C2 §14 №2(4)

1 неделя

Исследовать на сходимость (используя признак сравнения):

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_n = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{4n}\right)}{\sqrt[3]{2n^5-1}}$$

$$a_n \geqslant \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt[3]{2n^5}} = \frac{A}{n}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A}{n}$ - расходится $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится (по признаку сравнения.

C2 §14 №5(6)

Исследовать на сходимость (получив $a_n \sim \frac{c}{n^\alpha}$)

$$a_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \arcsin \frac{1}{\sqrt[5]{n^4}} \sim \frac{1}{n^{1/3}} \cdot \frac{1}{n^{4/5}} = \frac{1}{n^{17/15}}$$

$\frac{17}{15} > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

C2 §14 №8(3)

$a = ?$: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

$$a_n = \left(\ln sh\frac{1}{n} - \ln\frac{1}{n}\right)^\alpha = \ln^\alpha n\, sh\frac{1}{n} \sim \ln^\alpha\left(n \cdot \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{3!}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) =\right.$$

$$= \ln^{\alpha}\left(1+\frac{1}{6n^2}\right) \sim \left(\frac{1}{6n^2}\right)^{\alpha} = \frac{1}{6^{\alpha} n^{2\alpha}} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится при $2\alpha > 1 \Rightarrow \alpha > \frac{1}{2}$.

Ответ: $\alpha > \frac{1}{2}$.

С2 §14 №18 (8)

Исследовать на сходимость (с помощью признака Даламбера) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$

$$a_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2}.$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2} \cdot \frac{(n!)^2}{(2n)!} = \frac{(2n+1)(2n+2)(2n)!\,(n!)^2}{(n+1)^2 (n!)^2 \cdot (2n)!} =$$

$$= \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2}$$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 4 > 1 \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится по признаку Даламбера.

С2 §14 №19 (6)

Исследовать $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ на сходимость:

$$a_n = \frac{(2n+1)!!}{3^n n!}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2n+3)!!}{3^{n+1}(n+1)!} \cdot \frac{3^n n!}{(2n+1)!!} = \frac{(2n+3)}{3(n+1)}$$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2}{3} < 1 \Rightarrow$ ряд сходится по признаку Даламбера.

С2 §14 №21 (10, 13)

Исследовать $\sum\limits_{n=1}^{\infty}$ на сходимость:

10) $a_n = \left(n\sin\frac{1}{n}\right)^{n^3}$

$$\sqrt[n]{a_n} = \left[\left(n\sin\frac{1}{n}\right)^{n^3}\right]^{1/n} = \left(n\sin\frac{1}{n}\right)^{n^2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\left(n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} + \bar{\bar{o}}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\right)^{n^2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{6n^2}\right)^{n^2} = e^{-1/6} < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ сходится}$$

по признаку Коши.

13) $a_n = \frac{1}{3^n}\left(\frac{n+2}{n}\right)^{n^2}$

$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{3}\left(\frac{n+2}{n}\right)^n$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n = \frac{e^2}{3} > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

расходится по признаку Коши.

С2 §14 №25 (9)

Исследовать $\sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n$ на сходимость:

$$a_n = \frac{1}{n^{\alpha}\ln^{\beta} n}$$

$\alpha > 1$: Рассмотрим $\varepsilon = \alpha - 1 > 0$:

$$a_n = \frac{1}{n^{1+\varepsilon} \ln^\beta n} = \frac{1}{n^{\varepsilon/2} \ln^\beta n} \cdot \frac{1}{n^{1+\varepsilon/2}}.$$

$\lim\limits_{n\to\infty} (n^{\varepsilon/2} \ln^\beta n) = +\infty \Rightarrow \exists n_0: \forall n > n_0 \mapsto n^{\varepsilon/2} \ln^\beta n > 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall n > n_0 \mapsto a_n < \frac{1}{n^{1+\varepsilon/2}}$ - сходится $\Rightarrow$

$\Rightarrow \sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n$ сходится по признаку сравнения.

$\alpha = 1$: $a_n = \frac{1}{n \ln^\beta n}$

Сходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ эквивалентна сходимости

$\int\limits_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln^\beta x} dx = \int\limits_{\ln 2}^{+\infty} \frac{dt}{t^\beta}$ - сходится при $\beta > 1$ и

расходится при $\beta \leq 1$.

$\alpha < 1$: Рассмотрим $\varepsilon = 1 - \alpha > 0$:

$$a_n = \frac{1}{n^{1-\varepsilon} \ln^\beta n} = \frac{n^{\varepsilon/2}}{\ln^\beta n} \cdot \frac{1}{n^{1-\varepsilon/2}}$$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^{\varepsilon/2}}{\ln^\beta n} = +\infty \Rightarrow \exists n_0: \forall n > n_0 \mapsto \frac{n^{\varepsilon/2}}{\ln^\beta n} > 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall n > n_0 \mapsto a_n > \frac{1}{n^{1-\varepsilon/2}}$ - расходится $\Rightarrow$

$\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится по признаку сравнения.

Ответ: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \alpha > 1 \\ \alpha = 1,\ \beta > 1. \end{array}\right.$

P.S. не доказал через эквивалентность $\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha} \ln^{\beta} x}$, т.к. не доказывал его сходимость в ДЗ Д2.

СД §14 Д38

$a_n > 0,\ a_{n+1} < a_n\ \forall n \in \mathbb{N}$ $\quad \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ - сходится.

Док-ть: $\lim\limits_{n\to\infty} n a_n = 0$.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится $\Rightarrow [\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}: n > N,\ \&$ $\forall p \in \mathbb{N} \mapsto |a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p}|] < \varepsilon/2$. (по критерию Коши) $\Rightarrow$

$\Rightarrow [\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}: n > N \mapsto$

$\mapsto |a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+n}| < \varepsilon/2] \Rightarrow$

$\Rightarrow [\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}: \forall n \in \mathbb{N}: n > N \mapsto n \cdot a_{2n} < \frac{\varepsilon}{2}] \Rightarrow$

$\Rightarrow [\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}: \forall n \in \mathbb{N}: n > N \mapsto n a_n < \varepsilon] \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} n a_n = 0$ (по определению).

C2 §15 №3(2)

Исследовать на сходимость $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\ln n}{\sqrt{n}}$;

$a_n = \frac{\ln n}{\sqrt{n}} > 0$

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ - знакочередующийся.

$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = 0$ (1)

$f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$. $f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\sqrt{x} - \ln x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{1}{x^{3/2}}\left(1 - \frac{1}{2}\ln x\right)$

$f'(x) < 0$ начиная с x_0 => $f(x)$ убывает

начиная с x_0 -> $a_n = f(n)$ убывает начиная

с некоторого n_0 => $a_n \geq a_{n+1}$ (2)

(1,2) => $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$ сходится (по признаку

Лейбница)

C2 §15 №4(4)

Исследовать на сходимость:

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n(n-1)/2} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}$

$n \equiv 0 \pmod 4$ => $n = 4k$ => $\frac{n(n-1)}{2} = 2k(4k-1) \vdots 2$

$n \equiv 1 \pmod 4$ => $n = 4k+1$ => $\frac{n(n-1)}{2} = (4k+1)\cdot 2k \vdots 2$

$n \equiv 2 \pmod 4 \Rightarrow n = 4k+2 \Rightarrow \frac{n(n-1)}{2} = (2k+1)(4k+1) \not\vdots\, 2$

$n \equiv 3 \pmod 4 \Rightarrow n = 4k+3 \Rightarrow \frac{n(n-1)}{2} = (4k+3)(2k+1) \not\vdots\, 2.$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n(n-1)/2} \frac{1}{\sqrt{n}} = \underbrace{\sum_{n=1}^{3} (-1)^{n(n-1)/2} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}}_{\alpha} +$$

$$+ \sum_{n=4}^{\infty} (-1)^{n(n-1)/2} \frac{1}{\sqrt{n}} = \alpha + \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{1}{\sqrt{2k}} + \frac{1}{\sqrt{2k+1}} \right)$$

$a_k = \frac{1}{\sqrt{2k}} + \frac{1}{\sqrt{2k+1}} \geq 0$

$\lim_{k \to \infty} a_k = 0$ $\Rightarrow \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k a_k$ сходится

$\forall k: a_k \geq a_{k+1}$

(по признаку Лейбница) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n(n-1)/2}$ сходится

С2 §15 №8 (3,4)

Исследовать на сходимость:

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{\sqrt{n} + \sin n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{\sqrt{n}\left(1 + \frac{\sin n}{\sqrt{n}}\right)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{\sin n}{\sqrt{n}} + r_2(n)\right) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{\sqrt{n}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} r_2(n) \frac{\sin n}{\sqrt{n}} = I_1 + I_2 + I_3$$

$I_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{\sqrt{n}}$:

$\left| \sum_{n=1}^{n} \sin k \right| = \left| \frac{\sin \frac{(n+1) \cdot 1}{2} \sin \frac{n \cdot 1}{2}}{\sin \frac{1}{2}} \right| \leq \frac{1 \cdot 1}{\sin \frac{1}{2}} \Rightarrow \sum_{n=1}^{n}$ ограничена $\Rightarrow$

$\frac{1}{\sqrt{n}}$ монотонно стремится к 0

=> I_1 сходится (по признаку Дирихле)

$$I_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n} = \cancel{\tfrac{1}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-\cos 2n}{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n}{2n}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ расходится.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n}{2n}$ сходится (аналогично I_1 по Дирихле)

=> I_2 расходится (как сумма сходящегося и расходящегося)

$$I_3 = \sum_{n=1}^{\infty} r_2(n) \cdot \frac{\sin n}{\sqrt{n}}.$$

$r_2(n) = \frac{f''(t)\, t^2}{2!}$, где $t = \frac{\sin n}{\sqrt{n}}$, $f(t) = (1+t)^{-1}$

$f''(t) = \frac{2}{(1+t)^3}$. Т.к. $t \to 0$ можем начинать ряд с такого n, что $\left|\frac{\sin n}{n}\right| = |t| < \frac{1}{2}$ =>

=> $f''(t) \le \frac{2}{(1-\frac{1}{2})^3} = 16$, тогда

$$\left| r_2(n) \cdot \frac{\sin n}{\sqrt{n}} \right| \le \left| \frac{16 \cdot \sin^2 n}{2n} \cdot \frac{\sin n}{\sqrt{n}} \right| \le \frac{8}{n^{3/2}}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{n^{3/2}}$ - сходится => $\sum_{n=1}^{\infty} r_2(n) \frac{\sin n}{\sqrt{n}}$ сходится абсолютно => I_3 сходится.

Таким образом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{\sqrt{n} + \sin n} = I_1 + I_2 + I_3$, где I_1 и I_3 - сходятся, а I_2 расходится значит $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{\sqrt{n}+\sin n}$ расходится.

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{\sin n}{\sqrt[3]{n}}\right)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin n}{\sqrt[3]{n}}-\frac{\sin^3 n}{6n}+r_5(n)\right)=$

$=I_1+I_2+I_3$

$I_1=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{\sqrt[3]{n}}$ ~~сходится~~ и $I_2=\frac{\sin^3 n}{6n}$ – сходятся (аналогично I_1 в пункте 3) по признаку Дирихле)

$|r_5(t)|=\left|\frac{(\sin t)^{(5)}\cdot t^5}{5!}\right|\leq\left|\frac{\sin^5 n}{n^{5/3}}\right|\leq\frac{1}{n^{5/3}}$ (здесь $t=\frac{\sin n}{\sqrt[3]{n}}$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow I_3=\sum\limits_{n=1}^{\infty}r_5(n)$ сходится абсолютно

Таким образом, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{\sin n}{\sqrt[3]{n}}\right)=I_1+I_2+I_3$,

где I_1, I_2 и I_3 – сходится, значит

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{\sin n}{\sqrt[3]{n}}\right)$ сходится

Ответ: 3) расходится; 4) сходится.

С2 §15 №9(а)

Исследовать на сходимость: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)=$

$=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\left(\pi n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\right)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\left(\pi n\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^2}+O\left(\frac{1}{n^4}\right)\right)\right)=$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\pi n + \frac{\pi}{2n} + \bar{\bar{o}}\left(\frac{1}{n}\right)\right) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin\left(\frac{\pi}{2n} + \bar{\bar{o}}\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{\pi}{2n} + \bar{\bar{o}}\left(\frac{1}{n}\right)\right) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\pi}{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \bar{\bar{o}}\left(\frac{1}{n}\right)$$

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\pi}{2n}$ - сходится по признаку Лейбница

$\sum_{n=1}^{\infty} \bar{\bar{o}}\left(\frac{1}{n}\right)$ - сходится абсолютно

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\pi \sqrt{n^2+1}\right)$ сходится.

Ответ: сходится.

I 1

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. Верно ли что сходятся:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$.

Пусть $a_n = \frac{\sin n}{\sqrt{n}}$.

$\left|\sum_{i=1}^{n} \sin i\right| = \left|\frac{\sin\frac{n+1}{2} \sin\frac{n}{2}}{\sin\frac{1}{2}}\right|$ - ограниченно

$\frac{1}{\sqrt{n}}$ монотонно стремится к 0 $\Rightarrow$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится (по признаку Дирихле)

$a_n^2 = \frac{\sin^2 n}{n} = \frac{1 - \cos 2n}{2n}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ - расходится

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n}{2n}$ - сходится (аналогично сходимости

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ по признаку Дирихле)

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ расходится.

б) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^3$

Пусть $a_n = \frac{\sin\left[\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)\frac{1}{3}\right]}{\sqrt[3]{n}}$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится (аналогично по признаку Дирихле)

$$a_n^3 = \frac{1}{n}\sin^3\left[\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)\right] = \frac{1}{4n}\left(3\sin\left[\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)\right] + -\sin\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)\right) = \frac{3}{4n}\sin\left[\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)\right] - \frac{1}{4n}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{4n}\sin\left[\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)\right]$ - сходится (аналогично по признаку Дирихле)

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n}$ - расходится

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n^3$ расходится

Ответ: а) неверно; б) неверно.

Т2

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - сходится, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ - сходится абсолютно

Верно ли, что $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится?

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ - сходится $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0. \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists M>0: |a_n| < M$

$|a_n b_n| < M|b_n|$

$\left.\sum\limits_{n=1}^{\infty} |b_n|\right.$ - сходится $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} M|b_n|$ - сходится $\Bigg| \Rightarrow$

$\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|$ - сходится $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится абсолютно.

Ответ: верно.

С2 §17 №8(3) 2 неделя

Исследовать на сходимость и равномерную сходимость $\{f_n(x)\}$ на множестве E.

$$f_n(x) = \frac{\ln nx}{nx^2}, \quad E = [1; +\infty).$$

1) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{t\to+\infty} \frac{\ln tx}{tx^2} = \lim\limits_{t\to+\infty} \frac{\frac{1}{tx}\cdot x}{x^2} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \{f_n(x)\}$ сходится на E (к $f(x)=0$)

2) $\sup\limits_{x\in E} |f_n(x) - f(x)| = \sup\limits_{x\in E} \frac{\ln nx}{nx^2}$.

$$f_n'(x) = \frac{\frac{1}{nx}\cdot n\cdot nx^2 - \ln(nx)\cdot 2nx}{n^2x^4} = 0$$

$nx - \ln(nx)\cdot 2nx = 0$

$\ln nx = \frac{1}{2} \Rightarrow nx = e^{1/2} \Rightarrow x = \frac{e^{1/2}}{n}$

$1 \quad \frac{e^{1/2}}{n} \quad x$ $\Rightarrow x = \frac{\sqrt{e}}{n}$ – точка максимума $f_n(x) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sup_{x\in E} f_n(x) = \begin{cases} f_n\left(\frac{\sqrt{e}}{n}\right), & \text{при } \frac{\sqrt{e}}{n} > 1 \\ f_n(1), & \text{при } \frac{\sqrt{e}}{n} \le 1 \end{cases}$$

$$\sup f_n(x) = \begin{cases} \frac{n}{2e} & \text{при } n = 1 \\ 0 & \text{при } n \ge 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{x\in E} |f_n(x) - f(x)| = 0 \Rightarrow \{f_n(x)\}$ равномерно сходится на E

СД §17 №8(2)

Исследовать на сходимость и равномерную сходимость $\{f_n(x)\}$: $f_n(x)=\frac{nx^2}{1+2n+x}$ на

$E_1=[0;1]$ и $E_2=[1;+\infty)$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x_0)=\lim_{t\to\infty}\frac{tx_0^2}{1+2t+x_0}=\lim_{t\to+\infty}\frac{x_0^2}{2}=\frac{x_0^2}{2}\Rightarrow$$

$\Rightarrow \{f_n(x)\}$ сходится к $f(x)=\frac{x^2}{2}$ на E_1 и E_2.

$$|f_n(x)-f(x)|=\left|\frac{nx^2}{1+2n+x}-\frac{x^2}{2}\right|=\left|\frac{2nx^2-x^2-2nx^2-x^3}{2+4n+2x}\right|=$$
$$=\frac{x^2(x+1)}{2+4n+2x}.$$

$\cancel{x\in E_1}$ $\sup\limits_{x\in E_1}|f_n(x)-f(x)|\le\frac{1\cdot 2}{2+4n+0}=\frac{1}{1+2n}\Rightarrow$

$$\Rightarrow 0\le\sup_{x\in E_1}|f_n(x)-f(x)|\le\frac{1}{1+2n}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\sup_{x\in E_1}|f_n(x)-f(x)|=0\Rightarrow$$

$\Rightarrow f_n(x)\overset{E_1}{\rightrightarrows}\frac{x^2}{2}$ (по критерию равномерной сходимости последовательности функций)

Рассмотрим $\varepsilon=\varepsilon_0$

Фиксируем произвольный $N\in\mathbb{N}$.

Выберем $n_1=N$, $n_2=N+1$, $x=x_0$: $\frac{x_0^2+x_0^3}{(1+2N+x_0)(3+2N+x_0)}>\varepsilon_0, x_0\in E_2$

(Можем, т.к. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x_0^2+x_0^3}{(1+2N+x_0)(3+2N+x_0)}=+\infty$)

$$|f_{n_1}(x_0) - f_{n_2}(x_0)| = \frac{(N+1)x_0^2}{3+2N+x_0} - \frac{Nx_0^2}{1+2N+x_0} =$$

$$= \frac{Nx_0^2+2N^2x_0^2+Nx_0^3+x_0^2+2Nx_0^2+x_0^3-3Nx_0^2-2N^2x_0^2-Nx_0^3}{(3+2N+x_0)(1+2N+x_0)} =$$

$$= \frac{x_0^2+x_0^3}{(3+2N+x_0)(1+2N+x_0)} \geq \varepsilon_0 \Rightarrow f_n(x)$$ неравномерно сходится к $\frac{x^2}{2}$ на E_2

Ответ: $f_n(x) \underset{E_1}{\rightrightarrows} \frac{x^2}{2}$, ~~$f_n(x)$ неравномерно сходится~~ $f_n(x) \underset{E_2}{\not\rightrightarrows} \frac{x^2}{2}$.

C2 §17 №9(3)

Исследовать на сходимость и равномерную сходимость $\{f_n(x)\}: f_n(x) = e^{-(x-n)^2}$ на $E_1 = [-2;2]$ и $E_2 = \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = \lim_{n\to\infty} e^{-x_0^2+2nx_0-n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{2nx_0}}{e^{x_0^2}\cdot e^{n^2}} = 0$$

$\sup\limits_{x\in E_1} |f_n(x)-f(x)| = \sup\limits_{x\in E_1} e^{-(x-n)^2}$. При $n>2$:

$$\sup_{x\in E_1} |f_n(x)-f(x)| = \frac{e^{4xn}}{e^{x^2}e^{n^2}} \leq \frac{e^{8n}}{e^{-2}e^{n^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in E_1} |f_n(x)-f(x)| = 0 \Rightarrow f_n(x) \underset{E_1}{\rightrightarrows} 0$$

Рассмотрим $\varepsilon = \frac{1}{2}$.

Фиксируем произвольный $N \in \mathbb{N}$.

Выберем $n_1 = N$, $n_2 = N+1$, $x = N$.

Тогда $|f_{n_1}(x) - f_{n_2}(x)| = |e^{-(x-n_1)^2} - e^{-(x-n_2)^2}| =$

$= |e^{-0^2} - e^{-1^2}| = 1 - \frac{1}{e} > 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \varepsilon.$

Отсюда $f_n(x) \underset{E_2}{\not\rightrightarrows} 0$.

Ответ: $f_n(x) \underset{E_1}{\rightrightarrows} 0$, $f_n(x) \underset{E_2}{\not\rightrightarrows} 0$

<u>С2 §17 ○ 10(1)</u>

Исследовать сходимость $\{f_n(x)\}$: $f_n(x) = n\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{nx}$ на

$E_1 = (0;2)$ и $E_2 = (2;+\infty)$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{t\to+\infty} \frac{\mathrm{arctg}\,\frac{1}{tx}}{\frac{1}{t}} = \lim_{t\to\infty} \frac{\frac{1}{1+\left(\frac{1}{tx}\right)^2}\cdot\frac{1}{x}\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)}{-\frac{1}{t^2}} =$$

$$\cancel{= \lim_{t\to+\infty} \frac{t^2x}{1+t^2x^2} = -\frac{t}{x}} = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{x}\cdot\frac{t^2x^2}{1+t^2x^2} = \frac{1}{x} = f(x)$$

Рассмотрим $\varepsilon = |\mathrm{arctg}\,1 - 2\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{2}|$.

Фиксируем произвольный $N \in \mathbb{N}$.

Выберем $n_1 = N$, $n_2 = 2N$, $x = \frac{1}{N}$, тогда

$$|f_{n_1}(x) - f_{n_2}(x)| = \left|N\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{N\cdot\frac{1}{N}} - 2N\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{2N\cdot\frac{1}{N}}\right| =$$

$$= N|\mathrm{arctg}\,1 - 2\,\mathrm{arctg}\,\tfrac{1}{2}| \geq |\mathrm{arctg}\,1 - 2\,\mathrm{arctg}\,\tfrac{1}{2}| = \varepsilon \Rightarrow$$

$\Rightarrow f_n(x) \underset{E_1}{\not\rightrightarrows} \frac{1}{x}$ (по критерию ~~ра~~ Коши равномерной сходимости).

Докажем, что $\operatorname{arctg}\alpha \geq \alpha - \frac{\alpha^3}{3}$.

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{arctg} 0 = 0 - \frac{0^3}{3} \\ (\operatorname{arctg}\alpha)' = \frac{1}{1+\alpha^2},\ \left(\alpha - \frac{\alpha^3}{3}\right)' = 1-\alpha^2 \\ \alpha^4 \geq 0 \Rightarrow 1-\alpha^4 \leq 1 \Rightarrow 1-\alpha^2 \leq \frac{1}{1+\alpha^2} \Rightarrow \left(\alpha - \frac{\alpha^3}{3}\right)' \leq (\operatorname{arctg}\alpha)' \end{array}\right| \Rightarrow$$

$\Rightarrow \operatorname{arctg}\alpha \geq \alpha - \frac{\alpha^3}{3}$.

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|n \operatorname{arctg}\frac{1}{nx} - \frac{1}{x}\right| = \frac{1}{x} - n\operatorname{arctg}\frac{1}{nx} \leq$$

$$\leq \frac{1}{x} - n\left(\frac{1}{nx} - \frac{1}{3n^3x^3}\right) = \frac{1}{3n^2x^3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 \leq \sup_{x\in E_2} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{3n^2x^3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in E_2} |f_n(x) - f(x)| = 0 \Rightarrow f_n(x) \underset{E_2}{\rightrightarrows} \frac{1}{x}$$

Ответ: $f_n(x) \underset{E_1}{\not\rightrightarrows} \frac{1}{x}$, $f_n(x) \underset{E_2}{\rightrightarrows} \frac{1}{x}$

СЛ §17 № 11(5)

Исследовать сходимость $\{f_n(x)\}$: $f_n(x) = n^2x^2e^{-nx}$ на

$E_1 = [0;+\infty)$ и $E_2 = [\delta;+\infty)$, $\delta > 0$.

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} n^2x^2e^{-nx} = 0.$$

Рассмотрим $\varepsilon = \frac{1}{9}$.

Фиксируем произвольный $N \in \mathbb{N}$.

Выберем $n_1 = 2N$, $n_2 = N$, $x = \frac{1}{N}$, тогда

$$|f_{n_1}(x) - f_{n_2}(x)| = \left|4N^2 \cdot \frac{1}{N^2} e^{-2N\cdot\frac{1}{N}} - N^2 \frac{1}{N^2} e^{-N\cdot\frac{1}{N}}\right| =$$

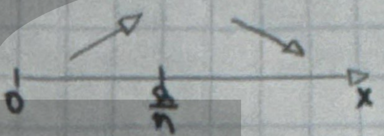
$$= \left|\frac{4}{e^2} - \frac{1}{e}\right| = \frac{1}{e}\left(\frac{4}{e} - 1\right) \geq \frac{1}{3}\left(\frac{4}{3} - 1\right) = \frac{1}{9} = \varepsilon \Rightarrow$$

$\Rightarrow f_n(x) \underset{E_1}{\not\rightrightarrows} 0$ (по критерию Коши)

$$\sup_{x\in E_2}|f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in E_2} f_n(x).$$

$$f_n'(x) = n^2(2xe^{-nx} - x^2 \cdot n e^{-nx}) = n^2 x(2 - nx)$$

$$f_n'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{n}.$$



$$\Rightarrow \sup_{x\in E_2} f_n(x) = \begin{cases} f_n(\delta), \text{ при } \frac{2}{n} < \delta \\ f_n\left(\frac{2}{n}\right), \text{ при } \frac{2}{n} \geq \delta \end{cases}$$

Начиная с некоторого n_0: $\frac{2}{n} < \delta \Rightarrow$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in E_2} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} n^2\delta^2 e^{-n\delta} = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow f_n(x) \underset{E_2}{\rightrightarrows} 0$

Ответ: $f_n(x) \underset{E_1}{\not\rightrightarrows} 0$, $f_n(x) \underset{E_2}{\rightrightarrows} 0$.

СД §17 №12 (5)

Исследовать на сходимость $\{f_n(x)\}$: $f_n(x) = \ln\left(x^2 + \frac{1}{n}\right)$

на $E_1 = (0; +\infty)$ и $E_2 = (1; +\infty)$:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \ln\left(x^2 + \frac{1}{n}\right) = 2\ln x.$$

Рассмотрим ~~$\varepsilon = \ln\frac{4}{3}$~~ ε: $0 < \varepsilon \le \ln\frac{4}{3}$.

Фиксируем произвольный $N \in \mathbb{N}$

Выберем $n_1 = N^2$, $n_2 = 2N^2$, $x = \frac{1}{N}$, тогда

$$|f_{n_1}(x) - f_{n_2}(x)| = \left|\ln\left(\frac{1}{N^2} + \frac{1}{N^2}\right) - \ln\left(\frac{1}{N^2} + \frac{1}{2N^2}\right)\right| =$$

$$= \left|\ln\left(\frac{1}{N^2}\cdot 2\right) - \ln\left(\frac{1}{N^2}\cdot\frac{3}{2}\right)\right| = \left|\ln\frac{4}{3}\right| = \ln\frac{4}{3} \ge \varepsilon \Rightarrow$$

$\Rightarrow f_n(x) \underset{E_1}{\not\rightrightarrows} 2\ln x$ (по критерию Коши)

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in E_2} \left|\ln\left(x^2 + \frac{1}{n}\right) - 2\ln x\right| = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in E_2} \ln\left(1 + \frac{1}{nx^2}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln 1 = 0 \Rightarrow f_n(x) \underset{E_2}{\rightrightarrows} 2\ln x$$ (по критерию)

Ответ: $f_n(x) \underset{E_1}{\not\rightrightarrows} 2\ln x$, $f_n(x) \underset{E_2}{\rightrightarrows} 2\ln x$.

С2 §17 №13(2)

Исследовать на сходимость $\{f_n(x)\}$: $f_n(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}x^n\right)$ на $E_1 = (0;\alpha)$ и $E_2 = (0;1)$, $0 < \alpha < 1$.

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \cos\left(\frac{\pi}{2}x^n\right) = 1.$$

$$\sup_{x\in E_1} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in E_1}\left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{2}x^n\right)\right) =$$

$$= \sup_{x\in E_1}\left(\cos 0 - \cos\left(\frac{\pi}{2}x^n\right)\right) = \sup_{x\in E_1}\left(2\sin\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}x^n\right)\sin\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}x^n\right)\right) \le$$

$$\le \sup_{x\in E_1}\left(2\cdot\left(\frac{\pi x^n}{4}\right)^2\right) \le \frac{\pi^2\alpha^{2n}}{8} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 \le \sup_{x\in E_1}|f_n(x)-f(x)| \le \frac{\pi^2}{8}\alpha^{2n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\sup_{x\in E_1}|f_n(x)-f(x)| = 0 \Rightarrow f_n(x) \underset{E_1}{\rightrightarrows} 1.$$

Рассмотрим $\varepsilon: 0 < \varepsilon \le \left|\cos\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{8}\right|$

Фиксируем произвольный $N \in \mathbb{N}$.

Выберем $n_1 = N$, $n_2 = 2N$, $x = \sqrt[N]{\frac{1}{2}}$, тогда:

$$|f_{n_1}(x) - f_{n_2}(x)| = \left|\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{4}\right)\right| \ge \varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f_n(x) \underset{E_2}{\not\rightrightarrows} 1$$

Ответ: $f_n(x) \underset{E_1}{\rightrightarrows} 1$, $f_n(x) \underset{E_2}{\not\rightrightarrows} 1$

Т3

Исследовать $\{f_n(x)\}$ на сходимость на $E = [0;1]$.

а) $f_n(x) = x^n - x^{n+1}$

$f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0.$

$|f_n(x) - f(x)| = f_n(x).$

Максимум:

$$f_n'(x) = nx^{n-1} - (n+1)x^n = x^{n-1}(n-(n+1)x)$$

$$0 \nearrow \frac{n}{n+1} \searrow 1 \Rightarrow \sup_{x\in E}|f_n(x)-f(x)| = f_n\left(\frac{n}{n+1}\right) =$$

$= \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n \cdot \frac{1}{n+1} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{x\in E} |f_n(x) - f(x)| =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n \cdot \frac{1}{n+1} = e^{-1} \cdot 0 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow f_n(x) \underset{E}{\rightrightarrows} 0.$ (по критерию)

~~б)~~ $\cancel{f_n(x) = \dfrac{\sin \frac{xn}{x^2+n^2}}{1+\ln^2 n}}$

$\cancel{f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \left[\frac{\sin 0}{+\infty}\right]} = 0.$

$\left| \dfrac{\sin \frac{nx}{n^2+x^2}}{1+\ln^2 n} \right.$

б) $f_n(x) = x^n - x^{2n}$

$f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0.$

Рассмотрим $\varepsilon = \frac{1}{4}$.

Фиксируем произвольный $N \in \mathbb{N}$.

Выберем $n_1 = N$, $n_2 = 2N$, $x = \sqrt[N]{\frac{1}{2}}$, тогда

$|f_{n_1}(x) - f_{n_2}(x)| = \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{16} \right| = \frac{7}{16} > \frac{1}{4} = \varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow f_n(x) \underset{E}{\not\rightrightarrows} 0$

Ответ: а) $f_n(x) \underset{E}{\rightrightarrows} 0$, б) $f_n(x) \underset{E}{\not\rightrightarrows} 0$.

C2 §18.8(5)

Док-ть равномерную сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} nx}{x^4+n\sqrt[3]{n}} \text{ на } (-\infty;+\infty)$$

$$u_n(x) = \frac{\operatorname{arctg} nx}{x^4+n\sqrt[3]{n}}$$

$$|u_n(x)| \leq \frac{\frac{\pi}{2}}{n\sqrt[3]{n}} = a_n$$

$$a_n = \frac{\pi}{2n^{4/3}} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ — сходится} \quad \Big| \Rightarrow$$

$\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\operatorname{arctg} nx}{x^4+n\sqrt[3]{n}}$ сходится равномерно (по признаку Веберштрасса).

C2 §18.13(4)

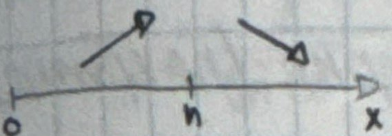
Исследовать на сходимость и равномерную сходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$: $u_n(x) = \cancel{\sum_{n=1}^{\infty}} \left(\operatorname{arctg} \dfrac{x}{x^2+n^2}\right)^2$ на $0 \leq x \leq +\infty$.

$$\cancel{|u_n(x)| \leq \left(\frac{x}{x^2+n^2}\right)^2}$$

$$\cancel{\left(\operatorname{arctg} \frac{x}{x^2+n^2}\right)' = \frac{1}{1+}}$$

$u_n(x)$ — максимальна, когда $\dfrac{x}{x^2+n^2}$ — максимально:

$$\left(\frac{x}{x^2+n^2}\right)' = \frac{x^2+n^2-2x^2}{(x^2+n^2)^2} = \frac{n^2-x^2}{(x^2+n^2)^2}$$



$\Rightarrow |u_n(x)| = u_n(x) \le \left(\operatorname{arctg}\frac{1}{2n}\right)^2 = a_n$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \sim \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n}\right)^2$ - сходится $\Rightarrow$

$\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно на $[0;+\infty)$.
(по признаку Вейерштрасса)

С2 §18 №20(1)

Исследовать на сходимость и равномерную сходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$: $u_n(x) = 2^n \sin\frac{x}{3^n}$ на $[0;+\infty)$.

$\sqrt[n]{u_n(x)} = 2\sqrt[n]{\sin\frac{x}{3^n}}$

$\lim\limits_{n\to\infty} 2\sqrt[n]{\sin\frac{x}{3^n}} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{3}\sqrt[n]{x} = \frac{2}{3} < 1 \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$

сходится (по признаку Коши)

Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно. Тогда

$u_n(x)$ сходится равномерно.

Рассмотрим $\varepsilon = \sin 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\left(\sin 1 > \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \varepsilon > 0\right)$.

Фиксируем произвольный $N \in \mathbb{N}$,

Выберем $n_1 = \max\{N, n_0\}$, $n_2 = 2n_1$, $x = 3^{n_1}$,

здесь n_0: $\left(\frac{2}{3}\right)^{n_0} \le \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Тогда $|u_{n_1}(x) - u_{n_2}(x)| = \left|2^{n_1}\sin 1 - 2^{2n_1}\cdot\sin\frac{1}{3^{n_1}}\right| =$

$= 2^{n_1}\left(\sin 1 - 2^{n_1}\sin\frac{1}{3^{n_1}}\right) \ge 2^{n_1}\left(\sin 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n_1}\right) \ge 2^{n_1}\varepsilon \ge \varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow u_n(x)$ сходится неравномерно (по критерию Коши) $\female$ $\Rightarrow$ предположение неверно,
$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится неравномерно.

<u>C2 §18 №21(1)</u>

Исследовать на сходимость и равномерную сходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$: $u_n(x) = \frac{(-1)^n}{x+\sqrt{n}}$ на $[0;+\infty)$

$a_n(x) = \frac{1}{x+\sqrt{n}}$, $b_n(x) = (-1)^n$, тогда $u_n(x) = a_n(x)\, b_n(x)$

1) $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} b_k\right| = |-1+1-1+\ldots+(-1)^n| \leq 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left\{\sum\limits_{k=1}^{n} b_k(x)\right\}$ – ограничена

2) $\sup\limits_{x\in[0;+\infty)} |a_n(x)| = \frac{1}{\sqrt{n}} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{x\in[0;+\infty)} |a_n(x) - 0| = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow a_n(x) \rightrightarrows 0$ (по критерию)

(1-2) $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x)$ сходится равномерно на $[0;+\infty)$

(по ~~критерию~~ признаку Дирихле)

Ответ: Сходится равномерно на $[0;+\infty)$

<u>C2 §18 №22(1)</u>

Исследовать на сходимость и равномерную сходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$: $u_n(x) = \frac{\sin nx \sin x}{\sqrt[3]{n+x}}$ на $[0;+\infty)$

$a_n(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{n+x}}$, $b_n(x) = \sin nx \sin x$, тогда $u_n(x) = a_n(x) b_n(x)$

1) $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} b_k(x)\right| = \left|\frac{\sin\frac{n+1}{2}x \sin\frac{n}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}\right| \cdot |\sin x| =$

~~$x \neq 2\pi m : \sum b_n(x) = 0 \Rightarrow$~~

$= \left|\frac{\sin\frac{n+1}{2}x \sin\frac{n}{2}x}{\sin\frac{x}{2}} \cdot 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\right| \le 2\cdot 1\cdot 1\cdot 1 = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left\{\sum\limits_{k=1}^{n} b_k(x)\right\}$ - ограничена.

2) $\sup\limits_{x\in[0;+\infty)} |a_n(x)| = \sup\limits_{x\in[0;+\infty)} \frac{1}{\sqrt[3]{x+n}} = \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{x\in[0;+\infty)} |a_n(x)| = 0 \Rightarrow a_n(x) \underset{[0;+\infty)}{\rightrightarrows} 0$ (по критерию)

$(1-2) \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x)$ равномерно сходится на $[0;+\infty)$

(по признаку Дирихле).

Ответ: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно на $[0;+\infty)$

СР §18 №29 (4,7)

Исследовать на сходимость и равномерную сходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ на E_1 и E_2:

4) $u_n(x) = \ln\left(1+\frac{x^2}{n^2}\right)$ $E_1 = [0;a], a>0$, $E_2 = [1;+\infty)$

E_1: $|u_n(x)| \le \ln\left(1+\frac{a^2}{n^2}\right) \le \frac{a^2}{n^2}$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a^2}{n^2}$ - сходится $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно на E_1 (по признаку Вейерштрасса)

Выберем ε_0: $0<\varepsilon_0 \leq \ln\frac{5}{2}$.

Фиксируем произвольный $N \in \mathbb{N}$.

Выберем $n_1 = N$, $n_2 = 2N$, $x = 2N$, тогда

$$\left|\ln\left(1+\frac{x^2}{n_1^2}\right) - \ln\left(1+\frac{x^2}{n_2^2}\right)\right| = |\ln 5 - \ln 2| = \ln\frac{5}{2} \geq \varepsilon_0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \sum\limits_{E_2} u_n(x)$ сходится неравномерно на E_2 (по критерию Коши) $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ не сходится равномерно на E_2.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{x^2}{n^2}\right) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{n^2} \text{ - сходится} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится при каждом x.

4) $u_n(x) = \dfrac{nx^2}{1+n^{5/2}x^6}$, $E_1 = (0;1)$, $E_2 = (1;+\infty)$

Рассмотрим $\varepsilon = \frac{1}{66}$

Выберем $n_1 = (2N)^2$, $n_2 = N^2$, $x = \frac{1}{N}$, тогда

$$|u_{n_1}(x) - u_{n_2}(x)| = \left| \frac{4N^2 \cdot \frac{1}{N^2}}{1+32N^5 \frac{1}{N^6}} - \frac{N^2 \cdot \frac{1}{N^2}}{1+N^5 \cdot \frac{1}{N^6}} \right| =$$

$$= \left| \frac{4N}{32+N} - \frac{N}{N+1} \right| = N \left| \frac{4N+4-32-N}{(32+N)(N+1)} \right| =$$

$$= N \cdot \frac{|3N-28|}{(32+N)(1+N)} \geq N \cdot \frac{|3N-28|}{33N \cdot 2N} = \frac{1}{66}\left|3 - \frac{28}{N}\right| \geq$$

$\geq \frac{1}{66} = \varepsilon$ (начиная с некоторого N) $\Rightarrow$

=> $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ не сходится равномерно на E_1 (по критерию Коши) => $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ не сходится равномерно.

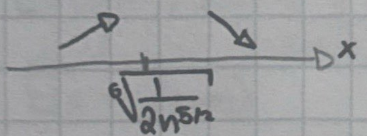
$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{n^{3/2}\left(\frac{1}{n^{5/2}}+x^6\right)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{-4}}{n^{3/2}\left(1+\frac{1}{n^{5/2}x^6}\right)} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{-4}}{n^{3/2}} -$$

- сходится => $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится при фиксированных.

$$\cancel{\sup}\ u_n'(x) = \frac{2nx(1+n^{5/2}x^6) - nx^2\cdot 6n^{5/2}x^5}{(1+n^{5/2}x^6)^2} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 + 2n^{5/2}x^6 - 6n^{5/2}x^6 = 0 \Rightarrow 1 - 2n^{5/2}x^6 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \sqrt[6]{\frac{1}{2n^{5/2}}} < 1.$$



=> ~~$u_n(x)$ — макс~~

=> $u_n(x) \le u_n(1)$ при $x \in E_2$ =>

=> $|u_n(x)| \le \frac{n}{1+n^{5/2}}$;

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{1+n^{5/2}} \sim \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ - сходится | => $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно на E_2 (по признаку Вейерштрасса)

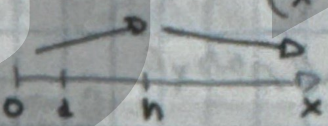
Ответ: 4) сходится равномерно на E_1 и неравномерно на E_2; 7) сходится неравномерно на E_1 и равномерно на E_2;

C8 §18 №36(5)

Исследовать на сходимость и равномерную сходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$: $u_n(x) = \frac{2x}{x^2-nx+n^2}$ на $E_1 = (0,1)$ и $E_2 = (1;+\infty)$

~~$x \in E_2$~~:

$$u_n'(x) = \frac{x^2-nx+n^2-x(2x-n)}{(x^2-nx+n^2)^2} = \frac{n^2-x^2}{(x^2-nx+n^2)^2}$$



$x \in E_1$: $|u_n(x)| \le \frac{\cancel{2}\,1}{1-n+n^2}$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-n+n^2}$ -сходится $\Bigg| \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно на E_1

$x \in E_2$:

~~Рассмотрим ε~~ =

~~Фиксируем произвольный~~ $N \in \mathbb{N}$.

~~Выберем~~

$\cancel{\sup\limits_{x \in E_2} |u_n(x) - 0| = u_n(n) = \frac{2n}{n^2-n^2+n^2} = 4}$

Рассмотрим $\varepsilon = \frac{1}{3}$.

Фиксируем произвольный $N \in \mathbb{N}$.

Выберем $n = N$, $m = 2N$, $x = N$, тогда

$$\left|\sum_{k=n}^{m} u_k(x)\right| = \sum_{k=N}^{2N} \frac{N}{N^2 - N\cdot k + k^2} \geq N \cdot \frac{N}{N^2 - N\cdot 2N + (2N)^2} =$$

$$= \frac{N^2}{3N^2} = \frac{1}{3} = \varepsilon \Rightarrow$$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ не сходится равномерно (по критерию Коши)

При фиксированном x: $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ - сходится.

Ответ: сходится равномерно на E_1 и неравномерно на E_2

<u>IV</u>

Исследовать на сходимость и равномерную сходимость $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ на $E_1 = (0;1)$ и $E_2 = (1;+\infty)$

а) $f_n(x) = x \sin \frac{1}{n^2x^2}$.

<u>$x \in E_1$</u>: $\frac{1}{nx} \in \left(\frac{1}{n};+\infty\right)$. Докажем: для $\alpha \in (0;+\infty)$: $\sin\alpha^2 \leq \alpha$.

При $\alpha \geq 1$: $\sin\alpha^2 \leq 1 \leq \alpha$

При $\alpha < 1$: $\sin\alpha^2 \leq \alpha^2 \leq \alpha$

Тогда $\sup\limits_{x\in E_1} |f_n(x) - 0| \leq x \cdot \frac{1}{nx} = \frac{1}{n} \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{x\in E_1} |f_n(x) - 0| = 0 \Rightarrow f_n(x) \underset{E_1}{\rightrightarrows} 0$ (по критерию)

~~$x \in E_2$: Аналогично $f_n(x) \underset{E_2}{\rightrightarrows} 0$~~

$x \in E_1$:

Рассмотрим $\varepsilon = \sin\frac{1}{4}$

Фиксируем произвольный $N \in \mathbb{N}$.

Выберем $n_1 = N$, $n_2 = 2N$, $x = \frac{1}{N}$, тогда

$$\left|\sum_{k=n_1}^{n_2} f_k(x)\right| = \sum_{k=N}^{2N} \frac{1}{N}\sin\frac{N^2}{k^2} \geq N \cdot \frac{1}{N}\sin\frac{N^2}{4N^2} = \sin\frac{1}{4} = \varepsilon \Rightarrow$$

$\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится неравномерно на E_1

$x \in E_2$:

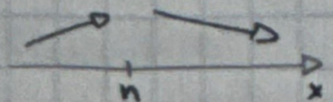
$$|f_n(x)| \leq x\frac{1}{n^2x^2} = \frac{1}{n^2x} < \frac{1}{n^2}$$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ - сходится $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится равномерно на E_2 (по признаку Вейерштрасса) $\Rightarrow$

$\Rightarrow f_n(x) \underset{E_2}{\rightrightarrows} 0$ (по необходимому условию)

б) $f_n(x) = \dfrac{\sin\frac{xn}{x^2+n^2}}{1+\ln^2 n}$

$$\left(\frac{xn}{x^2+n^2}\right)' = \frac{n(x^2+n^2) - nx\cdot 2x}{(x^2+n^2)^2} = \frac{n(n^2-x^2)}{(x^2+n^2)^2}$$



$x \in E_1$: $|f_n(x)| \leq \dfrac{\sin\frac{1\cdot n}{1+n^2}}{1+\ln^2 n} \leq \dfrac{1}{n\cdot\ln^2 n}$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}$ - сходится (по теореме сравнения) $\Big| \Rightarrow$

$\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится равномерно на E_1 (по признаку Вейерштрасса) $\Rightarrow f_n(x) \overset{B}{\underset{E_1}{\rightrightarrows}} 0$ (по необходимому условию)

$x \in E_2$:

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in E_2} |f_n(x) - 0| = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{n^2}{2n^2}}{1+\ln^2 n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{2}}{1+\ln^2 n} = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow f_n(x) \overset{B}{\underset{E_2}{\rightrightarrows}} 0$ (по критерию)

Рассмотрим $\varepsilon = 1$.

Фиксируем произвольный $N \in \mathbb{N}$.

Выберем $n_1 = \max\{N, n_0\}$, где n_0 : $\frac{n_0}{1+\ln^2 n_0}\sin\frac{2}{5} > 1$

(можем, т.к. $\lim\limits_{n_0\to\infty}\frac{n_0}{1+\ln^2 n_0}\sin\frac{2}{5} = +\infty$),

$n_2 = 2n_1$, $x = n_1$, тогда:

$$\left|\sum_{k=n_1}^{n_2} f_k(x)\right| = \left|\sum_{k=n_1}^{n_2}\frac{\sin\frac{kn_1}{k^2+n_1^2}}{1+\ln^2 k}\right| \geq \frac{1}{1+\ln^2 n_1}(n_2-n_1)\cdot$$

$$\cdot \sin\frac{n_2 n_1}{n_2^2+n_1^2} = \frac{n_1}{1+\ln^2 n_1}\cdot\sin\frac{2}{5} > 1 = \varepsilon \Rightarrow$$

$\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится неравномерно на E_2 (по критерию Коши)

Ответ: а) $f_n(x) \overset{B}{\underset{E_1}{\rightrightarrows}} 0$, $f_n(x) \overset{B}{\underset{E_2}{\rightrightarrows}} 0$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится неравномерно на E_1 и равномерно на E_2.

б) $f_n(x) \overset{B}{\underset{E_1}{\rightrightarrows}} f$, $f_n(x) \overset{B}{\underset{E_2}{\rightrightarrows}} 0$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится равномерно на E_1 и неравномерно на E_2.

3 неделя

С2 §19 №4

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2 nx}{n(n+1)}$$

Док-ть: $f(x)\in C_{\mathbb{R}}$; Найти: $\int_0^{2\pi} f(x)\,dx$.

$$u_n(x)=\frac{\cos^2 nx}{n(n+1)}$$

$$\left.\begin{aligned}&|u_n(x)|\le\frac{1}{n(n+1)}\\&\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}\text{ - сходится}\end{aligned}\right| \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\underset{\mathbb{R}}{\rightrightarrows} f(x) \text{ (по Вейерштрасс}$$

Т.к. $u_n(x)\in C_{\mathbb{R}}$, то $f(x)\in C_{\mathbb{R}}$.

$$\int_0^{2\pi} f(x)\,dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{2\pi}\frac{\cos^2 nx}{n(n+1)}\,dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)2}\int_0^{2\pi}(1+\cos 2nx)\,dx=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2(n+1)}\int_0^{4\pi n}(1+\cos t)\,dt=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{n(n+1)}=\pi\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=$$

$$=\pi.$$

Ответ: π.

С2 §19 №12

$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^3}$. Док-ть: $f\in C^1_{\mathbb{R}}$.

$$u_n(x)=\frac{\cos nx}{n^3}\in C^1_{\mathbb{R}} \qquad (1)$$

$$\left.\begin{aligned}&|u_n(x)|\le\frac{1}{n^3}\\&\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}\text{ - сходится}\end{aligned}\right| \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\underset{\mathbb{R}}{\rightrightarrows} f(x) \text{ (по признаку}$$

Вейерштрасса)

$$u_n'(x) = \frac{n \sin nx \cdot}{n^3} = \frac{\sin nx}{n^2}$$

$$\left.\begin{array}{l} |u_n'(x)| \le \frac{1}{n^2} \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ - сходится} \end{array}\right| \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \rightrightarrows f(x) \text{ (по признаку}$$

Вейерштрасса) (2)

$x = x_0 : \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x_0) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx_0}{n^3}$ - сходится (3)

$(1-3) \Rightarrow f'(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$, $f \in C^1_{\mathbb{R}}$

С2 §19 D14

$\zeta(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$. Док-ть: $\zeta(x) \in C_{(1;+\infty)}$, $\zeta(x) \in D^n_{(1;+\infty)}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

1) Рассмотрим $x \in [1+\delta; +\infty)$, $\delta > 0$

$\frac{1}{n^x}$ - непрерывна на $[1+\delta; +\infty)$

$$\left.\begin{array}{l} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} \le \sum \frac{1}{n^{1+\delta}} \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\delta}} \text{ - сходится (по теореме сравнения)} \end{array}\right| \Rightarrow$$

$\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} \underset{[1+\delta;+\infty)}{\rightrightarrows} \zeta(x)$ (по признаку Вейерштрасса) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \zeta(x) \in C_{[1+\delta;+\infty)}$

В силу произвольности δ: $\zeta(x) \in C_{(1;+\infty)}$

2) $\sum \left(\left(\frac{1}{n}\right)^x\right)^{(k)} = \frac{(-\ln n)^k}{n^x}$. Рассмотрим $x \in [1+\delta; +\infty)$, $\delta > 0$

База индукции: $k = 1$ $\frac{\{-\ln n\}}{n^x}$ - непр. на $[1+\delta; +\infty)$

(1)

$\left|\left(\frac{1}{n^x}\right)'\right| = \frac{\ln n}{n^x} \leq \frac{\ln n}{n^{1+\delta}}$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^{1+\delta}}$ - сходится (по теореме сравнения) $\Big| \Rightarrow$

$\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^x}\right)'$ - сходится равномерно (по признаку Вейерштрасса) (2)

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} \underset{[1+\delta;+\infty)}{\rightrightarrows} \zeta(x)$ (из пункта 1) (3)

$(1\text{-}3) \Rightarrow \zeta(x) \in C^1_{[1+\delta;+\infty)} \Rightarrow \zeta(x) \in D^1_{[1+\delta;+\infty)}$

Шаг индукции: пусть $\zeta(x) \in D^k_{[1+\delta;+\infty)}$,

тогда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^x}\right)^{(k)} \rightrightarrows \zeta^{(k)}(x)$.

Для $k+1$: $\left(\frac{1}{n^x}\right)^{(k+1)}$ - непрерывна на $[1+\delta;+\infty)$ (1')

$\left|\left(\frac{1}{n^x}\right)^{(k+1)}\right| = \left|\frac{(-\ln n)^{k+1}}{n^x}\right| \leq \frac{\ln^{k+1} n}{n^x} \leq \frac{\ln^{k+1} n}{n^{1+\delta}}$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^{k+1} n}{n^{1+\delta}}$ - сходится (по теореме сравнения) $\Big| \Rightarrow$

$\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^x}\right)^{(k+1)}$ ~~$\rightrightarrows$~~ - сходится равномерно на $[1+\delta;+\infty)$ (по признаку Вейерштрасса) (2')

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^x}\right)^{(k)} \rightrightarrows \zeta^{(k)}(x)$ (по предположению в шаге индукции) (3')

$(1'\text{-}3') \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^x}\right)^{(k+1)} \rightrightarrows \zeta^{(k+1)}(x) \Rightarrow$

$\Rightarrow \zeta(x) \in D^{(k+1)}_{[1+\delta;+\infty)} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}: \zeta(x) \in D^n_{[1+\delta;+\infty)}$

В силу произвольности δ: $\zeta(x) \in D^n_{(1;+\infty)}$ $\forall n$.

С2 §19 №28

Рассмотрим $f_n(x) = \frac{D(x)}{n}$, D - функция Дирихле.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \\ \lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - 0| = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0\end{array}\right| \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow f_n(x) \underset{\mathbb{R}}{\rightrightarrows} 0 \\ f_n(x) \text{ - разрывна в каждой точке } \mathbb{R} \\ f(x) = 0 \text{ - непрерывна на } \mathbb{R}\end{array}\right| \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ может.

С2 §20 №1(4)

Найти радиус сходимости $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(z-2)^n}{4^{n+2}}$

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\left|\frac{n+1}{4^{n+2}}\right|} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{4} \sqrt[n]{\frac{n+1}{16}} = \frac{1}{4} \Rightarrow R = 4.$$

Ответ: $R = 4$

С2 §20 №3(1)

Найти радиус сходимости: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} z^n$.

$$R = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} \cdot \frac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2} =$$

$$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2} = 4$$

Ответ: $R = 4$.

СЗ §20 №5(1)

Найти радиус сходимости $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n(1+i)^{3n}}{(n+1)(n+2)} z^n$

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{2^n}{(n+1)(n+2)} \cdot |1+i|^{3n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\cdot(\sqrt{2})^3}{\sqrt[n]{(n+1)(n+2)}} = 4\sqrt{2}.$$

Ответ: $R = \frac{1}{4\sqrt{2}}$.

СЗ §20 №9(2)

Найти радиус сходимости: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^{n^2}}{n^n}$

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n^2]{\frac{1}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} (n^{-n})^{1/n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1 \Rightarrow R = 1$$

~~Ответ: R = 1~~.

Исследовать на сходимость в концах:

$x = -2$: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n} = \frac{1}{1} + \sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^n}$ $\Rightarrow$ сходится абсолютно.

$\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^n} < \sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

$x = -4$: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n^2}}{n^n}$ $\quad \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^{n^2}}{n^n}\right| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$ - сходится $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ сходится абсолютно.

Ответ: $R = 1$, сходится абсолютно в концах.

Т5

Найти радиус сходимости: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2^n}}{n^3}$.

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[2^n]{\frac{1}{n^3}}$$

~~$1 \le \lim_{n\to\infty} \sqrt[2^n]{n^3} \le \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^3} = 1$~~ $\Rightarrow \frac{1}{R} = 1$, $R = 1$.

$1 = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{1}{n^3}} \le \lim_{n\to\infty} \sqrt[2^n]{\frac{1}{n^3}} \le 1 \Rightarrow$

Ответ: $R = 1$

С2 §21 №6(б) 4 неделя

Разложить f в ряд Маклорена и найти R.

$$f(x)=\frac{5-2x}{x^2-5x+6};$$

$$f(x)=\frac{5-2x}{(x-2)(x-3)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3}=\frac{(A+B)x-(3A+2B)}{(x-2)(x-3)}$$

$$\begin{cases}A+B=-2\\3A+2B=-5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=-1\\B=-1\end{cases}$$

$$f(x)=-\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}=\frac{1/2}{1-x/2}+\frac{1/3}{1-x/3}=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n+\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{3}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{3^{n+1}}\right)x^n.$$

$$\frac{1}{R}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}+\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\frac{1}{2^n}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)}=\frac{1}{2}\Rightarrow R=2.$$

Ответ: $f(x)\underset{(-2;2)}{=}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{3^{n+1}}\right)x^n$, $R=2$.

С2 §21 №9(2)

Разложить f в ряд Маклорена и найти R

$$f(x)=\ln(12-x-x^2)=\ln(-(x-3)(x+4))=\ln(4+x)+\ln(3-x)=$$

$$=\ln 12+\ln\left(1+\frac{x}{4}\right)+\ln\left(1-\frac{x}{3}\right)=\ln 12+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{1}{n}\cdot\left[\left(\frac{x}{4}\right)^n+\left(-\frac{x}{3}\right)^n\right]=$$

$$=\ln 12+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\left(\frac{1}{4^n}+\frac{(-1)^n}{3^n}\right)x^n$$

$$\frac{1}{R}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{3^n}+\frac{(-1)^n}{4^n}\right)}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\sqrt[n]{\frac{1}{3^n}\left(1+\left(\frac{3}{4}\right)^n(-1)^n\right)}}{\sqrt[n]{n}}=\frac{1}{3}\Rightarrow R=3$$

Ответ: $f(x)\underset{(-3;3)}{=}\cancel{\sum}\ln 12+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\left(\frac{1}{4^n}+\frac{(-1)^n}{3^n}\right)x^n$, $R=3$.

С2 §21 №11(3)

Разложить f в ряд Маклорена и найти R:

$f(x) = \sin x \cos^2 x$

$f(x) = \frac{1}{2}\sin x(1+\cos 2x) = \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot(\sin 3x - \sin x) =$

$= \frac{1}{4}(\sin x + \sin 3x)$

$\sin x = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$

$f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4(2n+1)!}\left(1+3^{2n+1}\right) x^{2n+1}.$

$R = +\infty$ (т.к. $R_{\sin x} = R_{\sin 3x} = +\infty$).

Ответ. $f(x) \underset{\mathbb{R}}{=} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(1+3^{2n+1})}{4(2n+1)!} x^{2n+1}$, $R = +\infty$.

С2 §21 №19(4)

Разложить f в ряд Тейлора в окрестности $x_0 = 2$ и

найти R:

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-4x+8}}$

$y = x-2: \ f(y) = \left(y^2+4\right)^{-1/2} = \frac{1}{2}\left(1+\left(\frac{y}{2}\right)^2\right)^{-1/2} =$

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\prod\limits_{k=1}^{n}\left(-\frac{1}{2}-k+1\right)}{n!}\left(\frac{y}{2}\right)^{2n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n(2n-1)!!}{2^n n!}\cdot y^{2n} =$

$= \frac{1}{2} + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n(2n-1)!!}{2^{3n+1}\cdot n!}(x-2)^{2n}$

$R_2 = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(2n-1)!!}{2^{3n}\cdot n!}\cdot\frac{2^{3n+3}\cdot(n+1)!}{(2n+1)!!} = 4$ – радиус сходимости

для переменной $y^2 \Rightarrow R = \sqrt{4} = 2$.

Ответ: $f(x) \underset{[0;4]}{=} \frac{1}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{2^{3n+1}\, n!}(x-2)^{2n}$, $R=2$.

С2 §21 №25(1)

Разложить f в ряд Маклорена с помощью производной. Найти R.

$$f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1-x}{1+x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+\frac{(1-x)^2}{(1+x)^2}} \cdot \frac{-1-x-1+x}{(1+x)^2} = \frac{-2}{2+2x^2} =$$

$$= -\frac{1}{1+x^2} = -(1+x^2)^{-1} = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)(-2)\ldots(-1-n+1)}{n!}(x^2)^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} x^{2n}$$

$\frac{1}{R} = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|(-1)^{n+1}|} = 1 \Rightarrow R=1$ (для $f'(x) \Rightarrow$ такой же для $f(x)$)

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{2n+1} x^{2n+1} + C_0$$

$$f(0) = C_0 = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$$

Ответ: $f(x) \underset{(-1;1)}{=} \frac{\pi}{4} + \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1} x^{2n+1}$, $R=1$.

С2 §21 №30(2)

Разложить f в ряд Маклорена с помощью производной. Найти R.

$$f(x) = x \arccos \frac{x^2}{\sqrt{4+x^4}}$$

Разложим $g(x) = \arccos\frac{x^2}{\sqrt{4+x^4}}$:

$$g'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^4}{4+x^4}}} = -\sqrt{\frac{4+x^4}{4}} = -\sqrt{1+\frac{x^4}{4}} =$$

$$= -1 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-n+2\right)}{n!}\cdot\left(\frac{x^4}{4}\right)^n =$$

$$= -1 -$$

$$g'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^4}{4+x^4}}}\cdot\frac{2x\sqrt{4+x^4} - x^2\cdot\frac{1}{2\sqrt{4+x^4}}\cdot 4x^3}{4+x^4} =$$

$$= -\sqrt{\frac{4+x^4}{4}}\cdot\frac{2x(4+x^4)-2x^5}{(4+x^4)\sqrt{4+x^4}} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{8x}{4+x^4} = -\frac{x}{1+\frac{x^4}{4}} =$$

$$= -x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)(-2)\cdots(-n)}{n!}\cdot\left(\frac{x^4}{4}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{4^n}x^{4n+1}$$

$\frac{1}{R_4} = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^{n+1}}{4^n}\right|} = \frac{1}{4} \Rightarrow R=4$ - радиус сходимости для x^4

Тогда для x: $R = \sqrt[4]{4} = \sqrt{2}$ (для функции $g'(x)$, а следовательно для $g(x)$ и $f(x)$).

$$f(x) = x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{4^n}\cdot\frac{1}{4n+2}x^{4n+2}$$

Ответ: $f(x) \underset{(-\sqrt{2};\sqrt{2})}{=} \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{4^n(4n+2)}\cdot x^{4n+3}$, $R=\sqrt{2}$.

С2 §21 №55(1)

Применяя почленное дифференцирование, вычислить сумму ряда:

$$x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots = f(x)$$

$$f'(x) = 1 + x^2 + x^4 + \ldots + x^{2n} + \ldots = \frac{1}{1-x^2}, \quad |x|<1.$$

$$f(x) = \int f'(x)\,dx = \int \frac{dx}{1-x^2} = \cancel{\{x = \sin t\}} = \cancel{\int \frac{\cos t\,dt}{\cos^2 t}} = \int \frac{dt}{\cos t}$$

$$= \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right)dx = \frac{1}{2}\ln(1+x) - \frac{1}{2}\ln(1-x) + C_0 = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} + C_0.$$

$$f(0) = 0 = \frac{1}{2}\ln 1 + C_0 = C_0$$

Ответ: $f(x) \underset{(-1;1)}{=} \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$.

С2 §21 №80

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & \text{если } x \neq 0 \\ 0, & \text{если } x = 0 \end{cases}$$

$$f'(0) = \lim_{\Delta\to 0} \frac{e^{-1/\Delta^2} - 0}{\Delta} = 0.$$

$f'(x) = \frac{2}{x^3}e^{-1/x^2}$, $f^{(n)}(x) = P\left(\frac{1}{x}\right)\cdot e^{-1/x^2}$ (при $x \neq 0$)

P — многочлен

Пусть $f^{(n)}(0) = 0$.

$$f^{(n+1)}(0) = \lim_{\Delta\to 0} \frac{f^{(n)}(x) - 0}{\Delta} = \lim_{\Delta\to 0} \frac{P\left(\frac{1}{\Delta}\right)e^{-1/\Delta^2}}{\Delta} = 0.$$

Таким образом ряд Маклорена равен 0, что не равно $f(x)$ при $x \neq 0$.

Сд §21 №31(1)

Разложить f в ряд Маклорена с помощью производной. Найти R.

$$f(x)=\int_0^x e^{-t^2}dt$$

$$f'(x)=e^{-x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(-x^2)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^{2n}$$

$$\cancel{\frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[2n]{\left|\frac{(-1)^n}{2n!}\right|}=1} \Rightarrow R=1 \text{ (для } f', \text{ а следовательно и } f).$$

$$\cancel{f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}}$$

$$R_2=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n!}\cdot\frac{(n+1)!}{1}=\lim_{n\to\infty}(n+1)=+\infty \text{ (для } x^2) \Rightarrow$$

$\Rightarrow R=+\infty$ для x (для f', а следовательно и для f).

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(2n+1)}x^{2n+1}+C_0.$$

$$f(0)=0=C_0$$

Ответ: $f(x)\underset{\mathbb{R}}{=}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(2n+1)}x^{2n+1}$, $R=+\infty$.

С3 §5 22(2)

Исследовать на экстремум:

$U(x,y) = 3x^2y + y^3 - 12x - 15y + 3$

$U'_x = 6xy - 12$

$U'_y = 3x^2 + 3y^2 - 15$

$U'_x = U'_y = 0 : \begin{cases} xy = 2 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases} \Rightarrow (x,y) \in \{(-2;-1), (-1;-2), (1;2), (2;1)\}.$

$U''_{xx} = 6y,\ U''_{xy} = 6x,\ U''_{yy} = 6y.$

$\mathrm{Hess} f = \begin{Vmatrix} 6y & 6x \\ 6x & 6y \end{Vmatrix}$

$\Delta_1 = 6y,\ \Delta_2 = 36(y^2 - x^2)$

1) $(x,y) = (-2;-1)$; $\Delta_1 < 0,\ \Delta_2 < 0$ – неопределена (не экстремум)

2) $(x,y) = (-1;-2)$: $\Delta_1 < 0,\ \Delta_2 > 0$ – отрицательно определена (максимум)

3) $(x,y) = (1,2)$: $\Delta_1 > 0,\ \Delta_2 > 0$ – положительно определена (минимум)

4) $(x,y) = (2,1)$: $\Delta_1 > 0,\ \Delta_2 < 0$ – неопределена (не экстремум)

Ответ: минимум в точке $(1;2)$: $U(1;2) = -25$

максимум в точке $(-1;-2)$: $U(-1;-2) = 31$.

СЗ §3506(2)

Исследовать на экстремум:

$u(x,y) = (x^2-2y^2)e^{x-y}$

$u'_x = 2xe^{x-y} + (x^2-2y^2)e^{x-y} = (2x+x^2-2y^2)e^{x-y}$

$u'_y = -4ye^{x-y} - (x^2-2y^2)e^{x-y} = (-x^2+2y^2-4y)e^{x-y}$

$u'_x = u'_y = 0:$

$\begin{cases} 2x+x^2-2y^2=0 \\ -x^2+2y^2-4y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+x^2-2y^2=0 \\ x=2y \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 4y+4y^2-2y^2=0 \\ \cancel{y=\frac{1}{2}x}\ x=2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y(4+2y)=0 \\ x=2y \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow (x,y) \in \{(0;0), (-4;-2)\}.$

$u''_{xx} = (2+2x)e^{x-y} + (2x+x^2-2y^2)e^{x-y} = (2+4x+x^2-2y^2)\, e^{x-y}$

$u''_{xy} = -4ye^{x-y} - (2x+x^2-2y^2)e^{x-y} = (-4y-2x-x^2+2y^2)\, e^{x-y}$

$u''_{yy} = (-4y-4)e^{x-y} - (-x^2+2y^2-4y)e^{x-y} = (8y-4+x^2-2y^2)e^{x-y}.$

1) $(x,y)=(0,0)$: $\cancel{u''_{xx} = u''_{yy} = u''_{xy} = 0}$

$u''_{xx} = 2,\ u''_{xy} = 0,\ u''_{yy} = -4.$

$\mathrm{Hess} f = \left\| \begin{matrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{matrix} \right\|$ $\Delta_1 > 0,\ \Delta_2 < 0$ -> неопределена (не экстремум)

2) $(x,y) = (-4,-2)$:

$u''_{xx} = \cancel{(2-16+2\cdot 4)e^{2} = -6e^{2}}.\ (2-16+16-8)e^{-2} = \cancel{8} -6e^{-2}$

$U''_{xy} = \cancel{(8+8+16-8)e^{-2} = 8e^{-2}}\ (8+8-16+8)e^{-2} = \cancel{24}\,8e^{-2}$

$U''_{yy} = \cancel{(-4-16+8)e^{-2} = -12e^{-2}}\ (-4-16+16-8)e^{-2} = -12e^{-2}$

$\text{Hess} f = \begin{Vmatrix} -6e^{-2} & 8e^{-2} \\ 8e^{-2} & -12e^{-2} \end{Vmatrix}$

$\Delta 1 = -6e^{-2} < 0$

$\Delta 2 = 72e^{-4} - 64e^{-4} = 8e^{-4} > 0$ => отрицательно определена (максимум)

Ответ: максимум в точке $(-4;-2)$: $U(-4;-2) = 8e^{-2}$.

С3 §5 №9

$U(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2$.

Найти стационарные точки и исследовать их на экстремум. Можно ли использовать при этом достаточные условия строгого экстремума?

$U'_x = 4x^3 - \cancel{2}4x = \cancel{4x(x^2-1)}\ 4x(x-1)(x+1)$

$U'_y = 4y^3$

$U'_x = U'_y = 0 \Rightarrow (x,y) \in \{(0,0), (1;0), (-1;0)\}$ - стационарные точки.

$U''_{xx} = 12x^2 - 4$, $U''_{xy} = 0$, $U''_{yy} = 12y^2$.

$\text{Hess} f(0,0) = \begin{Vmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}$ - знак неопределён строго

$\text{Hess} f(1,0) = \begin{Vmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}$ - знак неопределён строго

$Hess f(-1,0) = \begin{Vmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}$ - знак не определён строго.

То есть не получится использовать достаточное условие экстремума.

$(0,0)$: $\cancel{\varepsilon \neq}\ 0 < \varepsilon < 1$: $u(0,\varepsilon) = u(0,-\varepsilon) = \varepsilon^4 > 0$

$$u(\varepsilon,0) = u(-\varepsilon,0) = \varepsilon^4 - 2\varepsilon^2 = \varepsilon^2(\varepsilon - \sqrt{2})(\varepsilon + \sqrt{2}) < 0$$

$\Rightarrow (0,0)$ не является экстремумом.

$(\pm 1;0)$: $u(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2 = (x^2-1)^2 - 1 + y^4 \geqslant -1$

Равенство достигается только в точках $(\pm 1;0) \Rightarrow$

$\Rightarrow (\pm 1;0)$ - точки локального минимума.

Ответ: стационарные: $(0;0)$, $(\pm 1;0)$.

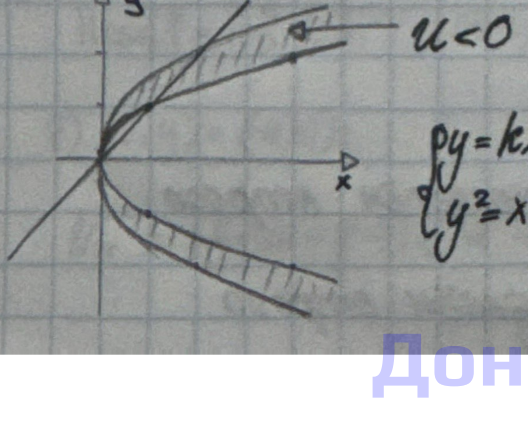
$(\pm 1;0)$ - точки минимума: $u(\pm 1;0) = -1$.

С3 §5 №10

$u = (y^2 - x)(y^2 - 2x)$

Док-ть:

1) Имеет минимум вдоль каждой прямой, проходящей через $(0;0)$.



$\begin{cases} y = kx \\ y^2 = x \end{cases} \Rightarrow y = 0;\ k$

То есть для любой прямой, проходящей через (0;0) существует область (на этой прямой), ~~что~~ в такая что f в точках этой области (кроме (0;0)) u принимает положительные значения => (0;0) - минимум u вдоль любой прямой.

2) не имеет минимума в (0;0):

$u = y^4 - 3xy^2 + 2x^2$

$u'_x = -3y^2 + 4x$, $u'_y = 4y^3 - 6xy$

$u''_{xx} = 4$, $u''_{xy} = -6y = 0$, $u''_{yy} = 12y - 6x = 0$

$\mathrm{Hess}f \begin{Vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}$ - знак неопределён => не экстремум.

Рассмотрим u вдоль $x = \frac{3}{4}y^2$:

$u(x,y) = \frac{1}{4}y^2 \cdot \left(-\frac{1}{2}y^2\right) < 0$ => не является минимумом.

С3 §5 213(1)

Исследовать на экстремум:

$u = x^2 + y^2 + (z+1)^2 - xy + x$

$u'_x = 2x - y + 1$; $u'_y = 2y - x$; $u_z = 2(z+1)$

$u'_x = u'_y = u'_z = 0 \Rightarrow (x, y, z) = \left(-\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}; -1\right)$

$U''_{xx}=2,\ U''_{xy}=-1,\ U''_{xz}=0,\ U''_{yy}=2,\ U''_{yz}=0,\ U''_{zz}=2$

$$\mathrm{Hess}\,U=\begin{Vmatrix}2 & -1 & 0\\ -1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{Vmatrix}$$

$\Delta_1=2>0,\ \Delta_2=4-1=3>0,\ \cancel{\Delta_3=2\Delta_2=6>0}$

$\Delta_3=2\begin{vmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{vmatrix}+1\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 0 & 0\end{vmatrix}=8>0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Hess$U$ положительно определена $\left(-\frac{2}{3};-\frac{1}{3};-1\right)$ – точка локального минимума.

I.2

Hess$f$ положительно полуопределена в стационарн точке

а) Может ли быть точкой строгого локального минимума?

Пусть $f=x^2+y^4$, тогда $(0,0)$ – точка строгого локального минимума.

$f'_x=\cancel{4x^3}\ 2x,\ f'_y=4y^3$

$f''_{xx}=\cancel{12x^2}\ 2,\ f''_{xy}=0,\ f''_{yy}=12y^2=0.$

$\mathrm{Hess}\,f=\begin{Vmatrix}2 & 0\\ 0 & 0\end{Vmatrix}$ – положительно полуопределена $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ может.

б) Может ли быть точкой строгого локального

~~[illegible]~~ максимума?

$\cancel{f(x) \geq f(x_0)+}$

Пусть x_0 - стационарная точка.

$$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{2} d^2 f(x_0) + \bar{o}(|x-x_0|)$$

$$f(x) - f(x_0) < 0$$

$$\frac{1}{2} d^2 f(x_0) = \frac{1}{2} \| x_1 \dots x_n \| \cdot \mathrm{Hess} f \cdot \begin{Vmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{Vmatrix} \geq 0 \quad \Big| \quad x_0 \Rightarrow$$

=> не может

в) Может ли не быть точкой локального экстремума? (даже нестрогого)?

Пусть $f = x^2 - y^4$

$f'_x = 2x$, $f'_y = -4y^3$

$f''_{xx} = 2$, $f''_{xy} = 0$, $f''_{yy} = -12y^2$

В точке (0;0): $\mathrm{Hess} f = \begin{Vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}$ - положительно полуопределена, однако (0,0) не является точкой локального экстремума.

Ответ: а) да; б) нет; в) да.