I. Неявные функции

I1

$x^2 = y^2$

а) Сколько функций $y: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ удовл.?

$M \subset \mathbb{R}$: $y = \begin{cases} x, & x \in M \\ -x, & x \notin M \end{cases}$ - функция, удовлетворяющая уравнению.

В силу произвольности M: бесконечно много.

б) Сколько непр. $y: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ удовл.?

$y = x$, $y = -x$, $y = |x|$, $y = -|x|$, остальные не непрерывны.

в) Сколько непр. $y: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ удовл. уравнению и $y(1) = 1$?

$y = x$ и $y = |x|$, в остальных непр. $y(1) = -1$.

г) Сколько непр. $y: [1;2] \to \mathbb{R}$ удовл. уравнению и $y(1) = 1$?

$y = x$ и $y = |x|$ совпадают на $[1;2] \Rightarrow$ только $y = x$

Ответ: а) беск. много; б) 4; в) 2; г) 1.

§3 №68(2)

Найти du в точке $(1;1)$: $x - u = u \ln \frac{u}{y}$

$\cancel{\frac{\partial}{\partial x}: \ 1 - u'_x = u'_x \ln\frac{u}{y} + u \cdot \frac{y}{u} \cdot \frac{u'_x}{y}}$;

$x = 1, y = 1$: $\quad 1 - u(1,1) = u(1,1) \ln \frac{u(1,1)}{1}$

$u_0(1+\ln u_0)=1$; $u_0=1$ - ед. корень т.к. функция слева возрастает. ($u_0=u(1,1)$)

$\frac{\partial}{\partial x}: 1-u'_x = u'_x \ln\frac{u}{y} + u\cdot\frac{y}{u}\cdot\frac{u'_x}{y}$

$1-u'_{x0} = u'_{x0}\cdot\ln\frac{1}{1} + u'_{x0} \Rightarrow u'_{x0}=\frac{1}{2}$.

$\frac{\partial}{\partial y}: -u'_y = u'_y\ln\frac{u}{y} + u\cdot\frac{y}{u}\cdot\frac{u'_y y - u}{y^2}$

$-u'_{y0} = u'_{y0}\ln\frac{1}{1} + \frac{u'_{y0}\cdot 1-1}{1} \Rightarrow u'_{y0}=\frac{1}{2}$.

$dU = u'_{x0}dx + u'_{y0}dy = \frac{1}{2}dx+\frac{1}{2}dy$

Ответ: $dU = \frac{1}{2}dx+\frac{1}{2}dy$.

§3 064(1)

Найти dU в точке а) $P=(3;-2;2)$; б) $P=(3;-2;-1)$

$u^3 - xu + y = 0$;

~~$\frac{\partial}{\partial x}: 3u^2\cdot u'_x - u - xu'_x = 0$~~

~~а) $12u'_x - 2 - 3u'_x = 0 \Rightarrow u'_x = \frac{2}{9}$~~

~~б) $3u'_x + 1 - 3u'_x = 0$ — u'_x не существует~~

$F(x,y,u) = u^3 - xu + y$

F - непрерывно дифференцируема во всех точках

$F'_u = 3u^2 - x$

а) $F'_u(P) = 12-3 = 9 \neq 0 \Rightarrow u(x,y)$ - непрерывно дифференцируема

$dF = 0 = 3u^2du - xdu - udx + dy$

$12du - 3du - 2dx + dy = 0$

$du = \frac{2}{9}dx - \frac{1}{9}dy$

б) $F'_u(P) = 3 - 3 = 0$ (не выполняется условие теорема)

Докажем, что не существует u'_x

~~При фиксированном $y = -2$:~~

$\cancel{u^3 - xu = 2}$

$\cancel{x = \frac{u^3 - 2}{u} = u^2 - \frac{2}{u}}$

$\cancel{x'_u = 2u + \frac{2}{u^2} \neq 0}$

Предположим обратное. При фиксированном y:

$u^3 - xu - 2 = 0$

Дифференцируем обе части по x:

$3u^2 \cdot u'_x - u - x \cdot u'_x = 0$

В точке P: $3u'_x + 1 - 3u'_x = 0 \Rightarrow 1 = 0$ ♀ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ предположение неверно, u'_x не существует в $P \Rightarrow du$ не существует в P (необходимое)

<u>Ответ:</u> а) $\frac{2}{9}dx - \frac{1}{9}dy$; б) du не существует.

§3 №71

Док-ть: $y f\left(\frac{z}{y}\right) = x^2 + y^2 + z^2$ определяет

дифференцируемую $z(x,y)$ =>

=> z удовлетворяет $(x^2 - y^2 - z^2)\frac{\partial z}{\partial x} + 2xy\frac{\partial z}{\partial y} = 2xz$

Обе части уравнения можно продифференцировать по x и по y.

$$y \cdot \frac{\partial f\left(\frac{z}{y}\right)}{\partial\left(\frac{z}{y}\right)} \cdot \frac{\partial\left(\frac{z}{y}\right)}{\partial x} = 2x + 2z \cdot \frac{\partial z}{\partial x};$$

$$\frac{\partial f\left(\frac{z}{y}\right)}{\partial\left(\frac{z}{y}\right)} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 2z \cdot \frac{\partial z}{\partial x} \quad (1)$$

$$f\left(\frac{z}{y}\right) + y \cdot \frac{\partial f\left(\frac{z}{y}\right)}{\partial\left(\frac{z}{y}\right)} \cdot \frac{\frac{\partial z}{\partial y} \cdot y - z}{y^2} = 2y + 2z \cdot \frac{\partial z}{\partial y} \quad \Big/ \cdot \frac{\partial z}{\partial x}$$

$$f\left(\frac{z}{y}\right)\frac{\partial z}{\partial x} + \left(\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{z}{y}\right) \cdot \frac{\partial f\left(\frac{z}{y}\right)}{\partial\left(\frac{z}{y}\right)} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = 2y\frac{\partial z}{\partial x} + 2z\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}$$

Из (1):

$$f\left(\frac{z}{y}\right)\frac{\partial z}{\partial x} + \left(\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{z}{y}\right) \cdot \left(2x + 2z \cdot \frac{\partial z}{\partial x}\right) = 2y\frac{\partial z}{\partial x} + 2z\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}$$

$$f\left(\frac{z}{y}\right)\frac{\partial z}{\partial x} + 2x\frac{\partial z}{\partial y} \cancel{+ 2z\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}} - \frac{2xz}{y} - \frac{2z^2}{y} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = 2y\frac{\partial z}{\partial x} \cancel{+ 2z\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}} \quad \Big/ \cdot y$$

$$y f\left(\frac{z}{y}\right) \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + 2xy\frac{\partial z}{\partial y} - 2xz - 2z^2\frac{\partial z}{\partial x} = 2y^2\frac{\partial z}{\partial x}$$

Из данного уравнения подставляем $yf\left(\frac{z}{y}\right)$

$$(x^2+y^2+z^2)\frac{\partial z}{\partial x}+2xy\frac{\partial z}{\partial y}-2xz-2z^2\frac{\partial z}{\partial x}-2y^2\frac{\partial z}{\partial x}=0$$

$$(x^2-y^2-z^2)\frac{\partial z}{\partial x}+2xy\frac{\partial z}{\partial y}=2xz.$$

§3.076

Найти du и dv в точке $(1;1)$ (существуют)

$x=\sqrt{2}e^{u/x}\cos\frac{v}{y}$

$y=\sqrt{2}e^{u/x}\sin\frac{v}{y}$

$u(1,1)=0,\ v(1,1)=\frac{\pi}{4}$

$f_1(x,y,u,v)=x-\sqrt{2}e^{u/x}\cos\frac{v}{y}=0$ – дифференцируема как композиция

$$f'_{1x}=1-\sqrt{2}\left(e^{u/x}\cdot\frac{u'_x x-u}{x^2}\cos\frac{v}{y}-e^{u/x}\cdot\sin\frac{v}{y}\cdot\frac{v'_x}{y}\right)$$

$$f'_{1x}\left(1,1,0,\frac{\pi}{4}\right)=1-u'_x+v'_x=0 \Rightarrow u'_x-v'_x=1 \quad (1)$$

$f_2(x,y,u,v)=y-\sqrt{2}e^{u/x}\sin\frac{v}{y}$ – дифференцируема как композиция.

$$f'_{2x}=-\sqrt{2}\left(e^{u/x}\cdot\frac{u'_x x-u}{x^2}\sin\frac{v}{y}+e^{u/x}\cdot\cos\frac{v}{y}\cdot\frac{v'_x}{y}\right)=$$

$$f'_{2x}\left(1,1,0,\frac{\pi}{4}\right)=-u'_x-v'_x=0 \Rightarrow u'_x+v'_x=0 \quad (2)$$

$(1,2)\Rightarrow u'_x=\frac{1}{2},\ v'_x=-\frac{1}{2}.$

$$f'_{1y} = -\sqrt{2}\left(e^{u/x}\cdot\frac{u'_y}{x}\cdot\cos\frac{v}{y} - e^{u/x}\cdot\sin\frac{v}{y}\cdot\frac{v'_y y - v}{y^2}\right)$$

$$f'_{1y} = 0 = -u'_y + v'_y - \frac{\pi}{4} \qquad (3)$$

$$f'_{2y} = 1 - \sqrt{2}\left(e^{u/x}\cdot\frac{u'_y}{x}\cdot\sin\frac{v}{y} + e^{u/x}\cdot\cos\frac{v}{y}\cdot\frac{v'_y y - v}{y^2}\right)$$

$$f'_{2y}(1,1,0,\tfrac{\pi}{4}) = 1 - u'_y - v'_y + \frac{\pi}{4} = 0 \qquad (4)$$

$$(3,4) \Rightarrow u'_y = \frac{1}{2},\ v'_y = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}.$$

Ответ: $du = u'_x dx + u'_y dy = \frac{1}{2}dx + \frac{1}{2}dy$

$dv = v'_x dx + v'_y dy = -\frac{1}{2}dx + \left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}\right)dy.$

§4 № 43 (б)

$y - u = e^{xu}$, $u(1,1) = 0$. найти: d^2u в $(1;1)$

u - дифференцируемая

$F(x,y,u) = y - u - e^{xu} = 0$ - дифф., как композиция

$$F'_x = -u'_x - e^{xu}(u'_x x + u)$$

$$F''_{xx} = -u''_{xx} - e^{xu}(u'_x x + u)^2 - e^{xu}(u''_{xx}\cdot x + u'_x + u'_x)$$

$$F'_y = 1 - u'_y - e^{xu}\cdot x\cdot u'_y$$

$$F''_{yy} = -u''_{yy} - e^{xu}\cdot x^2 {u'_y}^2 - e^{xu}\cdot x\cdot u''_{yy}$$

$$F''_{xy} = -u''_{xy} - e^{xu}\cdot x u'_y(u'_x x + u) - e^{xu}(x u''_{xy} + u'_y)$$

$$F'_x(1,1,0) = -u'_x - u'_x = 0 \Rightarrow u'_x = 0$$

$$F'_y(1,1,0) = 1 - u'_y - u'_y = 0 \Rightarrow u'_y = \frac{1}{2}$$

$F''_{xx}(1,1,0) = -u''_{xx} - (u'_x)^2 - u''_{xx} - 2u'_x = 0$

$-2u''_{xx} - \cancel{\frac{\neq 0}{8}} - \cancel{0} = 0 \Rightarrow u''_{xx} = 0$

$\cancel{2u''_{xx} = \frac{5}{4} \Rightarrow u''_{xx} = \frac{5}{8}}$

$F''_{xy}(1,1,0) = -u''_{xy} - u'_y(u'_x + 0) - u''_{xy} - u'_y = 0$

$2u''_{xy} + \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow u''_{xy} = -\frac{1}{4}$

$F''_{yy}(1,1,0) = -u''_{yy} - {u'_y}^2 - u''_{yy} = 0$

$2u''_{yy} + \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow u''_{yy} = -\frac{1}{8}$

$d^2u = u''_{xx}dx^2 + 2u''_{xy}dxdy + u''_{yy}dy^2 = -\frac{1}{2}dxdy - \frac{1}{8}dy^2$

<u>Ответ:</u> $d^2u = -\frac{1}{2}dxdy - \frac{1}{8}dy^2$

§ 4.046(2)

Ур-ием $f\left(\frac{x}{u}, \frac{y}{u}\right) = 0$, где f - дважды дифференцируемая,

опр. $u(x,y)$ - дважды дифференцируемая.

$d^2u(x,y) = ?$

$\sigma = \frac{x}{u}, \ \omega = \frac{y}{u}.$

$df = f'_\sigma d\sigma + f'_\omega d\omega = f'_\sigma \cdot \frac{u\,dx - x\,du}{u^2} + f'_\omega \cdot \frac{u\,dy - y\,du}{u^2}$

$df = 0 \Rightarrow u(f'_\sigma dx + f'_\omega dy) = du(f'_\sigma x + f'_\omega y) \qquad (1)$

$d^2f = f''_{\sigma\sigma}d\sigma^2 + 2f''_{\sigma\omega}d\sigma d\omega + f''_{\omega\omega}d\omega^2 + f'_\sigma d^2\sigma + f'_\omega d^2\omega =$

$= f''_{\sigma\sigma} \cdot \frac{(u\,dx - x\,du)^2}{u^4} + 2f''_{\sigma\omega} \cdot \frac{(u\,dx - x\,du)(u\,dy - y\,du)}{u^4} +$

$$+ f''_{\omega\omega} \cdot \frac{(Udy-ydU)^2}{U^4} + f'_\sigma \cdot d^2\sigma + f'_\omega \cdot d^2\omega.$$

$$d^2\sigma = d\left(\frac{Udx - xdU}{U^2}\right) = \frac{(dUdx - dUdx - xd^2U)U^2 - (Udx - xdU)2UdU}{U^4} =$$

$$= \frac{-xU^2d^2U - 2U^2dUdx + 2UxdU^2}{U^4}$$

Аналогично: $d^2\omega = \dfrac{-yU^2d^2U - 2U^2dUdy + 2UydU^2}{U^4}$

$$f'_\sigma d^2\sigma + f'_\omega d^2\omega = \frac{1}{U^4}\Big(-U^2d^2U(f'_\sigma x + f'_\omega y) - 2U^2dU \cdot$$

$$\cdot (f'_\sigma dx + f'_\omega dy) + 2UdU^2(f'_\sigma x + f'_\omega y)\Big) =$$

$= ($в силу равенства $(1)) = \dfrac{-1}{U^4} \cdot U^2d^2U(f'_\sigma x + f'_\omega y).$

Подставляем в $d^2f = 0$:

$$f''_{\sigma\sigma}(Udx - xdU)^2 + 2f''_{\sigma\omega}(Udx - xdU)(Udy - ydU) +$$

$$+ f''_{\omega\omega}(Udy - ydU)^2 = U^2(f'_\sigma x + f'_\omega y)d^2U$$

$$d^2U = \frac{1}{U^2(f'_\sigma x + f'_\omega y)}\Big[f''_{\sigma\sigma}(U^2dx^2 - 2UxdUdx + x^2dU^2) +$$

$$+ 2f''_{\sigma\omega}(U^2dxdy - UxdUdy - UydUdx + xydU^2) +$$

$$+ f''_{\omega\omega}(U^2dy^2 - 2UydUdy + y^2dU^2)\Big] = (\text{подст. } (1))$$

$$= \frac{1}{(f'_\sigma x + f'_\omega y)^3}\Big[f''_{\sigma\sigma}\Big\{(f'_\sigma x + f'_\omega y)^2dx^2 - 2xdx(f'_\sigma x + f'_\omega y)(f'_\sigma dx + f'_\omega dy) +$$

$$+ (f'_\sigma dx + f'_\omega dy)^2x^2\Big\}^{A} +$$

$$+ f''_{\sigma\omega}\{ (f'_\sigma x + f'_\omega y)^2 dx\,dy - (f'_\sigma x + f'_\omega y)(f'_\sigma dx + f'_\omega dy)(x\,dy + y\,dx) +$$

$$- \cancel{(f'_\sigma x + f'_\omega)} + (f'_\sigma dx + f'_\omega dy)^2 xy \}^{B} +$$

$$+ f''_{\omega\omega}\{ (f'_\sigma x + f'_\omega y)^2 dy^2 - 2y\,dy(f'_\sigma x + f'_\omega y)(f'_\sigma dx + f'_\omega dy) +$$

$$+ (f'_\sigma dx + f'_\omega dy)^2 y^2 \}^{C}$$

$$A = \cancel{f'^2_\sigma x^2 dx^2} + \cancel{2 f'_\sigma f'_\omega xy\,dx^2} + f'^2_\omega y^2 dx^2 -$$

$$- 2x\,dx(\cancel{f'^2_\sigma x\,dx} + \cancel{f'_\sigma f'_\omega x\,dy} + \cancel{f'_\sigma f'_\omega y\,dx} + f'^2_\omega y\,dy) +$$

$$+ \cancel{f'^2_\sigma x^2 dx^2} + \cancel{2 f'_\sigma f'_\omega x^2 dx\,dy} + f'^2_\omega x^2 dy^2 =$$

$$= f'^2_\omega (y^2 dx^2 - 2xy\,dx\,dy + x^2 dy) = f'^2_\omega (y\,dx - x\,dy)^2$$

Аналогично $C = f'^2_\sigma (y\,dx - x\,dy)^2$

$$B = f'^2_\sigma x^2 dx\,dy + 2 f'_\sigma f'_\omega xy\,dx\,dy + f'^2_\omega y^2 dx\,dy -$$

$$- f'^2_\sigma x^2 dx\,dy - f'_\sigma f'_\omega x^2 dy^2 - f'_\sigma f'_\omega xy\,dx\,dy - f'^2_\omega xy\,dy^2 -$$

$$- f'^2_\sigma xy\,dx^2 - f'_\sigma f'_\omega xy\,dx\,dy - f'_\sigma f'_\omega y^2 dx^2 - f'^2_\omega y^2 dx\,dy +$$

$$+ f'^2_\sigma xy\,dx^2 + 2 f'_\sigma f'_\omega xy\,dx\,dy + f'_\omega xy^2 dy^2$$

$$B = \cancel{f'^2_\sigma x^2 dx\,dy} + \cancel{2 f'_\sigma f'_\omega xy\,dx\,dy} + \cancel{f'^2_\omega y^2 dx\,dy} -$$

$$- \cancel{f'^2_\sigma x^2 dx\,dy} - f'_\sigma f'_\omega x^2 dy^2 - \cancel{f'_\sigma f'_\omega xy\,dx\,dy} - \cancel{f'^2_\omega xy\,dy^2} -$$

$$- \cancel{f'^2_\sigma xy\,dx^2} - \cancel{f'_\sigma f'_\omega xy\,dx\,dy} - f'_\sigma f'_\omega y^2 dx^2 - \cancel{f'_\omega y^2 dx\,dy} +$$

$$+ \cancel{f'^2_\sigma xy\,dx^2} + 2 f'_\sigma f'_\omega xy\,dx\,dy + \cancel{f'^2_\omega xy\,dy^2} =$$

$$= f'_\sigma f'_\omega (x^2 dy^2 - 2xy\,dx\,dy + y^2 dx^2) = - f'_\sigma f'_\omega (x\,dy - y\,dx)^2$$

$$d^2u=\frac{1}{(f'_\sigma x+f'_\omega y)^3}\cdot(xdy-ydx)^2\left(f''_{\sigma\sigma}\cdot(f'_\omega)^2-2f'_\sigma f'_\omega f''_{\sigma\omega}+(f'_\sigma)^2f''_{\omega\omega}\right)$$

<u>Ответ</u>: $d^2u=\dfrac{(f'_\omega)^2f''_{\sigma\sigma}-2f'_\sigma f'_\omega f''_{\sigma\omega}+(f'_\sigma)^2f''_{\omega\omega}}{(f'_\sigma x+f'_\omega y)^3}\cdot(xdy-ydx)^2.$

I2

$x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_n=0$

$U\subset\mathbb{R}^n$ - множество $a=(a_1,\ldots a_n)$: ур-ие имеет n различных корней $x_1,\ldots x_n$.

Док-ть: U - открыто; $\forall a\in U\ \exists U_\delta(a): x_i=x_i(a_1,\ldots a_n)$ - гладкая.

$F(a_1,\ldots a_n,x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1.$

1) $F\in C^\infty$

2) $F(a_1^0,\ldots a_n^0,x_i^0)=0$

3) $F'_x(a_1^0,\ldots a_n^0,x_i^0)=\sum\limits_{j=1}^n\dfrac{(x-x_1^0)\ldots(x-x_n^0)}{(x-x_j^0)}\Bigg|_{x=x_i^0}=\sum\limits_{\substack{j=1\\j\neq i}}^n\dfrac{(x-x_1^0)\ldots(x-x_n^0)}{(x-x_j^0)}+$

$+(x-x_1^0)\ldots(x-x_{i-1}^0)(x-x_{i+1}^0)\ldots(x-x_n^0)\Big|_{x=x_i^0}\neq0$ (в силу того что $x_i^0\neq x_j^0$ при $i\neq j$)

$(1-3) \Rightarrow \exists \delta_i : x_i = x_i(a_1, \dots a_n) \in C^\infty$ (гладкая) в $U_{\delta_i}(a_1^0, \dots a_n^0)$

В силу гладкости $x_i'(a_1, \dots a_n)$ ограничена в $U_{\delta_i}(a_1^0, \dots a_n^0)$.

Выберем $\delta < \min\{\delta_1, \dots \delta_n, \min\limits_{i \neq j} \frac{|x_i - x_j|}{2mn}\}$, $|x_i'| \leq m$, $\forall i$ (в U_δ)

теорема Лагранжа:

$x_i(a_1, \dots a_n) - x_i(a_1^0, \dots a_n^0) = x'_{i a_k}(a_1^0 + \xi(a_1 - a_1^0), \dots a_n^0 + \xi(a_n - a_n^0)) \underset{k}{\Delta a_k}$

$\xi \in (0,1)$

$|x_i(a_1, \dots a_n) - x_i(a_1^0, \dots a_n^0)| \leq m \cdot n \cdot \delta < \frac{1}{2} |x_i(a_1^0, \dots a_n^0) -$
$- x_j(a_1^0, \dots a_n^0)| \ \forall j$.

Таким образом, в $U_\delta(a_1^0, \dots a_n^0)$ сохраняется условие различимости корней.

В силу произвольности выбора $a^0 = (a_1^0, \dots a_n^0) \in U$:

$\forall a \in U : \exists U_\delta(a) : \forall b \in U_\delta(a) : b \in U$, т.е. U - открыто.

II. Дифференцируемые отображения, замена переменных

§3 №104

$x = r\cos^p\varphi,\ y = r\sin^p\varphi$

Найти $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)}$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)} = \begin{Vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{Vmatrix} = \cancel{\begin{Vmatrix} \cos^p\varphi & rp\sin^{p-1}\varphi\cos\varphi \\ \sin^p\varphi & -rp \end{Vmatrix}}$$

$$= \begin{vmatrix} \cos^p\varphi & -rp\cos^{p-1}\varphi\sin\varphi \\ \sin^p\varphi & rp\sin^{p-1}\varphi\cos\varphi \end{vmatrix} = pr\sin^{p-1}\varphi\cos^{p-1}\varphi\,(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)$$

$$= pr\,(\sin\varphi\cos\varphi)^{p-1}$$

Ответ: $pr(\sin\varphi\cos\varphi)^{p-1}$

№3

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$: $u = e^x\cos y,\ v = e^x\sin y$

Док-ть: $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} \neq 0$, но f - не биекция

Найти: E - мн-во значений f.

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = e^x\cos y \cdot e^x\cos y + e^x\sin y\cdot e^x\sin y =$$

$$= e^{2x} > 0\ \forall x.$$

Рассмотрим (x_0,y_0): $u_0 = e^{x_0}\cos y_0,\ v_0 = e^{x_0}\sin y_0$

$$\left.\begin{aligned} u(x_0,y_0) &= u(x_0,y_0+2\pi) \\ v(x_0,y_0) &= u(x_0,y_0+2\pi) \end{aligned}\right| \Rightarrow f \text{ - не взаимно-однозначное}$$

$u^2+v^2=e^{2x}>0 \Rightarrow (0;0)\notin E$

Рассмотрим произвольную точку $(u_1, v_1)\neq(0,0)$

$u^2+v^2=e^{2x}=u_1^2+v_1^2 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}\ln(u_1^2+v_1^2) \Rightarrow x_1=\frac{1}{2}\ln(u_1^2+v_1^2)$

$\cos y_1=\frac{u_0}{\sqrt{u_0^2+v_0^2}}, \ \sin y_1=\frac{v_0}{\sqrt{u_0^2+v_0^2}}$

$\Rightarrow \exists (x_1, y_1): f(x_1,y_1)=(u_0, v_0)$

Ответ: $E=\mathbb{R}^2\setminus(0,0)$

I4

$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2: \ x=r\cos\varphi, y=r\sin\varphi, r>0$

Выразить $r'_x, r'_y, \varphi'_x, \varphi'_y$ как функции r и φ

$\frac{\partial}{\partial x}: \begin{cases} 1=r'_x\cos\varphi-r\sin\varphi\cdot\varphi'_x \\ 0=r'_x\sin\varphi+r\cos\varphi\cdot\varphi'_x \end{cases} \cancel{\Rightarrow \begin{cases} r'_x=\frac{1+r\sin\varphi\,\varphi_x}{\cos\varphi} \\ r'_x=\frac{-r\cos\varphi\cdot\varphi'_x}{\sin\varphi}\end{cases}}$

$\cancel{\sin\varphi+r\sin^2\varphi\cdot\varphi'_x=r\cos^2\varphi\,\varphi_x}$

$\cancel{\sin\varphi=r\varphi_x\cos2\varphi \Rightarrow \varphi'_x=\frac{\sin\varphi}{r\cos2\varphi}}$

$\cancel{r'_x=-\frac{r\cos\varphi}{\sin\varphi}\cdot\frac{\sin\varphi}{r\cdot\cos2\varphi}=\frac{\cos\varphi}{\cos2\varphi}}$

$\cos\varphi=r'_x(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)\Rightarrow$

$\Rightarrow r'_x=\cos\varphi$

$\varphi'_x=\frac{-r'_x\sin\varphi}{r\cos\varphi}=-\frac{\sin\varphi}{r}$

$\frac{\partial}{\partial y}: \begin{cases} 0=r'_y\cos\varphi-r\sin\varphi\cdot\varphi'_y \\ 1=r'_y\sin\varphi+r\cos\varphi\cdot\varphi_x \end{cases}$

$\sin\varphi=r'_y\sin^2\varphi+r'_y\cos^2\varphi\Rightarrow r'_y=\sin\varphi$

$\varphi'_y=\frac{r'_y\cos\varphi}{r\sin\varphi}=\frac{\cos\varphi}{r}$

Ответ: $r'_x=\cos\varphi, r'_y=\sin\varphi, \varphi'_x=-\frac{\sin\varphi}{r}, \varphi'_y=\frac{\cos\varphi}{r}$

§3 №86

$x\frac{\partial u}{\partial y} - y\frac{\partial u}{\partial x} = 0$

Решить, преобразовав к полярным координатам.

$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ r>0,\ \varphi\in[0;2\pi)$

$\cancel{r=\sqrt{x^2+y^2}}$,

Из ТЧ: $\frac{\partial r}{\partial x} = \cos\varphi,\ \frac{\partial r}{\partial y} = \sin\varphi,\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{\sin\varphi}{r},\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\cos\varphi}{r}$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r}\cos\varphi - \frac{\partial u}{\partial \varphi}\cdot\frac{\sin\varphi}{r}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r}\sin\varphi + \frac{\partial u}{\partial \varphi}\cdot\frac{\cos\varphi}{r}$$

Подставляем в уравнение:

$$r\cos\varphi\left(\frac{\partial u}{\partial r}\sin\varphi + \frac{\partial u}{\partial \varphi}\cdot\frac{\cos\varphi}{r}\right) = r\sin\varphi\left(\frac{\partial u}{\partial r}\cos\varphi - \frac{\partial u}{\partial \varphi}\cdot\frac{\sin\varphi}{r}\right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \varphi} = r\frac{\partial u}{\partial r}(\sin\varphi\cos\varphi - \sin\varphi\cos\varphi) = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial \varphi} = 0$, u не зависит от φ

$\frac{\partial u}{\partial r}$ – любая функция $\Bigg| \Rightarrow$

$\Rightarrow u(x,y) = f(x^2+y^2)$, где f – дифференцируемая

Ответ: $u(x,y) = f(x^2+y^2)$, где f – дифференцируемая.

§3 №88(2)

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z$$

Решить, преобразовав $x=u,\ y=uv$

$\frac{\partial u}{\partial x}=1,\ \frac{\partial u}{\partial y}=0$

$0=\frac{\partial u}{\partial x}v+\frac{\partial v}{\partial x}u \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{v}{u}$

$1=\frac{\partial u}{\partial y}v+\frac{\partial v}{\partial y}u \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{1}{u}$

$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}-\frac{v}{u}\frac{\partial z}{\partial v}$

$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{1}{u}$

Подставляем:

$u\left(\frac{\partial z}{\partial u}-\frac{v}{u}\frac{\partial z}{\partial v}\right)+vu\frac{1}{u}\frac{\partial z}{\partial v}=z$

$u\frac{\partial z}{\partial u}=z \Rightarrow z=uf(v)$, где f - дифференцируема

Ответ: $z=xf\left(\frac{y}{x}\right)$, где f-дифференцируема

§3 №90

$$(z-x)\frac{\partial z}{\partial x}\cancel{z}-y\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

Преобразовать, приняв $x=x(y,z)$

$u=y,\ v=z,\ x=x(u,v)$

$dx=x'_u du+x'_v dv=x'_u dy+x'_v dz \Rightarrow$

$\Rightarrow dz=\frac{1}{x'_v}dx-\frac{x'_u}{x'_v}dy \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{x'_v},\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{x'_u}{x'_v}$

Подставляем: $(v-x)\cdot\frac{1}{x'_v}+u\cdot\frac{x'_u}{x'_v}=0 \Rightarrow x'_u=\frac{x-v}{u}$

Ответ: $\frac{\partial x}{\partial y}=\frac{x-z}{y}$

§4049

$\omega = u(x,y)\,v(x,y)$, функции u и v заданы неявно:

$$\begin{cases} u+v^2=x \\ u^2-v^3=y \end{cases}, \quad u(3;3)=2,\ v(3;3)=1$$

Отображение $F: (x;y)\to(u,v)$

$F_1(x,y,u,v) = -x+u+v^2$

$F_2(x,y,u,v) = -y+u^2-v^3$

$F_1(3;3;2;1) = F_2(3;3;2;1) = 0$

$\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} 1 & 2v \\ 2u & -3v^2 \end{vmatrix} = -3v^2-4uv = -3-8=-11\neq 0$ $\Rightarrow$

$F_1, F_2 \in C^2(3,3,2,1)$

$\Rightarrow F \Leftrightarrow \begin{cases} u=u(x,y) \\ v=v(x,y) \end{cases}$, где $u,v\in C^2$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\, u'_x, u'_y, u''_{xy}, v'_x, v'_y, v''_{xy}$

$\frac{\partial}{\partial x}: \begin{cases} u'_x+2vv'_x=1 \\ 2uu'_x-3v^2v'_x=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'_x+2v'_x=1 \\ 4u'_x-3v'_x=0 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow u'_x(3;3)=\frac{3}{11}$, $v'_x(3;3)=\frac{4}{11}$.

$\frac{\partial}{\partial y}: \begin{cases} u'_y+2vv'_y=0 \\ 2uu'_y-3v^2v'_y=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'_y+2v'_y=0 \\ 4u'_y-3v'_y=1 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow u'_y(3;3)=\frac{2}{11}$, $v'_y(3;3)=-\frac{1}{11}$

$$\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}: \begin{cases} u''_{xy}+2v'_y v'_x+2vv''_{xy}=0 \\ 2u'_y u'_x+2uu''_{xy}-3\cdot 2vv'_y\cdot v'_x-3v^2v''_{xy}=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u''_{xy}+2v''_{xy}=\frac{8}{121} \\ 4u''_{xy}-3v''_{xy}=-\frac{12}{121}-\frac{24}{121}=-\frac{36}{121} \end{cases}$$

$$11u''_{xy}=\frac{24}{121}-\frac{36\cdot 2}{121}=-\frac{48}{121} \Rightarrow u''_{xy}=-\frac{48}{1331}$$

$$2v''_{xy}=\frac{8}{121}+\frac{48}{121\cdot 11}=\frac{136}{1331} \Rightarrow v''_{xy}=\frac{68}{1331}$$

$$\frac{\partial^2 \omega(3,3)}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)(3,3)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\omega}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial\omega}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)(3;3)=$$

$$=\frac{\partial}{\partial y}\left(vu'_x+uv'_x\right)(3;3)=\left(v'_yu'_x+vu''_{xy}+u'_yv'_x+uv''_{xy}\right)=$$

$$=-\frac{1}{11}\cdot\frac{3}{11}-\frac{48}{1331}+2\cdot\frac{68}{1331}+\frac{2}{11}\cdot\frac{4}{11}=\frac{5}{121}+\frac{8}{121}=\frac{13}{121}$$

<u>**Ответ**</u>: $\frac{\partial^2\omega}{\partial x\partial y}(3;3)=\frac{13}{121}$.

<u>§4.052(1)</u>

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\ u=x-at,\ v=x+at$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial x}=1,\quad \frac{\partial u}{\partial t}=-a,\quad \frac{\partial v}{\partial t}=a$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\frac{\partial v}{\partial x}=$$

$$=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\partial z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial t}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t}=-a\frac{\partial z}{\partial u}+a\frac{\partial z}{\partial v}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)=\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)\frac{\partial v}{\partial t}=$$

$$=-a\left(-a\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+a\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\right)+a\left(-a\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+a\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right)=$$

$$=a^2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}-2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right)$$

Подставляем:

$$a^2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}-2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right)=a^2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0$$

<u>Ответ</u>: $\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0.$

III. Экстремумы функций многих переменных

§5 №21(4)

Найти условные экстремумы:

$u = 2x^2 + 12xy + y^2, \quad x^2 + 4y^2 = 25.$

$L = 2x^2 + 12xy + y^2 + \lambda(x^2 + 4y^2 - 25)$

$L'_x = 4x + 12y + 2\lambda x = 0 \qquad (1)$

$L'_y = 12x + 2y + 8\lambda y = 0 \qquad (2)$

$x^2 + 4y^2 = 25 \qquad (3)$

$(1) \Rightarrow y = -\frac{1}{6}(2+\lambda)x$

Подставляем в (2):

$12x - \frac{1}{3}(2+\lambda)x - 8\lambda \cdot \frac{1}{6}(2+\lambda)x = 0$

$x = 0 \ (\Rightarrow y = 0)$ не подходит в уравнении (3)

$36 - (2+\lambda) - 4\lambda(2+\lambda) = 0$

$4\lambda^2 + 9\lambda - 34 = 0$

$\lambda = \frac{-9 \pm 25}{8} = -\frac{17}{4};\ 2$

1) $y = -\frac{1}{6}\left(2 - \frac{17}{4}\right)x = \frac{1}{6} \cdot \frac{9}{4}x = \frac{3}{8}x$. Подставляем в (3):

$x^2 + 4 \cdot \frac{9}{64}x^2 = 25$

$\frac{25}{16}x^2 = 25 \Rightarrow x = \pm 4,\ y = \pm\frac{3}{2}$

2) $y = -\frac{1}{6}\cdot 4x = -\frac{2}{3}x$. Подставляем в (3):

$x^2 + 4\cdot\frac{4}{9}x^2 = 25 \Rightarrow x = \pm 3,\ y = \mp 2$

$\cancel{dL = 4xdx + 12xdy + 12ydx}$

$dL = (4x + 12y + 2\lambda x)dx + (12x + 2y + 8\lambda y)dy$

$\cancel{(x,y) = (4; \tfrac{3}{2}),\ \lambda = -\tfrac{17}{4}}$

$\cancel{dL = (16 + 18 - \tfrac{17}{4}\cdot 2\cdot 4)dx + (48 + 3 - 8\cdot\tfrac{17}{4}\cdot\tfrac{3}{2})dy} =$

$=$

$d^2L = 4dx^2 + 12dxdy + 2\lambda dx^2 + 12dxdy + 2dy^2 + 8\lambda dy^2 =$

$= (4 + 2\lambda)dx^2 + 24dxdy + (2 + 8\lambda)dy^2$

$\cancel{B = \begin{Vmatrix} 4+2\lambda & 12 \\ 12 & 2+8\lambda \end{Vmatrix},\ \Delta_1 = 4 + 2\lambda,\ \Delta_2 = 8 + 4\lambda + 32\lambda + 16\lambda^2 - 144 =}$

$\cancel{= 4(4\lambda^2 + 9\lambda - 34)}$

$\cancel{\lambda = -\tfrac{17}{4}:\ \Delta_1 = 4 - \tfrac{17}{2} < 0,\ \Delta_2 = 4\left(4\cdot\tfrac{17^2}{16} - \tfrac{9\cdot 17}{4} - 34\right) =}$

$\cancel{= 17(17 - 9) - 34\cdot 4 = 4(34 - 34) = 0}$

$\lambda = -\frac{17}{4}:\ d^2L = -\frac{9}{2}dx^2 + 24dxdy - 32dy^2 =$

$= -\frac{1}{2}(3dx - 8dy)^2 < 0 \Rightarrow (\pm 4; \pm\frac{3}{2})$ — точки максимума

$\lambda = 2:\ d^2L = 8dx^2 + 24dxdy + 18dy^2 = 2(2dx + 3dy)^2 > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (\pm 3; \mp 2)$ — точки минимума.

$U(\pm 4; \pm\frac{3}{2}) = \frac{425}{4},\ U(\pm 3; \mp 2) = -50$

Ответ: минимум $u(\pm 3; \mp 2) = -50$

максимум $u(\pm 4; \pm \frac{3}{2}) = \frac{425}{4}$.

§5 №25(2)

Найти условные экстремумы:

$u = xy^2z^3$, $x+y+z=12$, $x>0, y>0, z>0$

$L = xy^2z^3 + \lambda(x+y+z-12)$

$L'_x = y^2z^3+\lambda = 0$ (1)

$L'_y = 2xyz^3+\lambda=0$ (2)

$L'_y = 3xy^2z^2+\lambda=0$ (3)

Из (2) $\Rightarrow x = \frac{-\lambda}{2yz^3}$. Подставляем в (3):

$-3\cdot\frac{\lambda}{2yz^3}\cdot y^2z^2+\lambda=0$

$y=\frac{2}{3}z$. Подставляем в (1):

$\frac{2^2}{3^2}z^5 = -\lambda \Rightarrow z = -\frac{3^{2/5}}{2^{2/5}}\lambda^{1/5}$.

$y = \frac{2}{3} z = -\frac{2^{3/5}}{3^{3/5}}\lambda^{1/5}$

$x = -\frac{\lambda}{2}\cdot\frac{3^{3/5}}{2^{3/5}}\cdot\frac{1}{\lambda^{1/5}}\cdot\frac{2^{6/5}}{3^{6/5}}\cdot\frac{1}{\lambda^{3/5}} = -\frac{1}{2^{2/5}\cdot 3^{3/5}}\lambda^{1/5}$

Подставляем в условие:

$-\lambda^{1/5}\left(\frac{1}{2^{2/5}\cdot 3^{3/5}}+\frac{2^{3/5}}{3^{3/5}}+\frac{3^{2/5}}{2^{2/5}}\right)=12$

$-\lambda^{1/5}\cdot\frac{1+2+3}{2^{2/5}\cdot 3^{3/5}} = 12 \Rightarrow \lambda^{1/5} = -2^{7/5}\cdot 3^{3/5}$.

Критическая точка: $x=2, y=4, z=6$.

$$dL = (y^2z^3+\lambda)dx + (2xyz^3+\lambda)dy + (3xy^2z^2+\lambda)dz$$

$$d^2L = (2yz^3dy + 3y^2z^2dz)dx + (2yz^3dx + 2xz^3dy + 6xyz^2dz)dy +$$

$$+ (3y^2z^2dx + 6xyz^2dy + 6xy^2zdz)dz =$$

$$= 4yz^3dxdy + 6y^2z^2dxdz + 12xyz^2dydz + 2xz^3dy^2 +$$

$$+ 6xy^2zdz^2$$

$$d^2L(2,4,6) = 2^5\cdot 3^2(12dxdy + 12dxdz + 12dydz + 3dy^2 + dz^2)$$

Из условия: $dx = -dy - dz$:

$$d^2L(2,4,6) = 2^5\cdot 3^2(-9dy^2 - 12dydz - 11dz^2) =$$

$$= -2^5\cdot 3^2((3dy+2dz)^2 + 7dz^2)$$

$d^2L(2,4,6) = 0$ при $dz = 3dy + 2dz = 0 \Rightarrow dx = dy = dz = 0$.

Значит d^2L - отрицательно определена в точке $(2,4,6) \Rightarrow$ $2,4,6$ является точкой минимума.

Ответ: $(2;4;6)$ - точка минимума.

§5 № 26 (1)

$u = xyz$, при $x+y-z=3$, $x-y-z=8$

Найти экстремумы

$$L = xyz + \lambda_1(x+y-z-3) + \lambda_2(x-y-z-8)$$

$$\begin{cases} L'_x = yz + \lambda_1 + \lambda_2 = 0 & (1) \\ L'_y = xz + \lambda_1 - \lambda_2 = 0 & (2) \\ L'_z = xy - \lambda_1 - \lambda_2 = 0 & (3) \\ L'_{\lambda_1} = x + y - z - 3 = 0 & (4) \\ L'_{\lambda_2} = x - y - z - 8 = 0 & (5) \end{cases}$$

Вычитаем (5) из (4): $2y = -5 \Rightarrow y = -\frac{5}{2}$.

Складываем (1) и (2): $y(x+z) = 0 \Rightarrow x = -z$

Складываем (4) и (5): $2x - 2z = 11 \Rightarrow z = -\frac{11}{4}$, $x = \frac{11}{4}$.

Критическая точка: $\left(\frac{11}{4}, -\frac{5}{2}, -\frac{11}{4}\right) = P$

$d^2L = L''_{xx}dx^2 + L''_{yy}dy^2 + L''_{zz}dz^2 + 2L''_{xy}dxdy + 2L''_{xz}dxdz + 2L''_{yz}dydz = 2z\,dxdy + 2y\,dxdz + 2x\,dydz$

Ограничение на T_PM, где $M = \begin{cases} x + y - z = 3 \\ x - y - z = 8 \end{cases}$:

$$\begin{cases} dx + dy - dz = 0 \\ dx - dy - dz = 0 \end{cases} \Rightarrow dy = 0,\ dx = dz,\ \text{тогда}$$

$d^2L(P)\big|_{T_PM} = 2\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)dx^2 < 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ P – точка условного максимума

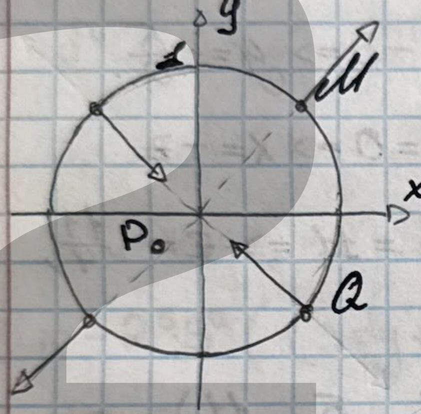
Ответ: $\left(\frac{11}{4}; -\frac{5}{4}; -\frac{11}{4}\right)$ – точка максимума.

§5.30 (1)

Найти максимум и минимум u на множестве:

$u = 3 + 2xy$

а) $M = \{x^2 + y^2 \leq 1\}$



Пусть $P \in M^\circ$, P - точка экстремума

$du = 2x\,dy + 2y\,dx$

$du = 0$ при $x = y = 0$

$d^2u = 4\,dx\,dy$ - неопределённая $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ не является экстремумом $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ внутри нет экстремумов

Пусть $Q \in \partial M$, Q - экстремум.

$L = 3 + 2xy + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$

$L'_x = 2y + 2\lambda x = 0 \quad (1)$

$L'_y = 2x + 2\lambda y = 0 \quad (2)$

$L'_\lambda = x^2 + y^2 - 1 = 0 \quad (3)$

$(1) \Rightarrow y = -\lambda x$. Подставляем в (2): $x - \lambda^2 x = 0$

$x = 0 \Rightarrow y = 0$ - не подходит.

$\lambda = \pm 1$.

Подставляя в (3) находим критические точки: $\left(\pm\frac{1}{\sqrt2}; \pm\frac{1}{\sqrt2}\right)$ и $\left(\pm\frac{1}{\sqrt2}; \mp\frac{1}{\sqrt2}\right)$

$\cancel{u\left(\pm\frac{1}{\sqrt2}; \pm\frac{1}{\sqrt2}\right) =}$

$$\operatorname{grad} u = \begin{Vmatrix} 2y \\ 2x \end{Vmatrix}$$

В точках $\left(\pm\frac{1}{\sqrt2}; \pm\frac{1}{\sqrt2}\right)$ grad$u$ направлен перпендикулярно $\{x^2+y^2=1\}$ наружу, а в точках $\left(\pm\frac{1}{\sqrt2}; \mp\frac{1}{\sqrt2}\right)$ – внутрь

$$d^2L = 2\lambda dx^2 + 4dxdy + 2\lambda dy^2 \cancel{= 2\lambda(dx\pm dy)^2}$$

В $\left(\pm\frac{1}{\sqrt2}; \pm\frac{1}{\sqrt2}\right)$: $\lambda = -1$, $d^2L = -2(dx-dy)^2$

Ограничение на T_pM: $2xdx+2ydy=0 \Rightarrow dx+dy=0 \Rightarrow$

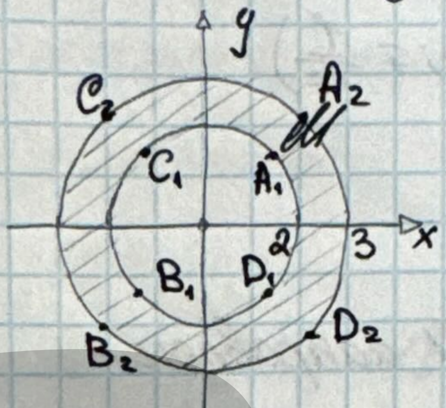
$\Rightarrow d^2L<0 \Rightarrow \left(\pm\frac{1}{\sqrt2}; \pm\frac{1}{\sqrt2}\right)$ являются точками ~~минимума~~ максимума на $\{x^2+y^2-1=0\}$, а из направления grad$u$ следует, что они являются точками максимума на $\{x^2+y^2\le1\}$.

$$u_{max} = 3+2\cdot\frac{1}{2} = 4$$

Аналогично точки $\left(\pm\frac{1}{\sqrt2}; \mp\frac{1}{\sqrt2}\right)$ являются точками минимума:

$$u_{min} = 3-2\cdot\frac{1}{2} = 2.$$

б) $M = \{4 \le x^2+y^2 \le 9\}$



Аналогично пункту а) внутри M° нет ~~точек макс~~ экстремумов.

На границе ∂M: $A_1 = (\sqrt{2}; \sqrt{2})$, $A_2 = \left(\frac{3}{\sqrt{2}}; \frac{3}{\sqrt{2}}\right)$, $B_1 = (-\sqrt{2}; -\sqrt{2})$, $B_2 = \left(-\frac{3}{\sqrt{2}}; -\frac{3}{\sqrt{2}}\right)$ – точки условного максимума.

$C_1 = (-\sqrt{2}; \sqrt{2})$, $C_2 = \left(-\frac{3}{\sqrt{2}}; \frac{3}{\sqrt{2}}\right)$, $D_1 = (\sqrt{2}; -\sqrt{2})$, $D_2 = \left(\frac{3}{\sqrt{2}}; -\frac{3}{\sqrt{2}}\right)$ – точки условного минимума, при этом grad u направлен так же, но тогда A_1 и B_1 являются точками максимума на границе, но в них grad u направлен внутрь M° => не являются точками максимума. Аналогично C_1 и D_1.

$u_{max} = u(A_2) = u(B_2) = 3 + 2 \cdot \frac{9}{2} = 12$

$u_{min} = u(C_2) = u(D_2) = 3 - 2 \cdot \frac{9}{2} = -6$

Ответ: а) $u_{max} = 4$, $u_{min} = 2$; б) $u_{max} = 12$, $u_{min} = -6$

§5 №27

Найти условные экстремумы:

1) $u=\sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i^2$, при $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 1$, $a_i>0$

$L=\sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i^2 + \lambda\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i - 1\right)$

$L'_{x_i} = 2a_i x_i + \lambda = 0 \Rightarrow x_i = \dfrac{-\lambda}{2a_i}$

Условие: $\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{-\lambda}{2a_i}\right) = 1 \Rightarrow \lambda = \dfrac{-2}{\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}}$

Критическая точка: $x_i = \dfrac{1}{a_i\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}}$

$d^2L = \sum\limits_{i=1}^{n} 2a_i dx_i^2$ – положительно определена $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ точка локального ~~максимума~~ минимума. $u=\dfrac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}}$

2) $u=\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2$ при $\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{x_i}{a_i} = 1$, $a_i>0$

$L=\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + \lambda\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{x_i}{a_i} - 1\right)$

$L'_{x_i} = 2x_i + \dfrac{\lambda}{a_i} = 0 \Rightarrow x_i = -\dfrac{\lambda}{2a_i}$

Условие: $\sum\limits_{i=1}^{n}\left(-\dfrac{\lambda}{2a_i^2}\right) = 1 \Rightarrow \lambda = -\dfrac{2}{\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i^2}}$

Критическая точка: $x_i = \dfrac{1}{a_i\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i^2}}$

$d^2L = \sum\limits_{i=1}^{n} 2dx_i^2$ – положительно определена $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ точка ~~максимума~~ минимума. $u=\dfrac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i^2}}$

3) $U = \sum_{i=1}^{n} x_i^{\alpha}$, при $\sum_{i=1}^{n} x_i = a$, $\alpha > 0, a > 0$

При $\alpha = 1$: $U = \sum_{i=1}^{n} x_i = a$ (далее $\alpha = 1$ не рассматриваетс

$L = \sum_{i=1}^{n} x_i^{\alpha} + \lambda \left(\sum_{i=1}^{n} x_i - a \right)$

$L'_{x_i} = \alpha x_i^{\alpha-1} + \lambda = 0 \Rightarrow x_i = \left(\frac{-\lambda}{\alpha} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}}$

Условие: $n \cdot \left(\frac{-\lambda}{\alpha} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}} = a \Rightarrow x_i = \frac{a}{n}$

$d^2L = \sum_{i=1}^{n} \alpha(\alpha-1) x_i^{\alpha-2} dx_i^2 = \alpha(\alpha-1) \left(\frac{a}{n} \right)^{\alpha-2} \sum_{i=1}^{n} dx_i^2$

d^2L положительно определена при $\alpha > 1$ и

отрицательно определена при $\alpha < 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ минимум при $\alpha > 1$, максимум при $\alpha < 1$.

4) $U = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{x_i}$ при $\sum_{i=1}^{n} b_i x_i = 1$, $a_i > 0, b_i > 0, x_i > 0$

$L = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{x_i} + \lambda \left(\sum_{i=1}^{n} b_i x_i - 1 \right)$

$L'_{x_i} = -\frac{a_i}{x_i^2} + \lambda b_i \Rightarrow x_i^2 = \frac{a_i}{\lambda b_i}$

Условие: $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sqrt{a_i b_i} = 1 \Rightarrow \lambda = \left(\sum_{i=1}^{n} \sqrt{a_i b_i} \right)^2$

$$x_i = \frac{\sqrt{a_i}}{\sqrt{b_i} \sum_{j=1}^{n} \sqrt{a_j b_j}}$$

$d^2L = \sum_{i=1}^{n} \frac{2a_i}{x_i^3} dx_i^2$ – положительно определена (т.к. $x_i > 0$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ точка минимума.

$$U = \left(\sum_{j=1}^{n} \sqrt{a_j b_j} \right)^2$$

5) $u=\prod\limits_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i}$ при $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = a$, $\alpha_i>0$, $a>0$

$$L=\prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i} + \lambda\left(\sum_{i=1}^{n} x_i - a\right)$$

$$L'_{x_i} = \frac{\alpha_i}{x_i}\prod_{j=1}^{n} x_j^{\alpha_j} + \lambda = \frac{\alpha_i u}{x_i} + \lambda = 0 \Rightarrow x_i = -\frac{\alpha_i u}{\lambda}$$

Условие: $-\dfrac{u}{\lambda}\sum\limits_{j=1}^{n}\alpha_j = a \Rightarrow \lambda = -\dfrac{u\sum\limits_{j=1}^{n}\alpha_j}{a}$

Критическая точка: $x_i = \dfrac{-\alpha_i u\cdot a}{-u\sum\limits_{j=1}^{n}\alpha_j} = \dfrac{a\alpha_i}{\sum\limits_{j=1}^{n}\alpha_j}$

~~$d^2 L$ при $i=j$~~

$$L''_{x_i x_i} = \frac{-\alpha_i}{x_i^2}u + \left(\frac{\alpha_i}{x_i}\right)^2 u = \frac{\alpha_i^2-\alpha_i}{x_i^2}u = \frac{\alpha_i^2-\alpha_i}{a^2\alpha_i^2}\left(\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\right)^2 u$$

$$L''_{x_i x_j} = \frac{\alpha_i}{x_i}\cdot\frac{\alpha_j}{x_j}u = \frac{\alpha_i\alpha_j u}{a^2\alpha_i\alpha_j}\left(\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\right)^2$$

~~$L''_{x_i x_i}$~~

Обозначим $b = \dfrac{u\left(\sum\limits_{j=1}^{n}\alpha_j\right)^2}{a^2} > 0$, тогда

$$L''_{x_i x_j} = \begin{cases}\left(1-\frac{1}{\alpha_i}\right)b & \text{при } i=j\\ b & \text{при } i\neq j\end{cases}$$

$$\frac{d^2L}{b} = \sum_{i=1}^{n}\frac{L''_{x_i x_i}}{b}dx_i^2 + 2\sum_{1\le i<j\le n}\frac{L''_{x_i x_j}}{b}dx_i dx_j =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} dx_i^2 - \sum_{i=1}^{n}\frac{dx_i^2}{\alpha_i} + 2\sum_{1\le i<j\le n} dx_i dx_j = \left(\sum_{i=1}^{n} dx_i\right)^2 - \sum_{i=1}^{n}\frac{dx_i^2}{\alpha_i} =$$

$= \{$ ~~условие~~ ограничение на ТрМ $\} = -\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{dx_i^2}{\alpha_i} \Rightarrow$

$\Rightarrow d^2L$ отрицательно определена $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ точка максимума.

б) $U=\sum_{i=1}^{n} a_i x_i$ при $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1$

$$L=\sum_{i=1}^{n} a_i x_i + \lambda\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 1\right)$$

$$L'_{x_i} = a_i + 2\lambda x_i = 0$$

Если $\lambda = 0 \Rightarrow a_i = 0$ для всех $i \Rightarrow U = 0$ (далее не рассматривается)

Иначе:

$x_i = -\dfrac{a_i}{2\lambda}$. Подставляем в условие:

$$\frac{1}{4\lambda^2}\sum_{j=1}^{n} a_j^2 = 1 \Rightarrow \lambda = \pm\frac{1}{2}\sqrt{\sum_{j=1}^{n} a_j^2},\quad x_i = \mp\frac{a_i}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n} a_j^2}}$$

$$L''_{x_i x_j} = \begin{cases} 2\lambda & \text{при } i=j \\ 0 & \text{при } i\neq j \end{cases} \Rightarrow d^2L = \pm\sum_{i=1}^{n} 2\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\sum_{j=1}^{n} a_j^2}\, dx_i^2 =$$

$$= \pm\sqrt{\sum_{j=1}^{n} a_j^2}\ \sum_{i=1}^{n} dx_i^2$$

d^2L отрицательно определена при $\lambda<0$ (максимум) и положительно определена при $\lambda>0$ (минимум)

$$U = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \frac{\mp a_i}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n} a_j^2}} = \mp\sqrt{\sum_{j=1}^{n} a_j^2}$$

<u>Ответ</u>: 1) Минимум $x_i = \dfrac{1}{a_i \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{a_j}}$; $U = \dfrac{1}{\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{a_j}}$

2) Минимум $x_i = \dfrac{1}{a_i \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{a_j^2}}$; $U = \dfrac{1}{\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{a_j^2}}$

3) Минимум при $\alpha>1$: $x_i=\frac{a}{n}$, $U=\frac{a^\alpha}{n^{\alpha-1}}$

Максимум при $\alpha<1$: $x_i=\frac{a}{n}$, $U=a^\alpha n^{1-\alpha}$

$U=const=a$ при $\alpha=1$

4) Минимум $x_i=\frac{1}{\sum\limits_{j=1}^{n}\sqrt{a_j b_j}}\sqrt{\frac{a_i}{b_i}}$; $U=\left(\sum\limits_{j=1}^{n}\sqrt{a_j b_j}\right)^2$

5) Максимум $x_i=\frac{a\alpha_i}{\sum\limits_{j=1}^{n}\alpha_j}$; $U=\left(\frac{a}{\sum\limits_{j=1}^{n}\alpha_j}\right)^{\sum\limits_{j=1}^{n}\alpha_j}\cdot\prod\limits_{i=1}^{n}\alpha_i^{\alpha_i}$

6) Максимум $x_i=\frac{a_i}{\sqrt{\sum\limits_{j=1}^{n}a_j^2}}$; $U=\sqrt{\sum\limits_{j=1}^{n}a_j^2}$

Минимум $x_i=-\frac{a_i}{\sqrt{\sum\limits_{j=1}^{n}a_j^2}}$; $U=-\sqrt{\sum\limits_{j=1}^{n}a_j^2}$

§5 №36

$U=\sum\limits_{i,k=1}^{n}a_{ik}x_ix_k$, $a_{ik}=a_{ki}$ при $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2=1$.

Док-ть, что U_{max} и U_{min} равны наибольшему и наименьшему корням характеристического многочлена $A=\|a_{ik}\|$

$$L=\underbrace{\sum_{i,k=1}^{n}a_{ik}x_ix_k}_{i=k,\ i\neq k}\mp\lambda\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2-1\right)$$

$$L'_{x_j}=2a_{jj}x_j+2\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}a_{kj}x_k\mp2\lambda x_j=0$$

В методе Лагранжа получаем систему:

$$\begin{cases}\sum\limits_{k=1}^{n}a_{kj}x_k-2\lambda x_j=0\\ j=\overline{1\ldots n}\end{cases}$$

Матрица этой системы равна $A-\lambda E$, а ненулевые решения (которые не подходят из условия $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1$) существуют, когда $\det(A-\lambda E)=0$, то есть λ являются собственными значениями матрицы A.

При этом $\forall j: \sum_{k=1}^{n} a_{kj} x_k = \lambda x_j \Rightarrow$

$\Rightarrow U = \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{k=1}^{n} a_{ki} x_k = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \lambda x_i = \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \lambda \Rightarrow$

$\Rightarrow$ в критических точках значение U совпадает с λ.

Таким образом доказано, что если точка P является ~~минимумом или максимумом~~ критической при $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1$, то λ есть корень характеристического многочлена A (а также в обратную сторону) и $U(P)=\lambda \Rightarrow$ Максимальное и минимальное значение U совпадают с максимальным и минимальным корнями характеристического уравнения матрицы $\| a_{ik} \|$

IV Кратные интегралы

§8 Д23

Указать f, непрерывную на измеримом по Жордану X, но не интегрируемую на X.

Достаточное условие ~~непрерыв~~ интегрируемости:

Ограниченная на замкнутом измеримом множестве функция, у которой множество точек разрыва имеет меру 0 интегрируема на этом множестве.

Выберем множество X незамкнутым, а f неограниченной. Пусть $X=(0;1]\subset\mathbb{R}$, а $f=\frac{1}{x}$, тогда X-измеримо по Жордану, $f\in C(X)$

Критерий Коши интегрируемости:

$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall\tau_1,\tau_2\ \ \forall\theta_{\tau_1},\theta_{\tau_2}: (|\tau_1|<\delta, |\tau_2|<\delta \Rightarrow$
$\Rightarrow |\sigma_{\tau_1}-\sigma_{\tau_2}|<\varepsilon)$

Отрицание:

$\exists\varepsilon>0\ \forall\delta>0\ \exists\tau_1,\tau_2: \exists\theta_{\tau_1},\theta_{\tau_2}: (|\tau_1|, |\tau_2|<\delta\ \&\ |\sigma_{\tau_1}-\sigma_{\tau_2}|\geq\varepsilon)$

Рассмотрим (выберем) $\varepsilon = 1$.

Фиксируем произвольный $\delta > 0$.

При $\delta \geq \frac{1}{2}$:

Выберем $\tau_1 = \{[0;\frac{1}{2}], [\frac{1}{2};1]\} = \tau_2$

$\Theta_{\tau_1} = \{\frac{1}{4}; 1\}$, $\Theta_{\tau_2} = \{\frac{1}{16}; 1\}$

Тогда $|\tau_1|, |\tau_2| = \frac{1}{2} \leq \delta$

При этом $|\sigma_{\tau_1} - \sigma_{\tau_2}| = |(4 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2}) - (16 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2})| =$

$= 6 > 1 = \varepsilon$

При $\delta < \frac{1}{2}$:

Разобьём $[0;1]$ на отрезки $[0;\delta], \dots [(k-1)\delta, k\delta]$, $[k\delta;1]$, при этом k - такое что $(k+1)\delta \geq 1$.

Точки ξ_{1i} и ξ_{2i} при $i > 1$ выберем произвольно одинаково на соответствующих отрезках.

$\xi_{11} = \delta \quad \xi_{21} = \delta^2$

Тогда $|\tau_1|, |\tau_2| \leq \delta$, при этом

$|\sigma_{\tau_1} - \sigma_{\tau_2}| = \delta \left|\frac{1}{\delta} - \frac{1}{\delta^2}\right| = \frac{1}{\delta} - 1 > 1 = \varepsilon$

Таким образом, f - неинтегрируема на X (по критерию Коши)

§ 8.33

Указать $X: \mu X > 0$ и f, определённую и неограниченную на X, но интегрируемую на X.

Пусть $X = [-1;0] \cup \left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \{\frac{1}{n}\}\right)$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -1 \le x \le 0 \\ n, & x = \frac{1}{n} \end{cases}$$

Тогда X - измеримо (т.к. $[-1;0]$ - измеримо, $\mu([-1;0]) = 1$, $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\{\frac{1}{n}\}$ - измеримо, $\mu(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\{\frac{1}{n}\}) = 0$),

$\mu X = 1$

f - неограничена на X.

Докажем интегрируемость по определению:

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall \tau: |\tau| < \delta \ \exists \theta_\tau: |\sigma_\tau - I| < \varepsilon$

Фиксируем произвольный $\varepsilon > 0$

Выберем $\delta = 4$ (в этом примере $\sigma_\tau = 0$ всегда)

Фиксируем произвольное разбиение τ мн-ва X.

Пусть τ_1 - множество всех множеств разбиения τ, которые целиком состоят из точек с $x > 0$, τ_2 - все остальное.

Выберем θ_τ: выбор ξ на множествах из τ_1 - неважен, на множествах из τ_2 выберем $\xi: f(\xi) = 0$

Тогда $\sigma_T = \sum\limits_{X_i\in T_1} f(\xi_i)\underbrace{\mu X_i}_{0} + \sum\limits_{X_i\in T_2} f(\xi_i)\mu X_i = 0 < \varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow f$-интегрируема на X и $\int\limits_X f(x)dx = 0$.

§8 №34

~~Указать мн-ва X_1 и X_2: $\mu X_1, \mu X_2 > 0$, $X_1 \cap X_2 = \varnothing$ и f, интегрируемую на X_1 и X_2, но неинтегрируемую на $X = X_1 \cup X_2$.~~

~~Рассмотрим свойство кратного интеграла: X_1, X_2 - измеримые, $\mu(X_1 \cap X_2) = 0$, тогда для интегрируемости f по $X = X_1 \cup X_2$ необходимо, а при ограниченности f достаточно, чтобы f была интегрируема на X_1 и на X_2.~~

~~Чтобы удовлетворить условию будем искать неограниченную f.~~

~~Пусть $X_1 = [-1;0]$, $X_2 = (0;1]$~~

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in X_1 \\ \frac{1}{6x}, & x \in X_2. \end{cases}$$

1) Докажем интегрируемость на X_2

§8.36 (1, 2)

1) Указать измеримое X и f, такую, что

$|f|$ интегрируема на X, а f - неинтегрируема на X

Пусть $X = [0;1]$, $f(x) = \begin{cases} -1, & \text{~~при~~ если } x \text{ - иррациональное} \\ 1, & \text{если } x \text{ - рациональное} \end{cases}$

$|f(x)| \equiv 1$ - интегрируема

Рассмотрим некоторое разбиение τ мн-ва X.

В любом измеримом множестве есть

как рациональные, так и иррациональные

числа, тогда

$$\sum_{i=1}^{N} \omega(f, X_i) \mu X_i = \sum_{i=1}^{N} 2 \cdot \mu X_i = 2 \not\to 0 \text{ при } |\tau| \to 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ функция не является интегрируемой

по критерию Дарбу.

2) Указать $X: \mu X > 0$ и f неограниченную и

интегрируемую на X, такую что $|f|$

интегрируема на X и $\left| \int\limits_X f(x)dx \right| \leq \int\limits_X |f(x)|dx$

В задаче §8.33 приведён пример функции

неограниченной и интегрируемой на X:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-1;0] \\ n, & x = \frac{1}{n} \end{cases}, \quad X = [-1;0] \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{n} \right\} \right), \quad \int\limits_X f(x)dx = 0$$

$f(x) \geq 0 \Rightarrow |f(x)| = f(x) \Rightarrow \int\limits_X |f(x)|dx = 0$ (подходит)

16

$f=f(x,y)$ – определена на $P=[a;b]\times[c;d]$

а) Верно ли, что если $f(x,y)$ интегрируема на $[c;d]$ (y – переменная, x – фиксирован) и $I(x)=\int\limits_c^d f(x,y)\,dy$ – интегрируема на $[a;b]$, то f интегрируема на P?

Рассмотрим $f(x,y)=\frac{x-y}{(x+y)^3}$, $[a;b]=[c;d]=[0;1]$

(Доопределяем в $xy=0$ $f(x,y)=0$)

$$I(x)=\int\limits_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}\,dy=\left\{x+y=t,\ dy=dt\right\}=\int\limits_x^{1+x}\frac{2x-t}{t^3}\,dt=$$

$$=2x\frac{-1}{2t^2}+\frac{1}{t}\Bigg|_{0+x}^{1+x}=\frac{1}{x+y}-\frac{x}{(x+y)^2}\Bigg|_{y=0}^{y=1}=\frac{1}{(1+x)^2}$$

f – интегрируема на $[0;1]$ как функция y,

I – интегрируема на $[0;1]$

Если же взять повторный интеграл в другом порядке, то $I_1(y)=\frac{-1}{(1+y)^2}$

$$\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^1 f(x,y)\,dy=\int\limits_0^1\frac{dx}{(1+x)^2}$$

$$\int\limits_0^1 dy\int\limits_0^1 f(x,y)\,dx=-\int\limits_0^1\frac{dy}{(1+y)^2}$$

$\Rightarrow$ повторные интегралы не равны $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ f не интегрируема на P

б) Верно ли, что если f интегрируема на P, то функция $f(x,y)$ интегрируема на $[c;d]$ как функция одной переменной y при всех $x \in [a;b]$?

Рассмотрим $f(x,y) = \frac{1}{y}$, $[a;b] = \{0\}$, $[c;d] = [0;1]$

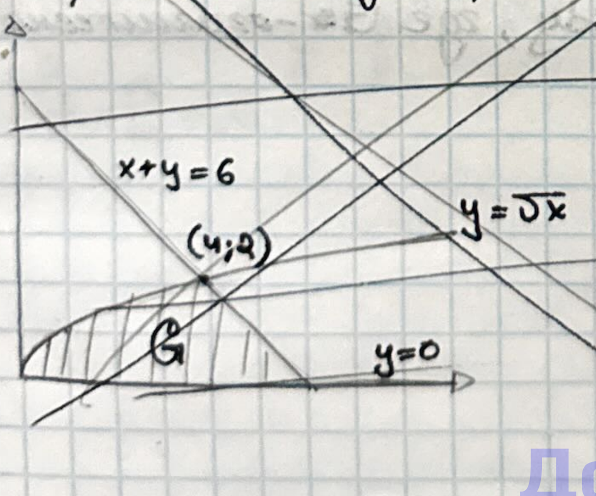
Тогда двойной интеграл существует и равен 0, так как при любом разбиении τ и выборе точек θ_τ: $\sigma_\tau = \sum_{i=1}^{N} f(\xi_i)\mu X_i =$
$= \sum_{i=1}^{N} f(\xi_i)\cdot 0 = 0$

При этом $\int_0^1 \frac{dy}{y}$ – расходится $\Rightarrow \frac{1}{y}$ не может быть ~~сходящимся~~ интегрируемой в смысле кратного интеграла Римана

<u>Ответ</u>: неверно в обоих пунктах.

~~§8.080(3)~~

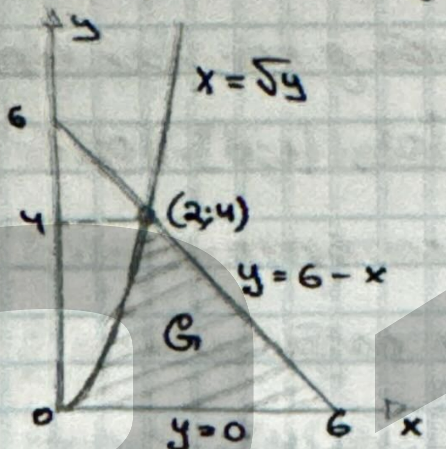
G ограничено $y=0$, $y=\sqrt{x}$, $x+y=6$



$$\iint_G f(x,y) = \int_0^2$$

§8 №80(3)

G ограничено $y=0$, $x=\sqrt{y}$, $x+y=6$



$$\iint\limits_G f(x,y)\,dx\,dy=\int_0^4 dy\int_{\sqrt{y}}^{6-y} f(x,y)\,dx=\int_0^6 dx\int_0^{\xi(x)} f(x,y)\,dy,$$

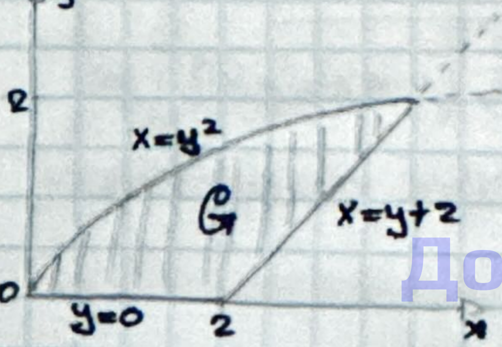
где $\xi(x)=\begin{cases} x^2 \text{ при } 0\le x\le 2\\ 6-x \text{ при } 2<x\le 6\end{cases}$

§8 №82(4)

Записать повторный интеграл в виде двойного и нарисовать мн-во интегрирования.

$$\int_0^2 dy\int_{y^2}^{y+2} f(x,y)\,dx=\iint\limits_G f(x,y)\,dx\,dy,$$ где G – ограничено

$x=y^2$, $x=y+2$ и $y=0$



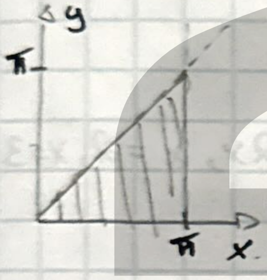
§8 №85(2)

Вычислить, поменяв порядок интегрирования.

$$\int_0^\pi dy \int_y^\pi \frac{\sin x}{x}\,dx$$

$f(x,y)=\frac{\sin x}{x}$ - ограничена

Множество, по которому происходит интегрирование: G:



Если доопределить $f(x,y)=0$ при $x=0$, то G - компакт и G - измеримо, а множество точек разрыва:

$\{0\}\times[0;\pi]\cap G=\{0\}$ - имеет меру 0,

тогда $\iint\limits_G f(x,y)\,dx\,dy$ существует и равен повторным.

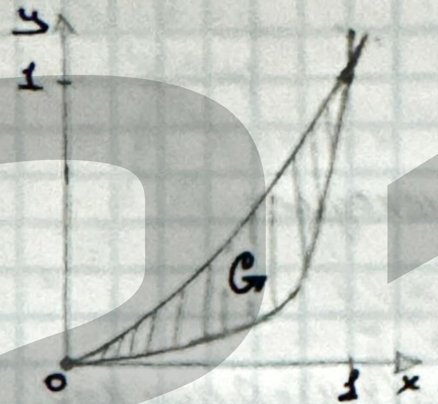
$$\int_0^\pi dy\int_y^\pi \frac{\sin x}{x}\,dx=\int_0^\pi dx\int_0^x \frac{\sin x}{x}\,dy=\int_0^\pi \frac{\sin x}{x}(x-0)\,dx=\int_0^\pi \sin x\,dx=$$

$$=-\cos x\Big|_0^\pi=2.$$

§8 №90 (а,б)

Вычислить:

а) $\iint\limits_G \frac{y}{x^2}\,dx\,dy$, $G=\{0<x,\ x^3\le y\le x^2\}$

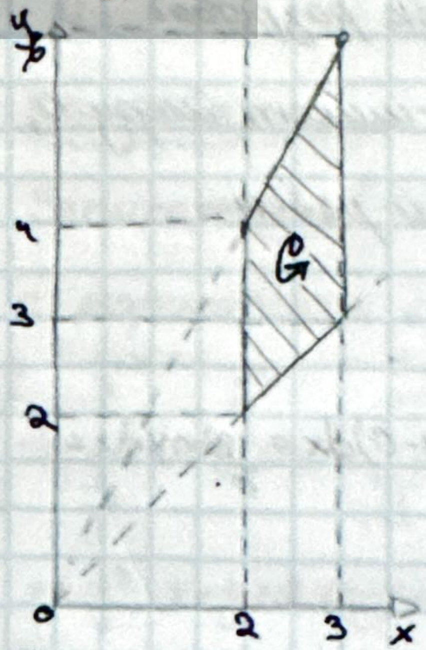


$$\iint\limits_G \frac{y}{x^2}\,dx\,dy=\int_0^1 dx\int_{x^3}^{x^2}\frac{y}{x^2}\,dy=-\int_0^1\frac{x^6-x^4}{2x^2}\,dx=$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^1 (x^4-x^2)\,dx=-\frac{1}{2}\left(\frac{x^5}{5}-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1=$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\frac{-2}{15}=+\frac{1}{15}$$

б) $\iint\limits_G (x+2y)\,dx\,dy$, G – ограничено $y=x,\ y=2x,\ x=2,\ x=3$



$$\iint\limits_G (x+2y)\,dx\,dy=\int_2^3 dx\int_x^{2x}(x+2y)\,dy=$$

$$=\int_2^3 dx\,(xy+y^2)\Big|_{y=x}^{y=2x}=\int_2^3(x\cdot 2x+4x^2-x^2-x^2)\,dx=$$

$$=\int_2^3 4x^2\,dx=\frac{4}{3}x^3\Big|_2^3=\frac{4\cdot 27}{3}-\frac{4\cdot 8}{3}=$$

$$=\frac{4\cdot 19}{3}=\frac{76}{3}$$

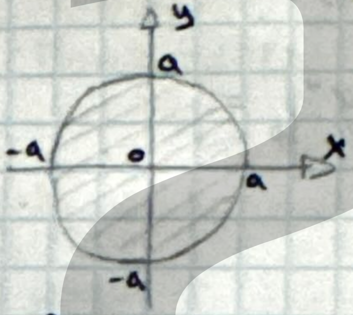
Ответ: а) $\frac{1}{15}$; б) $\frac{76}{3}$.

§8 №133 (1)

Заменить порядок интегрирования на (z, y, x):

$$I=\int_{-a}^{a}dx\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}}dy\int_{0}^{h}f(x,y,z)\,dz$$

Фиксируем $x=x_0\in[-a;a]$, тогда y меняется от $-\sqrt{a^2-x_0^2}$ до $\sqrt{a^2-x_0^2}$



Тогда при фиксированном y: x меняется от $-\sqrt{a^2-y^2}$ до $\sqrt{a^2-y^2}$

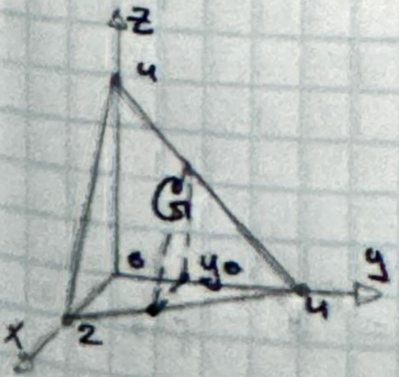
Фиксируем $y=y_0\in[-a;a]$ (т.к. $\sqrt{a^2-x^2}\in[0;a]$), тогда z меняется от 0 до h и $G_{yz}=[-a;a]\times[0;h]\Rightarrow$

$\Rightarrow$ при фиксированном z: y меняется от $-a$ до a.

Ответ: $I=\int_{0}^{h}dz\int_{-a}^{a}dy\int_{-\sqrt{a^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}}f(x,y,z)\,dx$

§8 №139 (1)

Вычислить $\iiint\limits_{G} y\,dx\,dy\,dz$, если G – пирамида, ограниченная $x=0, y=0, z=0$ и $2x+y+z=4$.



Фиксируем $y=y_0\in[0;4]$, тогда x меняется от 0 до $-\frac{1}{2}y_0+2$.

Фиксируем $x=x_0\in[0; -\frac{1}{2}y_0+2]$.

Тогда z меняется от 0 до $4-y_0-2x_0$

$$\iiint\limits_{G_1} y\,dx\,dy\,dz = \int_0^4 dy \int_0^{2-\frac{1}{2}y} dx \int_0^{4-y-2x} y\,dz =$$

$$= \int_0^4 y\,dy \int_0^{2-\frac{1}{2}y} dx\,(4-y-2x) = \int_0^4 \left(4\left(2-\tfrac{1}{2}y\right) - y\left(2-\tfrac{1}{2}y\right) -\right.$$

$$\left. - \left(2-\tfrac{1}{2}y\right)^2\right) y\,dy = \int_0^4 \left(8-2y-2y+\tfrac{1}{2}y^2-4+2y-\tfrac{1}{4}y^2\right) y\,dy =$$

$$= \int_0^4 \left(4y - 2y^2 + \tfrac{1}{4}y^3\right) dy = 2y^2 - \tfrac{2}{3}y^3 + \tfrac{1}{16}y^4 \Big|_0^4 =$$

$$= 32 - \tfrac{2}{3}\cdot 64 + 16 = \tfrac{16}{3}$$

Ответ: $\frac{16}{3}$

§8.175 (3)

Вычислить интеграл по $Q_n = [0;a]^n$, $n \geq 2$:

$$\int\limits_{Q_n} \sum_{k=1}^{n} x_k^p \, dx, \quad p \geq 0$$

$$\int\limits_{Q_n} \sum_{k=1}^{n} x_k^p \, dx = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{Q_n} x_k^p \, dx;$$

$$\int\limits_{Q_n} x_k^p \, dx = \cancel{\int_0^a dx_1 \int_0^a} \int_0^a x_k^p \, dx_k \underbrace{\int_0^a dx_1 \ldots \int_0^a dx_n}_{\text{без } \int dx_k} =$$

$$= \int_0^a x_k^p \, dx_k \cdot \int_0^a dx_1 \ldots \int_0^a dx_{n-1} \cdot a = \ldots = \int_0^a a^{n-1} x_k^p \, dx_k = a^{n-1} \cdot \frac{x_k^{p+1}}{p+1} \Big|_0^a =$$

$= a^{n-1} \cdot \frac{a^{p+1}}{p+1} = \frac{a^{n+p}}{p+1}$

Тогда $\int\limits_{Q_n} \sum\limits_{k=1}^{n} x_k^p dx = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{a^{n+p}}{p+1} = \frac{na^{n+p}}{p+1}$

<u>Ответ:</u> $\frac{na^{n+p}}{p+1}$

<u>§8 о176 (1)</u>

Вычислить $\int\limits_{\Pi} dx$, где Π – пирамида: $\Pi = \{0 \le x_n \le \ldots \le x_1 \le a\}$

x_1 меняется от 0 до a. Фиксируем $x_1 = x_1^0$,

тогда x_2 меняется от 0 до x_1, ...

Фиксируем $x_k = x_k^0$, тогда x_{k+1} меняется от 0 до x_k^0.

$$\int\limits_{\Pi} dx = \int\limits_0^a dx_1 \int\limits_0^{x_1} dx_2 \ldots \int\limits_0^{x_{n-1}} dx_n = \int\limits_0^a dx_1 \int\limits_0^{x_1} dx_2 \ldots \int\limits_0^{x_{n-2}} x_{n-1}\, dx_{n-1} =$$

$$= \int\limits_0^a dx_1 \int\limits_0^{x_1} dx_2 \ldots \int\limits_0^{x_{n-3}} \frac{x_{n-2}^2}{2} dx_{n-2} = \int\limits_0^a dx_1 \int\limits_0^{x_1} dx_2 \ldots \int\limits_0^{x_{n-4}} \frac{x_{n-3}^3}{2 \cdot 3} dx_{n-3} =$$

$$= \ldots = \frac{x_1^n}{n!} \Big|_0^a = \frac{a^n}{n!}$$

<u>Ответ:</u> $\frac{a^n}{n!}$

§8 №106 (2)

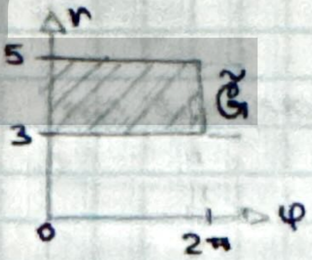
Вычислить, перейдя к полярным координатам:

$$\iint\limits_G \frac{dx\,dy}{x^2+y^2-1}, \quad \text{где } G=\{9\le x^2+y^2\le 25\}$$

$$\begin{cases} x=r\cos\varphi \\ y=r\sin\varphi \end{cases} \qquad \frac{D(x,y)}{D(r,\varphi)}=r$$

Замена переменных:

$$\iint\limits_G \frac{dx\,dy}{x^2+y^2-1}=\iint\limits_{\tilde G} \frac{r\,dr\,d\varphi}{r^2-1}, \quad \text{где } \tilde G=\{0\le\varphi<2\pi,\ 3\le r\le 5\}$$



Перейдём к повторному интегралу:

$$\iint\limits_{\tilde G} \frac{r\,dr\,d\varphi}{r^2-1}=\int_3^5 dr\int_0^{2\pi}\frac{r\,d\varphi}{r^2-1}=2\pi\int_3^5\frac{r\,dr}{r^2-1}=\pi\int_3^5\frac{2r\,dr}{r^2-1}=$$

$$=\pi\ln|r^2-1|\Big|_3^5=\pi\ln\frac{24}{8}=\pi\ln 3.$$

Ответ: $\pi\ln 3$

§ 8 №107(1)

Вычислить, перейдя к полярным координатам

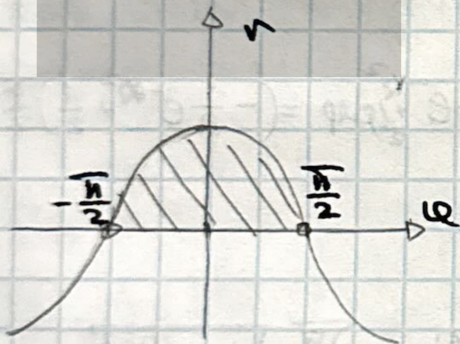
$$\iint\limits_G \frac{y^2}{x^2+y^2}\,dx\,dy, \quad G=\{x^2+y^2\le ax\},\ a>0$$

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \qquad \frac{D(x,y)}{D(r,\varphi)} = r$$

Замена переменных:

$$\iint\limits_G \frac{y^2}{x^2+y^2}\,dx\,dy = \iint\limits_{\tilde G} \frac{r^2\sin^2\varphi}{r^2}\cdot r\,dr\,d\varphi = \iint\limits_{\tilde G} \sin^2\varphi\, r\,dr\,d\varphi$$

$$\tilde G = \{r^2 \le ar\cos\varphi\} = \{r \le a\cos\varphi\}$$



Т.к. $r \geq 0$, то имеет смысл только $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

Перейдём к повторному интегралу:

$$\iint\limits_{\tilde G} r\sin^2\varphi\,dr\,d\varphi = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2\varphi\,d\varphi \int\limits_{0}^{a\cos\varphi} r\,dr = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2\varphi\cdot\frac{a^2\cos^2\varphi}{2}\,d\varphi =$$

$$= \frac{a^2}{8}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 2\varphi\,d\varphi = \frac{a^2}{8}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{1-\cos 4\varphi}{2}\,d\varphi =$$

$$= \frac{a^2}{16}\left(\varphi - \frac{1}{4}\sin 4\varphi\right)\Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{a^2}{16}\cdot\pi = \frac{\pi a^2}{16}$$

Ответ: $\frac{\pi a^2}{16}$.

§8 о110

1) Вычислить $\iint\limits_G e^{-(x^2+y^2)}dxdy$, $G=\{x^2+y^2\le R^2, x\ge 0, y\ge 0\}$

Перейдём к полярным координатам:

$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$ $\quad \frac{D(x,y)}{D(r,\varphi)} = r$

$\iint\limits_G e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \iint\limits_{\tilde G} e^{-r^2}\cdot r\,dr\,d\varphi$, $\tilde G = \{r\le R, \sin\varphi\ge 0, \cos\varphi\ge 0\} =$

$= \{r\le R, \varphi\in[0;\pi], \varphi\in[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]\} = \{r\le R, 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}]$

Перейдём к повторному интегралу:

$\iint\limits_G e^{-r^2} r\,dr\,d\varphi = \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^R re^{-r^2}dr = \int\limits_0^{\pi/2}(-\frac{1}{2}e^{-R^2}+\frac{1}{2})d\varphi = (-\frac{1}{2}e^{-R^2}+\frac{1}{2})\frac{\pi}{2} =$

$= \frac{\pi}{4}(1-e^{-R^2})$

2) Док-ть: $\frac{\sqrt{\pi}}{2}\sqrt{1-e^{-a^2}} < \int\limits_0^a e^{-x^2}dx < \frac{\sqrt{\pi}}{2}\sqrt{1-e^{-2a^2}}$

Пусть $I = \int\limits_0^a e^{-x^2}dx = \int\limits_0^a e^{-y^2}dy$

Тогда $I^2 = \int\limits_0^a e^{-x^2}dx \cdot \int\limits_0^a e^{-y^2}dy = \int\limits_0^a dy \int\limits_0^a e^{-(x^2+y^2)}dx =$

$= \iint\limits_{G_a} e^{-(x^2+y^2)}dxdy$, где $G_a = [0;a]\times[0;a]$

$\cancel{([0;a]\times[0;a]) \subset \{x^2+y^2\le a^2, x\ge 0, y\ge 0\} \subset ([0;2a}$

$\{x^2+y^2\le a^2, x\ge 0, y\ge 0\} \subset ([0;a]\times[0;a]) \subset \{x^2+y^2\le 2a^2, x\ge 0, y\ge 0\}$,

, значение $f(x,y)=e^{-(x^2+y^2)}$ положительно во всех точках рассматриваемых множеств $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ (из 1-го пункта и пользуясь свойством:

$f \geq 0$ на X и $X_1 \subset X \Rightarrow \int\limits_{X_1} f(x)\,dx \leq \int\limits_{X} f(x)\,dx$):
$\mu X_1 \leq \mu X$

$$\frac{\pi}{4}\left(1-e^{-a^2}\right) < I^2 < \frac{\pi}{4}\left(1-e^{-2a^2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{\pi}}{2}\sqrt{1-e^{-a^2}} < I < \frac{\sqrt{\pi}}{2}\sqrt{1-e^{-2a^2}}$$

3) Вычислить $I=\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$

Рассмотрим $I(a)=\int\limits_0^{a} e^{-x^2}dx$.

Как было показано в пункте 2:

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2}\sqrt{1-e^{-a^2}} < I(a) < \frac{\sqrt{\pi}}{2}\sqrt{1-e^{-2a^2}};$$

$$\lim_{a\to+\infty}\frac{\sqrt{\pi}}{2}\sqrt{1-e^{-a^2}} \leq \lim_{a\to+\infty} I(a) \leq \lim_{a\to+\infty}\frac{\sqrt{\pi}}{2}\sqrt{1-e^{-2a^2}};$$

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} \leq I \leq \frac{\sqrt{\pi}}{2} \Rightarrow \int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

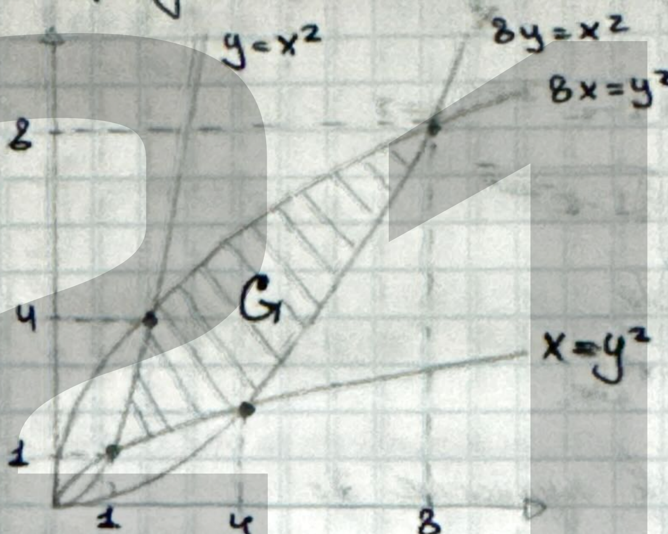
<u>Ответ</u>: 1) $\frac{\pi}{4}\left(1-e^{-R^2}\right)$; 3) $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

§8 №24(4)

Вычислить $\iint\limits_G \frac{x}{y}\,dx\,dy$, G ограничено параболами

$y=x^2$, $8y=x^2$, $x=y^2$, $8x=y^2$

Нарисуем множество G:



Выполним замену $x=\sqrt[3]{u^2 v}$, $y=\sqrt[3]{u v^2}$,

тогда $y=x^2$ переходит в $u=1$, $8y=x^2$ в $u=8$,

$x=y^2$ в $v=1$, $8x=y^2$ в $v=8$

Тогда $\tilde{G}=[1;8]\times[1;8]$

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{v}{u}} & \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{u^2}{v^2}}\\ \frac{1}{3}\sqrt{\frac{v^2}{u^2}} & \frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{u}{v}}\end{vmatrix}=\frac{4}{9}-\frac{1}{9}=\frac{1}{3}.$$

$$\iint\limits_G \frac{x}{y}\,dx\,dy=\iint\limits_{\tilde{G}}\sqrt[3]{\frac{u}{v}}\cdot\frac{1}{3}\,du\,dv=\frac{1}{3}\int_1^8\frac{dv}{v^{1/3}}\int_1^8 u^{1/3}\,du=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}\left(v^{2/3}\Big|_1^8\right)\cdot\frac{3}{4}\left(u^{4/3}\Big|_1^8\right)=\frac{3}{8}\cdot(4-1)(16-1)=\frac{135}{8}$$

Ответ: $\frac{135}{8}$

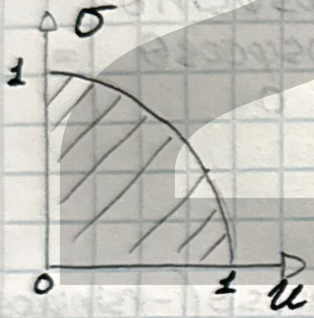
§8 №125(4)

Вычислить $\iint\limits_G x\,dx\,dy$, $G=\left\{x>0,\ y>0,\ \left(\frac{x}{a}\right)^{2/3}+\left(\frac{y}{b}\right)^{2/3}<1\right\}$

Выполним замену $x=au^3$, $y=bv^3$;

$$\left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right| = \left|\begin{vmatrix} 3au^2 & 0 \\ 0 & 3bv^2 \end{vmatrix}\right| = 9abu^2v^2$$

$$\tilde{G}=\{u>0,\ v>0,\ u^2+v^2<1\}$$



При фиксированном $v=v_0$:

u меняется от 0 до $\sqrt{1-v_0^2}$

$$\iint\limits_G x\,dx\,dy = \int_0^1 dv\int_0^{\sqrt{1-v^2}} au^3\cdot 9abu^2v^2\,du\,dv =$$

$$= 9a^2b\int_0^1 v^2\,dv\int_0^{\sqrt{1-v^2}} u^5\,du = 9a^2b\int_0^1 v^2\cdot\frac{(1-v^2)^3}{6}\,dv =$$

$$= \frac{3}{2}a^2b\int_0^1 (v^2-3v^4+3v^6-v^8)\,dv = \frac{3}{2}a^2b\left(\frac{1}{3}-\frac{3}{5}+\frac{3}{7}-\frac{1}{9}\right) =$$

$$= \frac{8a^2b}{105}$$

Ответ: $\frac{8a^2b}{105}$

§8 №144 (3)

Вычислить, перейдя к сферическим координатам:

$$\iiint\limits_G (x^2+y^2-z^2)\,dxdydz,\quad G=\{1\le x^2+y^2+z^2\le 4,\ x\ge 0,\ y\ge 0\}$$

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\cos\theta \\ y = r\cos\varphi\sin\theta \\ z = r\sin\varphi \end{cases}$$

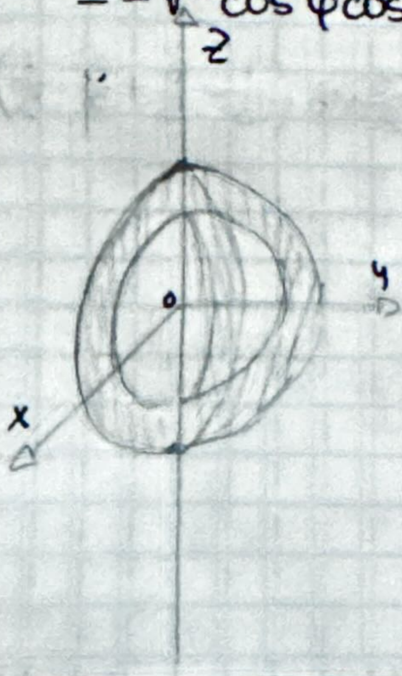
$$\frac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,\theta)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi\cos\theta & -r\sin\varphi\cos\theta & -r\cos\varphi\sin\theta \\ \cos\varphi\sin\theta & -r\sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\cos\theta \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \cos\varphi\cos\theta\,(-r^2\cos^2\varphi\cos\theta) + r\sin\varphi\cos\theta\,(-r\sin\varphi\cos\varphi\cos\theta)$$

$$-r\cos\varphi\sin\theta\,(r\cos^2\varphi\sin\theta + r\sin^2\varphi\sin\theta) =$$

$$= -r^2\cos^3\varphi\cos^2\theta - r^2\sin^2\varphi\cos\varphi\cos^2\theta - r^2\cos\varphi\sin^2\theta =$$

$$= -r^2\cos\varphi\cos^2\theta - r^2\cos\varphi\sin^2\theta = -r^2\cos\varphi$$



G – четверть полой сферы

$$\tilde{G} = \left\{1\le r\le 2,\ \varphi\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right],\ \theta\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]\right\}$$

$$\iiint\limits_G (x^2+y^2-z^2)\,dxdydz = \cancel{\iiint\limits_{\tilde G}(r^2\cos^2\varphi - r^2\sin^2\varphi)\,drd\varphi d\theta} =$$

$$\cancel{=\int_1^2 dr\int_{-\pi/2}^{\pi/2}d\varphi\int_0^{\pi/2} r^2\cos 2\varphi\, d\theta = \int_1^2 dr\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{\pi}{2}r^2}\cos 2\varphi\, d\varphi =$$

$$\cancel{=\frac{\pi}{2}\int_1^2 r^2dr\cdot\frac{1}{2}\sin 2\varphi\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}}$$

$$=\iiint\limits_{\tilde G} r^2(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)\cdot r^2\cos\varphi\, drd\varphi d\theta =$$

$$=\int_1^2 dr\int_{-\pi/2}^{\pi/2}d\varphi\int_0^{\pi/2} r^4(2\cos^2\varphi-1)\cos\varphi\, d\theta =$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_1^2 r^4dr\int_{-1}^{1}(1-2\sin^2\varphi)\,d\sin\varphi = \frac{\pi}{2}\int_1^2 r^4dr\cdot\left(t-2\cdot\frac{1}{3}t^3\right)\Big|_{-1}^{1}=$$

$$=\frac{\pi}{2}\left(\frac{r^5}{5}\right)\Big|_1^2\cdot\left(1-\frac{2}{3}+1-\frac{2}{3}\right)=\frac{\pi}{3}\cdot\frac{32-1}{5}=\frac{31\pi}{15}$$

<u>Ответ:</u> $\frac{31\pi}{15}$

§ 8 № 145 (2)

Свести интеграл к однократному:

$$\iiint\limits_G f\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) dxdydz, \quad G = \{z^2 \le x^2+y^2, \ x^2+y^2+z^2 \le R^2\}$$

Перейдём к полярным координатам:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\cos\theta \\ y = r\cos\varphi\sin\theta \\ z = r\sin\varphi \end{cases}, \quad r \ge 0, \ \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right], \ \theta \in [-\pi; \pi]$$

$$\tilde{G} = \{r^2\sin^2\varphi \le r^2\cos^2\varphi\cos^2\theta + r^2\cos^2\varphi\sin^2\theta, \ r \le R\} =$$

$$= \{|\sin\varphi| \le |\cos\varphi|, \ 0 \le r \le R\} = \{\varphi \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right], \theta \in [-\pi; \pi], r \in [0; R]\}$$

$$\left|\frac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,\theta)}\right| = r^2\cos\varphi$$

$$\iiint\limits_G f\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) dxdyd\varphi = \iiint\limits_{\tilde{G}} f(\mathrm{tg}\varphi) \cdot r^2\cos\varphi \, drd\varphi d\theta =$$

$$= \cancel{\int_0^R r^2 dr \int_{-\pi}^{\pi} d\theta} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} f(\mathrm{tg}\varphi)\cos\varphi d\varphi \int_0^R r^2 dr \int_{-\pi}^{\pi} d\theta =$$

$$= 2\pi \cdot \frac{R^3}{3} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} f(\mathrm{tg}\varphi)\cos\varphi d\varphi$$

Ответ: $\dfrac{2\pi R^3}{3} \displaystyle\int_{-\pi/4}^{\pi/4} f(\mathrm{tg}\varphi)\cos\varphi d\varphi$.

§8 №146 (2)

Вычислить, перейдя к цилиндрическим координатам:

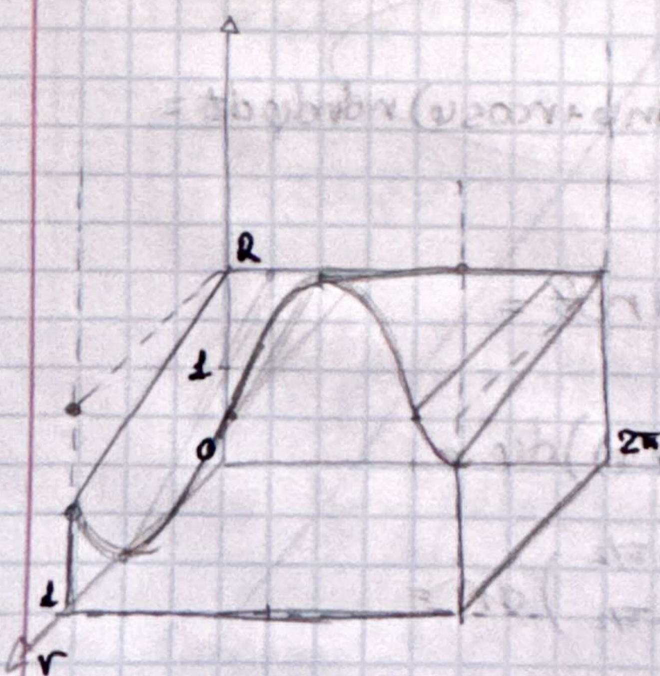
$$\iiint\limits_G (x+y+z)\,dx\,dy\,dz, \quad G \text{ ограничено } x^2+y^2=1,\ z=0 \text{ и } x+y+z=2$$

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = t \end{cases}$$

$$\frac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,t)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$$

G ограничено $r=1$, $t=0$ и $t+r\cos\varphi+r\sin\varphi = 2$

$$t = 2-\sqrt{2}\,r\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)$$



Фиксируем некоторый $r\in[0;1]$: φ меняется от 0 до 2π.

Фиксируем некоторое $\varphi\in[0;2\pi]$: t меняется от 0 до $2-\sqrt{2}\,r\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)$

$$\iiint\limits_G (x+y+z)\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_{\tilde G} (r\cos\varphi + r\sin\varphi + t)\,\cancel{2}\,r\,dr\,d\varphi\,dt =$$

$$= \int_0^1 dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2-\sqrt{2}r\sin(\varphi+\frac{\pi}{4})} (r\cos\varphi + r\sin\varphi + t)\,dt =$$

$$= \int_0^1 dr \int_0^{2\pi} d\varphi \left(\left(\sqrt{2}r\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)\right)\left(2-\sqrt{2}r\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)\right) + \frac{1}{2}\left(2-\sqrt{2}r\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)\right)^2 \right) =$$

$$= \int_0^1 dr \int_0^{2\pi} \left(2\sqrt{2}r\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right) - 2r^2\sin^2\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right) + 2 - 2\sqrt{2}\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right) + \right.$$

$$\left. + r^2\sin^2\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)\right) d\varphi = \int_0^1 r\,dr \int_0^{2\pi} \left(2 - r^2\,\frac{1-\cos(2\varphi+\frac{\pi}{2})}{2}\right) d\varphi =$$

$$= \int_0^1 r\,dr \left(4\pi - \frac{1}{2}r^2\cdot 2\pi - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin 2\varphi\,d\varphi \right) =$$

$$= \int_0^1 r\left(4\pi - \pi r^2 + \frac{1}{4}\cos 2\varphi\Big|_0^{2\pi}\right) dr =$$

$$= 4\pi\frac{1}{2} - \pi\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\cdot 0 = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$$

Ответ: $\frac{7\pi}{4}$.

§8 №197

Показать, что при ~~$x=a$~~ $r\cos\varphi\cos\psi$, $y=br\cos\varphi\sin\psi$ ~~$z=crsin$~~ $x=ar\cos\varphi\cos\psi$, $y=br\sin\varphi\cos\psi$, $z=cr\sin\varphi$: якобиан отображения $J=abc\,r^2\cos\psi$

$$J = \frac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,\psi)} = \begin{vmatrix} a\cos\varphi\cos\psi & -ar\sin\varphi\cos\psi & -ar\cos\varphi\sin\psi \\ b\sin\varphi\cos\psi & br\cos\varphi\cos\psi & -br\sin\varphi\sin\psi \\ c\sin\psi & 0 & cr\cos\psi \end{vmatrix} =$$

$$= abc\Big[\cos\varphi\cos\psi\,(r^2\cos\varphi\cos^2\psi) + r\sin\varphi\cos\psi \cdot$$

$$\cdot (r\sin\varphi\cos^2\psi + r\sin\varphi\sin^2\psi) + r\cos\varphi\sin\psi \cdot r\cos\varphi\sin\psi\cos\psi\Big]$$

$$= abcr^2\left[\underline{\cos^2\varphi\cos^3\psi} + \sin^2\varphi\cos\psi + \underline{\cos^2\varphi\sin\psi\cos^2\psi}\right] =$$

$$= abcr^2\left[\cos^2\varphi\cos\psi + \sin^2\varphi\cos\psi\right] = abcr^2\cos\psi.$$

§8 №148 (1)

$G = \left\{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \le 1\right\}$. Вычислить:

$$\iiint\limits_G \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right) dx\,dy\,dz.$$

Выполним замену: $\begin{cases} x = ar\cos\varphi\cos\psi \\ y = br\sin\varphi\cos\psi \\ z = cr\sin\psi \end{cases}$

Как было показано в §8 №147: $\left|\frac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,\psi)}\right| =$

$= abcr^2\cos\psi$

$\tilde{G} = \{r^2 \le 1\} = \{0 \le r \le 1\}$

φ меняется от 0 до 2π, ψ меняется от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$.

$$\iiint\limits_G \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right) dx\,dy\,dz = \iiint\limits_{\tilde{G}} r^2 \cdot abcr^2\cos\psi\, dr\,d\varphi\,d\psi =$$

$$= abc\int_0^1 dr \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\psi \int_0^{2\pi} r^4\cos\psi \, d\varphi = 2\pi abc \int_0^1 dr \int_{-\pi/2}^{\pi/2} r^4 \cos\psi \, d\psi =$$

$$= 2\pi abc \int_0^1 r^4 \cdot 2\, dr = 4\pi abc \cdot \frac{1}{5}$$

<u>Ответ</u>: $\frac{4}{5}\pi abc$.

§8 №150 (8)

Вычислить $\iiint\limits_G z^2\,dx\,dy\,dz$, $G = \{x^2+y^2+z^2 \le R^2,$

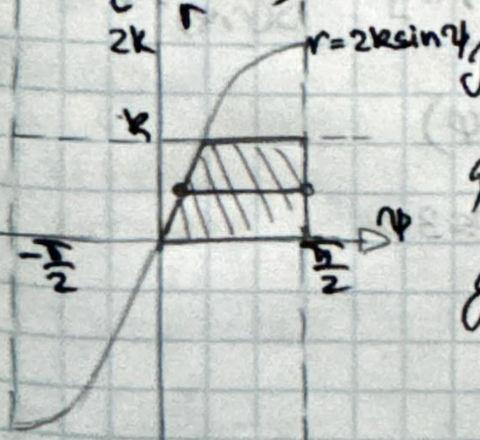
$x^2+y^2+z^2 \le 2Rz\}$.

Перейдём к сферическим координатам:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\cos\psi \\ y = r\sin\varphi\cos\psi \\ z = r\sin\psi \end{cases} \qquad \left|\frac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,\psi)}\right| = r^2\cos\psi$$

$r \ge 0$, $\varphi \in [0; 2\pi]$, $\psi \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$

$G = \{r^2 \le R^2,\ r^2 \le 2Rr\sin\psi\} = \{0 \le r \le R,\ r \le 2R\sin\psi\}$



При фиксированном r:

ψ меняется от $\arcsin\frac{r}{2R}$

до $\frac{\pi}{2}$

$$\iiint\limits_{G_1} z^2\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_{\tilde G_1} r^2\sin^2\psi\; r^2\cos\psi\; dr\,d\varphi\,d\psi =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R dr \int_{\arcsin\frac{r}{2R}}^{\pi/2} r^4\sin^2\psi\cos\psi\,d\psi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r^4\cdot\left(\frac{\sin^3\psi}{3}\Bigg|_{\arcsin\frac{r}{2R}}^{\pi/2}\right)dr =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \frac{1}{3} r^4\left(1-\frac{r^3}{8R^3}\right)dr = \int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{R^5}{5} - \frac{1}{3\cdot 8R^3}\cdot\frac{R^8}{8}\right)d\varphi =$$

$$= \frac{2\pi R^5}{3}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{64}\right) = \frac{59\pi R^5}{480}.$$

Ответ: $\frac{59\pi R^5}{480}$.

§9 №6(б)

Найти площадь области, ограниченной кривыми

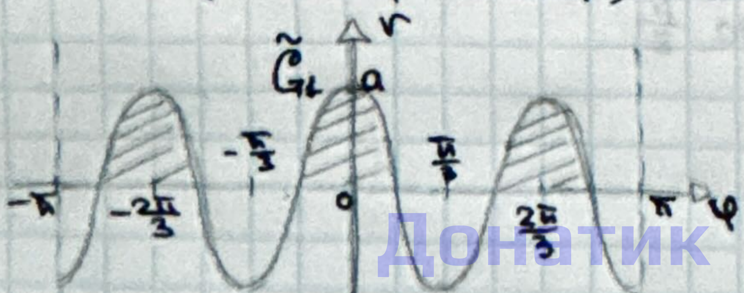
$(x^2+y^2)^2 = a(x^3-3xy^2)$, $a>0$

Перейдём к полярным координатам:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases},\quad r\geq 0,\ \varphi\in[-\pi;\pi] \qquad \frac{D(x,y)}{D(r,\varphi)} = r$$

$$r^4 = ar\cos\varphi\cdot r^2(\cos^2\varphi - 3\sin^2\varphi)$$

$$r = a(4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi) = a\cos 3\varphi$$



Множество ограниченное данной кривой G соответствует G, заштрихованному на рисунке.

~~$\iint_G 1 dr d\varphi$~~ В силу периодичности $\cos 3\varphi$ все 3 заштрихованные пика равны

$$S=\iint_G 1\,dxdy=\iint_{G} r\,dr\,d\varphi=3\iint_{G_1} r\,dr\,d\varphi=$$

$$=3\int_{-\pi/6}^{\pi/6}d\varphi\int_0^{a\cos 3\varphi} r\,dr=\frac{3a^2}{2}\int_{-\pi/6}^{\pi/6}\cos^2 3\varphi\,d\varphi=\frac{3a^2}{4}\int_{-\pi/6}^{\pi/6}(1+\cos 6\varphi)\,d\varphi=$$

$$=\frac{3a^2}{4}\cdot\frac{\pi}{3}=\frac{\pi a^2}{4}$$

Ответ: $\frac{\pi a^2}{4}$.

§ 9 №8 (5)

Найти площадь области, ограниченной

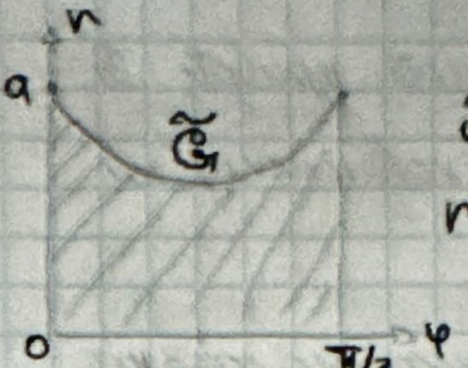
$(x+y)^4=a^2(x^2+y^2)$, $x=0$, $y=0$ $(x>0, y>0)$

Перейдём к полярным координатам:

$$\begin{cases} x=r\cos\varphi \\ y=r\sin\varphi \end{cases} \quad r\geq 0,\ \varphi\in[0, 2\pi],\ \frac{D(x,y)}{D(r,\varphi)}=r$$

$$r^4(\sin\varphi+\cos\varphi)^4=a^2r^2$$

$$r=\frac{a}{2\sin^2(\varphi+\frac{\pi}{4})}, \quad x>0, y>0 \Rightarrow \varphi\in\left[0; \frac{\pi}{2}\right].$$



При фиксированном φ r меняется от 0 до $\dfrac{a}{\sin^2(\varphi+\frac{\pi}{4})}$

$$S=\iint_{G_1} dx\,dy=\iint_{\tilde G_1} r\,dr\,d\varphi=\int_0^{\pi/2} d\varphi\int_0^{\frac{a}{\sin^2(\varphi+\frac{\pi}{4})}} r\,dr =$$

$$=\frac{a^2}{8}\int_0^{\pi/2}\frac{d\varphi}{\sin^4(\varphi+\frac{\pi}{4})}=-\frac{a^2}{8}\int\frac{d\,ctg\,\xi}{\sin^2\xi}\Bigg|_{\pi/4}^{3\pi/4}=$$

$$=-\frac{a^2}{8}\int(1+ctg^2\xi)\,d\,ctg\,\xi\Bigg|_{\pi/4}^{3\pi/4}=$$

$$=-\frac{a^2}{8}\left(ctg\,\xi+\frac{1}{3}ctg^3\xi\right)=-\frac{a^2}{8}\left(-1-1-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\right)=\frac{a^2}{8}\cdot\frac{8}{3}=\frac{a^2}{3}.$$

Ответ: $\frac{a^2}{3}$.

§9 о10

Найти площадь фигуры, ограниченной

$(a_1x+b_1y+c_1)^2+(a_2x+b_2y+c_2)^2=1$, если $\Delta=a_1b_2-a_2b_1\neq 0$

~~u = a₁~~ $u=a_1x+b_1y+c_1$, $v=a_2x+b_2y+c_2$

$$\begin{Vmatrix} u-c_1 \\ v-c_2 \end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix} x \\ y \end{Vmatrix}\to\begin{Vmatrix} x \\ y \end{Vmatrix}=\frac{1}{\Delta}\begin{Vmatrix} b_2 & -a_2 \\ -b_1 & a_1 \end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} u-c_1 \\ v-c_2 \end{Vmatrix}$$

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} +\frac{b_2}{\Delta} & -\frac{a_2}{\Delta} \\ -\frac{b_1}{\Delta} & \frac{a_1}{\Delta} \end{vmatrix} = \frac{1}{\Delta^2}(a_1b_2 - a_2b_1) = \frac{1}{\Delta}$$

G - ~~область~~ фигура, ограниченная данной кривой.

$\tilde{G}$ - фигура, ограниченная $u^2+v^2=1$ - круг.

$$S = \iint\limits_{G} dx\,dy = \iint\limits_{\tilde{G}} \left|\frac{1}{\Delta}\right| du\,dv = \frac{1}{|\Delta|} \iint\limits_{\tilde{G}} du\,dv = \frac{1}{|\Delta|} \cdot$$

$\cdot$ {площадь окружности с радиусом 1} $= \frac{\pi}{|\Delta|}$

Ответ: $\frac{\pi}{|\Delta|}$

§9 №13(6)

Найти объём тела, ограниченного поверхностями:

$y^2+z^2=x, \quad x=y$

Выполним замену координат на ~~сферические~~ цилиндрические:

$\cancel{x = r\cos\varphi\cos\psi}$ $\quad y = r\sin\varphi\cos\psi$

$\cancel{y = r\sin\varphi\cos\psi}$ $\quad z = r\cos\varphi\cos\psi, \quad \psi\in[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}], \varphi\in[0;2\pi]$

$\cancel{z = r\sin\psi}$ $\quad x = r\sin\psi$

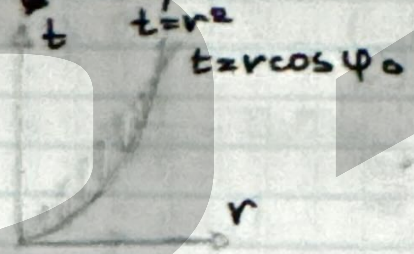
$$\left|\frac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,\psi)}\right| = r^2\cos\psi$$

$$\tilde{G} = \{\sin\psi = \sin\varphi\cos\psi, \quad r^2\cos^2\psi = r\sin\psi\}$$

$$\begin{cases} x = t \\ y = r\cos\varphi \\ z = r\sin\varphi \end{cases}$$

$$\frac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,t)} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \end{vmatrix} = r$$

$$\tilde{G}\ \begin{cases} r^2 = t \\ r\cos\varphi = t \end{cases}$$



φ_0 - фиксированное значение φ.

$$r^2 \le t \le r\cos\varphi_0,\quad \cos\varphi > 0 \Rightarrow \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$V = \iiint\limits_{G} 1\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_{\tilde{G}} r\,dr\,d\varphi\,dt =$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\cos\varphi} dr \int_{r^2}^{r\cos\varphi} r\,dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\cos\varphi} (r^2\cos\varphi - r^3)\,dr =$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\cos\varphi \cdot \frac{\cos^3\varphi}{3} - \frac{1}{4}\cos^4\varphi\right) d\varphi = \frac{1}{12}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4\varphi\,d\varphi =$$

$$= \frac{1}{48}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1+\cos 2\varphi)^2\,d\varphi = \frac{1}{48}\left(\pi + 2\cdot\frac{1}{2}\sin 2\varphi\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} + \right.$$

$$\left. + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1+\cos 4\varphi}{2}\,d\varphi\right) = \frac{1}{48}\left(\pi + \frac{1}{2}\pi + \frac{1}{8}\sin 4\varphi\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}\right) =$$

$$= \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{48}\pi = \frac{\pi}{32}$$

<u>Ответ</u>: $\frac{\pi}{32}$.

§9 №16 (1)

Найти объём, ограниченного $x^2+y^2+z^2=4$ и

$z=\sqrt{x^2+y^2}$ $(z<\sqrt{x^2+y^2})$

Перейдём к сферическим координатам:

$$\begin{cases} x=r\cos\varphi\cos\psi \\ y=r\sin\varphi\cos\psi \\ z=r\sin\psi. \end{cases} \quad r\geq 0,\ \varphi\in[0;2\pi],\ \psi\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$$

$$\left|\frac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,\psi)}\right| = r^2\cos\psi$$

Тогда $\tilde{G}$ ограничено $r^2=4$ $(r=2)$ и $r\sin\psi=r\cos\psi$

$(\sin\psi<\cos\psi)$, $\psi\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{4}\right]$

На φ условий нет $\Rightarrow \varphi\in[0;2\pi]$

Таким образом $\tilde{G}=[0;2]\times[0;2\pi]\times\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{4}\right]$

$$V=\iiint\limits_G 1\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_{\tilde{G}} r^2\cos\psi\,dr\,d\varphi\,d\psi =$$

$$=\int_0^2 r^2dr\int_0^{2\pi}d\varphi\int_{-\pi/2}^{\pi/4}\cos\psi\,d\psi = \int_0^2 r^2dr\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+1\right)d\varphi =$$

$$=\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\int_0^2 2\pi r^2dr = \pi(2+\sqrt{2})\cdot\frac{8}{3} = \frac{8\pi}{3}(2+\sqrt{2})$$

Ответ: $\frac{8\pi}{3}(2+\sqrt{2})$

§9 №21

Найти объём параллепипипеда, ограниченного плоскостями:

$a_1x+b_1y+c_1z=\pm d_1$

$a_2x+b_2y+c_2z=\pm d_2$

$a_3x+b_3y+c_3z=\pm d_3$

$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$, $A = \left\| \begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{matrix} \right\|$

Замена: $\begin{cases} u = a_1x+b_1y+c_1z \\ v = a_2x+b_2y+c_2z \\ w = a_3x+b_3y+c_3z \end{cases}$

Т.к. $\Delta \neq 0$, то x, y и z однозначно выражаются через u и v

Дифференцируем каждое ур-ие системы по u:

$$\begin{cases} 1 = a_1\frac{\partial x}{\partial u} + b_1\frac{\partial y}{\partial u} + c_1\frac{\partial z}{\partial u} \\ 0 = \ldots \\ 0 = \ldots \end{cases}$$

$$\left\| \begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial u} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right\| \Rightarrow \left\| \begin{matrix} \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial u} \end{matrix} \right\| = A^{-1} \left\| \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{matrix} (A^{-1})_{11} \\ (A^{-1})_{21} \\ (A^{-1})_{31} \end{matrix} \right\|, \text{ тогда } \frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)} = \begin{vmatrix} (A^{-1})_{11} & (A^{-1})_{12} & (A^{-1})_{13} \\ (A^{-1})_{21} & (A^{-1})_{22} & (A^{-1})_{23} \\ (A^{-1})_{31} & (A^{-1})_{32} & (A^{-1})_{33} \end{vmatrix} =$$

$= \det A^{-1} = \frac{1}{\det A} = \frac{1}{\Delta}$

$\tilde{G}$ ограничено $u = \pm d_1,\ v = \pm d_2,\ w = \pm d_3$

$$V = \iiint\limits_{G} dx\,dy\,dz = \iiint\limits_{\tilde{G}} \frac{1}{|\Delta|}\, du\,dv\,dw = \frac{1}{|\Delta|} \cdot 2d_1 \cdot 2d_2 \cdot 2d_3 =$$

$$= \frac{8d_1d_2d_3}{|\Delta|}$$

Ответ: $\frac{8d_1d_2d_3}{|\Delta|}$

§ 9 № 63 (1)

Найти координаты центра масс $[0;a]^3$

с плотностью $\rho = \rho_0 (x+y+z)^2$

Масса тела: $$M = \iiint\limits_{[0;a]^3} \rho\, dx\,dy\,dz = \int_0^a dx \int_0^a dy \int_0^a \rho_0 (x+y+z)^2 dz =$$

$$= \rho_0 \int_0^a dx \int_0^a dy \left[(x+y)^2 \cdot a + 2(x+y) \cdot \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{3} \right] =$$

$$= \rho_0 \int_0^a dx \int_0^a \left(ax^2 + 2axy + ay^2 + a^2x + a^2y + \frac{1}{3}a^3\right) dy =$$

$$= \rho_0 \int_0^a \left(a^2x^2 + 2ax \cdot \frac{a^2}{2} + a \cdot \frac{1}{3}a^3 + a^3x + a^2 \cdot \frac{a^2}{2} + \frac{1}{3}a^4\right) dx =$$

$$= \rho_0 \int_0^a \left(a^2x^2 + 2a^3x + \frac{7}{6}a^4\right) dx = \rho_0 \left(a^2 \cdot \frac{a^3}{3} + 2a^3 \cdot \frac{a^2}{2} + \frac{7}{6}a^5\right) =$$

$$= \rho_0 a^5 \cdot \frac{2+6+7}{6} = \frac{15}{6} \rho_0 a^5$$

Координаты центра масс по оси x:

$$x_c = \frac{1}{M}\iiint\limits_{[0;a]^3} x\rho\, dxdydz = \frac{1}{M}\int_0^a dx\int_0^a dy\int_0^a x\rho_0(x+y+z)^2 dz =$$

$$= \frac{\rho_0}{M}\int_0^a x\,dx\int_0^a dy\left[(x+y)^2 a + 2(x+y)\cdot\frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{3}\right] =$$

$$= \frac{\rho_0}{M}\int_0^a x\left(ax^2 + 2ax\frac{a^2}{2} + a\cdot\frac{a^3}{3} + a^3x + \frac{a^2}{2}\cdot\frac{a^2}{2} + \frac{1}{3}a^4\right)dx =$$

$$= \frac{\rho_0}{M}\int_0^a\left(a^2x^3 + 2a^3x^2 + \frac{7}{6}a^4x\right)dx = \frac{\rho_0}{M}\left(a^2\cdot\frac{a^4}{4} + 2a^3\cdot\frac{a^3}{3} + \right.$$

$$\left. + \frac{7}{6}a^4\cdot\frac{a^2}{2}\right) = \frac{\rho_0}{M}a^6\cdot\frac{3+8+7}{12} = \frac{3}{2}a^6\cdot\frac{\rho_0}{M} =$$

$$= \frac{3}{2}a^6\cdot\frac{\rho_0}{\frac{15}{6}\rho_0 a^5} = a\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{5} = \frac{3}{5}a$$

В силу симметрии $y_c = z_c = x_c = \frac{3}{5}a$

<u>Ответ</u>: $x_c = y_c = z_c = \frac{3}{5}a$.