Д/З 8

№1.

	0	1	2	3	4
5	1	6	25	76	189
4	1	5	18	47	101
3	1	4	12	26	47
2	1	3	7	12	18
1	1	2	3	4	5
0	1	1	1	1	1

Каждая клетка - кол-во способов добраться в эту клетку.

Ответ: 189.

№2. Запишем условие в виде уравнения:

$$n_1+n_2+n_3+\ldots+n_{10}=100$$

n_i - кол-во купленных пирожных i-го вида.

Кол-во решений в $\mathbb{N}_0$ числах найдём методом шаров и перегородок.

9 перегородок, 100 шаров $\Rightarrow$ искомое - C_{109}^{9}

№3. $$(1+2)^n=\sum_{k=0}^{n} C_n^k 1^{n-k} 2^k=\sum_{k=0}^{n} C_n^k 2^k$$

Из „например" треугольника Паскаля следует, что коэфф-ты слагаемых возраст. потом убывают $\Rightarrow$ для наибольшего слагаемого S_i выполн. $S_i \geq S_{i+1}$ и $S_i \geq S_{i-1}$.

$$\begin{cases} C_n^i 2^i \geq C_n^{i+1} 2^{i+1} \\ C_n^i 2^i \geq C_n^{i-1} 2^{i-1} \end{cases} \qquad \begin{cases} (n-i-1)!\,(i+1)! \geq (n-i)!\,i!\cdot 2 \\ 2(n-i+1)!\,(i-1)! \geq (n-i)!\,i! \end{cases}$$

$$\begin{cases} i \geq 2(n-i) \\ 2(n-i+1) \geq i \end{cases} \quad \begin{cases} 3i \geq 2n \\ 2(n+1) \geq 3i \end{cases} \quad \frac{2}{3}(n+1) \geq i \geq \frac{2}{3}n \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ искомое $i = \left[\frac{2(n+1)}{3}\right]$

№4. Единиц в таком слове не более чем половина + 1 – для нечётного n и половина для чётного n $\Rightarrow K \leq \frac{n+1}{2}$.

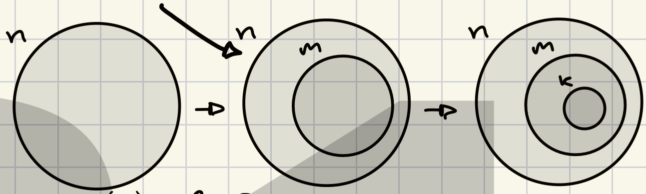
Посчитаем для каждого слова с K единицами. Для $\forall$ единицы следующее число ноль. При этом о последней единице можно не думать, т.к. после неё точно нет единицы (она последняя). Тогда уберём эти $K-1$ нулей и из оставшихся $n-k+1$ символов сделаем слово, причём в нём нет ограничений на позиции единиц. Т.е. таких слов $\binom{n-k+1}{k}$. Добавим к этим словам убранные нули — однозначно определим искомые слова.

Эту процедуру надо проделать $\forall k \in \left[0; \left[\frac{n+1}{2}\right]\right] \Rightarrow$ искомый ответ: $\sum\limits_{0 \leq k \leq \frac{n+1}{2}} \binom{n-k+1}{k}$

№5.

а) $\binom{n}{m}$ – выбираем из n элем. m

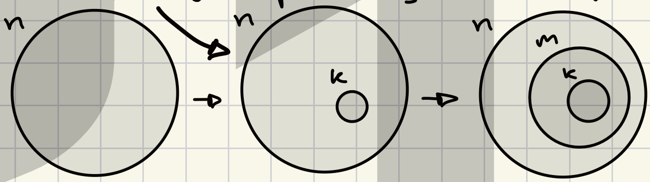
справа:



$\binom{m}{k}$ – выбираем из m элем. k

$\binom{n}{k}$ – выбираем из n элем. k

слева:



$\binom{n-k}{m-k}$ – выбираем ост. элементы в мн. m

В итоге и слева и справа кол-во способов определить мн-ва m и k в мн-ве n.

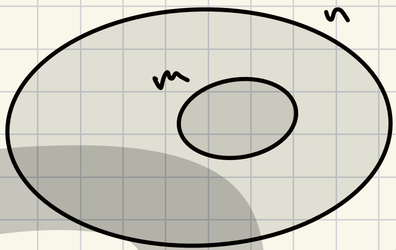
б) $\binom{n}{m}$ – выбрать m из n – левая часть

в правой части разделим n на два мн-ва из n−2 эл. и 2 эл и выбираем из этих мн-в m элементов:

1) все m лежат в n−2 – $\binom{n-2}{m}$

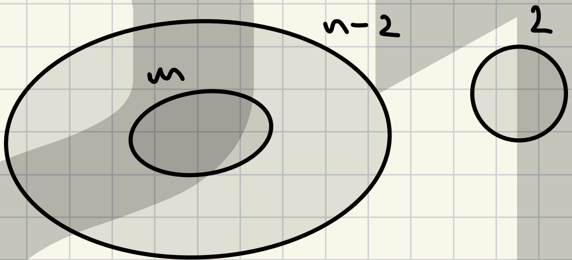
2) m−1 лежит в n−2 и 1 выбир. из 2 эл. – $\binom{n-2}{m-1}$, нужно удвоить, т.к. столько случаев надо посчитать для каждого из ост. двух.

3) m-2 лежат в n-2, ост. 2 из второго мн-ва

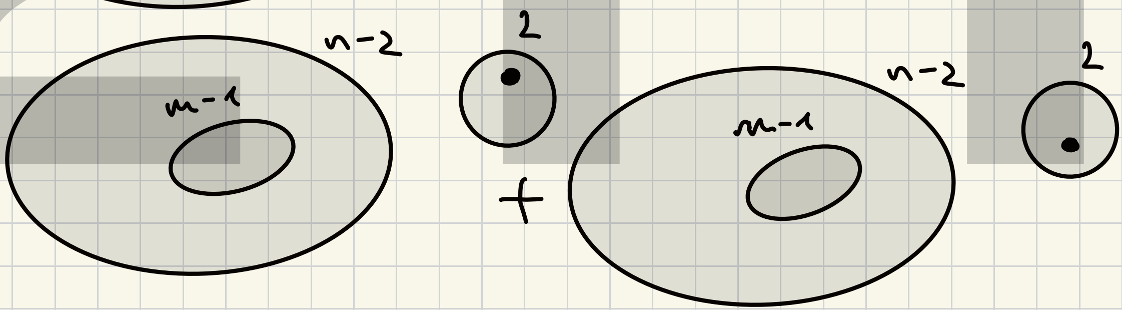


– левая часть

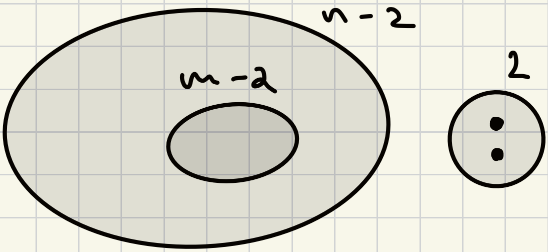
1)



2)



3)



№6. $F_{1000}=F_{999}+F_{998}$

1-ое – $$\frac{(F_{999}+F_{998})!}{(F_{998}-1)!\,(F_{999}-1)!\;F_{998}\,(F_{998}+1)}$$

$$2\text{-ое} - \frac{(F_{999}+F_{998})!}{(F_{998}-1)!\,(F_{999}-1)!\;F_{999}(F_{999}+1)}$$

Значит $\dfrac{1\text{-ое}}{2\text{-ое}} = \dfrac{F_{999}(F_{999}+1)}{F_{998}(F_{998}+1)} > 1$, т.к. $F_{999} > F_{998} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ 1-ое > 2-ое

№7. Рассм. задачу №4. слева - ответ полученный в решении (см. выше). Докажем, что правая часть - также ответ на эту задачу.

Если слово a_n заканчивается на 0, то перед ним может быть любое слово a_{n-1}. Если на 1, то перед ним может быть любое слово $a_{n-2}0 \Rightarrow a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$

$a_1 = 2$ (0, 1) ; $a_2 = 3$ (00, 01, 10)

Если определить $a_{-1} = a_0 = 1$, то получим посл-ть Фибоначчи со смещённым на два индексом $\Rightarrow a_n = F_{n+2}$

Т.е. доказали.

№8. Книги → шары.
Полки → перегородки. => всего способов – $(20+5-1)!$ Полки одинаковые => нужно разделить на кол-во способов переставить полки (перегородки) => искомый ответ: $\frac{24!}{4!}$

№9. Запишем условие в виде уравнения:

$$n_1+n_2+\ldots+n_8=8$$

n_i – кол-во голосов за i-го члена студсовета. Т.к. каждый член голосует ровно один раз, то сумма всех голосов равна 8.

Тогда ответ – кол-во решений в $\mathbb{N}_0$ =>
=> искомый ответ: $C^{8}_{7+8}=C^{8}_{15}$

шары и перегородки

№10. 18 букв – всего; 7 – „О"; 3 – „С"; 2 – „Б"; 2 – „Н".
Уберём все „О". Полученное слово можно составить $\frac{11!}{3!\,2!\,2!}$ способами.

Вставим „О" обратно: всего 12 позиций =>

$\Rightarrow$ способов C_{12}^{7} $\Rightarrow$ искомый ответ: $\frac{11!}{2!2!3!} \cdot C_{12}^{7} =$

$$= \frac{(11!)^2 \cdot 12}{4!\,7!\,5!} = \frac{(11!)^2}{2!\,7!\,5!}$$