№4.5. $\begin{cases} x = 2x' - y' + 5 \\ y = 3x' + y' + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{Vmatrix} x \\ y \end{Vmatrix} = \underbrace{\begin{Vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{Vmatrix}}_{S} \begin{Vmatrix} x' \\ y' \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 5 \\ 2 \end{Vmatrix}$

1) S^{-1}: $\left\|\begin{array}{cc|cc} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right\| = \left\|\begin{array}{cc|cc} 5 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right\| \sim \left\|\begin{array}{cc|cc} 3 & 0 & \frac{3}{5} & \frac{3}{5} \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right\| =$

$= \left\|\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{array}\right\| \Rightarrow S^{-1} = \begin{Vmatrix} 1/5 & 1/5 \\ -3/5 & 2/5 \end{Vmatrix}$

$\begin{Vmatrix} x' \\ y' \end{Vmatrix} = S^{-1} \begin{Vmatrix} x \\ y \end{Vmatrix} - S^{-1} \begin{Vmatrix} 5 \\ 2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \frac{x}{5} + \frac{y}{5} \\ -\frac{3x}{5} + \frac{2y}{5} \end{Vmatrix} - \begin{Vmatrix} \frac{7}{5} \\ -\frac{11}{5} \end{Vmatrix} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = \frac{x}{5} + \frac{y}{5} - \frac{7}{5} \\ y' = -\frac{3x}{5} + \frac{2y}{5} + \frac{11}{5} \end{cases}$

2) $\begin{Vmatrix} x' \\ y' \end{Vmatrix} = S^{-1} \begin{Vmatrix} x \\ y \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} -\frac{7}{5} \\ \frac{11}{5} \end{Vmatrix} \Rightarrow \begin{Vmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \end{Vmatrix} = (S^{-1})^T \cdot \begin{Vmatrix} \vec{e}_1{}' \\ \vec{e}_2{}' \end{Vmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{e}_1 = \frac{1}{5}\vec{e}_1{}' - \frac{3}{5}\vec{e}_2{}' \\ \vec{e}_2 = \frac{1}{5}\vec{e}_1{}' + \frac{2}{5}\vec{e}_2{}' \end{cases}$

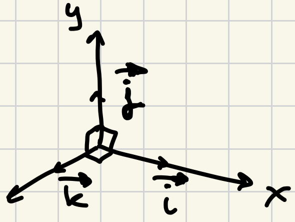
$\begin{Vmatrix} -7/5 \\ 11/5 \end{Vmatrix}$ - координаты O в O'. $O(-\frac{7}{5}; \frac{11}{5})$

3) $\begin{Vmatrix} x \\ y \end{Vmatrix} = S \begin{Vmatrix} x' \\ y' \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 5 \\ 2 \end{Vmatrix} \Rightarrow \begin{Vmatrix} \vec{e}_1{}' \\ \vec{e}_2{}' \end{Vmatrix} = S^T \begin{Vmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \end{Vmatrix} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \vec{e}_1{}' = 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 \\ \vec{e}_2{}' = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 \end{cases}$ $\begin{Vmatrix} 5 \\ 2 \end{Vmatrix}$ - коорд. O' в O. $O'(5; 2)$.

№4.10

$$\begin{Vmatrix} x \\ y \\ z \end{Vmatrix} = S \begin{Vmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{Vmatrix}$$



Ищем $\begin{Vmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{Vmatrix}$: OO' в $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$

$$\overrightarrow{OO'} = \begin{Vmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{Vmatrix}$$

$$\begin{Vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} x_{0'} - x_0 \\ y_{0'} - y_0 \\ z_{0'} - z_0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{Vmatrix}$$

$\overrightarrow{OO'}$ в $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$

$$\begin{Vmatrix} -2 \\ -3 \\ -1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{Vmatrix}$$

Обратная: $\left\|\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right\| = \left\|\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & -1 & 0 & 3 \end{array}\right\| = \left\|\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & -1 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 3 & 2 & -1 & 0 & 3 \end{array}\right\| =$

$$= \left\|\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & 3 & -3 & 3 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -6 & 12 \end{array}\right\| = \left\|\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & 6 \end{array}\right\|.$$

$$\begin{Vmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & -3 & 6 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} -2 \\ -3 \\ -1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{Vmatrix}$$

$$S = \begin{Vmatrix} \vec{e_1}' & \vec{e_2}' & \vec{e_3}' \end{Vmatrix}_{\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}} \Rightarrow \begin{Vmatrix} \vec{e_1}' \\ \vec{e_2}' \\ \vec{e_3}' \end{Vmatrix} = S^T \begin{Vmatrix} \vec{e_1} \\ \vec{e_2} \\ \vec{e_3} \end{Vmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{Vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{Vmatrix} = S^T \begin{Vmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{Vmatrix};$$

$$\begin{Vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{Vmatrix} = S^T \begin{Vmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{Vmatrix};$$

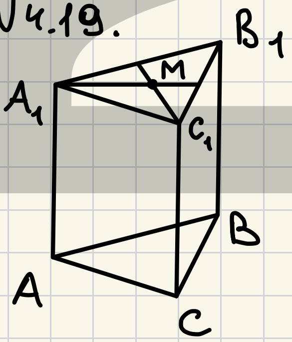
$$\begin{Vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{Vmatrix}^{-1} = S^T \begin{Vmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{Vmatrix}^{-1} = S^T;$$

$$S^T = \begin{Vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & -3 & 6 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 4 & -8 & 13 \\ 3 & 3 & 4 \\ 6 & -13 & 23 \end{Vmatrix};$$

$$S = \begin{Vmatrix} 4 & 3 & 6 \\ -8 & 3 & 13 \\ 13 & 4 & 23 \end{Vmatrix} \Rightarrow \begin{Vmatrix} x \\ y \\ z \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 4 & 3 & 6 \\ -8 & 3 & 13 \\ 13 & 4 & 23 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{Vmatrix}$$

$$\begin{cases} x = 4x' + 3y' + 6z' \\ y = -8x' + 3y' + 13z' - 1 \\ z = 13x' + 4y' + 23z' + 1 \end{cases}$$

№4.19.



(x', y', z') в $\{A_1, \overrightarrow{A_1B}, \overrightarrow{A_1C}, \overrightarrow{A_1M}\}$

(x, y, z) – ? в $\{A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB_1}\}$

$$\begin{Vmatrix} x \\ y \\ z \end{Vmatrix} = S \begin{Vmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{Vmatrix}$$

$$\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{AB_1} + \overrightarrow{B_1A_1} = \overrightarrow{AB_1} + \overrightarrow{BA} \Rightarrow A_1(-1; 0; 1)$$

в сист. $A \Rightarrow \begin{Vmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix}$

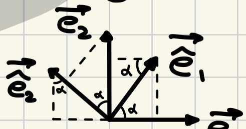
$$\left.\begin{aligned} \overrightarrow{A_1B} &= \overrightarrow{A_1A} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{B_1A} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AB} + 0\overrightarrow{AC} - 1\cdot\overrightarrow{AB_1} \\ \overrightarrow{A_1C} &= \overrightarrow{A_1A} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB_1} \\ \overrightarrow{A_1M} &= \frac{1}{3}(\overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{A_1C_1}) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + 0\overrightarrow{AB_1} \end{aligned}\right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{Vmatrix} \overrightarrow{A_1B} \\ \overrightarrow{A_1C} \\ \overrightarrow{A_1M} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{AB_1} \end{Vmatrix} \Rightarrow S = \begin{Vmatrix} 2 & 1 & 1/3 \\ 0 & 1 & 1/3 \\ -1 & -1 & 0 \end{Vmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 2x' + y' + \frac{z'}{3} - 1 \\ y = y' + \frac{z'}{3} \\ z = -x' - y' + 1 \end{cases}$$

№4.23 $\begin{Vmatrix} x \\ y \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} x' \\ y' \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} a_{10} \\ a_{20} \end{Vmatrix}$

Если CO' тоже прямоугольная, то CO' получена из CO поворотом на угол α, растяжением или сжатием базисных векторов и параллельным переносом их так, чтобы координаты O' в CO были $(a_{10}; a_{20})$.

Поворот:



$$\begin{cases} \hat{\vec{e}}_1 = \cos\alpha\, \vec{e}_1 + \sin\alpha\, \vec{e}_2 \\ \hat{\vec{e}}_2 = -\sin\alpha\, \vec{e}_1 + \cos\alpha\, \vec{e}_2 \end{cases}$$

Растяжение или/и сжатие:

$$\begin{cases} \vec{e}_1\,' = \lambda_1 \hat{\vec{e}}_1 = \lambda_1 \cos\alpha\, \vec{e}_1 + \lambda_1 \sin\alpha\, \vec{e}_2 \\ \vec{e}_2\,' = \lambda_2 \hat{\vec{e}}_2 = -\lambda_2 \sin\alpha\, \vec{e}_1 + \lambda_2 \cos\alpha\, \vec{e}_2 \end{cases} \qquad \boxed{\Rightarrow}$$

Параллельный перенос не влияет на S.

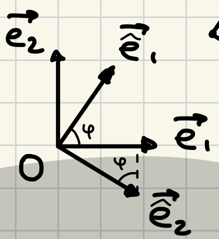
S - матрица перехода из CO в CO':

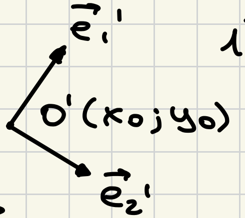
$$\boxed{\Rightarrow}\ S = \begin{Vmatrix} \lambda_1 \cos\alpha & \lambda_2(-\sin\alpha) \\ \lambda_1 \sin\alpha & \lambda_2 \cos\alpha \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{Vmatrix}$$

Если принять e_1, e_2, e_1', e_2' за единичные (что думаю предполагалось в условии) получаем

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{Vmatrix} \iff \begin{cases} a_{11} a_{22} + a_{21} a_{12} = 0, \\ a_{11}^2 + a_{21}^2 = 1, \\ a_{12}^2 + a_{22}^2 = 1. \end{cases}$$

№ 4.27.





1) $\vec{\hat{e}}_1 = \cos\varphi\, \vec{e}_1 + \sin\varphi\, \vec{e}_2$

$\vec{\hat{e}}_2 = \sin\varphi\, \vec{e}_1 - \cos\varphi\, \vec{e}_2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left\| \begin{matrix} \vec{e}_1{}' \\ \vec{e}_2{}' \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \end{matrix} \right\| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \cos\varphi\, x' + \sin\varphi\, y' + x_0 \\ y = \sin\varphi\, x' - \cos\varphi\, y' + y_0 \end{cases}$$

2) Обратная: $\left\| \begin{matrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{matrix} \right\|^{-1} = \left\| \begin{matrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{matrix} \right\|$

$$\left\| \begin{matrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} x' \\ y' \end{matrix} \right\| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x' = \cos\varphi(x - x_0) + \sin\varphi(y - y_0) \\ y' = \sin\varphi(x - x_0) - \cos\varphi(y - y_0) \end{cases}$$

3) $$\begin{cases} x_0' = \cos\varphi(0 - x_0) + \sin\varphi(0 - y_0) \\ y_0' = \sin\varphi(0 - x_0) - \cos\varphi(0 - y_0) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow O(-\cos\varphi\, x_0 - \sin\varphi\, y_0; -\sin\varphi\, x_0 + \cos\varphi\, y_0).$$

№ 2.7(4) $\vec{a}(1,-1,1)$ $\vec{b}(3,1,-2)$

$\vec{a}\vec{b} = 1\cdot 3 - 1\cdot 1 - 1\cdot 2 = 0 \Rightarrow \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{2}$

№ 2.10 (1,2) $\vec{a}(1,-1,1)$ $\vec{b}(5,1,1)$ $c(0,3,-2)$

1) $\vec{b}(\vec{a}, \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}, \vec{b}) =$

$(\vec a,\vec c)=1\cdot0-1\cdot3-1\cdot2=-5$

$(\vec a,\vec b)=1\cdot5-1\cdot1+1\cdot1=5$

$\Rightarrow -5(\vec b+\vec c)=\vec d$, $\vec d(-25,-20,-5)$

2) $(\vec a,\vec b)=5-1+1=5$ $(\vec b,\vec c)=0+3-2=1$

$|a^2|+|c^2|-(\vec a,\vec b)(\vec b,\vec c)=1+1+1+9+4-5=11$

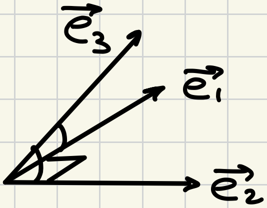
№2.11 Д-ть: $\vec a\perp\vec b(\vec a,\vec c)-\vec c(\vec a,\vec b)$

$(\vec a,(\vec b(\vec a,\vec c)-\vec c(\vec a,\vec b)))=(\vec a,\vec b(\vec a,\vec c))-$

$-(\vec a,\vec c(\vec a,\vec b))=(\vec a,\vec c)(\vec a,\vec b)-(\vec a,\vec b)\cdot$

$\cdot(\vec a,\vec c)=0\Rightarrow\vec a\perp\vec b(\vec a,\vec c)-\vec c(\vec a,\vec b)$ ■

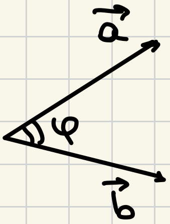
№2.22 $e_1=e_2=1$; $e_3=2$; $\angle(\vec e_1,\vec e_2)=\frac{\pi}{2}$; $\angle(\vec e_1,\vec e_3)=$



$=\angle(\vec e_2,\vec e_3)=\frac{\pi}{3}$. $\vec a(-1,0,2)$ $\vec b(2,-1,1)$

S паралл-ма на $\vec a$ и $\vec b$ – ?

$S=ab\sin\varphi$. $\cos\varphi=\frac{(\vec a,\vec b)}{ab}$



$(\vec a,\vec b)=-2e_1^2+2e_3^2+(\vec e_1,\vec e_3)(4-1)-2(\vec e_2,\vec e_3)=$

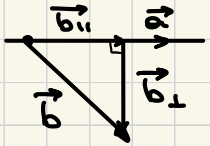
$=-2+8+3-2=7$

$a^2=e_1^2+4e_3^2-4(\vec e_1,\vec e_3)=17-8\cdot\frac{1}{2}=13$

$b^2=4e_1^2+e_2^2+e_3^2-4(\vec e_1,\vec e_2)+4(\vec e_1,\vec e_3)-2(\vec e_2,\vec e_3)=9+4-2=11$

$\cos\varphi=\frac{7}{\sqrt{11}\sqrt{13}}=\sqrt{\frac{49}{143}}\Rightarrow\sin\varphi=\sqrt{\frac{94}{143}}\Rightarrow S=\sqrt{94}$

№2.27(3) $\vec a(1,-1,2)$ $\vec b(4,0,-2)$; $\vec b_{\parallel}=?$; $\vec b_{\perp}=?$



$(\vec a,\vec b)=4-4=0 \Rightarrow \vec b_{\parallel}=\vec 0$; $\vec b_{\perp}=\vec b$

№2.30 $\vec a(4,1,5)$ $\vec b(0,5,2)$ $\vec c(-6,2,3)$ $\vec x(\alpha,\beta,\gamma)$

$$\begin{cases}(\vec x,\vec a)=18\\ (\vec x,\vec b)=1\\ (\vec x,\vec c)=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{Vmatrix}4&1&5\\0&5&2\\-6&2&3\end{Vmatrix}\begin{Vmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}18\\1\\1\end{Vmatrix}$$

$\Delta=4(15-4)+12+5\cdot(-30)=44-12+150=182$

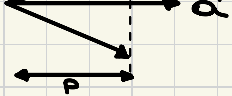
$\Delta_\alpha=18\cdot(5\cdot3-2\cdot2)-1(3-2)+5(2-5)=198-1-15=182$

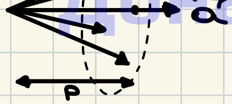
$\Delta_\beta=4(3-2)-18(0-(-12))+5(0-(-6))=-182$

$\Delta_\gamma=4(5-2)-1(0-(-6))+18(0-(-30))=546$

$\alpha=1$ $\beta=-1$ $\gamma=3 \Rightarrow \vec x(1,-1,3)$

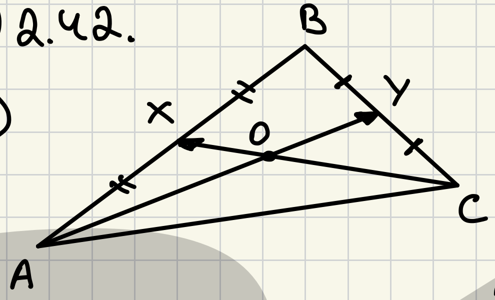
№2.32 $(\vec x,\vec a)=p \Rightarrow$ проекция $\vec x$ на $\vec a$ равна $p \Rightarrow$ на пл-ти (в пространстве) если вектора отложить от одной точки, то конец $\vec x$ лежит на прямой (плоскости) перпендикулярной $\vec a$ и находится на расстоянии p от начала $\vec a$.





№ 2.42.

1)



Введём базис $\{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\}$

$\overrightarrow{AY} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ $\quad \overrightarrow{AY}\left(-1; \frac{1}{2}\right)$

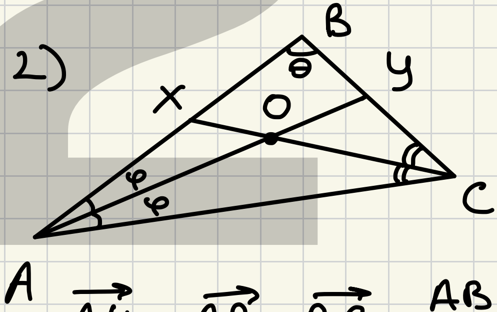
$\overrightarrow{CX} = \overrightarrow{CB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$ $\quad \overrightarrow{CX}\left(\frac{1}{2}; -1\right)$

$AY = CX \Rightarrow (\overrightarrow{AY}, \overrightarrow{AY}) = (\overrightarrow{CX}, \overrightarrow{CX})$

$$BA^2 + \frac{BC^2}{4} - (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \frac{BA^2}{4} + BC^2 - (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{3}{4}BA^2 = \frac{3}{4}BC^2 \Rightarrow BA = BC \quad \blacksquare$$

2)



$\overrightarrow{AY} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BY}$, $\quad \frac{BY}{YC} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow$

$\Rightarrow BY = \frac{AB}{AC}(BC - BY) \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{AC}{AB}BY + BY = BC \Rightarrow \frac{BY}{BC} = \frac{AB}{AB+AC}$

$$\overrightarrow{AY} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\frac{AB}{AB+AC} \Rightarrow \overrightarrow{AY}\left(-1; \frac{AB}{AB+AC}\right)$$

$$\overrightarrow{CX} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BX}, \quad \frac{BX}{XA} = \frac{BC}{AC} \Rightarrow BX = \frac{BC}{AC}(BA - BX) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{AC}{BC}BX + BX = BA \Rightarrow \frac{BX}{BA} = \frac{BC}{BC+AC} \Rightarrow \overrightarrow{BX} = \overrightarrow{BA}\frac{BC}{BC+AC} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{CX} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}\frac{BC}{BC+AC} \Rightarrow \overrightarrow{CX}\left(\frac{BC}{BC+AC}; -1\right)$$

$AY = CX \Rightarrow (\overrightarrow{AY}, \overrightarrow{AY}) = (\overrightarrow{CX}, \overrightarrow{CX})$

$$BA^2 + \frac{BA^2}{(BA+AC)^2}BC^2 - 2\frac{AB}{AB+AC}(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \frac{BC^2}{(BC+AC)^2}BA^2 +$$

$$+ BC^2 - 2\frac{BC}{BC+AC}(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$$

$$BA^2 - BC^2 + BA^2BC^2\left(\frac{(BC+AC)^2 - (BA+AC)^2}{(BA+AC)^2(BC+AC)^2}\right) + 2(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})\left(\frac{BC}{BC+AC} - \frac{AB}{AB+AC}\right) = 0$$

$$(BA-BC)\left(BA+BC+BA^2BC^2\frac{(BA+BC+2AC)}{(BA+AC)^2(BC+AC)^2}+2(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC})\cdot\frac{AC}{(BC+AC)(AC+AB)}\right)=0;$$

$$(BA-BC)\left(BA+BC+\frac{BA+BC+2AC}{\left(1+\frac{AC}{BA}\right)^2\left(1+\frac{AC}{BC}\right)^2}+2\cos\theta\frac{AC}{\left(1+\frac{AC}{BC}\right)\left(1+\frac{AC}{BA}\right)}\right)=0$$

$$(BA-BC)\left((BA+BC)\left(1+\frac{AC}{BA}\right)^2\left(1+\frac{AC}{BC}\right)^2+BA+BC+2AC+\right.$$
$$\left.+2\cos\theta\,AC\left(1+\frac{AC}{BA}\right)\left(1+\frac{AC}{BC}\right)\right)=0;$$

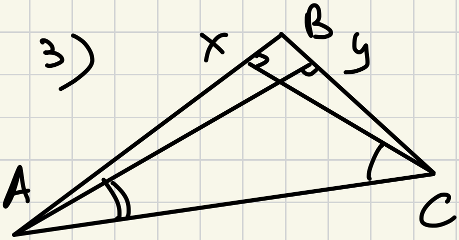
$$(BA-BC)\left(\left(1+\frac{AC}{BA}\right)\left(1+\frac{AC}{BC}\right)\left(\left(1+\frac{AC}{BA}\right)\left(1+\frac{AC}{BC}\right)\left((BA+BC)\left(1+\frac{AC}{BA}\right)\cdot\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.\cdot\left(1+\frac{AC}{BC}\right)+2\cos\theta\,AC\right)+BA+BC+2AC\right)=0;$$

$$(BA-BC)\left(\left(1+\frac{AC}{BA}\right)\left(1+\frac{AC}{BC}\right)\left(\left(1+\frac{AC}{BA}\right)\left(1+\frac{AC}{BC}\right)\left((BA+AC)\left(1+\frac{AC}{BC}\right)+\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.+(BC+AC)\left(1+\frac{AC}{BC}\right)+2\cos\theta\,AC\right)+BA+BC+AC\right)=0;$$

$$(BA-BC)\left(\left(1+\frac{AC}{BA}\right)\left(1+\frac{AC}{BC}\right)\left(\left(1+\frac{AC}{BA}\right)\left(1+\frac{AC}{BC}\right)\left(BA+AC+AC+\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.+\frac{AC^2}{BA}+BC+\underbrace{AC+AC}_{\vee}+\frac{AC^2}{BC}+2\cos\theta\,AC\right)+BA+BC+AC\right)=0;$$

$2\cos\theta AC$. Все ост. сл. >0 => правая скобка больше нуля => единств. решение — $BA=BC$ $\blacksquare$

3)



$\overrightarrow{AY}$ - проекция $\overrightarrow{AC}$ на $\overrightarrow{AY}$ =>

=> $\overrightarrow{AY}=\frac{(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AY})}{AY^2}\overrightarrow{AY}$ => $\frac{(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AY})}{AY^2}=1$

$\overrightarrow{CX}$ - проекция $\overrightarrow{CA}$ на $\overrightarrow{CX}$ =>

$\Rightarrow \vec{CX} = \dfrac{(\vec{CA}, \vec{CX})}{CX^2}\vec{CX} = \dfrac{(\vec{CA}, \vec{CX})}{CX^2} = 1$

Значит $\angle(\vec{CA}, \vec{CX}) = \angle(\vec{AC}, \vec{AY}) \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle(\vec{AB}, \vec{AC}) = \angle(\vec{CB}, \vec{CA}) \Rightarrow$ р/б $\blacksquare$