Т.1 Случайные величины ξ и η независимы; ξ имеет плотность распределения $f_\xi(x)$, а $\mathbb{P}(\eta=0) = \mathbb{P}(\eta=1) = \mathbb{P}(\eta=-1) = \frac{1}{3}$. Найти закон распределения случайной величины $\xi+\eta$.

$$F_{\xi+\eta}(z) = \mathbb{P}(\xi+\eta \leq z) = \sum_i \mathbb{P}(\xi \leq z-y_i \mid \eta = y_i)\,\mathbb{P}(\eta = y_i) \ominus$$

Т.к. ξ и η - независимы $\mathbb{P}(\xi \leq z-y_i \mid \eta=y_i) = \mathbb{P}(\xi \leq z-y_i)$

$$\ominus \sum_i \mathbb{P}(\xi \leq z-y_i)\mathbb{P}(\eta=y_i) = \sum_i F_\xi(z-y_i)\,\mathbb{P}(\eta=y_i)$$

$$\frac{d}{dz}(F_{\xi+\eta}(z)) = \frac{d}{dz}\left(\sum_i F_\xi(z-y_i)\mathbb{P}(\eta=y_i)\right) = \sum_i \frac{d}{dz}(F_\xi(z-y_i))$$

$$\mathbb{P}(\eta=y_i) = \sum_i f_\xi(z-y_i)\mathbb{P}(\eta=y_i) = f_\xi(z-1)\mathbb{P}(\eta=1) + f_\xi(z)\cdot$$

$$\cdot\mathbb{P}(\eta=0) + f_\xi(z+1)\mathbb{P}(\eta=-1) = \frac{1}{3}\left(f_\xi(z-1)+f_\xi(z)+f_\xi(z+1)\right)$$

Т.2. Игральная кость бросается до первого появления шестёрки. Пусть ξ - число бросаний. Найти распределение вероятностей ξ, $\mathbb{E}\xi$, $\mathbb{D}\xi$. Чему равна вероятность того, что $\xi \leq 5$?

$$\mathbb{P}(\xi=k) = (1-p)^{k-1}\cdot p = (1-1/6)^{k-1}\,1/6 = \frac{5^{k-1}}{6^k},\ k\in\mathbb{N}$$

$$F_\xi(k) = \mathbb{P}(\xi\leq k) = \sum_{i=1}^{k}\mathbb{P}(\xi=i) = \sum_{i=1}^{k}\frac{5^{i-1}}{6^i} = \frac{1}{6}\,\frac{1-(5/6)^k}{1-5/6} = 1-(5/6)^k,\ k\in\mathbb{N}$$

$$\mathbb{E}\xi = \sum_{k=1}^{\infty}k\,\mathbb{P}(\xi=k) = \sum_{k=1}^{\infty}k\,p(1-p)^{k-1} = p\sum_{k=1}^{\infty}k(\underbrace{1-p}_{q})^{k-1} = p\frac{d}{dq}\left(\sum_{k=1}^{\infty}q^k\right) = p\frac{d}{dq}\left(\sum_{k=0}^{\infty}q^k\right) =$$

$$= p\frac{d}{dq}\left(\frac{1}{1-q}\right) = p\frac{1}{(1-q)^2} = p\frac{1}{p^2} = \frac{1}{p} = 6$$

$$\mathbb{D}\xi = \mathbb{E}\xi^2 - (\mathbb{E}\xi)^2 = \sum_{k=1}^{\infty}k^2p(1-p)^{k-1} - \left(\frac{1}{p}\right)^2 = p\frac{d}{dq}\left(\sum_{k=1}^{\infty}kq^k\right) - \frac{1}{p^2} = p\frac{d}{dq}\Bigg($$

$$\frac{q}{(1-q)^2}\Bigg) - \frac{1}{p^2} = p\,\frac{(1-q)^2+2(1-q)q}{(1-q)^4} - \frac{1}{p^2} = \frac{1+q}{(1-q)^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{q}{(1-q)^2} = \frac{q}{p^2} = \frac{5/6}{(1/6)^2} = 30$$

$\mathbb{P}(\xi \le 5) = F_\xi(5) = 1 - (5/6)^5$

Т.3. В N ячеек случайно в соответствии со статистикой Бозе-Эйнштейна (частицы неразличимы и размещение без ограничений) размещаются n частиц. Пусть ξ - число пустых ячеек. Найти $\mathbb{E}\xi$ и $\mathbb{D}\xi$.

$$\xi_k = \begin{cases} 1, & k\text{-ая ячейка пустая} \\ 0, & \text{если заполнена} \end{cases}$$

$$\mathbb{E}\xi = \sum_{k=1}^{N} \mathbb{E}\xi_k = \sum_{k=1}^{N} \mathbb{P}(k\text{-ая ячейка пуста}) = N\mathbb{P}(1\text{-ая ячейка пуста}) = N\frac{C_{n+N-2}^{n}}{C_{n+N-1}^{n}} = N\frac{N-1}{N+n-1}$$

$$\mathbb{D}\xi = \mathbb{E}\left[(\xi - \mathbb{E}\xi)^2\right] = \mathbb{E}\left[\left(\sum_{k=1}^{N}\xi_k - \mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{N}\xi_k\right)\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\left(\sum_{k=1}^{N}(\xi_k - \mathbb{E}\xi_k)\right)^2\right] =$$

$$= \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{N}(\xi_k - \mathbb{E}\xi_k)^2\right] + 2\mathbb{E}\left[\sum_{1\le i<j\le N}(\xi_i - \mathbb{E}\xi_i)(\xi_j - \mathbb{E}\xi_j)\right] = \sum_{k=1}^{N}\mathbb{E}\left[(\xi_k - \mathbb{E}\xi_k)^2\right] +$$

$$+ 2\sum_{1\le i<j\le N} \operatorname{cov}(\xi_i, \xi_j) = \sum_{k=1}^{N}\mathbb{D}\xi_k + 2\sum_{1\le i<j\le N}\operatorname{cov}(\xi_i, \xi_j) \ominus$$

$$\mathbb{D}\xi_k = \mathbb{E}\xi_k^2 - (\mathbb{E}\xi_k)^2 = \mathbb{E}\xi_k - (\mathbb{E}\xi_k)^2 = \mathbb{E}\xi_k(1 - \mathbb{E}\xi_k) = \mathbb{P}(\xi_k = 1)(1 - \mathbb{P}(\xi_k = 1)) = \frac{N-1}{N+n-1}\left(1 - \frac{N-1}{N+n-1}\right) = \frac{(N-1)n}{(N+n-1)^2}$$

$$\operatorname{cov}(\xi_i, \xi_j) = \mathbb{E}(\xi_i - \mathbb{E}\xi_i)(\xi_j - \mathbb{E}\xi_j) = \mathbb{E}[\xi_i\xi_j - \xi_i\mathbb{E}\xi_j - \xi_j\mathbb{E}\xi_i + \mathbb{E}\xi_i\mathbb{E}\xi_j) = \mathbb{E}[\xi_i\xi_j] - \mathbb{E}[\xi_i\mathbb{E}\xi_j] - \mathbb{E}[\xi_j\mathbb{E}\xi_i] + \mathbb{E}[\mathbb{E}\xi_i\mathbb{E}\xi_j] =$$

$$= \mathbb{E}[\xi_i\xi_j] - 2\mathbb{E}\xi_i\mathbb{E}\xi_j + \mathbb{E}\xi_i\mathbb{E}\xi_j = \mathbb{E}[\xi_i\xi_j] - \mathbb{E}\xi_i\mathbb{E}\xi_j$$

$$\mathbb{E}[\xi_i\xi_j] = \mathbb{P}(i\text{-ая}, j\text{-ая ячейка пуста}) = \frac{C_{n+N-3}^{n}}{C_{n+N-1}^{n}} = \frac{(N-1)(N-2)}{(N+n-1)(N+n-2)}$$

$$\boxminus \frac{(N-1)(N-2)}{(N+n-1)(N+n-2)} - \frac{(N-1)^2}{(N+n-1)^2} = \frac{(N-1)(N-2)(N+n-1) - (N-1)^2(N+n-2)}{(N+n-1)^2(N+n-2)} =$$

$$= \frac{(N-1)(N^2+nN-N+2N-2n+2-(N^2+nN-2N-N-n+2))}{(N+n-1)^2(N+n-2)} = -\frac{(N-1)n}{(N+n-1)^2(N+n-2)}$$

$$= N\frac{(N-1)n}{(N+n-1)^2} - 2C_N^2\frac{(N-1)n}{(N+n-1)^2(N+n-2)} = N\frac{(N-1)n}{(N+n-1)^2} - N\frac{(N-1)^2 n}{(N+n-1)^2(N+n-2)} =$$

$$N(N-1)n\left(\frac{(N+n-2)-(N-1)}{(N+n-1)^2(N+n-2)}\right) = \frac{N(N-1)n(n-1)}{(N+n-1)^2(N+n-2)}$$

<u>Т.4.</u> Подбрасываются две игральные кости. Пусть ξ_1 – число очков, выпавшее на первой игральной кости, а ξ_2 – на второй. Определим $\xi = \max\{\xi_1, \xi_2\}$, $\eta = \min\{\xi_1, \xi_2\}$. Найти $\mathrm{cov}(\xi, \eta)$.

Найдём $\mathbb{P}(\xi = k)$ и $\mathbb{P}(\eta = k)$.

Если $\max\{\xi_1, \xi_2\} = k$, то один из ξ_1, ξ_2 равен k, а другой $\leq k$, т.е. подходят все пары $(1,k); (k,1); \ldots (k-1,k); (k,k-1); (k,k)$. Таких пар $2k-1$ штук.

Если $\min\{\xi_1, \xi_2\} = k$, то один из ξ_1, ξ_2 равен k, а другой $\geq k$, т.е. подходят все пары $(6,k); (k,6); \ldots (k+1,k); (k,k+1); (k,k)$. Таких пар $2(6-k+1)+1 = 13-2k$ штук.

Тогда $\mathbb{P}(\xi = k) = \frac{2k-1}{36}$; $\mathbb{P}(\xi = \eta) = \frac{13-2k}{36}$

$$\mathbb{E}\xi = \sum_{k=1}^{6} k\,\mathbb{P}(\xi = k) = \sum_{k=1}^{6} k\frac{2k-1}{36} = \frac{1+6+15+28+45+66}{36} = \frac{161}{36}$$

$$\mathbb{E}\eta = \sum_{k=1}^{6} k\,\mathbb{P}(\eta = k) = \sum_{k=1}^{6} k\frac{13-2k}{36} = \frac{11+18+21+20+15+6}{36} = \frac{91}{36}$$

ξ_1, ξ_2 – независимы $\Rightarrow$ вер-ть выпадения какой-то (i,j) – $\frac{1}{36}$

$$\mathbb{E}[\xi\eta] = \sum_{k=1}^{36} k\,\mathbb{P}(\eta\xi = k) = \sum_{1\leq i,j\leq 6} \max(i,j)\min(i,j)\,\mathbb{P}(\xi_1 = i;\ \xi_2 = j) =$$

$$= \sum_{1\leq i,j\leq 6} \max(i,j)\min(i,j)\frac{1}{36} = \frac{1}{36}\sum ij = \frac{1}{36}(1+2+3+4+5+6)^2 = \frac{441}{36}$$

$$\mathrm{cov}(\xi, \eta) = \mathbb{E}[\xi\eta] - \mathbb{E}\xi\,\mathbb{E}\eta = \frac{441}{36} - \frac{161}{36}\cdot\frac{91}{36} = \frac{1225}{1296} \approx 0{,}95$$

Т.5. Игральная кость подбрасывается n раз. Пусть ξ число появлений единицы, а η - число появлений шестёрки. Найти коэффициент корреляции этих случайных величин.

$\mathbb{E}\xi = \mathbb{E}\eta = \frac{1}{6}n$; $\mathbb{D}\xi = \mathbb{D}\eta = n\frac{5}{36}$; т.к. $\xi, \eta \sim Binomial(n, 1/6)$

$\mathbb{E}[\xi\eta] = \sum\limits_{1<i,j<n} \mathbb{P}(в\ i\ выпало\ 1)\,\mathbb{P}(в\ j\ выпало\ 6) = \sum\limits_{\substack{1<i,j<n\\ i\neq j}} \mathbb{P}(в\ i\ выпало\ 1)\,\mathbb{P}(в\ j\ выпало\ 6)$, т.к. при $i=j$ $\mathbb{P}(1\ в\ i)\,\mathbb{P}(6\ в\ j)=0$

Т.е. $\mathbb{E}[\xi\eta] = n(n-1)\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{36}n(n-1)$

$cov(\xi,\eta) = \mathbb{E}[\xi\eta] - \mathbb{E}\xi\mathbb{E}\eta = -\frac{n}{36}$

$\rho(\xi,\eta) = \frac{cov(\xi,\eta)}{\sqrt{\mathbb{D}\xi\cdot\mathbb{D}\eta}} = \frac{-n/36}{5n/36} = -\frac{1}{5}$

Т.6. Доказать, что если случайные величины ξ и η принимают только по два значения каждая, то из некоррелируемости следует независимость.

$\exists$ $\mathbb{P}(\xi=x)=p$, $\mathbb{P}(\xi=y)=1-p$; $\mathbb{P}(\eta=z)=q$, $\mathbb{P}(\eta=w)=1-q$.

Введём $\xi' = \frac{\xi-y}{x-y}$; $\eta' = \frac{\eta-w}{z-w}$. Тогда $\mathbb{P}(\xi'=1)=p$, $\mathbb{P}(\xi'=0)=1-p$; $\mathbb{P}(\eta'=1)=q$, $\mathbb{P}(\eta'=0)=1-q$.

$$cov(\xi',\eta') = \mathbb{E}[\xi'\eta'] - \mathbb{E}\xi'\mathbb{E}\eta' = \frac{1}{(x-y)(z-w)}\Big(\mathbb{E}[(\xi-y)(\eta-w)] -$$

$$-\mathbb{E}[\xi-y]\,\mathbb{E}[\eta-w]\Big) = \frac{1}{(x-y)(z-w)}\Big(\mathbb{E}[\xi\eta - w\xi - y\eta + wy] - (\mathbb{E}\xi - y)\cdot$$

$$\cdot(\mathbb{E}\eta - w)\Big) = \frac{1}{(x-y)(z-w)}\Big(\mathbb{E}[\xi\eta] - w\mathbb{E}\xi - y\mathbb{E}\eta + wy - \mathbb{E}\xi\mathbb{E}\eta +$$

$$+w\mathbb{E}\xi + y\mathbb{E}\eta - wy\Big) = \frac{1}{(x-y)(z-w)}\Big(\mathbb{E}[\xi\eta] - \mathbb{E}\xi\mathbb{E}\eta\Big) = \frac{cov(\xi,\eta)}{(x-y)(z-w)}$$

По усл. $\rho(\xi,\eta)=0 \Rightarrow cov(\xi,\eta)=0 \Rightarrow cov(\xi',\eta')=0$, т.е. $\mathbb{E}[\xi'\eta']=\mathbb{E}\xi'\mathbb{E}\eta'$

$\mathbb{E}[\xi'\eta'] = \mathbb{P}(\xi'=1, \eta'=1)$. $\mathbb{E}\xi'\mathbb{E}\eta' = \mathbb{P}(\xi'=1)\mathbb{P}(\eta'=1) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ 1) $\mathbb{P}(\xi'=1, \eta'=1) = \mathbb{P}(\xi'=1)\mathbb{P}(\eta'=1) = pq$

2) $\mathbb{P}(\xi'=1, \eta'=0) = \mathbb{P}(\xi'=1) - \mathbb{P}(\xi'=1, \eta'=1) = p - pq = p(1-q) =$
$= \mathbb{P}(\xi'=1)\mathbb{P}(\eta'=0)$

3) $\mathbb{P}(\xi'=0, \eta'=1) = \mathbb{P}(\eta'=1) - \mathbb{P}(\xi'=1, \eta'=1) = q - pq = q(1-p) =$
$= \mathbb{P}(\eta'=1)\mathbb{P}(\xi'=0)$

4) $\mathbb{P}(\xi'=0, \eta'=0) = \mathbb{P}(\xi'=0) - \mathbb{P}(\xi'=0, \eta'=1) = 1-p-q(1-p) =$
$= (1-p)(1-q) = \mathbb{P}(\xi'=0)\mathbb{P}(\eta'=0)$

Таким образом $\forall\, a,b$ $\mathbb{P}(\xi'=a, \eta'=b) = \mathbb{P}(\xi'=a)\mathbb{P}(\eta'=b)$, т.е. ξ' и η' независимы /ч.т.д.

<u>Т.7</u> Пусть ξ_k, $k=1,2$, - независимые случайные величины с распределением Пуассона. Найти распределение их суммы и условное распределение ξ_1, если известна сумма $\xi_1+\xi_2$.

$$\mathbb{P}(\xi_1+\xi_2=n) = \sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}(\xi_1=k)\mathbb{P}(\xi_2=n-k) = \sum_{k=1}^{n}\frac{e^{-\lambda_1}\lambda_1^k}{k!}\frac{e^{-\lambda_2}\lambda_2^{n-k}}{(n-k)!} =$$
$$= e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n!}\frac{n!}{k!(n-k)!}\lambda_1^k\lambda_2^{n-k} = \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{n!}\sum_{k=1}^{n}C_n^k\lambda_1^k\lambda_2^{n-k} = \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{n!}(\lambda_1+\lambda_2)^n$$

Т.е. $\xi_1+\xi_2 \sim Poisson(\lambda_1+\lambda_2)$

Найдём усл. распр. ξ_1, если известно, что $\xi_1+\xi_2=n$

$\mathbb{P}(\xi_1=k \mid \xi_1+\xi_2=n) = \dfrac{\mathbb{P}(\xi_1=k, \xi_2=n-k)}{\mathbb{P}(\xi_1+\xi_2=n)}$. Т.к. ξ_1 и ξ_2 - независимы, то $\mathbb{P}(\xi_1=k, \xi_2=n-k)=\mathbb{P}(\xi_1=k)\mathbb{P}(\xi_2=n-k)$ (также используется в первом равенстве в решении). Тогда

$$\mathbb{P}(\xi_1=k \mid \xi_1+\xi_2=n)=\frac{\mathbb{P}(\xi_1=k)\mathbb{P}(\xi_2=n-k)}{\mathbb{P}(\xi_1+\xi_2=n)}=\frac{\frac{e^{-\lambda_1}\lambda_1^k}{k!}\cdot\frac{e^{-\lambda_2}\lambda_2^{n-k}}{(n-k)!}}{\frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}(\lambda_1+\lambda_2)^n}{n!}}=$$

$$=C_n^k\frac{\lambda_1^k\lambda_2^{n-k}}{(\lambda_1+\lambda_2)^n}=C_n^k\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^k\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{n-k},$$ т.е.

ξ_1 при условии $\xi_1+\xi_2=n \sim \mathrm{Binomial}\left(n,\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)$

Т.8. Совместное распределение случайных величин ξ и η определяется условиями $\mathbb{P}(\xi\eta=0)=1$; $\mathbb{P}(\xi=1)=\mathbb{P}(\xi=-1)=\mathbb{P}(\eta=1)=\mathbb{P}(\eta=-1)=1/4$. Найти математические ожидания, дисперсии и ковариацию этих случайных величин.

$\mathbb{P}(\xi\eta=0)=1$ означает, что ξ и η не могут быть ненулевыми одновременно. Тогда $\mathbb{P}(\xi=\pm1)=\mathbb{P}(\xi=\pm1,\eta=0)$, $\mathbb{P}(\eta=\pm1)=\mathbb{P}(\eta=\pm1,\xi=0)$. Т.е. $\mathbb{P}(\xi=\pm1,\eta=0)+\mathbb{P}(\eta=\pm1,\xi=0)=\mathbb{P}(\xi=\pm1)+\mathbb{P}(\eta=\pm1)=2\cdot\frac{1}{4}+2\cdot\frac{1}{4}=1$ $\Rightarrow$ ξ и η не принимают других значений кроме $\pm1, 0$. Тогда $\mathbb{E}\xi=\mathbb{P}(\xi=1)-\mathbb{P}(\xi=-1)=0=\mathbb{E}\eta$.

$\mathbb{D}\xi=\mathbb{E}\xi^2-(\mathbb{E}\xi)^2=\mathbb{E}\xi^2=\mathbb{P}(\xi=1)+\mathbb{P}(\xi=-1)=\frac{1}{2}=\mathbb{D}\eta$

$\mathrm{cov}(\xi,\eta)=\mathbb{E}[\xi\eta]-\mathbb{E}\xi\mathbb{E}\eta=\mathbb{E}[\xi\eta]=0$

Т.9. Привести примеры трёх случайных величин $\xi_1,\xi_2,$ удовлетворяющих условиям:

(b) $\mathbb{E}[\xi_1\xi_2\xi_3]=\mathbb{E}\xi_1\mathbb{E}\xi_2\mathbb{E}\xi_3$, $\mathbb{E}[\xi_i\xi_j]\neq\mathbb{E}\xi_i\mathbb{E}\xi_j$, $i\neq j$.

(a) $\exists\ \xi_1: \mathbb{P}(\xi_1=1)=1/2$, $\mathbb{P}(\xi_1=-1)=1/2$, ξ_2 аналогично ξ_1, $\xi_3=\xi_1\xi_2$.

Тогда $\mathbb{E}[\xi_1\xi_2]=1\cdot\mathbb{P}(\xi_1\xi_2=1)-1\mathbb{P}(\xi_1\xi_2=-1)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0$. $\mathbb{E}[\xi_{1,2}]=$

$=1\mathbb{P}(\xi_{1,2}=1)-1\mathbb{P}(\xi_{1,2}=-1)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0$, т.е. $\mathbb{E}[\xi_1\xi_2]=\mathbb{E}\xi_1\mathbb{E}\xi_2$.

$\mathbb{E}[\xi_1\xi_3]=1\mathbb{P}(\xi_1\xi_3=\xi_1^2\xi_2=1)-1\mathbb{P}(\xi_1=\xi_3=\xi_1^2\xi_2=-1)=$

$=1\mathbb{P}(\xi_2=1)-1\mathbb{P}(\xi_2=-1)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0$. $\mathbb{E}\xi_1\mathbb{E}\xi_3=0\mathbb{E}\xi_3=0\Rightarrow$

$\Rightarrow\mathbb{E}[\xi_1\xi_3]=\mathbb{E}\xi_1\mathbb{E}\xi_3$. Аналогично с ξ_2. Т.е. $\mathbb{E}[\xi_i\xi_j]=\mathbb{E}\xi_i\mathbb{E}\xi_j$, $i\neq j$

$\mathbb{E}[\xi_1\xi_2\xi_3]=1\mathbb{P}(\xi_1\xi_2\xi_3=\xi_1^2\xi_2^2=1)-1\mathbb{P}(\xi_1\xi_2\xi_3=\xi_1^2\xi_2^2=-1)=$

$=1-0=1\neq0=\mathbb{E}\xi_1\mathbb{E}\xi_2\mathbb{E}\xi_3$

(b) $\exists\ \xi_1=A+B$, $\xi_2=B+C$, $\xi_3=A+C$, где A,B,C такие же как ξ_1 в (a).

$\mathbb{E}\xi_1=\mathbb{E}[A+B]=\mathbb{E}A+\mathbb{E}B=0+0=0$ $\quad\mathbb{E}\xi_1=\mathbb{E}\xi_2=\mathbb{E}\xi_3$ из симметрии

$\mathbb{E}[\xi_1\xi_2]=\mathbb{E}[(A+B)(B+C)]=\mathbb{E}[AB]+\mathbb{E}[AC]+\mathbb{E}[B^2]+\mathbb{E}[BC]=$

$=3\mathbb{E}[AB]+\mathbb{E}[\overset{=1}{B^2}]=3(1\mathbb{P}(AB=1)-1\mathbb{P}(AB=-1))+\mathbb{E}1=3(\frac{1}{2}-\frac{1}{2})+1=1$

$\mathbb{E}\xi_1\xi_2\xi_3=\mathbb{E}[(A+B)(B+C)(A+C)]=\mathbb{E}[(AB+AC+B^2+BC)(A+C)]=$

$=\mathbb{E}[\overset{=1}{A^2}B+ABC+\overset{=1}{A^2}C+A\overset{=1}{C^2}+\overset{=1}{B^2}A+\overset{=1}{B^2}C+ABC+B\overset{=1}{C^2}]=2\mathbb{E}[ABC+A+B+C]=$

$=2\mathbb{E}[ABC]+2(\overset{=0}{\mathbb{E}A}+\overset{=0}{\mathbb{E}B}+\overset{=0}{\mathbb{E}C})=2\mathbb{E}[ABC]=2(1\mathbb{P}(ABC=1)-1\mathbb{P}(ABC))=$

$=2(\frac{1}{2}-\frac{1}{2})=0$

Таким образом, $\mathbb{E}[\xi_1\xi_2\xi_3]=\mathbb{E}\xi_1\mathbb{E}\xi_2\mathbb{E}\xi_3$, $\mathbb{E}[\xi_i\xi_j]\neq\mathbb{E}\xi_i\mathbb{E}\xi_j$, $i\neq j$

Т.10. Пусть ξ - номер r-го успеха в последовательности независимых испытаний Бернулли. Найти $\mathbb{E}\xi$ и $\mathbb{D}\xi$.

$\exists$ ξ_k - число испытаний между $k-1$ и k успехом, ξ_1 - число испытаний до первого успеха. Тогда $\xi = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k$.

$\mathbb{P}(\xi_k = n) = (1-p)^{n-1} p$ - геометрическое распределение $\Rightarrow$

$\Rightarrow \mathbb{E}\xi_k = \frac{1}{p}$, $\mathbb{D}\xi_k = \frac{1-p}{p^2}$

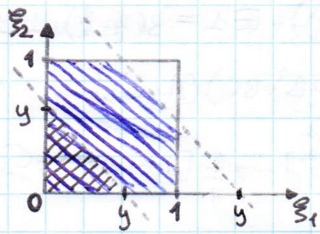
$$\mathbb{E}\xi = \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{n} \xi_k\right] = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\xi_k = \frac{n}{p}$$

$$\mathbb{D}\xi = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{D}\xi_k + 2\sum_{1 \le i < j \le n} \operatorname{cov}(\xi_i, \xi_j) \ominus$$ (см. решение Т.3.)

Т.к. ξ_i и ξ_j независимые $\operatorname{cov}(\xi_i, \xi_j) = 0$

$$\ominus \sum_{k=1}^{n} \mathbb{D}\xi_k = \frac{n(1-p)}{p^2}$$

<u>Т.11.</u> В квадрат $\{(x_1, x_2): 0 \le x_i \le 1;\ i = 1, 2\}$ наудачу брошена точка. Пусть ξ_1, ξ_2 - её координаты. Найти функцию распределения и плотность вероятности случайной величины $\eta = \xi_1 + \xi_2$



$$F_\eta(y) = \mathbb{P}(\eta \le y)$$

$y \le 0: \mathbb{P}(\eta \le y) = 0$

$0 < y \le 1: \mathbb{P}(\eta \le y) = \frac{mes(\blacksquare)}{mes([0,1]^2)} = \frac{\frac{1}{2}y^2}{1} = \frac{1}{2}y^2$

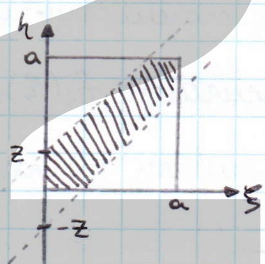
$1 < y \le 2: \mathbb{P}(\eta \le y) = \frac{mes(\blacksquare)}{mes([0,1]^2)} = 1 - \frac{1}{2}(2-y)^2$

$2 < y: \quad \mathbb{P}(\eta \le y) = 1$

Таким образом $F_\eta(y) = \begin{cases} 0, & y \le 0 \\ y^2/2, & 0 < y \le 1 \\ 1 - (2-y)^2/2, & 1 < y \le 2 \\ 1, & 2 < y \end{cases}$

$$f_\eta(y) = F_\eta'(y) = \begin{cases} 0, & y \le 0 \\ y, & 0 < y \le 1 \\ 2-y, & 1 < y \le 2 \\ 0, & 2 < y \end{cases}$$

<u>Т.12.</u> Точка (ξ, η) имеет равномерное распределение в квадрате $\{(x,y): 0 \le x \le a,\ 0 \le y \le a\}$. Вычислить распределение, математическое ожидание и дисперсию случайной величины $\zeta = |\xi - \eta|$.



$F_\zeta(z) = P(\zeta \le z)$

$\zeta = |\xi - \eta| \le z$ - задаёт полосу между прямыми $\eta \ge \xi - z$ и $\eta \le \xi + z$

$z \le 0$: $P(\zeta \le z) = 0$; $z \in (0; a]$: $P(\zeta \le z) =$

$$= \frac{\mathrm{mes}(\ast)}{\mathrm{mes}([0,a]^2)} = \frac{a^2 - 2\cdot\frac{1}{2}(a-z)^2}{a^2} = 1 - \left(1 - \frac{z}{a}\right)^2 = \frac{z}{a}\left(2 - \frac{z}{a}\right);\ z > a: P(\zeta \le z) = 1$$

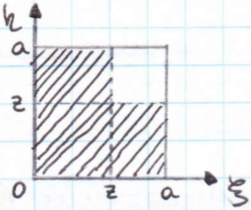
$$f_\zeta(z) = F_\zeta'(z) = \begin{cases} 0, & z \le 0 \\ \frac{2(a-z)}{a^2}, & 0 < z \le a \\ 0, & a < z \end{cases}$$

$$\mathbb{E}\zeta = \int_{-\infty}^{+\infty} z f_\zeta(z)\,dz = \frac{2}{a^2}\int_0^a z(a-z)\,dz = \frac{2}{a}\cdot\frac{a^2}{2} - \frac{2}{3a^2}a^3 = \frac{a}{3}$$

$$\mathbb{E}[\zeta^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} z^2 f_\zeta(z)\,dz = \frac{2}{a^2}\int_0^a z^2(a-z)\,dz = \frac{2}{a^2}\frac{a^3}{3} - \frac{2}{a^2}\frac{a^4}{4} = \frac{a^2}{6}$$

$$\mathbb{D}\zeta = \mathbb{E}[\zeta^2] - (\mathbb{E}\zeta)^2 = \frac{a^2}{6} - \frac{a^2}{9} = \frac{a^2}{18}$$

<u>Т.13.</u> Точка (ξ, η) имеет равномерное распределение в квадрате $\{(x,y): 0 \le x \le a,\ 0 \le y \le a\}$. Вычислить распределение, математическое ожидание и дисперсию случайной величины $\theta = \min\{\xi, \eta\}$



$F_\theta(z)=\mathbb{P}(\theta\le z)$

$\theta=\min\{\xi,\eta\}\le z$ - задаёт область

$$F_\theta(z)=\begin{cases}0, & z\le 0\\ 1-(1-\frac{z}{a})^2, & 0<z\le a\\ 1, & a<z\end{cases}$$

$F_\theta(z)$ совпадает с $F_\xi(z)$ из задачи Т.12, поэтому выкладки и значения для $\mathbb{E}\theta$ и $\mathbb{D}\theta$

<u>Т.14.</u> Случайная величина ξ имеет равномерное распределение на отрезке $[0,1]$. Придумать такие функции $f_i:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $1\le i\le 3$, чтобы случайные величины $f_1(\xi)$, $f_2(\xi)$, $f_3(\xi)$ были независимыми и имели распределение Бернулли с параметром $1/2$.

$\exists\, f_i(\xi)=\mathbb{1}_{E_i}(\xi)$, где $E_1=[\frac{1}{2};1]$, $E_2=[\frac{1}{4};\frac{1}{2}]\cup[\frac{3}{4};1]$, $E_3=$ $=[\frac{1}{8};\frac{1}{4}]\cup[\frac{3}{8};\frac{1}{2}]\cup[\frac{5}{8};\frac{3}{4}]\cup[\frac{7}{8};1]$. $\mathbb{P}(f_i(\xi)=1)=\frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(f_i(\xi)=0)=\frac{1}{2}$. $f_i(\xi)$ независимы, т.к. $|E_i\cap E_j|=|E_i||E_j|$, $|\overline{E_i}\cap E_j|=|\overline{E_i}||E_j|$, $|\overline{E_i}\,\overline{E_j}|=|\overline{E_i}||\overline{E_j}|$, т.е. $\mathbb{P}(f_i(\xi)=1,f_j(\xi)=1)$ $=\mathbb{P}(\xi_i=1)\mathbb{P}(\xi_j=1)$, $\mathbb{P}(f_i(\xi)=0,f_j(\xi)=1)=\mathbb{P}(f_i(\xi)=0)\cdot$ $\cdot\mathbb{P}(f_j(\xi)=1)$, $\mathbb{P}(f_i(\xi)=0,f_j(\xi)=0)=\mathbb{P}(f_i(\xi)=0)\mathbb{P}(f_j(\xi)=0)$

Можно доопределить f_i вне отрезка $[0,1]$, чтобы $f_i:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, любым способом. На распределение и независимость $f_i(\xi)$ это не влияет, т.к. $\xi\in[0,1]$.

<u>Т.15.</u> Известно, что случайная величина ξ имеет

строго возрастающую непрерывную функцию распределения $F_\xi(x)$. Найти распределение случайной величины $\eta = F_\xi(\xi)$.

$F_\xi(x)$ - строго возрастающая $\Rightarrow \exists F^{-1}_\xi(x)$.

$$F_\eta(y) = P(\eta \leq y) = P(F_\xi(\xi) \leq y) \overset{\Downarrow}{=} P(\xi \leq F_\xi^{-1}(y)) \ominus$$

$$F_\xi(x) = P(\xi \leq x) \Rightarrow F_\xi(F_\xi^{-1}(y)) = P(\xi \leq F_\xi^{-1}(y))$$

$$\ominus F_\xi(F_\xi^{-1}(y)) = y \Rightarrow \eta \sim \mathcal{U}(0,1)$$

<u>Т.16.</u> Случайная величина ξ имеет распределение, которое определяется плотностью $f_\xi(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$, $-\infty < x < \infty$. Сравнить точное значение вероятности $P(|\xi| \geq 4)$ с её оценкой, полученной по неравенству Чебышёва.

$$P(|\xi| \geq 4) = P(\xi \leq -4) + P(\xi \geq 4) \ominus$$

$$P(\xi \leq -4) = \int_{-\infty}^{-4} f_\xi(x)dx = \int_{-\infty}^{-4} \frac{1}{2}e^{-|x|}dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{-4} e^{x}dx = \frac{1}{2}e^{-4}$$

$$P(\xi \geq 4) = \int_{4}^{+\infty} f_\xi(x)dx = \int_{4}^{+\infty} \frac{1}{2}e^{-|x|}dx = \frac{1}{2}\int_{4}^{+\infty} e^{-x}dx = \frac{1}{2}e^{-4}$$

$$\ominus \frac{1}{2}e^{-4} + \frac{1}{2}e^{-4} = e^{-4}$$

Нер-во Чебышёва: $P(|\xi - E\xi| \geq 4) \leq \frac{D\xi}{4^2}$

$E\xi = 0$, т.к. $f_\xi(x) = f_\xi(-x)$, $D\xi = E[\xi^2]$

$$E[\xi^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \frac{1}{2}e^{-|x|}dx = \int_{0}^{+\infty} x^2 e^{-x}dx = (x^2 e^{-x})\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} 2xe^{-x}dx =$$

$$= \int_0^{+\infty} 2xe^{-x}dx = (2xe^{-x})\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} 2e^{-x}dx = 2\int_0^{+\infty} e^{-x}dx = 2$$

Таким образом, $\mathbb{P}(|\xi|\geq 4) \leq \frac{2}{4^2} = \frac{1}{8}$

Точное значение — $e^{-4} \approx 0{,}018$. Оценка $\leq \frac{1}{8} = 0{,}125$

<u>Т.17.</u> Пусть ξ_n — случайная величина, равная сумме очков, появившихся при n бросаниях симметричной игральной кости. Используя неравенство Чебышева, оценить сверху $\mathbb{P}\left(\left|\frac{\xi_n}{n} - \frac{7}{2}\right| > \varepsilon\right)$, $\varepsilon > 0$

$\xi_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$, X_k — кол-во очков, выпавшее в k-ом бросании.

$\mathbb{E} X_k = \frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6) = \frac{7}{2}$; $\mathbb{E}[X_k^2] = \frac{1}{6}(1+4+9+16+25+36) = \frac{91}{6}$

$\mathbb{D} X_k = \mathbb{E}[X_k^2] - (\mathbb{E} X_k)^2 = \frac{91}{6} - \frac{49}{4} = \frac{35}{12}$

Нер-во Чебышева для $\frac{\xi_n}{n}$: $\mathbb{P}\left(\left|\frac{\xi_n}{n} - \frac{7}{2}\right| > \varepsilon\right) \leq \frac{\mathbb{D}\left[\frac{\xi_n}{n}\right]}{\varepsilon^2}$

$= \frac{1}{n^2\varepsilon^2} \mathbb{D}\xi_n = \frac{1}{n^2\varepsilon^2}\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{D} X_k + 2 \sum\limits_{1 \leq i < j \leq n} \operatorname{cov}(X_i, X_j)\right)$ (см. реш. Т.3)

Т.к. броски независимы $\operatorname{cov}(X_i, X_j) = 0$

Получаем: $\mathbb{P}\left(\left|\frac{\xi_n}{n} - \frac{7}{2}\right| > \varepsilon\right) \leq \frac{35}{12 n \varepsilon^2}$

<u>Т.18.</u> Пусть ξ_n — случайная величина, равная сумме очков, появившихся при n бросаниях симметричной игральной кости. Используя центральную предельную теорему, выбрать n так, чтобы $\mathbb{P}\left(\left|\frac{\xi_n}{n} - \frac{7}{2}\right| \geq 0{,}1\right) \leq 0{,}1$

Из ЦПТ $\Rightarrow \frac{\xi_n - n\mathbb{E}\xi_n}{\sqrt{\mathbb{D}\xi_n}} \to \mathcal{N}(0,1)$ по распределению при $n \to \infty$

] $Y_n = \frac{\xi_n - n\mathbb{E}\xi_n}{\sqrt{\mathbb{D}\xi_n}} = \frac{\xi_n/n - 7/2}{\sqrt{\frac{35}{12n}}}$. Тогда $\mathbb{P}\left(\left|\frac{\xi_n}{n} - \frac{7}{2}\right| \geq 0{,}1\right) = \mathbb{P}(|Y_n| \geq$

$\geq \underbrace{0,1\sqrt{\frac{12n}{35}}}_{\alpha}\Big)$. Считая n большим, $Y_n \sim \mathcal{N}(0,1)$ (из ЦПТ).

Тогда $\mathbb{P}(|Y_n| \geq \alpha) = \mathbb{P}(Y_n \geq \alpha) + \mathbb{P}(Y_n \leq -\alpha) = 2\mathbb{P}(Y_n \geq \alpha)$ – из симметрии $\mathcal{N}(0,1)$.

$\exists\, \Phi(\alpha) = \mathbb{P}(Y_n \geq \alpha) \Rightarrow \mathbb{P}(Y_n \leq \alpha) = 1 - \Phi(\alpha)$

$\Phi(\alpha)$ – функция распределения стандартной нормальной величины ($Y_n \sim \mathcal{N}(0,1)$).

Таким образом $\mathbb{P}(|Y_n| \geq \alpha) = 2(1 - \Phi(\ )) \leq 0,1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \Phi(\ ) \geq 0,95$. Из таблицы нормального распределения получаем $\alpha > \ ,5$, т.е. $0,1\sqrt{\frac{12n}{35}} > 1,65 \Rightarrow n > 794$

<u>Т.19.</u> Найти законы распределения, которым соответствуют следующие характеристические функции:

$\cos t$; $\frac{1}{2} + \frac{\cos t}{2} + i\,\frac{\sin t}{6}$; $\frac{1}{2 - e^{-it}}$

---

1) $\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}$. Т.к. $\varphi_\xi(t) = \mathbb{E}e^{it\xi} = \sum p_k e^{itx_k}$, то

$$F_\xi(x) = \frac{1}{2}\mathbb{1}_{[-1;+\infty)} + \frac{1}{2}\mathbb{1}_{[1;+\infty)}$$

2) $\frac{1}{2} + \frac{\cos t}{2} + i\,\frac{\sin t}{6} = \frac{1}{2}e^{0t} + \frac{1}{3}\cos t + \frac{1}{6}(\cos t + i\sin t) = \frac{1}{2}e^{0t} +$

$+ \frac{1}{3}\,\frac{e^{it} + e^{-it}}{2} + \frac{1}{6}e^{it} = \frac{1}{2}e^{0t} + \frac{1}{6}e^{-it} + \frac{1}{3}e^{it}$

$$F_\xi(x) = \frac{1}{6}\mathbb{1}_{[-1,+\infty)} + \frac{1}{2}\mathbb{1}_{[0;+\infty)} + \frac{1}{3}\mathbb{1}_{[1;+\infty)}$$

3) $\frac{1}{2 - e^{-it}} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{1 - \frac{e^{-it}}{2}} = \frac{1}{2}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\left(\frac{e^{-it}}{2}\right)^k = \sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^{k+1}}e^{-itk} \Rightarrow$

$$\Rightarrow F_\xi(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^{k+1}}\mathbb{1}_{[k;+\infty)}$$

<u>Т.20.</u> Какие из функций $\sin t$; $\left(\frac{1}{2 - e^{-it}}\right)^3$; $\frac{1}{1+t^4}$

являются характеристическими?

---

1) $\sin t =|_{t=0} 0$, но $\varphi(t) = \mathbb{E}[e^{it\xi}] =|_{t=0} 1 \Rightarrow$ не харак. ф-ц

2) Как видно из задачи Т.19, пункт 3) $\frac{1}{2-e^{-it}}$ – характеристическая функция. Тогда $\left(\frac{1}{2-e^{-it}}\right)^3$ – характеристическая функция суммы трёх н.о.р. случайных величин с харак. ф-цией $\frac{1}{2-e^{-it}}$

3) Получим связь между $\varphi_\xi(t)$ и $\mathbb{E}[\xi^n]$.

$$\frac{d^n}{dt^n}(\varphi_\xi(t)) = \frac{d^n}{dt^n}(\mathbb{E}[e^{it\xi}]) = \mathbb{E}\left[\frac{d^n}{dt^n}(e^{it\xi})\right] = \mathbb{E}[(i\xi)^n e^{it\xi}] =$$

$$= i^n \mathbb{E}[\xi^n e^{it\xi}] \to \varphi_\xi(\ ) = i^n \mathbb{E}[\xi^n] \to \mathbb{E}[\xi^n] = (-i)^n \varphi^{(n)}(0)$$

Тогда для $\varphi_\xi(t) = \frac{1}{1+t^4}$ получаем $\mathbb{E}\xi = (-i)\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{1+t^4}\right)\Big|_{t=0} =$

$$= \left(-\frac{4t^3}{(1+t^4)^2}\right)\Big|_{t=0} = 0; \quad \mathbb{E}[\xi^2] = -\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{1}{1+t^4}\right)\Big|_{t=0} =$$

$$= \left(\frac{-2(1+t^4)\cdot t^3\cdot 4t^3 + 12t^2(1+t^4)^2}{(1+t^4)^2}\right)\Big|_{t=0} = 0.$$

Таким образом $D\xi = \mathbb{E}[\xi^2] - (\mathbb{E}\xi)^2 = 0-0=0$

Однако, $D\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \, dP_\xi(x)$. $x^2 > 0 \ \forall x \neq 0$, $dP_\xi(x) =$
$= f_\xi(x)dx > 0 \ \forall x \Rightarrow f_\xi(x) = 0 \ \forall x \neq 0$, т.к. иначе $D\xi >$

Т.е. $\xi \equiv 0$ почти наверное. Но тогда $\varphi_\xi(t) =$
$= \mathbb{E}[e^{it\xi}] = \mathbb{E}[e^{it0}] = 1 \neq \frac{1}{1+t^4}$?! $\Rightarrow \frac{1}{1+t^4}$ не является характеристической функцией.

Т.21. Найти характеристическую функцию треугольного распределения, которое определяется плотностью $f_\xi(x) = \frac{1}{\alpha}\left(1-\frac{|x|}{\alpha}\right)\mathbb{1}_{[-\alpha,\alpha]}(x),\ \alpha>0.$

$$\varphi_\xi(t)=\mathbb{E}[e^{it\xi}] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f_\xi(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}\frac{1}{\alpha}\left(1-\frac{|x|}{\alpha}\right)\mathbb{1}_{[-\alpha,\alpha]}(x)\,dx =$$

$$= \int_{-\alpha}^{\alpha} e^{itx}\frac{1}{\alpha}\left(1-\frac{|x|}{\alpha}\right)dx = \frac{1}{\alpha}\left[\int_{-\alpha}^{0} e^{itx}\left(1+\frac{x}{\alpha}\right)dx + \int_{0}^{\alpha} e^{itx}\left(1-\frac{x}{\alpha}\right)dx\right] =$$

$$= \frac{1}{\alpha}\left[\int_{-\alpha}^{\alpha} e^{itx}dx + \int_{-\alpha}^{0} e^{itx}\frac{x}{\alpha}dx - \int_{0}^{\alpha} e^{itx}\frac{x}{\alpha}dx\right] =$$

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} e^{itx}dx = \frac{1}{it}e^{itx}\Big|_{-\alpha}^{\alpha} = \frac{e^{it\alpha}-e^{-it\alpha}}{it}$$

$$\int e^{itx}\frac{x}{\alpha}dx = \int \frac{x}{\alpha}\frac{1}{it}d(e^{itx}) = \frac{1}{it\alpha}\left[xe^{itx} - \int e^{itx}dx\right] =$$

$$= \frac{1}{it\alpha}\left[xe^{itx} - \frac{1}{it}e^{itx}\right] + C$$

$$= \frac{1}{\alpha}\left(\frac{e^{it\alpha}-e^{-it\alpha}}{it} + \frac{1}{it\alpha}\left[xe^{itx} - \frac{1}{it}e^{itx}\right]\Big|_{-\alpha}^{0} - \frac{1}{it\alpha}\left[xe^{itx} - \frac{1}{it}e^{itx}\right]\Big|_{0}^{\alpha}\right) = \frac{1}{it\alpha}\left(e^{it\alpha}-e^{-it\alpha} + \frac{1}{\alpha}\left[-\frac{1}{it} - \left(-\alpha e^{-it\alpha} - \frac{1}{it}e^{-it\alpha}\right)\right] - \frac{1}{\alpha}\left[\alpha e^{it\alpha} - \frac{1}{it}e^{it\alpha} + \frac{1}{it}\right]\right) = \frac{1}{it\alpha}\left[e^{it\alpha}-e^{-it\alpha} - \frac{1}{\alpha it} + e^{-it\alpha} + \frac{1}{\alpha it}e^{-it\alpha} - e^{it\alpha} + \frac{1}{it\alpha}e^{it\alpha} - \frac{1}{\alpha it}\right] = \frac{1}{(it\alpha)^2}\left[e^{it\alpha}+e^{-it\alpha}-2\right] =$$

$$= \frac{2}{t^2\alpha^2}\left[1-\cos(t\alpha)\right]$$

Таким образом, $\varphi_\xi(t) = \frac{2}{t^2\alpha^2}\left[1-\cos(t\alpha)\right]$

Т.22. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ - последовательность одинаково распределённых случайных величин такая, что $\mathbb{E}\xi_k = a$, $\mathbb{D}\xi_k = \sigma^2$ и $\mathrm{cov}(\xi_i, \xi_j) = (-1)^{i-j}v$, $i \neq j$. Доказать, что для всякого $\varepsilon > 0$ выполняется предельное соотношение $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k - a\right| \geq \varepsilon\right) = 0$

$\rceil$ $S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k$. $\mathbb{E}S_n = \mathbb{E}\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k\right] = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}\xi_k = \mathbb{E}\xi_k = a$

см. Т.3.

$\mathbb{D}[nS_n] = \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{D}\,\xi_k + 2\sum\limits_{1\le i<j\le n} cov(\xi_i, \xi_j) = n\sigma^2 + 2\sum\limits_{1\le i<j\le n} (-1)^{i-j}\, v \overset{n\to\infty}{\sim}$

$\sim n\sigma^2 + 2v\,\tilde{o}(1) \Rightarrow \mathbb{D}\,S_n = \frac{\sigma^2}{n} + \frac{2v\,\tilde{o}(1)}{n^2} \xrightarrow{n\to\infty} 0$

Нер-во Чебышева: $\mathbb{P}(|S_n - a| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{\mathbb{D}\,S_n}{\varepsilon^2} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}(|\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\xi_k - a| \geqslant \varepsilon) = 0$ /ч.т.д.

Т.23. Случайная величина ξ_λ распределена по закону Пуассона с параметром λ. Найти $\lim\limits_{\lambda\to\infty} \mathbb{P}(\frac{\xi_\lambda - \lambda}{\sqrt{\lambda}} \leqslant x)$.

Найдём характеристич. ф-цию распр. Пуассона

$\varphi_{\xi_\lambda}(t) = \mathbb{E}[e^{it\xi_\lambda}] = \sum\limits_{k=0}^{\infty} e^{itk}\,\mathbb{P}(\xi_\lambda = k) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} e^{itk}\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} =$

$= e^{-\lambda}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda e^{it})^k}{k!} = e^{-\lambda}e^{\lambda e^{it}} = \exp(\lambda(e^{it}-1)) = f(t)$

$\varphi_{\frac{\xi_\lambda-\lambda}{\sqrt{\lambda}}}(t) = \mathbb{E}[\exp(it\frac{\xi_\lambda - \lambda}{\sqrt{\lambda}})] = \mathbb{E}[\exp(-it\sqrt{\lambda})\exp(it\cdot$

$\cdot\frac{\xi_\lambda}{\sqrt{\lambda}})] = \exp(-it\sqrt{\lambda})\,\mathbb{E}[\exp(it\frac{\xi_\lambda}{\sqrt{\lambda}})] = e^{-it\sqrt{\lambda}} f(\frac{t}{\sqrt{\lambda}}) =$

$= e^{-it\sqrt{\lambda}}\exp(\lambda(e^{i\frac{t}{\sqrt{\lambda}}} - 1)) \xrightarrow{\lambda\to\infty} e^{-it\sqrt{\lambda}}\exp(\lambda(1 + \frac{it}{\sqrt{\lambda}} - \frac{t^2}{2\lambda} - 1)) =$

$= e^{-it\sqrt{\lambda}}\exp(it\sqrt{\lambda} - \frac{t^2}{2}) = e^{-\frac{t^2}{2}}$ – соответствует характеристической функции $\mathcal{N}(0,1) \Rightarrow \frac{\xi_\lambda - \lambda}{\sqrt{\lambda}} \sim \mathcal{N}(0,1)$ при $\lambda\to\infty$, т.е. $\lim\limits_{\lambda\to} \mathbb{P}(\frac{\xi_\lambda-\lambda}{\sqrt{\lambda}} \leqslant x) = \Phi(x)$ – функция стандартного нормального распределения.

Т.24. Книга в 500 страниц содержит 50 опечаток. Используя схему Бернулли, оценить вероятность того, что на определенной странице не менее трех опечаток. Сравнить полученный результат с пуассоновским приближением этой вероятности.

Если рассмотреть каждую опечатку как испытание, где успех - попадание опечатки на выбранную страницу, то в схеме Бернулли $n=50$, $p=\frac{1}{500}$. В пуассоновском приближении $\lambda=np=0,1$.

Бернулли: $P(X\geqslant 3)=\sum\limits_{k=3}^{n} C_n^k p^k(1-p)^{n-k}=\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k p^k(1-p)^{n-k}-$

$-\left(C_n^0p^0(1-p)^n+C_n^1p^1(1-p)^{n-1}+C_n^2p^2(1-p)^{n-2}\right)=1-\left(\left(\frac{499}{500}\right)^{50}+50\cdot\frac{1}{500}\cdot\right.$

$\left.\cdot\left(\frac{499}{500}\right)^{49}+\frac{50\cdot 49}{2}\cdot\frac{1}{500^2}\left(\frac{499}{500}\right)^{48}\right)\approx 1,46\cdot 10^{-4}$

Пуассоновское: $P(X\geqslant 3)=\sum\limits_{k=3}^{n}\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}=\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}-\left(\frac{\lambda^0e^{-\lambda}}{0!}+\frac{\lambda^1e^{-\lambda}}{1!}+\frac{\lambda^2e^{-\lambda}}{2!}\right)=$

$=1-e^{-0,1}(1+0,1+0,005)\approx 1,54\cdot 10^{-4}$

T.25. Пусть положительные независимые случайные величины $\xi_{m,n}$; $m=1,2,\dots,n$ одинаково распределены с плотностью $\alpha_n e^{-\alpha_n x}$, $x>0$, где $\alpha_n=\lambda n$ и $\lambda>0$. Найти предельное при $n\to\infty$ распределение случайной величины $\xi_n=\sum\limits_{m=1}^{n}\xi_{m,n}$.

$E\xi_{m,n}=\int\limits_0^{+\infty}x\cdot f_{\xi_{m,n}}(x)dx=\int\limits_0^{+\infty}x\alpha_n e^{-\alpha_n x}dx=-\int\limits_0^{+\infty}x\,d(e^{-\alpha_n x})=$

$=(-xe^{-\alpha_n x})\Big|_0^{+\infty}+\int\limits_0^{+\infty}e^{-\alpha_n x}dx=\int\limits_0^{+\infty}e^{-\alpha_n x}dx=-\frac{1}{\alpha_n}(e^{-\alpha_n x})\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{\alpha_n}=\frac{1}{\lambda n}$

$$\mathbb{E}[\xi_{m,n}^2]=\int_0^{+\infty}x^2 f_{\xi_{m,n}}(x)dx=\int_0^{+\infty}x^2\alpha_n e^{-\alpha_n x}dx=-\int_0^{+\infty}x^2 d(e^{-\alpha_n x})=$$

$$=(-x^2e^{-\alpha_n x})\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}e^{-\alpha_n x}\cdot 2x dx=\frac{2}{\alpha_n}\int_0^{+\infty}\alpha_n e^{-\alpha_n x}dx=\frac{2}{\alpha_n}\mathbb{E}\xi_{m,n}=$$

$$=\frac{2}{\alpha_n}\cdot\frac{1}{\alpha_n}=\frac{2}{\alpha_n^2}=\frac{2}{\lambda^2 n^2}\Rightarrow \mathbb{D}\xi_{m,n}=\mathbb{E}[\xi_{m,n}^2]-(\mathbb{E}\xi_{m,n})^2=\frac{1}{\lambda^2n^2}$$

$$\mathbb{E}\xi_n=\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^n\xi_{m,n}\right]=\sum_{m=1}^n\mathbb{E}\xi_{m,n}=n\cdot\frac{1}{\lambda n}=\frac{1}{\lambda}$$

$$\mathbb{D}\xi_n=\sum_{m=1}^n\mathbb{D}\xi_{m,n}+2\sum_{1\le i<j\le n}cov(\xi_{i,n},\xi_{j,n})\ (см. Т.3)$$

Т.к. $\xi_{i,n},\xi_{j,n}$ - независимы, то $cov(\xi_{i,n},\xi_{j,n})=0$

Т.е. $\mathbb{D}\xi_n=\sum_{m=1}^n\mathbb{D}\xi_{m,n}=n\cdot\frac{1}{\lambda^2n^2}=\frac{1}{\lambda^2 n}$

При $n\to\infty$ $\mathbb{D}\xi_n\to 0$, $\mathbb{E}\xi_n\to\frac{1}{\lambda}=const\Rightarrow\xi_n$ стремится к детерминированной величине $\frac{1}{\lambda}$.

$$\xi_n\xrightarrow{d}\frac{1}{\lambda},\ n\to\infty$$

Т.26. Население региона делится по некоторому социально-экономическому признаку на три подгруппы. Следующее поколение с вероятностями 0,4; 0,6 и 0,2, соответственно, остается в своей подгруппе, а если не остается, то с равными вероятностями переходит в любую из остальных подгрупп. Найти: а) распределение населения по данному социально-экономическому признаку в следующем поколении, если в настоящем поколении в 1-й подгруппе было 20% населения, во 2-й подгруппе – 30%, и в 3-й подгруппе – 50%.

б) предельное распределение по данному признаку, которое не меняется при смене поколений.

Построим $\Pi = \|p_{ij}\|$ – матрицу переходных вероятностей. $p_{11}=0{,}4$; $p_{22}=0{,}6$; $_{1}=0{,}2$; $p_{ij}=\frac{1-p_{ii}}{2}$, $i\neq j$, т.к. если следующее поколение не остаётся в своей подгруппе, то с равными вероятностями переходит в любую из остальных подгрупп.

Таким образом, $\Pi = \begin{Vmatrix} 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}6 & 0{,}2 \\ 0{,}4 & 0{,}4 & 0{,}2 \end{Vmatrix} = \Pi(1)$

а) Текущее распр. $\vec{p}(0) = \|0{,}2 \;\; 0{,}3 \;\; 0{,}5\|$. Тогда в следующем поколении $\vec{p}(1) = \vec{p}(0)\,\Pi(1) =$

$$= \|0{,}2 \;\; 0{,}3 \;\; 0{,}5\| \begin{Vmatrix} 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}6 & 0{,}2 \\ 0{,}4 & 0{,}4 & 0{,}2 \end{Vmatrix} = \|0{,}34 \;\; 0{,}44 \;\; 0{,}22\|$$

б) $\vec{p}_{lim} = \vec{p}_{lim}\,\Pi$, т.к. распр. не меняется при смене поколений, т.е. $\vec{p}_{lim}(E-\Pi) = \vec{0}$ или

$(E-\Pi)^T \vec{p}_{lim}^{\,T} = \vec{0}$.

$$(E-\Pi)^T = \begin{Vmatrix} 0{,}6 & -0{,}2 & -0{,}4 \\ -0{,}3 & 0{,}4 & -0{,}4 \\ -0{,}3 & -0{,}2 & 0{,}8 \end{Vmatrix} \underset{\text{III}-\text{II}}{\overset{2\text{II}+\text{I}}{\sim}} \begin{Vmatrix} 0{,}6 & -0{,}2 & -0{,}4 \\ 0 & 0{,}6 & -1{,}2 \\ 0 & -0{,}6 & 1{,}2 \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 0{,}6 & -0{,}2 & -0{,}4 \\ 0 & 0{,}6 & -1{,}2 \end{Vmatrix} \sim$$

$$\sim \underset{3\text{II}}{\overset{3\text{I}+\text{II}}{}} \begin{Vmatrix} 1{,}8 & 0 & -2{,}4 \\ 0 & 1{,}8 & -3{,}6 \end{Vmatrix} \Rightarrow \Phi = \begin{Vmatrix} 2{,}4 \\ 3{,}6 \\ 1{,}8 \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 4/13 \\ 6/13 \\ 3/13 \end{Vmatrix} = \vec{p}_{lim}^{\,T}$$

нормировка, т.к. $\Sigma p_i = 1$

Т.27. В биологических приложениях процессов Гальтона-Ватсона используется производящая функция $f(x)=px^2+(1-p)$, $0<p<1$. Найти а) при каких значениях параметра p процесс является докритическим, критическим, надкритическим; б) математическое ожидание и дисперсию n-го поколения; в) вероятность вырождения в надкритическом случае.

а) Среднее число непосредственных потомков одной частицы — $m=\sum_{k=1}^{\infty} k\underbrace{p_k}_{\text{вер-ть иметь k потомков}}$. Производящая функция процесса — $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} p_k x^k$. Можно заметить, что $f'(1)=m \Rightarrow m=2p$. В зависимости от значения от значения m вводится процесс называется докритическим, $m<1$; критическим, $m=1$; надкритическим, $m>1$.

Таким образом процесс
- докритический, $p<1/2$
- критический, $p=1/2$
- надкритический, $p>1/2$

б) Каждая частица в поколении $n-1$ размножается независимо, и среднее число потомков равно m. Поэтому число частиц в n-м поколении – сумма кол-в потомков всех частиц из $n-1$ поколения, т.е. $\mathbb{E}\xi_n = m\mathbb{E}\xi_{n-1}$, где ξ_n – число потомков в n-м поколении.

Т.к. $\mathbb{E}\xi_0 = 1$, то из полученной рекуррентной формулы $\mathbb{E}\xi_n = m^n$.

Найдём $\mathbb{D}\xi_n = \mathbb{E}[\xi_n^2] - (\mathbb{E}\xi_n)^2 = \mathbb{E}[\xi_n^2] - m^{2n}$

$\mathbb{E}[\xi_n^2] = \mathbb{E}\left[\left(\sum_{k=1}^{\xi_{n-1}} X_k^{(n-1)}\right)^2\right]$, где $X_k^{(n-1)}$ – число потомков у k-ой частицы $n-1$-го поколения (ξ_{n-1} – соответственно количество этих частиц, поэтому ξ_{n-1} – верхний предел суммирования).

$$\mathbb{E}\left[\left(\sum_{k=1}^{\xi_{n-1}} X_k^{(n-1)}\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{\xi_{n-1}} (X_k^{(n-1)})^2 + 2\sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{\xi_{n-1}} (X_i^{(n-1)} X_j^{(n-1)})\right]$$

• $\mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{\xi_{n-1}} (X_k^{(n-1)})^2\right] = \mathbb{E}\xi_{n-1}\,\mathbb{E}[(X_k^{(n-1)})^2]$ (среднее число слагаемых – $\mathbb{E}\xi_{n-1}$) $\ominus$

$$\mathbb{E}[(X_k^{(n-1)})^2] = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 p_k = \sum_{k=1}^{\infty}(k(k-1)p_k + kp_k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)p_k + \sum_{k=1}^{\infty} kp_k = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)p_k + m = f''(1) + m$$

$\ominus\ \mathbb{E}\xi_{n-1}(f''(1)+m) = m^{n-1}(f''(1)+m)$

• $\mathbb{E}\left[2\sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{\xi_{n-1}} (X_i^{(n-1)} X_j^{(n-1)})\right] = 2\mathbb{E}\left[\frac{\xi_{n-1}(\xi_{n-1}-1)}{2}\right]\mathbb{E}[X_i^{(n-1)} X_j^{(n-1)}]$

(среднее число слагаемых – $\mathbb{E}\left[\frac{\xi_{n-1}(\xi_{n-1}-1)}{2}\right]$) =

$= \mathbb{E}[\xi_{n-1}(\xi_{n-1}-1)]\,\mathbb{E}[X_i^{(n-1)}]\,\mathbb{E}[X_j^{(n-1)}]$ (т.к. $X_i^{(n-1)}$ и

$X_j^{(n-1)}$ независимы$) = \mathbb{E}[\xi_{n-1}^2 - \xi_{n-1}]m^2 = m^2\mathbb{E}[\xi_{n-1}^2] -$

$- m^2\mathbb{E}[\xi_{n-1}] = m^2\mathbb{E}[\xi_{n-1}^2] - m^2 \cdot m^{n-1} = m^2\mathbb{E}[\xi_{n-1}^2] - m^{n+1}$

Итак, $\mathbb{E}[\xi_n^2] = \mathbb{E}\left[\left(\sum_{k=1}^{\xi_{n-1}} X_k^{(n-1)}\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{\xi_{n-1}} (X_k^{(n-1)})^2 +\right.$

$\left.+ 2\sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{\xi_{n-1}} (X_i^{(n-1)}X_j^{(n-1)})\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{\xi_{n-1}} (X_k^{(n-1)})^2\right] + \mathbb{E}\left[2\sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{\xi_{n-1}} (X_i^{(n-1)}X_j^{(n-1)})\right] =$

$= m^{n-1}(f''(1)+m) + m^2\mathbb{E}[\xi_{n-1}^2] - m^{n+1} = 2m^n +$

$+ m^2\mathbb{E}[\xi_{n-1}^2] - m^{n+1}$

$\mathbb{D}\xi_n = \mathbb{E}[\xi_n^2] - (\mathbb{E}\xi_n)^2 = \mathbb{E}[\xi_n^2] - m^{2n} = 2m^n + m^2 \cdot$

$\cdot \mathbb{E}[\xi_{n-1}^2] - m^{n+1} - m^{2n} = 2m^n + m^2(\mathbb{E}[\xi_{n-1}^2] - m^{2(n-1)}) -$

$- m^{n+1} = 2m^n + m^2(\mathbb{E}[\xi_{n-1}^2] - (\mathbb{E}\xi_{n-1})^2) - m^{n+1} = 2m^n +$

$+ m^2\mathbb{D}\xi_{n-1} - m^{n+1}$

Получили рекуррентную формулу:

$$\mathbb{D}\xi_n = m^2\mathbb{D}\xi_{n-1} + 2m^n - m^{n+1}$$

Учитывая, что $\mathbb{D}\xi_0 = 0$, найдё $\mathbb{D}\xi_n$ в общем виде

$$\mathbb{D}\xi_n = \cancel{m^2\mathbb{D}\xi_{n-1}} + m^n(2-m)$$

$$\cancel{m^2\mathbb{D}\xi_{n-1}} = \cancel{m^4\mathbb{D}\xi_{n-2}} + m^{n+1}(2-m) \quad +$$

$$\cancel{m^4\mathbb{D}\xi_{n-2}} = \cancel{m^6\mathbb{D}\xi_{n-3}} + m^{n+2}(2-m) \quad +$$

$$\dots$$

$$\cancel{m^{2n-2}\mathbb{D}\xi_1} = m^{2n}\overset{=0}{\mathbb{D}\xi_0} + m^{n-}(2-m) \quad +$$

$$\mathbb{D}\xi_n = (2-m)(m^n + m^{n+} + \dots + m^{n-}) = (2-m)m^n(1+m+\dots+m^{n-1})$$

$D\xi_n = 2(1-p)(2p)^n\left(1+2p+\dots+(2p)^{n-1}\right)$

Если $p=\frac{1}{2}$: $D\xi_n = n$

Если $p\neq\frac{1}{2}$: $D\xi_n = 2(1-p)(2p)^n\dfrac{(2p)^n-1}{2p-1} = 2^{n+1}(1-p)p^n\dfrac{2^np^n-1}{2p-1}$

Таким образом $E\xi_n = m^n$; $D\xi_n = \begin{cases} n, & p=\frac{1}{2} \\ 2^{n+1}(1-p)p^n\dfrac{2^np^n-1}{2p-1}, & p\neq\frac{1}{2}\end{cases}$

в) Вероятность q вырождения процесса Гальтона-Ватсона является наименьшим неотрицательным корнем уравнения $f(x)=x$.

$p\,{}^2+(1-p)=x$

$px^2-x+(1-p)=0 \to x=\dfrac{1\pm\sqrt{1-4p(1-p)}}{2p}=\dfrac{1\pm\sqrt{(2p-1)^2}}{2p}=$

$=\dfrac{1\pm|2p-1|}{2p} =$

Имеет смысл рассматривать только $p>1/2$, т.е. надкритический процесс, т.к. в докритическом и критическом процессе $q=1$.

$= \dfrac{1\pm(2p-1)}{2p}$ - 1 или $\dfrac{1-p}{p}$. Минимальный корень - $q=$

$=\dfrac{1-p}{p}$

I.28* Пусть матрица вероятностей перехода за один шаг цепи Маркова с двумя состояниями имеет вид $\begin{Vmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{Vmatrix}$, $0\le\alpha,\beta\le1$. Найти вероятности перехода за n шагов и финальные вероятности.

$\Pi = \begin{Vmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{Vmatrix}$. Вер-ти перехода определяются матрицей Π^n. Её легче всего считать в диагональном виде, поэтому сначала приведём Π к диаг. виду.

$$|\Pi - \lambda E| = (1-\alpha-\lambda)(1-\beta-\lambda) - \alpha\beta = (\lambda-1)(\lambda-1+\alpha+\beta) = 0$$

$$\lambda = 1: \begin{Vmatrix} -\alpha & \alpha \\ \beta & -\beta \end{Vmatrix} \vec{s}_1 = \vec{0} \Rightarrow \vec{s}_1 = \| 1 \; 1 \|^T$$

$$\lambda = 1-\alpha-\beta: \begin{Vmatrix} \beta & \alpha \\ \beta & \alpha \end{Vmatrix} \vec{s}_2 = \vec{0} \Rightarrow \vec{s}_2 = \| 1 \; -1 \|^T \qquad S_{\vec{e}\to\vec{s}} = \| \vec{s}_1 \, \vec{s}_2 \| = \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{Vmatrix} -$$

матрица перехода к собс. базису $S^{-1}_{\vec{e}\to\vec{s}} = \frac{1}{2}\begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{Vmatrix}$

$$\Pi_{\vec{s}} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1-\alpha-\beta \end{Vmatrix} \to \Pi^n_{\vec{s}} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (1-\alpha-\beta)^n \end{Vmatrix}$$

$$\Pi^n = S^{-1}_{\vec{s}\to\vec{e}} \, \Pi^n_{\vec{s}} \, S_{\vec{s}\to\vec{e}} = S_{\vec{e}\to\vec{s}} \, \Pi^n_{\vec{s}} \, S^{-1}_{\vec{e}\to\vec{s}} = \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{Vmatrix} \cdot$$

$$\cdot \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (1-\alpha-\beta)^n \end{Vmatrix} \cdot \frac{1}{2}\begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{Vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{Vmatrix} 1+(1-\alpha-\beta)^n & 1-(1-\alpha-\beta)^n \\ 1-(1-\alpha-\beta)^n & 1+(1-\alpha-\beta)^n \end{Vmatrix}$$

Для нахождения финальных вероятностей воспользуемся результатом полученным в Т.26(б).

$$(E-\Pi)^T = \begin{Vmatrix} \alpha & -\alpha \\ -\beta & \beta \end{Vmatrix}^T = \begin{Vmatrix} \alpha & -\beta \\ -\alpha & \beta \end{Vmatrix} \sim \| \alpha \; -\beta \| \Rightarrow \Phi = \begin{Vmatrix} \beta \\ \alpha \end{Vmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{Vmatrix} \frac{\beta}{\alpha+\beta} & \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \end{Vmatrix}^T = \vec{P}^T_{lim}$$

Итак, $\Pi^n = \frac{1}{2}\begin{Vmatrix} 1+(1-\alpha-\beta)^n & 1-(1-\alpha-\beta)^n \\ 1-(1-\alpha-\beta)^n & 1+(1-\alpha-\beta)^n \end{Vmatrix}$, а финальные вероятности – $\frac{\beta}{\alpha+\beta}$, $\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$.