24.20(3) $A=\frac{1}{3}\begin{Vmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{Vmatrix}$

$$|A-\lambda E| = \frac{1}{27}\begin{vmatrix}2-3\lambda&-1&-1\\-1&2-3\lambda&-1\\-1&-1&2-3\lambda\end{vmatrix} = \frac{1}{27}\left[(2-3\lambda)\begin{vmatrix}2-3\lambda&-1\\-1&2-3\lambda\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}-1&-1\\-1&2-3\lambda\end{vmatrix}-\right.$$

$$\left.-\begin{vmatrix}-1&2-3\lambda\\-1&-1\end{vmatrix}\right] = \frac{1}{27}\left[(2-3\lambda)^3-(2-3\lambda)-(2-3\lambda)-1-1-(2-3\lambda)\right]=$$

$$=\left(\frac{2}{3}-\lambda\right)^3-\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}-\lambda\right)-\frac{2}{27}=\frac{8}{27}-\frac{4}{3}\lambda+2\lambda^2-\lambda^3-\frac{2}{9}+\frac{1}{3}\lambda-\frac{2}{27}=$$

$=-\lambda^3+2\lambda^2-\lambda=-\lambda(\lambda-1)^2=0 \Rightarrow \lambda=0$ или $\lambda=1$

$\lambda=0$: $\frac{1}{3}\begin{Vmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{Vmatrix}\vec{s}_1=\vec{0} \Rightarrow \vec{s}_1=\begin{Vmatrix}1\\1\\1\end{Vmatrix}$, собс. п/пр $\left\langle\begin{Vmatrix}1\\1\\1\end{Vmatrix}\right\rangle$ - прямая $x=y=z$

$\lambda=1$: $\frac{1}{3}\begin{Vmatrix}-1&-1&-1\\-1&-1&-1\\-1&-1&-1\end{Vmatrix}\vec{s}_{2,3}=\vec{0} \Rightarrow \vec{s}_2=\begin{Vmatrix}-1\\1\\0\end{Vmatrix}, \vec{s}_3=\begin{Vmatrix}-1\\0\\1\end{Vmatrix}$, собс. п/пр $\left\langle\begin{Vmatrix}-1\\1\\0\end{Vmatrix}, \begin{Vmatrix}-1\\0\\1\end{Vmatrix}\right\rangle$ - пл-ть $x+y+z=0$

$A_{\vec{s}}=\begin{Vmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{Vmatrix}$

24.28

1) $\mathcal{L}$ диагонализируемо => в базисе собс. векторов $\vec{s}$

$A_{\vec{s}}=\begin{Vmatrix}\lambda_1&&0\\&\ddots&\\0&&\lambda_n\end{Vmatrix} \Rightarrow \forall \vec{x}\in\mathcal{L}\ \ \varphi(\vec{x})=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i c_i\vec{s}_i=\sum_{i:\lambda_i\neq0}\lambda_i c_i\vec{s}_i$, т.е.

$\operatorname{Im}\varphi=\langle\vec{s}_i\rangle,\ \lambda_i\neq0$

2) $\forall\vec{x}\in\mathcal{L}\ \ \vec{x}=\vec{x}_1+\vec{x}_2,\ \vec{x}_1=\sum_{i,\lambda_i\neq0}c_i\vec{s}_i,\ \vec{x}_2=\sum_{i,\lambda_i=0}c_i\vec{s}_i$.

$\vec{x}_1\in\operatorname{Im}\varphi$, по 1 пункту $\vec{x}_2\in\operatorname{Ker}\varphi$, т.к. $\varphi(\vec{x}_2)=\sum_{i,\lambda_i=0}\lambda_i c_i\vec{s}_i=\vec{0}$

А значит $\mathcal{L}=\operatorname{Im}\varphi\oplus\operatorname{Ker}\varphi$

24.30 (3,22,34).

3) $A=\begin{Vmatrix}0&2\\-1&-3\end{Vmatrix}$ $\quad |A-\lambda E|=\begin{vmatrix}-\lambda&2\\-1&-3-\lambda\end{vmatrix}=3\lambda+\lambda^2+2=(\lambda+1)(\lambda+2)=0\Rightarrow\lambda=-1,\ \lambda=-2$

$\lambda=-1$: $\begin{Vmatrix}1&2\\-1&-2\end{Vmatrix}\vec{s}_1=\vec{0}\Rightarrow\vec{s}_1=\begin{Vmatrix}-2\\1\end{Vmatrix}$

$\lambda=-2$: $\begin{Vmatrix}2&2\\-1&-1\end{Vmatrix}\vec{s}_2=\vec{0}\Rightarrow\vec{s}_2=\begin{Vmatrix}1\\-1\end{Vmatrix}$

$A_{\vec{s}}=\begin{Vmatrix}-1&0\\0&-2\end{Vmatrix}$ - симм. отн. точки пересечения прямых $\vec{s}_1$ и $\vec{s}_2$ и растяж. в 2 по прямой $\vec{s}_2$.

22) $A = \begin{Vmatrix} 0&0&0\\0&-1&1\\0&0&-1\end{Vmatrix}$ $|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda&0&0\\0&-1-\lambda&1\\0&0&-1-\lambda\end{vmatrix} = -\lambda(1-\lambda)^2=0 \Rightarrow \lambda=0,\ \lambda=-1$

$\lambda=0: \begin{Vmatrix} 0&0&0\\0&-1&1\\0&0&-1\end{Vmatrix} \vec{s}_1 = \vec{0} \Rightarrow \vec{s}_1 = \begin{Vmatrix}1\\0\\0\end{Vmatrix}$

$\lambda=-1: \begin{Vmatrix} 1&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{Vmatrix} \vec{s}_2 = \vec{0} \Rightarrow \vec{s}_2 = \begin{Vmatrix}0\\1\\0\end{Vmatrix}$

макс. л.н.з. сист. собств. векторов.

34) $A = \begin{Vmatrix} 1&-1&1&-1\\-1&1&-1&1\\1&-1&1&-1\\-1&1&-1&1\end{Vmatrix}$ $|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda&-1&1&-1\\-1&1-\lambda&-1&1\\1&-1&1-\lambda&-1\\-1&1&-1&1-\lambda\end{vmatrix} = \sum_{i=0}^{n}(-\lambda)^i\Delta_{n-i} =$

$= 0-\lambda\cdot 0+\lambda^2\cdot 0 - trA\,\lambda^3+\lambda^4 = \lambda^3(\lambda-4)=0 \Rightarrow \lambda=0,\ \lambda=4$

$\lambda=0: A\vec{s}_{1,2,3}=0,\ \Phi=\begin{Vmatrix}1&-1&1\\1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{Vmatrix} \Rightarrow \vec{s}_1=\begin{Vmatrix}1\\1\\0\\0\end{Vmatrix},\ \vec{s}_2=\begin{Vmatrix}-1\\0\\1\\0\end{Vmatrix},\ \vec{s}_3=\begin{Vmatrix}1\\0\\0\\1\end{Vmatrix}$

$\lambda=1: \begin{Vmatrix}-3&-1&1&-1\\-1&-3&-1&1\\1&-1&-3&-1\\-1&1&-1&-3\end{Vmatrix}\vec{s}_4=\vec{0} \Rightarrow \vec{s}_4=\begin{Vmatrix}-1\\1\\-1\\1\end{Vmatrix}$

$\begin{Vmatrix}-3&-1&1&-1\\-1&-3&-1&1\\1&-1&-3&-1\\-1&1&-1&-3\end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix}-3&-1&1&-1\\-4&-4&0&0\\0&-4&-4&0\\0&0&-4&-4\end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix}0&0&0&0\\-4&-4&0&0\\0&-4&-4&0\\0&0&-4&-4\end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix}-4&0&0&-4\\0&-4&0&4\\0&0&-4&-4\end{Vmatrix}$

$A_{\vec{s}} = \begin{Vmatrix}0&&&\\&0&&\\&&0&\\&&&1\end{Vmatrix}$ - проекция 4-мерного на 1-мерное, натянутое на $\begin{Vmatrix}-1\\1\\-1\\1\end{Vmatrix}$

24.42 (1) $D = \begin{Vmatrix}0&1&0&\cdots&0\\ \vdots&\vdots&2&&\vdots\\ &&&3&\\ 0&0&0&\cdots&n\\0&0&0&\cdots&0\end{Vmatrix}$ $|D-\lambda E| = \begin{vmatrix}-\lambda&1&&0\\&-\lambda&2&\\&&\ddots&n\\0&&&-\lambda\end{vmatrix} = (-\lambda)^{n+1} \Rightarrow \lambda=0$

$D\vec{s}=\vec{0} \Rightarrow \vec{s}=\begin{Vmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{Vmatrix}$, т.е. собственн. ф-ции - const.

24.55(1) $\varphi(X) = AX = \begin{Vmatrix}-4&0\\1&4\end{Vmatrix}X$

$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix}-4-\lambda&0\\1&4-\lambda\end{vmatrix} = \lambda^2-16=0 \Rightarrow \lambda=\pm 4$

$\lambda=4: \begin{Vmatrix}-8&0\\1&0\end{Vmatrix} S = \|0\| \Rightarrow S_1=\begin{Vmatrix}0&0\\1&0\end{Vmatrix},\ S_2=\begin{Vmatrix}0&0\\0&1\end{Vmatrix}$

$\lambda=-4: \begin{Vmatrix}0&0\\1&8\end{Vmatrix} S = \|0\| \Rightarrow S_3=\begin{Vmatrix}8&0\\-1&0\end{Vmatrix},\ S_4=\begin{Vmatrix}0&8\\0&-1\end{Vmatrix}$

$A_S = \begin{Vmatrix}4&0\\0&-4\end{Vmatrix}$