№15.45 (1,8)

1) $\begin{Vmatrix}3&5\\5&9\end{Vmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{27-25}\begin{Vmatrix}9&-5\\-5&3\end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix}4,5&-2,5\\-2,5&1,5\end{Vmatrix}$

8) $\begin{Vmatrix}2&2&-1\\2&-1&2\\-1&2&2\end{Vmatrix} = \dfrac{1}{-12-12-3}\begin{Vmatrix}-2-4&-(4+2)&4-1\\-(4+2)&4-1&-(4+2)\\-(4-1)&-(4+2)&-2-4\end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix}\frac{2}{9}&\frac{2}{9}&-\frac{1}{9}\\\frac{2}{9}&-\frac{1}{9}&\frac{2}{9}\\-\frac{1}{9}&\frac{2}{9}&\frac{2}{9}\end{Vmatrix}$

№15.48 (1,3,6)

1) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

Проверим, что $(A^{-1})^T$ - обратная к A^T:

$$\left.\begin{aligned}&1.\ (A^{-1})^T A^T = (AA^{-1})^T = E^T = E\\&2.\ A^T(A^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = E^T = E\end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{тождество верное}$$

3) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Проверим, что $B^{-1}A^{-1}$ - обратная к AB

$$\left.\begin{aligned}&1.\ (AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AEA^{-1} = (AE)A^{-1} = AA^{-1} = E\\&2.\ (B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}EB = (B^{-1}E)B = B^{-1}B = E\end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{т-во верное}$$

6) $(A+B)^{-1} = A^{-1}+B^{-1}$

Пусть $A = E$, $B = -E$, тогда $\exists A^{-1}, B^{-1}$, но $\nexists (A+B)^{-1} \Rightarrow$ т-во неверное

№15.55 $A^2+A+E = 0 \Rightarrow E = A(-A-E)$, т.к. E - невырождена, то и A - невырождена. Домножим ур-е с обеих сторон на $A^{-1} \Rightarrow$

$\Rightarrow A+E+A^{-1} = 0 \Rightarrow A^{-1} = -A-E$

№15.65 (12)

$$\left.\begin{aligned}&\begin{Vmatrix}2&-1&0\\0&2&-1\\-1&-1&1\end{Vmatrix} X = \begin{Vmatrix}1&0\\0&1\\-1&-1\end{Vmatrix} \Rightarrow X = \begin{Vmatrix}2&-1&0\\0&2&-1\\-1&-1&1\end{Vmatrix}^{-1}\begin{Vmatrix}1&0\\0&1\\-1&-1\end{Vmatrix}\\&\left\|\begin{array}{ccc|ccc}2&-1&0&1&0&0\\0&2&-1&0&1&0\\-1&-1&1&0&0&1\end{array}\right\| = \left\|\begin{array}{ccc|ccc}1&-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}&0&0\\0&\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}&1&1\\0&-\frac{3}{2}&1&\frac{1}{2}&0&1\end{array}\right\| = \left\|\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&1&1\\0&1&0&1&2&2\\0&0&1&2&3&4\end{array}\right\|\end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$X=\begin{Vmatrix}1&1&1\\1&2&2\\2&3&4\end{Vmatrix}\begin{Vmatrix}1&0\\0&1\\-1&-1\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}0&0\\-1&0\\-2&-1\end{Vmatrix}$$

№ 16.18 (22, 28)

22) $$A=\begin{Vmatrix}2&4&6&1\\1&2&3&1\\-3&-6&-9&1\\1&2&3&1\end{Vmatrix}\sim\begin{Vmatrix}0&0&6&1\\0&0&3&1\\0&0&-9&1\\0&0&3&1\end{Vmatrix}\Rightarrow rgA=2$$

28) $$A=\begin{Vmatrix}0&1&1&\dots&1&1\\-1&0&1&\dots&&\vdots\\-1&-1&0&\ddots&&\vdots\\\dots&\dots&\dots&&0&1\\-1&-1&\dots&&-1&0\end{Vmatrix}\underset{\dots}{\overset{\text{I-II, II-III}}{\underset{\text{III-IV}}{\sim}}}\begin{Vmatrix}1&1&0&0&\dots&0&0\\0&1&1&0&\dots&0&0\\0&0&1&1&\dots&0&0\\&&\dots&&&&\\0&0&0&0&\dots&1&1\\-1&-1&-1&-1&\dots&-1&0\end{Vmatrix}\ \underset{n^{\text{ая}}+(n-1)^{\text{ая}}+(n-3)^{\text{ая}}+\dots+\text{I}}{\overset{\text{Если } n\text{-чёт}}{\sim}}\ \begin{Vmatrix}1&1&0&0&\dots&0&0\\0&1&1&0&\dots&0&0\\0&0&1&1&\dots&0&0\\&&\dots&&&&\\0&0&0&0&\dots&1&1\\0&0&0&0&\dots&0&1\end{Vmatrix}\sim$$

$$\underset{\substack{\dots\\(n-2)^{\text{ая}}-(n-1)^{\text{ая}}-n^{\text{ая}}\\(n-1)^{\text{ая}}-n^{\text{ая}}}}{\sim}\ \underbrace{\begin{Vmatrix}1&0&0&0&\dots&0&0\\0&1&0&0&\dots&0&0\\0&0&1&0&\dots&0&0\\&&\dots&&&&\\0&0&0&0&\dots&1&0\\0&0&0&0&\dots&0&1\end{Vmatrix}}_{\text{ранг } n}.\ \underset{n^{\text{ая}}+(n-1)^{\text{ая}}+(n-3)^{\text{ая}}+\dots+\text{II}}{\overset{\text{Если } n\text{-нечёт}}{\sim}}\ \begin{Vmatrix}1&1&0&0&\dots&0&0\\0&1&1&0&\dots&0&0\\0&0&1&1&\dots&0&0\\&&\dots&&&&\\0&0&0&0&\dots&1&1\\-1&0&0&0&\dots&0&1\end{Vmatrix}\ \underset{n^{\text{ая}}+\text{I}-\text{II}+\dots-(n-1)^{\text{ая}}}{\sim}\ \overbrace{\begin{Vmatrix}1&1&0&0&\dots&0&0\\0&1&1&0&\dots&0&0\\0&0&1&1&\dots&0&0\\&&\dots&&&&\\0&0&0&0&\dots&1&1\\0&0&0&0&\dots&0&0\end{Vmatrix}}^{\text{ранг } n-1}.\ \text{Т.е. } rgA=\begin{cases}n-1, & n\text{-нечём}\\ n, & n\text{-чём}\end{cases}$$

№ 16.19 (3, 5)

3) $$A=\begin{Vmatrix}1&1&1\\1&\alpha&\alpha\\1&\alpha^2&\alpha^2\end{Vmatrix}\overset{\text{II-I}\ \ \text{III-I}}{\sim}\begin{Vmatrix}1&0&0\\1&\alpha-1&\alpha-1\\1&(\alpha-1)(\alpha+1)&(\alpha-1)(\alpha+1)\end{Vmatrix}\underset{(\alpha+1)\text{II}-\text{III}}{\sim}\begin{Vmatrix}1&0&0\\\alpha&0&0\\1&\alpha^2-1&\alpha^2-1\end{Vmatrix}$$

2 преоб-ние возможно только при $\alpha\neq-1$. I стр. пропор. II стр. $\Rightarrow$
$\Rightarrow rgA=2$ только если $\alpha^2-1\neq0\Rightarrow\alpha\neq1$ при $\alpha=-1$ непосред. проверкой видно, что $rg\,A=2\Rightarrow rgA=\begin{cases}1, & \alpha=1\\2, & \alpha\neq1\end{cases}$

5) $$A=\begin{Vmatrix}1&\lambda&-1&2\\2&-1&\lambda&5\\1&10&-6&1\end{Vmatrix}\sim\begin{Vmatrix}1&\lambda-10&-5&1\\2&-21&\lambda+12&3\\1&0&0&0\end{Vmatrix}$$

$rgA=2$ или $rgA=3$

$$\begin{vmatrix}\lambda-10&1\\-21&3\end{vmatrix}=0\Rightarrow\lambda=3,\ \begin{vmatrix}-5&1\\\lambda+12&3\end{vmatrix}=0\Rightarrow\lambda=3\Rightarrow rgA=\begin{cases}2, & \lambda=3\\3, & \lambda\neq3\end{cases}$$

Т. 1.

$$A = \left\| \begin{matrix} 2 & 4 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ -3 & -6 & -9 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{matrix} \right\|$$

т.к. $rgA = 2$, то базисных строк, столбцов по 2 штуки, порядок базисной подматрицы равен 2.

Некоторые базисные строки: III и IV строка

Некоторые базисные столбцы: III и IV столбец

Некоторый базисный минор: $M^{34}_{34} = \begin{vmatrix} -9 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$