ДЗ 14

№1.

a) $f(x)-F_1x=\sum\limits_{k=2}^{\infty}F_kx^k=\sum\limits_{k=2}^{\infty}F_{k-1}x^k+2\sum\limits_{k=2}^{\infty}F_{k-2}x^k=$

$=x\left(f(x)-F_0\right)+2x^2f(x)$

$f(x)\left(1-x-2x^2\right)=F_1x=x$

$f(x)=\dfrac{x}{1-x-2x^2}=\dfrac{x}{(1+x)(1-2x)}=\dfrac{1}{3(1-2x)}-\dfrac{1}{3(1+x)}=$

$=\frac{1}{3}\left(\sum\limits_{k=0}^{\infty}(2x)^k-\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^kx^k\right)$

$f(x)=\frac{1}{3}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(2^n+(-1)^{n+1}\right)x^n\Rightarrow$

$\Rightarrow F_n=\frac{1}{3}\left(2^n+(-1)^{n+1}\right)$

б) $f(x)-F_0x-F_1x=\sum\limits_{k=2}^{\infty}F_kx^k=4\sum\limits_{k=2}^{\infty}F_{k-1}x^k-4\cdot$

$\cdot\sum\limits_{k=2}^{\infty}F_{k-2}x^k=4xf(x)-4x^2f(x)$

$f(x)\left(1-4x+4x^2\right)=1+3x$

$f(x)=\dfrac{1+3x}{(1-2x)^2}$

$\dfrac{1}{(1-2x)^2}=\left(\dfrac{1/2}{1-2x}\right)'$

$\dfrac{1}{1-2x}=1+(2x)^2+(2x)^3+\ldots$

$\Rightarrow\dfrac{1}{(1-2x)^2}=\left(\frac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}2^nx^n\right)'=$

$=\sum\limits_{n=0}^{\infty}2^{n-1}(n+1)x^n\Rightarrow f(x)=(1+3x)\sum\limits_{n=0}^{\infty}2^{n-1}(n+1)x^n=$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n-1}(n+1)x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 3\cdot 2^{n-1}(n+1)x^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n-1}(n+2)x^n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_n = 2^{n-1}(n+2)$$

№2. $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots =$

$$= a_0 + a_1 x + (-qa_0 - pa_1)x^2 + (-qa_1 - pa_2)x^3 + \ldots =$$

$$= a_0 + a_1 x - qx^2(a_0 + a_1 x + \ldots) - px(a_1 x + a_2 x^2 + \ldots) =$$

$$= a_0 + a_1 x - qx^2 F(x) - px(F(x) - a_0)$$

$$F(x)(1 + px + qx^2) = a_0 + a_1 x + a_0 p x$$

$$F(x) = \frac{a_0 + a_1 x + a_0 p x}{1 + px + qx^2} \quad \blacksquare$$

№3. См. задача в №7. Исходная $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_{n+2} x^n$

№4. $b_{n+1} = b_n + n + 1$

a_1

a_2

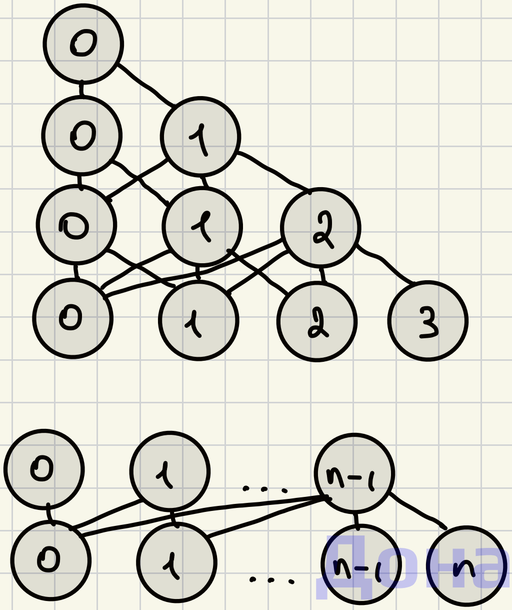
a_3

a_4

...

a_n

a_{n+1}



$b_1 = 1$

$b_2 = 2$

$b_3 = 5$

$b_4 = 9$

...

$b_n = b_{n-1} + n$

$b_{n+1} = b_n + n + 1$

Если принять $b_1 = 0$, то данная формула выполняется $\forall n$.

Найдём b_n:

$$\left.\begin{aligned} b_n &= b_{n-1} + n \\ b_{n-1} &= b_{n-2} + n - 1 \\ b_{n-2} &= b_{n-3} + n - 2 \\ &\dots \\ b_2 &= b_1 + 2 \\ b_1 &= 0 \end{aligned}\right\} \text{суммируем} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b_n + b_{n-1} + \dots + b_1 = b_{n-1} + \dots + b_1 + n + \dots + 1 - 1$$

$$b_n = n + \dots + 1 = \frac{n(n+1)}{2} - 1 \quad \forall\, n > 1$$

$$b_n = 1,\ n = 1 \Rightarrow \text{искомая } f(x) = x + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n(n+1)}{2} - 1\right) x^n$$