin{cases} \cancel{x_2} - x_1 + x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$$

211
Донатик

№20.29

Как изменится матрица перехода от одного базиса к другому, если:

1) поменять местами i-й и j-й вектора первого базиса

$$\|e_1' \dots e_n'\| = \|e_1 \dots \underset{j>i}{e_i \dots e_j} \dots e_n\| \cdot S = \|e_1 \dots e_j \dots e_i \dots e_n\| S_1 S,$$

здесь S_1 – матрица перехода от $\|e_1 \dots e_j \dots e_i \dots e_n\|$ к $\|e_1 \dots e_i \dots e_j \dots e_n\|$, соответственно

$$S_1 = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccc} & & & i & & j & & & \end{array} \\ \left\| \begin{array}{ccccccccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{array} \right\| \end{array}$$

Соответственно новая матрица $S' = S_1 \cdot S$

$$(S')_{mp} = \sum_{k=1}^{n} (S_1)_{mk} \cdot (S)_{kp}$$

При $m = i$ (т.е. i-ая строка новой матрицы):

$$(S')_{ip} = \sum_{k=1}^{n} (S_1)_{ik} \cdot (S)_{kp} = (S)_{jp}$$

Аналогично при $m = j$

Ответ: i-ая и j-ая строки поменяются

Донатик

2) Поменять местами i-ый и j-ый вектора второго базиса

Аналогично пункту 1: $S' = S \cdot S_1$, соответственно проводя зеркальное рассуждение: $(S')_{mi} = (S)_{mj}$

Ответ: i-ый и j-ый столбцы поменяются местами

3) расположить вектора обоих базисов в обратном порядке

$\|e'_n \dots e'_1\| = \|e'_1 \dots e'_n\| S_1 = \|e_1 \dots e_n\| S S_1 =$

$= \|e_n \dots e_1\| S_2 S S_1$, где S_1 - матрица перехода от $\|e'_1 \dots e'_n\|$ к $\|e'_n \dots e'_1\|$, а S_2 - матрица перехода от $\|e_n \dots e_1\|$ к $\|e_1 \dots e_n\|$

Несложно заметить, что $S_1 = S_2 = \begin{Vmatrix} 0 & & 1 \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ 1 & & 0 \end{Vmatrix}$

Новая матрица перехода: $S' = S_1 S S_1$

$(S_1 S)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} (S_1)_{ik} (S)_{kj} = (S)_{(n+1-i)j}$

$(S_1 S S_1)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} (S_1 S)_{ik} (S_1)_{kj} = \sum_{k=1}^{n} (S)_{(n+1-i)k} (S_1)_{kj} =$

$= (S)_{(n+1-i)(n+1-j)}$ — отражение относительно

211

Донатик

центра

Ответ: Матрица отразится относительно центра $\left((S')_{ij} = (S)_{(n+1-i)(n+1-j)}\right)$

211

Донатик

№21.1

4 неделя

Док-ть, что пространство квадратных матриц порядка n L является прямой суммой подпространств симметрических матриц L_1 и ~~косо симме~~ кососимметрических матриц L_2.

$L_1 = \{A = \|a_{ij}\| \mid a_{ij} = a_{ji}\}$

$L_2 = \{A = \|a_{ij}\| \mid a_{ij} = -a_{ji}\}$

Найдём $L_1 \cap L_2$:

$A = \|a_{ij}\| \in L_1 \cap L_2 \Rightarrow \forall i,j \in \overline{1 \dots n} \longmapsto \begin{cases} a_{ij} = -a_{ji} \\ a_{ij} = a_{ji} \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow a_{ij} = 0$

Значит $A = 0$

$L_1 \cap L_2 = \{0\} \Leftrightarrow L_1 \oplus L_2$ - прямая сумма

Рассмотрим $A_{n \times n} \in L$. Чтобы док-ть, что $L = L_1 \oplus L_2$, найдём $X \in L_1$ и $Y \in L_2$: $A = X + Y$.

(в случае, ~~что~~ когда такие X и Y существуют они единственны)

$$\begin{cases} a_{ij} = x_{ij} + y_{ij} \\ a_{ji} = x_{ji} + y_{ji} = x_{ij} - y_{ij} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{ij} = x_{ji} = \frac{1}{2}(a_{ij} + a_{ji}) \\ y_{ij} = -y_{ji} = \frac{1}{2}(a_{ij} - a_{ji}) \end{cases} \Bigg| \Rightarrow$$

$\Rightarrow X$ и Y: $A = X + Y$ существуют и единственны.

211

Донатик

№21.3(1)

Док-ть, что L является прямой суммой подпространств L_1 векторов, все координаты которых равны между собой, и L_2 векторов, сумма координат которых равна 0.

Рассмотрим произвольный вектор $\vec{x} = \|x_1 \ldots x_n\|^T$.

Представим его в виде $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b}$, где $\vec{a} \in L_1$, а $\vec{b} \in L_2$:

$\|x_1 \ldots x_n\|^T = \|a \ldots a\|^T + \|b_1 \ldots b_n\|^T$

Получаем систему:

$\forall i \in \overline{1..n} \longmapsto x_i = a + b_i$

Сложим все уравнения:

$\sum_{i=1}^{n} x_i = n \cdot a + \sum_{i=1}^{n} b_i = na \Rightarrow a = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$

Теперь из i-ого уравнения: $b_i = x_i - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$

Таким образом $\forall \vec{x} \in L$ $\exists$ единственные $\vec{a} \in L_1$ и $\vec{b} \in L_2$: $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b} \Rightarrow L = L_1 \oplus L_2$

211
Донатик

№21.6(4)

Найти проекцию вектора $\vec{x} = c_{146}$ из 3-ёх-мерного арифметического пространства на P параллельно Q, где $P = L(\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3})$, $Q = L(\vec{b_1})$, $\vec{a_1} = c_{66}$, $\vec{a_2} = c_{121}$, $\vec{a_3} = c_{122}$, $\vec{b_1} = c_{145}$

$$\vec{a_1} = \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Vmatrix}, \vec{a_2} = \begin{Vmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{Vmatrix}, \vec{a_3} = \begin{Vmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{Vmatrix}, \vec{b_1} = \begin{Vmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{Vmatrix}, \vec{x} = \begin{Vmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{Vmatrix}$$

$$\left\Vert\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & -2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right\Vert \sim \left\Vert\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 5 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & -3 & 0 \end{array}\right\Vert \sim \left\Vert\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right\Vert \sim$$

$$\sim \left\Vert\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right\Vert \sim \left\Vert\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right\Vert$$

$\dim(P+Q) =$

$\dim P = 2$, т.к. $\begin{Vmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & 3 & 3 \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$

$\dim Q = 1$

$\dim(P \cap Q) = \dim P + \dim Q - \dim(P+Q) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow X = P \oplus Q$, где X – всё 3-ёхмерное пространство

$$\begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Vmatrix} = c_3 \begin{Vmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix} \Rightarrow \vec{y} = 2\vec{a_1} + \vec{a_2} = \begin{Vmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{Vmatrix} \text{ - проекция}$$

211
Донатик

№21.7 (б,в)

Найти размерность и базис X_1+X_2, $X_1\cap X_2$, где $X_{1,2}$ - подпространства n-мерного арифметического пр-ва, натянутые на систему векторов: $\vec{a}_1 \dots \vec{a}_k$, $\vec{b}_1 \dots \vec{b}_l$

б) $X_1 = L(\vec{a}_1 = c_{83}, \vec{a}_2 = c_{84}, a_3 = c_{120})$

$X_2 = L(\vec{b}_1 = c_{66}, \vec{b}_2 = c_{121}, \vec{b}_3 = c_{122})$

$\vec{a}_1 = \begin{Vmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{Vmatrix}, \vec{a}_2 = \begin{Vmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{Vmatrix}, \vec{a}_3 = \begin{Vmatrix} 2 \\ -1 \\ -5 \end{Vmatrix}, \vec{b}_1 = \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Vmatrix}, \vec{b}_2 = \begin{Vmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{Vmatrix}, \vec{b}_3 = \begin{Vmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{Vmatrix}$

Размерность и базис X_1:

$$\|\vec{a}_1 \vec{a}_2 \vec{a}_3\| = \begin{Vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & -5 \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & -11 & -11 \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \dim X_1 = 2$, базис: $\vec{a}_1, \vec{a}_2$

Размерность и базис X_2:

$$\|\vec{b}_1 \vec{b}_2 \vec{b}_3\| = \begin{Vmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & 3 & 3 \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \dim X_2 = 2$, базис: $\vec{b}_1, \vec{b}_2$.

Размерность и базис X_1+X_2:

$$\left\Vert\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 2 & 1 & -3 & -2 \\ 2 & 3 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -5 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right\Vert \sim \begin{Vmatrix} 1 & 4 & 2 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & -5 & -5 & -1 & 8 & 7 \\ 0 & -11 & -11 & -2 & 9 & 7 \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 1 & 4 & 2 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 5 & 5 & 1 & -8 & -7 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 7 & 7 \end{Vmatrix} \sim$$

211
Донатик

$$\sim \begin{Vmatrix} 1 & 4 & 2 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 7 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -43 & -42 \end{Vmatrix} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \dim(X_1+X_2)=3$, базис: $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{b_1}$

$$\dim(X_1 \cap X_2) = \dim X_1 + \dim X_2 - \dim(X_1+X_2) = 1$$

$$\vec{x} \in X_1 \cap X_2 \Leftrightarrow \vec{x} = -\alpha_1 \vec{a_1} - \alpha_2 \vec{a_2} = \beta_1 \vec{b_1} + \beta_2 \vec{b_2}$$

$$\begin{Vmatrix} 1 & 4 & \cancel{2} & 1 & -3 \\ 2 & 3 & \cancel{-1} & 1 & 2 \\ 3 & 1 & \cancel{-3} & 1 & 6 \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 1 & 4 & 1 & -3 \\ 0 & -5 & -1 & 8 \\ 0 & -11 & -2 & 9 \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 1 & 4 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & 1 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 1 & 4 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -43 \end{Vmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -43 \end{Vmatrix} \Rightarrow \begin{Vmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{Vmatrix} = c_4 \cdot \begin{Vmatrix} -12 \\ -7 \\ 43 \\ 1 \end{Vmatrix}$$

$$x_1 = -\alpha_1 \vec{a_1} - \alpha_2 \vec{a_2} = 12 c_4 \begin{Vmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{Vmatrix} + 7 c_4 \begin{Vmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{Vmatrix} = c_4 \cdot \begin{Vmatrix} 40 \\ 45 \\ 43 \end{Vmatrix} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \begin{Vmatrix} 40 \\ 45 \\ 43 \end{Vmatrix}$ – искомый базис $X_1 \cap X_2$

~~Ответ.~~

7) $X_1 = L(\vec{a_1} = e_{196}, \vec{a_2} = e_{200}, \vec{a_3} = e_{217})$

$X_2 = L(\vec{b_1} = e_{211}, \vec{b_2} = e_{218}, \vec{b_3} = e_{219})$

$$\vec{a_1} = \begin{Vmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{Vmatrix}, a_2 = \begin{Vmatrix} -1 \\ 8 \\ -6 \\ 5 \end{Vmatrix}, \vec{a_3} = \begin{Vmatrix} 0 \\ 10 \\ -5 \\ 8 \end{Vmatrix}, \vec{b_1} = \begin{Vmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \\ 5 \end{Vmatrix}, \vec{b_2} = \begin{Vmatrix} 3 \\ -2 \\ 6 \\ 3 \end{Vmatrix}, \vec{b_3} = \begin{Vmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \\ 8 \end{Vmatrix}$$

211
Донатик

Размерность и базис X_1:

$$\|\vec{a_1}\vec{a_2}\vec{a_3}\| = \begin{Vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 8 & 10 \\ 1 & -6 & -5 \\ 3 & 5 & 8 \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 10 & 10 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & 8 & 8 \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \dim X_1 = 2$, базис: $\{\vec{a_1}, \vec{a_2}\}$

Размерность и базис в X_2:

$$\|\vec{b_1}\vec{b_2}\vec{b_3}\| = \begin{Vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 4 & -2 & 2 \\ -1 & 6 & 5 \\ 5 & 3 & 8 \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & -14 & -14 \\ 0 & 9 & 9 \\ 0 & -12 & -12 \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \dim X_2 = 2$, базис: $\{\vec{b_1}, \vec{b_2}\}$

Размерность и базис $X_1 + X_2$:

$$\|\vec{a_1}\vec{a_2}\vec{a_3}\vec{b_1}\vec{b_2}\vec{b_3}\| = \begin{Vmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 8 & 10 & 4 & -2 & 2 \\ 1 & -6 & -5 & -1 & 6 & 5 \\ 3 & 5 & 8 & 5 & 3 & 8 \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 10 & 10 & 2 & -8 & -6 \\ 0 & -5 & -5 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 8 & 8 & 2 & -6 & -4 \end{Vmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{Vmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 5 & 1 & -4 & -3 \\ 0 & 5 & 5 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 4 & 4 & 1 & -3 & -2 \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 5 & 1 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \end{Vmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \dim(X_1 + X_2) = 3$, базис: $\{\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{b_1}\}$

211
Донатик

$$\dim(X_1\cap X_2)=\dim X_1+\dim X_2-\dim(X_1+X_2)=1$$

$$\vec{x}\in X_1\cap X_2 \Leftrightarrow \vec{x}=-\alpha_1\vec{a_1}-\alpha_2\vec{a_2}=\beta_1\vec{b_1}+\beta_2\vec{b_2}$$

$$\begin{Vmatrix}1&-1&1&3\\2&8&4&-2\\1&-6&-1&6\\3&5&5&3\end{Vmatrix}\sim\begin{Vmatrix}1&-1&1&3\\0&10&2&-8\\0&-5&-2&3\\0&8&2&-6\end{Vmatrix}\sim\begin{Vmatrix}1&-1&1&3\\0&5&1&-4\\0&0&-1&-1\\0&4&1&-3\end{Vmatrix}\sim\begin{Vmatrix}1&-1&1&3\\0&1&0&-1\\0&0&+1&+1\\0&0&&1\end{Vmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{Vmatrix}1&-1&1&3\\0&1&0&-1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{Vmatrix}\Rightarrow\beta_1+\beta_2=0\Rightarrow\beta_1=-\beta_2$$

$$\vec{x}=-\beta_2\vec{b_1}+\beta_2\vec{b_2}=\beta_2\left(\begin{Vmatrix}3\\-2\\6\\3\end{Vmatrix}-\begin{Vmatrix}1\\4\\-1\\5\end{Vmatrix}\right)=\beta_2\cdot\begin{Vmatrix}2\\-6\\7\\-2\end{Vmatrix}$$

Ответ: в) $\dim(X_1+X_2)=3$, базис: $\left\{\begin{Vmatrix}1\\2\\3\end{Vmatrix},\begin{Vmatrix}4\\3\\1\end{Vmatrix},\begin{Vmatrix}1\\1\\1\end{Vmatrix}\right\}$

$\dim(X_1\cap X_2)=1$, базис: $\left\{\begin{Vmatrix}40\\45\\43\end{Vmatrix}\right\}$

г) $\dim(X_1+X_2)=3$, базис: $\left\{\begin{Vmatrix}1\\2\\1\\3\end{Vmatrix},\begin{Vmatrix}-1\\8\\-6\\5\end{Vmatrix},\begin{Vmatrix}1\\4\\-1\\5\end{Vmatrix}\right\}$

$\dim(X_1\cap X_2)=1$, базис: $\left\{\begin{Vmatrix}2\\-6\\7\\-2\end{Vmatrix}\right\}$

211

Донатик

№21.9

Найти размерность и базис X_1+X_2, $X_1 \cap X_2$, где X_1 и X_2 — подпространства $\mathcal{P}^{(3)}$,

$X_1 = L(1+2t+t^3,\ 1+t+t^2,\ t-t^2+t^3)$

$X_2 = L(1+t^2,\ 1+3t+t^3,\ 3t-t^2+t^3)$

$\{1, t, t^2, t^3\}$ — базис в $\mathcal{P}^{(3)}$, тогда в этом базисе:

$$\vec{a_1} = 1+2t+t^3 = \begin{Vmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix}, \quad \vec{a_2} = 1+t+t^2 = \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix},$$

$$\vec{a_3} = t-t^2+t^3 = \begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{Vmatrix}, \quad \vec{b_1} = 1+t^2 = \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix},$$

$$\vec{b_2} = 1+3t+t^3 = \begin{Vmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix}, \quad \vec{b_3} = 3t-t^2+t^3 = \begin{Vmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \\ 1 \end{Vmatrix}$$

$$\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \dim(X_1+X_2) = 3$, базис: $\{1+2t+t^3,\ 1+t+t^2,\ 1+t^2$

211
Донатик

$\mathcal{P}^{(3)}$

$$\begin{Vmatrix}1&1&0\\2&1&1\\0&1&-1\\1&0&1\end{Vmatrix}\sim\begin{Vmatrix}1&1&0\\0&-1&1\\0&1&-1\\0&-1&1\end{Vmatrix}\sim\begin{Vmatrix}1&1&0\\0&1&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{Vmatrix}\Rightarrow \dim X_1=2,\ \text{базис: }\{\vec{a}_1,\vec{a}_2\}$$

$$\begin{Vmatrix}1&1&0\\0&3&3\\1&0&-1\\0&1&1\end{Vmatrix}\sim\begin{Vmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&1&1\\0&0&0\end{Vmatrix}\sim\begin{Vmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{Vmatrix}\Rightarrow \dim X_2=2,\ \text{базис: }\{\vec{b}_1,\vec{b}_2\}$$

$$\vec{x}\in X_1\cap X_2 \Leftrightarrow \vec{x}=-\alpha_1\vec{a}_1-\alpha_2\vec{a}_2=\beta_1\vec{b}_1+\beta_2\vec{b}_2$$

$$\begin{Vmatrix}1&1&\cancel{0}&1&1\\2&1&\cancel{1}&0&3\\0&1&\cancel{-1}&1&0\\1&0&\cancel{1}&0&1\end{Vmatrix}\sim\begin{Vmatrix}1&1&1&1\\0&-1&-2&1\\0&1&1&0\\0&1&1&0\end{Vmatrix}\sim\begin{Vmatrix}1&0&0&1\\0&0&1&-1\\0&1&1&0\\0&0&0&0\end{Vmatrix}\sim\begin{Vmatrix}1&0&0&1\\0&1&1&0\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{Vmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{Vmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&1\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{Vmatrix}\Rightarrow \alpha_1=\alpha_2,\ \beta_1=\beta_2$$

$$\vec{x}=\alpha_1\vec{a}_1+\alpha_2\vec{a}_2=\alpha_1\begin{Vmatrix}2\\3\\1\\1\end{Vmatrix}\Rightarrow \dim(X_1\cap X_2)=1,$$

базис: $2+3t+t^2+t^3$

Ответ: $\dim(X_1+X_2)=3$, $\dim(X_1\cap X_2)=1$

базис X_1+X_2: $\{1+2t+t^3,\ 1+t+t^2,\ 1+t^2\}$

базис $X_1\cap X_2$: $\{2+3t+t^2+t^3\}$

$1+t^2\}$

211

Донатик

№21.12 (2)

P и Q - линейные подпространства некоторого конечномерного пространства.

$\dim(P+Q) = 1 + \dim(P\cap Q)$

Док-ть, что $P\subseteq Q$ или $P\supseteq Q$

Доказательство:

$\dim(P\cap Q) = m$

$\dim(P+Q) = \dim P + \dim Q - \dim(P\cap Q)$

$1+m = \dim P + \dim Q - m \Rightarrow$

$\Rightarrow \dim P + \dim Q = 2m+1$

$\dim P, \dim Q \leq \dim(P+Q) = m+1$

$\dim P, \dim Q \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow$

$\Rightarrow \dim P = m+1,\ \dim Q = m$

Отсюда $\dim(P+Q) = \dim P \Rightarrow Q\subseteq P$

211
Донатик

№21.13

P-подпространство X.

Док-ть: $\exists\, Q:\ X = P \oplus Q$

Доказательство:

Пусть $\dim X = n$, $\dim P = k$.

P-подпространство $X \Rightarrow$ его базис $\{\vec{p_1} \dots \vec{p_k}\}$ можно дополнить до базиса X: $\cancel{\{\vec{x_1} \dots \vec{x_n}\}}$

~~при этом x_1~~ $\{\vec{p_1}, \dots \vec{p_k}, \vec{q_{k+1}}, \dots \vec{q_n}\}$

Обозначим $Q = L(\vec{q_{k+1}}, \dots \vec{q_n})$

$\{\vec{p_1}, \dots \vec{p_k}, \vec{q_{k+1}}, \dots \vec{q_n}\}$ базис $X \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall \vec{x} \in X:\ \vec{x} = \sum\limits_{i=1}^{k} x_i \vec{p_i} + \sum\limits_{i=k+1}^{n} x_i \vec{q_i}$

$\sum\limits_{i=1}^{k} x_i \vec{p_i} \in P$, $\sum\limits_{i=k+1}^{n} x_i \vec{q_i} \in Q \Rightarrow X = P + Q$.

Положим некоторый $\vec{x} \neq \vec{0} \in P \cap Q$.

$\vec{x} = \sum\limits_{i=1}^{k} \vec{p_i} x_i = -\sum\limits_{i=k+1}^{n} \vec{q_i} x_i \Rightarrow \sum\limits_{i=1}^{k} x_i \vec{p_i} + \sum\limits_{i=k+1}^{n} x_i \vec{q_i} = \vec{0} \Rightarrow$

$\Rightarrow x_i = 0\ \forall i$ (т.к. базис линейно независим)

Полученное противоречие показывает, что $P \cap Q = \{\vec{0}\} \Rightarrow X = P \oplus Q$

Донатик

5 неделя

№ 23.6 (3)

Пусть $\vec{x}$ - произвольный вектор, $\vec{n}$ - фиксированный

Проверить линейность и выяснить геометрический смысл $\varphi(\vec{x}) = \vec{x} - (\vec{x}, \vec{n}) \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|^2}$

1. $\varphi(\vec{x_1} + \vec{x_2}) = \vec{x_1} + \vec{x_2} - (\vec{x_1} + \vec{x_2}, \vec{n}) \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|^2} =$

$= \vec{x_1} - (\vec{x_1}, \vec{n}) \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|^2} + \vec{x_2} - (\vec{x_2}, \vec{n}) \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|^2} = \varphi(\vec{x_1}) + \varphi(\vec{x_2})$

2. $\varphi(\alpha \vec{x}) = \alpha \vec{x} - (\alpha \vec{x}, \vec{n}) \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|^2} = \alpha \varphi(\vec{x})$

(1-2) $\Rightarrow$ $\varphi(\vec{x})$ - линейное преобразование.

$\varphi(\vec{x})$ - перпендикуляр из конца вектора $\vec{x}$ на подпространство $(\vec{r}, \vec{n}) = 0$

№ 23.9 (3)

Вычислить матрицу ортогонального проектирования из E_3 на L, где L - плоскость $x + y + z = 0$

$\vec{e_1} = \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix}, \vec{e_2} = \begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix}, \vec{e_3} = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix}$

Проекция $\vec{e_1}$: $M(1,0,0)$

$\cancel{\vec{MM'}} = \begin{Vmatrix} x_0 - 1 \\ y_0 \\ z_0 \end{Vmatrix} \begin{cases} \cancel{(\vec{MM'}, \vec{n}) = 0} \; (\vec{OM'}, \vec{n}) = 0 \\ M' \in \Pi \end{cases}$

$\overrightarrow{MM'} = \alpha \vec{n}$ $M' \in \pi$, если $(\vec{e_1} + \alpha\vec{n}, \vec{n}) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 + \alpha|\vec{n}|^2 = 0 \Rightarrow \alpha = -\frac{1}{3}$.

$\overrightarrow{OM'} = \vec{e_1} + \alpha\vec{n} = \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix} - \frac{1}{3}\begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{Vmatrix} = f(\vec{e_1})$

Аналогично $f(\vec{e_2}) = \begin{Vmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{Vmatrix}$, $f(\vec{e_3}) = \begin{Vmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{Vmatrix}$

Матрица линейного преобразования:

$A = \| f(\vec{e_1}) \; f(\vec{e_2}) \; f(\vec{e_3}) \| = \frac{1}{3}\begin{Vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{Vmatrix}$

№23.15

$L = L' \oplus L''$, L' и L'' – непустые

1) Док-ть, что преобразование φ проектирования L на L' параллельно L'' линейно. Найти $\mathrm{Ker}\,\varphi$, $\mathrm{Im}\,\varphi$. Написать матрицу φ, ~~составленную~~ в базисе, составленном из базисов L' и L''

$y \in \mathcal{L} \Rightarrow y = y_1 + y_2$, где $y_1 \in \mathcal{L}'$, $y_2 \in \mathcal{L}''$

$\varphi(y) = y_1$

1. $x = x_1 + x_2 \Rightarrow x + y = (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2)$,
т.к. $\mathcal{L}'$ и $\mathcal{L}''$ – подпространства:
$x_1 + y_1 \in \mathcal{L}'$, $x_2 + y_2 \in \mathcal{L}'' \Rightarrow \varphi(x+y) = x_1 + y_1 =$
$= \varphi(x) + \varphi(y)$

2. $y = y_1 + y_2 \Rightarrow \alpha y = \alpha y_1 + \alpha y_2$, $\alpha y_1 \in \mathcal{L}'$, $\alpha y_2 \in \mathcal{L}''$
$\Rightarrow \varphi(\alpha y) = \alpha y_1 = \alpha \varphi(y)$

(1–2) $\Rightarrow \varphi$ – линейное

$\operatorname{Ker} \varphi = \mathcal{L}''$, т.к. если $\varphi(x) = 0$, то $x = 0 + x_2$,
где $x_2 \in \mathcal{L}'' \Rightarrow x \in \mathcal{L}''$

$\operatorname{Im} \varphi = \mathcal{L}'$, т.к. $\varphi(x) = x_1 \in \mathcal{L}'$ и $\forall x_1 \in \mathcal{L}'$
$\exists\, x = x_1 + 0 \in \mathcal{L} : \varphi(x) = x_1$

$\{e_1, \dots e_k\}$ – базис в $\mathcal{L}'$

$\{e_{k+1}, \dots e_n\}$ – базис в $\mathcal{L}''$

$$\left.\begin{array}{l} \forall e_i \in \mathcal{L}' : \varphi(e_i) = e_i \\ \forall e_i \in \mathcal{L}'' : \varphi(e_i) = 0 \end{array}\right| \Rightarrow A_{n \times n} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \quad k \quad & \quad n-k \end{array} \\ \left\| \begin{array}{cccc|c} 1 & & 0 & & \\ & 1 & & & 0 \\ 0 & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ \hline & & 0 & & 0 \end{array} \right\| \end{array}$$

211
Донатик

где $k = \dim \mathcal{L}'$, $n = \dim \mathcal{L}$

2) Рассмотреть φ как отображение из $\mathcal{L}$ в $\mathcal{L}_1$

Доказательство линейности аналогично.

$\operatorname{Ker}\varphi = \mathcal{L}''$, $\operatorname{Im}\varphi = \mathcal{L}'$ – аналогично

Если $\{e_1 \dots e_n\}$ – базис в $\mathcal{L}$, а $\{e_1, \dots e_k\}$ – базис в $\mathcal{L}'$, то

$$A_{k\times n} = \left\| \begin{array}{cccc|c} \multicolumn{4}{c|}{\overbrace{\hphantom{1\;0\;0\;\;0}}^{k}} & \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \end{array} \right\|$$

n

Ответ: $\operatorname{Ker}\varphi = \mathcal{L}''$, $\operatorname{Im}\varphi = \mathcal{L}'$

1) $$A_{n\times n} = \left\| \begin{array}{cccc|c} 1 & & 0 & & \\ & 1 & & & 0 \\ 0 & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ \hline & 0 & & & 0 \end{array} \right\|$$

2) $$A_{k\times n} = \left\| \begin{array}{cccc|c} 1 & & 0 & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & 0 \\ 0 & & & \ddots & \\ & & & 1 & \end{array} \right\|$$

211

№23.28 (3)

Линейное преобразование φ n-мерного линейного пространства $\mathcal{L}$ задано матрицей A. Найти $\mathrm{Ker}\,\varphi$ и $\mathrm{Im}\,\varphi$. Выяснить, является ли φ изоморфизмом.

$$n=3, \quad A=\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

$$\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{Vmatrix} \sim \left\Vert\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right\Vert$$

$\mathrm{rg}\,A = 2 \Rightarrow \dim \mathrm{Im}\,\varphi = 2$, $\dim \mathrm{Ker}\,\varphi = 3-2=1$.

$$\mathrm{Im}\,\varphi = \mathcal{L}\left(\begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{Vmatrix}, \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix}\right)$$

Базис в $\mathrm{Ker}\,\varphi$ – ФСР система $A\vec{x}=\vec{o}$

$$\begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Vmatrix} = c_3 \begin{Vmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{Vmatrix} \Rightarrow \mathrm{Ker}\,\varphi = \mathcal{L}\left(\begin{Vmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{Vmatrix}\right)$$

$\mathrm{Ker}\,\varphi \neq \{o\} \Rightarrow \varphi$ – не инъективно $\Rightarrow$

$\Rightarrow \varphi$ – не изоморфизм

Ответ: $\mathrm{Ker}\,\varphi = \mathcal{L}\left(\begin{Vmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{Vmatrix}\right)$ $\mathrm{Im}\,\varphi = \mathcal{L}\left(\begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{Vmatrix}, \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix}\right)$

Донатик

№23.29 (3)

Отображение φ из $\mathcal{L}_n$ в $\mathcal{L}_m$ задано матрицей $A = A_{\text{чов}}$ в базисах ~~...~~ e и f. Найти: $\operatorname{Ker}\varphi$ и $\operatorname{Im}\varphi$. Выяснить, является ли оно сюръективным, инъективным.

$$A = \begin{Vmatrix} -2 & 6 & -4 \\ 1 & -3 & 2 \\ 7 & -21 & 14 \\ -3 & 9 & -6 \end{Vmatrix} \quad n=3,\ m=4$$

$$\begin{Vmatrix} -2 & 6 & -4 \\ 1 & -3 & 2 \\ 7 & -21 & 14 \\ -3 & 9 & -6 \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & -3 & 2 \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

$$\operatorname{rg} A = 1 \Rightarrow \dim \operatorname{Im}\varphi = 1,\ \operatorname{Im}\varphi = \mathcal{L}\left(\begin{Vmatrix} -2 \\ 1 \\ 7 \\ -3 \end{Vmatrix}\right)$$

$$\begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Vmatrix} = C_2 \begin{Vmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix} + C_3 \begin{Vmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix} \Rightarrow \operatorname{Ker}\varphi = \mathcal{L}\left(\begin{Vmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix}, \begin{Vmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix}\right)$$

$\operatorname{Ker}\varphi \neq \{0\} \Rightarrow$ не инъективно

$\operatorname{rg} A = 1 \neq 4 = m \Rightarrow$ не сюръективно.

211

Донатик

№23.35

Отображение φ: $\begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Vmatrix} \to \begin{Vmatrix} x_2 & x_3 \\ -x_3 & x_1 \end{Vmatrix}$

Док-ть линейность и инъективность.

Вычислить его матрицу в стандартных базисах пространств.

1) $\varphi\left(\begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Vmatrix}\right) = \varphi\left(\begin{Vmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \\ x_3+y_3 \end{Vmatrix}\right) = \begin{Vmatrix} x_2+y_2 & x_3+y_3 \\ -x_3-y_3 & x_1+y_1 \end{Vmatrix} =$

$= \begin{Vmatrix} x_2 & x_3 \\ -x_3 & x_1 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} y_2 & y_3 \\ -y_3 & y_1 \end{Vmatrix} = \varphi\left(\begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Vmatrix}\right) + \varphi\left(\begin{Vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Vmatrix}\right)$

2) $\varphi\left(\alpha \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Vmatrix}\right) = \varphi\left(\begin{Vmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \alpha x_3 \end{Vmatrix}\right) = \begin{Vmatrix} \alpha x_2 & \alpha x_3 \\ -\alpha x_3 & \alpha x_1 \end{Vmatrix} = \alpha \begin{Vmatrix} x_2 & x_3 \\ -x_3 & x_1 \end{Vmatrix} = \alpha\varphi\left(\begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Vmatrix}\right)$

(1-2) => φ линейно

$\varphi\left(\begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Vmatrix}\right) = \varphi\left(\begin{Vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Vmatrix}\right) \Rightarrow \begin{Vmatrix} x_2 & x_3 \\ -x_3 & x_1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} y_2 & y_3 \\ -y_3 & y_1 \end{Vmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow x_1 = y_1,\ x_2 = y_2,\ x_3 = y_3 \Rightarrow \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Vmatrix}$

Значит φ инъективно

Стандартный базис для векторов: $\left\{\begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix}, \begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix}, \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix}\right\}$; e

Стандартный базис для матриц: $\left\{\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}, \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix},\right.$

211
Донатик

$\begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}, \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} \} : f$

$\varphi(\vec{e_1}) = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} = f_4$

$\varphi(\vec{e_2}) = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix} = f_1$

$\varphi(\vec{e_3}) = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix} - \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix} = f_2 - f_3$

Матрица φ: $\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$

№23.40 (1а, 1б)

$\mathcal{P}^{(m)}$ – линейное пространство вещественных многочленов степени не выше m

1) Проверить, что дифференцирование $D = \frac{d}{dt}(p)$: $\mathcal{P}^{(m)} \to \mathcal{P}^{(m)}$ – линейное преобразование

$\frac{d}{dt}(p_1 + p_2) = \frac{d}{dt}(p_1) + \frac{d}{dt}(p_2)$ – выполнено

$\frac{d}{dt}(\alpha p) = \alpha \frac{d}{dt}(p)$ – выполнено $\Big| \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{d}{dt}(p)$ – линейное преобразование.

$p \in \mathcal{P}^{(m)} \Rightarrow p = \sum_{i=0}^{m} a_i t^i \quad \frac{d}{dt}(p) = \sum_{i=0}^{m} a_i \cdot i t^{i-1} \in \mathcal{P}^{(m)}$

2) Найти $\operatorname{Ker} D$ и $\operatorname{Im} D$:

$\frac{d}{dt}(p(t)) = 0 \Rightarrow p(t) = C,\ C \in \mathbb{R} \Rightarrow \operatorname{Ker} D = \mathcal{P}^{(0)}$

$\operatorname{Im} D = \mathcal{P}^{(m-1)}$

211
Донатик

3) Вычислить матрицу D.

а) в стандартном базисе $\{1, t, \dots t^m\}$

$$\frac{d}{dt}(t^i) = i \cdot t^{i-1}$$

Матрица D:
$$\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

б) в базисе $\left\{1, \frac{t}{1!}, \frac{t^2}{2!}, \dots \frac{t^m}{m!}\right\}$

$$\frac{d}{dt}(e_i) = \frac{d}{dt}\left(\frac{t^i}{i!}\right) = \frac{1}{i!} \cdot i \cdot t^{i-1} = \frac{t^{i-1}}{(i-1)!} = e_{i-1}$$

Матрица D:
$$\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{Vmatrix}$$

Донатик

№23.57 (1,3)

Матрицы A и B составлены из столбцов $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3}$ и $\vec{b_1}, \vec{b_2}, \vec{b_3}$ в некотором базисе e 3-мерного линейного пр-ва $\mathcal{L}$.

Проверить, что существует единственное линейное преобразование φ пр-ва $\mathcal{L}$, переводящее a_i в b_i для $i \in \{1,2,3\}$.

Вычислить матрицу φ в

а) базисе e; б) базисе $\{\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3}\}$

1) $A = A_{265}$, $B = A_{266}$; $A = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{Vmatrix}$, $B = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -6 & 6 \end{Vmatrix}$

$\Phi\vec{a_1} = \vec{b_1}$ $\Phi\vec{a_2} = \vec{b_2}$ $\Phi\vec{a_3} = \vec{b_3}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \Phi A = B$.

Если $\exists A^{-1}$, то преобразование единственно.

$$\left\Vert\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right\Vert \sim \left\Vert\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right\Vert \sim \left\Vert\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right\Vert \sim$$

$$\sim \left\Vert\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 4 & -1 \end{array}\right\Vert \sim \left\Vert\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 4 & -1 \end{array}\right\Vert \Rightarrow A^{-1} = \begin{Vmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \\ -3 & 4 & -1 \end{Vmatrix}$$

211
Донатик

а) в стандартном базисе e:

$$\Phi = BA^{-1} = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -6 & 6 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \\ -3 & 4 & -1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{Vmatrix}$$

б) В новом базисе $\{\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3}\}$:

$S = A$

$$\Phi' = A^{-1}\Phi A = A^{-1}BA^{-1}A = A^{-1}\cdot B = \begin{Vmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \\ -3 & 4 & -1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -6 & 6 \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{Vmatrix}$$

3) $A = A_{270}$, $B = A_{271}$; $A = \begin{Vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{Vmatrix}$; $B = \begin{Vmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & -2 & -1 \end{Vmatrix}$

Находим A^{-1}:

$$\left\| \begin{array}{ccc|ccc} 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right\| \sim \left\| \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right\| \sim \left\| \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & -2 \end{array} \right\| \sim$$

$$\sim \left\| \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & -2 \end{array} \right\| \to A^{-1} = \begin{Vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -2 \end{Vmatrix}$$

а) $$\Phi = BA^{-1} = \begin{Vmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & -2 & -1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -5 & -1 & 2 \\ -7 & -3 & 6 \end{Vmatrix}$$

211
Донатик

б) $\Phi = A^{-1}B = \begin{Vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -2 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & -2 & -1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{Vmatrix}$

№23.70 (1,3)

Как изменится матрица линейного преобразования, заданная в базисе $\{\vec{e_1}, \dots \vec{e_n}\}$, если:

1) поменять местами $\vec{e_i}$ и $\vec{e_j}$

В номере 20.29 было показано, что матрица перехода от $\{\vec{e_1}, \dots \vec{e_i}, \dots \vec{e_j}, \dots \vec{e_n}\}$ к $\{\vec{e_1}, \dots \vec{e_j}, \dots \vec{e_i}, \dots \vec{e_n}\}$, где $i<j$ записывается в виде:

$$S = \begin{array}{c} \\ \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccc} & & & i & & j & & \end{array} \\ \begin{Vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & 0 & & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{Vmatrix} \end{array}$$

Несложно заметить, что $S^{-1} = S$, т.к.

$(S|E) \sim (E|S^{-1})$

замена строк

Новая матрица $\Phi' = S^{-1}\Phi S = S\Phi S$

$(S\Phi)_{ke} = \sum_{p=1}^{n} (S)_{kp} (\Phi)_{pe}$

При $k=i$: $(S\Phi)_{ie} = \sum_{p=1}^{n} (S)_{ip} \cdot (\Phi)_{pe} = (\Phi)_{je}$ - замена

211
Донатик

i-ой и j-ой строки

Аналогично показывается, что при умножении справа поменяются местами i-ый и j-ый столбцы.

3) $\vec{e_i}$ заменить на $\vec{e_i}+\vec{e_j}$

Матрица перехода от $\{\vec{e_1}, \dots \vec{e_i}, \dots \vec{e_j}, \dots \vec{e_n}\}$ к $\{\vec{e_1}, \dots \vec{e_i}+\vec{e_j}, \dots \vec{e_j}, \dots \vec{e_n}\}$:

$$S = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccc} & & & i & & j & & \end{array} \\ \begin{Vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{Vmatrix} \end{array}$$

$$\left\| \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{matrix}}_{S} \right| \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{matrix}}_{E} \left\| \right. \sim$$

211
Донатик

$$\sim \left\| \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{matrix}}_{E} \middle| \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{matrix}}_{S^{-1}} \right\| \begin{matrix} \\ \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$\Phi' = S^{-1}\Phi S$

$(S^{-1}\Phi)_{kl} = \sum_{p=1}^{n} (S^{-1})_{kp}(\Phi)_{pl}$

При $k=j$: $(S^{-1}\Phi)_{jl} = -(\Phi)_{il} + (\Phi)_{jl}$, то есть из j-~~ого~~ой ~~столбца~~ ~~строки~~ строки вычтется ~~i-ого-ой~~ i-ая

$(S^{-1}\Phi S)_{kl} = \sum_{p=1}^{n} (S^{-1}\Phi)_{kp} \cdot (S)_{pl}$

При $\cancel{k}\, l=i$: $(S^{-1}\Phi S)_{ki} = \sum_{p=1}^{n} (S^{-1}\Phi)_{kp}(S)_{pi} =$

$= (S^{-1}\Phi)_{ki} + (S^{-1}\Phi)_{kj}$, то есть ~~из~~ к i-ому ~~строке прибавится j-ая~~ столбцу прибавится j-ый

Ответ: 1) Поменяются местами i-ый и j-ый столбцы, i-ая и j-ая строки

3) Из j-ой строки вычтется i-ая, к i-ому столбцу прибавится j-ый.

211

Донатик

6 неделя

№23.83(3)

φ и ψ - линейные преобразования двумерного арифметического пр-ва

φ: A_{44} в стандартном базисе

ψ: A_{107} в базисе из столбцов A_{45}

Вычислить матрицу преобразования $\rho = \varphi^2 - \psi^2$ в стандартном базисе.

$$A_{44} = \begin{Vmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 1 \end{Vmatrix}, \quad A_{45} = \begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{Vmatrix}, \quad A_{107} = \begin{Vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -2 \end{Vmatrix}$$

В стандартном базисе:

$$A_\varphi = \begin{Vmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 1 \end{Vmatrix}, \quad A_\varphi^2 = \begin{Vmatrix} 21 & -6 \\ 24 & -3 \end{Vmatrix}$$

$$A_{45}^{-1}: \left\Vert\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right\Vert \sim \left\Vert\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right\Vert \sim \left\Vert\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right\Vert$$

$$A_\psi = (A_{45}^{-1})^{-1} \cdot A_{107} \cdot A_{45}^{-1} = A_{45} \cdot A_{107} \cdot A_{45}^{-1} =$$

$$= \begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -2 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 4 & -2 \\ 4 & -1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & -1 \\ 4 & -4 \end{Vmatrix}$$

$$A_\psi^2 = \begin{Vmatrix} -4 & 4 \\ -16 & 12 \end{Vmatrix}$$

$$A_\rho = A_\varphi^2 - A_\psi^2 = \begin{Vmatrix} 21 & -6 \\ 24 & -3 \end{Vmatrix} - \begin{Vmatrix} -4 & 4 \\ -16 & 12 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 25 & -10 \\ 40 & -15 \end{Vmatrix}$$

Ответ $A_{\varphi^2-\psi^2} = \begin{Vmatrix} 25 & -10 \\ 40 & -15 \end{Vmatrix}$

211

Донатик

№31.19 (2)

Каждому многочлену $p(t) \in \mathcal{P}^{(3)}$ сопоставим число $f(p)=\int_0^1 p(t^2)dt$.

Док-ть, что f - линейная функция на пр-ве $\mathcal{P}^{(3)}$ и вычислить $\varkappa$ в базисе $\{1, t, t^2, t^3\}$

$$f(p(t)+q(t))=\int_0^1 (p(t^2)+q(t^2))dt=\int_0^1 p(t^2)dt+\int_0^1 q(t^2)dt=f(p(t))+f(q(t))$$

$$f(\alpha p(t))=\int_0^1 \alpha p(t^2)dt=\alpha\int_0^1 p(t^2)dt=\alpha f(p(t))$$

$\Rightarrow f$ - линейная функция

$$f(1)=\int_0^1 1\cdot dt=1$$

$$f(t)=\int_0^1 t^2dt=\frac{1}{3}$$

$$f(t^2)=\int_0^1 t^4dt=\frac{1}{5}$$

$$f(t^3)=\int_0^1 t^6dt=\frac{1}{7}$$

$$\varkappa=\left\| 1 \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{5} \quad \frac{1}{7} \right\|$$

211

Донатик

№ 31.35 (1)

Базису $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ пр-ва L_3 биортогонален базис $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\}$ пр-ва L_3^*. Найти базис, биортогональный $\{\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}', \vec{e}_3{}'\}$, где $\vec{e}_1{}' = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$, $\vec{e}_2{}' = \vec{e}_2 + \vec{e}_3$, $\vec{e}_3{}' = \vec{e}_3$

$$(\vec{e}_i, \vec{f}_j) = \begin{cases} 1, \text{ если } i=j \\ 0, \text{ если } i \neq j \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\vec{e}_1{}', \vec{f}_1{}') = (\vec{e}_1, \vec{f}_1{}') + (\vec{e}_2, \vec{f}_1{}') = 1 \\ (\vec{e}_2{}', \vec{f}_1{}') = (\vec{e}_2, \vec{f}_1{}') + (\vec{e}_3, \vec{f}_1{}') = 0 \\ (\vec{e}_3{}', \vec{f}_1{}') = (\vec{e}_3, \vec{f}_1{}') = 0 \end{cases}$$

$\vec{f}_1{}' = \vec{f}_1$ – подходит

$$\begin{cases} (\vec{e}_1{}', \vec{f}_2{}') = (\vec{e}_1, \vec{f}_2{}') + (\vec{e}_2, \vec{f}_2{}') = 0 \\ (\vec{e}_2{}', \vec{f}_2{}') = (\vec{e}_2, \vec{f}_2{}') + (\vec{e}_3, \vec{f}_2{}') = 1 \\ (\vec{e}_3{}', \vec{f}_2{}') = (\vec{e}_3, \vec{f}_2{}') = 0 \end{cases}$$

$\vec{f}_2{}' = \vec{f}_2 - \vec{f}_1$ – подходит

$$\begin{cases} (\vec{e}_1{}', \vec{f}_3{}') = (\vec{e}_1, \vec{f}_3{}') + (\vec{e}_2, \vec{f}_3{}') = 0 \\ (\vec{e}_2{}', \vec{f}_3{}') = (\vec{e}_2, \vec{f}_3{}') + (\vec{e}_3, \vec{f}_3{}') = 0 \\ (\vec{e}_3{}', \vec{f}_3{}') = (\vec{e}_3, \vec{f}_3{}') = 1 \end{cases}$$

211
Донатик

$\vec{f}_3{}' = \vec{f}_3 - \vec{f}_2 + \vec{f}_1$ – подходит

биортогональный базис единственный

Ответ: $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2 - \vec{f}_1, \vec{f}_3 - \vec{f}_2 + \vec{f}_1\}$

211

Донатик