Т.1 A, B, C - три события

а) произошло только A - $\boxed{A\setminus B\setminus C}$

б) произошли A и B, а C - не произошло - $\boxed{AB\setminus C}$

в) все 3 события произошли - $\boxed{ABC}$

г) произошло хотя бы одно из них - $\boxed{A\cup B\cup C}$

д) произошло только одно из них - $\boxed{A\triangle B\triangle C\setminus ABC}$

е) ни одно из них не произошло - $\boxed{\overline{A\cup B\cup C}}$

ж) произошло не более двух - $\boxed{\overline{ABC}}$

Т.2 A, B - события. Найти все события X:

$$\overline{(X\cup A)}\cup\overline{(X\cup\overline{A})}=B$$

$$\overline{X}\,\overline{A}\cup\overline{X}A=B$$

$$\overline{X}(\overline{A}\cup A)=B$$

$$\overline{X}=B \Rightarrow \boxed{X=\overline{B}}$$

Т.3 A, B - события. Найти события X:

$$AX=AB$$

Если $\boxed{X=AB\cup\tilde{X},\ \text{где}\ \tilde{X}\subset\overline{A}}$, то $A\tilde{X}=\varnothing\Rightarrow$

$\Rightarrow AX=A(AB)=AB$, при этом очевидно, что

если X имеет другую структуру, т.е.

имеет части, общие с A, отличные от

AB, то $AX\neq AB$.

T.4 Упростить:

а) $(A\cup B)\cap(A\cup\overline{B}) = A\cup(B\overline{B}) = A$

б) $(A\cup B)\cap(\overline{A}\cup\overline{B})\cap(A\cup\overline{B}) = (A\Delta B)\cap(A\cup\overline{B}) =$
$= (A(A\cup\overline{B}))\,\Delta\,(B(A\cup\overline{B})) = (A\cup A\overline{B})\,\Delta\,AB =$
$= A((1\cup\overline{B})\Delta B) = A(B\Delta 1) = A\overline{B}$

в) $(A\cup B)(B\cup C) = AB\cup AC\cup BB\cup BC = B(A\cup B\cup C)\cup$
$\cup AC = B\cup AC$

T.5 $\Omega = \{1,2,3,4\}$, $\mathcal{A}_1 = \{\varnothing, \Omega, \{1\}, \{2,3,4\}\}$, $\mathcal{A}_2 = \{\varnothing, \Omega, \{2\}, \{1,3,4\}\}$
Являются ли $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ алгебрами? Является ли алгеброй $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1\cup\mathcal{A}_2$?

Алгебра:
1) $\varnothing, \Omega \in \mathcal{A}$
2) $\mathcal{A}\subset 2^{\Omega}$, $\forall A\in\mathcal{A} \hookrightarrow \overline{A}\in\mathcal{A}$
3) $\forall A, B\in\mathcal{A} \hookrightarrow AB, A\cup B\in\mathcal{A}$

Видно, что $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ удовл. этим св-вам $\Rightarrow$
$\Rightarrow \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ - алгебры.

Однако, $\mathcal{A}_1\cup\mathcal{A}_2$ - не алгебра, т.к., например,
$\{1\}, \{2\} \in \mathcal{A}_1\cup\mathcal{A}_2$, но $\{1,2\}\notin\mathcal{A}_1\cup\mathcal{A}_2$

T.6 $\mathcal{A}_1\subset\mathcal{A}_2\subset\ldots$ - послед-ть алгебр подмножеств Ω. Является ли алгеброй $\mathcal{A} = \bigcup_{n=1}^{\infty}\mathcal{A}_n$?

---

1) $\forall i\ \mathcal{A}_i \ni \Omega \Rightarrow \Omega\in\mathcal{A}$

2) $\forall A\in\mathcal{A}$ $A\in\mathcal{A}_i$ для нек-го $i \Rightarrow \overline{A}\in\mathcal{A}_i \Rightarrow \overline{A}\in\mathcal{A}$

3) $\forall A, B \in \mathcal{A}$ $A \in \mathcal{A}_k$ и $B \in \mathcal{A}_m$ для как-тех k, m.

$\exists\, n = \max(k, m)$. Т.к. послед-ть вложенная $A, B \in \mathcal{A}_n$

$\mathcal{A}_n$ - алгебра $\Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}_n \Rightarrow \mathcal{A} \ni A \cup B$

$\boxed{\mathcal{A}\text{-алгебра}}$ т.к. выполняются 1), 2), 3).

I.7 $A_1, A_2, \ldots$ - послед-ть событий. Показать, что

$$\mathbb{P}(\underline{\lim}_{n\to\infty} A_n) \le \underline{\lim}_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) \le \overline{\lim}_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) \le \mathbb{P}(\overline{\lim}_{n\to\infty} A_n)$$

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k; \quad \overline{\lim}_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$$

$\square$ 1) $\mathbb{P}(\underline{\lim}_{n\to\infty} A_n) \le \underline{\lim}_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n)$

Рассмотрим $B_n = \bigcap_{k=n}^{\infty} A_n$. Тогда $B_n \subseteq A_k$

$\forall k \ge n$, B_n возрастает: $B_1 \subseteq B_2 \subseteq \ldots \subseteq B_n$, причём

B_n возрастает к $\underline{\lim}_{n\to\infty} A_n \Rightarrow \mathbb{P}(\underline{\lim}_{n\to\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(B_n)$

Т.к. $B_n \subseteq A_k$ $\forall k \ge n \Rightarrow \mathbb{P}(B_n) \le \mathbb{P}(A_k)$ $\forall k \ge n \Rightarrow$

$\Rightarrow \mathbb{P}(B_n) \le \inf_{k \le n} \mathbb{P}(A_k) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(B_n) \le \underline{\lim}_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n)$

Т.к. $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}(\underline{\lim}_{n\to\infty} A_n)$ получаем искомое.

2) $\underline{\lim}_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) \le \overline{\lim}_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n)$ - очевидно из определения нижнего/верхнего предела

3) $\overline{\lim}_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) \le \mathbb{P}(\overline{\lim}_{n\to\infty} A_n)$

Рассмотрим $C_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$. Тогда $C_n \supseteq A_k$ $\forall k \ge n$,

C_n убывает: $C_1 \supseteq C_2 \supseteq \ldots \supseteq C_n$, причём C_n убывает к $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}(C_n) = \mathbb{P}(\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n)$

Т.к. $C_n \supseteq A_k \ \forall k \geq n \Rightarrow \mathbb{P}(C_n) \geq \mathbb{P}(A_k) \ \forall k \geq n \Rightarrow$

$\Rightarrow \mathbb{P}(C_n) \geq \sup_{k\geq n} \mathbb{P}(A_k) \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}(C_n) \geq \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \mathbb{P}(A_n)$

Т.к. $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}(C_n) = \mathbb{P}(\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n)$ получаем искомое ■

Т.8 $1 \leq m < n$. Д-ть: $C_n^m = \sum_{k=m}^{n} C_{k-1}^{m-1}$

□ Докажем для начала, что $C_n^m = C_{n-1}^m + C_{n-1}^{m-1}$

$C_{n-1}^m + C_{n-1}^{m-1} = \frac{(n-1)!}{m!(n-m-1)!} + \frac{(n-1)!}{(m-1)!(n-m)!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}\left(\frac{n-m}{n} + \frac{m}{n}\right) =$

$= C_n^m$ - база индукции ($n = 2$)

Предположим, что формула верна для $n-1$.

Докажем, $C_n^m = \sum_{k=m}^{n} C_{k-1}^{m-1} = \sum_{k=m}^{n-1} C_{k-1}^{m-1} + C_{n-1}^{m-1} =$

$= \underbrace{C_{n-1}^m}_{\text{по предп. индукции}} + C_{n-1}^{m-1} \underbrace{=}_{\text{по доказанному ранее.}} C_n^m$ ■

Т.9 Извлекают 10 шаров - 6 белых, 4 чёрных. Какова вероятность, что не будет извлечено подряд два чёрных шара.

Для выполнения условия задачи шары должны быть вытянуты в следующ. порядке б б б б б б

чёрные

Т.е. всего C_7^4 способов.

Всего способов - $C_{10}^6 \Rightarrow$ искомая вероятность: $\boxed{\frac{C_7^4}{C_{10}^6}}$

T.10 Объяснить, почему при подбрасывании трёх игральных костей 11 очков выпадают чаще, чем 12 очков.

(n_1, n_2, n_3) - эл. событие $n_i \in \overline{1,6}$

"11": $(6,4,1)^{\times 6}$; $(6,3,2)^{\times 6}$; $(5,5,1)^{\times 3}$; $(5,4,2)^{\times}$; $(5,3,3)^{\times 3}$; $(4,4,3)^{\times 3}$ $\Rightarrow N_{11} = 6+6+3+6+3+3 = 27$

"12": $(6,5,1)^{\times 6}$; $(6,4,2)^{\times 6}$; $(6,3,3)^{\times 3}$; $(5,5,2)^{\times 3}$; $(5,4,3)^{\times 6}$; $(4,4,4)^{\times 1}$ $\Rightarrow N_{12} = 6+6+3+3+6+1 = 25$

$N_{11} > N_{12} \Rightarrow P(A_{11}) > P(A_{12}) \Rightarrow$ "11" выпадает чаще чем "12".

T.11 Монету (Р,Г) подбрасывают до тех пор пока дважды не выпадет одна и та же сторона. Постройте вероятностное пр-во этой модели. Найти: а) распределение вероятностей;

б) вероятность события, что эксперимент закончится до 6 подбрасывания;

в) вероятность того, что потребуется чётное число подбрасываний.

а) $\Omega = \{РР, ГГ, РГГ, ГРР ...\} = \{P_n, Г_n\}_{n \in \mathbb{N}}$

$P_1 = РР$; $P_{2k} = [РГ]_k Г$; $P_{2k+1} = [РГ]_k РР$

$p(P_n) = p(\Gamma_n) = \frac{1}{2^{n+1}}$

$p(\Omega) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = 2\left(\frac{1}{1-1/2} - 1 - \frac{1}{2}\right) = 1$

б) P_n, Γ_n – $n+1$ подбрасывание $\Rightarrow$ следует суммировать вер-ти P_n, Γ_n при $n=\overline{1,4}$

$2p(P_1) + 2p(P_2) + 2p(P_3) + 2p(P_4) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} =$

$= \frac{2^3+2^2+2+1}{2^4} = \boxed{\frac{15}{16}}$ – вер-ть того, что эксперимент закончится до 6 подбрасывания не включая 6-ое

в) Чётное число подбрасываний $\Rightarrow$ следует суммировать вер-ти P_{2k-1}, Γ_{2k-1} при $k \in N$.

A – чётное число подбрасываний.

$P(A) = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2k-1+1}} = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2k}} = 2\left[\frac{1}{1-1/4} - 1\right] = \boxed{\frac{2}{3}}$

Т.12 Из колоды в 52 карты наудачу берётся 6 карт. Какова вероятность того, что среди них будут представители всех 4 мастей?

A – событие такое, что будут все 4 масти.

B – событие такое, что не будет какой-то масти

$P(B) = P(C+D+E+F)$, где C, D, E, F – события такие, что среди карт не будет 1^ой масти, 2^ой масти, 3^ей масти, 4^ой масти.

$$P(C+D+E+F)=P(C)+P(D)+P(E)+P(F)-P(CD)-P(DE)-$$
$$-P(EF)-P(FC)-P(CE)-P(FD)+P(CDE)+P(DEF)+$$
$$+P(EFC)+P(FCD)-P(CDEF)=4P(C)-6P(CD)+4P(CDE),$$

т.к. масти равноправны, $P(CDEF)=0$.

$P(C)=\frac{C^6_{52-13}}{C^6_{52}}$ – кол-во способов выбрать 6 карт из 52-13 карт - кол-во карт без одной масти; – кол-во способов выбрать 6 карт из колоды

$P(CD)=\frac{C^6_{52-2\cdot 13}}{C^6_{52}}$; $P(CDE)=\frac{C^6_{52-3\cdot 13}}{C^6_{52}}$

Искомое $P(A)=1-P(B)=1-4\frac{C^6_{39}}{C^6_{52}}+6\frac{C^6_{26}}{C^6_{52}}-4\frac{C^6_{13}}{C^6_{52}}=$

$$=\boxed{\frac{C^6_{52}-4C^6_{39}+6C^6_{26}-4C^6_{13}}{C^6_{52}}}$$

<u>Т.13</u> $2n$ команд разбиваются на 2 равные подгруппы. Какова вер-ть того, что 2 сильнейшие команды окажутся в разных подгруппах.

- -

Если одна из сильных команд например в подгруппе A, то всего мест осталось $2n-1$, а мест в подгруппе B n => искомая вер-ть: $\boxed{\frac{n}{2n-1}}$. Заметим, что утверждение, что одна из сильных команд в подгруппе A не ограничивает общности.

<u>Т.14</u> Найти вероятность того, что дни рождения 12 человек приходятся на разные месяцы года.

A - событие такое, что у всех 12 человек уникальн[ый]
месяц рождения. $|A| = 12!$ - 12 для первого, 11 для
второго...

Ω - всевозможные исходы. $|\Omega| = 12^{12}$ =>

=> $\mathbb{P}(A) = \boxed{\frac{12!}{12^{12}}}$

I.15 В n конвертов разложено по одному
письму n адресатам. На каждом конверте
каждому написан один из n адресов. Най-
ти вероятность того, что хотя бы одно
письмо пойдёт по назначению.

A_i - событие, что $i^{ое}$ письмо пошло по назначению.

Тогда искомая вер-ть: $\mathbb{P}(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) =$

$= \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \ldots + \mathbb{P}(A_n) - (\mathbb{P}(A_1 A_2) + \mathbb{P}(A_2 A_3) + \ldots) + \ldots +$
$+ (-1)^{n-1} \mathbb{P}(A_1 A_2 \ldots A_n)$

$\mathbb{P}(A_i) = \frac{(n-1)!}{n!}$ - 1 письмо фикс. $(n-1)!$ - остальные перестанов[ки]
$n!$ - общее число перестановок

$\mathbb{P}(A_i A_j) = \frac{(n-2)!}{n!}$ - 2 письма фикс. $(n-2)!$ - остальные перестанов[ки]
$n!$ - общее число перестановок

$\mathbb{P}(\underbrace{A_i A_j \ldots A_p}_{m}) = \frac{(n-m)!}{n!}$

Итак, искомое $\mathbb{P}(A_1 + \ldots + A_n) = n\frac{(n-1)!}{n!} - C_n^2 \frac{(n-2)!}{n!} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n!} =$

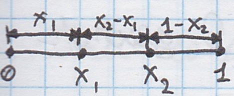
$$= \boxed{\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} C_n^k \frac{(n-k)!}{n!}}$$

Т.16 Расстояние от пункта А до пункта В автобус проходит за 2 минуты, а пешеход за 15. Интервал движения автобусов – 25 минут. Пешеход в случайный момент отправляется в В из А. Найти вер-ть, что автобус догонит пешехода.

Автобус догонит пешехода, если выедет в 13-минутный промежуток времени после выхода пешехода. Вер-ть, что автобус с 25-минутным интервалом попадёт в 13-минутный промежуток – $\boxed{\frac{13}{25}}$ – искомая вер-ть.

Т.17 На отрезке наудачу выбираются две точки. Какова вер-ть того, что из получившихся трёх отрезков можно составить треугольник?

Получившиеся отрезки: $x_1, x_2-x_1, 1-x_2$ (нормируем длину исходного отрезка – без огр. общности), где



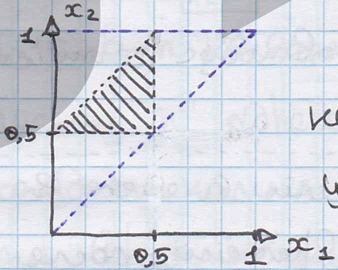
x_1, x_2 – координаты выбираемых точек, $1>x_2>x_1>0$

должны удовлетворять нер-вам треугольника:

$$\begin{cases} a+b>c, \\ a+c>b, \\ b+c>a. \end{cases}$$ где a,b,c — стороны треугольника $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1+x_2-x_1>1-x_2 \\ x_1+1-x_2>x_2-x_1 \\ x_2-x_1+1-x_2>x_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2>1/2 \\ x_2-x_1<1/2 \\ x_1<1/2 \end{cases}$$

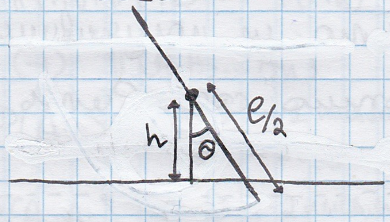
Нарисуем в координатах x_1, x_2



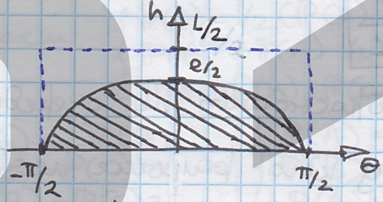
Чёрный треугольник — x_1, x_2 удовл. нер-вам треугольника. Синий треугольник — всевозможные x_1, x_2.

Искомая вер-ть: $\dfrac{mes(◢)}{mes(◢)} = \boxed{1/4}$

<u>Т.18</u> На плоскость, разлинованную параллельными линиями, расстояние между которыми L, бросают иглу длины $l \le L$. Какова вер-ть того, что игла пересечёт линию?



Без ограничения общности, будем считать, что игла падает около какой-то прямой p, причём с одной стороны (вер-ть от этого, очевидно, не изменится). Два независимых параметра эксперимента — $\rho(O,p)$, θ, где O — центр иглы, θ - угол между перпендикуляром к прямой и иглой (см. рис.). $\rho(O,P) = h \in [0, \frac{L}{2}]$, $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Благоприятствующие исходы —



$h \le \frac{\ell}{2}\cos\theta$ - чёрная фигура.

Искомая вер-ть: $\frac{mes(\blacksquare)}{mes(\blacksquare)}$

$$\left.\begin{array}{l} mes(\blacksquare) = \frac{\pi L}{2} \\ mes(\blacksquare) = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} |\frac{\ell}{2}\cos\theta| d\theta = \ell \end{array}\right\} \Rightarrow \text{искомая}: \boxed{\frac{2\ell}{\pi L}}$$

<u>Т. 19</u> У билетной кассы стоит в очереди 100 человек. Половина людей имеет 100-рублёвые купюры, половина 50-рублёвые. Изначально в кассе нет денег и стоимость билета - 50 рублей. Какова вероятность, что никому не придётся ждать сдачу?

Никому не придётся ждать сдачу, если в очереди на любом месте кол-во людей с 50-ти рублёвыми купюрами не меньше чем кол-во людей со 100 рублёвыми купюрами. Сопоставляя людям с 50 рубл. купюрами "(", а людям со 100 рублёвыми купюрами ")" получаем, что кол-во благоприятствующих исходов - C_{50} - число Каталана для 50, т.е. $\frac{1}{50+1} C_{2\cdot 50}^{50} =$ $= \frac{1}{51} C_{100}^{50}$. Число всевозможных исходов - C_{100}^{50}.

$\Rightarrow$ искомая вер-ть: $\boxed{\frac{1}{51}}$

Т.21 Трое игроков подбрасывают по очереди монету. Выигрывает тот, у кого раньше появится "герб". Найти вероятности выигрыша каждого игрока.

] A, B, C - события, что выиграли 1ый, 2ой, 3ий игрок, H_1, H_2 - гипотезы, что первым выпала решка и герб, соответственно. $\mathbb{P}(H_1) = \mathbb{P}(H_2) = 1/2$.

$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|H_1)\mathbb{P}(H_1) + \mathbb{P}(A|H_2)\mathbb{P}(H_2)$

Если первым выпала решка, то ситуация повторяется, но $\overset{1}{A}, \overset{2}{B}, \overset{3}{C} \to \overset{1}{B}, \overset{2}{C}, \overset{3}{A}$. Поэтому $\mathbb{P}(A|H_1) = \mathbb{P}(C)$

Если первым выпал герб, то A выиграл $\Rightarrow$
$\Rightarrow \mathbb{P}(A|H_2) = 1$.

Тогда, $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(C)\cdot 1/2 + 1/2 = 1/2(\mathbb{P}(C) + 1)$

$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B|H_1)\mathbb{P}(H_1) + \mathbb{P}(B|H_2)\mathbb{P}(H_2)$

Если первым выпала решка, то ситуация повторяется, но $\overset{1}{A}, \overset{2}{B}, \overset{3}{C} \to \overset{1}{B}, \overset{2}{C}, \overset{3}{A}$. Поэтому $\mathbb{P}(B|H_1) = \mathbb{P}(A)$

Если первым выпал герб, то A выиграл $\Rightarrow \mathbb{P}(B|K_2)=0$

Тогда, $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A)\cdot 1/2$

Также понятно, что $\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)+\mathbb{P}(C)=1$.

Получаем $\begin{cases} \mathbb{P}(A) = 1/2(\mathbb{P}(C)+1) \\ \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A)\cdot 1/2 \\ \mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)+\mathbb{P}(C)=1 \end{cases} \sim \begin{cases} \mathbb{P}(A) = 2\mathbb{P}(B) \\ 2\mathbb{P}(A)-\mathbb{P}(C)=1 \\ 3\mathbb{P}(B)+\mathbb{P}(C)=1 \end{cases} \sim$

$$\begin{cases} \mathbb{P}(A) = 2\mathbb{P}(B) \\ 4\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(C)=1 \\ 3\mathbb{P}(B)+\mathbb{P}(C)=1 \end{cases} \sim \begin{cases} \mathbb{P}(A) = 2\mathbb{P}(B) \\ \mathbb{P}(B)=2\mathbb{P}(C) \\ \mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)+\mathbb{P}(C)=1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathbb{P}(A)=4/7;\ \mathbb{P}(B)=2/7;\ \mathbb{P}(C)=1/7}$$

Т.22 Пусть A,B и A,C образуют пары независимых событий и $C\subset B$. Покажите, что A и $B\setminus C$ также независимы

A,B и A,C попарно независимы $\Rightarrow \mathbb{P}(AB) = \mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(B)$; $\mathbb{P}(AC)=\mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(C)$.

Также верны равенства 1) $\mathbb{P}(\overline{A}\,\overline{B})=\mathbb{P}(\overline{A})\mathbb{P}(\overline{B})$ и

2) $\mathbb{P}(\overline{A}C)=\mathbb{P}(\overline{A})\mathbb{P}(C)$

1) $\square$ $\mathbb{P}(\overline{A}\,\overline{B}) = \mathbb{P}(\overline{A\cup B}) = 1-\mathbb{P}(A\cup B) = 1-(\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(AB)) =$
$= 1-\mathbb{P}(A)-(\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)) = (1-\mathbb{P}(A))(1-\mathbb{P}(B)) = \mathbb{P}(\overline{A})\mathbb{P}(\overline{B})$ $\blacksquare$

2) $\square$ $C = C(A\cup\overline{A}) = CA\cup C\overline{A} \Rightarrow \mathbb{P}(C)=\mathbb{P}(CA\cup C\overline{A}) = \mathbb{P}(CA)+$
$+\mathbb{P}(C\overline{A})-\mathbb{P}(CAC\overline{A}) = \mathbb{P}(CA)+\mathbb{P}(C\overline{A}) \Rightarrow \mathbb{P}(C\overline{A}) = \mathbb{P}(C)-\mathbb{P}(CA) =$
$= \mathbb{P}(C)-\mathbb{P}(C)\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(C)(1-\mathbb{P}(A)) = \mathbb{P}(C)\mathbb{P}(\overline{A})$ $\blacksquare$

$B \setminus C = B\bar{C} \Rightarrow \mathbb{P}(A(B\setminus C)) = \mathbb{P}(AB\bar{C}) = 1 - \mathbb{P}(\overline{AB\bar{C}}) = 1 -$

$- \mathbb{P}(\bar{A} \cup \bar{B} \cup C) = 1 - (\mathbb{P}(\bar{A}) + \mathbb{P}(\bar{B}) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(\bar{A}\bar{B}) - \mathbb{P}(\bar{A}C) -$

$- \mathbb{P}(\bar{B}C) + \mathbb{P}(\bar{A}\bar{B}C)) \ominus$

Т.к. $C \subset B$, то $\mathbb{P}(\bar{B}C) = 0 \Rightarrow \mathbb{P}(\bar{A}(\bar{B}C)) = 0$

$\ominus\ 1 - (\mathbb{P}(\bar{A}) + \mathbb{P}(\bar{B}) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(\bar{A})\mathbb{P}(\bar{B}) - \mathbb{P}(\bar{A})\mathbb{P}(C)) =$

$= 1 - \mathbb{P}(\bar{A}) - (\mathbb{P}(\bar{B}) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(\bar{A})(\mathbb{P}(\bar{B}) + \mathbb{P}(C))) =$

$= 1 - \mathbb{P}(\bar{A}) - (1 - \mathbb{P}(\bar{A}))(\mathbb{P}(\bar{B}) + \mathbb{P}(C)) = (1 - \mathbb{P}(\bar{A})) \cdot$

$\cdot (1 - (\mathbb{P}(\bar{B}) + \mathbb{P}(C)) = \mathbb{P}(A)(1 - (\mathbb{P}(\bar{B}) + \mathbb{P}(C)) \boxed{=}$

$\mathbb{P}(\bar{B} \cup C) = \mathbb{P}(\bar{B}) + \mathbb{P}(C) - \underbrace{\mathbb{P}(\bar{B}C)}_{0} = \mathbb{P}(\bar{B}) + \mathbb{P}(C) \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{=}\ \mathbb{P}(A)(1 - \mathbb{P}(\bar{B} \cup C)) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(\overline{\bar{B} \cup C}) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B\bar{C}) =$

$= \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B \setminus C)$

Итак, $\mathbb{P}(A(B\setminus C)) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B\setminus C) \Rightarrow A$ и $B\setminus C$ - независимы.

Т.23 В семье двое детей. Найти вероятность того, что оба ребёнка - мальчики, если

а) старший ребенок - мальчик;

б) известно, что хотя бы один ребёнок - мальчик.

$\Omega = \{'ММ', 'МД', 'ДМ', 'ДД'\}$

а) $\mathbb{P}(\{'ММ'\} | \{'М*'\}) = \frac{\mathbb{P}(\{'ММ'\} \cap \{'М*'\})}{\mathbb{P}(\{'М*'\})} = \frac{\mathbb{P}(\{'ММ'\})}{\mathbb{P}(\{'М*'\})} = \frac{1/4}{1/4 + 1/4} = \boxed{1/2}$

б) $\mathbb{P}(\{'ММ'\} | \{'М*' \cup '*М'\}) = \frac{\mathbb{P}(\{'ММ'\})}{\mathbb{P}(\{'М*' \cup '*М'\})} = \frac{\mathbb{P}(\{'ММ'\})}{1 - \mathbb{P}('ДД')} = \frac{1/4}{3/4} = \boxed{1/3}$

Т.24 В ящике находится 10 теннисных мячей, из которых 6 новые. Для первой игры наугад берут два мяча, которые после игры возвращают в ящик. Для второй игры также наугад берут 2 мяча. Найти вероятность того, что оба мяча, взятые для второй игры, новые.

$\exists$ H_0, H_1, H_2 — гипотезы, которые означают, что для первой игры выбрали 0, 1, 2 новых мячей соответственно. A — событие, что оба мяча, взятые для второй игры, новые.

$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=0}^{2} \mathbb{P}(A \mid H_i)\, \mathbb{P}(H_i)$ — формула полной вероятности

Найдём $\mathbb{P}(A \mid H_i)$: если для первой игры взяли i новых мячей, то всего новых мячей осталось $6-i$. Способов выбрать 2 новых шара из $6-i$ — C_{6-i}^2. Всего способов выбрать 2 шара — $C_{10}^2 \Rightarrow \mathbb{P}(A \mid H_i) = \dfrac{C_{6-i}^2}{C_{10}^2}$.

Найдём $\mathbb{P}(H_i)$. Способов выбрать i новых шаров из 6 — C_6^i. Способов выбрать $2-i$ старых шаров — $C_4^{2-i} \Rightarrow \mathbb{P}(H_i) = \dfrac{C_6^i \cdot C_4^{2-i}}{C_{10}^2}$

Итак, $\mathbb{P}(A) = \sum_{i=0}^{2} \dfrac{C_{6-i}^2}{C_{10}^2} \cdot \dfrac{C_6^i C_4^{2-i}}{C_{10}^2} = \boxed{\dfrac{28}{135}}$

T.25 Случайный эксперимент заключается в последовательном подбрасывании двух игральных костей. Найти вероятность того, что сумма в 5 очков появится раньше, чем сумма в 7 очков.

Найдём вероятности выпадения суммы в 5 очков, суммы в 7 очков и суммы в другое количество очков — $P_5, P_7, P_{другое}$.

Общее число исходов — $6^2 = 36$.

Сумма в 5 очков — наборы (1;4), (4;1), (2;3), (3;2) — 4 варианта $\Rightarrow P_5 = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$

Сумма в 7 очков — наборы (1;6), (6;1), (2;5), (5;2), (4;3), (3;4) — 6 вариантов $\Rightarrow P_7 = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

Другое кол-во очков — $P_{другое} = 1 - P_5 - P_7 = \frac{13}{18}$

A — событие, что сумма в 5 очков появится раньше, чем сумма в 7 очков. В броске может выпасть 5, 7 или другая сумма — гипотезы H_1, H_2, H_3. Если выпало 5, то A уже свершилось, т.е. $P(A|H_1) = 1$. Если 7, то A никогда не свершится, т.е. $P(A|H_2) = 0$. Если выпадет другое кол-во й очков, то вероятность свершения события A снова $\mathbb{P}(A)$. $\mathbb{P}(H_1)=p_5$; $\mathbb{P}(H_2)=p_7$; $\mathbb{P}(H_3)=p_{другое}$.

$$\mathbb{P}(A)=\mathbb{P}(A|H_1)\mathbb{P}(H_1)+\mathbb{P}(A|H_2)\mathbb{P}(H_2)+\mathbb{P}(A|H_3)\mathbb{P}(H_3)=$$
$$=\frac{1}{9}+0+\frac{13}{18}\mathbb{P}(A) \Rightarrow \mathbb{P}(A)=\frac{18}{5\cdot 9}=\boxed{\frac{2}{5}}$$

<u>T.26</u> Пусть $A, B, D_1 \dots D_n$ таковы, что $D_i \cap D_j=\varnothing$ при $i\neq j$, $\mathbb{P}(BD_k)>0$, $k=1,\dots n$, $AB\subset \bigcup_{k=1}^n D_k$. Докажите, что $\mathbb{P}(A|B)=\sum\limits_{k=1}^n \mathbb{P}(D_k|B)\mathbb{P}(A|BD_k)$

$$\mathbb{P}(D_k|B)\mathbb{P}(A|BD_k)=\frac{\mathbb{P}(BD_k)}{\mathbb{P}(B)}\mathbb{P}(A|BD_k)=\frac{\mathbb{P}(ABD_k)}{\mathbb{P}(B)}\Rightarrow$$
$\Rightarrow$ исходное р-во: $\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B)=\sum\limits_{k=1}^n \mathbb{P}(ABD_k)$

$\mathbb{P}(AB)=\sum\limits_{k=1}^n \mathbb{P}(ABD_k)$ – формула полной вероятности для разбиения $D_1,\dots D_n$ для $\Omega=\{AB, D_1\dots D_n\}$.

$D_1,\dots D_k$ – разбиение, т.к. $\bigcup_{k=1}^n D_k\supset AB \Rightarrow \bigcup_{k=1}^n D_k=$
$=\bigcup_{k=1}^n D_k\cup AB=\Omega$ и $D_i\cap D_j=\varnothing$ при $i\neq j$. Итак, формула полной вероятности $\mathbb{P}(AB)=\sum\limits_{k=1}^n\mathbb{P}(ABD_k)$ имеет место быть, а значит исходное р-во верное ■.

<u>T.27</u> Имеется три телефонных автомата, которые принимают специальные жетоны. Один из них никогда не работает, второй работает всегда, а третий работает с вероятностью 1/2. Некто имеет

три жетона и пытается выяснить, какой из автоматов исправный (работает всегда). Он делает попытку на одном из автоматов, которая оказывается неудачной. Затем переходит к другому автомату, на котором две подряд попытки оказываются удачными. Какова вероятность, что этот автомат исправный?

$\exists$ A - событие, что на одном автомате попытка неудачна (автомат I), а на другом две удачные (автомат II).

H_1 - гипотеза, что автомат II исправен.

H_2 - гипотеза, что автомат II работает с вероятностью $1/2$.

Формула Байеса - $\mathbb{P}(H_1|A) = \dfrac{\mathbb{P}(A|H_1)\,\mathbb{P}(H_1)}{\mathbb{P}(A)} =$

$= \dfrac{\mathbb{P}(A|H_1)\,\mathbb{P}(H_1)}{\mathbb{P}(A|H_1)\,\mathbb{P}(H_1) + \mathbb{P}(A|H_2)\,\mathbb{P}(H_2)}$

Найдём $\mathbb{P}(H_1), \mathbb{P}(H_2)$: эти вероятности априорные, каждый автомат равновероятно может быть исправен, не исправен или работать с вероятностью $1/2 \Rightarrow \mathbb{P}(H_1) = \mathbb{P}(H_2) = 1/3$

Найдём $P(A|H_1), P(A|H_2)$:

$\exists$ B — событие, что попытка на автомате I неудачна, C — событие, что на автомате II две попытки удачные.

$P(A|H_i) = P(BC|H_i) = P(B|H_i)P(C|H_i)$, т.к. B и C независимые.

$\exists$ H_{11} — гипотеза, что автомат I сломан, H_{12} — гипотеза, что автомат I работает с вер-ю $1/2$.

$P(H_{11}) = P(H_{12}) = 1/2$.

$P(B|H_1) = P((B|H_1)|H_{11})P(H_{11}) + P((B|H_1)|H_{12})P(H_{12}) \ominus$

$P((B|H_1)|H_{11}) = 1$, т.к. на сломанном автомате попытки всегда неудачные.

$P((B|H_1)|H_{12}) = \frac{1}{2}$, т.к. на автомате, работающем с вер-ю $1/2$, неудача происходит с вер-ю $1/2$.

$\ominus\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{4}$

$P(C|H_1) = 1$, т.к. на исправном автомате все попытки удачные

Итак, $P(A|H_1) = P(B|H_1)P(C|H_1) = \frac{3}{4}\cdot 1 = \frac{3}{4}$

$\exists$ H_{21} — гипотеза, что автомат I сломан, H_{22} — гипотеза, что автомат I исправен.

$P(H_{21}) = P(H_{22}) = 1/2$.

$P(B|H_2) = P((B|H_2)|H_{21})P(H_{21}) + P((B|H_2)|H_{22})P(H_{22}) \ominus$

$\mathbb{P}((B|H_2)|H_{21}) = 1$, т.к. на сломанном автомате попытки всегда неудачные.

$\mathbb{P}((B|H_2)|H_{22}) = 0$, т.к. на исправном автомате неудачная попытка невозможна.

$= \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}$

$\mathbb{P}(C|H_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$, т.к. на автомате, работающем с вер-ю $\frac{1}{2}$, вер-ть двух подряд удачных попыток - $1/2 \cdot 1/2 = 1/4$

Итак, $\mathbb{P}(A|H_2) = \mathbb{P}(B|H_2)\mathbb{P}(C|H_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$

Теперь, применим формулу Байеса

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\mathbb{P}(A|H_1)\mathbb{P}(H_1)}{\mathbb{P}(A|H_1)\mathbb{P}(H_1) + \mathbb{P}(A|H_2)\mathbb{P}(H_2)} = \frac{3/4 \cdot 1/3}{3/4 \cdot 1/3 + 1/8 \cdot 1/3} =$$

$$= \frac{3/4}{7/8} = \boxed{6/7}$$

<u>Т.28</u> Из урны содержащей M белых и N чёрных шаров, утеряно r шаров. Какова вероятность извлечения белого шара?

$\exists$ A - событие, что извлекли белый шар.

H_k - гипотеза, что утеряно r-k белых шаров.

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{k=0}^{r} \mathbb{P}(A|H_k)\mathbb{P}(H_k)$$

Найдём $\mathbb{P}(H_k)$: всего способов выбрать r шаров из $M+N$ — C^r_{M+N}. Кол-во способов выбрать $r-k$ белых шаров — C^{r-k}_M. Кол-во способов выбрать k чёрных шаров — C^k_N. $\mathbb{P}(H_k) = \frac{C^{r-k}_M C^k_N}{C^r_{M+N}}$

Найдём $\mathbb{P}(A|H_k)$: Белых шаров осталось $M-r+k$, а всего шаров осталось $M+N-r \Rightarrow \mathbb{P}(A|H_k) = \frac{M-r+k}{M+N-r}$

Итак, $\mathbb{P}(A) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{M-r+k}{M+N-r} \cdot \frac{C^{r-k}_M C^k_N}{C^r_{M+N}} = \frac{1}{(M+N-r)C^r_{M+N}} \cdot$

$\cdot \left[\sum\limits_{k=0}^{n} M C^{r-k}_M C^k_N - \sum\limits_{k=0}^{n} (r-k) C^{r-k}_M C^k_N\right] =$

$\sum\limits_{k=0}^{n} C^{r-k}_M C^k_N = C^r_{M+N}$, т.к. левая и правая части равенства представляют собой кол-во способов выбрать r элементов из $M+N$-элементного множества

$\sum\limits_{k=0}^{n} (r-k) C^{r-k}_M C^k_N = \sum\limits_{k=0}^{r-1} (r-k) C^{r-k}_M C^k_N \boxed{=}$

$(r-k) C^{r-k}_M = (r-k)\frac{M!}{(M-r+k)!(r-k)!} = M\frac{(M-1)!}{(M-r+k)!(r-k-1)!} = M C^{r-k-1}_{M-1}$

$\boxed{=} \sum\limits_{k=0}^{n} M C^{r-k-1}_{M-1} C^k_N = M C^{r-1}_{M+N-1}$ — по аналогии с доказанной выше формулой $\sum\limits_{k=0}^{n} C^{r-k}_M C^k_N = C^r_{M+N}$

$= \frac{1}{(M+N-r)C^r_{M+N}}\left[M C^r_{M+N} - M C^{r-1}_{M+N-1}\right] = \frac{M}{M+N-r}\left[1 - \frac{C^{r-1}_{M+N-1}}{C^r_{M+N}}\right] =$

$= \frac{M}{M+N-r}\left[1 - \frac{(M+N-1)!}{(r-1)!(M+N-r)!} \cdot \frac{r!(M+N-r)!}{(M+N)!}\right] = \frac{M}{M+N-r}\left[1 - \frac{r}{M+N}\right] =$

$= \frac{M}{M+N-r} \cdot \frac{M+N-r}{M+N} = \boxed{\frac{M}{M+N}}$

<u>I.29</u> Брошены две игральные кости. Какова вероятность того, что на второй кости выпало оч-

ков не меньше, чем на первой?

] A - событие, что на первой кости выпало 3 очка, H - событие, что на второй кости выпало очков не меньше, чем на первой.

$\mathbb{P}(A|H) = \frac{\mathbb{P}(AH)}{\mathbb{P}(H)}$. Событие AH означает, что на второй кости выпало 3, 4, 5, 6 очков, на первой 3 очка, т.е. (всего 6^2 исходов) $\mathbb{P}(H) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$.

Чтобы посчитать кол-во исходов, удовл. H "выкинем" варианты, когда выпавшее кол-во очков на 1ой и 2ой кости одинаково. Из оставшихся случаев H удовлетворяет ровно половина. Добавив "выкинутые" исходы получим кол-во исходов удовл. H: $\mathbb{P}(H) = \frac{\frac{1}{2}(36-6)+6}{36} = \frac{21}{36} = \frac{7}{12}$

Итак, $\mathbb{P}(A|H) = \frac{1/9}{7/12} = \boxed{\frac{4}{21}}$

<u>Т.30</u> Пусть A, B, C - три попарно независимые равновероятные события, $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(C) = p$. При этом $ABC = \varnothing$. Найти максимально возможное значение p.

Докажем, что $p \leq \frac{1}{2}$. Используем то, что вероятность объединения пересекающихся частей события не больше, чем вероятность самого события.

Рассмотрим, например событие A.

$\mathbb{P}(AB)=\mathbb{P}(AC)=p\cdot p=p^2$, т.к. A, B и A, C — попарно независимые. $\mathbb{P}(ABC)=0$, т.к. $ABC=\varnothing$.

$\mathbb{P}(AB\cup AC)=\mathbb{P}(AB)+\mathbb{P}(AC)-\mathbb{P}(ABC)=p^2+p^2=2p^2\le\mathbb{P}(A)\Rightarrow$

$\Rightarrow 2p^2\le p$ или $p\le\frac{1}{2}$.

Докажем, что случай $p=\frac{1}{2}$ возможен:

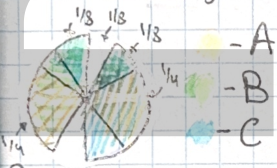


диаграмма Эйлера-Венна

$\mathbb{P}(A)=\mathbb{P}(B)=\mathbb{P}(C)=p=\frac{1}{2}$

$\mathbb{P}(AB)=\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$. Аналогично с BC, AC. $ABC=\varnothing$. Мы показали, т.е. A, B, C — попарно независимы, что максимальное значение — $\boxed{p=\frac{1}{2}}$

<u>Т.31</u> Пусть в схеме Бернулли вероятность успеха в отдельном испытании равна p, $0<p<1$. Какова вероятность того, что цепочки из десяти подряд успехов появятся бесконечное число раз?

- -

Разобьём испытания на десятки $[10k, 10(k+1)]$.

□ A_k — событие, что $\forall m\in[10k,10(k+1)]\ \xi_m=1$, где m-номер испытания, а $\xi_m=1$, если испытание успешно, $\xi_m=0$ иначе. $\mathbb{P}(\xi_m=1)=p\Rightarrow\mathbb{P}(A_k)=p^{10}$.

$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_k) = \infty \Rightarrow$ по лемме Борел-Кантелли

$\mathbb{P}(\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} A_k) = 1.$

$\rceil$ A - событие, что цепочки из десяти подряд успехов появятся бесконечное число раз.

$\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} A_k \subset A$, т.к. помимо изолированных "десяток" в A могут встречаться пересекающиеся десятки.

Тогда $1 = \mathbb{P}(\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} A_k) \leq \mathbb{P}(A) \leq 1 \Rightarrow \mathbb{P}(A) = \boxed{1}$