1 Неделя

§ 12

№2 (1, 2)

1) $f(x)=\cos(1/x)$, $X=(0;1)$

Возьмём посл-ти $x_n'=\frac{1}{2\pi n}$ и $x_n''=\frac{1}{2\pi n+\frac{\pi}{2}}$. Тогда при $n\to\infty$ $x_n'\to 0$, $x_n''\to 0$, т.е. члены x_n' и $x_n''\in X$.

$$|x_n'-x_n''|=\frac{\pi/2}{2\pi n(2\pi n+\pi/2)}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

Т.е. $\forall\,\delta>0\ \exists N:\ \forall n\geqslant N\ |x_n'-x_n''|<\delta$

$$|f(x_n')-f(x_n'')|=|\cos(2\pi n)-\cos(2\pi n+\tfrac{\pi}{2})|=1$$

Значит $\exists\,\varepsilon=\frac{1}{2}:\ \forall\,\delta>0\ \exists N:\ |x_N'-x_N''|<\delta$,

$|f(x_N')-f(x_N'')|\geqslant\varepsilon$

Т.е. $\exists\,\varepsilon=\frac{1}{2}:\ \forall\,\delta>0\ \exists\ \underset{x_N'}{x_1},\ \underset{x_N''}{x_2}\in X:\ |x_1-x_2|<\delta$,

$|f(x_1)-f(x_2)|\geqslant\varepsilon \Rightarrow f$ – не равномерно непрерывна на X

2) $f(x)=\sin x^2$, $x=\mathbb{R}$

Возьмём посл-ти $x_n'=\sqrt{2\pi n}$ и $x_n''=\sqrt{2\pi n+\frac{\pi}{2}}$.

Тогда при $n\to\infty$ $|x_n'-x_n''|=\frac{\pi/2}{\sqrt{2\pi n}+\sqrt{2\pi n+\pi/2}}\longrightarrow 0$

Т.е. $\forall\,\delta>0\ \exists N:\ \forall n\geqslant N\ |x_n'-x_n''|<\delta$

$$|f(x_n')-f(x_n'')|=|\sin(2\pi n)-\sin(2\pi n+\pi/2)|=1$$

Значит $\exists\, \varepsilon = \frac{1}{2} : \forall \delta > 0 \;\; \exists N : \; |x_N' - x_N''| < \delta, \; |f(x_N') - f(x_N'')| \geqslant \varepsilon$

Т.е. $\exists\, \varepsilon = \frac{1}{2} : \forall \delta > 0 \;\; \exists\, x_1, x_2 \in \mathbb{R} : |x_1 - x_2| < \delta,$ $|f(x_1) - f(x_2)| \geqslant \varepsilon \Rightarrow f$ - не равномерно непрерывна на $\mathbb{R}$

№1 (5)

5) $f(x) = x \sin(1/x), \; X = (0; \pi].$

$$\exists\, g(x) = \begin{cases} x \sin(1/x), & x \in X \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Исследуем $g(x)$ на непрерывность

в т. $x = 0$ $\lim\limits_{x \to +0} x \sin(1/x) = 0$ как беск. м. на огр., т.е. $\lim\limits_{x \to +0} g(x) = g(0) \Rightarrow$ в 0 непрерывна

на X $g(x)$ непрерывна, т.к. $\sin x$ непр. на X и $1/x$ непр. на $X \Rightarrow$ по Т. о непрерывности сложной ф-ции $g(x)$ непрерывна на X.

№17 Пусть $\omega'(\delta) = \sup\limits_{\substack{x_1 \in [a;b] \\ x_2 \in [b;c] \\ |x_1 - x_2| < \delta}} |f(x_1) - f(x_2)|,$

$$\omega''(\delta) = \sup\limits_{\substack{x_1 \in [a;b] \\ x_2 \in [b;c] \\ |x_1 - x_2| < \delta}} |f(x_1) - f(x_2)|,$$

Тогда $\omega(\delta) = \sup\limits_{\substack{x_1 \in [a;c] \\ x_2 \in [b;c] \\ |x_1 - x_2| < \delta}} |f(x_1) - f(x_2)| = \sup\limits_{\substack{x_1 \in [a,c] \\ x_2 \in [a,c] \\ |x_1 - x_2| < \delta}} |f(x_1) - f(b) + f(b) - f(x_2)| = \sup\left(|f(x_1) - f(b)| + |f(b) - f(x_2)|\right),$

$$\sup_{\substack{x_1\in[a,c]\\ x_2\in[a,c]\\ |x_1-x_2|<\delta}} \ldots = \max(\omega'(\delta), \omega''(\delta), \omega'(\delta)+\omega''(\delta)) =$$

$$= \omega'(\delta)+\omega''(\delta) \xrightarrow[\delta\to 0]{} 0 \Rightarrow f - \text{р. непр. на } [a,c].$$

№21. $\exists\, T>0$ – период ф-ции f.

Рассмотрим отрезок $[a+zT; a+zT+T]$, где $a\in D(f)$, $z\in\mathbb{Z}$. Т.к. f непрерывная на этом отрезке, то она равномерно непрерывна на нём. Увеличивая z на 1 и применяя результат, полученный в №17 получаем, что $[a+zT, a+zT+2T]$ - равн. непр. Индуктивно можно получить, что $\forall n\in\mathbb{N}$ $[a+zT, a+zT+nT]$ - равн. непр. При этом если индуктивно вычитать 1 из z, то получим, что $\forall n\in\mathbb{N}$ $[a+zT, a+zT-nT]$ - равн. непр. Таким образом можно покрыть всё мн-во $D(f)$, тем самым доказав, что f - равн. непрерывная.

№23. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty \overset{\text{кр. Коши}}{\Longleftrightarrow} \forall\varepsilon>0\ \exists M=M(\varepsilon):\ \forall x_1, x_2 \geq M$

$\hookrightarrow |f(x_1)-f(x_2)| < \varepsilon \Rightarrow \omega'(\delta) := \sup\limits_{x_1,x_2>M} |f(x_1)-f(x_2)| \leq \varepsilon$

$\forall\delta>0 \Rightarrow f(x)$ непр. на $[M; +\infty)$

Рассм. $[a; M+1]$. $f(x)$ непр. на нём $\Rightarrow$ $f(x)$ – равн. непрерывна на нём.

Соединяя два пункта получаем, что $f(x)$ – равн. непр. на $[a; +\infty)$.

№25. f р. непр. $\Leftrightarrow$ $\exists \lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ и $\exists \lim\limits_{x\to b-0} f(x)$

$\boxed{\Leftarrow}$ продолжим f до непрерывной на отрезке $[a; b]$ ф-ции. По Т. Кантора она равн. непр. $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ на подмн. $(a; b)$ также р. непр. ■

$\boxed{\Rightarrow}$ Т.к. f равн. непр., то $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0 : \forall x_1, x_2 \in (a, \min\{b, a+\delta\}) \hookrightarrow |f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$ – критерий Коши существования правого предела в точке $a \Rightarrow \exists \lim\limits_{x\to a+0} f(x)$. Аналогично $\exists \lim\limits_{x\to b-0} f(x)$

№4 (4)

4) $y = x + \sin x$, $X \in \mathbb{R}$

$\forall \varepsilon>0\ \ \exists \delta(\varepsilon) = \frac{1}{2}\varepsilon : \forall x_1, x_2 : |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow$

$\Rightarrow |y(x_1) - y(x_2)| = |x_1 - x_2 + 2\sin\frac{x_1-x_2}{2}\cos\frac{x_1+x_2}{2}| < |x_1 - x_2| +$

$+ 2|\sin\frac{x_1-x_2}{2}||\cos\frac{x_1+x_2}{2}| = \delta + (x_1 - x_2)\cdot 1 = 2\delta = \varepsilon$ ■

Т. 1. f - дифф. на $I=[a;+\infty)$

а) $\exists M \cdot \forall x\ |f'(x)|<M$

Из Т. Лагранжа $\Rightarrow \exists \xi \in (x_1,x_2) : |f(x_1)-f(x_2)| =$
$= |f'(\xi)|\,|x_1-x_2| < M|x_1-x_2|$

Тогда $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta(\varepsilon)=\frac{\varepsilon}{M} : \forall x_1,x_2 : |x_1-x_2|<\delta \hookrightarrow |f(x_1)-$
$-f(x_2)| < M|x_1-x_2| < M\delta < \varepsilon$ $\blacksquare$

б) $f'(x)$ - беск. большая $\Rightarrow \forall \delta>0\ \exists M : \forall x \geq M \hookrightarrow$
$|f'(x)| > \frac{2}{\delta}$. Из Т. Лагранжа $\Rightarrow \exists \xi \in (x_1,x_2) : |f(x_1)-$
$-f(x_2)| = |f'(\xi)|\,|x_1-x_2|$. $\exists\ x_1 = M;\ x_2 = M+\frac{1}{2}\delta$

$\exists \varepsilon = 1 : \forall \delta>0\ \exists x_1 = M;\ x_2 = M+\frac{1}{2}\delta : |x_2-x_1| = \frac{\delta}{2} < \delta,$
$|f(x_1)-f(x_2)| = |f'(\xi)|\,|x_1-x_2| = |f'(\xi)| \cdot \frac{2}{\delta} > \frac{\delta}{2}\cdot\frac{2}{\delta} = 1$ $\blacksquare$

№3 (7,9)

7) $y=\sin\sqrt{x}$, $X=[1;+\infty)$

$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta(\varepsilon)=\varepsilon : \forall x_1,x_2 \in X : |x_1-x_2|<\delta \hookrightarrow$
$|f(x_1)-f(x_2)| = |\sin\sqrt{x_1}-\sin\sqrt{x_2}| = \left|2\sin\frac{\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}}{2}\cos\frac{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}}{2}\right| <$
$< 2\left|\frac{\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}}{2}\right|\cdot 1 = \frac{|x_1-x_2|}{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}} < |x_1-x_2| < \delta = \varepsilon$ $\blacksquare$

9) $y = x\cdot\sin(1/x)$, $X=(0;+\infty)$

доопределим в нуле: $\lim\limits_{x\to+0} y(x) = x\cdot\sin(1/x)$

[б.м. · огр.] = 0. $\lim\limits_{x\to\infty} y(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sin(1/x)}{1/x}$ [1 зам. предел] = 1. Тогда используя №23 получаем, что y равн. непр. на X.

Т.2. $X = (0;+\infty)$

а) $f(x) = x^3 \sin(1/x)$

$\lim\limits_{x\to+0} f(x)$ [б.м. · огр.] $= 0$ => можно продолжить f на $[0;+\infty)$.

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$$f'(+0) = \lim_{x\to+0} \frac{x^3\sin(1/x)}{x} = \lim_{x\to+0} x^2 \sin(1/x)$$

[б.м. на огр.] = 0

$$f'(x) = 3x^2\sin(1/x) + x^3\cos(1/x)(-1/x^2) = 3x^2\sin(1/x) - x\cos(1/x)$$

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = \lim_{x\to+\infty} 3x^2\cdot 1/x - x\left(1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x\to+\infty} 3x - x + \frac{1}{2x} = \lim_{x\to+\infty} 2x = +\infty,$$ т.е. f' – б.б. => f не р. непр.

б) $f(x) = xe^{\sin x}$. Выберем послед-ти $x_n' = 2\pi n$ и $x_n'' = 2\pi n + \frac{1}{n}$. Тогда $\exists \varepsilon = 2\pi\ \forall \delta\ \exists n: |x_n'' - x_n'| = \frac{1}{n} < \delta,\ x_n'', x_n' \in X$,

$$\left|(2\pi n + \tfrac{1}{n})e^{\sin(2\pi n + \frac{1}{n})} - 2\pi n e^{\sin 2\pi n}\right| > 2\pi n(e^{\sin\frac{1}{n}} - 1) > 2\pi n(1 + \tfrac{1}{n} - 1) = 2\pi = \varepsilon \ \blacksquare$$

§20

№14. $f(x)=\sum_{k=1}^{n}(x-x_k)^2$, $x_k\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$

$$f'(x_0)=\sum_{k=1}^{n}2(x_0-x_k)=2nx_0-2\sum_{k=1}^{n}x_k=0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow x_0=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k$.

При $x>x_0$ $f'(x)>0$ при $x<x_0$ $f'(x)<0$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow x_0=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k$ – точка минимума.

№33.

$$y(x)=\begin{cases}x^2(2+\cos(1/x)), & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$$

$$y'(x)=2x(2+\cos(1/x))-\sin(1/x)\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)\cdot x^2=$$

$$=2x(2+\cos(1/x))+\sin(1/x)$$

$\lim\limits_{x\to 0}y'(x)=\lim\limits_{x\to 0}\sin(1/x)$ – не существует $\Rightarrow$

$\Rightarrow \forall\delta>0$ ни в $(-\delta;0)$ ни в $(0;\delta)$ не монотонная.

$\forall x>0$ $y(x)>0$. $y(x)$ – чётная $\Rightarrow \forall x<0$ $y(x)>0$

т.е. $\forall x$ $y(x)>y(0)$ $\Rightarrow$ в т. $x=0$ y имеет строгий минимум.

№41(5)

5) $y=\operatorname{arctg}\sqrt{|x|(x-1)^2}$, $a=-2$, $b=1$;

$$y' = \frac{1}{1+|x|(x-1)^2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{|x|(x-1)^2}}\left(2|x|(x-1)+\operatorname{sgn}x\cdot(x-1)^2\right)=0 \Rightarrow 2|x|(x-1)+\operatorname{sgn}x\,(x-1)^2=0$$

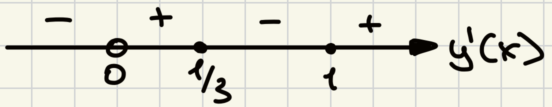
$$(x-1)\left(2|x|+(x-1)\operatorname{sgn}x\right)=0$$

$$(x-1)\left(2x\operatorname{sgn}x+x\operatorname{sgn}x-\operatorname{sgn}x\right)=0$$

$$(x-1)(3x-1)\operatorname{sgn}x=0$$

$x=1$; $x=\frac{1}{3}$ – точки в которых $y'(x)=0$

$x=0$ – точка в которой $y'(x)\ \nexists$



$\Rightarrow$ точки 0, $1/3$ – экстремумы $y(x)$ на $(-2;1)$

$$M=f(1/3)=\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{9}}=\operatorname{arctg}\frac{2}{3\sqrt{3}}$$

$m=\min\{f(0),f(1)\}$

$f(0)=\operatorname{arctg}0=0$

$f(1)=\operatorname{arctg}0=0$ $\Rightarrow m=0$

№57.

1) $f=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2\sigma^2}$, $\sigma>0$

$$f' = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2\sigma^2} \cdot \left(-\frac{1}{2\sigma^2}\right) \cdot 2x$$

$$f'' = -\frac{1}{\sigma^3\sqrt{2\pi}} \left(x \cdot e^{-x^2/2\sigma^2} \cdot \left(-\frac{1}{2\sigma^2} \cdot 2x\right) + e^{-x^2/2\sigma^2} \right) =$$

$$= \frac{x^2 e^{-x^2/2\sigma^2}}{\sigma^5\sqrt{2\pi}} - \frac{e^{-x^2/2\sigma^2}}{\sigma^3\sqrt{2\pi}} = \frac{e^{-x^2/2\sigma^2}}{\sigma^3\sqrt{2\pi}} \left(\frac{x^2}{\sigma^2} - 1 \right)$$

$f''(x_0) = 0 \Rightarrow x_0^2 = \sigma^2 \Rightarrow x_0 = \pm\sigma$

$f''(x) > 0$ при $x < \pm\sigma$ и < 0 при $x > \pm\sigma \Rightarrow$

$\Rightarrow \pm\sigma$ – точки перегиба

2) $f = \dfrac{ax}{x^2+b^2}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$

$$f' = \frac{a(x^2+b^2) - 2x \cdot ax}{(x^2+b^2)^2} = \frac{a(b^2-x^2)}{(x^2+b^2)^2}$$

$$f'' = \frac{-2ax(x^2+b^2)^2 - 2(x^2+b^2) \cdot 2xa(b^2-x^2)}{(x^2+b^2)^4} =$$

$$= \frac{-2ax^3 - 2ab^2x - 4xab^2 + 4x^3a}{(x^2+b^2)^3} = \frac{2ax(x^2-3b^2)}{(x^2+b^2)^3}$$

$f''(x_0) = 0 \Rightarrow x_0 = 0$ или $x_0 = b^4 + \dfrac{1}{2}$

$f''(x) < 0$ при $x > 0$ в окр-ти 0 | $\Rightarrow 0$ – т. перегиба

$f''(x) > 0$ при $x < 0$ в окр-ти 0 |

$f''(x) > 0$ при $x > |b|\sqrt{3}$ и $x < -|b|\sqrt{3}$

$f''(x) < 0$ при $x < |b|\sqrt{3}$ и $x > -|b|\sqrt{3}$ в окр-ти ∞.

ответств. точек $\Rightarrow 0, \pm b\sqrt{3}$ - точки перегиба

№69 (2)

2) $x - \frac{1}{2}x^2 < \ln(1+x) < x$, $x > 0$

рассм. $f(x) = x - \ln(1+x)$

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x} > 0 \quad \forall\ x > 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ из Т. Ролля $\Rightarrow f(x) > 0\ \forall x > 0$ $(f(0) = 0) \Rightarrow$

$\Rightarrow x > \ln(1+x)\ \ \forall\ x > 0$

рассм. $g(x) = \ln(1+x) - (x - \frac{1}{2}x^2)$

$$g'(x) = \frac{1}{1+x} - (1-x) = \frac{x^2}{1+x} > 0\ \forall x > 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ из Т. Ролля $\Rightarrow g(x) > 0\ \forall x > 0$ $(g(0) = 0) \Rightarrow$

$\Rightarrow \ln(1+x) > x - \frac{1}{2}x^2\ \ \forall\ x > 0$

Итак $x - \frac{1}{2}x^2 < \ln(1+x) < x$, $x > 0$ ■

№70 (4, 5, 7)

4) $\operatorname{arctg} x \leq x$, $x \geq 0$

рассм. $f(x) = x - \operatorname{arctg} x$

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2} = \frac{x^2}{1+x^2} \geq 0 \quad \forall\ x \geq 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ из Т. Ролля $\Rightarrow f(x) \geq 0\ \forall x \geq 0$ $(f(0) = 0) \Rightarrow$

$\Rightarrow x \geq \operatorname{arctg} x$, $x \geq 0$ ■

5) $\sin x \geqslant 2x/\pi, \ 0 \leq x \leq \pi/2$

рассм. $f(x) = \sin x - \frac{2x}{\pi}$

$f'(x) = \cos x - \frac{2}{\pi}$

Т. Ролля

На $[0; \arccos \frac{2}{\pi}]$ $f'(x) \geq 0 \Rightarrow f(x) \geqslant f(0) = 0$

На $[\arccos\frac{2}{\pi}; \ \frac{\pi}{2}]$ $f'(x) \leq 0 \Rightarrow f(x) \geqslant f(\frac{\pi}{2}) = 0$

Т.е. $f(x) \geqslant 0 \ \forall \ x: 0 \leq x \leq \pi/2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sin x \geqslant 2x/\pi, \ 0 \leq x \leq \pi/2$ $\blacksquare$

7) $\sin x + \operatorname{tg} x > 2x, \ 0 < x < \pi/2$ $\quad X = (0; \frac{\pi}{2})$

рассм. $f(x) = \sin x + \operatorname{tg} x - 2x$

$f'(x) = \cos x + \frac{1}{\cos^2 x} - 2 = \cos x + \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} - 2 =$

$= \cos x + \operatorname{tg}^2 x - 1$

$f''(x) = -\sin x + 2\operatorname{tg} x \frac{1}{\cos^2 x} = \sin x \left(\frac{2}{\cos^3 x} - 1\right) > 0$

$\forall x \in X \Rightarrow f'(x) > f'(0) = 0$ (Т. Ролля) $\forall x \in X \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x) > f(0) = 0$ (Т. Ролля) $\forall x \in X \Rightarrow$

$\Rightarrow \sin x + \operatorname{tg} x > 2x, \ 0 < x < \pi/2$ $\blacksquare$

Т.3. $e^\pi \vee \pi^e \Leftrightarrow \ln(e^\pi) \vee \ln(\pi^e) \Leftrightarrow \frac{\pi}{\ln \pi} \vee \frac{e}{\ln e}$

рассм. $f(x) = \frac{x}{\ln x}$. $f'(x) = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$. $f'(x) > 0 \ \forall \ x \in$

$(e; +\infty) \Rightarrow f(\pi) > f(e)$, т.к. $\pi > e \Rightarrow e^\pi > \pi^e$