1.2. $y' = 2x + C \to C = y' - 2x$

Искомое: $y = x^2 + (y' - 2x)x \to xy' - y = x^2$

2.5. $2xy\,dx = (1-x^2)\,dy$

$y = 0$ и $x = \pm 1$ – решения

Пусть $y \neq 0$ и $x \neq \pm 1$

$\frac{2x}{1-x^2}\,dx = \frac{dy}{y}$

$-\ln|1-x^2| = \ln|y| + C,\ C \in \mathbb{R}$

$\ln|y(1-x^2)| = C,\ C \in \mathbb{R}$

$|y(1-x^2)| = C,\ C > 0$

$y(1-x^2) = C,\ C \neq 0$

Учитывая $y = 0$ и $x = \pm 1$ решения: $y(1-x^2) = C,\ C \in \mathbb{R}$

2.10 $x(y+1)\,dy = (1-y^2)\,dx$

$x = 0$ и $y = \pm 1$ – решения

Пусть $x \neq 0$ $y \neq \pm 1$

$x\,dy = (1-y)\,dy$

$\frac{dy}{1-y} = \frac{dx}{x}$

$-\ln|1-y| = \ln|x| + C,\ C \in \mathbb{R}$

$|x(1-y)| = C,\ C > 0$

$x(1-y) = C,\ C \neq 0$

211
Донатик

Учитывая, что $x=0$, $y=1$ – решения $x(1-y)=C,\ C\in\mathbb{R}$ и $y=-1$

2.16

$$y'\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}y=0$$

$y=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$ – решения

Пусть $y\neq\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$

$$\frac{dy}{dx}\operatorname{tg}^2x-\operatorname{ctg}y=0$$

$$\operatorname{tg}y\,dy=\operatorname{ctg}^2x\,dx$$

$$-\ln|\cos y|=-\operatorname{ctg}x-x+C,\ C\in\mathbb{R},\ y=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$$

2.35

$$y(-1)=-4$$

$$(x^3+x)y'-(3x^2-1)y=0$$

$$\frac{dy}{y}=\frac{3x^2-1}{x^3+x}dx$$

$$\ln|y|=\ln\left[\frac{(1+x^2)^2}{|x|}\right]\cdot C,\ C\in\mathbb{R}$$

$$y=\frac{(1+x^2)^2}{x}\cdot C,\ C\in\mathbb{R}$$

$$y(-1)=-4C\Rightarrow C=1$$

$$y=\frac{(1+x^2)^2}{x}$$

2.46

$$e^x=C(1-e^{-y})$$

$$e^x=Ce^{-y}y'=\frac{e^x}{1-e^{-y}}e^{-y}y'$$

$$e^y-1=y'$$

Донатик

y' заменяем на $-\frac{1}{y'}$

$e^y - 1 = -\frac{1}{y'} = -\frac{dx}{dy}$

$(1-e^y)\,dy = dx$

$y - e^y = x + C,\ C\in\mathbb{R}$

2.60.

$xy\,dx = (x^2-y^2)\,dy$

$y\equiv 0$ – решение

$y\neq 0$ $\quad \frac{dx}{dy} = \frac{x}{y} - \frac{y}{x}$

] $z=\frac{x}{y}$ $\quad \frac{dx}{dy} = \frac{dz}{dy}y + z$

$\frac{dz}{dy}y + z = z - \frac{1}{z}$

$-z\,dz = \frac{dy}{y}$

$-\frac{1}{2}z^2 = \ln|y| + C,\ C\in\mathbb{R}$

$y = Ce^{-\frac{x^2}{2y^2}},\ C\in\mathbb{R}$

2.75

$(x-1)y' + 3x + 2y + 3 = 0$

$(x-1)\,dy + (3x+2y+3)\,dx = 0$

] $z = x-1,\ w = y+3$

$z\,dy + (3z+2w)\,dz = 0$

$z = 0$ – решение

$z\neq 0$: $\quad \frac{dw}{dz} + 3 + 2\frac{w}{z} = 0$

] $t=\frac{w}{z},\ \frac{dw}{dz} = \frac{dt}{dz}z + t$

211

Понатик

$$\frac{dt}{dz}z+t+3+2t=0$$

$$\frac{dt}{dz}z=-3(1+t)$$

$$\frac{-dt}{3(1+t)}=\frac{dz}{z}$$

$$-\frac{1}{3}\ln|1+t|=\ln|z|+C,\ C\in\mathbb{R}$$

$$\ln|z^3(1+t)|=C$$

$$z^3(1+t)=C,\ C\in\mathbb{R}$$

$$z=x-1,\ t=\frac{y+3}{x-1}$$

$$(x-1)^2(x+y+2)=C,\ C\in\mathbb{R}$$

211

Донатик

3.20

$$(\sin x - 1)\, y' + y\cos x = \sin x \quad (*)$$

Однородное $(\sin x - 1) y' + y\cos x = 0$

$y \equiv 0$ – решение

При $y \not\equiv 0$ $\quad (\sin x - 1)\dfrac{dy}{dx} + y\cos x = 0$

$$\frac{dy}{y} = \frac{\cos x}{1-\sin x}\,dx$$

$$\ln|y| = \int \frac{d(\sin x)}{1-\sin x} = -\ln|1-\sin x| + C,\ C \in \mathbb{R}$$

$$\ln|y(1-\sin x)| = C,\ C \in \mathbb{R}$$

$$|y(1-\sin x)| = C,\ \ C > 0$$

$$y(1-\sin x) = C,\ \ C \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$$

Учитывая решение $y \equiv 0$: $\quad y(1-\sin x) = C,\ C \in \mathbb{R}$

или $\quad y = \dfrac{C}{1-\sin x},\ C \in \mathbb{R}$

Метод вариации постоянной: $\quad y = \dfrac{C(x)}{1-\sin x}$

$$(*): (\sin x - 1)\left[\frac{C'(x)}{1-\sin x} + \cancel{\frac{C(x)\cos x}{(1-\sin x)^2}}\right] + \cancel{\frac{C(x)\cos x}{1-\sin x}} = \sin x$$

$$-C'(x) = \sin x \rightarrow C(x) = \cos x + A,\ A \in \mathbb{R}$$

Ответ: $y = \dfrac{\cos x + A}{1-\sin x},\ A \in \mathbb{R}$

3.31

$$(1+y^2)\,dx + (xy - y^3)\,dy = 0$$

$y = \mathrm{const}$ – не явл. решением

$$\frac{dx}{dy} + x\frac{y}{1+y^2} = \frac{y^3}{1+y^2} \quad (*)$$

211

Донатик

Однородное $\frac{dx}{dy} + x\frac{y}{1+y^2} = 0$

$x \equiv 0$ - решение

При $x \not\equiv 0$ $\quad \frac{dx}{x} = -\frac{y\,dy}{1+y^2}$

$$\ln|x| = -\frac{1}{2}\int\frac{d(y^2)}{1+y^2} = -\frac{1}{2}\ln|1+y^2| + C,\ C\in\mathbb{R}$$

$$\ln|x\sqrt{1+y^2}| = C,\ C\in\mathbb{R}$$

$$x\sqrt{1+y^2} = C,\ C\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$$

Учитывая, что $x\equiv 0$ - решение $\quad x\sqrt{1+y^2} = C,\ C\in\mathbb{R}$

Метод вариации постоянной: $\quad x = \frac{C(y)}{\sqrt{1+y^2}}\ (**)$

$$(*):\ \frac{C'\sqrt{1+y^2} - C\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}}{1+y^2} + \frac{Cy}{\sqrt{1+y^2}^3} = \frac{y^3}{1+y^2}$$

$$C'(1+y^2) - \cancel{Cy} + \cancel{Cy} = y^3\sqrt{1+y^2}$$

$$C' = \frac{y^3}{\sqrt{1+y^2}} \to C(y) = \int\frac{y^3dy}{\sqrt{1+y^2}} = \left|\begin{matrix} t = y^2 \\ dt = 2y\,dy\end{matrix}\right| = \frac{1}{2}\int\frac{t\,dt}{\sqrt{1+t}} = \left|\begin{matrix} z = 1+t \\ dt = dz\end{matrix}\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\int\frac{(z-1)dz}{\sqrt{z}} = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}z^{3/2} - 2\sqrt{z}\right] + A = \frac{1}{3}z^{3/2} - \sqrt{z} + A =$$

$$= \frac{1}{3}(1+y^2)^{3/2} - \sqrt{1+y^2} + A,\ A\in\mathbb{R}$$

$$(**):\ x = \frac{1}{3}(1+y^2) - 1 + \frac{A}{\sqrt{1+y^2}},\ A\in\mathbb{R}$$

<u>Ответ:</u> $(3x - y^2 + 2)\sqrt{1+y^2} = A,\ A\in\mathbb{R}$

<u>3.35</u>

$$(1+y^2)dx + (2xy-1)dy = 0$$

$y = \text{const}$ - не является решением

$$\frac{dx}{dy} + x\frac{2y}{1+y^2} = \frac{1}{1+y^2}\ (*)$$

211
Донатик

Однородное: $\frac{dx}{dy} + x\frac{2y}{1+y^2} = 0$

$x \equiv 0$ — решение

при $x \neq 0$ $\quad \ln|x| = -\int \frac{2y\,dy}{1+y^2} = -\ln|1+y^2| + C,\ C \in \mathbb{R}$

$x(1+y^2) = C,\ C \in \mathbb{R}$

Метод вариации постоянной: $x = \frac{C(y)}{1+y^2}$

(*): $\frac{C'(1+y^2) - 2yC}{(1+y^2)^2} + \frac{2yC}{(1+y^2)^2} = \frac{1}{1+y^2}$

$C' = 1 \rightarrow C = y + A,\ A \in \mathbb{R}$

<u>Ответ:</u> $x(1+y^2) = y + A,\ A \in \mathbb{R}$

<u>3.58</u>

$xy' + 3xy^2 = 2y$

$y' - \frac{2y}{x} = -3xy^2$

$y \equiv 0$ — решение

при $y \neq 0$: $\frac{y'}{y^2} - \frac{2}{xy} = -3x$

Э $u(y) = \frac{1}{y}$, $u' = -\frac{y'}{y^2} \rightarrow -u' - \frac{2}{x}u = -3x$

Однородное: $\frac{du}{dx} + \frac{2}{x}u = 0 \rightarrow \ln|u| = -2\ln|x| + C,\ C \in \mathbb{R}$

$ux^2 = C,\ C \in \mathbb{R}$

Вариация: $-\frac{C'x^2 - 2xC}{x^4} - \frac{2C}{x^3} = -3x$

$C' = 3x^2 \rightarrow C = x^3 + A,\ A \in \mathbb{R}$

$u = \frac{C(x)}{x^2} = \frac{x^3+A}{x^2},\ A \in \mathbb{R} \rightarrow \frac{1}{y} = \frac{x^3+A}{x^2},\ A \in \mathbb{R}$

21
Донатик

Ответ: $\frac{1}{y} = \frac{A}{x^2} + x,\ A \in \mathbb{R}$

3.91

$$y' - e^x y^2 + 3y = e^{-x}$$

Заметим, что $y = e^{-x}$ – решение

$\exists\ y = z + e^{-x}$:

211

$$z' - e^{-x} - e^x(z + e^{-x})^2 + 3(z + e^{-x}) = e^{-x}$$

$$z' - e^{-x} - e^x z^2 - 2z - e^{-x} + 3z + 3e^{-x} = e^{-x}$$

$$z' + z = e^x z^2$$

$$\frac{z'}{z^2} + \frac{1}{z} = e^x$$

$\exists\ u = \frac{1}{z},\quad u' = \frac{-z'}{z^2}$

$$-u' + u = e^x$$

Однородное: $-u' + u = 0$

$$\frac{du}{u} = dx \to \ln|u| = x + C,\ C \in \mathbb{R}$$

$$u = Ce^x,\ C \in \mathbb{R}$$

Вариация: $-C'e^x - \cancel{Ce^x} + \cancel{Ce^x} = e^x$

$$C = -x + A,\ A \in \mathbb{R}$$

Обратные замены: $u = (-x + A)e^x,\ A \in \mathbb{R}$

$$z = (-x + A)^{-1} e^{-x},\ A \in \mathbb{R}$$

$$y = z + e^{-x} = \left(1 + \frac{1}{A - x}\right) e^{-x},\ A \in \mathbb{R}$$

Ответ: $y = e^{-x}$; $y = \left(1 + \frac{1}{A - x}\right) e^{-x},\ A \in \mathbb{R}$

4.9.

Донатик

$$(\overset{=P}{y^2 - 2x})dx + (\overset{=Q}{2xy - \sin y})dy = 0$$

$\frac{\partial P}{\partial y} = 2y = \frac{\partial Q}{\partial x} = 2y \Rightarrow$ ур-е в полных дифференциалах

$$\left.\begin{aligned} P = \frac{\partial u}{\partial x} = y^2 - 2x &\rightarrow u = y^2x - x^2 + \varphi(y) \\ Q = \frac{\partial u}{\partial y} = 2yx + \varphi'(y) = 2xy - \sin y &\rightarrow \varphi(y) = \cos y \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow u = y^2x - x^2 + \cos y = C,\ C \in \mathbb{R}$

Ответ: $y^2x - x^2 + \cos y = C,\ C \in \mathbb{R}$.

4.22

$$(y - 3x^2y^3)dx - (x + x^3y^2)dy = 0$$

$$ydx - xdy - 3x^2y^3dx - x^3y^2dy = 0$$

$y \equiv 0$ - решение

При $y \not\equiv 0$ $\frac{ydx - xdy}{y^2} = 3x^2ydx + x^3dy$

$$d\left(\frac{x}{y}\right) = d(x^3y) \rightarrow \frac{x}{y} - x^3y = C,\ C \in \mathbb{R}$$

Ответ: $\frac{x}{y} - x^3y = C,\ C \in \mathbb{R};\ y \equiv 0$.

4.25

$\overset{=P}{x^3}dy + \overset{=Q}{2(y-x^2)y}dx = 0$ $x \equiv 0,\ y \equiv 0$ - решения

Ищем интегрирующий множитель в виде

$\mu = x^\alpha y^\beta$

$$\frac{\partial(\mu P)}{\partial x} = \frac{\partial(\mu Q)}{\partial y}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(x^{3+\alpha}y^\beta\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(2(y-x^2)y^{\beta+1}x^\alpha\right)$$

$$(3+\alpha)x^{2+\alpha}y^\beta = 2(\beta+1)(y-x^2)y^\beta x^\alpha + 2y^{\beta+1}x^\alpha \quad |: x^\alpha y^\beta$$

$$(3+\alpha)x^2 = 2(\beta+1)(y-x^2) + 2y$$

$$(3+\alpha)x^2 = 2(\beta+2)y - 2x^2(\beta+1)$$

21
Донатик

$$(3+\alpha+2(\beta+1))x^2 = 2(\beta+2)y$$

$\beta+2=0 \to \beta=-2 \qquad 3+\alpha+2(\beta+1)=0 \to \alpha=-1$

$$\mu = \frac{1}{xy^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \mu P = \frac{x^2}{y^2} \to u = -\frac{x^2}{y} + \varphi(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \mu Q = 2\frac{y-x^2}{xy} = -\frac{2x}{y} + \varphi'(x) \to \varphi'(x) = \frac{2}{x} \to \varphi(x) = \ln x^2$$

$$u = -\frac{x^2}{y} + \ln x^2 = C,\ C\in\mathbb{R}$$

Ответ: $-\frac{x^2}{y} + \ln x^2 = C,\ C\in\mathbb{R}$, $x\equiv 0$, $y\equiv 0$

4.56

$$xy' - y = 2x^3 e^{-\frac{y}{x}}$$

$$x\frac{dy}{dx} - y = 2x^3 e^{-\frac{y}{x}}$$

$x\equiv 0$ – не явл. решением

$$\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2} = 2x e^{-\frac{y}{x}}dx$$

$$d\left(\frac{y}{x}\right) = e^{-\frac{y}{x}} d(x^2)$$

$$e^{\frac{y}{x}} d\left(\frac{y}{x}\right) = d\left(e^{\frac{y}{x}}\right) = d(x^2)$$

$$d\left(e^{\frac{y}{x}} - x^2\right) = 0$$

$$e^{\frac{y}{x}} - x^2 = C,\ C\in\mathbb{R}$$

Ответ: $e^{\frac{y}{x}} - x^2 = C,\ C\in\mathbb{R}$.

7.10. $(y^3+y)y'' - (3y^2-1)y'^2 = 0$ $\quad y\equiv \text{const}$ – решение

Замена $y'_x = z,\ y''_{xx} = z'_x = z'_y y'_x = z'_y z$

$$(y^3+y)z'_y z - (3y^2-1)z^2 = 0$$

$z\equiv 0$ – решение

211
Донатик

Пусть $z \not\equiv 0$: $(y^3+y)\frac{dz}{dy} - (3y^2-1)z = 0$

$$\frac{dz}{z} = \frac{3y^2-1}{y^3+y}dy$$

$$\ln|z| = \int\left[-\frac{1}{y}+\frac{4y}{y^2+1}\right]dy = 2\ln|1+y^2| - \ln|y| + C,\ C\in\mathbb{R}$$

$$z = C\frac{(1+y^2)^2}{y},\ C\in\mathbb{R}$$

$$\frac{dy}{dx} = C\frac{(1+y^2)^2}{y},\ C\in\mathbb{R}$$

$$C_1x+C_2 = \int\frac{y\,dy}{(1+y^2)^2} = \frac{1}{2}\int\frac{dt}{(1+t)^2} = -\frac{1}{2}\frac{1}{1+t} = -\frac{1}{2(1+y^2)}$$

<u>Ответ:</u> $(C_1x+C_2)(1+y^2)=1$, $C_1\in\mathbb{R}$, $C_2\in\mathbb{R}$, $y=const$

<u>7.18</u>

$$y''\sin^3x - (y'\sin^2x + y'^2)\cos x = 0,\quad y\left(\frac{\pi}{2}\right)=0,\ y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$$

Замена $y'_x = z$ $\quad y''_{xx} = z'_x$

$y=const$, но не подходит под начальные условия

$$z'\sin^3x - (z\sin^2x+z^2)\cos x = 0$$

$$z' - z\,\mathrm{ctg}\,x = z^2\frac{\mathrm{ctg}\,x}{\sin^2 x}$$

$z\equiv 0$ — решение

$$\frac{z'}{z^2} - \frac{\mathrm{ctg}\,x}{z} = \frac{\mathrm{ctg}\,x}{\sin^2x}$$

Замена $u = \frac{-1}{z}$

$$u' + u\,\mathrm{ctg}\,x = \frac{\mathrm{ctg}\,x}{\sin^2 x}$$

ОДУ: $u' + u\,\mathrm{ctg}\,x = 0$

$$\ln|u| = -\int \mathrm{ctg}\,dx = -\ln|\sin x| + C,\ C\in\mathbb{R}$$

$$u = \frac{C}{\sin x},\ C\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$$

Вариация: $\frac{C'\sin x - C\cos x}{\sin^2x} + C\frac{\cos x}{\sin^2 x} = \frac{\mathrm{ctg}\,x}{\sin^2 x}$

$$C' = \frac{\mathrm{ctg}\,x}{\sin x} \to C = \int\frac{d(\sin x)}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin x} + A,\ A\in\mathbb{R}$$

211
Донатик

$$u=\frac{A\sin x-1}{\sin^2 x}\to z=\frac{\sin^2 x}{1-A\sin x}$$

$$1=y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=z\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{1-A}\Rightarrow A=0\Rightarrow y'=\sin^2 x\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad y=\int\sin^2 x\,dx=\int\frac{1-\cos 2x}{2}dx=\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\sin 2x\right)+C,\ C\in\mathbb{R}$$

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right)=0\to\frac{\pi}{4}+C=0\to C=-\frac{\pi}{4}$$

$$y=\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\sin 2x\right)-\frac{\pi}{4}$$

Ответ: $4y=2x-\sin 2x-\pi$

7.35

$$2(y^2+y)y''-(y^2+y+1)y'^2+y^3=0,\ y(2)=1,\ y'(2)=-1$$

Замена $z=y'_x$ $\quad y''_{xx}=z'_y y'_x=z'z$ $\quad$ $y=0$ - реш. но не подходит под нач. усл.

$$2(y^2+y)z'z-(y^2+y+1)z^2+y^3=0$$

$$(y^2+y)(z^2)'-(y^2+y+1)z^2+y^3=0$$

Замена $t=z^2$

$$t'-\frac{1+y+y^2}{y+y^2}t=-\frac{y^2}{1+y}$$

ОДУ: $\ln|t|=\int\frac{1+y+y^2}{y+y^2}dy=\int\frac{dy}{y(1+y)}+y=\int\left[\frac{1}{y}-\frac{1}{1+y}\right]dy+y=$

$=\ln|y|-\ln|1+y|+y+C,\ C\in\mathbb{R}$

$$t=C\frac{y}{1+y}e^y$$

Вариация: $C'\frac{y}{1+y}e^y+Ce^y\frac{1+y-y}{(1+y)^2}+C\frac{y}{1+y}e^y-\frac{1+y+y^2}{y+y^2}Ce^y\frac{y}{1+y}=-y^3$

$$C'\frac{y}{1+y}e^y+Ce^y\left[\frac{1+y+y^2}{(1+y)^2}-\frac{1+y+y^2}{(1+y)^2}\right]=-\frac{y^2}{1+y}$$

$$C'=-ye^{-y}\to C=-\int ye^{-y}dy=\int y\,d(e^{-y})=ye^{-y}-\int e^{-y}dy=e^{-y}(y+1)+A,\ A\in\mathbb{R}$$

$$t=(e^{-y}(y+1)+A)\frac{y}{1+y}e^y=y+A\frac{ye^y}{1+y},\ A\in\mathbb{R}$$

211
Донатик

$x=2$: $y(2)=1$, $y'(2)=-1 \to t(2)=(y'(2))^2=1=1+A\frac{e}{2} \to A=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow t=y \Rightarrow y'=\pm\sqrt{y}$. В $y=1$, $y'=-1 \Rightarrow y'=-\sqrt{y} \to$

$\to \int\frac{dy}{\sqrt{y}}=2\sqrt{y}=-x+C,\ C\in\mathbb{R}$

$x=2,\ y=1 \to C=4 \to 4y=(4-x)^2$

Ответ: $4y=(4-x)^2$

7.42

$xyy''+yy'=xy'^2+y^2,\ x\neq 0$

Однородно по y, y', y''. Замена $y'=yz$ $y''=y(z^2+z')$

$xy^2(z^2+z')+y^2z=xy^2z^2+y^2$

$y\equiv 0$ - решение. Сократим на y^2

$x(z^2+z')+z=xz^2+1$

$xz'+z=1$

ОДУ: $\ln|z|=-\ln|x|+C \to z=C\frac{1}{x},\ C\in\mathbb{R}$

Вариации: $C'-\frac{C}{x}+\frac{C}{x}=1 \to C=x+A,\ A\in\mathbb{R} \Rightarrow$

$\Rightarrow z=\frac{x+A}{x}$

$y'=yz \to \frac{dy}{y}=\frac{x+A}{x}dx \to \ln|y|=x+A\ln|x|+C,\ C\in\mathbb{R} \to$

$\to y=e^x|x|^A C,\ C\in\mathbb{R}$

Ответ: $y=C_1e^x|x|^{C_2},\ C_1\in\mathbb{R},\ C_2\in\mathbb{R}$

7.59

$2xy^2y''-2xyy'^2+2xy'^3=y'y^2,\ y(1)=y'(1)=-1$

Однородно по y, y', y''. Замена $y'=yz$ $y''=y(z^2+z')$

$2xy^2y(z^2+z')-2xyy^2z^2+2xy^3z^3=yzy^2$

211
Донатик

$y=0$ - решение. При $y\neq 0$:

$$2x(z^2+z')-2xz^2+2xz^3=z$$

$$2xz'+2xz^3=z$$

$$\frac{z'}{z^3}-\frac{z}{2xz^3}=-1$$

Замена $t=-\frac{1}{2z^2}$

$$t'+\frac{t}{x}=-1$$

ОДУ: $\ln|t|=-\ln|x|+C \to t=\frac{C}{x},\ C\in\mathbb{R}$

Вариация: $\frac{C'}{x}-\frac{C}{x^2}+\frac{C}{x^2}=-1 \to C=-\frac{x^2}{2}+A,\ A\in\mathbb{R}$

$$t=-\frac{x}{2}+\frac{A}{x},\ A\in\mathbb{R}$$

При $x=1$ $z=\frac{y'}{y}=1 \to t=-\frac{1}{2} \to -\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}+A \to A=0$

$$-\frac{1}{2z^2}=-\frac{x}{2} \to z^2=\frac{1}{x} \to \frac{y'}{y}=\frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\frac{dy}{y}=\frac{dx}{\sqrt{x}} \to \ln|y|=2\sqrt{x}+C,\ C\in\mathbb{R} \to y=e^{2\sqrt{x}}\cdot C,\ C\in\mathbb{R}$$

$$x=1 \to y=-1 \to C=-e^{-2} \Rightarrow y=-e^{2(\sqrt{x}-1)}$$

Ответ: $y=-e^{2(\sqrt{x}-1)}$

7.66

$$x^4y''-xyy'+2(y-x^2)y=0,\ y(1)=1,\ y'(1)=-\frac{1}{2}\ (*)$$

Проверим на обобщённую однородность $x\to\lambda x,\ y^{(k)}\to\lambda^{s-k}y^{(k)}$

$$\lambda^4x^4\lambda^{s-2}y''-\lambda x\lambda^s y\lambda^{s-1}y'+2(\underbrace{\lambda^s y-\lambda^2x^2}_{\Leftrightarrow s=2})\lambda^s y=0$$

$s=2$: $\lambda^4x^4y''-\lambda^4xyy'+2\lambda^4(y-x^2)y=0$ - λ^4 сокращается $\Rightarrow s=2$

Замена $x=e^t,\ y=ze^{2t},\ y'=[ze^{2t}]'_t\frac{1}{x'_t}=[z'e^{2t}+2ze^{2t}]e^{-t}=$

$$=[z'+2z]e^t$$

$$y''=([z'+2z]e^t)'_t e^{-t} =$$

211
Донатик

$$= \left(e^{t}\left[z''+2z'\right]+e^{t}\left[z'+2z\right]\right)e^{-t}=z''+3z'+2z$$

$$(*):\quad e^{4t}(z''+3z'+2z)-ze^{4t}(z'+2z)+2\left(ze^{2t}-e^{2t}\right)ze^{2t}=0$$

$$z''+3z'+2z-zz'-2z^2+2z^2-2z=0$$

$$z''+(3-z)z'=0$$

Замена $z'_t=\omega \quad z''_{tt}=\omega'_t=\omega'_z\, z'_t=\omega'_z\omega$

$$\omega'\omega+(3-z)\omega=0$$

$\omega\equiv 0$ – решение

При $\omega\not\equiv 0$: $\omega'=z-3 \to \omega=\frac{1}{2}z^2-3z+C,\ C\in\mathbb{R}$

При $x=1=e^t \quad t=0 \Rightarrow z=ye^{-2t}=y=1$, а $\omega=z'=y'_te^{-2t}-$
$-2ye^{-2t}\underset{t=0}{=}y'_t-2 \qquad y'_t=y'_x x'_t=y'_x e^t$ при $t=0$ $y'_t=y'_x \Rightarrow$

$$\Rightarrow \omega=y'_x-2=-\frac{5}{2}\Rightarrow -\frac{5}{2}=\frac{1}{2}-3+C\to C=0$$

Обратная замена: $\omega=\frac{dz}{dt}=\frac{1}{2}z^2-3z\to dt=\frac{2dz}{z^2-6z}\to$

$$\to t=\int\frac{1}{3}\left(\frac{1}{z-6}-\frac{1}{z}\right)dz=\frac{1}{3}\ln|z-6|-\frac{1}{3}\ln|z|+C=\frac{1}{3}\ln\left|\frac{z-6}{z}\right|+C,\ C\in\mathbb{R}$$

При $x=1=e^t \quad t=0,\ z=1\to 0=\frac{1}{3}\ln 5+C\to C=-\frac{\ln 5}{3}$

$$\Rightarrow t=\frac{1}{3}\ln\left|\frac{z-6}{5z}\right|$$

$$e^{3t}=-\left(\frac{z-6}{5z}\right)\quad (\text{т.к. } x=1\to z=1)$$

$$z(1+5e^{3t})=6\to z=\frac{6}{1+5e^{3t}}$$

$$y=ze^{2t}=\frac{6e^{2t}}{1+5e^{3t}}=\frac{6x^2}{1+5x^3}$$

Ответ: $y=\frac{6x^2}{1+5x^3}$

T.1. $y''e^y+(y')^2e^y=2x$

211 Донатик

$(y'e^y)'_x = 2x$

Замена $z = y'e^y \to z = \int 2x\,dx = x^2 + C_1,\ C_1 \in \mathbb{R}$

$y'e^y = x^2 + C_1,\ C_1 \in \mathbb{R}$

$\frac{dy}{dx}e^y = \frac{d(e^y)}{dx} = x^2 + C_1,\ C_1 \in \mathbb{R}$

$e^y = \int (x^2 + C_1)\,dx = \frac{x^3}{3} + C_1 x + C_2,\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

Ответ: $y = \ln\left|\frac{x^3}{3} + C_1 x + C_2\right|,\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

225ф(б)

$y' = 2 + \sqrt[3]{y - 2x} = f(x,y)$

$f(x,y) \in C(\mathbb{R}^2)$

$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{3}(y-2x)^{-2/3} \in C(G)$, где $G = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \mid y = 2x\}$

Ответ: $y \neq 2x$

225ф(в)

$(x-2)y' = \sqrt{y} - x \to y' = f(x,y) = \frac{\sqrt{y} - x}{x-2}$

$f(x,y) \in C(G),\ G = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \mid x = 2\ \&\ y < 0\}$

$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1/2\sqrt{y}}{x-2} \in C(G),\ G = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \mid x = 2\ \&\ y \leq 0\}$

Ответ: $x \neq 2,\ y > 0$.

228ф(в)

$(x-y)y'y''' = \ln xy$

$y''' = f(x,y,y') = \frac{\ln xy}{(x-y)y'}$

$f(x,y,y') \in C(G),\ G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq y\ \&\ y' \neq 0\ \&\ xy > 0\}$

$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{(\frac{x}{y} - 1)y' - \ln xy(-y' + y''(x-y))}{(x-y)y'} \in C(G),\ G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq y\ \&\ y' \neq 0\ \&$
$y \neq 0\ \&\ xy > 0\}$

211
Донатик

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{\ln xy}{x-y}\left(-\frac{1}{(y')^2}\right) \in C(G),\ G = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\neq y,\ xy>0,\ y'\neq 0\}$$

<u>Ответ:</u> $y(x_0)\neq x_0,\ y(x_0)x_0>0,\ y(x_0)\neq 0,\ y'(x_0)\neq 0$

<u>228^{φ}(е)</u>

$$\frac{dx}{dt} = y^3 + \ln(t+1),\quad x\frac{dy}{dt} = \sqrt[3]{y-t}$$

$$\begin{cases} x'_t = f_1(x,y,t) = y^3 + \ln(t+1) \\ y'_t = f_2(x,y,t) = \dfrac{\sqrt[3]{y-t}}{x} \end{cases}$$

$$f_1(x,y,t) \in C(\{(x,y,t)\in\mathbb{R}^3 \mid t>-1\})$$

$$f_2(x,y,t) \in C(\{(x,y,t)\in\mathbb{R}^3 \mid x\neq 0\})$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} \equiv 0 \in C(\mathbb{R}^3)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = \frac{-\sqrt[3]{y-t}}{x^2} \in C(\{(x,y,t)\in\mathbb{R}^3 \mid x\neq 0\})$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = 3y^2 \in C(\mathbb{R}^3)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial y} = \frac{(y-t)^{-2/3}}{3x} \in C(\{(x,y,t)\in\mathbb{R}^3 \mid x\neq 0\ \&\ y-t\neq 0\})$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} = \frac{1}{t+1} \in C(\{(x,y,t)\in\mathbb{R}^3 \mid t\neq -1\})$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial t} = \frac{(y-t)^{-2/3}}{3x} \in C(\{(x,y,t)\in\mathbb{R}^3 \mid x\neq 0\ \&\ y-t\neq 0\})$$

<u>Ответ:</u> $t>-1,\ t\neq y,\ x\neq 0$

<u>229^{φ}(а)</u>

$$y' = x + y^2 = f(x,y)$$

$$f(x,y)\in C(\mathbb{R}^2)\quad \frac{\partial f}{\partial y} \in C(\mathbb{R}^2) \Rightarrow$$

Донатик

$\Rightarrow \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2\ \exists!$ решение ДУ $\Rightarrow$ не могут

Ответ: не могут.

$229^{ф}$(б)

$$y'' = x + y^2 = f(x,y)$$

$$f(x,y)\in C(\mathbb{R}^2) \quad \frac{\partial f}{\partial y}\in C(\mathbb{R}^2) \Rightarrow$$

$\Rightarrow \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2\ \exists!$ решение ДУ с заданными $y(x_0)$, $y'(x_0)$. Это означает, что графики не могут касаться в одной точке, но могут пересекаться, если задать разные $y'(x_0)$.

Ответ: могут.

$230^{ф}$(а) $\rightarrow$ см. $229^{ф}$(а)

Ответ нет.

$230^{ф}$(б) $\rightarrow$ см. $229^{ф}$(б)

Ответ нет.

$230^{ф}$(в)

$y''' = x + y^2$. Аналогично рассуждениям в 229(б):

Ответ да.

$231^{ф}$

$$y^{(n)} = x + y^2,\ y(0)=1,\ y'(0)=2 \quad n=1,2,3$$

$n=1$: $y' = x + y^2 \rightarrow$ при $x=0$: $2 = x+1 \rightarrow 0$ решений

$n=2$: $(x+y^2)\in C(\mathbb{R})$ $(x+y^2)'_y\in C(\mathbb{R}) \rightarrow \exists!$ решение

$n\geq 3$: $\frac{\partial}{\partial y^{(k)}}(x+y^2)\in C(\mathbb{R})\ \forall k$, нач. усл. на $y^{(k)}$, $k>1$ можно варьировать бесконечно большим числом способов.

234.

$n = ?:\ y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ $\quad f \in C^1 \quad y_1 = x,\ y_2 = \sin x$ - реш

$\Rightarrow$ выполн. Th $\exists!$

$$\left.\begin{aligned} y_1(0) &= y_2(0) \\ y_1'(0) &= y_2'(0) \\ y_1''(0) &= y_2''(0) \\ y_1'''(0) &\neq y_2'''(0) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{при } n \leqslant 3 \text{ противоречие с Th } \exists! \Rightarrow n \geqslant 4$$

Ответ: $n \geqslant 4$.

Т. 2 (а)

$$y' = -y^2, \quad y(1) = -1$$

$$\int -\frac{dy}{y^2} = x + C \to \frac{1}{y} = x + C \quad y(1) = -1 \to C = -2$$

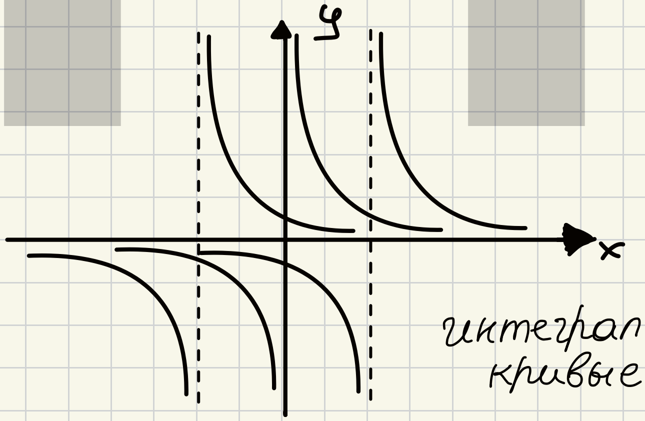
$$y = \frac{1}{x-2}$$

$-y^2 \in C(\mathbb{R}^2) \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists!$ решение с $y(1) = 1$

Непродолжаемое решение -

$y = \frac{1}{x-2}$ на $x \in (-\infty, 2)$



интегральные кривые

Т. 2 (б)

$$y' = 3\sqrt[3]{y^2},\ y(-4) = -1,\ y(2) = 1$$

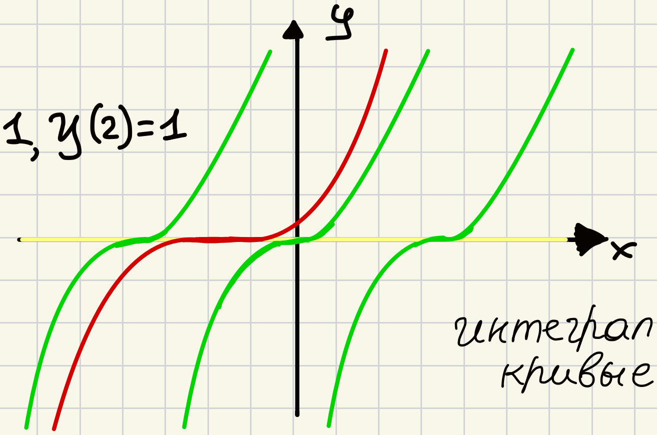
$y \equiv 0$ - решение

$$\int \frac{dy}{3\sqrt[3]{y^2}} = x + C$$

$$y = (x + C)^3$$

$3\sqrt[3]{y^2} \in C(\mathbb{R}^2)$

$(\sqrt[3]{y^2})' \in C(\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \mid y = 0\}) \Rightarrow$



интегральные кривые

Донатик

$\Rightarrow$ Th. $\exists!$ не выполняется, поэтому нужно два условия

$y>0:\ y(2)=1 \Rightarrow y=(x-1)^3$

$y<0:\ y(-4)=-1 \Rightarrow y=(x+5)^3$

Особое решение: $y\equiv 0$

$$y=\begin{cases}(x-1)^3, & y>0\\ 0, & y=0\\ (x+5)^3, & y<0\end{cases}$$ - непродолжаемое решение

278ф

$$y'^2-2xy'=x^2-4y$$

$$\begin{cases} y=\frac{1}{4}(x^2+2xp-p^2) \quad (*)\\ dy=pdx\end{cases}$$

$\Rightarrow dy=pdx=\frac{1}{4}(2xdx+2pdx+2xdp-2pdp)$

$2pdx=xdx+pdx+xdp-pdp$

$(p-x)dx=(x-p)dp$

$\underset{(1)}{p=x}$ или $\underset{(2)}{p=}-x+C,\ C\in\mathbb{R}$

$(*):(1):\quad 4y=x^2+2x^2-x^2 \Rightarrow y_1=\frac{1}{2}x^2=y_1$

$(*):(2):\quad 4y=x^2+2x(-x+C)-(-x+C)^2=x^2-2x^2+2xC-x^2+$
$+2xC-C^2=-2x^2+4xC-2C^2+C^2=C^2-2(x-C)^2\to y_2=\frac{C^2}{4}-\frac{(x-C)^2}{2}$

Дискр. кривая: $\begin{cases}f(x,y,p)=0\\ \frac{\partial f}{\partial p}=0\end{cases}$ $\quad f(x,y,p)=p^2-2xp+4y-x^2$

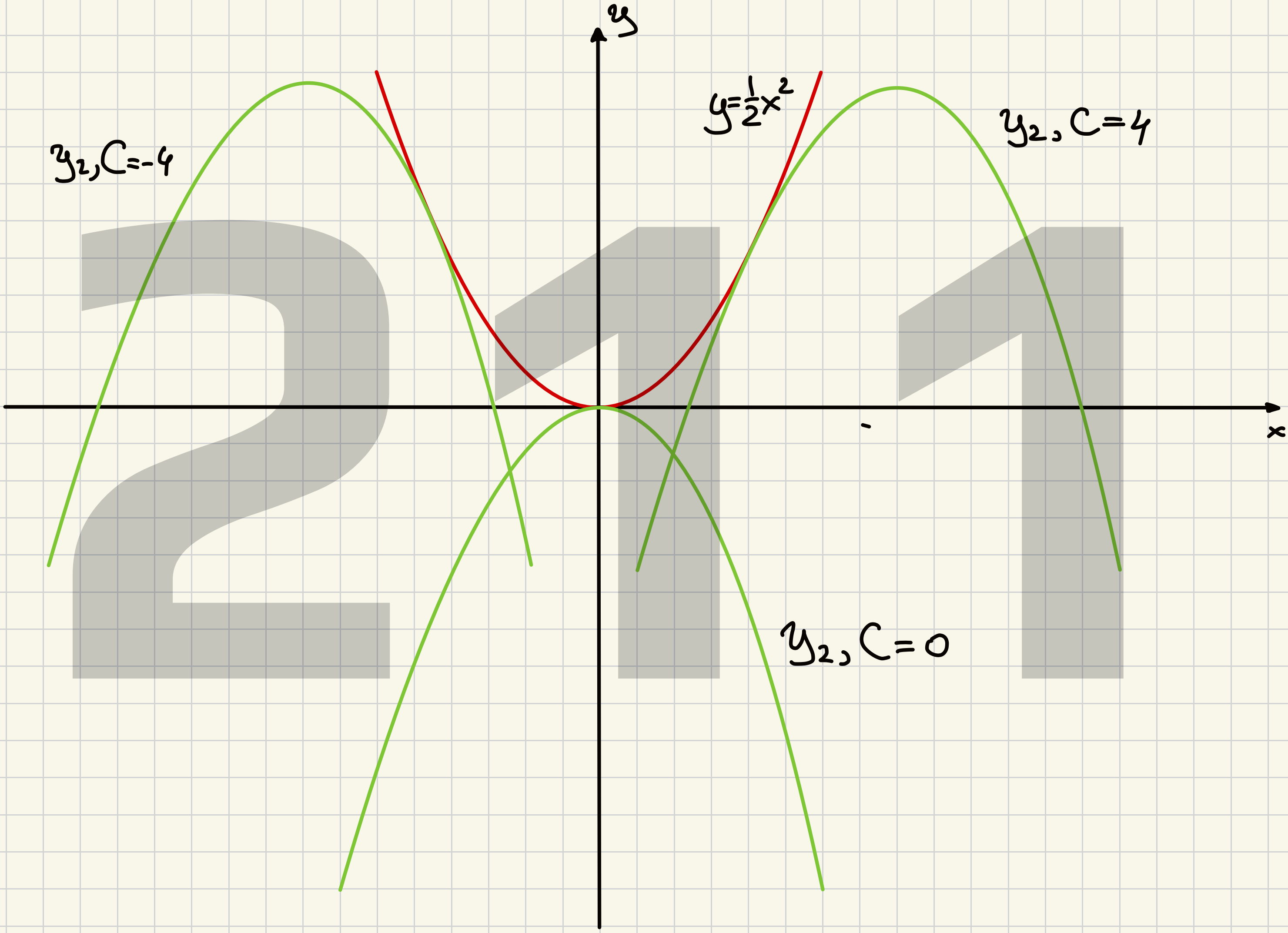
$$\begin{cases}p^2-2xp+4y-x^2=0\\ 2p-2x=0\end{cases} \to x^2-2x^2+4y-x^2=0\to y=\frac{1}{2}x^2$$

Проверим, что $y=\frac{1}{2}x^2$ - особое решение

$\forall x_0\ \exists C:\ \begin{cases}y_1(x_0)=y_2(x_0)\\ y_1'(x_0)=y_2'(x_0)\end{cases}$ $\quad\begin{cases}\frac{1}{2}x_0^2=\frac{C^2}{4}-\frac{(x_0-C)^2}{2}\\ x_0=C-x_0\end{cases}$

Донатик

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x_0^2 = x_0^2 - \frac{x_0^2}{2} \\ C = 2x_0 \end{cases}$$ – верно $\Rightarrow$ $y = \frac{1}{2}x^2$ – особое решение



287.

$$y = xy' - y'^2$$

$$\begin{cases} y = xp - p^2 \ (*) \\ dy = p\,dx \end{cases} \Rightarrow p\,dx = x\,dp + p\,dx - 2p\,dp$$

$$2p\,dp = x\,dp$$

$$p \underset{(1)}{\equiv} const \text{ – решение}$$

$$2p \underset{(2)}{=} x$$

$(*):(1):\ y = Cx - C^2$

Донатик

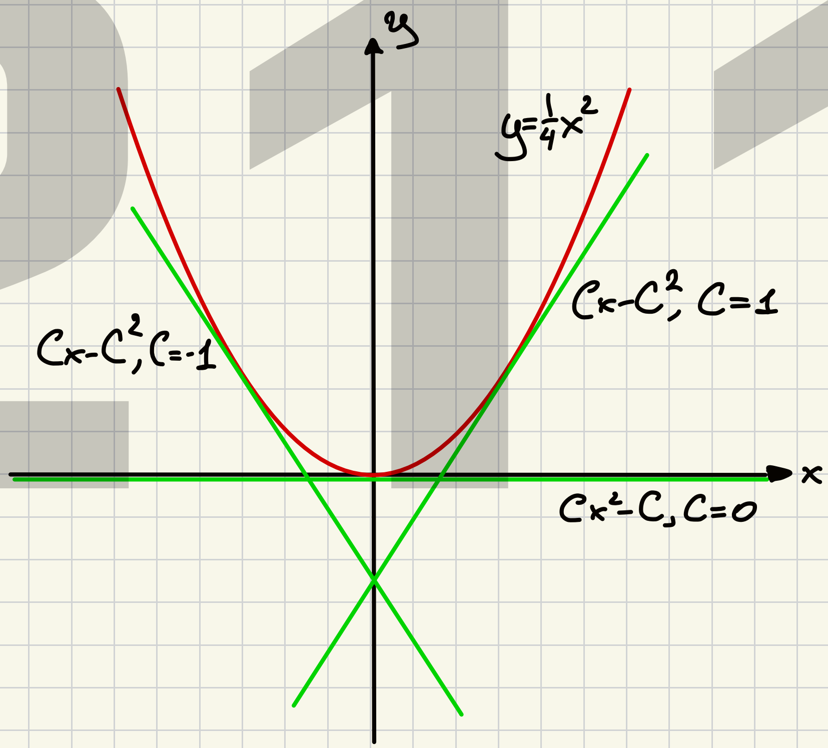
$(*):(2):\ y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^2 = \frac{1}{4}x^2$

Дискриминантная кривая. $\begin{cases} y+p^2-xp=0 \\ 2p-x=0 \to x=\frac{1}{2}p \end{cases} \to y=\frac{1}{4}x^2$

Проверим на особое реш.

$\forall x_0 \ \exists C: \begin{cases} Cx_0-C^2=\frac{1}{4}x_0^2 \\ C=\frac{1}{2}x_0 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{1}{2}x_0^2-\frac{1}{4}x_0^2=\frac{1}{4}x_0^2 \\ C=\frac{1}{2}x_0 \end{cases}$ – верно $\Rightarrow$

$\Rightarrow y=\frac{1}{4}x^2$ – особое решение



211

<u>289</u>

$y=2xy'-4y'^3$

$\begin{cases} y=2xp-4p^3 \ (**) \\ dy=pdx \end{cases} \to pdx=2xdp+2pdx-12p^2dp$

$pdx+2(x-6p^2)dp=0$

$p\equiv const$ – не решение $\Rightarrow dp\neq 0$

$p\equiv 0$ – решение $(***)$

При $p\neq 0$: $\frac{dx}{dp}+2\left(\frac{x}{p}-6p\right)=0 \ (*)$

$x'_p+\frac{2}{p}x=-12p$

Донатик

ОДУ: $x'p + \frac{2}{p}x = 0$

$$\ln|x| = -2\int\frac{dp}{p} = -2\ln|p| + C,\ C\in\mathbb{R}$$

$$x = \frac{C}{p^2},\ C\in\mathbb{R}$$

Вариация: (*): $\frac{C'}{p^2} - \frac{2C}{p^3} + \frac{2C}{p^3} - 12p = 0$

$$C' = 12p^3 \to C = 3p^4 + A,\ A\in\mathbb{R}$$

$$x = 3p^2 + \frac{C}{p^2},\ C\in\mathbb{R}$$

(**): $y = 2p\left(3p^2 + \frac{C}{p^2}\right) - 4p^3 = 2p^3 + 2\frac{C}{p}$

(***) $\Rightarrow$ $y\equiv 0$

Ответ: $y\equiv 0$ или $\begin{cases} x = 3p^2 + \frac{C}{p^2} \\ y = 2p^3 + 2\frac{C}{p} \end{cases}$

18

$$2y^2y'^2 - 2xy'^2 + 4yy' + 1 = 0$$

$y'\equiv 0$ - не решение

$$2y^2 - 2x + 4\frac{y}{y'} + \left(\frac{1}{y'}\right)^2 = 2y^2 - 2x + 4yx' + x'^2 = 0$$

$\begin{cases} 2y^2 - 2x + 4yp + p^2 = 0 \ (*) \\ dx = p\,dy \end{cases}$ $\to p\,dy = d\left(y^2 + 2yp + \frac{1}{2}p^2\right) = 2y\,dy + 2y\,dp + 2p\,dy + p\,dp$

$$-(p+2y)dp = (2y+p)dy$$

$p_{(1)} = -2y$ или $p_{(2)} = -y + C,\ C\in\mathbb{R}$

(*): (1): $2y^2 - 2x - 8y^2 + 4y^2 = 0$

$$y^2 + x = 0$$

(*): (2): $2y^2 - 2x + 4y(-y+C) + (-y+C)^2 = 0$

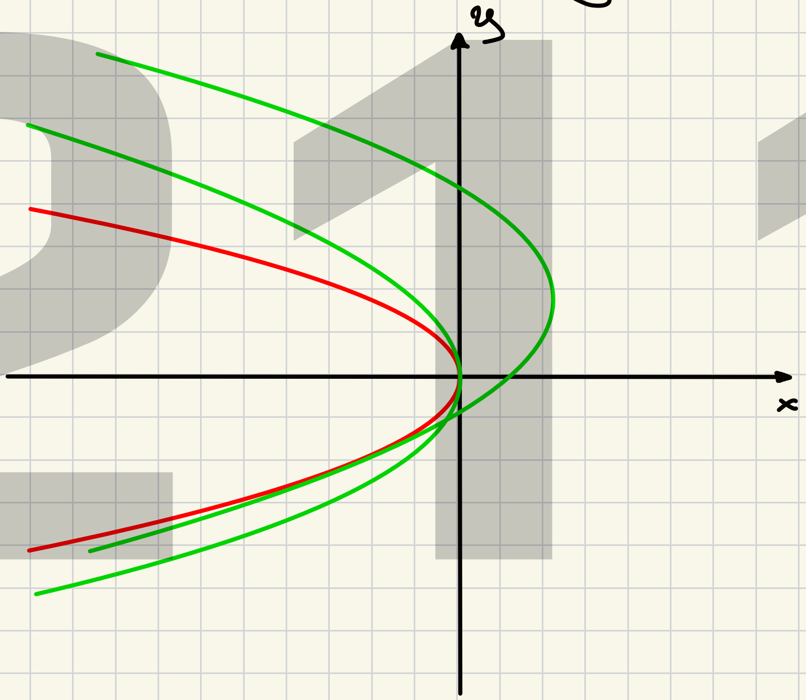
$$2x = 2y^2 - 4y^2 + 4yC + y^2 - 2yC + C^2 = -y^2 + 2yC + C^2$$

211
Донатик

Дискр. кривые: $\begin{cases} 2y^2-2x+4yp+p^2=0 \to 2y^2-2x-8y^2+4y^2=0 \\ 4y+2p=0 \to p=-2y \end{cases}$ $\quad y^2+x=0$

Проверим на особое решение: $\forall\, y_0\ \exists C$: $\begin{cases} -2y_0^2=-y_0^2+2y_0C+C^2 \\ -4y_0=-2y_0+2C \end{cases}$

$\begin{cases} -2y_0^2=-y_0^2-2y_0^2+y_0^2 \\ C=-y_0 \end{cases}$ – верно $\Rightarrow y^2+x=0$ – особое решение



211

55.

$$2yy'+2y-3x=x(y')^2$$

$$2y(1+y')=x(3+(y')^2)$$

$y'\equiv-1$ – не решение

$$y=\frac{1}{2}x\,\frac{3+(y')^2}{1+y'}$$

$$\begin{cases} y=\frac{1}{2}x\,\frac{3+p^2}{1+p} \quad (*) \\ dy=p\,dx \end{cases} \to p\,dx=\frac{1}{2}dx\,\frac{3+p^2}{1+p}+\frac{1}{2}x\,\frac{2p(1+p)-3-p^2}{(1+p)^2}dp=$$

$$=\frac{1}{2}dx\,\frac{3+p^2}{1+p}+\frac{1}{2}x\,\frac{2p+p^2-3}{(1+p)^2}dp$$

$$2(1+p)^2p\,dx=(3+p^2)(1+p)\,dx+x(2p+p^2-3)\,dp$$

Донатик

$$(1+p)\left(2(1+p)p-(3+p^2)\right)dx = x(2p+p^2-3)dp$$

$$(1+p)(2p+p^2-3)dx = x(2p+p^2-3)dp$$

$$2p+p^2-3\equiv 0 \to p\overset{(1)}{=}-3,\ p\overset{(2)}{=}1$$

$$(1+p)dx = x\,dp \to \ln|x| = \ln|p+1|+C \to p\overset{(3)}{=}Cx-1,\ C\in\mathbb{R}$$

$(*):(1):\ y=\frac{1}{2}x\,\frac{12}{-2}=-3x$

$(*):(2):\ y=\frac{1}{2}x\,\frac{4}{2}=x$

$(*):(3):\ y=\frac{1}{2}x\,\frac{3+(Cx-1)^2}{1+Cx-1}=\frac{1}{2C}\left(3+C^2x^2-2Cx+1\right)=$

$=\frac{C}{2}x^2-x+\frac{2}{C}\to Cx^2-x+\frac{1}{C},\ C\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$

Дискриминантная кривая: $\begin{cases}(*)\\ \frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{1}{2}x\frac{3+p^2}{1+p}-y\right)=0\end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{2}x\,\frac{2p(1+p)-3-p^2}{(1+p)^2}=0 \Rightarrow 2p-3+p^2=0 \to p=-3$ или $p=1$

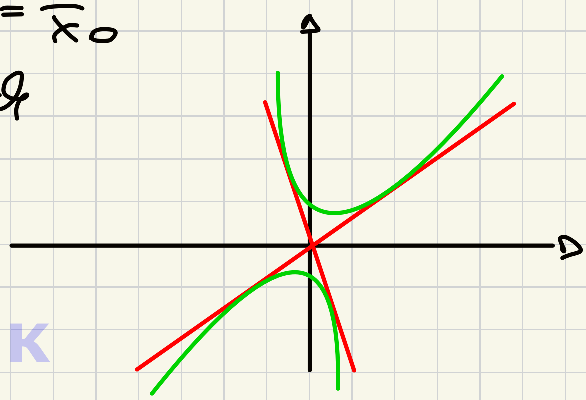
Т.е. $-3x$, x – дискр. кривые

Проверим на особое решение

$\forall x_0\ \exists C: \begin{cases}-3x_0=Cx_0^2-x_0+\frac{1}{C}\to -3x_0=-x_0-x_0-x_0\\ -3=2Cx_0-1\to C=-\frac{1}{x_0}\end{cases}$ – верно

$\forall x_0\ \exists C: \begin{cases}x_0=Cx_0^2-x_0+\frac{1}{C}\to x_0=x_0-x_0+x_0\\ 1=2Cx_0-1\to C=\frac{1}{x_0}\end{cases}$ – верно

$\Rightarrow y=x,\ y=-3x$ – особые решения

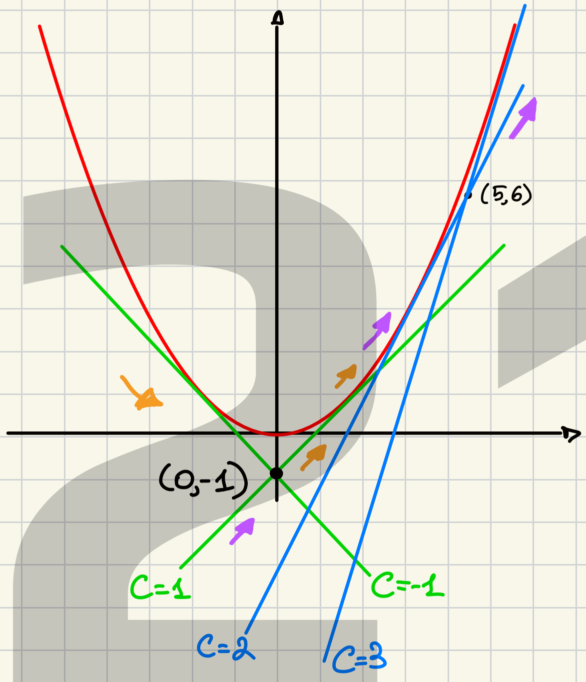


Донатик

Т.4 (а)

$$y = xy' - y'^2 \qquad y(0) = -1,\ y(5) = 6$$

Из 287° $\to$ $y = \frac{1}{4}x^2$ – особое решение, $y = Cx - C^2$ – реш.



$x=0$: $-C^2 = -1 \Rightarrow C = \pm 1$

$x=5$: $5C - C^2 = 6 \to (C-3)(C-2) = 0$
$\Rightarrow C = 3,\ C = 2$

Искомая функция – на рисунке

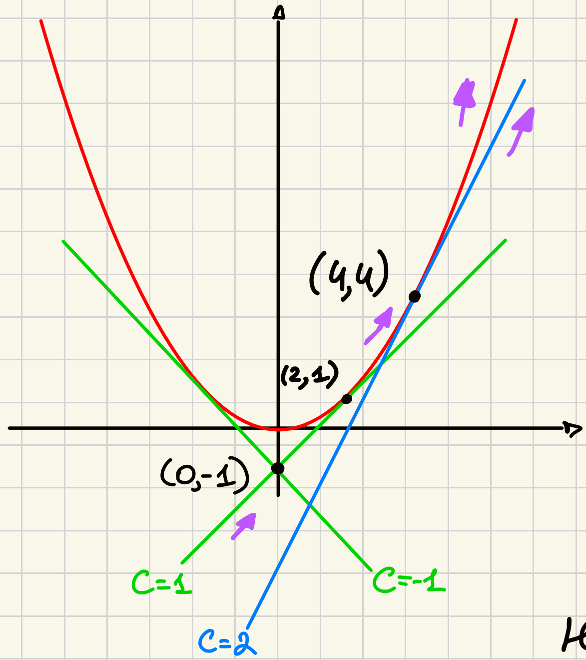
$$y = \begin{cases} x-1, & x < 2 \\ \frac{1}{4}x^2, & 2 \le x \le 4 \\ 2x-4, & 4 < x \end{cases}$$

– не подходит, т.к. в $(0,-1)$ излом.

Т.4 (б)

$$y = xy' - y'^2 \qquad y(0) = -1 \qquad y(4) = 4$$

$4C - C^2 = 4 \to C = 2$



$C = -1$ как и в (а) не подходит из-за излома в $(0,-1)$

При $x \ge 4$ можно остаться навсегда на параболе или сойти с неё на любую касательную.

Искомые: $y = \begin{cases} 1-x, & x < 2 \\ \frac{1}{4}x^2, & 2 \le x \end{cases}$ $\quad y = \begin{cases} 1-x, & x < 2 \\ \frac{1}{4}x^2, & 2 \le x \le 4 \le \lambda \\ \frac{\lambda}{2}x - \frac{\lambda^2}{4}, & \lambda \le x \end{cases}$

λ: $\frac{1}{4}\lambda^2 = C\lambda - C^2 \to$
$\to (\lambda - 2C)^2 = 0 \to C = \frac{\lambda}{2}$

Донатик

T. 5

$$(y')^2 = 4y^3(1-y)$$

$y\equiv 0,\ y\equiv 1$ – решения

$$\frac{(y')^2}{y^4} = 4\left(\frac{1}{y} - 1\right)$$

$$\left(\left(\frac{1}{y}-1\right)'\right)^2 = 4\left(\frac{1}{y}-1\right)$$

$$z' = \pm 2\sqrt{z} \Rightarrow \int \frac{dz}{2\sqrt{z}} = \pm x \Rightarrow \sqrt{z} = \pm x + C \Rightarrow z = (\pm x + C)^2 =$$

$$= x^2 \pm 2xC + C^2 \Rightarrow x^2 + 2xC + C^2 = (x+C)^2,\ C\in\mathbb{R}$$

$$\frac{1}{y} - 1 = (x+C)^2 \Rightarrow y = \frac{1}{1+(x+C)^2}$$

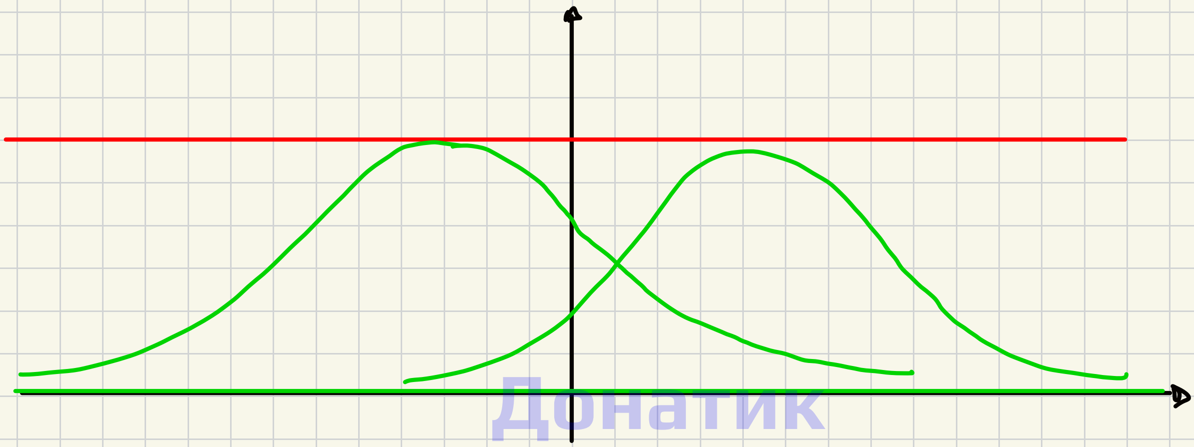
Дискр. кривая $\begin{cases}(z')^2 = p^2 = 4z\\ 2p=0\end{cases} \Rightarrow z=0 \Rightarrow y=1$

Проверим на особое решение

$\forall x_0\ \exists C: \begin{cases} \frac{1}{1+(x_0+C)^2}=1 \to 1=1 \\ \frac{-2(x_0+C)}{1+(x_0+C)^2}=0 \Rightarrow C=-x_0\end{cases}$ – верно

Особое решение – $y\equiv 1$

Решение $y\equiv 0,\ y\equiv 1,\ y=\frac{1}{1+(x+C)^2}$



Донатик