§19

4. $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos^2 nx}{n(n+1)}$ на $\mathbb{R}$

$|a_n(x)|=\dfrac{\cos^2 nx}{n(n+1)}\leq\dfrac{1}{n(n+1)}<\dfrac{1}{n^2}=\alpha_n.\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ - сх-ся $\Rightarrow$ по пр. Вейерштрасса $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos^2 nx}{n(n+1)}$ - сх-ся равномерно; $a_n(x)$ - непр. на $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $f(x)$ - непр. на $\mathbb{R}$

$$\int_0^{2\pi}f(x)dx=\int_0^{2\pi}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2 nx}{n(n+1)}\right)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{2\pi}\frac{\cos^2 nx}{n(n+1)}dx \ominus$$

$$\int_0^{2\pi}\cos^2 nx\,dx=\frac{1}{2}\left[\int_0^{2\pi}dx+\int_0^{2\pi}\cos 2nx\,dx\right]=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}dx=\pi$$

$$\ominus\ \pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\pi\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\pi$$

12. $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos nx}{n^3}$ на $\mathbb{R}$

1) $a_n(x)=\dfrac{\cos nx}{n^3}$ имеют непр. производные на $\mathbb{R}$

2) $a_n'(x)=-\dfrac{\sin nx}{n^2}.\ |a_n'(x)|<\dfrac{1}{n^2}=\alpha_n\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ - сх-ся $\Rightarrow$ по пр. Вейерштрасса $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n'(x)$ сх-ся равномерно на $\mathbb{R}$.

3) $x_0\in\mathbb{R}:\ |a_n(x_0)|<\dfrac{1}{n^3}\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos nx}{n^3}$ сх-ся на $\mathbb{R}$

1), 2), 3) $\Rightarrow$ $f(x)$ непр. дифференцируема на $\mathbb{R}$

14. $\zeta(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^x},\quad E=(1;+\infty)$

$|a_n(x)|<\dfrac{1}{n^{1+\varepsilon}}=\alpha_n.\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ сх-ся $\Rightarrow$ по пр. Вейерштрасса $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^x}$ сх-ся равномерно на E; $a_n(x)$ - непр. на E $\Rightarrow$ $\zeta(x)$ - непр. на E.

Докажем, что $\zeta(x)$ имеет производные любого порядка по индукции

База: 1) $a_n(x)$ имеют непр. производные на E.

2) $|a_n'(x)| = \left|-\frac{n^{-x}}{\ln n}\right| = \frac{1}{n^x \ln n} = \frac{1}{n^{1+\varepsilon}\ln n} = \alpha_n$. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ сх-ся => по пр. Вейерштрасса $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n'(x)$ сх-ся равномерно на E.

3) Как было показано ранее $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$ сх-ся на E.

1), 2), 3) => $\zeta(x)$ непр. дифференцируема на E.

Предположение: $\zeta^{(n)}(x)$ непр. дифференцируема на E.

Шаг: 1) $a_n^{(n)}(x) = \frac{1}{n^x \ln^n n}$ имеют непр. производные на E.

2) $|a_n'(x)| = \frac{1}{n^x \ln^{n+1} n} = \frac{1}{n^{1+\varepsilon}\ln^{n+1} n} = \alpha_n$. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ сх-ся в силу того, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}\ln^{\beta} n}$ сх-ся при $\alpha>1$ $\forall\beta$ => по пр. Вейерштрасса $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^{(n+1)}(x)$ сх-ся равномерно на E.

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^{(n)}(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x \ln^n n}$ сх-ся по тем же соображениям, что и в 2)

1), 2), 3) => $\zeta^{(n+1)}(x)$ непр. дифференцируема на E.

Таким образом доказано, что $\zeta(x)$ имеет на E производные любого порядка.

28. Контр. Пример: $f_n(x) = \frac{1}{n}D(x)$, $D(x) = \begin{cases}1, & x\in\mathbb{R}\\ 0, & x\in\mathbb{I}\end{cases}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}|f_n(x)-0| = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0 \iff f_n \underset{\mathbb{R}}{\rightrightarrows} 0$

§20

1(4) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)(z-2)^n}{4^{n+2}}$. $\sqrt[n]{|c_n|} = \sqrt[n]{\frac{n+1}{4^{n+2}}} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{4} = \frac{1}{R}$ => $R = 4$

3(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}z^n$. $\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = \left|\frac{(n!)^2}{(2n)!}\frac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2}\right| = \left|\frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)(n+1)}\right| \xrightarrow{n\to\infty} 4 = R$

5(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n(1+i)^{3n}}{(n+1)(n+2)}z^n$. $\sqrt[n]{|c_n|} = \frac{2|1+i|^3}{\sqrt[n]{n+1}\,\sqrt[n]{n+2}} = \frac{2\sqrt{2}^3}{1\cdot 1} = \frac{1}{R}$ => $R = \frac{1}{4\sqrt{2}}$

9(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^{n^2}}{n^n}$. $\sqrt[n^2]{|C_{n^2}|} = \sqrt[n^2]{n^{-n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1 = \frac{1}{R} \Rightarrow R = 1$

$I_R = (-3-R; -3+R) = (-4; -2)$

$x = -2$: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$ - сх-ся абсолютно по пр. сравнения

$x = -4$: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n^2}}{n^n}$ - сх-ся абсолютно как следует из случая $x = -2$.

T.5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2^n}}{n^3}$. $\sqrt[2^n]{|C_{2^n}|} = \sqrt[2^n]{\frac{1}{n^3}}$

$\sqrt[n]{\frac{1}{n^3}} < \sqrt[2^n]{\frac{1}{n^3}} \le 1$. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^3}} = 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[2^n]{\frac{1}{n^3}} = 1 = \frac{1}{R} \Rightarrow R = 1$