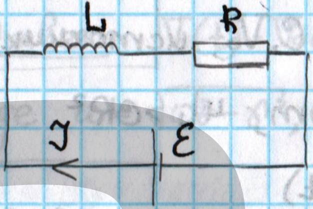
**з9.8**




Дано: $R, \mathcal{E}$, без сердечника $L_2$, с сердечником $L_1$, $t=0$: ток установился, сердечник достъ

Найти: $J(t)$

Решение:

До вытаскивания сердечника $\dot{J}_0 = 0 \Rightarrow J_0 = \frac{\mathcal{E}}{R}$

Поток сохраняется $\Rightarrow \frac{1}{c} L_1 J_0 = \frac{1}{c} L_2 J_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow J_1 = \frac{L_1}{L_2} J_0 = \frac{L_1}{L_2} \frac{\mathcal{E}}{R}$

После того как сердечник убрали:

$\mathcal{E} = \dot{J} L_2 + JR$

Ищем решение в виде $J = \frac{\mathcal{E}}{R} + Ae^{\alpha t}$:

$\mathcal{E} = L_2 A\alpha e^{\alpha t} + \mathcal{E} + ARe^{\alpha t}$

$AL_2\alpha + AR = 0$

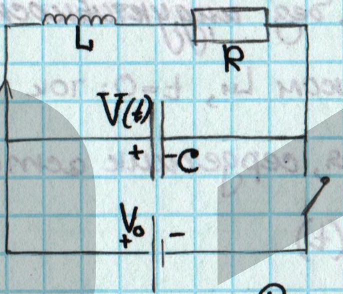
$\alpha = -\frac{R}{L_2} \Rightarrow J(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} + Ae^{-\frac{R}{L_2}t}$

$J(0) = \frac{\mathcal{E}}{R} + A = J_1 = \frac{L_1}{L_2}\frac{\mathcal{E}}{R} \Rightarrow A = \frac{L_1 - L_2}{L_2}\frac{\mathcal{E}}{R}$

$J(t) = \frac{\mathcal{E}}{R}\left(1 + \frac{L_1 - L_2}{L_2} e^{-\frac{R}{L_2}t}\right)$

Ответ: $\boxed{J(t) = \frac{\mathcal{E}}{R}\left(1 + \frac{L_1 - L_2}{L_2} e^{-\frac{R}{L_2}t}\right)}$

№9.15




Дано: $L, R, C, V_0$, источник отключают, $4L > CR^2$

Найти: $V(t)$

Решение:

$V(0)=V_0$, $\dot q(0) = -\frac{V_0}{R}$ (в установившемся режиме)

$$\frac{q}{C} + R\dot q + L\ddot q = 0$$

$$\ddot q + 2\gamma \dot q + \omega_0^2 q = 0, \text{ где } \gamma = \frac{R}{2L}, \omega_0^2 = \frac{1}{CL}$$

$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2 = 0$$

$$D = 4\gamma^2 - 4\omega_0^2 = \frac{R^2}{L^2} - \frac{4}{CL} = \frac{1}{CL^2}(CR^2 - 4L) < 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{D} = \pm 2i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = \pm 2i\omega$$

$$\lambda = -\gamma \pm i\omega \Rightarrow q = (\tilde A \sin\omega t + \tilde B \cos\omega t)e^{-\gamma t}$$

$$\Rightarrow V(t) = Ae^{-\gamma t}\sin\omega t + Be^{-\gamma t}\cos\omega t$$

$$V(0) = B = V_0$$

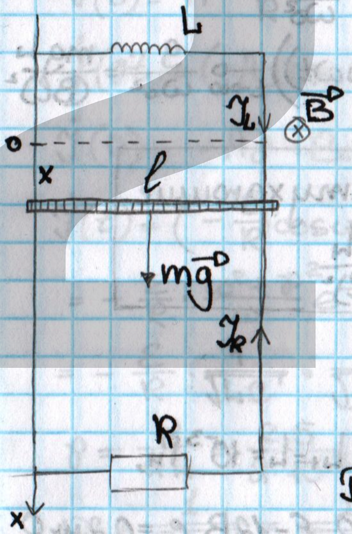
$$\dot V(0) = -\gamma Ae^{-\gamma t}\sin\omega t + \omega Ae^{-\gamma t}\cos\omega t - \gamma Be^{-\gamma t}\cos\omega t -$$

$$-\omega Be^{-\gamma t}\sin\omega t\Big|_{t=0} = A\omega - \gamma B = -\frac{V_0}{CR} \Rightarrow A = \frac{1}{\omega}\left(\gamma V_0 - \frac{V_0}{CR}\right)$$

$$V(t)=V_0e^{-\gamma t}\left(\cos\omega t+\left(\frac{\gamma}{\omega}-\frac{1}{\omega RC}\right)\sin\omega t\right)$$

Ответ. $\boxed{V(t)=V_0e^{-\gamma t}\left(\cos\omega t+\left(\frac{\gamma}{\omega}-\frac{1}{\omega RC}\right)\sin\omega t\right),\ \text{где}\ \omega=\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2},\ \omega_0^2=\frac{1}{CL},\ \gamma=\frac{R}{2L}}$

№9.48




Дано: $m, l, L, R, B$

Найти: положение равновесия и характер переходного процесса

Решение:

$$\left.\begin{aligned}&I=I_L+I_R\\&m\ddot{x}=mg+BlI\end{aligned}\right|\Rightarrow \ddot{x}-\frac{Bl}{m}(I_L+I_R)=g \qquad (1)$$

$$\mathcal{E}_L=-Bl\dot{x}=\dot{I}_L L\Rightarrow I_L=-\frac{Blx}{L}\ (\text{т.к. } I_L=0 \text{ при } x=0)$$

$$\mathcal{E}_R=-\left(-Bl(\text{const}-x)^{\bullet}\right)=I_RR\Rightarrow I_R=-\frac{Bl\dot{x}}{R}$$

Подставляем в (1):

$$\ddot{x}+\frac{(Bl)^2}{mR}\dot{x}+\frac{(Bl)^2}{mL}x=g$$ — ур-ие затухающих колебаний. $\gamma=\frac{(Bl)^2}{2mR},\ \omega_0^2=\frac{(Bl)^2}{mL}$

Решение: $x(t) = \frac{g}{\omega_0^2} + (A\cos\omega t + B\sin\omega t)e^{-\gamma t}$

где $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$

$x(0) = \frac{g}{\omega_0^2} + A = 0 \Rightarrow A = -\frac{g}{\omega_0^2}$

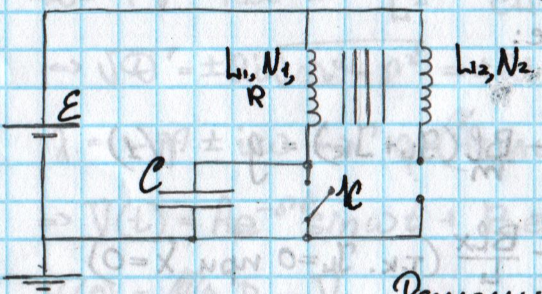
$\dot{x}(t) = (-\gamma A\cos\omega t - A\omega\sin\omega t - \gamma B\sin\omega t + \omega B\cos\omega t)e^{-\gamma t}$

$\dot{x}(0) = -\gamma A + \omega B = 0 \Rightarrow B = -\frac{\gamma}{\omega}\frac{g}{\omega_0^2}$

$x(t) = \frac{g}{\omega_0^2}\left(1 - e^{-\gamma t}\left(\cos\omega t + \frac{\gamma}{\omega}\sin\omega t\right)\right) \xrightarrow[t\to\infty]{} \frac{g}{\omega_0^2} = \frac{mgL}{(Bl)^2}$

Ответ: $\boxed{\text{переходный процесс - затухающие колебания, } x(\infty) = \frac{mgL}{(Bl)^2}}$

№9.34




Дано: $L_1 = L = 10^{-3}$ Гн, $\frac{N_2}{N_1} = 40$, $\mathcal{E} = 12$ В, $C = 0{,}2$ мкФ, $U_{раз} = 3$ кВ, $R = 2{,}5$ Ом

Найти: $t$

Решение:

До размыкания К:

$\mathcal{E} = L\dot{J} + RJ$, $\dot{J} = 0 \Rightarrow J(0) = \frac{\mathcal{E}}{R}$.

После размыкания К:

последовательный LRC-контур $\Rightarrow$

$\Rightarrow q(t) = const + (\tilde{A}\cos\omega t + \tilde{B}\sin\omega t)e^{-\gamma t}$

$q(0) = 0,\ \dot{q}(0) = \frac{\mathcal{E}}{R}$

$\mathcal{E} = \frac{q(0)}{C} + \dot{q}(0)R + \ddot{q}(0)L = \mathcal{E} + \ddot{q}(0)L \Rightarrow \ddot{q}(0) = 0$

Ток имеет вид: $I(t) = Ae^{-\gamma t}\cos\omega t + Be^{-\gamma t}\sin\omega t$

$I(0) = A = \frac{\mathcal{E}}{R}$

$\dot{I}(t) = (-A\gamma\cos\omega t - A\omega\sin\omega t - B\gamma\sin\omega t + B\omega\cos\omega t)e^{-\gamma t}$

$\dot{I}(0) = -A\gamma + B\omega = 0 \Rightarrow B = \frac{\gamma}{\omega}\frac{\mathcal{E}}{R}$

$$\dot{I}(t) = \left(-\frac{\mathcal{E}}{R}\gamma\cos\omega t - \frac{\mathcal{E}}{R}\omega\sin\omega t - \frac{\mathcal{E}\gamma^2}{R\omega}\sin\omega t + \frac{\mathcal{E}}{R}\gamma\cos\omega t\right)e^{-\gamma t} =$$

$$= -\frac{\mathcal{E}}{R}\cdot\frac{\omega^2+\gamma^2}{\omega}e^{-\gamma t}\sin\omega t = -\frac{\mathcal{E}}{R}\cdot\frac{\omega_0^2}{\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}}e^{-\gamma t}\sin\omega t =$$

$$= -\frac{\mathcal{E}}{R}\cdot\frac{1}{\sqrt{LC}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{\gamma}{\omega_0}\right)^2}}e^{-\gamma t}\sin\omega t$$

$\gamma = \frac{R}{2L} = \frac{2,5}{2\cdot 10^{-3}}c^{-1} = 1,25\cdot 10^{+3}c^{-1}$

$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{0,2\cdot 10^{-9}}}c^{-1} \sim 0,7\cdot 10^{5}c^{-1}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \dot{I}(t) \simeq -\frac{\mathcal{E}}{R}\cdot\frac{1}{\sqrt{LC}}e^{-\gamma t}\sin\omega t$

$U_{L_1}(t) = L\dot{I}(t)$

$U_{L_2}(t) = \frac{N_2}{N_1}|U_{L_1}(t)| = \frac{N_2}{N_1}\frac{\mathcal{E}}{R}\cdot\sqrt{\frac{L}{C}}e^{-\gamma t}\sin\omega t$

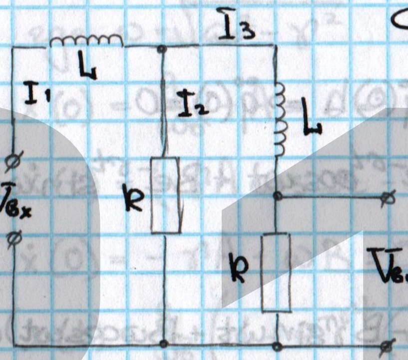
Считая, что $\gamma t \ll 1$: $\frac{N_2}{N_1}\frac{\mathcal{E}}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}\sin\omega t \approx U_{разр} \Rightarrow$

$\Rightarrow t \approx \frac{1}{\omega}\arcsin\left[\frac{U_{разр}}{\frac{N_2}{N_1}\mathcal{E}\cdot\frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}}\right] \simeq 3,16$ мкс

Ответ: $\boxed{t \approx \frac{1}{\omega}\arcsin\left[\frac{U_{разр}}{\frac{N_2}{N_1}\mathcal{E}Q}\right] \simeq 3,16 \text{ мкс}}$

11 неделя

**10.6**




Дано: $\varphi = 90°$; $\omega$ – циклическая частота $V_{вх}$

Найти: условие на $R$ и $L$, $\dfrac{|V_{вх}|}{|V_{вых}|}$

Решение:

$$V_{вх} = I_1 Z_L + I_2 R = I_1 (Z_L + R) - I_3 R$$

$$V_{вх} = I_1 Z_L + I_3 (Z_L + R)$$

$$\left\| \begin{array}{cc|c} Z_L + R & -R & V_{вх} \\ \cancel{Z}_L & Z_L + R & V_{вх} \end{array} \right\|$$

$$\left.\begin{array}{l} \Delta = Z_L^2 + 2 Z_L R + R^2 + R Z_L \\ \Delta_2 = V_{вх}(Z_L + R - Z_L) - V_{вх} R \end{array}\right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_3 = \frac{V_{вх} R}{Z_L^2 + R^2 + 3 Z_L R} = \frac{V_{вх} R}{-\omega^2 L^2 + R^2 + 3 i \omega L R} =$$

$$= \frac{V_{вх} R(-\omega^2 L^2 + R^2 - 3 i \omega L R)}{(-\omega^2 L^2 + R^2)^2 + (3 \omega L R)^2};$$

$I_3 \perp V_{вх}$ (т.е. $\varphi = 90°$) при $\mathrm{Re}(-\omega^2 L^2 + R^2 - 3 i \omega L R) = 0 \Rightarrow$

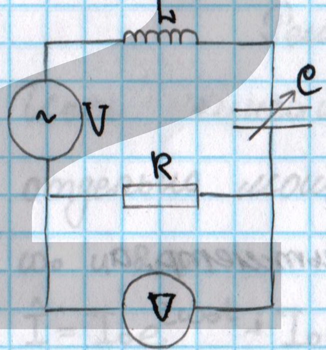
$\Rightarrow \omega L = R$

При этом $|V_{вых}| = |V_{вх}| R^2 \frac{3\omega L R}{(3\omega L R)^2} = |V_{вх}| \cdot \frac{1}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{|V_{вх}|}{|V_{вых}|} = 3$

Ответ: $\boxed{\omega L = R, \quad \frac{|V_{вх}|}{|V_{вых}|} = 3}$

№10.23




Дано: контур настроен в резонанс, $V = 100$ В, $\Delta V = 100$ мкВ, $Q = 100$, $d = 1$ мм

Найти: $\Delta d$ – минимальное измеряемое смещение.

Решение:

$\hat{V} = Ve^{i\omega t}$, $Z = R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$

$V + \Delta V = |R\hat{I}| = R \cdot \left|\frac{\hat{V}}{Z}\right| = RV \cdot \frac{1}{\left|R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega(C+\Delta C)}\right)\right|}$

Контур настроен на резонанс $\Rightarrow \omega L - \frac{1}{\omega C} = 0$

$$\omega L - \frac{1}{\omega(C+\Delta C)} \approx \omega L - \frac{1}{\omega C}\left(1 - \frac{\Delta C}{C}\right) = \frac{\Delta C}{\omega C^2} = \frac{\Delta d}{\omega C d} =$$

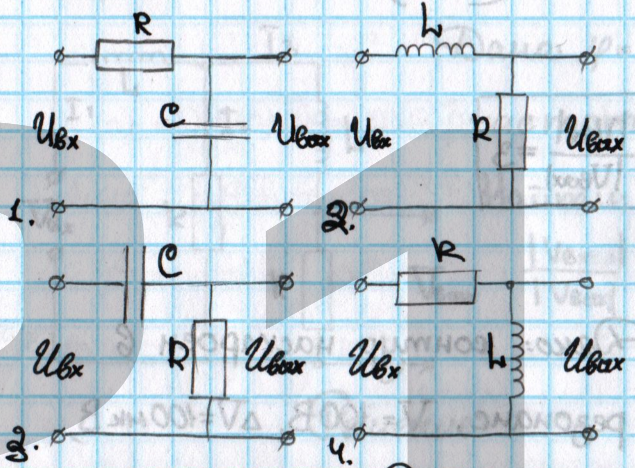
$$= \frac{\sqrt{LC}\,\Delta d}{Cd} = R \cdot \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} \cdot \frac{\Delta d}{d} = RQ\frac{\Delta d}{d} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V + \Delta V = V \cdot \frac{R}{\left|R + iRQ\frac{\Delta d}{d}\right|} \approx V\left(1 - \frac{1}{2}\frac{Q^2 \Delta d^2}{d^2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta d = \frac{d}{Q}\sqrt{\frac{2\Delta V}{V}} \approx 1{,}4 \cdot 10^{-3} \cdot 1\,\text{мм} \cdot \frac{1}{100} = 1{,}4 \cdot 10^{-5}\,\text{мм}$$

Ответ: $\boxed{\Delta d = \frac{d}{Q}\sqrt{\frac{2\Delta V}{V}} \approx 1{,}4 \cdot 10^{-5}\,\text{мм}}$

№ 10.59




$U_{вых} \ll U_{вх}$

Показать, что

1 и 2 - интегрирующие

3 и 4 - дифференцирующие

Решение:

Пусть на выходе идеальный вольтметр, а на входе идеальный источник

1. $U_{вх} = \dot{q}R + \frac{q}{C} = \dot{q}R + U_{вых} \simeq \dot{q}R$

$U_{вых} = \frac{q}{C} = \frac{1}{RC}\int_{t_0}^{t}\dot{q}\,dt \simeq \frac{1}{RC}\int_{t_0}^{t} U_{вх}\,dt$

2. $U_{вх} = \dot{I}L + IR = \dot{I}L + U_{вых} \simeq \dot{I}L$

$U_{вых} = IR = R\int_{t_0}^{t}\dot{I}\,dt \simeq \frac{R}{L}\int_{t_0}^{t} U_{вх}\,dt$

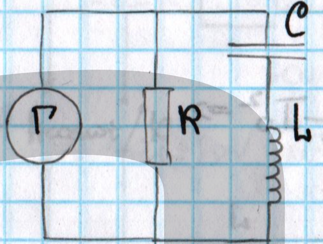
3. $U_{вх} = \frac{q}{C} + \dot{q}R = \frac{q}{C} + U_{вых} \simeq \frac{q}{C}$

$U_{вых} = \dot{q}R \simeq CR\dot{U}_{вх}$

4. $U_{вх} = IR + \dot{I}L = IR + U_{вых} \simeq IR$

$U_{вых} = \dot{I}L \simeq \frac{L}{R}\dot{U}_{вх}$

Т11.3




Дано: $I(t) - I_0(\cos\omega_0 t + \cos 2\omega_0 t)$,

$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, $Q = \frac{4}{3}$, R

Найти: $\bar{P}$ - средняя мощность, выделяющаяся на R

Решение:

Цепь линейна, поэтому можно считать отдельно мощность от тока с частотой $\omega_0$ и $2\omega_0$.

$\hat{I} = I_0 e^{i\omega_0 t} + I_0 e^{2i\omega_0 t}$ $(\mathrm{Re}\hat{I} = I)$

$\hat{I}_R R = \hat{I}_{LC}(Z_L + Z_C) = \hat{I}_{LC}\, i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$

1) $\hat{I}_R R = \hat{I}_{LC}\, i\left(\omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C}\right) = \hat{I}_{LC}\, i\left(\sqrt{\frac{L}{C}} - \sqrt{\frac{L}{C}}\right) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ На резисторе мощность не выделяется

2) $\hat{I}_R R = \hat{I}_{LC}\, i\left(2\omega_0 L - \frac{1}{2\omega_0 C}\right) = \hat{I}_{LC}\, i\left(2\sqrt{\frac{L}{C}} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{L}{C}}\right) =$

$= \frac{3}{2} Q i \hat{I}_{LC} \cdot R \Rightarrow \hat{I}_R = \frac{3}{2} Q i \hat{I}_{LC}$

$\hat{I}_R + \hat{I}_{LC} = \hat{I}_2 \Rightarrow \hat{I}_R\left(1 + \frac{1}{\frac{3}{2} Q i}\right) = \hat{I}_2 = I_0 e^{2i\omega_0 t}$

$\hat{I}_R = \frac{\frac{3}{2} Q i}{1 + \frac{3}{2} Q i} I_0 e^{2i\omega t} = \frac{\frac{3}{2} Q i\left(1 - \frac{3}{2} Q i\right)}{1 + \frac{9}{4} Q^2} I_0 e^{2i\omega t}$

$\bar{P} = \frac{1}{T}\int_0^T I_R^2 R\, dt = \frac{R}{T}\int_0^T (\mathrm{Re} I_R)^2 = \frac{R}{T}\int_0^T \left(\frac{\hat{I}_R + \hat{I}_R^*}{2}\right)^2 dt =$

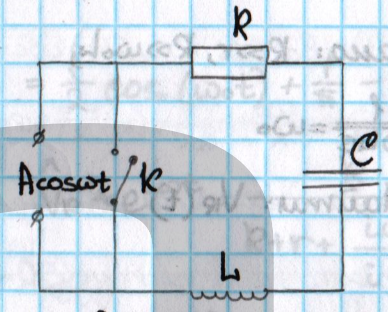
$$= \frac{R}{4T}\int_0^T \left(\hat{I}_R^{\,2} + \hat{I}_R^{*2} + 2\hat{I}_R \hat{I}_R^*\right) dt = \frac{R}{2T}\int_0^T \hat{I}_R \hat{I}_R^* \, dt =$$

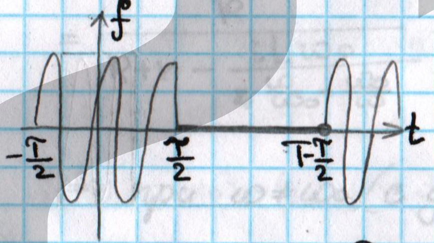
$$= \frac{1}{2} R \left\langle |I_R|^2 \right\rangle$$

$$|I_R|^2 = \left(\frac{\frac{3}{2} Q \sqrt{1 + \frac{9}{4} Q^2}}{1 + \frac{9}{4} Q^2}\right)^2 I_0^2 = \frac{\frac{9}{4} Q^2}{1 + \frac{9}{4} Q^2} I_0^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bar{P} = \frac{1}{2} R \cdot \frac{\frac{9}{4} Q^2}{1 + \frac{9}{4} Q^2} I_0^2 = \frac{2}{5} R I_0^2$$

<u>Ответ:</u> $\boxed{\bar{P} = \frac{2}{5} R I_0^2}$




Дано: $\omega-\omega_0=\Delta\omega$, $|\Delta\omega|>\delta$

Можно ли раскачать колебания периодическим замыканием и размыканием ключа?

$\Omega=?$: амплитуда максимальна

Решение:

$f(t)$ – напряжение на входе $\hat{f}(t)=Ae^{i\omega t}\cdot s(t)$,

где $s(t)=1$ при $t\in[-\frac{\tau}{2};\frac{\tau}{2}]$ и $s(t)=0$ при $t\in[\frac{\tau}{2};T-\frac{\tau}{2}]$

$$S(t)=\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} C_n e^{i\frac{2\pi}{T}nt}$$

$$C_n=\frac{1}{T}\int_{-\tau/2}^{T-\tau/2} s(t)e^{-i\frac{2\pi}{T}nt}dt=\frac{1}{T}\int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{-i\frac{2\pi}{T}nt}dt=$$

$$=-\frac{1}{T\cdot i\frac{2\pi}{T}n}\left(e^{-i\frac{\pi n\tau}{T}}-e^{i\frac{\pi n\tau}{T}}\right)=\frac{1\cdot 2i\sin\frac{\pi n\tau}{T}}{i\pi n\cdot 2}=$$

$$=\frac{\sin \pi n\frac{\tau}{T}}{\pi n}\Rightarrow$$

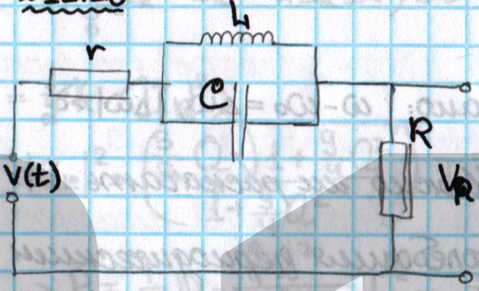
$$\rightarrow \hat{f}(t)=\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} A\frac{\sin(\pi n\frac{\tau}{T})}{\pi n}e^{i(\omega+\frac{2\pi}{T}n)t}$$

Амплитуда максимальна при $n=1$ (кроме $n=0$) $\rightarrow \omega\pm\frac{2\pi}{T}=\omega_0 \Rightarrow \Omega=\Delta\omega$



**Ответ:** Можно, амплитуда максимальна при $\Omega=|\Delta\omega|$

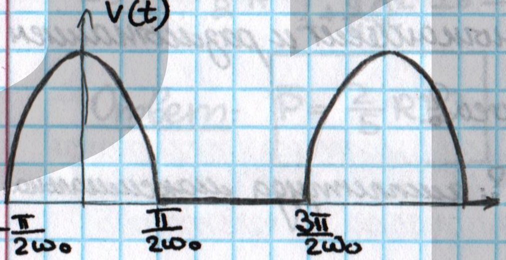
№11.16




Дано: $R \gg r$, $R \gg \omega_0 L$,

$\frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0$

Найти: $V_R(t)$




Решение:

$V(t) = \cos\omega_0 t \cdot s(t)$, где $s(t) = \begin{cases} 1, & t \in [-\frac{\pi}{2\omega_0}; \frac{\pi}{2\omega_0}] \\ 0, & t \in [\frac{\pi}{2\omega_0}; \frac{3\pi}{2\omega_0}] \end{cases}$

Из 11.6: $s(t) = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin\frac{\pi n}{2}}{\pi n} e^{i\omega_0 n t} =$

$= \frac{1}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\frac{\pi n}{2}}{\pi n}\left(e^{i\omega_0 n t} + e^{-i\omega_0 n t}\right) =$

$= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\frac{\pi n}{2}}{n}\cdot\cos(\omega_0 n t) \Rightarrow$

$\Rightarrow V(t) = \frac{1}{2}\cos(\omega_0 t) + \frac{2}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{\pi n}{2}}{n}\cdot\frac{1}{2}\Big[\cos(\omega_0(n+1)t) +$

$+\cos(\omega_0(n-1)t)\Big] = \frac{1}{2}\cos(\omega_0 t) + \frac{1}{\pi}\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\sin(\frac{\pi}{2}n - \frac{\pi}{2})}{n-1}\cos(\omega_0 n t) +$

$+ \frac{1}{\pi}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(\frac{\pi}{2}n + \frac{\pi}{2})}{n+1}\cos(\omega_0 n t) =$

$= \frac{1}{2}\cos(\omega_0 t) - \frac{1}{\pi}\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\cos\frac{\pi}{2}n}{n-1}\cos(\omega_0 t n) + \frac{1}{\pi}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\cos\frac{\pi}{2}n}{n+1}\cos(\omega_0$

$$= \frac{1}{2}\cos(\omega_0 t) + \frac{1}{\pi} + 0 + \frac{1}{\pi}\sum_{n=2}^{+\infty}\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n-1}\right)\cos(\omega_0 n t) =$$

$$= \frac{1}{2}\cos(\omega_0 t) + \frac{1}{\pi} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(\omega_0 n t)}{4n^2-1}$$

$$\hat{V}_R e^{i\omega t} = \frac{R}{R+r+\dfrac{i\omega L\cdot\frac{1}{i\omega C}}{i\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)}}\hat{V}e^{i\omega t} =$$

$$= \frac{R}{R+r-\dfrac{iL\omega_0}{\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}}}\hat{V}e^{i\omega t} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ при $\omega \neq \omega_0$ (с учётом $\omega_0 L \ll R$ и $r \ll R$) гармоника проходит практически без изменений, а при $\omega = \omega_0$: $\hat{V}_R e^{i\omega_0 t} = 0 \Rightarrow$

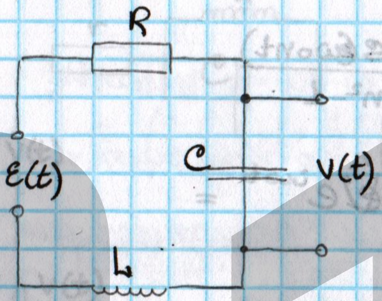
$\Rightarrow$ на выходе: $V_R(t) \approx \frac{1}{\pi} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(\omega_0 n t)}{4n^2+1} =$

$$= V(t) - \frac{1}{2}\cos(\omega_0 t) = \begin{cases}\cos(\omega_0 t), & t\in\left[-\frac{\pi}{2\omega_0};\frac{\pi}{2\omega_0}\right]\\ 0, & t\in\left[\frac{\pi}{2\omega_0};\frac{3\pi}{2\omega_0}\right]\end{cases} - \frac{1}{2}\cos\omega_0 t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |V_R(t)| = \frac{1}{2}|\cos(\omega_0 t)|$$

<u>Ответ</u>: $\boxed{V_R(t) = \frac{1}{2}|\cos(\omega_0 t)|}$

Т12.1




Дано: $\mathcal{E}(t)=\mathcal{E}_0(1+m\cos\Omega t)\cos\omega_0 t$

$m<1,\ \Omega=\frac{\omega_0}{2},\ \frac{1}{\sqrt{LC}}=\frac{\omega_0}{2}=\omega_p$

две гармоники $V(t)$ имеют одинаковую амплитуду, $Q=25$

Найти: $m$

Решение:

$\mathcal{E}(t)=\mathcal{E}_0(1+m\cos\Omega t)\cos\omega_0 t=\mathcal{E}_0\cos(\omega_0 t)+\mathcal{E}_0 m\cos(\Omega t)\cos(\omega_0 t)=$

$=\mathcal{E}_0\cos(\omega_0 t)+\frac{\mathcal{E}_0 m}{2}\cos((\omega_0-\Omega)t)+\frac{\mathcal{E}_0 m}{2}\cos((\omega_0+\Omega)t)$

$$|A(\omega)|=\left|\frac{\frac{1}{i\omega C}}{R+i(\omega L-\frac{1}{\omega C})}\right|=\left|\frac{1}{i\omega RC-(\frac{\omega^2}{\omega_p^2}-1)}\right|=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{(\frac{\omega}{\omega_p})^2\cdot\frac{1}{Q^2}+((\frac{\omega}{\omega_p})^2-1)^2}}=\frac{Q}{\sqrt{\frac{4\omega^2}{\omega_0^2}+Q^2(\frac{4\omega^2}{\omega_0^2}-1)^2}}$$

1) $\mathcal{E}_0\cos(\omega_0 t)\to\frac{Q\mathcal{E}_0}{\sqrt{4+9Q^2}}\cos(\omega_0 t+\varphi)\approx\frac{1}{3}\mathcal{E}_0\cos(\omega_0 t+\varphi)$

2) $\frac{\mathcal{E}_0 m}{2}\cos((\omega_0-\Omega)t)=\frac{\mathcal{E}_0 m}{2}\cos(\frac{1}{2}\omega_0 t)\to Q\frac{\mathcal{E}_0 m}{2}\cos(\frac{1}{2}\omega_0 t+\varphi)$

3) $\frac{\mathcal{E}_0 m}{2}\cos((\omega_0+\Omega)t)=\frac{\mathcal{E}_0 m}{2}\cos(\frac{3}{2}\omega_0 t)\to\frac{Q\frac{\mathcal{E}_0 m}{2}}{\sqrt{9+64Q^2}}\cos(\frac{3}{2}\omega_0 t+\varphi)=$

$\approx\frac{1}{8}\frac{\mathcal{E}_0 m}{2}$

Если (1)=(3), то $m>1$, (2) всегда не равно (3) $\Rightarrow$

$\Rightarrow\frac{1}{3}\mathcal{E}_0\approx Q\frac{\mathcal{E}_0 m}{2}\Rightarrow m=\frac{2}{3Q}=\frac{2}{75}$

Ответ: $\boxed{m\approx\frac{2}{3Q}=\frac{2}{75}}$

№11.2

Дано: $g(t)$ - усреднение за $\Delta t$ квадрата $f(t)$,

1) $f(t) = A(1 + m\cos\Omega t)\cos\omega_0 t$

2) $f(t) = A\cos(\omega_0 t + m\cos\Omega t)$, $m \ll 1$

3) $f(t) = mA\cos\Omega t$

с спектр. комп. $\Delta\varphi = \frac{\pi}{2}$

4) $f(t) = A\cos(\omega_0 t + m\cos\Omega t)$, $m \ll 1$

$\frac{2\pi}{\omega_0} \ll \Delta t \ll \frac{2\pi}{\Omega}$

Найти $g(t)$

Решение.

1) $$g(t) = \frac{1}{\Delta t}\int_t^{t+\Delta t} A^2(1 + m\cos\Omega t)^2\cos^2\omega_0 t\, dt \simeq \left(\text{поск. } \frac{2\pi}{\Omega}\right)$$

$$\simeq \frac{1}{\Delta t}A^2(1 + m\cos\Omega t)^2\int_t^{t+\Delta t}\frac{1 + \cos 2\omega_0 t}{2}dt \simeq \frac{1}{2}A^2(1 + m\cos\Omega t)^2$$

2) $$g(t) = \frac{1}{\Delta t}\int_t^{t+\Delta t} A^2(\cos(\omega_0 t)\cos(m\cos\Omega t) - \sin\omega_0 t\sin(m\cos\Omega t))^2 dt \simeq$$

$$\simeq \frac{1}{\Delta t}A^2\int_t^{t+\Delta t}(\cos^2\omega_0 t - \sin 2\omega_0 t \cdot m\cos\Omega t)\,dt \simeq$$

$$\simeq A^2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{A^2}{2}$$

3) $$g(t) = (mA)^2\frac{1}{\Delta t}\int_t^{t+\Delta t}\cos^2\Omega t\, dt \simeq \frac{(mA)^2}{2}(1 + \cos 2\Omega t)$$

$$4)\ g(t)=\frac{1}{\Delta t}\int_t^{t+\Delta t}A^2\sin^2(\omega_0 t-m\cos\Omega t)\,dt=$$

$$=\frac{A^2}{2}\frac{1}{\Delta t}\int_t^{t+\Delta t}\left(1-\cos(2\omega_0 t-2m\cos\Omega t)\right)dt\approx$$

$$\approx\frac{A^2}{2}-\frac{A^2}{2}\frac{1}{\Delta t}\int_t^{t+\Delta t}(\cos 2\omega_0 t\cdot 1+\sin 2\omega_0 t\cdot 2m\cos\Omega t)\,dt$$

$$=\frac{A^2}{\Delta t}\int_t^{t+\Delta t}\left(\sin\omega_0 t\cos(m\cos\Omega t)-\cos\omega_0 t\sin(m\cos\Omega t)\right)^2dt\approx$$

$$\approx\frac{A^2}{\Delta t}\int_t^{t+\Delta t}(\sin\omega_0 t-m\cos\Omega t\cos\omega_0 t)^2dt=$$

$$=\frac{A^2}{\Delta t}\int_t^{t+\Delta t}\frac{1-\cos 2\omega_0 t}{2}-m\cdot\sin 2\omega_0 t\cos\Omega t+$$

$$f(t)=A\cos(\omega_0 t+m\cos\Omega t)=A\cos\omega_0 t\cos(m\cos\Omega t)-$$

$$-A\sin\omega_0 t\sin(m\cos\Omega t)\approx A\cos\omega_0 t-$$

$$-A\sin\omega_0 t\cdot m\cos\Omega t\Rightarrow f(t)\approx A(\sin\omega_0 t-\sin\omega_0 t\cdot m\cos\Omega t$$

$$g(t)=\frac{1}{\Delta t}\int_t^{t+\Delta t}A^2\sin^2\omega_0 t\,(1+m\cos\Omega t)^2dt\approx$$

$$\approx A^2(1+m\cos\Omega t)^2\cdot\frac{1}{2}\approx\frac{A^2}{2}(1+2m\cos\Omega t)$$

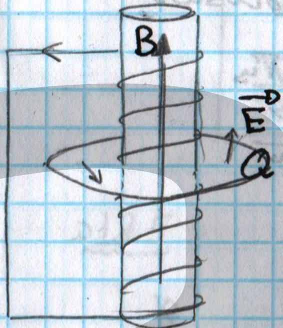
Ответ:

1) $g(t)\approx\frac{1}{2}A^2(1+m\cos\Omega t)^2$

2) $g(t)\approx\frac{A^2}{2}$

3) $g(t)\approx\frac{(mA)^2}{2}(1+\cos(2\Omega t))$

4) $g(t)\approx\frac{1}{2}A^2(1+2m\cos\Omega t)$




Дано: $r_0 = 2$ см, $B_0 = 10^4$ Гс,

$Q = 4 \cdot 10^{-6}$ Кл

Найти: $L$

Решение:

$$\oint_{\partial S} \vec{E} d\vec{l} = -\frac{1}{c}\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S} \cancel{= -\frac{1}{c}\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}}$$

$$\Rightarrow 2\pi r E(r) = -\frac{1}{c}\frac{\partial B}{\partial t} \cdot \pi r_0^2 \Rightarrow E(r) = -\frac{r_0^2}{2cr}\dot{B}$$

Момент сил, действующих на кольцо:

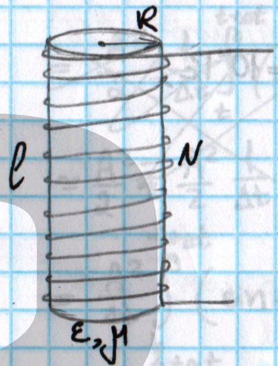
$$dM = E(r) \cdot dQ(r) \cdot r = -\frac{r_0^2}{2cr}\dot{B} \cdot \frac{2\pi r dr}{\pi R^2 - \pi r_0^2} Q \cdot r$$

Суммарный момент сил:

$$M_\Sigma = \int_{r_0}^{R} dM = -\frac{r_0^2 \dot{B} Q}{2c} = \dot{L} \Rightarrow L = \frac{r_0^2 B_0 Q}{2c} = 8 \cdot 10^{-3} \frac{г \cdot см^2}{с}$$

Ответ: $\boxed{L = \frac{r_0^2 B_0 Q}{2c} = 8 \cdot 10^{-3} \frac{г \cdot см^2}{с}}$

№12.3




Дано: $N, \varepsilon, \mu, R, l, \ J = J_0 \cos\omega t$,

$R = 5$ см, $\varepsilon = \mu = 1$, $\nu = 100$ Гц

Найти: $W_м, W_э, \dfrac{W_э^{max}}{W_м^{max}}$

Решение:

$$B = \mu \frac{4\pi}{c} i = \frac{4\pi N J \mu}{c l} = \frac{4\pi \mu N J_0}{c l} \cos(\omega t)$$

$$\oint_{\partial S} \vec{E} d\vec{l} = -\frac{1}{c} \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S} \Rightarrow 2\pi r E(r) = -\frac{1}{c} \dot{B} \pi r^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E(r) = -\frac{r}{2c} \dot{B}$$

$$W_м = V \cdot \frac{\vec{B}\vec{H}}{8\pi} = \frac{R^2 l}{8\mu} \cdot \left(\frac{4\pi \mu N J_0}{c l} \cos(\omega t)\right)^2 =$$

$$= \frac{2\pi^2 \mu N^2 R^2 J_0^2}{c^2 l} \cos^2(\omega t)$$

$$dW_э = \cancel{V \frac{\vec{E}\vec{D}}{8\pi} = \frac{R^2 l}{8\varepsilon}} dV \cdot \frac{\vec{E}(r)\vec{D}(r)}{8\pi} = 2\pi r l dr \cdot \frac{\varepsilon}{8\pi} \cdot \Big(\frac{r}{2c} \cdot$$

$$\frac{4\pi \mu N J_0}{c l} \omega \sin(\omega t)\Big)^2 = \frac{\pi^2 \mu^2 \varepsilon N^2 \omega^2 J_0^2}{c^4 l} \sin^2(\omega t) r^3 dr$$

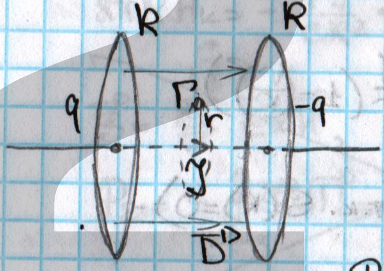
$$W_э = \int_0^R dW = \frac{\pi^2 \mu^2 \varepsilon N^2 \omega^2 J_0^2 R^4}{4 c^4 l} \sin^2(\omega t)$$

$$\frac{W_э^{max}}{W_м^{max}} = \frac{\cancel{\pi^2} \mu^{\cancel{2}} \varepsilon \cancel{N^2} \omega^2 \cancel{J_0^2} R^{\cancel{4}\,2}}{4 c^{\cancel{4}} \cancel{l}} \cdot \frac{\cancel{c^2 l}}{2 \cancel{\pi^2 \mu N^2 R^2 J_0^2}} = \frac{\mu \varepsilon \omega^2 R^2}{8 c^2} \approx 1{,}4 \cdot 10^{-1\ldots}$$

**Ответ:**

$$\boxed{\begin{gathered} W_э = \frac{\pi^2 \mu^2 \varepsilon N^2 \omega^2 \mathcal{I}_0^2 R^4}{4c^4 l}\sin^2(\omega t) \\ W_м = \frac{2\pi^2 \mu N^2 R^2 \mathcal{I}_0^2}{c^2 l}\cos^2(\omega t) \\ \frac{W_э^{max}}{W_м^{max}} = \frac{\mu\varepsilon\omega^2 R^2}{8c^2} \approx 1{,}4\cdot 10^{-15} \end{gathered}}$$

№12.5




Дано: $\mathcal{J}, R, r$, разряд считать квазистационарным

Найти: $H(r)$

Решение:

$$\oint_\Gamma \vec{H}\,d\vec{l} = \frac{4\pi}{c}\int_\Pi \vec{j}\,d\vec{\Pi} + \frac{1}{c}\int_\Pi \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\,d\vec{\Pi}$$

$$2\pi r H = \frac{4\pi}{c}\mathcal{J} + \frac{1}{c}\pi r^2\cdot\dot{D}$$

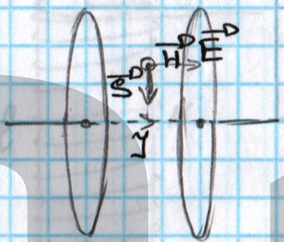
$$D = 4\pi\sigma = 4\pi\frac{q}{\pi R^2}, \quad \dot{D} = \frac{4}{R^2}\dot{q} = -\frac{4\mathcal{J}}{R^2}$$

$$2\pi r H = \frac{4\pi \mathcal{J}}{c}\left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right)$$

$$H = \frac{2\mathcal{J}}{cr}\left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right)$$

**Ответ:** $\boxed{H = \frac{2\mathcal{J}}{cr}\left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right)}$

д12.8




В условиях предыдущей задачи найти поток электромагнитной энергии, вытекающей за пространство между обкладками.

Решение:

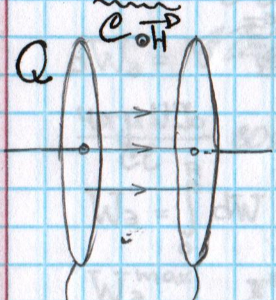
$$\vec S = \frac{c}{4\pi}\vec E\times\vec H, \quad S = \frac{c}{4\pi}\cdot 4\pi\sigma\cdot\frac{2J}{cr}\left(1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right)$$

$$\Phi_S = \oint\limits_{конд}\vec S\,d\vec\Pi = 0 + \int\limits_{бок}\vec S\,d\vec\Pi = 0 \ (\text{т.к. } S(R)=0) -$$

– ~~......~~ поток электромагнитной энергии

Ответ: $\boxed{\Phi_{эм}=0}$

д12.9




Дано: Q, C, пластины соединяют длинным цилиндрическим проводом. Показать, что полный поток электромагнитной энергии из конденсатора равен потоку энергии втекающей в провод.

Решение:

Аналогично 12.5: $2\pi R H_k = \cancel{\frac{4\pi}{c}}\frac{1}{c}\dot{D}\cdot\pi R^2$ (в данном случае тока в конденсаторе нет)

$\dot{D} = 4\pi\dot{\sigma} = -\frac{4\dot{Q}}{R^2}$ (т.к. $\dot{Q} = I$ — положительная скорость изменения заряда)

$$2\pi R H_k = -\frac{4I}{cR^2}\cdot\pi R^2 = -\frac{4\pi I}{c} \Rightarrow H_k(R) = -\frac{2I}{cR}$$

$$\cancel{\vec{S} = \frac{c}{4\pi}\vec{E}\times\vec{H},\quad S = -\frac{c}{4\pi}\cdot\frac{U}{d}\cdot\frac{2I}{cR}}$$

$$\cancel{\Phi_{ЭМ} - \oint_{конд}\vec{S}d\vec{\Pi} = \frac{c}{4\pi}\frac{U}{d}\cdot\frac{2I}{cR}\cdot 2\pi R d = UI}$$

$$\Phi_{пров} = H_{пров}\cdot\pi r_{пров}^2 = \frac{2I}{}$$

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi}\vec{E}\times\vec{H},\quad S = -\frac{c}{4\pi}\cdot\frac{U}{d}\cdot\frac{2I}{cR}$$

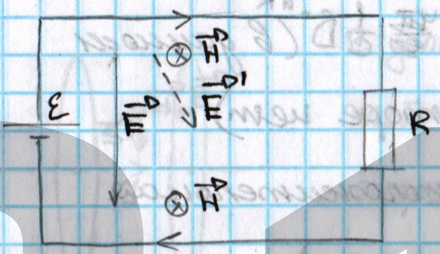
$$\Phi_{конд} = -\oint_{конд}\vec{S}d\vec{\Pi} = \frac{c}{4\pi}\frac{U}{d}\cdot\frac{2I}{cR}\cdot 2\pi R d = IU$$

Поток энергии через провод $\Phi_{пров} = IU = P$ (мощность)

Поток энергии втекает через края конденсатора, попадает в провод и в нём превращается в тепловую энергию.

14 неделя

№12.25 + 12.40




Одна пара концов линии присоединена к генератору постоянного тока, другая к нагрузке.

Показать, что $\vec{S}$ направлен к нагрузке.

Показать, что будет если учесть потери в проводах.

Если ток отстаёт от напряжения на $\frac{\pi}{2}$, показать, что $\vec{S}$ меняет направление через каждую четверть периода.

Решение:

$\vec{S} = \frac{c}{4\pi}\vec{E}\times\vec{H}$, на рисунке показано направление векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$ => $\vec{S}$ направлен к нагрузке (вся энергия передаётся ей)

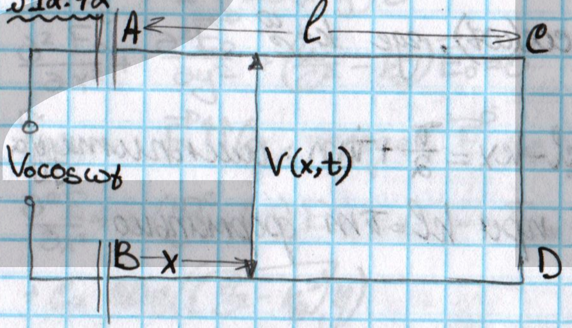
Если провода имеют сопротивление, то существует ~~ра~~ падение напряжения вдоль проводов и составляющая $\vec{E}$, направленная к нагрузке: $\vec{E}'$ показан на рисунке.

Тогда вектор Пойнтинга имеет составляющую, направленную к проводам.

$$\begin{cases} H \sim J \sim \cos\omega t \\ E \sim U \sim \sin\omega t \end{cases} \Rightarrow S \sim \sin(2\omega t) \Rightarrow \text{меняет}$$

знак каждую четверть периода.

№12.42



Дано: $l, V_0, \omega$

Найти: $V(x,t)$

$$V(x,t) = \underbrace{A\cos(\omega t - kx + \varphi_1)}_{\text{набегающая волна}} + \underbrace{B\cos(\omega t + kx + \varphi_2)}_{\text{отражённая волна}}$$

$$V(l,t) = 0 = A\cos(\omega t + \varphi_1 - kl) + B\cos(\omega t + kl + \varphi_2)$$

$\forall t \Rightarrow A = B$ (амплитуды равны)

$$2A\cos\left(\omega t + \frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}\right)\cos\left(kl + \frac{\varphi_2-\varphi_1}{2}\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow kl + \frac{\varphi_2-\varphi_1}{2} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \varphi_2 = \varphi_1 + \pi - 2kl$$

$$V(0,t) = A\cos(\omega t + \varphi_1) + A\cos(\omega t + \varphi_2) = V_0\cos(\omega t)$$

$$A\left(\cos(\omega t + \varphi_1) - \cos(\omega t + \varphi_1 - 2kl)\right) = V_0\cos\omega t$$

$$-2A\sin(\omega t+\varphi_1-kl)\,\cancel{\sin\cos}\,\sin(kl) = V_0\cos(\omega t) = V_0\sin\left(\frac{\pi}{2}-\omega t\right) = -V_0\sin\left(\omega t-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$A = +\frac{V_0}{2\sin(kl)}$$

$$\varphi_1 - kl = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow \varphi_1 = kl - \frac{\pi}{2}.$$

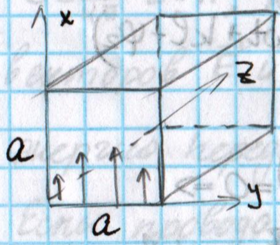
$$V(x,t) = \frac{V_0}{2\sin(kl)}\left[\cos\left(\omega t - kx + kl - \frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(\omega t + kx + \pi - 2kl + kl - \frac{\pi}{2}\right)\right] = \frac{V_0}{2\sin(kl)}\left[\sin(\omega t + kl - kx) - \sin(\omega t - kl + kx)\right] =$$

$$= \frac{V_0}{\sin(kl)}\sin(kl-kx)\cos(\omega t), \text{ где } k=\frac{\omega}{c}$$

В пучностях $kl - kx = \frac{\pi}{2} + \pi m$: амплитуда колебаний $\frac{V_0}{\sin kl}$, при $kl = \pi m$ формально бесконечна.

Ответ: $V(x,t) = \frac{V_0}{\sin kl}\sin(kl-kx)\cos(\omega t)$

№12.46




Дано: $a = 5$ см, $\nu_0 = 2995$ МГц,

$E_x = E_0\cos(2\pi\nu_0 t)$, $\vec{E}\perp Oz$, $\vec{E}\parallel Oxy$,

волна модулированна, $\nu_{мод} = 5$ МГц

Найти: $\nu_{min}$ – возможно распространение волны, $\delta(\nu_{мод})$

Решение:

Распространение волны описывается уравнением:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2}.$$

$$\vec{E} = \vec{E_1}(\vec{r})e^{i\omega t};$$

$$\frac{\omega^2}{c^2}\vec{E_1} + \frac{\partial^2 \vec{E_1}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{E_1}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{E_1}}{\partial z^2} = 0;$$

$$\vec{E} \perp z \Rightarrow \vec{E} = \vec{E_0}(x,y)e^{i(\omega t - k_z z)}$$

$$\frac{\partial^2 \vec{E_0}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{E_0}}{\partial y^2} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2\right)\vec{E_0} = 0$$

Пусть $\vec{E} \uparrow\uparrow Ox$, тогда $\vec{E}$ не зависит от $y$:

$$\frac{\partial^2 E_{ox}}{\partial x^2} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right)E_{ox} = 0 \Rightarrow E_{ox} = c_1 \sin\left(\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2}\, y\right) +$$

$$+ c_2 \cos\left(\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2}\, y\right)$$

Граничные условия: $\{E_\tau\} = 0 \Rightarrow E_{ox}(0) = E_{ox}(a) = 0$

$$E_{ox}(0) = c_2 = 0$$

$E_{ox}(a) = c_1 \sin\left(\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2}\, a\right) = 0$ – возможно при

$$\left(\frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2\right)a^2 = (\pi m)^2 \Rightarrow \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 = \frac{(\pi m)^2}{a^2}$$

Минимальная частота, при которой волна распространяется реализуется при $k_z = 0$, $m = 1$:

$$\omega_{кр} = \frac{\pi c}{a} \Rightarrow \nu_{кр} = \frac{c}{2a}$$

В амплитудно модулированной волне

присутствует 3 гармоники: $2\pi\nu_0 - 2\pi\nu_{мод}$,
$2\pi\nu_0$ и $2\pi\nu_0 + 2\pi\nu_{мод}$

$$2\pi\nu_0 + 2\pi\nu_{мод} = 2\pi\nu_{кр} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \nu_{min} = \frac{c}{2a} - \nu_0 \simeq 3\text{ МГц}$$

$$v = \frac{\omega}{k_z} = \cancel{\frac{c\sqrt{k_x^2+k_z^2}}{k_z}\ (\text{т.к. } k_y = 0)}$$

$$\omega_{кр} = c k_x$$

(т.к. $k_y = 0$)

$$\omega = c\sqrt{k_x^2 + k_z^2} = c\sqrt{\frac{\omega_{кр}^2}{c^2} + k_z^2} \Rightarrow$$

$$k_z = \frac{1}{c}\sqrt{\omega^2 - \omega_{кр}^2} \Rightarrow v = \frac{c\omega}{\sqrt{\omega^2 - \omega_{кр}^2}} =$$

$$= \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_{кр}}{\omega}\right)^2}} = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{c}{2a(\nu_{мод}+\nu_0)}\right)^2}} \simeq 27c$$

Ответ: $\boxed{\nu_{min} = \frac{c}{2a} - \nu_0 \simeq 3\text{ МГц},\quad v = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{c}{2a(\nu_{мод}+\nu_0)}\right)^2}} \simeq 27c}$

12.52

Дано: $N_0 = 100$ кВт - посылаемая в волновод мощность

$N_н = 75$ кВт - поглощаемая в нагрузке мощность

Найти: КСВ

Решение:

$$V(x,t) = V_0 e^{i(\omega t - kx)} + r V_0 e^{i(\omega t + kx)},$$ $r$ - коэффициент

отражения

$$V(x,t) = \underline{rV_0 e^{i\omega t}}\left(e^{ikx} + e^{-ikx}\right) + (1-r)V_0 e^{i(\omega t - kx)} =$$

$$= \underbrace{2rV_0 e^{i\omega t}\cos(kx)}_{\text{стоячая волна}} + \underbrace{(1-r)V_0 e^{i(\omega t - kx)}}_{\text{падающая волна}}$$

$$КСВ = \frac{2rV_0 + (1-r)V_0}{(1-r)V_0} = \frac{1+r}{1-r}$$

$N_0 \sim V_0^2$

$N_0 - N_u \sim r^2 V_0^2$ – отражённая мощность $\Rightarrow$

$$\Rightarrow r^2 = \frac{N_0 - N_u}{N_0} \Rightarrow КСВ = \frac{1 + \sqrt{1 - \frac{N_u}{N_0}}}{1 - \sqrt{1 - \frac{N_u}{N_0}}} = 3$$

Ответ: $\boxed{КСВ = \frac{1 + \sqrt{1 - \frac{N_u}{N_0}}}{1 - \sqrt{1 - \frac{N_u}{N_0}}} = 3}$

15 неделя

T15.1

Дано: $V = 100$ мл, $\varepsilon = 81$, $\mu_{моль} = 58\ \frac{г}{моль}$, $NaCl \to Na^+, Cl^-$

Найти: m такое что раствор можно считать идеальной плазмой

Решение:

$$r_D = \sqrt{\frac{\varepsilon k_Б T}{4\pi e^2 n}}$$

Раствор можно считать идеальной плазмой, если $r_D << a$, где a - характерный размер плазмы и $N_D >> 1$

$$a = \sqrt[3]{V}, \quad n = \frac{N}{V} = \frac{m}{\mu_{моль}} \cdot \frac{N_A}{V}$$

1) $$\frac{\varepsilon k_Б T V \mu_{моль}}{4\pi e^2 m N_A} << \sqrt[3]{V^2} \Rightarrow m >> \frac{1}{4\pi} \frac{\varepsilon k_Б T \mu_{моль} V^{1/3}}{e^2 N_A} =$$

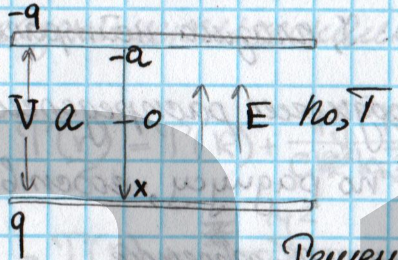
$$= \frac{1}{4\pi} \frac{81 \cdot 1{,}38 \cdot 10^{-16} \cdot 300 \cdot 58 \cdot 100^{1/3}}{(4{,}8 \cdot 10^{-10})^2 \cdot 6 \cdot 10^{23}} \sim 5{,}2 \cdot 10^{-16}\ г$$

2) $$N_D = \frac{4}{3}\pi r_D^3 N = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{\varepsilon k_Б T}{4\pi e^2}\right)^{3/2} \cdot \frac{1}{\delta n} >> 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m << \frac{\mu_{моль} V}{9 N_A \cdot 4\pi} \left(\frac{\varepsilon k_Б T}{e^2}\right)^3 \simeq 0{,}26\ г$$

Ответ: $\boxed{5{,}2 \cdot 10^{-16}\ г << m << 0{,}26\ г}$

№12.55




Дано: $n_0, T, V, a, eV \ll k_Б T$

Найти: $\varphi(x)$

Решение:

$$\left.\begin{aligned} n_e &= n_0 \exp\left(-\frac{-e\varphi}{k_Б T}\right) \approx n_0\left(1+\frac{e\varphi}{k_Б T}\right) \\ n_i &= n_0 \exp\left(-\frac{e\varphi}{k_Б T}\right) \approx n_0\left(1-\frac{e\varphi}{k_Б T}\right) \end{aligned}\right| \text{ распределение Больцмана}$$

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{div}\vec{E} &= \operatorname{div}(-\operatorname{grad}\varphi) = -(\nabla, \nabla\varphi) = -\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} \\ \operatorname{div}\vec{E} &= 4\pi\rho = 4\pi e\,(n_i - n_e) = -\frac{8\pi e^2 n_0}{k_Б T}\varphi \end{aligned}\right| \Rightarrow$$

$\Rightarrow \varphi'' = \frac{8\pi e^2 n_0}{k_Б T}\varphi$, обозначим $D = \sqrt{\frac{k_Б T}{8\pi n_0 e^2}}$:

$$\varphi'' = \frac{1}{D^2}\varphi$$

$$\varphi = A\exp\left(-\frac{x}{D}\right) + B\exp\left(\frac{x}{D}\right)$$

$\varphi(0) = 0$ (чтобы $n_e = n_0 = n_i$): $B = -A$

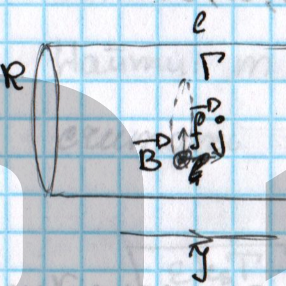
$$\varphi\left(\frac{a}{2}\right) - \varphi\left(-\frac{a}{2}\right) = V \Rightarrow A = -\frac{V}{2}\cdot\frac{1}{\exp\left(\frac{a}{2D}\right) - \exp\left(-\frac{a}{2D}\right)}$$

$$\varphi(x) = \frac{V}{2}\cdot\frac{\exp\left(\frac{x}{D}\right) - \exp\left(-\frac{x}{D}\right)}{\exp\left(\frac{a}{2D}\right) - \exp\left(-\frac{a}{2D}\right)} = \frac{V}{2}\frac{\operatorname{sh}\left(\frac{x}{D}\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{a}{2D}\right)}$$

Ответ: $\boxed{\varphi(x) = \frac{V}{2}\cdot\frac{\operatorname{sh}\left(\frac{x}{D}\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{a}{2D}\right)}, \text{ где } D^2 = \frac{k_Б T}{8\pi n_0 e^2}}$

№12.58

Z-пинч




Дано: $J$, плазма нейтральна с однородным распределением $n$ и $J$ по радиусу, собственное магнитное давление уравновешивается давлением газа, $R = 5$ см, $J = 4\cdot10^5$ А, $n = 10^{16}$ см$^{-3}$, $\mu = 1$

Найти: $T$-на оси

Решение:

$$\oint\limits_\Gamma \vec{H}d\vec{l} = \int\limits_S \vec{j}d\vec{S} \Rightarrow B\cdot 2\pi r = \pi r^2\cdot j\cdot\frac{4\pi}{c} \Rightarrow B = \frac{2\pi r}{c}j$$

$\cancel{\vec{F} = \frac{1}{c}\vec{j}\times\vec{B}\cdot l}$ Плотность силы магнитного давления: $\vec{f} = +\frac{1}{c}\vec{j}\times\vec{B}$, $f = \frac{2\pi r}{c^2}j^2$ - сила действующая на единицу объёма полого цилиндра толщиной $dr$.

$$dp = \frac{dF}{S} = \frac{-f\cdot S dr}{S} = -f dr = \frac{-2\pi j^2}{c^2} r dr \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p(R) - p(r) = \frac{2\pi j^2}{c^2}\left(\frac{r^2}{2} - \frac{R^2}{2}\right) = \frac{\pi j^2 R^2}{c^2}\left(\left(\frac{r}{R}\right)^2 - 1\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p(r) = p(R) + \frac{\pi j^2 R^2}{c^2}\left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right)$$

Магнитное давление уравновешивается газокинетическим => $p(r)=nk_Б T(r)$

$$T(r)=T(R)+\frac{\pi j^2 R^2}{c^2 k_Б n}\left(1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right)=$$

$$=T(R)+\frac{J^2}{\pi R^2 c^2 k_Б n}\left(1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right)$$

$T(R)\ll T(0)$: $T(0)\simeq\frac{J^2}{\pi R^2 c^2 k_Б n}\simeq 1{,}47\cdot 10^{7}\,K$

Ответ: $\boxed{T(0)\simeq\frac{J^2}{\pi R^2 c^2 k_Б n}\simeq 1{,}47\cdot 10^{7}\,K}$

T15.2

Дано: $f=1$ ГГц, потери в центральном проводе коаксиального кабеля, $D=0{,}6$ мм, $\sigma=5{,}8\,10\,\frac{\text{сименс}}{\text{м}}$, $S=750$ м

Найти: $\frac{\Delta U}{U}$

Решение:

Глубина скин-слоя $\delta\sim\frac{c}{\sqrt{2\pi\sigma\omega}}=\frac{c}{2\pi\sqrt{\sigma f}}$

$$\delta\sim\frac{3\cdot 10^{10}}{2\pi\sqrt{5{,}8\cdot 10^{7}\cdot 8{,}988\cdot 10^{9}\cdot 10^{9}}}\approx 2\cdot 10^{-4}\,\text{см}$$

$$R=\frac{1}{\sigma}\frac{L}{S}=\frac{L}{\sigma\cdot\pi D\delta}\sim 46\,\text{Ом}$$

$$\frac{\Delta U}{U}=\frac{IS-IR}{IS}=1-\frac{R}{S}\approx 0{,}4$$

Ответ: $\boxed{\frac{\Delta U}{U}\approx 0{,}4}$