Д13 7

№1. на 1 – 6 вар., на 2 – 5 вар. ... => Ответ: 6!

№2. Собираем число из цифр. Для всех кроме 0 первая – не ноль. Тогда кол-во чисел от 0 до 10^6 без 1: $\underbrace{1}_{0}+\underbrace{8}_{2,\dots,9}+$

$+\underbrace{8}_{2,\dots,9}\cdot\underbrace{9}_{0,2,\dots,9}+8\cdot9^2+8\cdot9^3+8\cdot9^4+8\cdot9^5=1+8(1+9+\dots+9^5)=$

$=1+8\cdot\dfrac{9^6-1}{9-1}=9^6$. Всего чисел 10^6+1 =>

=> чисел с единицей $10^6+1-9^6=(9+1)^6+1-9^6=$

$=6\cdot9^5+15\cdot9^4+20\cdot9^3+15\cdot9^2+6\cdot9+1+1=$

$=6\cdot9^5+(6+9)\cdot9^4+(2\cdot9+2)9^3+(6+9)\cdot9^2+6\cdot9+1+1=$

$=7\cdot9^5+8\cdot9^4+5\cdot9^3+6\cdot9^2+6\cdot9+1+1<9^6$ – следует из того, что левая часть разложение какого-то числа в девятиричной системе счисления с 5 знаками, а справа с 6 знаками =>

=> чисел без 1 больше.

б) Аналогично $10^7+1-9^7=(9+1)^7+1-9^7=$

$=7\cdot9^6+21\cdot9^5+\dots=7\cdot9^6+(2\cdot9+3)\cdot9^5+\dots=$

$=9^7+\underbrace{\dots}_{>0}>9^7$ => чисел без 1 меньше.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1

№3. Всего чисел — 10^6

Чисел с уникальными цифрами —

$9\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5.$

все кроме 0

все кроме 1 цифры

Чисел с хотя бы двумя одинаковыми:

$10^6-9\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5 \Rightarrow$ Вероятность: $1-\frac{9\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5}{10^6}$

№4. 18 кр.; 18 чёрных. Всего вариантов вытащить: $36\cdot35\cdot34\cdot33$. Две пары разных цветов $(18\cdot17)^2\cdot6$, где 6 — кол-во способов перестановки порядка вытаскивания карт:

$ч_1ч_2к_1к_2$ $к_1к_2ч_1ч_2$
$ч_1к_1ч_2к_2$ $к_1ч_1к_2ч_2$ — $ч_{1,2}$ — первая и вторая вытянутая чёрные карты
$ч_1к_1к_2ч_2$ $к_1ч_1ч_2к_2$ $к_{1,2}$ — первая и вторая вытянутая красные карты

Тогда вероятность: $\frac{(18\cdot17)^2\cdot6}{36\cdot35\cdot34\cdot33}=\frac{18\cdot17\cdot6}{4\cdot35\cdot33}=\frac{27\cdot17}{35\cdot33}=$

$=\frac{153}{385}=0,3974$

№5. Посчитаем кол-во таких чисел, если 1-ая цифра нечёт и чёт.

1) $\underbrace{5}_{\text{выбор 1 цифры}}\cdot\underbrace{C_5^2}_{\text{выбор мест для чёт. чисел}}\cdot\underbrace{5^2\cdot 5^3}_{\text{кол-во способов выбрать нечёт. и чёт. числа}}$

2) $\underbrace{4}_{\text{выбор 1 чёт. цифры (не 0)}}\cdot\underbrace{C_5^2}_{\text{выбор мест для чёт. чисел}}\cdot\underbrace{5^3\cdot 5^2}_{\text{кол-во способов выбрать нечёт и чёт чисел}}$

Всего: $9\cdot\frac{5^3\cdot 5^2}{3!\,2!}\cdot 5! = 18\cdot 5^6 = 281250$

№7. Первая цифра - нечёт. - 5 вар.

В ост. 6-зн. числе 2 чёт. и они не стоят рядом т.е. способы их расставить: Ч$\underbrace{\text{НЧННН}}_{\text{4 вар.}}$ НЧН$\underbrace{\text{ЧНН}}_{\text{3 вар.}}$ ННЧН$\underbrace{\text{ЧН}}_{\text{2 вар.}}$ НННЧН$\underbrace{\text{Ч}}_{\text{1 вар.}}$

для каждого способа: 5^2 способов выбрать чет. и 5^4 выбрать нечёт => всего $5\cdot 5^2\cdot 5^4\cdot(4+3+2+1) = 5^7\cdot 10 = 2\cdot 5^8$

№7. $\underbrace{C_7^1}_{\text{1 мест. из 7}}\cdot\underbrace{C_6^2}_{\text{2 из 6}}\cdot\underbrace{C_4^4}_{\text{4 из 4}} = 7\cdot 5\cdot 3 = 105$

№8. Выбираем один из листьев - 2^n.

Выбираем второй лист из другого поддерева, выходящ. из корня => всего $2^n \cdot 2^{n-1} = 2^{2n-1}$ диаметров. Но мы каждый посчитали дважды => ответ 2^{2n-2}