§14

№2(4)

$\exists n_0 : \forall n \mapsto a_n = \dfrac{\cos(\pi/4n)}{\sqrt[5]{5n^5-1}} < \dfrac{1}{n}$ – р-ся $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ – расх-ся (по пр. срав.)

№5(6)

$$a_n = \ln\frac{n^2+4}{n^2+3} = \ln\left(1+\frac{1}{n^2+3}\right) \overset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$$ – сх-ся $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ – сх-ся

№8(3)

$\alpha = ?: \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сх-ся, $a_n = \left(n\,\mathrm{sh}(1/n) - \mathrm{ch}(1/n)\right)^{\alpha} \overset{n\to\infty}{\sim}$

$\sim \left(n\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{6}\frac{1}{n^3}\right) - \left(1 + \frac{1}{2}\frac{1}{n^2}\right)\right)^{\alpha} = \left(-\frac{1}{3n^2}\right)^{\alpha} \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ – сх-ся при $\alpha > 1/2$

№18(8)

$$a_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2};\quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2n+2)!\,(n!)^2}{((n+1)!)^2\,(2n)!} = \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2} = \frac{4n^2+6n+2}{n^2+2n+1} \xrightarrow{n\to\infty} 4 > 1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ по пр. Даламбера расх-ся

№19(6)

$$a_n = \frac{(2n+1)!!}{3^n n!};\quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2n+3)!!\,3^n n!}{3^{n+1}(n+1)!\,(2n+1)!!} = \frac{2n+3}{3(n+1)} \xrightarrow{n\to\infty} 2/3 \Rightarrow$$ по пр. Даламбера сх-ся

№21(10,13)

10) $a_n = \left(n\sin\frac{1}{n}\right)^{n^3};\ \sqrt[n]{a_n} = \left(n\sin\frac{1}{n}\right)^{n^2} \overset{n\to\infty}{\sim} \left(1 - \frac{1}{6n^2}\right)^{n^2} \xrightarrow{n\to\infty} e^{-1/6} < 1 \Rightarrow$ по пр. Коши сх-ся

13) $a_n = \frac{1}{3^n}\left(\frac{n+2}{n}\right)^{n^2};\ \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{3}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n \xrightarrow{n\to\infty} \frac{e^2}{3} > 1 \Rightarrow$ по пр. Коши р-ся

№25(9)

$$a_n = \frac{1}{n^{\alpha}\ln^{\beta} n}$$

$\underline{\alpha < 0:}$ $a_n = \frac{n^{-\alpha}}{\ln^{\beta} n} \xrightarrow{n\to\infty} \infty \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ р-ся $\Rightarrow \alpha \geq 0$

$\underline{\alpha = 0:}$ $a_n = \frac{1}{\ln^{\beta} n} > \frac{1}{n}$ – р-ся $\overset{\text{пр. сравнения}}{\Rightarrow} \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ р-ся $\Rightarrow \alpha > 0$

$\alpha > 0$:

- $\alpha > 1$: $\alpha = 1 + 2\varepsilon,\ \varepsilon > 0 \to a_n = \dfrac{1}{n^{1+\varepsilon}(n^{\varepsilon}\ln^{\beta} n)} \cdot n^{\varepsilon}\ln^{\beta} n \xrightarrow{n\to\infty} \infty \Rightarrow$

$\exists n_0 : \forall n \geq n_0\ n^{\varepsilon}\ln\beta > 1 \Rightarrow a_n < \dfrac{1}{n^{1+\varepsilon}}$ - сх-ся $\overset{\text{пр. сравнения}}{\Longrightarrow} \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ - сх-ся

- $\alpha = 1$: $a_n = \dfrac{1}{n\ln^{\beta} n}$; $f(x) = \dfrac{1}{x\ln^{\beta} x}$, $a_n = f(n)$

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^{\beta} x} = \left[\begin{array}{l} \beta = 1:\ \ln(\ln x)\Big|_2^{+\infty} = +\infty \\ \beta \neq 1:\ \ln^{-\beta+1} x / (-\beta+1)\Big|_2^{+\infty} < \infty \Leftrightarrow \underline{\beta > 1} \end{array}\right.$$

- $\alpha < 1$: $\alpha = 1 - 2\varepsilon,\ \varepsilon > 0 \to a_n = \dfrac{1}{n^{1-\varepsilon}(n^{-\varepsilon}\ln^{\beta} n)} \cdot n^{-\varepsilon}\ln^{\beta} n \xrightarrow{n\to\infty} 0 \Rightarrow$

$\exists n_0 : \forall n \geq n_0\ n^{-\varepsilon}\ln\beta < 1 \Rightarrow a_n > \dfrac{1}{n^{1-\varepsilon}}$ - р-ся

Ответ: $\alpha > 1$ или $\alpha = 1$ и $\beta > 1$.

§15

№3(2)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\ln n}{\sqrt{n}} \qquad a_n = \frac{\ln n}{\sqrt{n}}.\ \lim_{n\to\infty} a_n = 0.\ f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}.\ f'(x) =$$

$= \dfrac{\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x}}\ln x}{x} = \dfrac{2 - \ln x}{2x\sqrt{x}} \to$ при $x > e^2$ $f'(x) < 0$, т.е. $\exists n_0 : \forall n \geq n_0$

$a_{n+1} \geq a_n \geq 0 \Rightarrow$ по пр. Дирихле сх-ся.

№4(4)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos^2 2n}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1 + 2\cos 4n}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + 2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos 4n}{\sqrt{n}}$$

$$\sum_{n=1}^{N} (-1)^n \cos 4n = \frac{1}{\cos 2}\sum_{n=1}^{N} (-1)^n \cos 4n \cos 2 = \frac{1}{2\cos 2}\sum_{n=1}^{N} (-1)^n(\cos(4n-2) + \cos(4n+2)) = \frac{1}{2\cos 2}\left(-\cos 2 + (-1)^N \cos(4N+2)\right)$$

Тогда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{\cos 4n}{\sqrt{n}}$ сходится по пр. Дирихле для $(-1)^n \cos 4n$ и $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ - сх-ся по Лейбницу $\Rightarrow$ исходный ряд сходится.

№8(3,4)

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{\sqrt{n}+\sin n}$; $a_n = \frac{\sin n}{\sqrt{n}} \frac{1}{1+\frac{\sin n}{\sqrt{n}}} = \frac{\sin n}{\sqrt{n}}\left(1-\frac{\sin n}{\sqrt{n}} + R(n)\right)$,

$|R(n)| \leq c/n \quad \forall n \geq n_0$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\underbrace{\frac{\sin n}{\sqrt{n}}}_{\substack{\text{сх-ся} \\ \text{по Дирихле} \\ \alpha_n=\sin n \\ \beta_n=\sqrt{n}}} - \underbrace{\frac{\sin^2 n}{n}} + \underbrace{\frac{\sin n}{\sqrt{n}}R(n)}_{\text{абс. сх-ся}}\Big)$$

абс. сх-ся: $\left|\frac{\sin n}{\sqrt{n}}R(n)\right| \leq \frac{C}{n^{3/2}}$ $\quad \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{C}{n^{3/2}}$ – сх-ся

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{n} = \frac{1}{2}\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}}_{+\infty} - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\cos 2n$$

$\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{\sqrt{n}+\sin n}$ расх-ся

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{\sin n}{\sqrt[3]{n}}\right)$; $a_n = \frac{\sin n}{\sqrt[3]{n}} - \frac{\sin^3 n}{6n} + R(n)$, $|R(n)| \leq \frac{C}{n^{5/3}}$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\underbrace{\frac{\sin n}{\sqrt[3]{n}}}_{\substack{\text{сх-ся} \\ \text{по Дирихле} \\ \alpha_n=\sin n \\ \beta_n=1/\sqrt[3]{n}}} - \underbrace{\frac{\sin^3 n}{6n}} + \underbrace{R(n)}_{\text{абс. сх-ся}}\Big)$$

абс. сх-ся: $|R(n)| \leq \frac{C}{n^{5/3}}$ $\quad \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{C}{n^{5/3}}$ – сх-ся + пр. срав.

$$\frac{1}{6n}\,\frac{\sin 3n + 3\sin n}{4} = \frac{1}{24}\underbrace{\frac{\sin 3n}{n}}_{\substack{\text{сх-ся} \\ \text{по Дирихле} \\ \alpha_n=\sin 3n \\ \beta_n=1/n}} + \frac{1}{24}\underbrace{\frac{\sin n}{n}}_{\substack{\text{сх-ся} \\ \text{по Дирихле} \\ \alpha_n=\sin n \\ \beta_n=1/n}}$$

$\Downarrow$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{\sin n}{\sqrt[3]{n}}\right)$ сх-ся

№9(2)

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+1})$; $a_n = \sin(\pi n\sqrt{1+1/n^2}) = \sin\left(\pi n\left(1+\frac{1}{2n^2}+R(n)\right)\right)$, где

$|R(n)| \leq \frac{c}{n^4}$. $a_n = \sin\left(\pi n + \frac{\pi}{2n} + \pi n R(n)\right) = (-1)^n \sin\left(\frac{\pi}{2n}+\tilde{R}(n)\right)$, $|\tilde{R}(n)| \leq \frac{c}{n^3}$

$$\sim \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{\pi}{2n}+\tilde{R}(n)\right) = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\pi}{2n}}_{\substack{\text{сх-ся по} \\ \text{Лейбницу}}} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\tilde{R}(n)}_{\text{сх-ся абс.}}$$

Т.1.

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ $\quad \sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ – сх-ся а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ - сх-ся? Нет, контрпример: $a_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^3$ - сх-ся? Нет, контрпример: $a_n = \dfrac{\cos(\frac{2}{3}\pi n)}{\sqrt[3]{n}}$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ - сх-ся по Дирихле $\alpha_n = \cos(\frac{2}{3}\pi n)$ $\beta_n = 1/\sqrt[3]{n}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^3 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^3(\frac{2}{3}\pi n)}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi n + 3\cos\frac{2}{3}\pi n}{4n} = \underset{\text{расх-ся}}{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n}} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3\cos\frac{2}{3}\pi n}{4n}}_{\text{сх-ся по Дирихле}}$$

Т.2.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ - сх-я, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ - сх-я абс. $\overset{?}{\Rightarrow} \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сх-ся

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ - сх-ся $\Rightarrow \exists C, n_0 : \forall n \geq n_0 \hookrightarrow a_n \leq C \Rightarrow \forall n \geq n_0$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n b_n| \leq$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n||b_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} c|b_n| = c\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|}_{\substack{\text{сх-ся} \\ \text{по усл.}}} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \text{ сх-ся абс.}$$