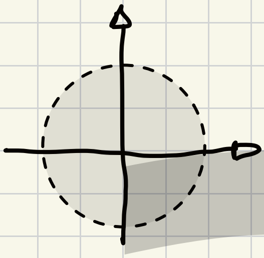
9(1,4) (а,б,2)

1) $u(x,y)=\frac{1}{x^2+y^2-1}$, D – мн-во, на котором опр. $u(x,y)$

$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\neq 1\}$



а) $\partial D=\{(x,y)\mid x^2+y^2=1\}$

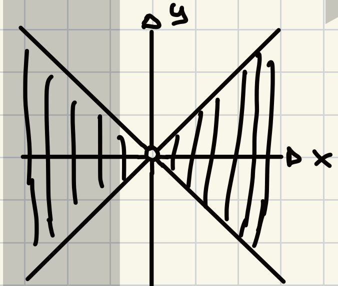
$\partial D\not\subset D \Rightarrow D$ – не замкнутое

б) открытое, т.к. все внутр. точки.

г) область, т.к. является линейно связным и открытым.

4) $u(x,y)=\arcsin\left(\frac{y}{x}\right)$

$D=\left\{(x,y)\mid \left|\frac{y}{x}\right|\le 1\right\}$



$\left[\begin{array}{l}-x\le y<x\\ x\le y\le -x\end{array}\right.$

а) не замкнутое, т.к. не содержит точку прикосновения $(0,0)$.

б) не открытое, т.к. $y=\pm x$ – не внутр. точки, но принадлежит D

г) не область, т.к. не открытое и не линейно связно (например точки $(-1,0)$ и $(1,0)$ нельзя соединить непрерывной кривой)

Т.3 $A=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4: x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2\}$

а) Зафиксируем произвольный x_4. Тогда A – открытый трёхмерный шар, т.е. все точки A $\forall\, x_4=c$, $c=\text{const}$ являются внутренними. В силу произвольности выбора c A является открытым $\forall\, x_4$, т.е. A – открытое.

б) т.к. A открытое, непустое и не совпадает с $\mathbb{R}^4$ A не может быть замкнутым

г) Рассм. точки $(0,0,0,1)$ и $(0,0,0,-1)$. Если A - лин. связно, то эти точки можно соединить непрерывной кривой. Т.к. кривая непрерывная, то и параметрические ур-я кривой $x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t)$ должны быть непрерывными. В частности $x_4(t)$ непрерывна $\overset{\text{т. о промежуточных знач.}}{\Rightarrow} \exists \tilde{t}: x_4(\tilde{t})=0$, но $\nexists\, x_1, x_2, x_3:$ $x_4=0$ и $(x_1,x_2,x_3,x_4)\in A \Rightarrow x_4(t)$ - разрывна, а значит и кривая разрывна - противоречие $\Rightarrow$ A - не связно $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ A - не область.

37(2, 8)

2) $u=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$

а) $\lim\limits_{x\to0}\lim\limits_{y\to0}\dfrac{xy}{x^2+y^2}=\lim\limits_{x\to0}0=0$ б) $\lim\limits_{y\to0}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{xy}{x^2+y^2}=\lim\limits_{y\to0}0=0$

в) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{xy}{x^2+y^2}=\lim\limits_{\rho\to0}\dfrac{\rho^2\cos\varphi\sin\varphi}{\rho^2}=\lim\limits_{\rho\to0}\cos\varphi\sin\varphi$ - не существует

8) $u=x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x}$

а,б) $\lim\limits_{x\to0}\lim\limits_{y\to0}\left(x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x}\right)$ фиксируем x, $\tilde{x}=\text{const}$

$\lim\limits_{y\to0}\left(\tilde{x}\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{\tilde{x}}\right)=\tilde{x}\lim\limits_{y\to0}\sin\frac{1}{y}$ - не существует $\Rightarrow$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to0}\lim\limits_{y\to0}u(x,y)$ не сущ. аналогично $\nexists \lim\limits_{y\to0}\lim\limits_{x\to0}u(x,y)$

в) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\left(\underbrace{x\sin\frac{1}{y}}_{\text{б.м. на огр.}}+\underbrace{y\sin\frac{1}{x}}_{\text{б.м. на огр.}}\right)=0$

48(7,8)

7) $u=\sqrt{x^2+y^2}\ln(x^2+y^2)$

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}} u(x,y)=\lim_{\rho\to0}\rho\ln\rho^2=\lim_{\rho\to0}\frac{\ln\rho^2}{1/\rho}=\lim_{\rho\to0}\frac{2\rho\frac{1}{\rho^2}}{-1/\rho^2}=0$$

8) $u=(x^2+y^2)^{x^2y^2}$

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}} u(x,y)=\lim_{\rho\to0}\rho^{2\rho^4\cos^2\varphi\sin^2\varphi}=\lim_{\rho\to0}e^{\overbrace{2\cos^2\varphi\sin^2\varphi}^{\alpha}\ln\rho\cdot\rho^4}=$$

$$=\exp\left(\alpha\lim_{\rho\to0}\frac{\ln\rho}{\rho^{-4}}\right)=\exp\left(\alpha\lim_{\rho\to0}\frac{1/\rho}{-4\rho^{-5}}\right)=\exp\left(\alpha\lim_{\rho\to0}\left(-\frac{1}{4}\rho^4\right)\right)=$$

$$=e^0=1$$

53.

$$u=\begin{cases}(x^3-xy^2)/(x^2+y^2), & x^2+y^2\neq0\\ a, & x^2+y^2=0\end{cases}\qquad a=?$$

1) в (0;0) u непрерывна по прямой $x=\alpha t,\ y=\beta t,\ \alpha^2+\beta^2\neq0$

$$\lim_{\substack{x=\alpha t\to0\\y=\beta t\to0}} u(x,y)=\lim_{t\to0}(\alpha^3t^3-\alpha\beta^2t^3)/(\alpha^2+\beta^2)t^2=\alpha\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}\lim_{t\to0}t=0$$

т.е. $a=0$

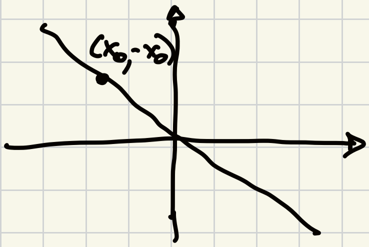
2) в (0;0) u непрерывна.

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}} u(x,y)=\lim_{\rho\to0}\rho\cos\varphi\frac{\cos^2\varphi-\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi+\sin^2\varphi}=\cos\varphi(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi).$$

$\lim_{\rho\to0}\rho=0 \Rightarrow \theta=0$

62(5)

$$u=\begin{cases}(x^3+y^3)/(x+y), & x+y\neq0\\ 3, & x+y=0\end{cases}$$



Рассм. $(x_0,-x_0)$, лежащ. на прямой $y=-x$

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\y\to-x_0}} u(x,y)=\lim_{\substack{x\to x_0\\y\to-x_0}} x^2-xy+y^2=2x_0^2+x_0^2=3x_0^2=u(x_0,-x_0)=3 \text{ при } x_0=\pm1.$$

точки разрыва f $\{(x;y) \mid x=-y\} \setminus \{(1;-1),(-1,1)\}$

77(3) $f=\sin\frac{1}{x^2+y^2-1}$, $X=\{x^2+y^2<1\}$

Рассмотрим $x(n)=(\sqrt{1-\frac{2}{\pi n}};0)$, $x'(n)=(\sqrt{1-\frac{1}{2\pi n}};0)$

$|f(x)-f(x')|=|\sin(-\frac{\pi n}{2})-\sin(-2\pi n)|=1$ при $n=2k-1$

$\rho(x,x')=\sqrt{(x_1-x_1')^2+(x_2-x_2')^2}=\left|\sqrt{1-\frac{2}{\pi n}}-\sqrt{1-\frac{1}{2\pi n}}\right|=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{2}{\pi n}}+\sqrt{1-\frac{1}{2\pi n}}}\cdot$

$\cdot\left|\frac{1}{2\pi n}-\frac{2}{\pi n}\right|=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{2}{\pi n}}+\sqrt{1-\frac{1}{2\pi n}}}\cdot\frac{3}{2\pi n}$. $\exists n_0: \forall n>n_0$ $\frac{1}{\sqrt{1-\frac{2}{\pi n}}+\sqrt{1-\frac{1}{2\pi n}}}<1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall n>n_0$ $\rho(x,x')<\frac{3}{2\pi n}\leq\delta \Rightarrow n(\delta)=\left[\frac{3}{2\pi\delta}\right]+1$

Итак, $\exists\,\varepsilon=\frac{1}{2}: \forall\,\delta>0: \exists\, n=n(\delta)=\max\{n_0,\left[\frac{3}{2\pi\delta}\right]+1\}:$

$\exists\, x(n),x'(n)\in X: \rho(x,x')<\delta, |f(x)-f(x')|>\varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow f$ не является равномерно непрерывной на X.

3(5) $f=z^{xy}$

$\frac{\partial f}{\partial x}=y\ln z\cdot z^{xy}$ $\quad\frac{\partial f}{\partial y}=x\ln z\cdot z^{xy}$ $\quad\frac{\partial f}{\partial z}=xyz^{xy-1}$

12. Верны ли утв.

1) Если у $f(x_1,x_2,\dots x_n)$ в x^0 $\exists\frac{\partial f}{\partial x_i}$ $\forall i \Rightarrow f(x)$ – непр.?

Рассм. $f(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2}$

$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0$

$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim\limits_{y\to0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=0$, но $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)=\lim\limits_{\rho\to0}\frac{\rho^2\sin\varphi\cos\varphi}{\rho^2}=$

$=\sin\varphi\cos\varphi$ – $\nexists \Rightarrow$ не непрерывна $\Rightarrow$ неверно

2) Если у $f(x_1,x_2,\dots x_n)$ $\forall x\in\mathbb{R}^n$ $\exists\frac{\partial f}{\partial x_i}\Rightarrow f$ – непрерывна в $\mathbb{R}^n$?

Рассм. $f(x,y)=\begin{cases}xy/(x^2+y^2), & x^2+y^2\neq0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{y(x^2+y^2)-2x\cdot xy}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y^3-yx^2}{(x^2+y^2)^2}$ – $\exists\,\forall(x,y): x^2+y^2\neq0$. Аналогично $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \text{ (пункт (1))}$$

f - не непрерывна в 0 (пункт (1)) => неверно.

3) f - дифф. в точке => имеет произв. в этой точке?

f - дифф. $\Leftrightarrow \Delta f = A_1\Delta x_1 + A_2\Delta x_2 + \ldots + A_n\Delta x_n + \bar{o}\left(\sqrt{\Delta x_1^2 + \ldots + \Delta x_n^2}\right)$, $\Delta x_i \to 0$

$$\lim_{\Delta x_k \to 0} = \frac{f(x_1, \ldots, x_k + \Delta x_k, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots x_k, \ldots x_n)}{\Delta x_k} =$$

$$= \lim_{\Delta x_k \to 0} \frac{f(x_1 + 0, \ldots x_k + \Delta x_k, \ldots x_n + 0) - f(x_1, \ldots x_k, \ldots x_n)}{\Delta x_k} =$$

$$= \lim_{\Delta x_k \to 0} \frac{A_k \Delta x_k}{\Delta x_k} = A_k = \frac{\partial f}{\partial x_k} \Rightarrow \text{верно}$$

4) У f в x_0 $\exists \frac{\partial f}{\partial x_i} \Rightarrow f$ - дифф-ма в x_0?

Рассм. $f(x,y) = \begin{cases} xy/(x^2+y^2), & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$

$\exists \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ (пункт (1))

Проверим представима ли Δf в виде $\Delta f = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y + \bar{o}\left(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}\right)$

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\Delta f}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{f(\Delta x, \Delta y) - f(0,0)}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\Delta x \cdot \Delta y}{(\Delta x^2 + \Delta y^2)^{3/2}} = \lim_{\rho \to 0} \frac{\rho^2 \cos\varphi \sin\varphi}{\rho^3}.$$

не сущ. => f - не дифф. => неверно

5) f - дифф-ма в x_0, то $\exists$ непрерывные $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ в x_0

Рассм. $f = (xy)^{2/3}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0;0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0;0)$$

Проверим, что $\Delta f = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y + \bar{o}(\Delta x^2 + \Delta y^2)$

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\Delta f}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{(\Delta x \Delta y)^{2/3}}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = \lim_{\rho \to 0} \frac{\rho^{4/3}}{\rho} (\cos\varphi \sin\varphi)^{2/3} = 0 \Rightarrow f \text{ - дифф-ма.}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2}{3} x^{-1/3} y^{2/3}$$

Если $\frac{\partial f}{\partial x}$ непр., то $\frac{\partial f}{\partial x}$ непр. по направлению $y = x^{1/4}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} \frac{2}{3} x^{-1/3} x^{1/6} = \frac{2}{3} \lim\limits_{x\to 0} x^{-1/6}$ – $\nexists$ $\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}$ – не непр. $\Rightarrow$ неверно

в) Достаточное условие непр-ти $\Rightarrow$ верно.

15(7) $f = \operatorname{arctg} \frac{y}{1+x^2}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{1+\frac{y^2}{(1+x^2)^2}} \cdot y \cdot \frac{-2x}{(1+x^2)^2} = \frac{-2xy}{(1+x^2)^2+y^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(1;-1) = \frac{2}{5}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{1+\frac{y^2}{(1+x^2)^2}} \cdot \frac{1}{1+x^2} = \frac{1+x^2}{(1+x^2)^2+y^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1;-1) = \frac{2}{5}$$

$$df = \frac{2}{5}(dx+dy)$$

19(2,7)

2) $f = |y| \sin x$

$\frac{\partial f}{\partial x}(0;0) = |y| \cos x = 0$ $\quad$ $\frac{\partial f}{\partial y}(0;0) = \operatorname{sgn} y \cdot \cos x = 0$

Проверим, что $\Delta f = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y + \tilde{o}(\Delta x^2 + \Delta y^2)$

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \frac{\Delta f}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}} = \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \frac{f(\Delta x,\Delta y)}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho|\sin\varphi|\sin(\rho\cos\varphi)}{\rho} = \lim_{\rho\to 0} |\sin\varphi|\rho\cos\varphi = 0$$

$\Rightarrow$ f - дифф-ма

7) $f = \sqrt[3]{y^2} \operatorname{arctg}|x|$

$\frac{\partial f}{\partial x}(0;0) = 0$ $(\sqrt[3]{y^2} = 0)$ $\quad$ $\frac{\partial f}{\partial y}(0;0) = 0$ $(\operatorname{arctg}|x| = 0)$

Проверим, что $\Delta f = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y + \tilde{o}(\Delta x^2 + \Delta y^2)$

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \frac{\Delta f}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}} = \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \frac{f(\Delta x,\Delta y)}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^{3/2}\sin^{3/2}\varphi \operatorname{arctg}|\rho\cos\varphi|}{\rho} = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ f - дифф-ма

20(1,2)

1) $f=\sqrt{|xy|}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0;0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x;0)-f(0;0)}{x}=0;\quad \frac{\partial f}{\partial y}(0;0)=\lim_{y\to 0}\frac{f(0;y)-f(0;0)}{y}=0$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{\rho\to 0}\frac{\rho\sqrt{|\cos\varphi\sin\varphi|}}{\rho}=\lim_{\rho\to 0}\sqrt{|\cos\varphi\sin\varphi|}$$ – не сущ. $\Rightarrow$

$\Rightarrow f$ – не дифф.

2) $f=\sqrt{x^2+y^2}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0;0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x;0)-f(0;0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2}}{x}=\lim_{x\to 0}\operatorname{sgn}x$$ – не сущ. $\Rightarrow$

$\Rightarrow f$ – не дифф.

21(11)

$$f=\begin{cases}e^{-1/(x^2+y^2)}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0;0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x;0)-f(0;0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{-1/x^2}}{x}=0=\frac{\partial f}{\partial y}(0;0)$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{\rho\to 0}\frac{e^{-1/\rho^2}}{\rho}=0\Rightarrow f$$ – дифф-ма

39(2) $f=x\sin(x+y)$, $\vec{e}=(-1;0)$, $M(\pi/4;\pi/4)$

$$x=\pi/4-t,\ y=\pi/4\ \Rightarrow\ \frac{\partial f}{\partial\vec{e}}=\left(\left(\pi/4-t\right)\sin\left(\pi/2-t\right)\right)'\Big|=\left(\frac{\pi}{4}\cos t-t\cos t\right)'=$$

$$=-\frac{\pi}{4}\sin t+t\sin t-\cos t$$

$$\frac{\partial f}{\partial\vec{e}}(\pi/4;\pi/4)=\frac{\partial f}{\partial\vec{e}}\Big|_{t=0}=-\cos 0=-1$$