№10.3 (3, 7, 9)

3) $\lambda x^2 + y^2 + z^2 = \lambda$

$\lambda < 0$: $a^2 = -\lambda$: $x^2 - \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{a^2} = 1$ – двуполостный гиперболоид.

$\lambda = 0$: $y^2 + z^2 = 0$ – прямая

$\lambda > 0$: $a^2 = \lambda$: $x^2 + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1$ – эллипсоид

7) $x^2 + \lambda(y^2 + z^2) = \lambda$

$\lambda < 0$: $a^2 = -\lambda$: $\frac{x^2}{a^2} - y^2 - z^2 = 1$ – однополостный гиперболоид

$\lambda = 0$: $x^2 = 0$ – плоскость

$\lambda > 0$: $a^2 = \lambda$: $\frac{x^2}{a^2} + y^2 + z^2 = 1$ – эллипсоид

9) $\lambda x^2 + y^2 = z$

$\lambda < 0$: $\frac{y^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} - \frac{x^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{2\lambda}}\right)^2} = 2z$ – гипербол. параболоид

$\lambda = 0$: $2z = \frac{y^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}$ – параболический цилиндр

$\lambda > 0$: $\frac{x^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{2\lambda}}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = 2z$ – эллиптический параболоид

№10.9 (2, 3, 6)

2) $2(x-1)^2 + (y+2)^2 - 3z^2 = 0$ – конус

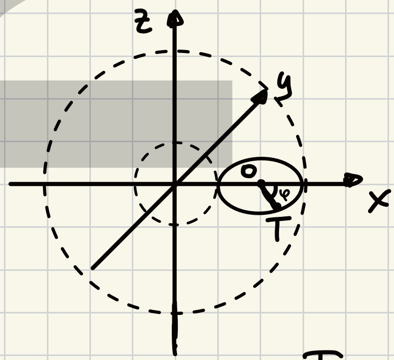
3) $\frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{3}y^2 - (z-1)^2 = -1$

6) $\frac{8}{3}\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{4}{3}\left(z + \frac{1}{2}\right)^2 = 1$ – эллиптический цилиндр.

№10.16. $x' = x;\ y' = \sqrt{2}y;\ z' = \sqrt{3}z$

в ' сист. сфера $x'^2 + y'^2 + z'^2 = 2^2$ радиусом 2, с центром $(0;0;0)$. коорд. M в ' сист. – $(1, \sqrt{2}, \sqrt{3})$. $OM^2 = 1+2+3 = 6 > R^2 = 2^2 = 4$ => лежит вне сферы в ' сист. => лежит вне эллипсоида в исходной сист.

№10.32. $(x-2)^2 + y^2 = 1$



∃ T – лежит на окр-ти и угол между OT и Ox – α. Тогда при вращ. T → окружность радиусом $2 + 1\cdot\cos\varphi$. $y = \sin\varphi$.

Тогда: $x^2 + z^2 = (2+\cos\varphi)^2 = 4 + 4\cos\varphi + \cos^2\varphi = 4 + 4\cos\varphi + 1 - \sin^2\varphi = 5 + 4\cos\varphi - y^2$

$x^2 + z^2 = 5 + 4\cos\varphi - y^2$

$(x^2 + z^2 + y^2 - 5)^2 = 4^2\cos^2\varphi = 16 - 16y^2$

$(x^2 + y^2 + z^2 + 3 - 8)^2 = (x^2+y^2+z^2+3)^2 - 16(x^2+y^2+z^2+3) + 64 = 16 - 16y^2$

$(x^2 + y^2 + z^2 + 3)^2 = 16(x^2 + z^2)$

№10.42.

∃ X_0 – точка на данной прямой, X_1 – проекция X_0 на прямую $x=y=z$. Тогда

$X_0(t_0;\, 2t_0;\, 2t_0)$, $X_1(t_1;\, t_1;\, t_1)$

$$\left(\overline{X_0X}, \left\|\begin{matrix}1\\1\\1\end{matrix}\right\|\right) = \left(\left\|\begin{matrix}t_1+t_0\\t_1-2t_0\\t_1-2t_0\end{matrix}\right\|, \left\|\begin{matrix}1\\1\\1\end{matrix}\right\|\right) =$$

$= 3t_1 - 3t_0 = 0$ (проекц.) $\Rightarrow t_1 = t_0 \Rightarrow X_1(t_0; t_0; t_0)$

$R_{X_0} = |\overline{X_0X_1}| = |t_0|\sqrt{6}$

окр. при вращ.: $(x-t_0)^2+(y-t_0)^2+(z-t_0)^2 = 6t_0^2$.

окр-ть лежит в пл-ти $x+y+z-3t_0=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow t_0 = \frac{1}{3}(x+y+z)$

$x^2+y^2+z^2-2(x+y+z)\frac{1}{3}(x+y+z) = \frac{1}{3}(x+y+z)^2$

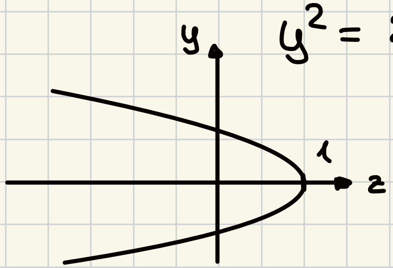
$(x^2+y^2+z^2) = (x+y+z)^2$

$xy+xz+yz=0$ – конус

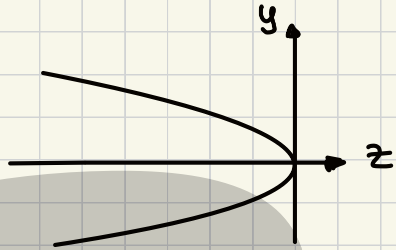
№10.46(3)

$x=\pm 1$: $2-y^2=2z$

$y^2 = 2(1-z)$ – парабола с верш. в $y=0; z=1$.



$x=0$: $y^2=-2z$ — парабола, верш. $y=0;\ z=0$



№10.65(1) $x^2+2y^2+4z^2=40$

$x+y+2z=5 \Rightarrow 2z=5-x-y$

$x^2+2y^2+(5-x-y)^2=40$

$2x^2+3y^2+2xy-10x-10y-15=0$

центр $(x_0;y_0)$: $\begin{cases} 2x_0+y_0-5=0, \\ x_0+3y_0-5=0 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow (x_0,y_0)=(2,1)$ $\quad z_0=\frac{1}{2}(5-x_0-y_0)=1 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ искомая т. — $(2;1;1)$.

№10.81. $(2x-y)(2x+y)=16z$ $\quad M(2;0;1)$

$l_1: \begin{cases} \alpha(2x-y)=z \\ (2x+y)=16\alpha \end{cases}$ $\quad l_2: \begin{cases} \beta(2x+y)=z \\ (2x-y)=16\beta \end{cases}$ $\Bigg| \Rightarrow$

$M\in l_1 \Rightarrow \alpha=\frac{1}{4}$; $M\in l_2 \Rightarrow \beta=\frac{1}{4}$

$\Rightarrow l_1: \begin{cases} x=t \\ y=4-2t \\ z=t-1 \end{cases}, \quad l_2: \begin{cases} x=t \\ y=2t-4 \\ z=t-1 \end{cases}$

№10.82. $(x-y)(x+y)=2z$

$l_1: \begin{cases} \alpha(x-y)=z \\ (x+y)=2\alpha \end{cases}$ $\quad l_2: \begin{cases}\beta(x+y)=z\\ (x-y)=2\beta\end{cases}$

$$\bar a_1 = \begin{vmatrix} \bar i & \bar j & \bar k \\ \alpha & -\alpha & -1 \\ 1 & 1 & 0\end{vmatrix} = \left\| \begin{matrix}1\\-1\\2\alpha\end{matrix}\right\|$$

$$-\bar a_2 = -\begin{vmatrix} \bar i & \bar j & \bar k\\ \beta & \beta & -1 \\ 1 & -1 & 0\end{vmatrix} = \left\|\begin{matrix}1\\1\\2\beta\end{matrix}\right\|$$

$\bar a_1, -\bar a_2, \overline{MN} \in$ одной пл-ти $\Rightarrow$

$$\Rightarrow (\bar a_1, -\bar a_2, \overline{MN}) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2\alpha \\ 1 & 1 & 2\beta \\ 1 & -1 & 1\end{vmatrix} = 1+2\beta+1-2\beta+2\alpha(-1-1) = 2-4\alpha \Rightarrow \alpha = 1/2$$

Заметим, что $N \in$ параболоиду $\Rightarrow N\in l_1$ или $N \in l_2$.

$N\in l_1 \Rightarrow \alpha = 1$ ✗! $\Rightarrow N\in l_2 \Rightarrow \beta=1$

$$\bar n = \begin{vmatrix} \bar i & \bar j & \bar k\\ 1 & -1 & 1\\ 1&1&2\end{vmatrix} = \left\|\begin{matrix}-3\\-1\\2\end{matrix}\right\| \Rightarrow \text{пл-ть: } 3x+y-2z+D=0$$

$M\in$ пл-ти $\Rightarrow D=2 \Rightarrow$ искомое $3x+y-2z-2=0$;

Т.1. Нет, например сфера и цилиндр пересекаются по линии не лежащей ни в какой пл-ти $\Rightarrow$ не линия 2 порядка.