№32.27 (13, 14)

13) $k(\vec{x}) = x_1^2 - x_1x_2 + x_1x_3 + x_2^2 + x_2x_3 + x_3^2$

$A = \begin{Vmatrix} 1 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{Vmatrix} \quad |A - \lambda E| = -\lambda^3 + 3\lambda^2 - \frac{9}{4}\lambda = -\lambda\left(\frac{3}{2} - \lambda\right)^2 = 0$

$\lambda = 0: \begin{Vmatrix} 1 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{Vmatrix} \sim \begin{matrix} I + \frac{1}{2}II' \\ \frac{2}{3}(2II + I) \end{matrix} \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{Vmatrix} \to \vec{s}_1 = \|1\ 1\ -1\|^T$

$\lambda = 3/2: \begin{Vmatrix} -1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{Vmatrix} \sim \|1\ 1\ -1\|^T \to \vec{s}_2 = \|-1\ 1\ 0\|^T,\ \vec{s}_3 = \|1\ 0\ 1\|^T$

Рассуждения касаемо ортогональности аналогично №29.19 нед.5

$\vec{b}_3 = \vec{s}_3 - \frac{(\vec{s}_3, \vec{s}_2)}{(\vec{s}_2, \vec{s}_2)}\vec{s}_2 = \|1\ 0\ 1\|^T + \frac{1}{2}\|-1\ 1\ 0\|^T = \|\tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\ 1\|^T \sim \|1\ 1\ 2\|^T$

Базис: $\vec{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\|1\ 1\ -1\|^T;\ \vec{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\|-1\ 1\ 0\|^T;\ \vec{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\|1\ 1\ 2\|^T$

$k_e(\vec{x}) = \frac{3}{2}(x_2'^2 + x_3'^2)$

14) $k(\vec{x}) = 4x_1^2 + 4x_1x_2 - 12x_1x_3 + x_2^2 - 6x_2x_3 + 9x_3^2$

$A = \begin{Vmatrix} 4 & 2 & -6 \\ 2 & 1 & -3 \\ -6 & -3 & 9 \end{Vmatrix} \quad |A - \lambda E| = 36 - 4\lambda - 45\lambda + 5\lambda^2 + 9\lambda^2 - \lambda^3 + 72 - 108 + 49\lambda = \lambda^2(14 - \lambda) = 0$

$\lambda = 0: \begin{Vmatrix} 4 & 2 & -6 \\ 2 & 1 & -3 \\ -6 & -3 & 9 \end{Vmatrix} \sim \|2\ 1\ -3\| \to \vec{s}_1 = \|-1\ 2\ 0\|^T,\ \vec{s}_2 = \|3\ 0\ 2\|^T$

$\|6\ 3\ 5\|$

$\lambda = 14: \begin{Vmatrix} -10 & 2 & -6 \\ 2 & -13 & -3 \\ -6 & -3 & -5 \end{Vmatrix} \sim \begin{matrix} \frac{1}{14}(3I + 2III) \\ III - 2I' \end{matrix} \begin{Vmatrix} -3 & 0 & -2 \\ 0 & -3 & -1 \end{Vmatrix} \to \vec{s}_3 = \|2\ 1\ -3\|^T$

$\vec{b}_2 = \vec{s}_2 - \frac{(\vec{s}_1, \vec{s}_2)}{(\vec{s}_1, \vec{s}_1)}\vec{s}_1 = \|3\ 0\ 2\|^T - \frac{-3}{5}\|-1\ 2\ 0\|^T \sim \|6\ 3\ 5\|^T$

Базис: $\vec{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\|-1\ 2\ 0\|^T,\ \vec{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{70}}\|6\ 3\ 5\|^T,\ \vec{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{14}}\|2\ 1\ -3\|^T;\ k_e(\vec{x}) = 14x_3'^2$

32.36 (2, 5)

2) $f=2x_1^2-3x_1x_2-\frac{5}{2}x_2^2$, $g=2x_1^2+6x_1x_2+5x_2^2$. $F=\begin{Vmatrix}2 & -3/2\\ -3/2 & -5/2\end{Vmatrix}$, $G=\begin{Vmatrix}2 & 3\\ 3 & 5\end{Vmatrix}$

для g $\Delta_1=2>0$ $\Delta_2=\begin{vmatrix}2 & 3\\ 3 & 5\end{vmatrix}=1>0$ $\Rightarrow$ по кр. Сильвестра g пол. опр. $\Rightarrow$ $\Rightarrow \exists\ S_1$: $S_1^TGS_1=E$.

Т.к. F - симм., то и $S_1^TFS_1$ - симм. Для симм. матрицы $\exists$ ОНБ на собс. векторах с ортогональной матрицей перехода S_2, причём $(S_1S_2)^TF(S_1S_2)$ - диагональна. E

Матрица перехода S_2 "не испортит" диагональность $S_1^TGS_1$, т.к. $S_2^T(S_1^TGS_1)S_2=S_2^TES_2=S_2^TS_2=E=S_1^TGS_1$, т.к. $S_2^T=S_2^{-1}$ (S_2 - орт.)

S_1S_2 - искомая матрица перехода от стандартного базиса $\{\vec{e}_i\}$ к базису векторов $\{\vec{s}_i\}$: $\vec{s}_i=\lambda_i\vec{e}_i$. В базисе $\{\vec{s}_i\}$ обе формы диагональны, т.к. $(S_1S_2)^TF(S_1S_2)=\mathrm{diag}(\lambda_i)$, $(S_1S_2)^TG\cdot(S_1S_2)=E$. Домножим оба р-ва слева на $((S_1S_2)^T)^{-1}$ и второе на $\mathrm{diag}(\lambda_i)$.

Получим: $F(S_1S_2)=G(S_1S_2)\mathrm{diag}(\lambda_i)$

Столбцы (S_1S_2) - $\vec{s}_i$ и для каждого $\vec{s}_i$ выполняется, что $F\vec{s}_i=G\vec{s}_i\lambda_i$, т.е. $(F-\lambda_iG)\vec{s}_i=\vec{0}$ $\Rightarrow |F-\lambda_iG|=0$

Найдём λ_i: $\begin{vmatrix}2-2\lambda & -3/2-3\lambda\\ -3/2-3\lambda & -5/2-5\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)(-5-10\lambda)-\left(\frac{3}{2}+3\lambda\right)^2=\lambda^2-14\lambda-\frac{29}{4}=$

$=(\lambda-29/2)(\lambda+1/2)=0$

$\lambda=29/2$: $\begin{Vmatrix}-27 & -45\\ -45 & -75\end{Vmatrix}\to\vec{s}_1{}'=\|5\ -3\|^T$

$\lambda=-1/2$: $\begin{Vmatrix}3 & 0\\ 0 & 0\end{Vmatrix}\to\vec{s}_2{}'=\|0\ 1\|^T$

Полученные $\vec{s}_1{}'$ и $\vec{s}_2{}'$ ещё не являются столбцами искомой S_1S_2.

Т.к. в этом базисе обе формы просто диагональны. Совершенно необязательно, чтобы G в этом базисе имела единичный вид. Для этого необходимо ещё наложить условие на модули векторов $\vec{s}_i'$: Они должны удовлетворять условию, что $\|\vec{s}_i'\|^T G \|\vec{s}_i'\| = E$, т.е. $\vec{s}_i'$ нужно нормировать скалярным произведением с матрицей грама G.

$$\vec{s}_1 = \frac{\vec{s}_1'}{\sqrt{\vec{s}_1'^T G \vec{s}_1'}} = \|5\ -3\|^T \Big/ \sqrt{\|5\ -3\| \begin{Vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 5 \\ -3 \end{Vmatrix}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \|5\ -3\|^T$$

$$\vec{s}_2 = \frac{\vec{s}_2'}{\sqrt{\vec{s}_2'^T G \vec{s}_2'}} = \|0\ 1\|^T \Big/ \sqrt{\|0\ 1\| \begin{Vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \end{Vmatrix}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \|0\ 1\|^T$$

Тогда искомая $S_1 S_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{Vmatrix} 5 & 0 \\ -3 & 1 \end{Vmatrix}$, а замена координат: $\begin{cases} x_1 = \sqrt{5}\, x_1' \\ x_2 = \dfrac{-3x_1' + x_2'}{\sqrt{5}} \end{cases}$

В этих координатах $F' = \begin{Vmatrix} \frac{29}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{Vmatrix}$, $G' = E$. Можно это проверить:

$$f' = 2(\sqrt{5}x_1')^2 - 3(\sqrt{5}x_1')\left(\frac{-3x_1' + x_2'}{\sqrt{5}}\right) - \frac{5}{2}\left(\frac{-3x_1' + x_2'}{\sqrt{5}}\right)^2 = 10x_1'^2 + 9x_1'^2 - 3x_1'x_2' - \frac{9}{2}x_1'^2 + 3x_1'x_2' - \frac{x_2'^2}{2} =$$

$$= \frac{29}{2}x_1'^2 - \frac{1}{2}x_2'^2$$

$$g' = 2(\sqrt{5}x_1')^2 + 6(\sqrt{5}x_1')\left(\frac{-3x_1' + x_2'}{\sqrt{5}}\right) + 5\left(\frac{-3x_1' + x_2'}{\sqrt{5}}\right)^2 = 10x_1'^2 - 18x_1'^2 + 6x_1'x_2' + 9x_1'^2 -$$

$$- 6x_1'x_2' + x_2'^2 = x_1'^2 + x_2'^2$$

5) $f = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2$, $g = 17x_1^2 + 8x_1x_2 + x_2^2$. $F = \begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{Vmatrix}$, $G = \begin{Vmatrix} 17 & 4 \\ 4 & 1 \end{Vmatrix}$

g: $\Delta_1 = 17 > 0$, $\Delta_2 = 17 - 16 > 0 \Rightarrow g$ - пол. опр.

$$0 = |F - \lambda G| = \begin{vmatrix} 1-17\lambda & -1-4\lambda \\ -1-4\lambda & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-17\lambda)(1-\lambda) - (1-4\lambda)^2 = \lambda(\lambda - 26)$$

$\lambda = 26$: $\begin{Vmatrix} -441 & -105 \\ -105 & -25 \end{Vmatrix} \to \vec{s}_1' = \|-5\ 21\|^T$

$\lambda = 0$: $\begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{Vmatrix} \to \vec{s}_2' = \|1\ 1\|^T$

$$\vec{s}_1 = \frac{\vec{s}_1\,'}{\sqrt{\vec{s}_1'^{\,T} G\, \vec{s}_1'}} = \|-5\ 21\|^T \Big/ \sqrt{\|-5\ 21\| \begin{Vmatrix} 17 & 4 \\ 4 & 1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} -5 \\ 21 \end{Vmatrix}} = \frac{1}{\sqrt{26}} \|-5\ 21\|^T$$

$$\vec{s}_2 = \frac{\vec{s}_2\,'}{\sqrt{\vec{s}_2'^{\,T} G\, \vec{s}_2'}} = \|1\ 1\|^T \Big/ \sqrt{\|1\ 1\| \begin{Vmatrix} 17 & 4 \\ 4 & 1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \end{Vmatrix}} = \frac{1}{\sqrt{26}} \|1\ 1\|^T$$

Замена координат – $\begin{cases} x_1 = \dfrac{-5x_1' + x_2'}{\sqrt{26}} \\ x_2 = \dfrac{21x_1' + x_2'}{\sqrt{26}} \end{cases}$

В этих координатах $f' = 26x_1'^2$ $g' = x_1'^2 + x_2'^2$

32.39(1)

$f = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$, $g = 10x_1^2 + 6x_1x_2 + x_2^2$

$F = \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix}$, $G = \begin{Vmatrix} 10 & 3 \\ 3 & 1 \end{Vmatrix}$

$|F - \lambda G| = \begin{vmatrix} 1-10\lambda & 1-3\lambda \\ 1-3\lambda & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-10\lambda)(1-\lambda) - (1-3\lambda)^2 = \lambda(\lambda-5) = 0 \Rightarrow$ искомая форма – $\begin{Vmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}$, $f' = 5x_1'^2$