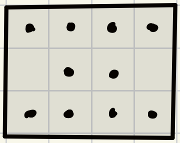
ДЗ 9

№1.  Способов не закрасить верх. и нижн. ряды — 2^8 $\overline{A,B}$ для каждого, верт. — 2^6 $\overline{C}$ для каждого (фикс. 4 или 3 клетки, а для ост. 12-4=8 или 12-6=6 клеток два возможных варианта цвета).

$|A\cap B| = |A\cap C| = |B\cap C| = 2^4$

$|A\cap B\cap C| = 2^2$ => иск. ответ:

$$A+B+C-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C| =$$
$$= 2^8+2^8+2^6-2^4-2^4-2^4+2^2 = 2^9+2^6-2^5-2^4+2^2$$

№2. Посчитаем кол-во людей в группе:

$$\underbrace{4}_{\text{кол-во профессий}}\cdot\underbrace{6}_{\text{кол-во двоек: } C_4^2} - 6\cdot\underbrace{4}_{\text{кол-во троек: } C_4^3} + 4\cdot 2 - \underbrace{1}_{\text{кол-во четвёрок: } C_4^4} = 7 \text{ человек}$$

Тогда для каждой профессии ∃ единств. человек, который ей не владеет => всеми 4-мя профессиями владеет хотя бы 4 человека ?! =>

=> нет, не выполнимо

№3. Если $|A| \neq |B|$, то инъекции и сюръекции одновременно не может быть.

Если $|A| < |B|$, то сюръекция возможна только если существует хотя бы $|B| - |A|$ элементов B таких, что $\exists\, a_1, a_2 : f(a_1) = f(a_2) = b$, что противоречит инъекции.

Если $|A| > |B|$, то инъекция невозможна по определению.

Значит $|A| = |B| = n$. А число всевозможных разбиений – $n!$

№4. Построим ф-цию f из X на $\{0, 1, \dots, k\}$ так, что $\forall\, x \in X \hookrightarrow [(x \in X_i\ \forall\, i \geq f(x))\ \&\&\ f(x) \neq 0]$ $\|\ [(x \notin X_i\ \forall\, i)\ \&\&\ f(x) = 0]$ Тогда всевозможные комбинации x и $f(x)$ $\equiv$ число способов взять эти k подмножеств $\Rightarrow$ всего способов $(k+1)^n$.

№5. Имеем граф на 20 вершинах, где есть рёбра 2 типов. Рёбра 1 типа означают, что ученики (вершины) дружат, 2 типа – не дружат.

Необходимо посчитать число Δ с рёбрами одинакового типа. Всего Δ C_{20}^3. Δ с рёбрами разного типа: $\frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 6 \cdot 13$ (∀ вершины есть 6 рёбер 1 типа (дружат с 6 одноkл.) и 13 рёбер 2 типа (20 − 6 за вычетом самой вершины)).

Значит искомых Δ − $C_{20}^3 - 780 = 360$

№6. Послед-ти $k_1 \le k_2 \le k_3 \ldots \le k_n \longrightarrow f(k_1) \le f(k_2) \le \ldots \le f(k_n)$. Послед-ть $f(k_i)$ определяется только набором $f(k_i)$, т.к. расположение $f(k_i)$ единственное. Значит надо только выбрать состав $f(k_i)$ – сочетания с повторениями (см. неделя 8 задача 2) $\Rightarrow$ искомое: C_{m+n-1}^{n}

№7. Покажем, что ∀ разбиения 1 типа ∃ разбиение 2 типа: пусть есть какое-то разбиение n-элем. мн-ва на $m \le k$ частей. Возьмём $(n+k)$-элем. мн-во. n элементов из него разобьём так же, а остальные K элементов будем раскидывать по m частям. Тогда если $m=k$, то получим искомое разбиение на k частей, а если $m<k$, то "добьём" разбиение до k частей ещё $k-m$ одноэлементными частями. Т.е. разбиений 2 типа $\geq$ разбиений 1 типа. При этом очевидно, что есть ещё разложения $(n+k)$-элементного мн-ва на k подмножеств, не подходящее под построенный пример, т.е. разбиений $(n+k)$-элементного мн-ва строго больше чем n-элементн.

№8. Всего способов рассадить – $(2n)!$ (всего $2n$ людей). Способов рассадить с n парами – $n!\cdot 2^n$ (n пар, 2 способа переставить в каждой). Способов рассадить с $n-1$ парой – $(n-1)!\cdot 2^{n-1}\cdot 2!$ (оставшиеся 2 человека расположены как угодно) ...
способов рассадить с 1 парой – $(n-(n-1))!\, 2^{n-(n-1)}\cdot$
$\cdot (2(n-1))! = 2(2n-2)!$

При этом способы рассадить $k-1$ пару содержат все способы рассадить k пару. Т.е. здесь применима формула включ./исключ. Получаем искомое –

$$(2n)! - 2(2n-2)! + 2!\,2^2(2(n-2))! - \ldots =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k k!\, 2^k (2(n-k))!$$

№9.

а) $\forall$ конфеты $\exists$ m коробок $\Rightarrow$ иск. m^n

б) Задача $\equiv$ кол-во решений в $\mathbb{N}$ у уравнения $x_1+\ldots+x_m=n$ (x_i – кол-во конфет в i-ой коробке) $\Rightarrow$ искомое (шары и перегородки) – C_{n-1}^{m-1}.

в) б) только решения в $\mathbb{N}_0$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ искомое C_{n+m-1}^{m-1}

г) искомое кол-во – кол-во способов в а) минус кол-во способов когда есть ≥ 1 пустой коробки.

кол-во способов когда 1 пустая – кол-во способов когда $m-1$ коробка заполнена – кол-во способов когда ≥ 2 пустые. Кол-во способов когда 2 пустые — ... Т.е. искомое считается по формуле вкл./искл: $C_m^k m^k$ — кол-во способов заполнить ровно k коробок из m: m^k — кол-во способов заполнить k коробок, C_m^k — способы выбрать k пустых коробок из m => искомое $m^n - C_m^{m-1} m^{n-1} + C_m^{m-2} m^{n-2} \ldots =$

$$= \sum_{k=0}^{m} C_m^k m^k$$