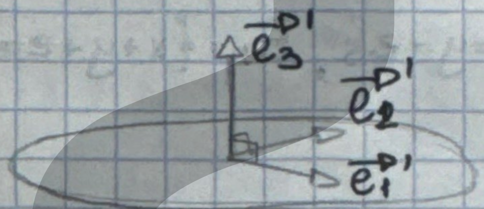
№24.20(3) 1 неделя

Найти собственные значения, собственные подпространства, привести к диагональному виду матрицу линейного преобразования f:
f - ортогональное проектирование из E_3 на α,
α - плоскость $x+y+z=0$;



$$\left.\begin{aligned} f(\vec{e_1'}) &= \vec{e_1'} \\ f(\vec{e_2'}) &= \vec{e_2'} \\ f(\vec{e_3'}) &= \vec{0} \end{aligned}\right| \Rightarrow \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \text{ в } \{\vec{e_1'}, \vec{e_2'}, \vec{e_3'}\}$$

Матрица f: $A = \frac{1}{3}\begin{Vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{Vmatrix}$

$$\det(A-\lambda E) = \begin{vmatrix} \frac{2}{3}-\lambda & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3}-\lambda & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3}-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda & -\lambda & -\lambda \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3}-\lambda & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3}-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= -\lambda \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3}-\lambda & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3}-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(1-\lambda)^2$$

$$\lambda = 0: A \sim \begin{Vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Vmatrix} = c_3 \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Vmatrix}, \text{ выберем } \vec{e_3'} = \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Vmatrix}, \; E_0 = \{x=y=z\}$$

$\lambda = 1$: $A \sim \begin{Vmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \Rightarrow \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Vmatrix} = C_2 \begin{Vmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix} + C_3 \begin{Vmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix}$,

выберем $e_2' = \begin{Vmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix}$, $e_1' = \begin{Vmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix}$, $E_1 = \{x+y+z=0\}$

Ответ: $\lambda = 0$, $\lambda = 1$, $\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$ в базисе $\{\|-1\ 0\ 1\|^T$, $\|-1\ 1\ 0\|^T$, $\|1\ 1\ 1\|^T\}$.

Собственные пр-ва: $E_0 = \{x=y=z\}$, $E_1 = \{x+y+z=0\}$

№24.28

φ - линейное пр-ие пр-ва $\mathcal{L}$. Док-ть:

1) $\operatorname{Im}\varphi$ - линейная оболочка мн-ва всех собственных векторов, отвечающих $\lambda \neq 0$.

По определению диагонализируемости:

$\exists \{e_1 \dots e_n\}$ - базис $\mathcal{L}$: $\varphi(e_i) = \lambda_i e_i$

Обозначим I - мн-во индексов i, таких, что $\lambda_i \neq 0$, I_0: $\lambda_i = 0$, если $i \in I_0$.

$$\mathcal{L}(e_i \mid i \in I) = \Big\{ \sum_{i \in I} x_i e_i \ \Big|\ x_i \in \mathbb{R} \Big\} \qquad (1)$$

$$\operatorname{Im}\varphi = \{ x' \in \mathcal{L} \mid \exists x \in \mathcal{L} : \varphi(x) = x' \}$$

a) Рассмотрим произвольный $x' \in \mathcal{L}(e_i \mid i \in I)$:

$x' = \sum\limits_{i\in I} x'_i e_i$

Пусть $x^* = \sum\limits_{i\in I} \frac{x'_i}{\lambda_i} e_i$, тогда $\cancel{\varphi(x^*)} = \varphi(x) =$

$= \varphi\left(\sum\limits_{i\in I} \frac{x'_i}{\lambda_i} e_i\right) = \sum\limits_{i\in I} \frac{x'_i}{\lambda_i} \varphi(e_i) = \sum\limits_{i\in I} x'_i e_i = x' \Rightarrow$

$\Rightarrow x' \in \operatorname{Im}\varphi$

б) Рассмотрим произвольный $x \in \operatorname{Im}\varphi$

$\exists x \in \mathcal{L}: \varphi(x) = x'$

$x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i = \sum\limits_{i\in I_0} x_i e_i + \sum\limits_{i\in I} x_i e_i \Rightarrow$

$\Rightarrow \varphi(x) = \sum\limits_{i\in I_0} x_i \lambda_i e_i + \sum\limits_{i\in I} x_i \lambda_i e_i = \sum\limits_{i\in I} x_i \lambda_i e_i = x'$

Таким образом, если $x' \in \operatorname{Im}\varphi$, то $x' = \sum\limits_{i\in I} x_i \lambda_i e_i \Rightarrow$

$\Rightarrow x' \in \mathcal{L}(e_i \mid i\in I)$

(а,б) $\Rightarrow \operatorname{Im}\varphi = \mathcal{L}(e_i \mid i\in I)$

2) $\mathcal{L} = \operatorname{Im}\varphi \oplus \operatorname{Ker}\varphi$

Из пункта 1: $\operatorname{Im}\varphi = \mathcal{L}(e_i \mid i\in I)$

Пусть $x \in \operatorname{Ker}\varphi$, тогда $\varphi(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \lambda_i e_i = \sum\limits_{i\in I} x_i e_i = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall i\in I \mapsto x_i = 0$, то есть $\operatorname{Ker}\varphi = \mathcal{L}(e_i \mid i\in I_0)$

$\left.\begin{aligned} &\mathcal{L}(e_i \mid i\in I) \cap \mathcal{L}(e_i \mid i\in I_0) = \{0\} \\ &\mathcal{L}(e_i \mid i\in I) + \mathcal{L}(e_i \mid i\in I_0) = \mathcal{L}(e_i \mid i\in \overline{1\ldots n}) = \mathcal{L} \end{aligned}\right| \Rightarrow$

$\Rightarrow \mathcal{L} = \operatorname{Im}\varphi \oplus \operatorname{Ker}\varphi$.

№24.30(3,22,34)

Вычислить собственные значения и найти максимальную линейно независимую систему собственных векторов. Если найденная система образует базис, записать в нём матрицу преобразования и выяснить его геометрический смысл.

3) $A = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}$

$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(1-\lambda)$

$\lambda = 0$ кратности 1, $\lambda = 1$ кратности 1

$\lambda = 0:\ A = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix} \Rightarrow \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Vmatrix} = C_2 \begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \end{Vmatrix}.$

$\lambda = 1:\ A = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix} \Rightarrow \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Vmatrix} = C_2 \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \end{Vmatrix}.$

~~Геометрически~~

$A' = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$ в базисе $\{\begin{Vmatrix} 0 & 1 \end{Vmatrix}^T, \begin{Vmatrix} 1 & 1 \end{Vmatrix}^T\}$ –

– проекция на прямую $x=y$ параллельно прямой $x=0$

22) $A = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{Vmatrix}$

$$\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix}-\lambda & 0 & 0\\ 0 & -1-\lambda & 1\\ 0 & 0 & -1-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda\begin{vmatrix}-1-\lambda & 1\\ 0 & -1-\lambda\end{vmatrix}=$$

$$=-\lambda(1+\lambda)^2$$

$\lambda=0$ кратности 1, $\lambda=-1$ кратности 2:

$$\lambda=0:\ A\sim\begin{Vmatrix}0&1&-1\\0&0&1\\0&0&0\end{Vmatrix}\sim\begin{Vmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{Vmatrix}\Rightarrow\begin{Vmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{Vmatrix}=C_1\begin{Vmatrix}1\\0\\0\end{Vmatrix}$$

$$\lambda=-1:\ A+E=\begin{Vmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{Vmatrix}\Rightarrow\begin{Vmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{Vmatrix}=C_2\begin{Vmatrix}0\\1\\0\end{Vmatrix}$$

Не образуют базис

34)
$$A=\begin{Vmatrix}1&-1&1&-1\\-1&1&-1&1\\1&-1&1&-1\\-1&1&-1&1\end{Vmatrix}$$

$$\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix}1-\lambda&-1&1&-1\\-1&1-\lambda&-1&1\\1&-1&1-\lambda&-1\\-1&1&-1&1-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-1&1&\lambda-1\\1-\lambda&-1&1&-1\\-1&1-\lambda&-1&1\\1&-1&1-\lambda&-1\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix}1&-1&1&\lambda-1\\0&-\lambda&\lambda&\lambda^2-2\lambda\\0&-\lambda&0&\lambda\\0&0&-\lambda&-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-\lambda&\lambda&\lambda^2-2\lambda\\-\lambda&0&\lambda\\0&-\lambda&-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-\lambda&0&\lambda\\0&\lambda&\lambda^2-3\lambda\\0&-\lambda&-\lambda\end{vmatrix}=$$

$$=-\lambda\begin{vmatrix}\lambda&\lambda^2-3\lambda\\-\lambda&-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda\left(-\lambda^2+\lambda^2(\lambda-3)\right)=-\lambda^3(-1+\lambda-3)=$$

$$=-\lambda^3(\lambda-4)$$

$\lambda=0$ кратности 3 и $\lambda=4$ кратности 1

$$\lambda=0: \quad A \sim \begin{Vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \Rightarrow \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Vmatrix} = C_2 \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix} + C_3 \begin{Vmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix} + C_4 \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix}$$

$\lambda=4$:

$$A-4E = \begin{Vmatrix} -3 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -3 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -3 \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} -4 & -4 & -4 & -4 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \end{Vmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Vmatrix} = C_4 \begin{Vmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{Vmatrix}$$

$$A' = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{Vmatrix}$$ в базисе $\{\|1\ 1\ 0\ 0\|^T, \|-1\ 0\ 1\ 0\|^T, \|1\ 0\ 0\ 1\|^T,$

$\|-1\ 1\ -1\ 1\|^T\}$

Ответ: а) $\lambda=0: \|0\ 1\|^T$, $\lambda=1: \|1\ 1\|^T$

$\begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$ в базисе $\{\|0\ 1\|^T, \|1\ 1\|^T\}$

аа) $\lambda=0: \|1\ 0\ 0\|^T$, $\lambda=-1: \|0\ 1\ 0\|^T$, не образуют базис

34) $\lambda=0$: $e_1=\|1\ 1\ 0\ 0\|^T,\ e_2=\|-1\ 0\ 1\ 0\|^T,\ e_3=\|1\ 0\ 0\ 1\|^T$

$\lambda=4$: $e_4=\|-1\ 1\ -1\ 1\|^T$

$$\begin{Vmatrix} 0&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&4 \end{Vmatrix} \text{ в базисе } \{e_1,e_2,e_3,e_4\}$$

№24.42(1)

Найти собственные значения и собственные векторы дифференцирования D как линейного преобразования пр-ва $\mathcal{P}^{(n)}$.

$$A=\begin{Vmatrix} 0&1&0&0&\cdots&0&0\\ 0&0&2&0&\cdots&0&0\\ 0&0&0&3&\cdots&0&0\\ \vdots&\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\ 0&0&0&0&\cdots&0&n\\ 0&0&0&0&\cdots&0&0 \end{Vmatrix} \text{ — в базисе } \{1,x,x^2,\dots x^n\}$$

$$\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix} -\lambda&1&0&0&\cdots&0&0\\ 0&-\lambda&2&0&\cdots&0&0\\ 0&0&-\lambda&3&\cdots&0&0\\ \vdots&\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\ 0&0&0&0&\cdots&-\lambda&n\\ 0&0&0&0&\cdots&0&-\lambda \end{vmatrix}=(-\lambda)^{n+1}$$

$\lambda=0$ кратности $n+1$

$$A\sim\begin{Vmatrix} 0&1&0&0&\cdots&0&0\\ 0&0&1&0&\cdots&0&0\\ 0&0&0&1&\cdots&0&0\\ \vdots&\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots \end{Vmatrix} \Rightarrow \begin{Vmatrix} x_0\\ x_1\\ x_2\\ \vdots \end{Vmatrix}=C_0\begin{Vmatrix}1\\0\\ \vdots\\ 0\end{Vmatrix}$$

Ответ: Собственные значения $\lambda=0$,

Собственные вектора - константы.

№24.55(1)

$\varphi(X)=AX$ - линейное преобр. пр-ва матриц 2-го порядка. Найти собств. знач. и максимальную линейно независимую систему собственных векторов преобразования φ.

$$A=\begin{Vmatrix}-4&0\\1&4\end{Vmatrix}$$

Пусть B - матрица φ в стандартном базисе:

$$\left\{\begin{Vmatrix}1&0\\0&0\end{Vmatrix},\begin{Vmatrix}0&1\\0&0\end{Vmatrix},\begin{Vmatrix}0&0\\1&0\end{Vmatrix},\begin{Vmatrix}0&0\\0&1\end{Vmatrix}\right\}$$

$$\varphi(X)=AX=\begin{Vmatrix}-4&0\\1&4\end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}-4x_1&-4x_2\\x_1+4x_3&x_2+4x_4\end{Vmatrix}$$

$$\varphi(e_1)=\begin{Vmatrix}-4&0\\1&0\end{Vmatrix};\ \varphi(e_2)=\begin{Vmatrix}0&-4\\0&1\end{Vmatrix};\ \varphi(e_3)=\begin{Vmatrix}0&0\\4&0\end{Vmatrix};\ \varphi(e_4)=\begin{Vmatrix}0&0\\0&4\end{Vmatrix}$$

$$B=\begin{Vmatrix}-4&0&0&0\\0&-4&0&0\\1&0&4&0\\0&1&0&4\end{Vmatrix}$$

$$\det(B-\lambda E)=\begin{vmatrix}-4-\lambda&0&0&0\\0&-4-\lambda&0&0\\1&0&4-\lambda&0\\0&1&0&4-\lambda\end{vmatrix}=-(4+\lambda)\begin{vmatrix}-4-\lambda&0&0\\0&4-\lambda&0\\1&0&4-\lambda\end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -4-\lambda & 4-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = -(4+\lambda)(-4-\lambda)(4-\lambda)^2 = (4+\lambda)^2(4-\lambda)^2$$

$\lambda = -4$ кратности 2 и $\lambda = 4$ кратности 2.

$$\lambda=-4: \quad B+4E = \begin{Vmatrix} 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 1&0&8&0 \\ 1&0&0&8 \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 1&0&0&8 \\ 0&0&8&-8 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \end{Vmatrix} \Rightarrow \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Vmatrix} = c_3 \begin{Vmatrix} -8 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix} + c_4 \begin{Vmatrix} 0 \\ -8 \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix}$$

$$\lambda=4: \quad B-4E = \begin{Vmatrix} -8&0&0&0 \\ 0&-8&0&0 \\ 1&0&0&0 \\ 0&1&0&0 \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 1&0&0&0 \\ 0&1&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \end{Vmatrix} \Rightarrow \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Vmatrix} = c_3 \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix} + c_4 \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix}$$

$$B' = \begin{Vmatrix} -4&0&0&0 \\ 0&-4&0&0 \\ 0&0&4&0 \\ 0&0&0&4 \end{Vmatrix} \text{ в базисе } \left\{ \begin{Vmatrix} -8&0 \\ 1&0 \end{Vmatrix}, \begin{Vmatrix} 0&-8 \\ 0&1 \end{Vmatrix}, \begin{Vmatrix} 0&0 \\ 1&0 \end{Vmatrix}, \begin{Vmatrix} 0&0 \\ 0&1 \end{Vmatrix} \right\}$$

Ответ: $\lambda=-4$, $\lambda=4$, $B' = \begin{Vmatrix} -4&0&0&0 \\ 0&-4&0&0 \\ 0&0&4&0 \\ 0&0&0&4 \end{Vmatrix}$ в базисе $\left\{ \begin{Vmatrix} -8&0 \\ 1&0 \end{Vmatrix}, \begin{Vmatrix} 0&-8 \\ 0&1 \end{Vmatrix}, \begin{Vmatrix} 0&0 \\ 1&0 \end{Vmatrix}, \begin{Vmatrix} 0&0 \\ 0&1 \end{Vmatrix} \right\}$

2 неделя

№24.66

Док-ть, что 1) Kerφ и 2) Imφ линейного преобразования φ являются инвариантными подпространствами.

1) $\varphi(\mathrm{Ker}\varphi)=\{\varphi(x)\mid x\in \mathrm{Ker}\varphi\}=\{0\}\subset \mathrm{Ker}\varphi \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Kerφ - инвариантное подпространство.

2) $\mathrm{Im}\varphi=\{\varphi(x)\mid x\in \mathcal{L}\}$

Выберем $x'\in \mathrm{Im}\varphi$. По определению $\exists x\in\mathcal{L}: \varphi(x)=x'$.

$$\left.\begin{array}{l}\varphi(x')=\varphi(\varphi(x))\\ \varphi(x)\in\mathcal{L}\end{array}\right| \Leftrightarrow \varphi(x')\in \mathrm{Im}\varphi$$

Т.е. из того что $\varphi(x')\in \mathrm{Im}\varphi$ следует, что $\forall x'\in \mathrm{Im}\varphi \Rightarrow$

$\Rightarrow \varphi(\mathrm{Im}\varphi)\subset \mathrm{Im}\varphi \Rightarrow$ Imφ - инвариантное подпространство.

№24.69

$X_{1,2}$ - инвариантные подпространства. Док-ть:

1) X_1+X_2 - инвариантно

$\varphi(X_1+X_2)=\{\varphi(x_1+x_2)\mid x_1\in X_1, x_2\in X_2\}=$

$=\{\varphi(x_1)+\varphi(x_2)\mid x_1\in X_1, x_2\in X_2\}=$

$=\{x_1'+x_2'\mid (x_1'\in X_1, x_2'\in X_2)\,\&\,(\exists x_{1,2}: \varphi(x_{1,2})=x'_{1,2})\}\subset$

$\subset X_1+X_2$ - инвариантно по определению.

2) $X_1 \cap X_2$ - инвариантно

$x \in X_1 \cap X_2 \Rightarrow x \in X_1 \,\&\, x \in X_2 \Rightarrow \varphi(x) \in X_1 \,\&\, \varphi(x) \in X_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \varphi(x) \in X_1 \cap X_2$, т.е. $\varphi(X_1 \cap X_2) \subset X_1 \cap X_2$ -

- инвариантно по определению.

№24.70

φ - линейное преобразование любого пространства. L - линейное подпространство: $\mathrm{Im}\,\varphi \subset L$.

Док-ть: ~~∃~~ L - инвариантно

~~Пусть X - всё пр-во~~

$\varphi(L) \subset \mathrm{Im}\,\varphi$ (т.к. ~~а~~ образ любого вектора пространства лежит в $\mathrm{Im}\,\varphi$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \varphi(L) \subset L$ - инвариантно по определению.

T1

Найти инвариантные подпространства f: поворота на 90° вокруг k, где i, j, k - ортонормированный базис.

$$A = \left\| \begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right\|$$

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ -1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$= (\lambda^2+1)(1-\lambda)$, $\lambda = 1$ кратности 1.

$E_1 = \mathcal{L}(k)$ - инвариантное, т.к. собственное

$\mathcal{L}(i,j)$ - двумерное инвариантное подпространство, не содержащее собственных векторов.

№32.2(3) 3 неделя

Восстановить симметричную билинейную форму в n-мерном пространстве по данной квадратичной форме:

$x_1^2+4x_1x_2+4x_1x_3+5x_2^2+12x_2x_3+7x_3^2$ $(n=3)$

$$B=\begin{Vmatrix}1&2&2\\2&5&6\\2&6&7\end{Vmatrix}$$

Симметричная билинейная форма:

$x_1y_1+2x_1y_2+2x_2y_1+2x_3y_1+2x_1y_3+5x_2y_2+6x_2y_3+$
$+6x_3y_2+7x_3y_3$.

№32.7(2)

$\{e_1,e_2\}$: $3x_1^2+10x_1x_2+9x_2^2$

$e_1'=2e_1-e_2$; $e_2'=e_1-e_2$

$S=\begin{Vmatrix}2&1\\-1&-1\end{Vmatrix}$; $B=\begin{Vmatrix}3&5\\5&9\end{Vmatrix}$

$$B'=S^TBS=\begin{Vmatrix}2&-1\\1&-1\end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix}3&5\\5&9\end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix}2&1\\-1&-1\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}1&1\\-2&-4\end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix}2&1\\-1&-1\end{Vmatrix}=$$

$$=\begin{Vmatrix}1&0\\0&2\end{Vmatrix}\Rightarrow\{e_1',e_2'\}:\ x_1'^2+2x_2'^2$$

Ответ: $x_1'^2+2x_2'^2$

№15.34

A и B - таковы, что для произвольных столбцов

ξ и η выполнено: $\xi^T A \eta = \xi^T B \eta$.

Док-ть: A = B

Пусть A и B размера $n \times m$

Тогда $\xi_{n\times 1}$, $\eta_{m\times 1}$

Выберем $\xi_i = \begin{Vmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{Vmatrix} i$, $\eta_j = \begin{Vmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{Vmatrix} j$, $i \in \overline{1..n}$, $j \in \overline{1..m}$

$\xi_i^T A \eta_j = \| 0 0 \cdots \underset{i}{1} \cdots 0 \| \; A \eta_j = \| (A)_{i1} (A)_{i2} \dots (A)_{im} \| \cdot \begin{Vmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{Vmatrix} j =$

$= \sum_{k=1}^{n} (A)_{ik} \cdot (\eta_j)_k = (A)_{ij}$.

Аналогично $\xi_i^T B \eta_j = (B)_{ij}$

Т.к. в силу произвольности i и j: $(A)_{ij} = (B)_{ij} \Rightarrow$

$\Rightarrow A = B$.

№328 (11, 12)

Привести данную квадратичную форму к каноническому виду с помощью метода Лагранжа или элементарных преобразований её матрицы. Найти ранг, положительный и отрицательный индексы инерции и сигнатуру этой формы.

11) $8x_1^2+8x_2^2+x_3^2+16x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3 =$

$= (8x_1^2+16x_1x_2+8x_2^2) + x_3^2 + 4x_1x_3 + \cancel{(2x_1)^2 - (2x_1)^2} +$

$+ 4x_2x_3 = \cancel{8(x_1+x_2)^2 + (2x_1+x_3)^2 - 4x_1^2 + 4x_2x_3} =$

$= \cancel{\left\{\begin{matrix} x_1' = x_1+x_2 \\ x_2' = 2x_1+x_3 \\ x_3' = x_3 \end{matrix}\right\} = 8x_1'^2 + (2x_1' - 2x_2' + x_3')^2}$

$= 8(x_1+x_2)^2 + x_3^2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3 = \left\{\begin{matrix} x_1' = x_1+x_2 \\ x_2' = x_2 \\ x_3' = x_3 \end{matrix}\right\} =$

$= 8x_1'^2 + x_3'^2 + 4(x_1'-x_2')x_3' + 4x_2'x_3' =$

$= 8x_1'^2 + x_3'^2 + 4x_1'x_3' = 8x_1'^2 + 4x_1'^2 + 4x_1'x_3' + x_3'^2 -$

$-4x_1'^2 = 4x_1'^2 + (2x_1'+x_3')^2 = \left\{\begin{matrix} x_1'' = 2x_1' \\ x_2'' = x_2' \\ x_3'' = 2x_1'+x_3' \end{matrix}\right\} =$

$= \cancel{4}x_1''^2 + x_3''^2 = \left\{\begin{matrix} x_1''' = x_1'' \\ x_2''' = x_3'' \\ x_3''' = x_2'' \end{matrix}\right\} = x_1'''^2 + x_2'''^2 \quad B = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}; \ rgB = 2.$

Положительный индекс инерции $p = 2$.

Отрицательный индекс инерции $q = 0$.

Сигнатура $\sigma = p - q = 2$.

12) $x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3 = \left\{\begin{matrix} 2x_1' = x_1+x_2 \\ 2x_2' = x_1-x_2 \\ x_3' = x_3 \end{matrix}\right\} = \frac{2}{2}(x_1'+x_2')\cdot\frac{2}{2}(x_1'-x_2')+$

$+\frac{2}{2}(x_1'-x_2')x_3'+\frac{2}{2}(x_1'+x_2')x_3' = \frac{4}{4}(x_1'^2-x_2'^2)+\frac{2}{2}\cdot 2x_1'\cdot x_3' =$

$= x_1'^2-x_2'^2+2x_1'x_3' = \cancel{x_1'^2} = x_1'^2+2x_1'x_3'+x_3'^2-x_3'^2-x_2'^2 =$

$= (x_1'+x_3')^2-x_2'-x_3' = \left\{\begin{matrix} x_1'' = x_1'+x_3' \\ x_2'' = x_2' \\ x_3'' = x_3' \end{matrix}\right\} = x_1''^2-x_2''^2-x_3''^2$

Положительный индекс инерции $p=1$

Отрицательный индекс инерции $q=2$

Ранг: $r=p+q=3$

Сигнатура: $\sigma=p-q=-1$.

Ответ: 11) $x_1''^2+x_2''^2$, $p=2, q=0, r=2, \sigma=2$

12) $x_1''^2-x_2''^2-x_3''^2$, $p=1, q=2, r=3, \sigma=-1$.

№32.9(11, 12)

Выяснить какие формы являются положительно определёнными, отрицательно определёнными, полуопределёнными.

11) $B=\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$, ~~$\Delta_1=1, \Delta_2=1, \Delta_3=0$~~

$q=0, r=2<3 \Rightarrow$ полуопределена положительно.

18) $B = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{Vmatrix}$ $p \geq 1$ $q \geq 1$ => неопределена

~~$\Delta_1 > 0, \Delta_2 < 0, \Delta_3 > 0$ отрицательно определена~~

~~$p \geq 1, q \geq$~~ ~~$p \geq 1, q \geq 1$ => неопределена.~~

№32.16

Док-ть: $k(x)$ отрицательно определена <=>

<=> $\operatorname{sign} \Delta_n = (-1)^n$.

$\triangleright$ В некотором базисе $B = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n)$. $\lambda_i = 0, -1, 1$

Отрицательно определена <=> $\forall i \in \overline{1 \dots n}$ $\lambda_i = -1$.

$\Delta_k = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_k = (-1)^k$

Знак минора не зависит от ~~матрицы~~ базиса => в любом базисе $\operatorname{sign} \lambda_k = (-1)^k$ $\triangleleft$

№32.18 (4)

$\lambda = ?$: определена положительно, отрицательно, полуопределена.

$k(x) = x_1^2 + 2\lambda x_1 x_2 + 2x_1 x_3 + 4x_2^2 - \lambda x_3^2 + 2x_2 x_3$

$B = \begin{Vmatrix} 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & 4 & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{Vmatrix}$

$\Delta_1 = 1 > 0$ => $k(x)$ не может быть отрицательно определена (по критерию Сильвестра)

Положительно определена: ~~при~~

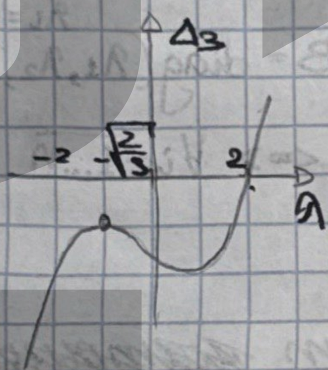
$\Delta_2 = 4 - \lambda^2 > 0 \Rightarrow \lambda^2 < 4 \Rightarrow \lambda \in (-2;2)$

$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} - \lambda \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -4\lambda - 1 - \lambda(-\lambda^2 - 1) +$

$+ \lambda - 4 = \lambda(\lambda^2 + 1) - 3\lambda - 5 = \lambda^3 - 2\lambda - 5$

$\Delta_3(\lambda = 2) = 8 - 4 - 5 < 0$

$\Delta_3' = 3\lambda^2 - 2 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$



$\Delta_3\left(\lambda = -\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = -\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}} + 2\sqrt{\frac{2}{3}} - 5 =$

$= \frac{4}{3}\sqrt{\frac{8}{3}} - 5 < 0$

Таким образом, при $\lambda \in (-2;2)$

$\Delta_2 > 0, \Delta_3 < 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ К не может быть

~~отрицательно определённой. положительно полуопределённой~~

положительно определённой (по критерию Сильвестра)

Ответ: при всех λ К неопределена.

№25.2(1) 4 неделя

Может ли скалярное произведение в n-мерном линейном пр-ве задаваться формулой:

$x_1y_1+2x_2y_2$; а) $n=2$; б) $n=3$

Проверка аксиом: а) $x=\begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Vmatrix}$, б) $x=\begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Vmatrix}$

1) $(x,y)=x_1y_1+2x_2y_2=y_1x_1+2y_2x_2=(y,x)$

2) $(x+y,z)=(x_1+y_1)z_1+2(x_2+y_2)z_2=$

$=(x_1z_1+2x_2z_2)+(y_1z_1+2y_2z_2)=(x,z)+(y,z)$

3) $(\alpha x,y)=(\alpha x_1)y_1+2(\alpha x_2)y_2=\alpha(x,y)$

4) $(x,x)=x_1\cdot x_1+2x_2\cdot x_2=x_1^2+2x_2^2.$

а) Если $x\neq 0$, то $x_1\neq 0$ или $x_2\neq 0 \Rightarrow x_1^2+2x_2^2>0$ - выполнено

б) ~~Если~~ Пусть $x=\begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix}$, тогда $(x,x)=0$ при $x\neq 0$ - не выполнено.

Ответ: а) Может; б) Не может.

№25.7

В линейном пространстве функций, непрерывных на $[-1;1]$, функциям f и g сопоставляется число $(f,g)=\int_{-1}^{0} f(t)g(t)dt.$

Док-ть: (f,g) - скалярное произведение

Т.к. $f(t)$ и $g(t)$ - непрерывны на $[-1;1]$, то $f(t)\cdot g(t)$ ~~сущ~~ непрерывна на $[-1;1]$, а значит $\forall f, g$ определено (f,g).

Проверка аксиом:

1) $(f,g) = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt = \int_{-1}^{1} g(t)f(t)dt = (g,f)$ - выполнено.

2) $(f+g,h) = \int_{-1}^{1} (f(t)+g(t))h(t)dt = \int_{-1}^{1} f(t)h(t)dt + \int_{-1}^{1} g(t)h(t)dt = (f,h)+(g,h)$ - выполнено.

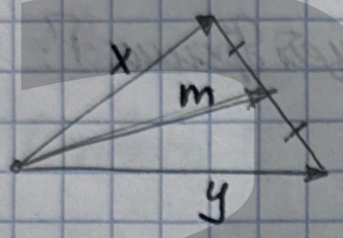
3) $(\alpha f, g) = \int_{-1}^{1} (\alpha f(t))g(t)dt = \alpha \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt = \alpha(f,g)$ - выполнено.

4) $(f,f) = \int_{-1}^{1} f^2(t)dt \Rightarrow (f,f) > 0$ при $f \neq 0$ - выполнено

1-4) $\Rightarrow (f,g)$ - скалярное произведение (по определению).

№25.17

Док-ть, что медиана треугольника в евклидовом пр-ве короче одной из ~~его~~ сторон, между которыми она лежит.



$$m = \frac{1}{2}(x+y)$$

$$|m|^2 = (m,m) = \frac{1}{4}(x+y,x+y) = \frac{1}{4}\big((x,x)+(y,y)+2(x,y)\big) <^{*}$$

$$< \frac{1}{4}\left(|x|^2+|y|^2+2|x||y|\right) = \left(\frac{1}{2}(|x|+|y|)\right)^2$$

$*$ - т.к. равенство достигается только при

$\cos(x,y) = 1 \Rightarrow \angle(x,y) = \pi k$ - не треугольник.

Таким образом, $|m| < \frac{1}{2}(|x|+|y|) < \max\{|x|,|y|\} \le$ (по неравенству о среднем)

№25.23

В некотором базисе e: $|x|^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2$, $\forall x$.

Док-ть: e - ортонормированный.

$$|x|^2 = (x,x) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} x_j e_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j (e_i, e_j)$$

$$\left.\begin{aligned} |x|^2 &= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = x^T x = x^T E x \\ |x|^2 &= (x,x) = x^T \Gamma x \end{aligned}\right| \Rightarrow x^T E x = x^T \Gamma x \quad \forall x$$

Как было показано в №15.34, из этого следует, что $\Gamma = E$, т.е. $(e_i, e_j) = \delta_{ij}$ => e - ортонормированный базис.

№25.25(2)

Найти (a,b) в базисе с матрицей Грама Γ:

$$a = \begin{Vmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{Vmatrix}; \ b = \begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{Vmatrix}; \ \Gamma = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 8 & 14 \end{Vmatrix}$$

$$(a,b) = a^T \Gamma b = \begin{Vmatrix} -1 & -1 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 8 & 14 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 3 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{Vmatrix} =$$

$= 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 3 \cdot 3 = 10.$

Ответ: 10.

№25.26(б)

Найти угол между векторами:

$c_{18} = \begin{Vmatrix} 3 \\ 1 \end{Vmatrix}$, $c_{12} = \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \end{Vmatrix}$, базис с $\Gamma = \begin{Vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{Vmatrix}$

$$|c_{18}|^2 = (c_{18}, c_{18}) = c_{18}^T \Gamma c_{18} = \begin{Vmatrix} 3 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 3 \\ 1 \end{Vmatrix} =$$

$= \begin{Vmatrix} 1 & -1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 3 \\ 1 \end{Vmatrix} = 2.$ => $|c_{18}| = \sqrt{2}$.

$$|c_{12}|^2 = (c_{12}, c_{12}) = c_{12}^T \Gamma c_{12} = \begin{Vmatrix} 1 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \end{Vmatrix} =$$

$= \left\| -1 \; 3 \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} \right\| = -1 + 3 = 2 \Rightarrow |c_{12}| = \sqrt{2}.$

$\angle c_{12}, c_{18} = \arccos \left\{ \dfrac{(c_{12}, c_{18})}{|c_{12}| \cdot |c_{18}|} \right\} = \arccos \left(\dfrac{\left\| 1 \; 1 \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} 3 \\ 1 \end{matrix} \right\|}{2} \right) =$

$= \arccos \left(\frac{1}{2} \left\| -1 \; 3 \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} 3 \\ 1 \end{matrix} \right\| \right) = \arccos \left(\frac{1}{2} (-3+3) \right) = \arccos 0 =$

$= \frac{\pi}{2}.$

Ответ: $\frac{\pi}{2}.$

№25.37

$P^{(2)}$ - пр-во многочленов степени не выше 2.

$(p,q) = \int_{-1}^{1} p(t) q(t) dt$

Найти матрицу Грама стандартного базиса: $\{1, t, t^2\}$

$\cancel{(e_1, e_1)}$ $(1,1) = \int_{-1}^{1} dt = 2.$

$(1,t) = \int_{-1}^{1} t dt = \frac{t^2}{2} \Big|_{-1}^{1} = 0$

$(1,t^2) = \int_{-1}^{1} t^2 dt = \frac{t^3}{3} \Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{3} \cdot 2 = \frac{2}{3}.$

$(t,t) = \int_{-1}^{1} t^2 dt = \frac{2}{3};$

$$(t,t^2)=\int_{-1}^{1} t^3\,dt=\frac{t^4}{4}\Big|_{-1}^{1}=0$$

$$(t^2,t^2)=\int_{-1}^{1} t^4\,dt=\frac{t^5}{5}\Big|_{-1}^{1}=\frac{2}{5};$$

Ответ: $\Gamma=\begin{Vmatrix} 2 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{5} \end{Vmatrix}$

№26.13(3)

$\mathcal{L}=\mathcal{L}(a_1,a_2)$, $a_1=\|3\ -15\ 9\ 1\|^T$, $a_2=\|3\ -6\ -3\ 2\|^T$

Координаты в ОНБ.

Найти:

а) Матрицу системы уравнений, определяющую $\mathcal{L}^\perp$.

a_1 и a_2 неколлинеарны $\Rightarrow \{a_1,a_2\}$ - базис в $\mathcal{L}$.

$$x\in\mathcal{L}^\perp \Leftrightarrow (x,a_1)=(x,a_2)=0 \Rightarrow \begin{cases} 3x_1-15x_2+9x_3+x_4=0 \\ 3x_1-6x_2-3x_3+2x_4=0 \end{cases}$$

Матрица: $A=\begin{Vmatrix} 3 & -15 & 9 & 1 \\ 3 & -6 & -3 & 2 \end{Vmatrix}$

б) базис в $\mathcal{L}^\perp$

$$A\sim\begin{Vmatrix} 3 & -15 & 9 & 1 \\ 0 & 9 & -12 & 1 \end{Vmatrix}\sim\begin{Vmatrix} 1 & -5 & 3 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{4}{3} & \frac{1}{9} \end{Vmatrix}\sim\begin{Vmatrix} 1 & 0 & -\frac{11}{3} & \frac{8}{9} \\ 0 & 1 & -\frac{4}{3} & \frac{1}{9} \end{Vmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Vmatrix}=C_3\begin{Vmatrix} \frac{11}{3} \\ \frac{4}{3} \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix}+C_4\begin{Vmatrix} -\frac{8}{9} \\ -\frac{1}{9} \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix}=C_3\begin{Vmatrix} 11 \\ 4 \\ 3 \\ 0 \end{Vmatrix}+C_4\begin{Vmatrix} -8 \\ -1 \\ 0 \\ 9 \end{Vmatrix}$$

Ответ: а) $A = \begin{Vmatrix} 3 & -15 & 9 & 1 \\ 3 & -6 & -3 & 2 \end{Vmatrix}$

б) $\{\|11\ 4\ 3\ 0\|^T, \|-8\ -1\ 0\ 9\|^T\}$

№ 26.14 (3)

$\mathcal{L}$ задано системой $A\xi = 0$, $A = \begin{Vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{Vmatrix}$

Найти базис $\mathcal{L}^\perp$

$$A \sim \begin{Vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -7 & 5 & 1 \\ 0 & 7 & -5 & -1 \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{7} & -\frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 1 & 0 & \frac{8}{7} & \frac{17}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{7} & -\frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{Vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{Vmatrix} = C_3 \begin{Vmatrix} -8 \\ +5 \\ 7 \\ 0 \end{Vmatrix} + C_4 \begin{Vmatrix} -17 \\ 1 \\ 0 \\ 7 \end{Vmatrix}.$$

$$x \in \mathcal{L}^\perp \Leftrightarrow (x, \|-8\ 5\ 7\ 0\|^T) = (x, \|-17\ 1\ 0\ 7\|^T) = 0$$

$$\begin{Vmatrix} -8 & 5 & 7 & 0 \\ -17 & 1 & 0 & 7 \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} -8 & 5 & 7 & 0 \\ -1 & -9 & -14 & 7 \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 1 & 9 & 14 & -7 \\ -8 & 5 & 7 & 0 \end{Vmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{Vmatrix} 1 & 9 & 14 & -7 \\ 0 & 77 & 117 & -56 \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 1 & 9 & 14 & -7 \\ 0 & 11 & 17 & -8 \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 1 & 9 & 14 & -7 \\ 0 & 1 & \frac{17}{11} & -\frac{8}{11} \end{Vmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{Vmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{11} & -\frac{5}{11} \\ 0 & 1 & \frac{17}{11} & -\frac{8}{11} \end{Vmatrix} \Rightarrow \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Vmatrix} = C_3 \begin{Vmatrix} -1 \\ -17 \\ 11 \\ 0 \end{Vmatrix} + C_4 \begin{Vmatrix} 5 \\ 8 \\ 0 \\ 11 \end{Vmatrix}$$

Ответ: $\{\|-1\ -17\ 11\ 0\|^T, \|5\ 8\ 0\ 11\|^T\}$

№26.15(4)

$\mathcal{L}$ задано системой $A\xi = 0$. Найти систему уравнений $\mathcal{L}^{\perp}$

$$\begin{cases} 5x_1 + 24x_2 - 7x_3 - 3x_4 = 0 \\ -x_1 - 2x_2 + 7x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{Vmatrix} 5 & 24 & -7 & -3 \\ -1 & -2 & 7 & 3 \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 4 & 22 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -7 & -3 \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 2 & 11 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -7 & -3 \end{Vmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{Vmatrix} 0 & 7 & 14 & 6 \\ 1 & 2 & -7 & -3 \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 1 & 2 & -7 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{6}{7} \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 1 & 0 & -11 & -\frac{33}{7} \\ 0 & 1 & 2 & \frac{6}{7} \end{Vmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{Vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{Vmatrix} = C_3 \begin{Vmatrix} 11 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix} + C_4 \begin{Vmatrix} 33 \\ -6 \\ 0 \\ 7 \end{Vmatrix} = C_3 \begin{Vmatrix} 11 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix} + C_4 \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \\ 7 \end{Vmatrix}$$

$$\xi \in \mathcal{L}^{\perp} \Rightarrow (\xi, \|11\ {-2}\ 1\ 0\|^T) = (\xi, \|0\ 0\ {-3}\ 7\|^T) = 0 \Rightarrow$$

$$\cancel{\Rightarrow \begin{cases} 11\xi_1 - 2\xi_2 + \xi_3 + 0\xi_4 = 0 \\ 33\xi_1 - 6\xi_2 + 0\xi_3 + 7\xi_4 = 0 \end{cases}} \qquad B = \begin{Vmatrix} 11 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & +3 & -7 \end{Vmatrix}$$

$$\cancel{\begin{Vmatrix} 11 & -2 & 1 & 0 \\ 33 & -6 & 0 & 7 \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 11 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 7 \end{Vmatrix}}$$

$$\cancel{\xi_1 = \frac{2}{11}\xi_2 - \frac{1}{11}\xi_3}$$

$$\cancel{\xi_3 = +\frac{7}{3}\xi_4}$$

$$\cancel{\begin{Vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{Vmatrix} = C_2 \begin{Vmatrix} \frac{2}{11} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix} + C_4 \begin{Vmatrix} -\frac{7}{33} \\ 0 \\ \frac{7}{3} \\ 1 \end{Vmatrix} = C_2 \begin{Vmatrix} 2 \\ 11 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix} + C_4 \begin{Vmatrix} -7 \\ 0 \\ 77 \\ 33 \end{Vmatrix}}$$

Ответ: $\begin{cases} 11\xi_1 - 2\xi_2 + \xi_3 = 0 \\ 3\xi_3 - 7\xi_4 = 0 \end{cases}$

№26.16 (1)

$\mathcal{L}$ задано в базисе с матрицей Грама Γ системой $A\xi = 0$

$$A = \|1\ 2\ 1\|^T, \quad \Gamma = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{Vmatrix}$$

Найти: а) базис в $\mathcal{L}^\perp$; б) матрицу системы $\mathcal{L}^\perp$

$$A \cdot \xi = \begin{Vmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{Vmatrix}^T \cdot \begin{Vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{Vmatrix} = \xi_1 + 2\xi_2 + \xi_3 = 0 \Rightarrow \begin{Vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{Vmatrix} = C_2 \begin{Vmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix} + C_3 \begin{Vmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix}$$

$$\xi \in \mathcal{L}^\perp \Rightarrow (\xi, \|-2\ 1\ 0\|^T) = (\xi, \|-1\ 0\ 1\|^T) = 0$$

$$(\xi, \|-2\ 1\ 0\|^T) = \xi^T \Gamma \cdot \begin{Vmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix} = \|\xi_1\ \xi_2\ \xi_3\| \cdot \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix} =$$

$$= \|\xi_1\ \xi_2\ \xi_3\| \cdot \begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{Vmatrix} = \xi_2 - 2\xi_3 = 0$$

$$(\xi, \|-1\ 0\ 1\|^T) = \xi^T \Gamma \cdot \begin{Vmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix} = \xi^T \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix} = \xi^T \cdot \begin{Vmatrix} -1 \\ -4 \\ 5 \end{Vmatrix} =$$

$$= -\xi_1 - 4\xi_2 + 5\xi_3.$$

Матрица системы $\mathcal{L}^{\perp}$: $A^{\perp} = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & -5 \end{Vmatrix}$

$$A^{\perp} \sim \begin{Vmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & -2 \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{Vmatrix} \to \begin{Vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{Vmatrix} = C_3 \begin{Vmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{Vmatrix}$$

Ответ: а) $\{\|-3\ \ 2\ \ 1\|^T\}$; б) $A^{\perp} = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & -5 \end{Vmatrix}$

№26.27(4,5)

$\mathcal{L} = \mathcal{L}(a_1, a_2)$, координаты даны в ОНБ.

x с координатами ξ

ξ' и ξ'' - проекции вектора ξ на $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}^{\perp}$.

Найти: ξ' и ξ''

4) $a_1 = \|3\ \ -2\ \ 1\ \ 1\|^T$, $a_2 = \|1\ \ 0\ \ -1\ \ 1\|^T$, $\xi = \|2\ \ -1\ \ 3\ \ -2\|^T$

$x = \cancel{\xi}\ x' + x''$, где $x' \in \mathcal{L}$, $x'' \in \mathcal{L}^{\perp}$

$x = \cancel{\xi}\ x_1 a_1 + x_2 a_2 + x''$

$$\begin{cases} (x, a_1) = x_1 (a_1, a_1) + x_2 (a_1; a_2) \\ (x, a_2) = x_1 (a_1, a_2) + x_2 (a_2, a_2) \end{cases}$$

$(x, a_1) = 6 + 2 + 3 - 2 = 9$

$(x, a_2) = 2 - 3 - 2 = -3$

$(a_1, a_2) = 3 - 1 + 1 = 3$

$(a_1, a_1) = 9 + 4 + 1 + 1 = 15$

$(a_2, a_2) = 1 + 1 + 1 = 3$

$$\begin{cases} 9 = 18x_1 + 3x_2 \\ -3 = 3x_1 + 3x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 + x_2 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -2 \end{cases}$$

$$\xi' = a_1 - 2a_2 = \|3\ -2\ 1\ 1\|^T - 2\|1\ 0\ -1\ 1\|^T = \|1\ -2\ 3\ -1\|^T$$

$$\xi\ x'' = x - x' \Rightarrow \xi'' = \xi - \xi' = \|2\ -1\ 3\ -2\|^T - \|1\ -2\ 3\ -1\|^T =$$

$$= \|1\ 1\ 0\ -1\|^T$$

5) $a_1 = \|2\ 3\ 0\ 1\|^T$, $a_2 = \|0\ 5\ -2\ -1\|^T$, $\xi = \|6\ 0\ 4\ 2\|^T$

Аналогично пункту 4):

$(x, a_1) = 12 + 2 = 14$

$(x, a_2) = -8 - 2 = -10$

$(a_1, a_1) = 4 + 9 + 1 = 14$

$(a_1, a_2) = 15 - 1 = 14$

$(a_2, a_2) = 25 + 4 + 1 = 30$

$$\begin{cases} 14 = 14x_1 + 14x_2 \\ -10 = 14x_1 + 30x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ 7x_1 + 15x_2 = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x_2 = -12 \\ x_1 = 1 + \frac{12}{8} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_2 = -\frac{3}{2};\ x_1 = \frac{5}{2}$$

$$\xi' = \frac{1}{2}(5a_1 - 3a_2) = \frac{1}{2}(5\|2\ 3\ 0\ 1\|^T - 3\|0\ 5\ -2\ -1\|^T) =$$

$$\cancel{= \frac{1}{2}\|6\ 16\ -10\ -8\|^T = \|-3\ 8\ -5\ -4\|^T}$$

$$= \frac{1}{2}\|10\ 0\ 6\ 8\|^T = \|5\ 0\ 3\ 4\|^T.$$

$\xi'' = \xi - \xi' = \cancel{\|1\ 6\ -1\ 2\|^T} = \|1\ 0\ 1\ -2\|^T$

Ответ: ~~ξ~~ 4) $\xi' = \|1\ -2\ 3\ -1\|^T$, $\xi'' = \|1\ 1\ 0\ -1\|^T$

5) $\xi' = \|5\ 0\ 3\ 4\|^T$, $\xi'' = \|1\ 0\ 1\ -2\|^T$

№26.42 (5, 6)

Ортагонализировать систему векторов арифметического пр-ва, со стандартным скалярным произведением.

5) $a_1 = \|1\ 2\ 3\|^T$, $a_2 = \|2\ 1\ 1\|^T$, $a_3 = \|6\ -7\ -2\|^T$

$f_1 = a_1$, $\|f_1\| = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$

$f_2 = a_2 + \alpha_1 f_1$, $\alpha_1 = -\dfrac{(a_2, f_1)}{|f_1|^2} = -\dfrac{2+2+3}{1+4+9} = -\dfrac{7}{14} = -\dfrac{1}{2}$.

$f_2 = a_2 - \dfrac{1}{2} a_1 = \|2\ 1\ 1\|^T - \|\tfrac{1}{2}\ 1\ \tfrac{3}{2}\|^T = \|\tfrac{3}{2}\ 0\ -\tfrac{1}{2}\|^T$

$|f_2| = \sqrt{\dfrac{9}{4} + \dfrac{1}{4}} = \dfrac{1}{2}\sqrt{10}$

$f_3 = a_3 + \alpha_2 f_1 + \alpha_3 f_2$, $\alpha_2 = -\dfrac{(a_3, f_1)}{|f_1|^2} = -\dfrac{6-14-6}{14} = 1$

$\alpha_3 = -\dfrac{(a_3, f_2)}{|f_2|^2} = -\dfrac{9+1}{\frac{1}{4}\cdot 10} = -4.$

$f_3 = a_3 + f_1 - 4f_2 = \|6\ -7\ -2\|^T + \|1\ 2\ 3\|^T - \|6\ 0\ -2\|^T =$

$= \| 1 \; -5 \; 3 \|^T$

$\cancel{\|f_3\| = \sqrt{35}}$

в) $a_1 = \| 1 \; 2 \; 1 \; 2 \|^T, \; a_2 = \| 4 \; 0 \; 4 \; 1 \|^T, \; a_3 = \| 1 \; 13 \; -1 \; -3 \|^T$

$f_1 = a_1, \quad |f_1| = \sqrt{10}$

$f_2 = a_2 + \alpha_1 f_1, \quad \alpha_1 = -\dfrac{(a_2, f_1)}{|f_1|^2} = -\dfrac{4+0+4+2}{10} = -1$

$f_2 = a_2 - f_1 = \| 3 \; -2 \; 3 \; -1 \|^T, \quad |f_2| = \sqrt{9+4+9+1} = \sqrt{23}$

$f_3 = a_3 + \alpha_2 f_1 + \alpha_3 f_2, \quad \alpha_2 = -\dfrac{(a_3, f_1)}{(f_1, f_1)} = -\dfrac{1+26-1-6}{10} = -2.$

$\alpha_3 = -\dfrac{(a_3, f_2)}{|f_2|^2} = -\dfrac{3-26-3+3}{23} = 1.$

$f_3 = a_3 - 2 f_{\cancel{2}1} + f_2 = \| 2 \; 7 \; 0 \; -8 \|^T$

Ответ: б) $\| 1 \; 2 \; 3 \|^T, \| 3 \; 0 \; -1 \|^T, \| 1 \; -5 \; 3 \|^T$

в) $\| 1 \; 2 \; 1 \; 2 \|^T, \| 3 \; -2 \; 3 \; -1 \|^T, \| 2 \; 7 \; 0 \; -8 \|^T$

№26.44 (2)

Ортагонализировать и нормировать систему векторов, заданную в базисе с матрицей Грама Г:

$a_1 = \| 1 \; 2 \; 0 \|^T, \; a_2 = \| 2 \; 0 \; 3 \|^T, \; a_3 = \| 1 \; 8 \; 6 \|^T, \; \Gamma = \begin{Vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{Vmatrix}$

$f_1 = a_1 = \|1\ 2\ 0\|^T$

$f_2 = a_2 + \alpha f_1$, где α: $(f_1, f_2) = 0 \Rightarrow \alpha = -\dfrac{(a_2, f_1)}{(f_1, f_1)}$

$(a_2, f_1) = \|2\ 0\ 3\| \cdot \begin{Vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{Vmatrix} = \|2\ 0\ 3\| \cdot \begin{Vmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{Vmatrix} = 14.$

$(f_1, f_1) = \|1\ 2\ 0\| \cdot \begin{Vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{Vmatrix} = \|1\ 2\ 0\| \cdot \begin{Vmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{Vmatrix} = 14.$

$\alpha = -1$, $f_2 = \|2\ 0\ 3\|^T - \|1\ 2\ 0\|^T = \|1\ {-2}\ 3\|^T$

$f_3 = a_3 + \beta f_1 + \gamma f_2$, где β, γ: $(f_1, f_3) = (f_2, f_3) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \beta = -\dfrac{(a_3, f_1)}{(f_1, f_1)}$, $\gamma = -\dfrac{(a_3, f_2)}{(f_2, f_2)}$

$(a_3, f_1) = \|1\ 8\ 6\| \cdot \begin{Vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{Vmatrix} = \|1\ 8\ 6\| \cdot \begin{Vmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{Vmatrix} = 56$

$(a_3, f_2) = \|1\ 8\ 6\| \cdot \begin{Vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{Vmatrix} = \|1\ 8\ 6\| \cdot \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{Vmatrix} = 24$

$(f_2, f_2) = \|1\ {-2}\ 3\| \cdot \begin{Vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{Vmatrix} = \|1\ {-2}\ 3\| \cdot \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{Vmatrix} = 12.$

$\beta = -4$, $\gamma = -2$

$f_3 = a_3 - 4f_1 - 2f_2 = \|1\ 8\ 6\|^T - 4\|1\ 2\ 0\|^T - 2\|1\ {-2}\ 3\|^T =$

$= \|-5\ 4\ 0\|^T$

$$(f_3, f_3) = \|-5\ 4\ 0\| \cdot \begin{Vmatrix}2&1&0\\1&2&1\\0&1&2\end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix}-5\\4\\0\end{Vmatrix} = \|-6\ 3\ 4\| \begin{Vmatrix}-5\\4\\0\end{Vmatrix} = 42$$

$$e_1 = \frac{f_1}{\sqrt{(f_1,f_1)}} = \frac{1}{\sqrt{14}}\|1\ 2\ 0\|^T, \quad e_2 = \frac{f_2}{\sqrt{(f_2,f_2)}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\|1\ {-2}\ 3\|^T$$

$$e_3 = \frac{f_3}{\sqrt{(f_3,f_3)}} = \frac{1}{\sqrt{42}}\|-5\ 4\ 0\|^T$$

Ответ: $e_1 = \frac{1}{\sqrt{14}}\|1\ 2\ 0\|^T$

$e_2 = \frac{1}{2\sqrt{3}}\|1\ {-2}\ 3\|^T$

$e_3 = \frac{1}{\sqrt{42}}\|-5\ 4\ 0\|^T$

I2

Система многочленов: $1, t, t^2$.

$$(f,g) = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\,dt$$

Ортогонализировать систему.

$$f_1 = 1, \quad |f_1|^2 = \int_{-1}^{1} dt = 2 \Rightarrow |f_1| = \sqrt{2}$$

$$f_2 = t + \alpha f_1 = t + \alpha$$

$$(f_2, f_1) = \int_{-1}^{1} 1\cdot(t+\alpha)\,dt = \frac{t^2}{2}\Big|_{-1}^{1} + \alpha\cdot 2 = 0 + 2\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0$$

$f_2 = t$ ~~$\frac{1}{2}$~~.

$f_3 = t^2 + \beta \cdot 1 + \gamma \cdot t$

$(f_1, f_3) = \int_{-1}^{1} (t^2 + \gamma t + \beta) dt = \frac{t^3}{3}\Big|_{-1}^{1} + \gamma \frac{t^2}{2}\Big|_{-1}^{1} + \beta \cdot 2 =$

$= \frac{2}{3} + 2\beta = 0 \Rightarrow \beta = -\frac{1}{3}.$

$(f_2, f_3) = \int_{-1}^{1} (t^3 + \gamma t^2 + \beta t) dt = \frac{t^4}{4}\Big|_{-1}^{1} + \gamma \frac{t^3}{3}\Big|_{-1}^{1} + \beta \frac{t^2}{2}\Big|_{-1}^{1} =$

$= \gamma \cdot \frac{2}{3} = 0 \Rightarrow \gamma = 0$

$f_3 = t^2 - \frac{1}{3}.$

Ответ: $f_1 = 1,\ f_2 = t,\ f_3 = t^2 - \frac{1}{3}.$

№29.14 (1,4)

Может ли самосопряжённое f в каком либо базисе иметь матрицу:

1) $A=\begin{Vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{Vmatrix}$

$\cancel{f(x)=Ax=\begin{Vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Vmatrix}= 2x_1+3x_2 \begin{Vmatrix} 2x_1+3x_2 \\ 3x_1+5x_2 \end{Vmatrix} =}$

A-симметрична => A-матрица самосопряжённого преобразования в ОНБ

4) $A=\begin{Vmatrix} 4 & -3 \\ 12 & -8 \end{Vmatrix}$

$\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix} 4-\lambda & -3 \\ 12 & -8-\lambda \end{vmatrix} = -(4-\lambda)(\lambda+8)+3\cdot 12 =$

$= -4\lambda-32+\lambda^2+8\lambda+36 = +\lambda^2+4\lambda+4 = (\lambda+2)^2$

~~-2 действительных корня =>~~

=> f - самосопряжённое.

$A-(-2)E=\begin{Vmatrix} 6 & -3 \\ 12 & -6 \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}$ =>

=> $\dim E_{-2} = 1 < 2$ => A - не является матрицей самосопряжённого.

Ответ: 1) да; 4) нет.

№29.19 (7,10)

Найти матрицу перехода S к ортонормированному базису из собственных векторов преобразования φ и матрицу φ в этом базисе.

7)

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{Vmatrix}$$

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 1-\lambda & -2 \\ 2 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 1-\lambda & -2 \\ 0 & -3+\lambda & 3-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda - 3 \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 1-\lambda & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \lambda - 3 \begin{vmatrix} 3-\lambda & 3-\lambda & 0 \\ 2 & 1-\lambda & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= -(\lambda-3)^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1-\lambda & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= -(\lambda-3)^3 \left(-(1-\lambda) + 2 - (-2)\right) = -(\lambda-3)^2(\lambda+3)$$

$$A - 3E = \begin{Vmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \to$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix}, \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix} \right\} \text{ – базис в } E_3$$

$$A+3E=\begin{Vmatrix}4&2&2\\2&4&-2\\2&-2&4\end{Vmatrix}\sim\begin{Vmatrix}2&1&1\\1&2&-1\\1&-1&2\end{Vmatrix}\sim\begin{Vmatrix}1&2&-1\\0&-3&3\\0&-3&3\end{Vmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{Vmatrix}1&2&-1\\0&-3&3\\0&-3&3\end{Vmatrix}\sim\begin{Vmatrix}1&2&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{Vmatrix}\sim\begin{Vmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\0&0&0\end{Vmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{Vmatrix}-1\\1\\1\end{Vmatrix}\right\}\text{ - базис в } E_{-3}.$$

$f_1=\|1\ 1\ 0\|^T,\ |f_1|=\sqrt{2}.$

$$f_2=a_2+\alpha f_1,\quad \alpha=-\frac{(a_2,f_1)}{|f_1|^2}=-\frac{1}{2}$$

$$f_2=\|1\ 0\ 1\|^T-\frac{1}{2}\|1\ 1\ 0\|^T=\frac{1}{2}\|1\ -1\ 2\|^T$$

$$|f_2|=\frac{1}{2}\sqrt{1+1+4}=\frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$f_3=a_3+\beta f_1+\gamma f_2,\quad \beta=-\frac{(a_3,f_1)}{|f_1|^2}=0$$

$$\gamma=-\frac{(a_3,f_2)}{|f_2|^2}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{-1-1+2}{\frac{6}{4}}=0$$

$$f_3=a_3=\|-1\ 1\ 1\|^T,\quad |f_3|=\sqrt{3}.$$

$$e_1'=\frac{1}{\sqrt{2}}\|1\ 1\ 0\|^T,\ e_2'=\frac{1}{\sqrt{6}}\|1\ -1\ 2\|^T,\ e_3=\frac{1}{\sqrt{3}}\|-1\ 1\ 1\|^T$$

$$S=\begin{Vmatrix}1/\sqrt{2}&1/\sqrt{6}&-1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{2}&-1/\sqrt{6}&1/\sqrt{3}\\0&2/\sqrt{6}&1/\sqrt{3}\end{Vmatrix}=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{Vmatrix}\sqrt{3}&1&-\sqrt{2}\\\sqrt{3}&-1&\sqrt{2}\\0&2&\sqrt{2}\end{Vmatrix}$$

В этом базисе матрица φ:

$$A' = \begin{Vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{Vmatrix}$$

~~Ответ:~~

10) $$A = \begin{Vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \end{Vmatrix}$$

$$\det(A-\lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 2 \\ -1 & 1-\lambda & -2 \\ 2 & -2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \lambda-1 & 2 \\ 1-\lambda & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & \lambda-1 & 2 \\ 0 & -1+(\lambda-1)^2 & 2+2(\lambda-1) \\ 0 & -2-2\lambda+2 & 4-\lambda-4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda^2-2\lambda & 2\lambda \\ -2\lambda & -\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda^2 \begin{vmatrix} \lambda-2 & 2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = \lambda^2(-\lambda+2+4) = \lambda^2(6-\lambda)$$

$$A-0E = \begin{Vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix}, \begin{Vmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix} \right\} \text{ - базис в } E_0$$

$$A-6E = \begin{Vmatrix} -5 & -1 & 2 \\ -1 & -5 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 5 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & -24 & -12 \\ 0 & -6 & -3 \end{Vmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{Vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{Vmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{Vmatrix} \right\} \text{ - базис в } E_6.$$

$f_1 = \|1\ -1\ 2\|^T$, $|f_1| = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}$.

$f_2 = a_2 + \alpha f_1$, $\alpha = -\dfrac{(a_2, f_1)}{|f_1|^2} = 0. \Rightarrow$

$\Rightarrow f_2 = \|1\ 1\ 0\|^T$, $|f_2| = \sqrt{2}$.

$f_3 = a_3 + \beta f_1 + \gamma f_2$, $\beta = -\dfrac{(a_3, f_1)}{|f_1|^2} = 0$. $\gamma = -\dfrac{(a_3, f_2)}{|f_2|^2} =$

$= -\dfrac{-2}{2} = 1 \Rightarrow f_3 = \|-1\ 1\ 1\|^T$, $|f_3| = \sqrt{3}$

$e_1' = \frac{1}{\sqrt{6}}\|1\ -1\ 2\|^T$, $e_2' = \frac{1}{\sqrt{2}}\|1\ 1\ 0\|^T$, $e_3' = \frac{1}{\sqrt{3}}\|-1\ 1\ 1\|^T$

$$S = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{Vmatrix} 1 & \sqrt{3} & -\sqrt{2} \\ -1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \\ 2 & 0 & \sqrt{2} \end{Vmatrix}, \quad A' = \begin{Vmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

Ответ: 7) $S = \dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{Vmatrix} \sqrt{3} & 1 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{3} & -1 & \sqrt{2} \\ 0 & 2 & \sqrt{2} \end{Vmatrix}$, $A' = \operatorname{diag}(3, 3, -3)$

10) $S = \dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{Vmatrix} 1 & \sqrt{3} & -\sqrt{2} \\ -1 & \sqrt{3} & +\sqrt{2} \\ 2 & 0 & \sqrt{2} \end{Vmatrix}$, $A' = \operatorname{diag}(6, 0, 0)$

229.45

Может ли ортогональное преобразование в некотором базисе иметь матрицу:

1) $A = \begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix}$

$1^2+(-1)^2=2\neq 1 \Rightarrow$ не может (сумма квадратов элементов каждой строки и каждого столбца равна 1)

2) $A=\left\|\begin{matrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{matrix}\right\|$ - не может аналогично пункту 1

Ответ: 1) нет; 2) нет.

289.47

φ - линейное преобразование ~~пр-ва~~ с арифметического пр-ва $\mathbb{R}^2$ со стандартным скалярным произведением.

φ переводит столбцы $A=\left\|\begin{matrix}4 & 2\\ 7 & 1\end{matrix}\right\|$ в столбцы $B=\left\|\begin{matrix}8 & 2\\ 1 & -1\end{matrix}\right\|$.

Является ли φ ортогональным?

Пусть C - матрица φ, тогда

$$X\cdot\left\|\begin{matrix}4\\7\end{matrix}\right\|=\left\|\begin{matrix}8\\1\end{matrix}\right\|,\quad X\cdot\left\|\begin{matrix}2\\1\end{matrix}\right\|=\left\|\begin{matrix}2\\-1\end{matrix}\right\| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X\cdot A=B \Rightarrow A^T X^T=B^T,\quad (A^T|B^T)\sim(E|X^T)$$

$$\left\|\begin{array}{cc|cc}4 & 7 & 8 & 1\\ 2 & 1 & 2 & -1\end{array}\right\| \sim \left\|\begin{array}{cc|cc}0 & 5 & 4 & 3\\ 2 & 1 & 2 & -1\end{array}\right\| \sim \left\|\begin{array}{cc|cc}0 & 1 & \frac{4}{5} & \frac{3}{5}\\ 2 & 0 & \frac{2}{5} & -\frac{8}{5}\end{array}\right\| \sim \left\|\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & \frac{3}{5} & -\frac{4}{5}\\ 0 & 1 & \frac{4}{5} & \frac{3}{5}\end{array}\right\| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X=\left\|\begin{matrix}\frac{3}{5} & \frac{4}{5}\\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5}\end{matrix}\right\|$$ - матрица поворота, ортогональна.

№32.27 (13,14) **8 неделя**

Квадратичная функция записана в ОНБ n-мерного пр-ва. Найти ОНБ, в котором матрица имеет диагональный вид.

13) $n=3,\ k(x) = x_1^2 - x_1x_2 + x_1x_3 + x_2^2 + x_2x_3 + x_3^2$

$$B = \frac{1}{2}\begin{Vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{Vmatrix}$$

$$\det(B-\lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1-\lambda & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1-\lambda \end{vmatrix} = \frac{1}{8}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2-2\lambda \\ -1 & 2-2\lambda & 1 \\ 2-2\lambda & -1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{8}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2-2\lambda \\ 0 & 3-2\lambda & 3-2\lambda \\ 0 & 2\lambda-3 & 1-(2\lambda-2)^2 \end{vmatrix} = \frac{1}{8}(3-2\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2\lambda-3 & -(2\lambda-3)(2\lambda-1) \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{8}(2\lambda-3)^2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -(2\lambda-1) \end{vmatrix} = \frac{1}{8}(2\lambda-3)^2(-2\lambda+1-1) =$$

$$= -\frac{1}{4}(2\lambda-3)^2\lambda$$

$\det(B-\lambda E)=0 \Rightarrow \lambda = \frac{3}{2}$ кратности 2 и $\lambda=0$ кратности 1.

$$\lambda = \frac{3}{2}:\ B-\lambda E = \begin{Vmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \vec{a_1} = \|-1\ 1\ 0\|^T,\ \vec{a_2} = \|1\ 0\ 1\|^T$

$$\lambda=0:\ B-\lambda E = \begin{Vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & -3 & -3 \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \Rightarrow \vec{a_3} = \|-1\ -1\ 1\|^T$$

$f_1 = a_1 = \| -1 \ \ 1 \ \ 0 \|$

$f_2 = 2(a_2 + \alpha f_1), \ \alpha = -\dfrac{(a_2, f_1)}{|f_1|^2} = -\dfrac{-1}{2} = \dfrac{1}{2}$

$f_2 = 2\left(\| 1 \ \ 0 \ \ 1 \|^T + \frac{1}{2}\| -1 \ \ 1 \ \ 0 \|\right) = \| 2 \ \ 0 \ \ 2 \|^T + \| -1 \ \ 1 \ \ 0 \|^T = \| 1 \ \ 1 \ \ 2 \|^T$

$f_3 = a_3 + \beta f_1 + \gamma f_2,$

$\beta = -\dfrac{(a_3, f_1)}{|f_1|^2} = 0, \ \gamma = -\dfrac{(a_3, f_2)}{|f_2|^2} = 0.$

$f_3 = \| -1 \ \ -1 \ \ 1 \|^T.$

$e_1' = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \| -1 \ \ 1 \ \ 0 \|^T, \ e_2' = \dfrac{1}{\sqrt{6}} \| 1 \ \ 1 \ \ 2 \|^T, \ e_3' = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \| -1 \ \ -1 \ \ 1 \|^T$

~~Ответ:~~ $\cancel{B' = \begin{Vmatrix} 3/2 & 0 & 0 \\ 0 & 3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \ k'(x) = \frac{3}{2}x_1'^2 + \frac{3}{2}x_2'^2}$ ~~в базисе~~

$\cancel{\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \| -1 \ \ 1 \ \ 0 \|^T, \frac{1}{\sqrt{6}} \| 1 \ \ 1 \ \ 2 \|^T, \frac{1}{\sqrt{3}} \| -1 \ \ -1 \ \ 1 \|^T \right\}}.$

14) $k(x) = 4x_1^2 + 4x_1x_2 - 12x_1x_3 + x_2^2 - 6x_2x_3 + 9x_3^2$

$B = \begin{Vmatrix} 4 & 2 & -6 \\ 2 & 1 & -3 \\ -6 & -3 & 9 \end{Vmatrix}$

$\det(B - \lambda E) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 & -6 \\ 2 & 1-\lambda & -3 \\ -6 & -3 & 9-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1-\lambda}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & -3\lambda & -\lambda \\ 0 & 2 + \frac{1-\lambda}{2}(\lambda-4) & -6 - \frac{3}{2}(\lambda-4) \end{vmatrix} =$

$= -\dfrac{\lambda}{2} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4+5\lambda-\lambda^2-4 & -12-3\lambda+12 \end{vmatrix} = -\dfrac{\lambda^2}{2} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5-\lambda & -3 \end{vmatrix} = -\dfrac{\lambda^2}{2}\left(-9 - (5-\lambda)\right) =$

$= -\dfrac{1}{2}\lambda^2(\lambda - 14)$

$\det(B - \lambda E) = 0 \Rightarrow \lambda = 0$ кратности 2, $\lambda = 14$ кратности 1

$\lambda = 0$: $B - \lambda E \sim \begin{Vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -3 \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \Rightarrow a_1 = \|-1 \;\; 2 \;\; 0\|^T,$

$a_2 = \|-3 \;\; 0 \;\; 2\|^T$

$\lambda = 14$: $B - \lambda E = \begin{Vmatrix} -10 & 2 & -6 \\ 2 & -13 & -3 \\ -6 & -3 & -5 \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & -13 & -3 \\ -6 & -3 & -5 \end{Vmatrix} \sim$

$\sim \begin{Vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -21 & -7 \\ 0 & 21 & 7 \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 2/3 \\ 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow a_3 = \|-2 \;\; -1 \;\; 3\|^T$

$f_1 = a_1 = \|-1 \;\; 2 \;\; 0\|^T$

$f_2 = \frac{5}{2}(a_2 + \alpha f_1)$, $\alpha = -\frac{(a_2, f_1)}{|f_1|^2} = -\frac{3}{5}$

$f_2 = \frac{1}{2}(\|-15 \;\; 0 \;\; 10\|^T - 3\|-1 \;\; 2 \;\; 0\|^T) = \|-12 \;\; -6 \;\; 10\|^T \cdot \frac{1}{2} =$

$= \|-6 \;\; -3 \;\; 5\|^T$

$f_3 = \frac{7}{2}(a_3 + \beta f_1 + \gamma f_2)$

$\beta = -\frac{(a_3, f_1)}{|f_1|^2} = 0$, $\gamma = -\frac{(a_3, f_2)}{|f_2|^2} = -\frac{30}{70} = -\frac{3}{7}$

$f_3 = \frac{1}{2}(\|-14 \;\; -7 \;\; 21\|^T - 3\|-6 \;\; -3 \;\; 5\|^T) = \|4 \;\; 2 \;\; 6\|^T \cdot \frac{1}{2} =$

$= \|2 \;\; 1 \;\; 3\|^T$

$e'_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\|-1 \;\; 2 \;\; 0\|^T$, $e'_2 = \frac{1}{\sqrt{70}}\|-6 \;\; -3 \;\; 5\|^T$, $e'_3 = \frac{1}{\sqrt{14}}\|2 \;\; 1 \;\; 3\|^T$

Ответ: 13) $k'(x') = \frac{3}{2}x_1'^2 + \frac{3}{2}x_2'^2$ в базисе с $S = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{Vmatrix} -\sqrt{3} & 1 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{3} & 1 & -\sqrt{2} \\ 0 & 2 & \sqrt{2} \end{Vmatrix}$

14) $K'(x') = 14 x_3'^2$ в базисе с $S = \frac{1}{\sqrt{70}} \begin{Vmatrix} -\sqrt{14} & -6 & 2\sqrt{5} \\ 2\sqrt{14} & -3 & \cancel{8}\sqrt{5} \\ 0 & 5 & 3\sqrt{5} \end{Vmatrix}$

№32.36 (2,3)

Проверить, что хотя бы 1 из квадратичных форм является знакоопределённой. Найти замену координат, приводящую две формы одновременно к диагональному виду.

2) $f = 2x_1^2 - 3x_1x_2 - \frac{5}{2}x_2^2 \qquad g = 2x_1^2 + 6x_1x_2 + 5x_2^2$

$F = \begin{Vmatrix} 2 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \end{Vmatrix} \quad G = \begin{Vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{Vmatrix}$

F - ~~положительно отрицательно~~ неопределённая

G - положительно определена

(по критерию Сильвестра)

$\det(F - \lambda G) = \begin{vmatrix} 2-2\lambda & -\frac{3}{2}-3\lambda \\ -\frac{3}{2}-3\lambda & -\frac{5}{2}-5\lambda \end{vmatrix} = 2(1-\lambda)\cdot(-5)\left(\frac{1}{2}+\lambda\right) -$

$- 9\left(\frac{1}{2}+\lambda\right)^2 = \left(\frac{1}{2}+\lambda\right)\left(-\overset{5}{\cancel{10}} + 10\lambda - \frac{9}{2} - 9\lambda\right) =$

$= \left(\lambda + \frac{1}{2}\right)\left(\lambda - \frac{29}{2}\right)$

$\lambda = -\frac{1}{2}: \ F + \lambda G = \begin{Vmatrix} 2 & -3/2 \\ -3/2 & -5/2 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 1 & 3/2 \\ 3/2 & 5/2 \end{Vmatrix} =$

$\begin{Vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix} \Rightarrow h_1 = \begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \end{Vmatrix}$

$\lambda = \frac{29}{2}: \ F - \lambda G = \begin{Vmatrix} -27 & -45 \\ -45 & -75 \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix} \Rightarrow h_2 = \begin{Vmatrix} -5 \\ 3 \end{Vmatrix}$

$|h_1|^2 = 2\cdot 0^2 + 6\cdot 1\cdot 0 + 5\cdot 1^2 = 5 \qquad \vec{e}_1{}' = \frac{h_1}{|h_1|} = \frac{1}{\sqrt5}\begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \end{Vmatrix}$

$|h_2|^2 = 2\cdot 25 + 6(-5)\cdot 3 + 5\cdot 9 = 5 \qquad \vec{e}_2{}' = \frac{h_2}{|h_2|} = \frac{1}{\sqrt5}\begin{Vmatrix} -5 \\ 3 \end{Vmatrix}$

Замена координат: $x_1 =$ [illegible] x_2', $x_2 = \frac{1}{\sqrt5} x_1' + \frac{3}{\sqrt5} x_2'$

$f = -\frac{1}{2} x_1'^2 + \frac{29}{2} x_2'^2, \quad g = x_1'^2 + x_2'^2$

5) $f = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 \qquad g = 17x_1^2 + 8x_1x_2 + x_2^2$

$F = \begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{Vmatrix} \quad G = \begin{Vmatrix} 17 & 4 \\ 4 & 1 \end{Vmatrix}$

F - неопределена

G - положительно определена.

$\det(F - \lambda G) = \begin{vmatrix} 1-17\lambda & -1-4\lambda \\ -1-4\lambda & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-17\lambda)(1-\lambda) - (1+4\lambda)^2 =$

$= 1 - 17\lambda - \lambda + 17\lambda^2 - 1 - 8\lambda - 16\lambda^2 = \lambda^2 - 26\lambda = \lambda(\lambda - 26)$

$\lambda = 0: \quad F - \lambda G = \begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix} \Rightarrow h_1 = \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \end{Vmatrix}$

$\lambda = 26: \quad F - \lambda G = \begin{Vmatrix} -441 & -105 \\ -105 & -25 \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 21 & 5 \\ 21 & 5 \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 21 & 5 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow h_2 = \begin{Vmatrix} -5 \\ 21 \end{Vmatrix}$

$|h_1|^2 = 17 + 8 + 1 = 26$

$|h_2|^2 = 17\cdot 25 - 8\cdot 5\cdot 21 + 21^2 = 26$

$\vec{e}_1{}' = \frac{1}{\sqrt{26}}\begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \end{Vmatrix}, \quad \vec{e}_2{}' = \frac{1}{\sqrt{26}}\begin{Vmatrix} -5 \\ 21 \end{Vmatrix}$

Замена координат: $x_1 = \frac{x_1' - 5x_2'}{\sqrt{26}}$ $x_2 = \frac{x_1' + 21x_2'}{\sqrt{26}}$

$f = 26x_2'^2$, $g = x_1'^2 + x_2'^2$

Ответ: а) $x_1 = -\sqrt{5}\,x_1'$, $x_2 = \frac{x_1' + 3x_2'}{\sqrt{5}}$, $f = -\frac{1}{2}x_1'^2 + \frac{29}{2}x_2'^2$, $g = x_1'^2 + x_2'^2$

б) $x_1 = \frac{x_1' - 5x_2'}{\sqrt{26}}$ $x_2 = \frac{x_1' + 21x_2'}{\sqrt{26}}$, $f = 26x_2'^2$, $g = x_1'^2 + x_2'^2$

№32.39(1)

Не находя замены координат, найти диагональный вид формы f:

$f = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$, $g = 10x_1^2 + 6x_1x_2 + x_2^2$

$$F = \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix} \quad G = \begin{Vmatrix} 10 & 3 \\ 3 & 1 \end{Vmatrix}$$

$$\det(F - \lambda G) = \begin{vmatrix} 1-10\lambda & 1-3\lambda \\ 1-3\lambda & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-10\lambda)(1-\lambda) - (1-3\lambda)^2 =$$

$$= 1 - 11\lambda + 10\lambda^2 - 1 + 6\lambda - 9\lambda^2 = \lambda^2 - 5\lambda = \lambda(\lambda - 5) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F' = \begin{Vmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad G' = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

Ответ: $f = 5x_1'^2$

* 1 неделя

№24.30 (3)

$$A = \begin{Vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -3 \end{Vmatrix}$$

$$\det(A-\lambda E) = \begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ -1 & -3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda+3)+2 = \lambda^2+3\lambda+2 =$$

$$= (\lambda+1)(\lambda+2)$$

$$\lambda=-1:\ A-\lambda E = \begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix} \Rightarrow \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Vmatrix} = C_1 \cdot \begin{Vmatrix} -2 \\ 1 \end{Vmatrix}$$

$$\lambda=-2:\ A-\lambda E = \begin{Vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix} \Rightarrow \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Vmatrix} = C_2 \begin{Vmatrix} -1 \\ 1 \end{Vmatrix}$$

$A' = \begin{Vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{Vmatrix}$ в базисе $\{\|-2\ 1\|^T, \|-1\ 1\|^T\}$.

Ответ: $\lambda=-1$: $\|-2\ 1\|^T$, $\lambda=-2$: $\|-1\ 1\|^T$, $\begin{Vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{Vmatrix}$ в базисе $\{\|-2\ 1\|^T, \|-1\ 1\|^T\}$.