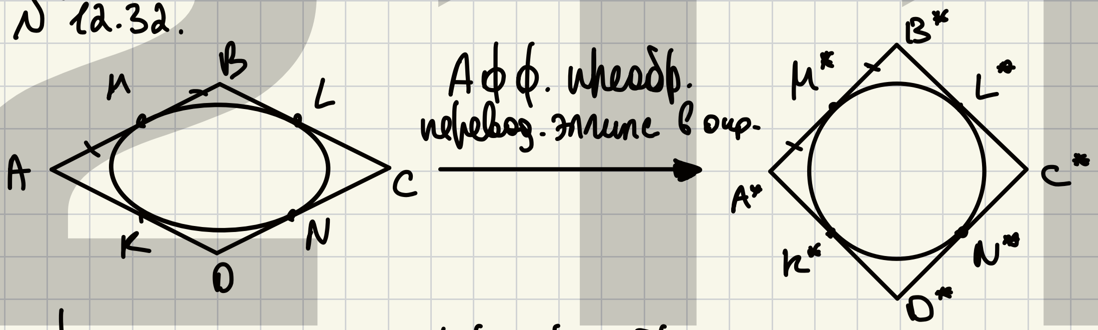
№12.28(1,3)

1) ур-е прямой: $\bar r = \bar r_A(1-t)+\bar r_B t$

$\bar r^* = \bar r_{A^*}(1-t)+\bar r_{B^*}t = \bar r_A(1-t)+\bar r_B t=\bar r$

3) $A\in l_1, l_2 \Rightarrow f(A)\in f(l_1), f(l_2) \Rightarrow f(A)\in l_1, l_2 \Rightarrow f(A)$ - т. пересеч. прямых $\Rightarrow f(A)=A$ - неподв.

№12.32.



При таком афф. преобр. паралл-м → паралл-м, т.к. паралл. прямые → паралл. прямые. Из св-в кас. к окр. и св-в парал-ма (противоположные стороны равны) получаем, что $A^*B^*C^*D^*$ - квадрат, а окр-ть вписана в него ⇒ касается в серединах сторон. При обр. афф. преобр. отношения длин на прямой сохранятся ⇒ исходные точки касания - середины соответств. сторон.

№12.38(2)

$$\begin{cases} x^* = 3x+2y-6 \\ y^* = 4x-3y+1 \end{cases}$$

а) $\begin{cases} x^* = 3x-6 \\ y^* = 4x+1 \end{cases} \Rightarrow 4x^* - 3y^* + 27 = 0$

б) $\begin{cases} x^* = 2y-6 \\ y^* = -3y+1 \end{cases} \Rightarrow 3x^* + 2y^* + 16 = 0$

в) $\begin{cases} x^* = 3(y-1)+2y-6 = 5y-9 \\ y^* = 4(y-1)-3y+1 = y-3 \end{cases} \Rightarrow x^* - 5y^* - 6 = 0$

г) $\begin{cases} x^* = 3(y+1)+2y-6 = 5y-3 \\ y^* = 4(y+1)-3y+1 = y+5 \end{cases} \Rightarrow x^* - 5y^* + 28 = 0$

д) $\begin{cases} x^* = \frac{3}{2}(-3y+7)+2y-6 = -5y+9 \\ y^* = 2(-3y+7)-3y+1 = -9y+15 \end{cases} \Rightarrow 18x^* - 5y^* - 6 = 0$

№12.39(2)

а) $\forall$ точки на прямой $y^* = 0 \Rightarrow 3x+4y-2=0$

б) $x^* = 0 \Rightarrow 2x+3y-1=0$

в) $x+y-1=0$ $\quad (2x+3y-1)+(-3x-4y+2)-1 = -x-y =$

г) $x-y-1=0$ $\quad (2x+3y-1)-(-3x-4y+2)-1 = 5x+7y-4=0$

g) $x-y+1=0 \quad (2x+3y-1)-(-3x-4y+2)+1=5x+7y-2=0$

№ 12.40 (1,3)

$$\begin{cases} x^* = a_{11}x + a_{12}y + \beta_1 \\ y^* = a_{21}x + a_{22}y + \beta_2 \end{cases}$$

1) $$\begin{cases} -3 = a_{11} + \beta_1 \\ 5 = a_{21} + \beta_2 \\ 4 = a_{12} + \beta_1 \\ -3 = a_{22} + \beta_2 \\ 0 = a_{11} + a_{12} + \beta_1 \\ 0 = a_{21} + a_{22} + \beta_2 \end{cases} \quad \begin{cases} a_{11} = -4 \\ a_{12} = 3 \\ a_{21} = 3 \\ a_{22} = -5 \\ \beta_1 = 1 \\ \beta_2 = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x^* = -4x+3y+1 \\ y^* = 3x-5y+2 \end{cases}$$

3) $$\begin{cases} -\frac{1}{2} = a_{11} + \beta_1 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} = a_{21} + \beta_2 \\ -\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}a_{12} + \frac{\sqrt{3}}{2}\beta_1 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2}a_{22} + \frac{\sqrt{3}}{2}\beta_2 \\ 1 = -\frac{1}{2}a_{11} - \frac{\sqrt{3}}{2}a_{12} + \beta \\ 0 = -\frac{1}{2}a_{21} - \frac{\sqrt{3}}{2}a_{22} + \beta_2 \end{cases} \quad \begin{cases} a_{11} = -\frac{1}{2} \\ a_{12} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ a_{21} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ a_{22} = -\frac{1}{2} \\ \beta_1 = 0 \\ \beta_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x^* = -\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y \\ y^* = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y \end{cases}$$

№ 12.43 (5) $$\begin{cases} x^* = 2x+y-3 \\ y^* = 2x+3y-6 \end{cases}$$

$$\frac{2A+2B}{A}=\frac{A+3B}{B}=\frac{C-3A-6B}{C}$$

$$2+2\frac{B}{A}=\frac{A}{B}+3$$

$$\left(\frac{A}{B}\right)^2+\frac{A}{B}-2=0 \Rightarrow A=-2B \text{ или } A=B$$

Если $A=-2B$, то $\frac{C}{C}=1$ – верно $\forall C$

Если $A=B$, то $Bx+By+3B=0 \Rightarrow x+y+3=0$

Итог: $2x-y+C=0\ \forall C$, $x+y+3=0$

№12.53 (1, 2, 5)

1) $\begin{cases} x^* = x\cos\varphi - y\sin\varphi \\ y^* = x\sin\varphi + y\cos\varphi \end{cases}$

2) Паралл. перенос на $(-x_0, -y_0)$, поворот, паралл. перенос на (x_0, y_0)

$$\begin{cases} x^* = (x-x_0)\cos\varphi - (y-y_0)\sin\varphi + x_0 \\ y^* = (x-x_0)\sin\varphi + (y-y_0)\cos\varphi + y_0 \end{cases}$$

5) $\begin{cases} x^* = -x \\ y^* = y \end{cases}$

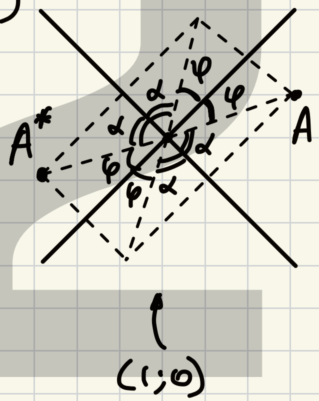
№12.69 (1, 4)

1)

$$f:\begin{cases} x^* = 1-y+1 = 2-y \\ y^* = x-1+1 = x \end{cases} \qquad g:\begin{cases} x^* = x-1 \\ y^* = y-1 \end{cases}$$

$$fg:\begin{cases} x^* = 3-y \\ y^* = x-1 \end{cases} \qquad gf:\begin{cases} x^* = 1-y \\ y^* = x-1 \end{cases}$$

4)



Заметим, что прямые перпен. и пересекаются в т. $(1;0) \Rightarrow fg \equiv gf$ — поворот вокруг т. $(1;0)$ на угол $2\alpha + 2\varphi = \pi$.

$$\text{искомое}:\begin{cases} x^* = \cos\pi(x-1)+1 = 2-x \\ y^* = \cos\pi \cdot y = -y \end{cases}$$

№12.82 (7, 9)

$\bar{a}_1, \bar{a}_2$ — главн. напр. $\bar{a}_1 = \begin{Vmatrix} p \\ q \end{Vmatrix}$, $\bar{a}_2 = \begin{Vmatrix} -q \\ p \end{Vmatrix}$

$$\bar{a}_1^* = \begin{Vmatrix} a_{11}p + a_{12}q \\ a_{21}p + a_{22}q \end{Vmatrix}, \quad \bar{a}_2^* = \begin{Vmatrix} -a_{11}q + a_{12}p \\ -a_{21}q + a_{22}p \end{Vmatrix}$$

$$(\bar{a}_1^*, \bar{a}_2^*) = p^2(a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22}) + pq(-a_{11}^2 + a_{12}^2 - a_{21}^2 + a_{22}^2) - q^2(a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22}) = 0$$

7) $\begin{cases} x^* = 2x + 5y \\ y^* = -11x + 10y \end{cases}$

$p^2(10-110)+pq(-4+25-121+100)+100q^2=0$

$p=\pm q \Rightarrow \bar{a}_1=\begin{Vmatrix}1\\1\end{Vmatrix},\ \bar{a}_2=\begin{Vmatrix}-1\\1\end{Vmatrix}$

$\bar{a}_1^*=\begin{Vmatrix}7\\-1\end{Vmatrix},\ \bar{a}_2^*=\begin{Vmatrix}3\\21\end{Vmatrix}$

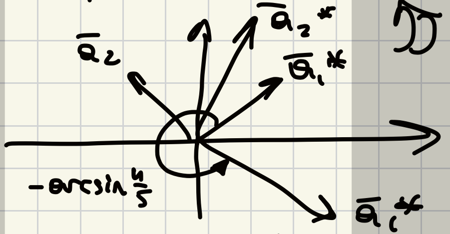
$\cos_2(\bar{a}_1,\bar{a}_1^*)=\cos_2(\bar{a}_2,\bar{a}_2^*)=\frac{7-1}{\sqrt{100}}=\frac{18}{\sqrt{900}}=\frac{3}{5}$

$\Rightarrow$ осевой симм. нет, а поворот на

(против часовой)

$-\arcsin\left(\frac{4}{5}\right)$, т.к. угол поворота меньше нуля.

$\frac{|\bar{a}_1^*|}{|\bar{a}_1|}=5$; $\frac{|\bar{a}_2^*|}{|\bar{a}_2|}=15$



Итог: g - поворот на угол $-\arcsin\frac{4}{5}$

h_1 - СЖАТИЕ к прямой $7x-y=0$ коэф. 15

h_2 - СЖАТИЕ к прямой $x+7y=0$ коэф. 5

№9. $\begin{cases} x^*=-4x+8y \\ y^*=-7x-11y \end{cases}$

$p^2(-32+77)+pq(-16+64-49+121)-45q^2=0$

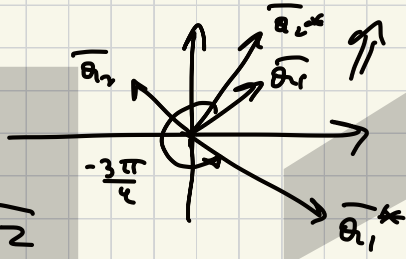
$p=\frac{1}{3}q$ или $p=-3q$

1 $p=-3q$. $\bar{a}_1=\begin{Vmatrix}1\\3\end{Vmatrix}$ $\bar{a}_2=\begin{Vmatrix}-3\\1\end{Vmatrix}$

$\bar{a}_1^*=\begin{Vmatrix}20\\-40\end{Vmatrix}$, $\bar{a}_2^*=\begin{Vmatrix}20\\10\end{Vmatrix}$

$\cos\angle(\bar{a}_1, \bar{a}_1^*) = \cos\angle(\bar{a}_2, \bar{a}_2^*) = \dfrac{20-120}{\sqrt{2}\cdot 100} = \dfrac{-60+10}{\sqrt{50}\cdot 10} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ поворот на $-\frac{3\pi}{4}$, т.к. угол поворота больше π



$\dfrac{|\bar{a}_1^*|}{|\bar{a}_1|} = 10\sqrt{2}$ $\quad \dfrac{|\bar{a}_2^*|}{|\bar{a}_2|} = 5\sqrt{2}$

Итог: g - поворот на угол $-\frac{3\pi}{4}$

h_1 - СЖАТИЕ к прямой $2x+y=0$ с коэф. $5\sqrt{2}$

h_2 - СЖАТИЕ к прямой $x-2y=0$ с коэф. $10\sqrt{2}$