№3. $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = ? > 0 : \quad |x-1| < \delta \Rightarrow \left| \frac{3x^2-4x+1}{x-1} - 2 \right| < \varepsilon$

$$\left| \frac{3x^2-4x+1-2x+2}{x-1} \right| = \left| \frac{3(x^2-2x+1)}{x-1} \right| = |3(x-1)| < \varepsilon$$

$$|x-1| < \frac{\varepsilon}{3} = \delta \Rightarrow \delta = \frac{\varepsilon}{3}$$

№8(1) Д-ть: $\nexists \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, если $f(x) = \cos x$

Выберем $\{x_n\}$: $x_n = \pi n$, тогда $\cos x_n = \cos \pi n = (-1)^n \Rightarrow \{f(x_n)\}$ не имеет предела $\Rightarrow$ из опр. по Гейне следует, что $\nexists \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ ■

№16(2,3)

2) $\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x) = \infty$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \ \ x_0 < x < x_0 + \delta \ \ |f(x)| > \varepsilon$

3) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x < -\delta \ \ f(x) > \varepsilon$

№18(1,3)

1) $\lim\limits_{x \to -0} f(x) \neq 0$

$\exists \varepsilon > 0 \ \forall \delta > 0 \ \exists x \ -\delta < x < 0 : |f(x)| > \varepsilon$

3) $\lim\limits_{x \to 1+0} f(x) \neq -\infty$

$\exists \varepsilon \ \forall \delta > 0 \ \exists x \ 1 < x < 1+\delta : f(x) > \varepsilon$

№25 (8) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{x+8}-2}{\sqrt{1+2x}-1} =$

$$\frac{(\sqrt[3]{x+8}-2)(\sqrt[3]{x+8}^{\,2}+2\sqrt[3]{x+8}+4)}{(\sqrt[3]{x+8}^{\,2}+2\sqrt[3]{x+8}+4)} =$$

$$= \frac{x}{(\sqrt[3]{x+8}^{\,2}+2\sqrt[3]{x+8}+4)}$$

$$\frac{(\sqrt{1+2x}-1)(\sqrt{1+2x}+1)}{(\sqrt{1+2x}+1)} = \frac{2x}{\sqrt{1+2x}+1}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+2x}+1}{2(\sqrt[3]{x+8}^{\,2}+2\sqrt[3]{x+8}+4)} = \frac{\sqrt{1+0}+1}{2(\sqrt[3]{0+8}^{\,2}+2\sqrt[3]{0+8}+4} =$$

$$= \frac{2}{2(4+4+4)} = \frac{1}{12}$$

№ 30 (2) $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{\sin x}{\pi^2-x^2} = \lim\limits_{x-\pi\to 0} \dfrac{\sin x}{(\pi-x)(\pi+x)} =$

$$= \lim_{x-\pi\to 0} \frac{1}{\pi+x} \cdot \lim_{x-\pi\to 0} \frac{\sin(x-\pi)}{x-\pi} = \frac{1}{2\pi}$$

№ 36(1) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^2+4}{x^2-4}\right)^{x^2} = \lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^2-4+8}{x^2-4}\right)^{x^2} =$

$$= \lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{8}{x^2-4}\right)^{8\left(\frac{x^2-4}{8}\right)+4} = \left(\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{8}{x^2-4}\right)^{\frac{x^2-4}{8}}\right)^8 \cdot$$

$$\cdot \lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{8}{x^2-4}\right)^4 = e^8 \cdot 1 = e^8$$

№61. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$ и $\lim\limits_{t\to t_0} g(t) = x_0 \overset{?}{\Rightarrow}$

$\overset{?}{\Rightarrow} \lim\limits_{t\to t_0} f(g(t)) = a$

Нет. Контрпример $g(t) = x_0$, $f(x) = \frac{1}{|x-x_0|}$

$\lim\limits_{t\to t_0} g(t) = x_0$; $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a = +\infty$, но

$\lim\limits_{t\to t_0} f(g(t)) = \lim\limits_{t\to t_0} f(x_0)$ не существует,

т.к. $f(x_0)$ не определена

№5(g) Д-ть: $1/x^2$ - непрерывна

$\forall x_0\in D(f)\ \forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\ \forall x\in D(f)\ (|x-x_0|<\delta \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |f(x)-f(x_0)| < \varepsilon)$

$$|f(x)-f(x_0)| = \left|\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x_0^2}\right| = \left|\frac{(x_0-x)(x_0+x)}{x_0^2x^2}\right| =$$

$$= \frac{|x_0-x|\,|x_0+x|}{x_0^2x^2}$$

Выберем $x > x_0 \Rightarrow x - x_0 < \delta \Rightarrow x + x_0 < \delta + 2x_0 \Rightarrow$

$\Rightarrow |f(x)-f(x_0)| < \dfrac{\delta(\delta+2x_0)}{x_0^2x^2}$, т.к. $x > x_0$, то

$|f(x)-f(x_0)| < \dfrac{\delta(\delta+2x_0)}{x_0^4} = \varepsilon \Rightarrow \delta^2 + 2x_0\delta - \varepsilon x_0^4 = 0$

$$\delta = \frac{-2x_0 \pm \sqrt{4x_0^2 + 4\varepsilon x_0^4}}{2} = \frac{-2x_0 \pm 2x_0\sqrt{1+\varepsilon x_0^2}}{2} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \delta = x_0\left(\sqrt{1+\varepsilon x_0^2} - 1\right)$

Выберем $x < x_0 \Rightarrow x_0 - x < \delta \Rightarrow x_0 - \delta < x \Rightarrow$

$$\Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \frac{\delta(x_0 + x_0)}{(x_0 - \delta)^2 x_0^2} = \frac{2\delta}{(x_0-\delta)^2 x_0} = \varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\delta = \varepsilon x_0 (x_0^2 - 2x_0\delta + \delta^2)$$

$$2\delta = \varepsilon x_0^3 - 2\varepsilon x_0^2 \delta + \varepsilon x_0 \delta^2$$

$$\varepsilon x_0 \delta^2 - 2(\varepsilon x_0^2 + 1)\delta + \varepsilon x_0^3 = 0$$

$$\delta = \frac{2(\varepsilon x_0^2 + 1) \pm \sqrt{4(\varepsilon x_0^2+1)^2 - 4\varepsilon^2 x_0^4}}{2\varepsilon x_0} =$$

$$= \frac{2(\varepsilon x_0^2+1) \pm 2(\varepsilon x_0^2+1)\sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2 x_0^4}{(\varepsilon x_0^2+1)^2}}}{2\varepsilon x_0} =$$

$$= \left(x_0 + \frac{1}{\varepsilon x_0}\right)\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2 x_0^4}{(\varepsilon x_0^2+1)^2}}\right)$$

Возьмём $\delta = \max\left(x_0(\sqrt{1+\varepsilon x_0^2} - 1), \left(x_0 + \frac{1}{\varepsilon x_0}\right) \cdot \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2 x_0^4}{(\varepsilon x_0^2+1)^2}}\right)\right)$ в определении $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ доказали непрерывность в любой $x_0 \in D(f)$ ■

№14. $\exists f(x_0) = \gamma$. Т.к. $f(x_0)$ непрерывна, то $\forall U_\varepsilon(\gamma)$

$\exists U_\delta(x_0) : \forall x \in (D(f) \cap U_\delta(x_0))\ f(x) \in (E(f) \cap U_\varepsilon(x))$

Выберем $U_\varepsilon(\gamma) : \inf U_\varepsilon(\gamma) > 0$, тогда положим

$C = \inf U_\varepsilon(\gamma)$ если $\gamma > 0$ и $C = \sup U_\varepsilon(\gamma)$ если $\gamma < 0$

Тогда для неё $\exists U_\delta(x_0) : \forall x \in (D(f) \cap U_\delta(x_0))\ |f(x)| \geq C$ ■

№22. Д-ть $f(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{R}\\ 0, & x\in I\end{cases}$ разрывна в каждой точке

1) Выберем произвольный рациональный x_0

Лемма: $\forall\ U_\delta(x_0)\ \exists\ \{x_n\}: \forall n\ (x_n\in I \wedge x_n\in(U_\delta(x_0)))\ (n\in\mathbb{N})$

Д-во: Выберем $a_1\in\mathbb{R}: a_1>x_0$. Тогда $x_0<x_0+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot(a_1-x_0)<a_1$. $x_1=x_0+\frac{\sqrt{2}}{2}(a_1-x_0)$. Выберем $a_2=x_0+\frac{1}{2}(a_1-x_0)$ $a_2\in\mathbb{R}$ $a_2<x_1$. Тогда $x_0<x_0+\frac{\sqrt{2}}{2}(a_2-x_0)$. $x_2=x_0+\frac{\sqrt{2}}{2}(a_2-x_0)$ и т.д. ■

Из леммы следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_0$, но $f(x_0)=1 \Rightarrow \forall x_0\in\mathbb{R}$ f разрывна в x_0.

2) Выберем произвольный иррациональный x_0

Из плотности множества $\mathbb{R} \Rightarrow \forall\ U_\delta(x_0)\ \exists\ \{x_n\}$: $\forall n\ (x_n\in\mathbb{R}\wedge x_n\in U_\delta(x_0))\ (n\in\mathbb{N}) \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=1$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_0$, но $f(x_0)=0 \Rightarrow \forall x_0\in I$ f разрывна в x_0. ■

№41(1)

От противного: $\forall \mu>0\ \exists x\in[a;b]: f(x)<\mu$. Тогда $\exists x_0\in[a;b]: \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$. Тогда, т.к. $f(x)$ определена и непрерывна на $[a, b]$ $f(x_0) = 0$?! $\blacksquare$

№47(2) Д-ть: $x^5 - 3x = 1$ имеет не менее трёх корней на $\mathbb{R}$.

$f(x) = x^5 - 3x - 1$

$$\left.\begin{array}{l} f(1) = 1 - 3 - 1 = -3 < 0 \\ f(2) = 32 - 6 - 1 = 27 > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \exists x_1 : f(x_1) = 0, \; x_1 \in (1; 2)$$

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = -1 < 0 \\ f(-1) = -1 + 3 - 1 = 1 > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \exists x_2 : f(x_2) = 0, \; x_2 \in (-1; 0)$$

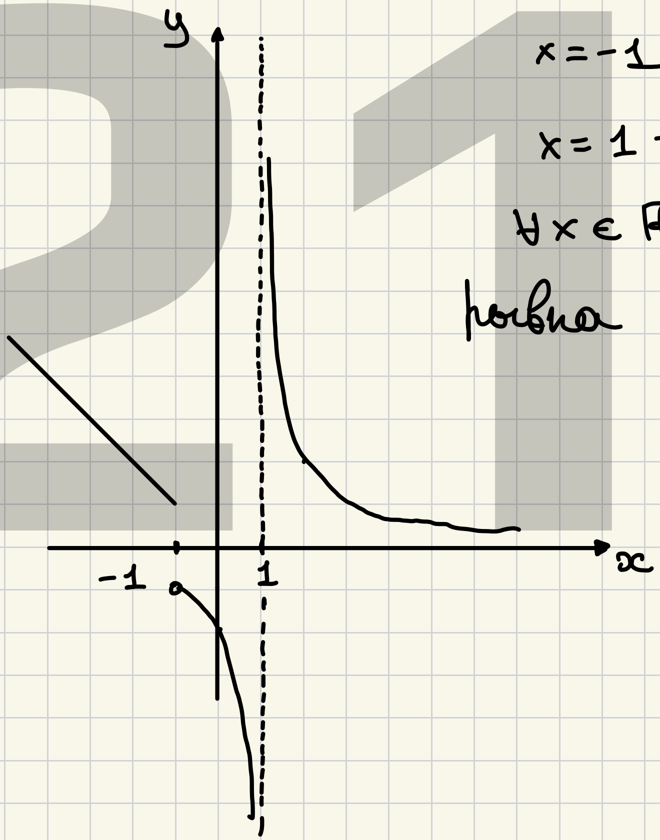
$$\left.\begin{array}{l} f(-1) = 1 > 0 \\ f(-2) = -32 + 6 - 1 = -27 < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \exists x_3 : f(x_3) = 0, \; x_3 \in (-1, 0)$$

сущ. x_1, x_2, x_3 следует из Т-мы о промежуточных значениях.

№42. Пусть $f(x_m) = m$, $f(x_M) = M$. Для определённости $x_m < x_M$. Пусть $g(x) = f(x) - y$. Рассм. $g(x)$ на (x_m, x_M). Т.к. $m \le y \le M$, то $m - y \le 0 \le M - y$. Тогда из Т. Больцано-Коши следует, что $\exists x : g(x) = 0$, т.е. $f(x) = y$ $\blacksquare$

№ 56 (4)

$$y = \begin{cases} -x, & x \le -1 \\ \dfrac{2}{x-1}, & x > -1 \end{cases}$$



$x = -1$ – т. разрыва 1 рода

$x = 1$ – т. разрыва 2 рода

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ y непрерывна

№ 65. При $x \ne \pm 1$ $y(x)$ разрывна (док-во аналогично док-ву разрывности функции Дирихле). При $x = \pm 1$ $y(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ $\forall$ $\{x_n\}: x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \pm 1$, т.к. $y(x_n) \to \pm 1$ для $\{x_n\}: x_n \in J$ и для $\{x_n\}: x_n \in \mathbb{Q} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ в точках $x = \pm 1$ $y(x)$ непрерывна.

66.

$$y(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{J} \\ 1/q, & x = p/q, \; p \in \mathbb{Z}, \; q \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Д-ть: 1) $y(x)$ непрерывна $\forall x \in \mathbb{J}$

2) $\forall x \in \mathbb{R}$ – точка разрыва 1 рода.

Д-во: 1) Выберем $x_0 \in \mathbb{J}$. $y(x_0) = 0$. Построим $\{x_n\}$: $x_n \in \mathbb{R}$, $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0$. $\frac{p_n}{q_n} \to x_0$.

Понятно, что q_n – возраст. и неогр.,

т.к. $\forall p_k, q_k$ $\frac{p_k}{q_k} < x_0 < \frac{p_k+1}{q_k}$ или $\frac{p_k-1}{q_k} < x_0 < \frac{p_k}{q_k}$ $\Rightarrow$ при изменении p_k $\left|x_0 - \frac{p_k}{q_k}\right|$ будет увеличиваться $\Rightarrow$ нужно менять q_k, т.е. увеличивать $q_k \Rightarrow \frac{1}{q_n} \to 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} y(x_n) = 0$

Для $\{x_n\}$: $x_n \in \mathbb{J}$ $f(x_n) = 0$ $\forall x_n \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} y(x_n) = 0 \Rightarrow \forall \{x_n\}$: $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0$

$\lim\limits_{n\to\infty} y(x_n) = 0 = f(x_0)$

2) Выберем $x_0 \in \mathbb{R}$. $\forall \{x_n\}$, $x_n \in \mathbb{J}$, $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0$

$y(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \neq \frac{1}{q}$ и справа и слева.

$\forall \{x_n\}$, $x_n \in \mathbb{Q}$, $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0$. $\lim\limits_{n\to\infty} y(x_n) =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a_n}$. a_n — возраст. и огр. получается из аналог. рассуждений как в 1) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0 \ne \frac{1}{a}$ и справа и слева $\Rightarrow$

$\Rightarrow \forall \{x_n\}: x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0$. $y(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{}$ $0 \ne \frac{1}{a}$ и справа и слева $\Rightarrow$

$\Rightarrow x_0$ — точка разрыва I рода.

№76. $\exists$ $f(x)$ не огр. на $[\alpha;+\infty) \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall M \ \exists x: |f(x)| > M$. Последовательно будем выбирать $M = 1, 2, 3 \dots n$.

Тогда $|f(x_n)| > n \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |f(x_n)| = \infty$

По Т. Больцано-Вейерштрасса можно выделить подпослед. $\{x_{k_n}\}$ из $\{x_n\}$:

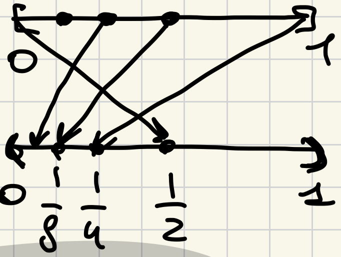
$\lim\limits_{n\to\infty} x_{k_n} = \alpha$. Тогда $f(x_{k_n}) \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty \Rightarrow$

$\Rightarrow$ предела $f(x)$ в т. $x = \alpha$ $\nexists$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow f(x)$ разрывна в т. α $\mathring{\times}$! $\blacksquare$

№97(2)

2) $[\ ] \to (\ )$



$0 \leftrightarrow 1/2$

$1 \leftrightarrow 1/4$

$1/2 \leftrightarrow 1/8$

$1/2^k \leftrightarrow 1/2^{k+2}$

$(1/2^{k+1}, 1/2^k) \leftrightarrow (1/2^{k+1}, 1/2^k)$

Т.3 $f : [a, b] \to [a, b]$ непрерывна

Д-ть $\exists\ c \in [a, b] : f(c) = c$.

Э $g(x) = x - f(x)$, т.е. $g : [a - f(a), b - f(b)]$.

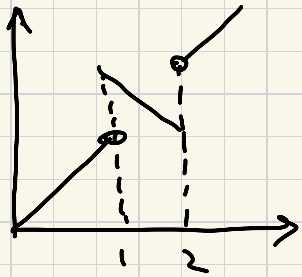
$f(a) \geq a$; $f(b) \leq b \Rightarrow (a - f(a))(b - f(b)) \leq 0$.

Тогда по Т. Больцано Вейерштрасса

$\exists\ c : g(c) = 0 \Rightarrow c - f(c) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow c = f(c)$. Либо $f(a) = a$, $f(b) = b$ ∎

Т. 4.



: $y = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{R} \setminus [1, 2] \\ -x + 1, & x \in [1, 2] \end{cases}$

Т. 5.

211