

№14.12(1,2) 1. КЕТ, т.к. не может быть элементов из одной строки/столбца (следует из формулы разложения определителя по i-ой строке).

2. да, т.к. элементы из разных строк и столбцов (также следует из формулы разложения определителя по i-ой строке)

2) $A_{12}A_{21}A_{34}A_{45}A_{53} : N(2, 1, 4, 5, 3) = 3 \Rightarrow$ минус
 $A_{15}A_{23}A_{34}A_{41}A_{52} : N(5, 3, 4, 1, 2) = 4 + 2 + 2 = 8 \Rightarrow$ плюс

№14.21 (2,9)

$$2) \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{1+3} (-1) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1$$

$$9) \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{1+4} (-1) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

№14.22 (2)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & 9 & 16 & 25 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 9 & 16 & 25 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 9 & 16 & 25 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 4 & 16 & 25 \end{vmatrix} -$$

Донашки

$$- \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 9 & 16 & 25 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 4 & 16 & 25 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 9 & 16 & 25 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 4 & 16 & 25 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \\ 1 & 1 & 25 \end{vmatrix} -$$

$$-2 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 16 \\ 15 & 25 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -7 \\ 1 & 4 & 16 \\ 1 & 5 & 25 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 0 & -2 & -12 \\ 1 & 4 & 16 \\ 1 & 5 & 25 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 16 \\ 1 & 25 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} -$$

$$-2 \left(2 \left| \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \right| \begin{array}{c} 6 \\ 25 \end{array} \right| - 12 \left| \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \right| \begin{array}{c} 4 \\ 5 \end{array} \right| \right) = 9 - 7 - 2(18 - 12) = -10$$

5/14.23 (6, 9, 11, 18)

$$6) \begin{vmatrix} 0 & \lambda_1 & & \\ \lambda_n & \ddots & & \\ & & 0 & \end{vmatrix} = (-1)^{N(n, n-1, \dots, 1)} a_n a_{2n-1} \dots a_{n+1} \in$$

$$N(n, n-1, \dots, 1) = n-1 + n-2 + \dots + 1 = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$\Leftrightarrow (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \lambda_1 \dots \lambda_n$$

$$9) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \\ 1 & 0 & 0 & & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

≡) добавим к левой строке

кому-то из строк, уменьш. на -1:

$$\textcircled{=} \left| \begin{array}{cccc} -n+1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right| = (-n+1)|E| = -n+1$$

$$11) \quad \left| \begin{array}{cccc|cc} 1 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ \hline 2 & 2 & 2 & \dots & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 2 & 1 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cccc|cc} 1 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{ccccc|cc} 2(n-1)+1 & 2 & \dots & 2 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right| =$$

$$= (2n-1) \begin{vmatrix} -1 & 0 & & & \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 1 \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = (2n-1) (-1)^{n-1} |E| = (2n-1) (-1)^{n-1}$$

$$(8) \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

⇒ Вычитаем из $(n+1-i)$

строки i -ую строку $\frac{1}{3}$ из строки
 $i = 1, \dots, k$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= (-3)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 2 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -3 \end{vmatrix}$$

$$\dots =$$

$$=(-3)^k$$

№14.24 (3, 5, 7)

$$3) \quad \Delta_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & \cdots & 1 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & n+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & \cdots & 1 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & n+1 \end{vmatrix} = n \Delta_{n-1} - (1-n).$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & n+1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix} = n \Delta_{n-1} + (n-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} = n \Delta_{n-1} + (n-1) \cdot$$

$$\cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & n-2 \end{vmatrix} = n \Delta_{n-1} + (n-1)!$$

Доказем по индукции, что $\Delta_n = n! \left(2 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right)$ $n \geq 2$

База: $\Delta_2 = 2 \left(2 + \frac{1}{2} \right) = 5$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 1 = 5 \quad - \text{Верно}$$

Мон: \exists Верно для $n-1$

$$\Delta_n = n \Delta_{n-1} + (n-1)! = n(n-1)! \left(2 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-1} \right) =$$

$$= (n-1)! \left(n \left(2 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-1} \right) + 1 \right) = n! \left(2 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} \right)$$

5) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix} = -(\Delta_{n-2} -$

$$- \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\Delta_{n-2} + 0 = -\Delta_{n-2}$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{А имеёт н} \Delta_n = 0$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \Rightarrow \text{Доказано. И } \Delta_n = (-1)^{n/2}$$

$$?) \left| \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \dots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & \dots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \lambda_3^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{array} \right| = P(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

⇒ Вычитаем из i-ой

строки i-1-ую, умноженную на λ_i , ∀ $1 \leq i \leq n$

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 - \lambda_1 & \lambda_2 - \lambda_1 & \lambda_3 - \lambda_1 & \dots & \lambda_n - \lambda_1 \\ \lambda_1^2 - \lambda_1^2 & \lambda_2(\lambda_2 - \lambda_1) & \lambda_3(\lambda_3 - \lambda_1) & \dots & \lambda_n(\lambda_n - \lambda_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} - \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1}(\lambda_2 - \lambda_1) & \lambda_3^{n-1}(\lambda_3 - \lambda_1) & \dots & \lambda_n^{n-1}(\lambda_n - \lambda_1) \end{array} \right| =$$

$$= (\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1) \dots (\lambda_n - \lambda_1) \left| \begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & \lambda_2 & \lambda_3 & \dots & \lambda_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \lambda_2^{n-2} & \lambda_3^{n-2} & \dots & \lambda_n^{n-2} \end{array} \right| =$$

$$= (\lambda_2 - \lambda_1) \dots (\lambda_n - \lambda_1) P(\lambda_2, \dots, \lambda_n) = \prod_{1 \leq k < i \leq n} (\lambda_i - \lambda_k)$$

Донатик