§7 Том 3

19. Д-ть, что если $\mu^*(X)=0 \Rightarrow X$-измеримо и $\mu(X)=0$

□ $\mu^*(X)\ge\mu_*(X) \Rightarrow \mu_*(X)=0 \Rightarrow \mu^*(X)=\mu_*(X) \Rightarrow X$-измеримо и $\mu(X)=\mu_*(X)=\mu^*(X)=0$ ■

22. $X=\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ - послед. точек в $\mathbb{R}^n$: $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x_0$. Д-ть: $\mu(X)=0$

□ 1) $\mu_*(X)=0$, т.к. $X$ счётно

2) Докажем, что $\forall\, \varepsilon\in(0,1) \hookrightarrow \mu^*(X)<\varepsilon$

$\lim\limits_{k\to\infty} x_k=x_0 \Rightarrow \forall\,\varepsilon\in(0,1)\ \exists N: \forall\, k>N \hookrightarrow x_k\in B_{\varepsilon/2}(x_0) \Rightarrow$

$\Rightarrow X=\{x_k\}_{k=1}^{k=N}\cup(X\cap B_{\varepsilon/2}(x_0)) \Rightarrow \mu^*(X)=\overset{=0}{\mu^*(\{x_k\}_{k=1}^{N})}+$

$+\mu^*(X\cap B_{\varepsilon/2}(x_0))=\mu^*(X\cap B_{\varepsilon/2}(x_0))\le\mu^*(B_{\varepsilon/2}(x_0))\le\mu^*(\underset{n\text{-мерный куб}}{Q_{\varepsilon}(x_0)})=\varepsilon^n<\varepsilon\ (<1)$

Итак, $\forall\,\varepsilon\in(0,1)\hookrightarrow\mu^*(X)<\varepsilon \Rightarrow \mu^*(X)=0 \Rightarrow \mu_*(X)=\mu^*(X)=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \mu(X)=0$ ■

40. Доказать неизмеримость по Жордану множества:

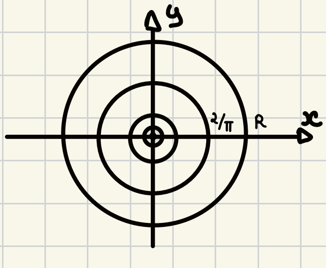
Критерий измеримости. $X$ измеримо $\Leftrightarrow$ $X$ огр. и $\mu(\partial X)=0$.

1) $X_1=\mathbb{Q}\cap[0,1]$. $\partial X_1=[0,1]$, $\mu(\partial X_1)>0 \Rightarrow$ не измеримо

2) $X_2=(\mathbb{Q}\cap[0,1])^2$. $\partial X_2=[0,1]^2$, $\mu(\partial X_2)>0 \Rightarrow$ не измеримо

3) $X_3=(\mathbb{Q}\cap[0,1])\times(\mathbb{I}\cap[0,1])$, $\partial X_3=[0,1]^2$, $\mu(\partial X_3)>0 \Rightarrow$ не измеримо.

Т.1 Измеримо ли мн-во нулей функции $f(x,y)=\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$ в круге $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x^2+y^2<R^2\}$ радиуса $R>0$




$X=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x^2+y^2=\frac{1}{\pi/2+\pi n}<R^2\}=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} C_{r_n}((0,0))$,

$C_{r_n}((0,0))$ - окр-ть с радиусом $r_n=\frac{1}{\pi/2+\pi n}$ и центром $(0,0)$



$\lim\limits_{n\to\infty} r_n=0 \Rightarrow \forall\,\varepsilon\in(0,1)\hookrightarrow\exists N: \forall\, n>N\hookrightarrow C_{r_n}((0,0))\subset Q_{\varepsilon}((0,0))$

$$X = \{C_{n_n}((0,0))\}_{n=1}^{n=N} \cup (X \cap Q_\varepsilon((0,0)))$$

$\mu^*(X) < 0 + \mu^*(Q_\varepsilon((0,0))) = \varepsilon^2 < \varepsilon\ (<1) \Rightarrow \mu^*(X) = 0 \Rightarrow X$ - измеримо

## §6

7. Найти $\int\limits_a^b \frac{dx}{x}$, $0<a<b$, как предел интегральных сумм

Возьмём разбиение $\tau_n = \{x_k^n\}_{k=0}^{k=n}$ : $x_k^n = a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{k}{n}}$, $k = 0, 1, \dots n$. В качестве $\xi_i$ выберем $x_k^n$

Тогда $\int\limits_a^b \frac{dx}{x} = \lim\limits_{|\tau|\to 0} \sigma_\tau = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{a}\left(\frac{b}{a}\right)^{-\frac{k}{n}} a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{k-1}{n}} \cdot$

$\left(\left(\frac{b}{a}\right)^{1/n} - 1\right) = \lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{a}{b}\right)^{1/n}\left(\left(\frac{b}{a}\right)^{1/n} - 1\right) = \lim\limits_{n\to\infty} n\left(1 - \left(\frac{a}{b}\right)^{1/n}\right) =$

$= \lim\limits_{t\to 0} \frac{1 - \left(\frac{a}{b}\right)^t}{t} = \frac{d}{dt}\left(-\left(\frac{a}{b}\right)^t\right)\Big|_{t=0} = \ln\frac{b}{a}$

4(2) Вычислить $\int\limits_0^{\pi/2} \sin x\,dx$ как предел интегральной суммы

Возьмём разбиение $\tau_n = \{x_n^k\}_{k=0}^{k=n}$ : $x_k^n = \frac{\pi k}{2n}$, $k = 0, 1, \dots n$. В качестве $\xi_i$ выберем $x_k^n$

Тогда $\int\limits_0^{\pi/2} \sin x\,dx = \lim\limits_{|\tau|\to 0} \sigma_\tau = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{\pi k}{2n}\right)\frac{\pi}{2n} =$

$\sum\limits_{k=1}^{n} \sin(hk) = \frac{1}{2\sin h/2} \sum\limits_{k=1}^{n}\left[\cos\left(hk - \frac{h}{2}\right) - \cos\left(hk + \frac{h}{2}\right)\right] = \frac{1}{2\sin h/2}\left[\cos\frac{h}{2} - \cos h(n + 1/2)\right]$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\pi}{2n} \frac{1}{2\sin\frac{\pi}{4n}}\left[\cos\frac{\pi}{4n} - \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4n}\right)\right] = \lim\limits_{n\to\infty}\left[\cos\frac{\pi}{4n} + \sin\frac{\pi}{4n}\right] = 1$

24. Д-ть, что функция Дирихле $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{I} \end{cases}$ не интегрируема по Риману на любом $[a,b]$



□ $I_* = \sup\limits_\tau \sum\limits_{i=1}^{K_\tau} \inf\limits_{[x_{i-1},x_i]} f(x)\Delta x_i = 0 \neq b - a = \inf\limits_\tau \sum\limits_{i=1}^{K_\tau} \sup\limits_{[x_{i-1},x_i]} f(x)\Delta x_i = I^*$ ■

40. Нет, рассмотрим $f(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q}\\ -1, & x\in\mathbb{I}\end{cases}$. $\int_a^b |f(x)|\,dx=b-a$,

но $f(x)$ не интегрируема, т.к. $I_*=\sup_{\tau}\sum_{i=1}^{k_\tau}\inf_{[x_{i-1},x_i]} f(x)\Delta x_i=0\neq$

$\neq b-a=\inf_{\tau}\sum_{i=1}^{k_\tau}\sup_{[x_{i-1},x_i]} f(x)\Delta x_i=I^*$

54(4). Найти производную $\frac{d}{dx}\int_0^{x^2}\sqrt{1+t^2}\,dt \;\text{⊜}$

$I=\int\sqrt{1+t^2}\,dt=\int\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}dt+\int\frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}}dt\Rightarrow\int\frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}}dt=I-\int\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$

$I=t\sqrt{1+t^2}-\int t\,d(\sqrt{1+t^2})=t\sqrt{1+t^2}-\int\frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}}dt=t\sqrt{1+t^2}-I+\int\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}\Rightarrow$

$\Rightarrow I=\frac{1}{2}t\sqrt{1+t^2}+\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}=\frac{1}{2}t\sqrt{1+t^2}+\frac{1}{2}\ln(t+\sqrt{1+t^2})+C$

$\text{⊜}\;\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}x^2\sqrt{1+x^4}+\frac{1}{2}\ln(x^2+\sqrt{1+x^4})\right)=x\sqrt{1+x^4}+\frac{x^5}{\sqrt{1+x^4}}+\frac{x+\frac{x^3}{\sqrt{1+x^4}}}{x^2+\sqrt{1+x^4}}=$

$=x\sqrt{1+x^4}+\frac{x}{\sqrt{1+x^4}}\left(x^4+\frac{\sqrt{1+x^4}+x^2}{x^2+\sqrt{1+x^4}}\right)=2x\sqrt{1+x^4}$

93. Найти интеграл $\int_0^1\frac{dx}{e^x+e^{-x}}\;\text{⊜}$

$\int\frac{dx}{e^x+e^{-x}}=\int\frac{e^x dx}{e^{2x}+1}=\int\frac{dt}{1+t^2}=\operatorname{arctg}t+C=\operatorname{arctg}(e^x)+C$

$\text{⊜}\;\operatorname{arctg}(e^x)\Big|_0^1=\operatorname{arctg}e-\operatorname{arctg}1=\operatorname{arctg}e-\frac{\pi}{4}$

101. Найти интеграл $\int_1^2 x\ln x\,dx\;\text{⊜}$

$\int x\ln x\,dx=\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{2}\cdot\int x^2 d(\ln x)=\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{4}x^2$

$\text{⊜}\;2\ln 2-\frac{3}{4}$

117. Доказать равенство $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+1}+\dots\frac{1}{2n}\right)=\ln 2$,

использовав интеграл $\int_1^2\frac{dx}{x}$

Возьмём разбиение $\tau_n=\{x_k^n\}_{k=1}^{k=n}: x_k^n=1+\frac{k}{n}=\xi_k,\ k=1,\dots n.$

$\int_1^2\frac{dx}{x}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n\frac{1/n}{1+k/n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n\frac{1}{n+k}.\ \int_1^2\frac{dx}{x}=\ln x\Big|_1^2=\ln 2\Rightarrow$ получаем искомое.

193. Найти интеграл $\int\limits_0^{100\pi}\sqrt{1-\cos 2x}\,dx =$

$$\int\sqrt{1-\cos 2x}\,dx=\int\sqrt{2\sin^2 x}\,dx=\sqrt2\int|\sin x|\,dx$$

$$\int\limits_0^{2\pi}|\sin x|\,dx = 2\int\limits_0^{\pi}\sin x\,dx = 4$$

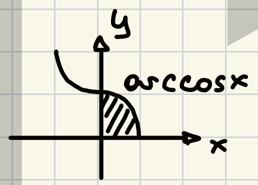
$$= 50\sqrt2\int\limits_0^{2\pi}|\sin x|\,dx = 200\sqrt2$$

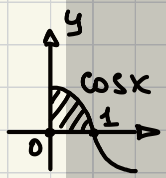
## §10

50(3,4) Доказать неравенство

3) $\frac13 < \int\limits_0^1 3^{-x}\arccos x\,dx < 1$

$$\square\ \int\limits_0^1 \arccos x\,dx = \int\limits_0^1 \cos x\,dx = 1$$




$$\frac{\arccos x}{3} < 3^{-x}\arccos x < \arccos x \quad \forall\, x\in(0,1)$$

$$\int\limits_0^1 \frac{\arccos x\,dx}{3} = \frac13 < \int\limits_0^1 3^{-x}\arccos x\,dx < 1 = \int\limits_0^1 \arccos x\,dx \ \blacksquare$$

4) $\ln 2 < \int\limits_0^{3/4}\frac{2^x\,dx}{\sqrt{1+x^2}} < \frac{1}{\ln 2}$

$$\square\ \int\limits_0^{3/4}\frac{2^x\,dx}{\sqrt{1+x^2}} > \int\limits_0^{3/4}\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\Big|_0^{3/4} = \ln\left(3/4+5/4\right) = \ln 2$$

$$\int\limits_0^{3/4}\frac{2^x\,dx}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\ln 2}\int\limits_0^{3/4}\frac{d(2^x)}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\ln 2}\int\limits_1^{2^{3/4}}\frac{dt}{\sqrt{1+\frac{\ln^2 t}{\ln^2 2}}} < \frac{1}{\ln 2}\int\limits_1^{2^{3/4}}dt < \frac{1}{\ln 2}\int\limits_1^{2}dt = \frac{1}{\ln 2}\ \blacksquare$$

Т.3. а) Функция $f$ имеет первообразную $F$ на $[a,b]$. Верно ли, что $f$ интегрируема на отрезке $[a,b]$?

б) Функция $f$ интегрируема на $[a,b]$. Верно ли, что $f$ имеет первообразную на $[a,b]$?

в) $f$ - интегрируема на $[a,b]$ и имеет первообразную $F$

на $[a,b]$. Доказать, что $\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$

а) ∃ на $[0,1]$ $F(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x^2}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$

$$F'(x)=2x\sin\frac{1}{x}-\frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2};\quad F'(0)=\lim_{x\to+0}\frac{F(x)-F(0)}{x}=x\sin\frac{1}{x^2}=0$$

$f(x)$ не ограничена на $[0,1]$ $\Rightarrow \nexists \int_0^1 f(x)dx \Rightarrow$ $\boxed{\text{нет}}$

б) ∃ на $[-1,1]$ $f(x)=\begin{cases} 1, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$

$\exists \int_{-1}^{1} f(x)dx$, но $\nexists F(x) \Rightarrow$ $\boxed{\text{нет}}$.

в) □ $\tilde{F}(x)=\int_a^x f(t)dt$; $\tilde{F}'(x)=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\tilde{F}(t+\Delta t)-\tilde{F}(t)}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt}{\Delta t}=$

$=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{f(t)\Delta t+\bar{o}(\Delta t)}{\Delta t}=f(t) \Rightarrow \tilde{F}(x)=\int_a^x f(t)dt$ – первообразная $f$

Произвольная первообразная $F(x)=\tilde{F}(x)+C$. Заметим, что

$F(b)-F(a)=\tilde{F}(b)+C-\tilde{F}(a)-C=\tilde{F}(b)-\tilde{F}(a)=\int_a^b f(t)dt-\int_a^a f(t)dt=$

$=\int_a^b f(t)dt$ ■

T.4. Доказать, что $\left|\int_a^b \frac{\sin x}{x}dx\right| \leq \frac{2}{a}$, где $b>a>0$

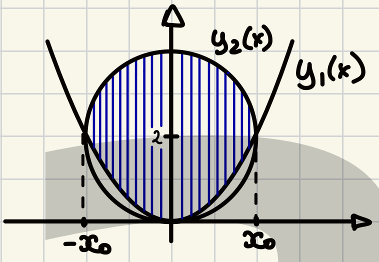
□ $\left|\int_a^b \frac{\sin x}{x}dx\right| = \left|\int_a^b \frac{d(\cos x)}{x}\right| = \left|\frac{\cos x}{x}\Big|_a^b + \int_a^b \frac{\cos x\,dx}{x^2}\right| \leq \left|\frac{1}{b}+\frac{1}{a}+\right.$

$\left.+\int_a^b\frac{dx}{x^2}\right| = \left|\frac{1}{b}+\frac{1}{a}-\frac{1}{b}+\frac{1}{a}\right| = \frac{2}{a}$ ■

§7

4(5). Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми.

$2y = x^2,\ x^2 + y^2 = 4y,\ 2y \geq x^2$




Найдём $x_0$: $\begin{cases} x_0^2 + y^2 = 4y \\ 2y = x_0^2 \end{cases} \Rightarrow x_0^2 + \frac{x_0^4}{4} = 2x_0^2$

$x_0 > 0 \Rightarrow x_0 = 2$

$S = 2\int_0^2 (y_2(x) - y_1(x))dx =$

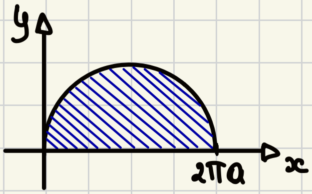
$y_2(x)$: $x^2 + (y-2)^2 = 4 \Rightarrow y_2(x) = 2 + \sqrt{4 - x^2}$; $y_1(x) = \frac{1}{2}x^2$

$= 2\int_0^2 \left(2 + \sqrt{4-x^2} - \frac{1}{2}x^2\right)dx = 8 + 8\int_0^2 \sqrt{1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2}\, d\left(\frac{x}{2}\right) - \int_0^2 x^2 dx =$

$\int \sqrt{1-t^2}\,dt = \int \cos^2 u\, du = \int \frac{1+\cos 2u}{2} du = \frac{u}{2} + \frac{\sin 2u}{4} = \frac{\arcsin t}{2} + \frac{t\sqrt{1-t^2}}{2}$

$= 8 + 8\left[\frac{\arcsin t}{2} + \frac{t\sqrt{1-t^2}}{2}\right]\Bigg|_0^1 - \frac{x^3}{3}\Bigg|_0^2 = \frac{16}{3} + 2\pi$

26. Найти площадь фигуры, ограниченной аркой циклоиды $x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t),\ 0 \leq t \leq 2\pi$ и отрезком $[0; 2\pi a]$ оси абсцисс

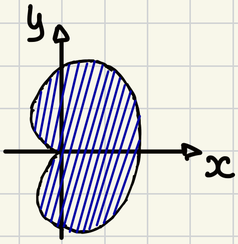



$S = \int_0^{2\pi a} y(x)dx = \int_0^{2\pi} y(t)x'(t)dt = \int_0^{2\pi} a^2(1-\cos t)^2 dt = a^2\left[\int_0^{2\pi} dt - 2\int_0^{2\pi}\cos t\,dt + \int_0^{2\pi}\cos^2 t\,dt\right] = a^2\left[2\pi - 2\sin t\Big|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2t}{2}dt\right] =$

$= a^2\left[2\pi + \frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi} + \frac{\sin 2t}{4}\Big|_0^{2\pi}\right] = 3\pi a^2$

33(3) Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми, заданными в полярных координатах:

$r = a(1 + \cos\varphi)$



$$S = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2(\varphi)\,d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} a^2(1+\cos\varphi)^2\,d\varphi = \pi a^2 +$$

$$+ a^2\int_0^{2\pi}\cos\varphi\,d\varphi + \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\,d\varphi = \pi a^2 + \frac{\pi a^2}{2} = \frac{3}{2}\pi a^2$$

<u>69(11)</u> Найти длину дуги кривой $y=\ln(1+\sin x),\ 0\le x\le \frac{\pi}{2}$

$$L=\int_0^{\pi/2}\sqrt{1+y'^2}\,dx = \int_0^{\pi/2}\sqrt{1+\left(\frac{\cos x}{1+\sin x}\right)^2}\,dx = \int_0^{\pi/2}\sqrt{\frac{(1+\sin x)^2+\cos^2 x}{(1+\sin x)^2}}\,dx =$$

$$= \int_0^{\pi/2}\sqrt{\frac{2}{1+\sin x}}\,dx = \int_0^{\pi/2}\sqrt{\frac{2}{1+\cos(\frac{\pi}{2}-x)}}\,dx = \int_0^{\pi/2}\frac{dx}{|\cos(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2})|} = -2\int_0^{\pi/2}\frac{d(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2})}{\cos(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2})} =$$

$$= -2\int_{\pi/4}\frac{dt}{\cos t} = 2\int_0^{\pi/4}\frac{d(\sin t)}{1-\sin^2 t} = 2\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{du}{1-u^2} = \ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right|\Bigg|_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 2\ln(\sqrt{2}+1)$$

<u>72(3)</u> Найти длину дуги кривой $x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t),\ 0\le t\le 2\pi$ (циклоида)

$$L=\int_0^{2\pi}\sqrt{x'^2+y'^2}\,dt = \int_0^{2\pi}\sqrt{a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t}\,dt = a\int_0^{2\pi}\sqrt{2-2\cos t}\,dt =$$

$$= 2a\int_0^{2\pi}|\sin t|\,dt = 8a\int_0^{\pi/2}\sin t\,dt = 8a$$

<u>82(3)</u> Найти длину дуги кривой $r=a(1-\cos\varphi)$ (кардиоида)

$$L=\int_0^{2\pi}\sqrt{r'^2+r^2}\,d\varphi = \int_0^{2\pi}a\sqrt{\sin^2\varphi+(1-\cos\varphi)^2}\,d\varphi = 2a\int_0^{2\pi}\sqrt{\frac{1-\cos\varphi}{2}}\,d\varphi =$$

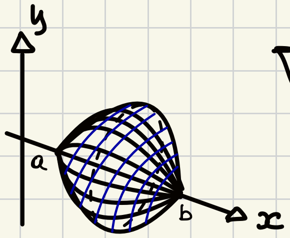
$$= 2a\int_0^{2\pi}|\sin t|\,dt = 8a\int_0^{\pi/2}\sin t\,dt = 8a$$

## §8

<u>12(1)</u> Найти объём тела, образованного при вращении фигуры, ограниченной данными кривыми, вокруг а) оси $Ox$; б) оси $Oy$:

$y=(x-a)(x-b),\ y=0,\ b>a\ge 0$

а)

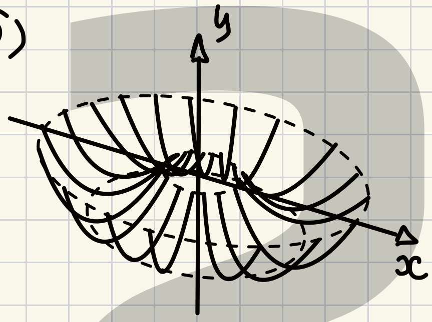



$$V=\pi\int_a^b y^2(x)\,dx=\pi\int_a^b (x-a)^2(x-b)^2\,dx=\left|\begin{matrix} c=b-a \\ t=x-a\end{matrix}\right.$$

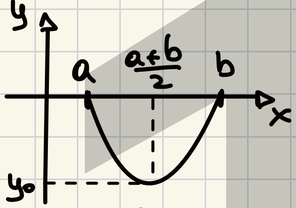
$$=\pi\int_0^c t^2(t-c)^2\,dt=\pi\int_0^c\left(t^4-2t^3c+t^2c^2\right)dt=$$

$$=\pi\left(\frac{c^5}{5}-\frac{c^5}{2}+\frac{c^5}{3}\right)=\frac{\pi}{30}(b-a)^5$$

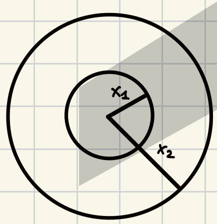
б)




Верт. сечение




горизонт. сечение




$$V=\int_{y_0}^{0} S(y)\,dy=\int_{y_0}^{0}\pi\left(x_2^2-x_1^2\right)dy=$$

$$=\int_{y_0}^{0}\pi(x_2-x_1)(x_2+x_1)\,dy=\int_{y_0}^{0}\pi\sqrt{D(y)}\,(a+b)\,dy\ \ominus$$

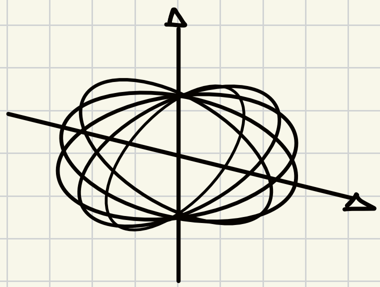
$$x^2-(a+b)x+ab=y \rightarrow D(y)=(a+b)^2-4(ab-y)$$

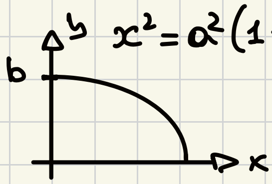
$$\ominus\int_{y_0}^{0}\pi\sqrt{(a+b)^2-4ab+4y}\,(a+b)\,dy=\pi(a+b)\int_{y_0}^{0}\sqrt{(a-b)^2+4y}\,dy=$$

$$=2\pi(a+b)\int_{y_0}^{0}\sqrt{y-y_0}\,d(y-y_0)=2\pi(a+b)\cdot\frac{2}{3}\sqrt{y-y_0}^{\,3}\Big|_{y_0}^{0}=\frac{4}{3}\pi(a+b)\sqrt{-y_0}^{\,3}=$$

$$=\frac{4}{3}\pi(a+b)\sqrt{\frac{(b-a)^2}{4}}^{\,3}=\frac{1}{6}\pi(a+b)(b-a)^3$$

<u>13(2).</u> Найти объём эллипсоида, образованного при вращении эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ вокруг оси $Oy$.






$$x^2=a^2\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)\qquad V=2\pi\int_0^b x^2(y)\,dy=$$

$$=2\pi\int_0^b a^2\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)dy=2\pi a^2\left(b-\frac{1}{3}b\right)=$$

$$=\frac{4}{3}\pi a^2 b$$

82(4,5) Найти площадь поверхности, образованной при вращении вокруг оси $Oy$ данной кривой:

4) $3x = 4\cos y,\ -\pi/2 \le y \le 0$

$$S = 2\pi\int_{-\pi/2}^{0}|x(y)|\sqrt{1+x'^2(y)}\,dy = 2\pi\int_{-\pi/2}^{0}\frac{4}{3}|\cos y|\sqrt{1+\frac{16}{9}\sin^2 y}\,dy =$$

$$= \frac{8\pi}{3}\int_{-\pi/2}^{0}\sqrt{1+\frac{16}{9}\sin^2 y}\,d(\sin y) = 2\pi\int_{-4/3}^{0}\sqrt{1+t^2}\,dt =$$

$$\int\sqrt{1+t^2}\,dt = t\sqrt{1+t^2} - \int\frac{t^2\,dt}{\sqrt{1+t^2}} \Rightarrow \int\frac{t^2\,dt}{\sqrt{1+t^2}} = t\sqrt{1+t^2} - \int\sqrt{1+t^2}\,dt$$

$$\int\sqrt{1+t^2}\,dt = \int\frac{1+t^2}{\sqrt{1+t^2}}\,dt = \int\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} + \int\frac{t^2\,dt}{\sqrt{1+t^2}} = \int\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} + t\sqrt{1+t^2}\,dt - \int\sqrt{1+t^2}\,dt$$

$$\Rightarrow \int\sqrt{1+t^2}\,dt = \frac{1}{2}t\sqrt{1+t^2} + \int\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = \frac{1}{2}t\sqrt{1+t^2} + \frac{1}{2}\ln|t+\sqrt{1+t^2}|$$

$$= 2\pi\left(\frac{1}{2}t\sqrt{1+t^2} + \frac{1}{2}\ln|t+\sqrt{1+t^2}|\right)\Big|_{-4/3}^{0} = -2\pi\left(\frac{1}{2}\left(-\frac{4}{3}\right)\frac{5}{3} + \frac{1}{2}\left|-\frac{4}{3}+\frac{5}{3}\right|\right) =$$

$$= \frac{20\pi}{9} + \pi\ln 3$$

5) $y^2 = 2(x-1),\ 0 \le y \le 1$

$$S = 2\pi\int_{0}^{1}|x(y)|\sqrt{1+x'^2(y)}\,dy = 2\pi\int_{0}^{1}\left|\frac{1}{2}y^2+1\right|\sqrt{1+y^2}\,dy =$$

$$= \pi\int_{0}^{1}(y^2+2)\sqrt{1+y^2}\,dy = \pi\int_{0}^{1}(1+y^2)^{3/2}\,dy + \pi\int_{0}^{1}\sqrt{1+y^2}\,dy =$$

$\int\sqrt{1+y^2}\,dy = \frac{1}{2}y\sqrt{1+y^2} + \frac{1}{2}\ln|y+\sqrt{1+y^2}|$ (из прошлого пункта)

$$\int(1+y^2)^{3/2}\,dy = \Big|_{y=\operatorname{sh}t}\Big| = \int\operatorname{ch}^3 t\,d(\operatorname{sh}t) = \int\operatorname{ch}^4 t\,dt = \int(1+\operatorname{sh}^2 t)^2\,dt =$$

$$= \int\left(1+\frac{\operatorname{ch}^2 t+\operatorname{sh}^2 t}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{sh}^2 t - \frac{1}{2}\operatorname{ch}^2 t\right)^2 dt = \int\left(\frac{1+\operatorname{ch}2t}{2}\right)^2 dt = \int\frac{1}{4}\,dt + \int\frac{1}{2}\operatorname{ch}2t\,dt +$$

$$+ \int\frac{1}{4}\operatorname{ch}^2 2t\,dt = \frac{1}{4}t + \frac{1}{4}\operatorname{sh}2t + \int\frac{1}{8}(1+\operatorname{ch}4t)\,dt = \frac{1}{4}t + \frac{1}{4}\operatorname{sh}2t + \frac{1}{8}t + \frac{1}{32}\operatorname{sh}4t =$$

$$= \frac{3}{8}t + \frac{1}{2}\operatorname{sh}t\operatorname{ch}t + \frac{1}{16}\operatorname{sh}2t\operatorname{ch}2t = \frac{3}{8}t + \frac{1}{2}\operatorname{sh}t\operatorname{ch}t + \frac{1}{8}\operatorname{sh}t\operatorname{ch}t(1+2\operatorname{sh}^2 t) =$$

$$= \frac{3}{8}\operatorname{arcsh}y + \frac{1}{2}y\sqrt{1+y^2} + \frac{1}{8}y\sqrt{1+y^2}(1+2y^2) = \frac{3}{8}\ln|y+\sqrt{1+y^2}| + \frac{5}{8}y\sqrt{1+y^2} + \frac{1}{4}y^3\sqrt{1+y^2}$$

$$= \pi\left[\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\ln|1+\sqrt{2}| + \frac{3}{8}\ln|1+\sqrt{2}| + \frac{5\sqrt{2}}{8} + \frac{\sqrt{2}}{4}\right] = \frac{\pi}{8}\left[7\ln(1+\sqrt{2}) + 11\sqrt{2}\right]$$

## § 11

**57.** Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_0^8 \frac{dx}{x^2+\sqrt[3]{x}}$

$f(x) = \frac{1}{x^2+\sqrt[3]{x}} > 0$ на $(0,8]$

$f(x) < \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = g(x)$ на $(0,8]$

$\int\limits_0^8 g(x)dx = \frac{3}{2}x^{2/3}\Big|_0^8 = 6 \Rightarrow \int\limits_0^8 g(x)dx$ сходится

$\Rightarrow \int\limits_0^8 \frac{dx}{x^2+\sqrt[3]{x}}$ — сходится по I признаку сравнения.

**59.** Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[5]{1-x^{10}}}$

$f(x) = \frac{1}{\sqrt[5]{1-x^{10}}} > 0$ на $[0,1)$

$f(x) < \frac{1}{\sqrt[5]{1-x}} = g(x)$ на $[0,1)$

$\int\limits_0^1 g(x)dx = \frac{5}{4}(1-x)^{4/5}\Big|_1^0 = \frac{5}{4} \Rightarrow \int\limits_0^1 g(x)dx$ сходится

$\Rightarrow \int\limits_0^1 f(x)dx$ — сходится по I признаку сравнения.

**62.** Исследовать на сходимость $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{\sqrt[3]{\sin x}}$

$\frac{1}{\sqrt[3]{\sin x}} \sim \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ при $x \to +0$; $\int\limits_0^{\pi} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$ сходится $\Rightarrow \int\limits_0^{\pi} \frac{dx}{\sqrt[3]{\sin x}}$ сходится $\Rightarrow$

$\frac{1}{\sqrt[3]{\sin x}} \sim \frac{1}{\sqrt[3]{2\pi - x}}$ при $x \to -2\pi$; $\int\limits_{\pi}^{2\pi} \frac{dx}{\sqrt[3]{2\pi-x}}$ сходится $\Rightarrow \int\limits_{\pi}^{2\pi} \frac{dx}{\sqrt[3]{\sin x}}$ сходится

$\Rightarrow \int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{\sqrt[3]{\sin x}} = \int\limits_0^{\pi} \frac{dx}{\sqrt[3]{\sin x}} + \int\limits_{\pi}^{2\pi} \frac{dx}{\sqrt[3]{\sin x}}$ сходится

**73.** Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_0^{\pi} \frac{\ln \sin x}{\sqrt[3]{x}} dx$

$\int\limits_0^{\pi} \frac{\ln \sin x}{\sqrt[3]{x}} dx = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{\ln \sin x}{\sqrt[3]{x}} dx + \int\limits_{\pi/2}^{\pi} \frac{\ln \sin x}{\sqrt[3]{x}} dx$

при $x \to \pi - 0$ $\exists\, t := \pi - x$, тогда $\int \frac{\ln \sin x}{\sqrt[3]{x}} dx \sim \int\limits_0^{\pi/2} \frac{\ln \sin t}{\sqrt[3]{\pi - t}} dt$ и

при $t \to +0$ $\frac{\ln \sin t}{\sqrt[3]{\pi - t}} \sim \frac{\ln t}{\sqrt[3]{\pi}} \Rightarrow \int\limits_0^{\pi/2} \frac{\ln \sin t}{\sqrt[3]{\pi - t}} dt$ сходится, т.к. $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\ln t}{\sqrt[3]{\pi}} dt$ сходится $\Rightarrow$

$\Rightarrow \int\limits_{\pi/2}^{\pi} \frac{\ln\sin x}{\sqrt[3]{x}}dx$ сходится

при $x \to +0$ $\frac{\ln\sin x}{\sqrt[3]{x}} \sim \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}} = \frac{-|\ln x|}{x^{1/3}}$ в окр-ти $+0$

Исследуем $\int\limits_0^{x_0} \frac{|\ln x|}{x^{1/3}}dx$ на сходимость: $\frac{|\ln x|}{x^{1/3}} = \frac{x^{1/3}|\ln x|}{x^{2/3}}$

при $x \to +0$ $x^{1/3}|\ln x| \to 0 \Rightarrow \exists x_0: \forall x \in (0, x_0)$ $x^{1/3}|\ln x| < 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{|\ln x|}{x^{1/3}} < \frac{1}{x^{2/3}}$ $\forall x \in (0, x_0) \Rightarrow \frac{|\ln x|}{x^{1/3}}$ сходится по признаку сравнения I $\Rightarrow \int\limits_0^{\pi/2} \frac{\ln\sin x}{\sqrt[3]{x}}dx$ сходится $\Rightarrow \int\limits_0^{\pi} \frac{\ln\sin x}{\sqrt[3]{x}}dx$ сходится.

98. Определить при каких $\alpha, \beta$ сходится интеграл

$$\int\limits_0^{\pi/2} \sin^\alpha x \cos^\beta x\, dx = \int\limits_0^{\pi/4} \sin^\alpha x \cos^\beta x\, dx + \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \sin^\alpha x \cos^\beta x\, dx$$

при $x \to +0$ $\sin^\alpha x \cos^\beta x \sim x^\alpha \Rightarrow \int\limits_0^{\pi/4} \sin^\alpha x \cos^\beta x\, dx \sim \int\limits_0^{\pi/4} x^\alpha dx =$

$$= \left[\begin{array}{l} \alpha = -1, \ \ln x\Big|_0^{\pi/4} = +\infty \\ \alpha \neq -1, \ \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\Big|_0^{\pi/4} \end{array}\right. - \text{сущ.} \Leftrightarrow \alpha > -1$$

$\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \sin^\alpha x \cos^\beta x\, dx = \Big|_{t = \frac{\pi}{2} - x} \int\limits_0^{\pi/4} \cos^\alpha t \sin^\beta t\, dt \Rightarrow \beta > -1$ (аналогично первому)

Итог: $\alpha, \beta > -1$

§12

66. Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{1+x^7}}$

$\int\limits_0^{+\infty} \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{1+x^7}} = \underbrace{\int\limits_0^{1} \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{1+x^7}}}_{I_1} + \underbrace{\int\limits_1^{\infty} \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{1+x^7}}}_{I_2}$. $I_1$ очевидно сходится, а $I_2$ сходится,

т.к. $\frac{x}{\sqrt[3]{1+x^7}} < x^{-4/7}$ и $\int\limits_1^{+\infty} x^{-4/7}dx$ сходится $\Rightarrow \int\limits_0^{+\infty} \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{1+x^7}}$ сходится

68. Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x}dx$

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x}dx = \int\limits_0^{1} \frac{\sin^2 x}{x}dx + \int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x}dx$$



при $x \to 0$ $\frac{\sin^2 x}{x} \sim \frac{x^2}{x} = x \Rightarrow \int\limits_0^{1} \frac{\sin^2 x}{x}dx$ сходится

$$\int_1^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x}\,dx = \int_1^{+\infty}\frac{1-\cos 2x}{2x}\,dx = \underbrace{\int_1^{+\infty}\frac{1}{2x}\,dx}_{I_1} - \underbrace{\int_1^{+\infty}\frac{\cos 2x}{2x}\,dx}_{I_2}$$

$I_1$ очевидно расходится.

Рассмотрим $I_2$: функция $\cos 2x$ непрерывна и имеет огр. первообразную на $[1,+\infty)$, функция $\frac{1}{2x}$ непрерывно дифференцируема и монотонна на $[1,+\infty)$, причем $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{2x}=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow I_2$ сходится по признаку Дирихле.

Итак, $\int_1^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x}\,dx$ – разность расходящегося $I_1$ и сходящегося $I_2 \Rightarrow \int_1^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x}\,dx$ расходится $\Rightarrow \int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x}\,dx$ расходится.

<u>101.</u> Найти все неотрицательные значения параметра $\alpha$, при которых сходится интеграл $\int_0^{+\infty}\frac{\ln(x^\alpha+e^x)}{\sqrt{x^3+x^5}}\,dx$

$$\int_0^{+\infty}\frac{\ln(x^\alpha+e^x)}{\sqrt{x^3+x^5}}\,dx = \underbrace{\int_0^{1}\frac{\ln(x^\alpha+e^x)}{\sqrt{x^3+x^5}}\,dx}_{I_1} + \underbrace{\int_1^{+\infty}\frac{\ln(x^\alpha+e^x)}{\sqrt{x^3+x^5}}\,dx}_{I_2}$$

Рассм. $I_2$: при $x\to+\infty$ $\frac{\ln(x^\alpha+e^x)}{\sqrt{x^3+x^5}} \sim \frac{\ln(e^x)}{x^5} = \frac{x}{x^5} = \frac{1}{x^4}$, $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^4}$ очевидно сходится $\Rightarrow I_2$ сходится

Рассм. $I_1$: при $x\to+0$ $\frac{\ln(x^\alpha+e^x)}{\sqrt{x^3+x^5}} \sim \frac{\ln(x^\alpha+1)}{x^{3/2}\sqrt{1+x^2}} \sim \frac{x^\alpha}{x^{3/2}} = x^{\alpha-3/2}$

Как известно $\int_0^1\frac{dx}{x^\beta}$ сходится при $\beta<1 \Rightarrow \int_0^1 x^{\alpha-3/2}\,dx$ сходится при $3/2-\alpha<1$ или $\alpha>1/2$

<u>104.</u> Определить при каких $\alpha,\beta$ сходится интеграл

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha \ln^\beta x} = \underbrace{\int_1^{2}\frac{dx}{x^\alpha \ln^\beta x}}_{I_1} + \underbrace{\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha \ln^\beta x}}_{I_2}$$

$I_1 = \Big|_{x=t+1} \int_0^1\frac{dt}{(1+t)^\alpha \ln^\beta(1+t)} \sim \int_0^1\frac{dt}{t^\beta}$ – сходится при $\beta<1$

Рассм. $I_2$:

при $\alpha = 1$: $I_1 = \int\limits_2^{+\infty} \frac{d(\ln x)}{\ln^\beta x}$ => $\beta > 1$ - не подходит

при $\alpha < 1$: $\exists\ \varepsilon = 1-\alpha,\ \varepsilon > 0$. $\frac{1}{x^\alpha \ln^\beta x} = \frac{1}{x^{1-\varepsilon}\ln^\beta x} = \frac{x^{\varepsilon/2}}{\ln^\beta x}\frac{1}{x^{1-\varepsilon/2}}$

$\forall \beta$ при $x \to +\infty$ $x^{\varepsilon/2}/\ln^\beta x \to +\infty \Rightarrow \exists\, x_0 \geqslant 2 : \forall x > x_0 \hookrightarrow x^{\varepsilon/2}/$
$/\ln^\beta x > 1 \Rightarrow \forall x > x_0\ \frac{1}{x^\alpha \ln^\beta x} = \frac{x^{\varepsilon/2}}{\ln^\beta x}\frac{1}{x^{1-\varepsilon/2}} > \frac{1}{x^{1-\varepsilon/2}}$.

Т.к. $\int\limits_{x_0}^{+\infty}\frac{dx}{x^{1-\varepsilon/2}}$ расходится, то $\int\limits_{x_0}^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha \ln^\beta x}$ расх-ся $\Rightarrow \int\limits_2^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha\ln^\beta x}$ расх-ся

при $\alpha > 1$: $\exists\ \varepsilon = \alpha - 1,\ \varepsilon > 0$. $\frac{1}{x^\alpha \ln^\beta x} = \frac{1}{x^{1+\varepsilon}\ln^\beta x} = \frac{1}{x^{\varepsilon/2}\ln^\beta x}\frac{1}{x^{1+\varepsilon/2}}$

$\forall \beta$ при $x \to +\infty$ $\frac{1}{x^{\varepsilon/2}\ln^\beta x} \to 0 \Rightarrow \exists\, x_0 \geqslant 2 : \forall x > x_0 \hookrightarrow \frac{1}{x^{\varepsilon/2}\ln^\beta x} < 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow \forall x > x_0\ \frac{1}{x^\alpha \ln^\beta x} = \frac{1}{x^{\varepsilon/2}\ln^\beta x}\frac{1}{x^{1+\varepsilon/2}} < \frac{1}{x^{1+\varepsilon/2}}$.

Т.к. $\int\limits_{x_0}^{+\infty}\frac{dx}{x^{1+\varepsilon/2}}$ сходится, то $\int\limits_{x_0}^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha\ln^\beta x}$ сходится $\Rightarrow \int\limits_2^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha\ln^\beta x}$ сходится

Итак, $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha\ln^\beta x}$ при $\alpha > 1,\ \beta < 1$

## § 12

**115.** Исследовать на абсолютную и условную сходимость интеграл $\int_0^{+\infty} \sin x^2 dx$

$$\int_0^{+\infty} \sin x^2 dx = \underbrace{\int_0^{1} \sin x^2 dx}_{I_1} + \underbrace{\int_1^{+\infty} \sin x^2 dx}_{I_2}$$

$I_1$ очевидно сходится

Рассмотрим $I_2$: $I_2 = \Big|_{t=x^2} \int_1^{+\infty} \sin t \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}} dt$

функция $\sin t$ непрерывна и имеет ограниченную первообразную на $[1,+\infty)$, функция $\frac{1}{2\sqrt{t}}$ непрерывно дифференцируема и монотонна на $[1,+\infty)$, причем $\lim\limits_{t \to +\infty} \frac{1}{2\sqrt{t}} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow I_2$ сходится по признаку Дирихле.

Рассмотрим $\int_0^{+\infty} |\sin x^2| dx > \int_0^{+\infty} \sin^2 x^2 dx = \Big|_{t=x^2} \int_0^{+\infty} \sin^2 t \frac{dt}{2\sqrt{t}} =$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos 2t}{4\sqrt{t}} dt = \underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{dt}{4\sqrt{t}}}_{I_1'} - \underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{\cos 2t \, dt}{4\sqrt{t}}}_{I_2'}$$

$I_1'$ очевидно расходится

Рассмотрим $I_2'$:

функция $\cos 2t$ непрерывна и имеет ограниченную первообразную на $[1,+\infty)$, функция $\frac{1}{4\sqrt{t}}$ непрерывно дифференцируема и монотонна на $[1,+\infty)$, причем $\lim\limits_{t \to +\infty} \frac{1}{4\sqrt{t}} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow I_2$ сходится по признаку Дирихле.

Итак, $\int_0^{+\infty} \sin^2 x^2 dx$ расходится как сумма расходящегося и сходящегося $\Rightarrow \int_0^{+\infty} |\sin x^2| dx$ расходится $\Rightarrow \int_0^{+\infty} \sin x^2 dx$ сходится условно.

120. Исследовать на абсолютную и условную сходимость интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \sin\left(\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right)\frac{dx}{\sqrt{x}}$

при $x \to +\infty$ $\sin\left(\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}} + R(x)$, причем при $x > 1$ справедливо $|R(x)|/\sqrt{x} \leq 1/(3!\, x\sqrt{x}) \cdot 1/\sqrt{x} = \frac{1}{3!\, x^2} \Rightarrow \int\limits_1^{+\infty} \frac{R(x)}{\sqrt{x}}dx$ сходится абсолютно.

Рассмотрим $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx$:

функция $\sin x$ непрерывна и имеет ограниченную первообразную на $[1,+\infty)$, функция $\frac{1}{x}$ непрерывно дифференцируема и монотонна на $[1,+\infty)$, причем $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \int\limits_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ сходится по признаку Дирихле.

Рассмотрим $\int\limits_1^{+\infty}\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx$:

$\left|\frac{\sin x}{x}\right| \geq \frac{\sin^2 x}{x}$. $\exists\, b \in (1,+\infty)$, $\exists\, n: \pi n > b$, $b_1 = \pi n$, $b_2 = 2\pi n$. Тогда

$$\left|\int\limits_{b_1}^{b_2}\frac{\sin^2 x}{x}dx\right| = \int\limits_{\pi n}^{2\pi n}\frac{\sin^2 x}{x}dx \geq \frac{1}{2\pi n}\int\limits_{\pi n}^{2\pi n}\sin^2 x\,dx = \frac{1}{2\pi n}\int\limits_{\pi n}^{2\pi n}\frac{1-\cos 2x}{2}dx = \frac{1}{2\pi n}\cdot\frac{\pi n}{2} =$$

$= 1/4$. Итак, $\exists\, \varepsilon = 1/4: \forall\, b > 1\ \exists\, b_1 = \pi n > b$ и $b_2 = 2\pi n > b$, для которых $\left|\int\limits_{b_1}^{b_2}\frac{\sin^2 x}{x}dx\right| \geq \varepsilon \Rightarrow \int\limits_1^{+\infty}\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx$ расходится $\Rightarrow \int\limits_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ сходится условно $\Rightarrow \int\limits_1^{+\infty}\sin\left(\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right)\frac{dx}{\sqrt{x}}$ сходится условно.

121. Исследовать на абсолютную и условную сходимость интеграл $\int\limits_0^{+\infty} x^2 \sin\left(\frac{\cos x^3}{x+1}\right)dx$

при $x \to +\infty$ $\sin\left(\frac{\cos x^3}{x+1}\right) = \frac{\cos x^3}{x+1} - \frac{\cos^3 x^3}{6(x+1)^3} + R(x)$, причем при $x > 1$ справедливо $|R(x)| \cdot x^2 \leq x^2/(5!(x+1)^5) \Rightarrow \int\limits_0^{+\infty} R(x)x^2$ сходится абсолютно

$\int_0^{+\infty} \frac{x^2\cos x^3}{x+1}$ сходится по признаку Дирихле (функции $x^2\cos x^3$ и $1/(x+1)$)

$\int_0^{+\infty} \frac{x^2\cos^3 x^3}{6(x+1)^3}$ сходится по признаку Дирихле (функции $x^2\cos^3 x^3$ и $1/6(x+1)^3$

$$\int_0^{+\infty} x^2\left|\frac{\cos x^3}{x+1} - \frac{\cos^3 x^3}{6(x+1)^3}\right|dx \geq \int_0^{+\infty}\frac{x^2|\cos x^3|}{x+1}dx \geq \int_0^{+\infty}\frac{x^2}{x+1}\cos^2 x^3 =$$

$$= \underbrace{\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{2(x+1)}dx}_{\text{расходится}} + \int_0^{+\infty}\frac{x^2\cos(2x^3)dx}{2(x+1)}$$ сходится по Дирихле (функции $x^2\cos(2x^3)$ и $1/2(x+1)$) =>

=> $\int_0^{+\infty} x^2\sin\left(\frac{\cos x^3}{x+1}\right)dx$ сходится условно

<u>136.</u> Исследовать на абсолютную и условную сходимость при всех значениях параметра $\alpha$ интеграл $\int_1^{+\infty}\frac{\cos(1+2x)}{(\sqrt{x}-\ln x)^\alpha}dx$ "$I$

$$f(x) = \frac{\cos(1+2x)}{(\sqrt{x}-\ln x)^\alpha}$$

1) Найдём $\alpha$, при которых $I$ очевидно сх-ся абсолютно

$$|f(x)| \leq \frac{1}{(\sqrt{x}-x\ln x)^\alpha} \overset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{(\sqrt{x})^\alpha} \quad \left(\text{т.к. } \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \to 0 \text{ при } x\to+\infty\right)$$

Отсюда $I$ сх-ся абсолютно $\forall\, \alpha > 2$

2) $\alpha \in (0, 2]$: $f(x) = \underbrace{\cos(1+2x)}_{\text{имеет огр. первообр.}}\frac{1}{(\sqrt{x}-\ln x)^\alpha}$ при $x\to+\infty$ стремится к 0, $\exists x_0: \forall x > x_0$ монотонна =>

=> $I$ сх-ся по Дирихле.

$$|f(x)| \geq |\cos(1+2x)|\ ;\ \sqrt{x}-\ln x \leq \sqrt{x} \quad \forall\, x \geq 1$$

$$\int_1^{+\infty}\frac{|\cos(1+2x)|}{x^{\alpha/2}}dx \geq \int_1^{+\infty}\frac{\cos^2(1+2x)}{x^{\alpha/2}}dx = \frac{1}{2}\underbrace{\int_1^{+\infty}\frac{\cos(1+2x)}{x^{\alpha/2}}dx}_{\text{сх-ся по Дирихле}} + \frac{1}{2}\underbrace{\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^{\alpha/2}}}_{\text{расходится}}$$

Вывод: при $\alpha \in (0, 2]$ $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ сх-ся условно

3) $\alpha = 0$: $\int_1^{+\infty}\cos(1+2x)dx = \frac{1}{2}\sin(1+2x)\Big|_1^{+\infty}$ - не существует

4) $\alpha < 0$: $\exists\, N: (\sqrt{x}-\ln x)^{-\alpha} \geq 1$ на $[c_1, c_2]$, где $c_1 = (-\frac{\pi}{3} - 1 + 2\pi N)\frac{1}{2}$,
$c_2 = (\pi/3 - 1 + 2\pi N)\,\frac{1}{2}$, тогда $\left|\int\limits_{c_1}^{c_2} f(x)dx\right| \geq \int\limits_{c_1}^{c_2} \frac{1}{2}dx = \frac{1}{2}(c_2 - c_1) = \frac{\pi}{6} =: \varepsilon_0$

<u>Вывод:</u> при $\alpha \leq 0$ $I$ расх-ся

<u>139.</u> Исследовать на абсолютную и условную сходимость при всех значениях параметра $\alpha$ интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{x^2\cos x^3}{(3x-\operatorname{arctg} x)^\alpha}dx =: I$

1) $\alpha \leq 0$ $\quad \exists\, \varepsilon_0 = \frac{1}{3}: \forall\, c > 0\ \exists\, N: c_1, c_2 > c: c_1 = \sqrt[3]{2\pi N},\ c_2 = \sqrt[3]{2\pi N + \pi/2}$

$$\left|\int\limits_{c_1}^{c_2} \frac{x^2\cos x^3}{(x-\operatorname{arctg} x)^\alpha}dx\right| \geq \int\limits_{c_1}^{c_2} x^2\cos x^3 dx = \frac{1}{3}\sin x^3\Big|_{c_1}^{c_2} = \frac{1}{3} = \varepsilon \Rightarrow I \text{ расх-ся}$$

2) $\alpha > 3$ $\quad \int\limits_1^{+\infty}\left|\frac{x^2\cos x^3}{(3x-\operatorname{arctg} x)^\alpha}\right|dx \leq \int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^{\alpha-2}}$ - очевидно сх-ся $\Rightarrow I$ сх-ся абс.

3) $0 < \alpha \leq 3$: $\int\limits_1^{+\infty}\left|\frac{x^2\cos x^3}{(3x-\operatorname{arctg} x)^\alpha}\right|dx \geq \int\limits_1^{+\infty}\frac{x^2\cos^2 x^3}{(3x-\operatorname{arctg} x)^\alpha}dx = \underbrace{\frac{1}{2}\int\limits_1^{+\infty}\frac{x^2dx}{(3x-\operatorname{arctg} x)^\alpha}}_{\text{расх-ся}} +$

$+\ \frac{1}{2}\int\limits_1^{+\infty}\frac{x^2\cos(2x^3)dx}{(3x-\operatorname{arctg} x)^\alpha}$
сх-ся по Дирихле (функции $x^2\cos(2x^3)$ и $(3x-\operatorname{arctg})^\alpha$)

$I$ сх-ся по Дирихле (функции $x^2\cos x^3$ и $(3x-\operatorname{arctg})^\alpha$)

<u>Вывод:</u> $I$ сх-ся условно

<u>227.</u> ] $f(x), x \in [0, +\infty)$ - непрерывная неотрицательная ф-ция, и пусть $\int\limits_0^{+\infty} f(x)dx$ сходится. Следует ли отсюда, что $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$?

Рассмотрим $f(x) = \sin(x^2)$

$$\int\limits_0^{+\infty} f(x)dx = \Big|_{t=x^2} \int\limits_0^{+\infty}\sin t\frac{dt}{2\sqrt{t}} = \underbrace{\int\limits_0^{1}\sin t\frac{dt}{2\sqrt{t}}}_{I_1} + \underbrace{\int\limits_1^{+\infty}\sin t\frac{dt}{2\sqrt{t}}}_{I_2}$$

при $t \to +0$ $\sin t \sim t$, а $\int\limits_0^1 \frac{1}{2}\sqrt{t}dt$ сх-ся $\Rightarrow I_1$ сх-ся
$I_2$ сх-ся по Дирихле (ф-ции $\sin t$ и $\frac{1}{2\sqrt{t}}$)
$\Rightarrow \int\limits_0^{+\infty} f(x)dx$ - сх-ся,

но $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \neq 0$ => не следует

<u>232.</u> Исследовать на сходимость $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x}-\sin x}dx$

$$\frac{\sin x}{\sqrt{x}-\sin x} = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,\frac{1}{1-(\sin x)/\sqrt{x}} = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\left(1+\frac{\sin x}{\sqrt{x}}+R'(x)\right) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}+\frac{\sin^2 x}{x}+R(x)$$

Т.к. $|R(x)| \leq 1/(x\sqrt{x})$, то $\int R(x)dx$ - сх-ся абсолютно

$\int\limits_1^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}$ - сх-ся по Дирихле (ф-ции $\sin x$ и $\frac{1}{\sqrt{x}}$)

$\int\limits_1^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x}$ - расх-ся (см. задачу <u>120.</u>)

Итак, $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x}-\sin x}dx$ расходится

§ 13

<u>1(3)</u> Найти n-ю частичную сумму $S_n$ ряда и сумму $S$ этого ряда

$$\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{3^n}+\frac{1}{5^n}\right)+\ldots=\left(\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{3^n}+\ldots\right)+$$
$$+\left(\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{5^n}+\ldots\right)$$

$$S_n = \frac{1}{3}\,\frac{3^{-n}-1}{3^{-1}-1}+\frac{1}{5}\,\frac{5^{-n}-1}{5^{-1}-1} = \frac{1-3^{-n}}{2}+\frac{1-5^{-n}}{4} = \frac{3}{4}-\frac{1}{2\cdot 3^n}-\frac{1}{4\cdot 5^n}$$

$$S = \frac{1}{2}+\frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

<u>4(2)</u> Найти n-ю частичную сумму $S_n$ ряда и сумму $S$ этого ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2+4n-3} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+3)(2n-1)} = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+3}\right] =$$

$$= \frac{1}{4}\left[1-\frac{1}{5}+\frac{1}{3}-\frac{1}{7}+\frac{1}{5}-\frac{1}{9}\cdots-\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+3}\right]$$

$$S_n = \frac{1}{4}\left[4/3 - \left(\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+3}\right)\right] = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+3}\right)$$

$$S = \frac{1}{3}$$

<u>10.</u> Найти сумму ряда $a \in R, \alpha \in R, |a| < 1$

$$\tilde{S} = \sum_{n=1}^{\infty} a^n e^{in\alpha} = -1 + \frac{1}{1 - a^{i\alpha}} = \frac{a^{i\alpha}}{1 - a^{i\alpha}} = \frac{a(\cos\alpha + i\sin\alpha)(1 - a(\cos\alpha + i\sin\alpha))}{(1 - a(\cos\alpha - i\sin\alpha))(1 - a(\cos\alpha + i\sin\alpha))} =$$

$$= \frac{a(\cos\alpha - a\cos^2\alpha - ia\sin\alpha\cos\alpha + i\sin\alpha - ia\sin\alpha\cos\alpha - a\sin^2\alpha)}{(1 - a\cos\alpha)^2 + a^2\sin^2\alpha} = \frac{a(\cos\alpha - a)}{1 - 2a\cos\alpha + a^2} +$$

$$+ i\frac{\sin\alpha}{1 - 2a\cos\alpha + a^2}$$

1) $\sum_{n=1}^{\infty} a^n \cos n\alpha = \operatorname{Re}\tilde{S} = \frac{a(\cos\alpha - a)}{1 - 2a\cos\alpha + a^2}$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} a^n \sin n\alpha = \operatorname{Im}\tilde{S} = \frac{\sin\alpha}{1 - 2a\cos\alpha + a^2}$

<u>11(5)</u> Доказать расходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{2}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1 - \frac{2}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{2}}\right)^2\left(1 - \frac{2}{n+1}\right)^{-1} =$$

$= e^{-2} \neq 0 \Rightarrow$ по необх. признаку сх-ти ряд расх-ся

<u>13(1)</u> Доказать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n = \frac{\cos nx}{2^n}$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_\varepsilon : \forall n \geq N_\varepsilon \ \forall p \in \mathbb{N} \ \left|\sum_{k=n+1}^{k+p} a_k\right| = \left|\frac{\cos(n+1)x}{2^{n+1}} + \ldots + \frac{\cos(n+p)x}{2^{n+p}}\right| <$$

$$< \frac{1}{2^{n+1}}\left[1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^p}\right] < \frac{1}{2^n} < \varepsilon$$

$\exists N_\varepsilon = \left\lceil \log_2\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right\rceil$, тогда критерий Коши сходимости ряда выполнен, а значит ряд сходится.

<u>14(1)</u> Доказать расходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, если

$$a_n = \frac{1}{2n+1}$$

$\exists\, \varepsilon_0 : \forall N\ \exists\ n \geq N\ \exists\, p \in \mathbb{N} : \left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} a_k\right| > \sum\limits_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{2k+2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+2} + \ldots + \right.$

$\left. + \frac{1}{n+p+1}\right) \geq \frac{1}{2}\,\frac{p}{n+p+1}$

$\exists\ \varepsilon_0, p, n :\ \varepsilon_0 = \frac{1}{2}\,\frac{p}{n+p+1}$, тогда критерий Коши не выполнен, а значит ряд расходится.

§16

4. Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ есть разность рядов $\sum\limits_{n=1} a_n$ и $\sum\limits_{n=1} b_n$ Выяснить, можно ли утверждать, что этот ряд сходится, если:

1) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится;

2) оба этих ряда расходятся.

1) $\exists\, \varepsilon_0 : \forall N\ \exists\ n \geq N\ \exists\, p \in \mathbb{N} : \left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} a_k\right| \geq \varepsilon_0$

$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N_\varepsilon \cdot \forall\, n \geq N\ \forall\, p \in \mathbb{N}\ \left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} b_k\right| < \varepsilon$

$\exists$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ сходится, тогда $\forall\, \varepsilon' > 0\ \exists\, N_\varepsilon' : \forall\, n \geq N\ \forall\, p \in \mathbb{N}$

$\left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} c_k\right| = \left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} (a_k - b_k)\right| < \varepsilon$

$\exists\ \varepsilon' = \frac{\varepsilon_0}{2},\ \varepsilon = \frac{\varepsilon_0}{2}$, тогда $\exists\ n = \max\{N_\varepsilon, N_\varepsilon'\} : \left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} (a_k - b_k)\right| \geq$

$\geq \left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} a_k\right| - \left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} b_k\right| \geq \varepsilon_0 - \varepsilon = \varepsilon_0 - \frac{\varepsilon_0}{2} = \frac{\varepsilon_0}{2} = \varepsilon'$ ✗! $\Rightarrow \sum\limits_{n=1} c_n$ - расх-ся

2) $\exists\ a_n = b_n = 1/n \to c_n = 0 \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ - сх-ся $\Rightarrow$ нельзя это утв.

Т.5. Является ли сходящимся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, если $\forall\, p \in \mathbb{N}$ выполняется $\lim\limits_{n\to\infty} (a_{n+1} + \ldots + a_{n+p}) = 0$

Нет, например для $a_n = \frac{1}{n}$ $\forall\, p \in \mathbb{N}$ $\lim\limits_{n\to\infty} (a_1 + \ldots + a_{n+p}) = 0$, но $\sum\limits_{n=1} a_n$ расх-ся.