Д/З 2

№1.5. $\vec{a}(1,3), \vec{b}(2,-1), \vec{c}(-4,1)$. $\alpha, \beta = ?$:

$$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \vec{c} = 0$$

$$\alpha\begin{Vmatrix}1\\3\end{Vmatrix} + \beta\begin{Vmatrix}2\\-1\end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix}-4\\1\end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix}\alpha+2\beta-4\\3\alpha-\beta+1\end{Vmatrix} = 0 = \begin{Vmatrix}0\\0\end{Vmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\alpha+2\beta-4=0;\\ 3\alpha-\beta+1=0;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha+2\beta=4;\\ 3\alpha-\beta=-1;\end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix}1 & 2\\3 & -1\end{vmatrix} = -1-6=-7;\quad \Delta_\alpha = \begin{vmatrix}4 & 2\\-1 & -1\end{vmatrix} = -4+2=-2$$

$$\Delta_\beta = \begin{vmatrix}1 & 4\\3 & -1\end{vmatrix} = -1-12=-13 \Rightarrow \alpha = \frac{\Delta_\alpha}{\Delta} = \frac{2}{7};\ \beta = \frac{\Delta_\beta}{\Delta} = \frac{13}{7}.$$

№1.7. $\vec{a}\,(x, 1-x)$ $\quad b\,(x^2-2x, x^2-2x+1)$

$x = ?$: 1) $\vec{a} \parallel \vec{b}$; 2) $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$

$\alpha, \beta \neq 0$

$\vec{a} = \alpha\vec{i}$; $\vec{b} = \beta\vec{i}$; $\alpha, \beta$ − const; $i(i_1; i_2)$, где не выполн. $\begin{cases}i_1=0;\\ i_2=0;\end{cases}$

$$\begin{Vmatrix}x\\1-x\end{Vmatrix} = \alpha\begin{Vmatrix}i_1\\i_2\end{Vmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}x = \alpha i_1;\\ 1-x = \alpha i_2;\end{cases}$$

$$\begin{Vmatrix}x^2-2x\\x^2-2x+1\end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix}x(x-2)\\(x-1)^2\end{Vmatrix} = \beta\begin{Vmatrix}i_1\\i_2\end{Vmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}x(x-2) = \beta i_1;\\ (x-1)^2 = \beta i_2;\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x(x-2) = \beta i_1;\\ (1-x)^2 = \beta i_2;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha i_1(x-2) = \beta i_1;\\ \alpha i_2(1-x) = \beta i_2;\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}i_1(\alpha(x-2)-\beta)=0;\\ i_2(\alpha(1-x)-\beta)=0;\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}i_1 = \alpha(1-x)-\beta=0\\ i_2 = \alpha(x-2)-\beta=0\\ \alpha(x-1)-\beta=\alpha(x-2)-\beta=0\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{x}{\alpha} = \alpha(1-x) - \beta = 0; \\ \dfrac{1-x}{\alpha} = \alpha(x-2) - \beta = 0; \\ \alpha(1-x) - \beta = \alpha(x-2) - \beta = 0; \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \dfrac{x}{\alpha} = \alpha - \alpha x - \beta \\ \dfrac{x}{\alpha} = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \dfrac{1-x}{\alpha} = \alpha(x-2) - \beta \\ \dfrac{1-x}{\alpha} = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \alpha(1-x) - \beta = \alpha(x-2) - \beta \\ \alpha(1-x) - \beta = 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \alpha = \beta \\ x = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \alpha = -\beta \\ x = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} 1 - x = x - 2 \Leftrightarrow x = \dfrac{3}{2} \\ -\dfrac{\alpha}{2} - \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = -2\beta \end{cases} \end{array}\right.$$

в 1) случае $\alpha\beta$ - любого знака $(\alpha\beta \neq 0) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ 1) $x = 0$; $x = 1$; $x = \frac{3}{2}$

в 2) случае $\alpha\beta > 0 \Rightarrow$ 2) $x = 0$.

№1.10. Проверить: $\vec{a}(4, 1, -1)$, $\vec{b}(1, 2, -5)$, $\vec{c}(-1, 1, 1)$ образуют базис в пространстве. Координаты $\vec{l}(4, 4, -5)$, $\vec{m}(2, 4, -10)$, $\vec{n}(0, 3, -4)$ в этом базисе.

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ - базис, если $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ - лин. независимые.

$$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$$

$$\left\|\begin{array}{c} 4\alpha + \beta - \gamma \\ \alpha + 2\beta + \gamma \\ -\alpha - 5\beta + \gamma \end{array}\right\| = \left\|\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right\| \Leftrightarrow \begin{cases} 4\alpha + \beta - \gamma = 0; \\ \alpha + 2\beta + \gamma = 0; \\ -\alpha - 5\beta + \gamma = 0; \end{cases}$$

$$\Delta=\begin{vmatrix}4&1&-1\\1&2&1\\-1&-5&1\end{vmatrix}=4(2+5)-(1+1)-(-5+2)=29$$

тема имеет единств. решение. Это решение $(0,0,0)$ $\Rightarrow$ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ - лин. независимые $\Rightarrow$ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ образуют базис.

$$x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}=\vec{e} \Leftrightarrow \left\|\begin{matrix}4x+y-z\\x+2y+z\\-x-5y+z\end{matrix}\right\|=\left\|\begin{matrix}4\\4\\-5\end{matrix}\right\|;\ \Delta_x=$$

$$=\begin{vmatrix}4&1&-1\\4&2&1\\-5&-5&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}8&3&0\\4&2&1\\-5&-5&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}8&3&0\\9&7&0\\-5&-5&1\end{vmatrix}=56-27=29 \Rightarrow x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=1$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix}4&4&-1\\1&4&1\\-1&-5&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}5&8&0\\2&9&0\\-1&-5&-1\end{vmatrix}=-45+16=29 \Rightarrow y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=1$$

$$\Delta_z=\begin{vmatrix}4&1&4\\1&2&4\\-1&-5&-5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&-7&-12\\0&-3&-1\\-1&-5&-5\end{vmatrix}=-7+36=29 \Rightarrow z=\frac{\Delta_z}{\Delta}=1$$

$\vec{e}(1;1;1)$

$$\vec{m}:\ \left\|\begin{matrix}4&1&-1\\1&2&1\\-1&-5&1\end{matrix}\,\middle|\,\begin{matrix}2\\4\\-10\end{matrix}\right\|;\ \Delta_x=\begin{vmatrix}2&1&-1\\4&2&1\\-10&-5&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&1&-1\\8&4&2\\0&0&0\end{vmatrix}=0 \Rightarrow x=0$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix}4&2&-1\\1&4&1\\-1&-10&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}5&6&0\\2&14&0\\-1&-10&1\end{vmatrix}=70-12=58 \Rightarrow y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=2$$

$$\Delta_z=\begin{vmatrix}4&1&2\\1&2&4\\-1&-5&-10\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&-19&-38\\0&-3&-6\\-1&-5&-10\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&0&0\\0&1&2\\-1&-5&-10\end{vmatrix}=0 \Rightarrow z=0$$

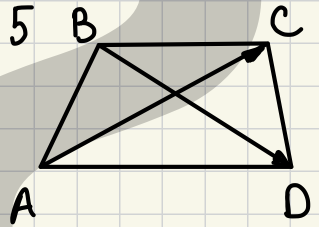
$\vec{m}(0;2;0)$

$\vec{n}: \left\|\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & -5 & 1 & -4 \end{array}\right\|; \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -4 & -5 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 7 & 7 \\ -4 & -5 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x = 0$

$\Delta_y = \begin{vmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & -4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 5 & 3 & 0 \\ 3 & -4 & 0 \end{vmatrix} = 20 + 9 = 29 \Rightarrow y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = 1$

$\Delta_z = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & -5 & -4 \end{vmatrix} = 4(-8+15) - (-4+3) = 28 + 1 = 29 \Rightarrow z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = 1 \Rightarrow \vec{n}(0;1;1)$

№1.15



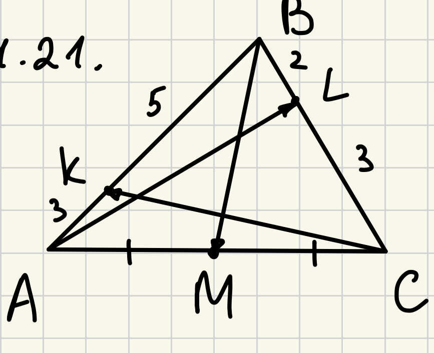

$\vec{AB} = \vec{AC} + \vec{CB} = \vec{AC} + \frac{2}{3}\vec{DA} = \vec{AC} + \frac{2}{3}(\vec{DB} + \vec{BA}) \Rightarrow$

$\Rightarrow \vec{AB} = \frac{3}{5}\left(\vec{AC} - \frac{2}{3}\vec{BD}\right) = \left\|\begin{matrix} 3/5 \\ -2/5 \end{matrix}\right\|$

$\vec{BC} = \vec{BA} + \vec{AC} = \left\|\begin{matrix} 2/5 \\ 2/5 \end{matrix}\right\|; \quad \vec{CD} = \vec{CB} + \vec{BD} = \left\|\begin{matrix} -2/5 \\ 3/5 \end{matrix}\right\|; \quad \vec{DA} = \vec{DB} + \vec{BA} =$

$= \left\|\begin{matrix} -3/5 \\ -3/5 \end{matrix}\right\|$

№1.21.




$\vec{BM} = \frac{1}{2}(\vec{BA} + \vec{BC})$

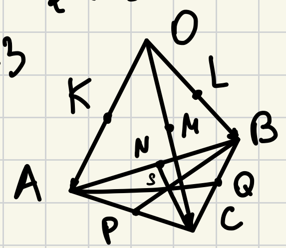
$\vec{BA} = -\left(\vec{AL} + \frac{2}{5}\vec{CB}\right); \quad \vec{BC} = -\left(\vec{CK} + \frac{5}{8}\vec{AB}\right)$

$\vec{BA} = -\left(\vec{AL} + \frac{2}{5}\vec{CK} + \frac{1}{4}\vec{AB}\right) \Rightarrow \vec{BA} = -\frac{4}{3}\vec{AL} - \frac{8}{15}\vec{CK}$

$\vec{BC} = -\left(\vec{CK} + \frac{5}{8}\vec{AL} + \frac{1}{4}\vec{CB}\right) \Rightarrow \vec{BC} = -\frac{4}{3}\vec{CK} - \frac{5}{6}\vec{AL}$

$\vec{BM} = \frac{1}{2}\left(-\frac{4}{3}\vec{AL} - \frac{8}{15}\vec{CK} - \frac{4}{3}\vec{CK} - \frac{5}{6}\vec{AL}\right) = -\frac{13}{12}\vec{AL} - \frac{14}{15}\vec{CK} \Rightarrow \vec{BM}\left(-\frac{13}{12}; -\frac{14}{15}\right)$

1.23




1) $\vec{AB}, \vec{BC}, \vec{AC}$;

2) $\vec{KL}, \vec{PQ}, \vec{CN}, \vec{MP}, \vec{KQ}$;

3) $\vec{OS}, \vec{KS}$.

1) $\vec{AB}=\vec{AO}+\vec{OB} \Rightarrow \vec{AB}=(-1;1;0)$; $\vec{BC}(0;-1;1)$; $\vec{AC}(-1;0;1)$

2) $\vec{KL}=\frac{\vec{AB}}{2}=\vec{PQ} \Rightarrow \vec{KL}=(-\frac{1}{2};\frac{1}{2};0)$; $\vec{PQ}(-\frac{1}{2};\frac{1}{2};0)$; $\vec{CN}=\frac{\vec{CA}+\vec{CB}}{2} \Rightarrow \vec{CN}(\frac{1}{2};\frac{1}{2};-1)$

$\vec{MP}=\frac{\vec{OA}}{2} \Rightarrow \vec{MP}=(\frac{1}{2};0;0)$; $\vec{KQ}=\vec{KN}+\vec{NQ}=\frac{\vec{OB}}{2}+\frac{\vec{AC}}{2} \Rightarrow \vec{KQ}(-\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2})$

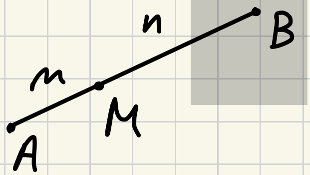
3) $\vec{OS}=\vec{OB}+\vec{BS}=\vec{OB}+\frac{2}{3}\vec{BP}=\vec{OB}+\frac{2}{3}\left(\frac{\vec{BA}+\vec{BC}}{2}\right) \Rightarrow \vec{OS}(\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3})$

$\vec{KS}=\vec{KO}+\vec{OS}=-\frac{\vec{OA}}{2}+\vec{OS} \Rightarrow \vec{KS}(-\frac{1}{6};\frac{1}{3};\frac{1}{3})$

№1.30

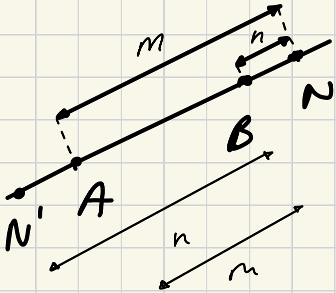
1) $\vec{AM}=\frac{m}{m+n}\vec{AB} \Leftrightarrow \left\|\begin{matrix}x_M-x_1\\ y_M-y_1\\ z_M-z_1\end{matrix}\right\| = \frac{m}{m+n}\left\|\begin{matrix}x_2-x_1\\ y_2-y_1\\ z_2-z_1\end{matrix}\right\| \Leftrightarrow \left\|\begin{matrix}x_M\\ y_M\\ z_M\end{matrix}\right\| =$

$=\frac{m}{m+n}\left\|\begin{matrix}x_2-x_1\\ y_2-y_1\\ z_2-z_1\end{matrix}\right\| + \left\|\begin{matrix}x_1\\ y_1\\ z_1\end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix}\frac{mx_2+nx_1}{m+n}\\ \frac{my_2+ny_1}{m+n}\\ \frac{mz_2+nz_1}{m+n}\end{matrix}\right\|$

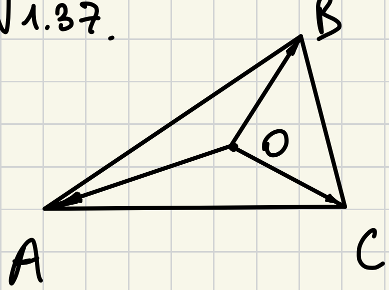



2) $\vec{AN}=\frac{m}{m-n}\vec{AB} \Leftrightarrow \left\|\begin{matrix}x_n\\ y_n\\ z_n\end{matrix}\right\| =$

$=\frac{m}{m-n}\left\|\begin{matrix}x_2-x_1\\ x_2-y_1\\ z_2-z_1\end{matrix}\right\| + \left\|\begin{matrix}x_1\\ y_1\\ z_1\end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix}\frac{mx_2-nx_1}{m-n}\\ \frac{my_2-ny_1}{m-n}\\ \frac{mz_2-nz_1}{m-n}\end{matrix}\right\|$



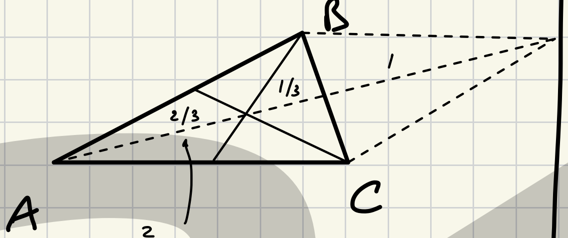

№1.37.




Введём базис $\vec{AB}, \vec{AC}$. Пусть $\vec{OA}=\alpha\vec{AB}+\beta\vec{AC}$. Тогда $\vec{OB}=\vec{OA}+\vec{AB}=(\alpha+1)\vec{AB}+\beta\vec{AC}$; $\vec{OC}=\vec{OA}+\vec{AC}=\alpha\vec{AB}+(\beta+1)\vec{AC}$

$\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC}=\vec{0} \Rightarrow (3\alpha+1)\vec{AB}+(3\beta+1)\vec{AC}=\vec{0} \Leftrightarrow$

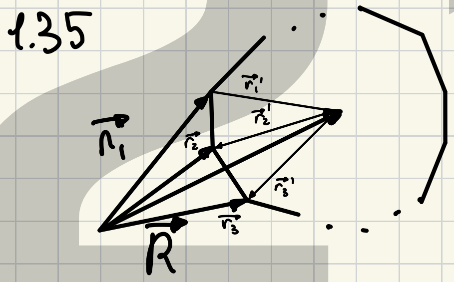
$\Leftrightarrow \alpha = -\frac{1}{3};\ \beta = -\frac{1}{3}$




$-\frac{\frac{2}{3}}{2} = -\frac{1}{3}(\vec{AB}+\vec{AC})$

$\Rightarrow$ O – точка пересечения медиан. Вне треугольника медианы не могут пересекаться.

1.35




n-угольник

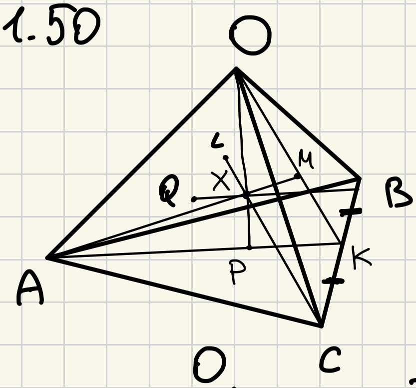
Проведём $\vec{r_i}'$ из центра в вершины.

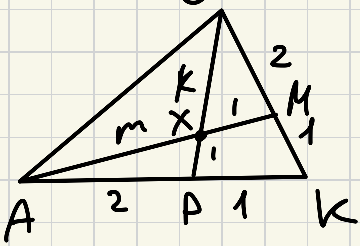
Тогда $\vec{r_i} = \vec{R} + \vec{r_i}'$

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{r_i} = n\vec{R} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \vec{r_i}'}_{0,\ \text{т.к. многоугольник правильный (в силу симметрии)}} = n\vec{R} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{R} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \vec{r_i}}{n} \ \blacksquare$$

1.50




Рассм. сечение тетраэдра пл-ти (OAK), K – середина BC.

$M \in OK,\ P \in AK \Rightarrow AM \cap OP \neq \emptyset$.

$\exists\ AM \cap OP = X$. Введём базис $\vec{KP}, \vec{KM}$ в пл-ти OAK. Тогда:

$$\vec{AO} = -3\vec{KP} + 3\vec{KM} = \vec{AX} + \vec{XO} =$$

$$= \frac{m}{m+1}\vec{AM} + \frac{k}{k+1}\vec{PO} = \frac{m}{m+1}\left(-3\vec{KP} + \vec{KM}\right) +$$

$$+ \frac{k}{k+1}\left(-\vec{KP} + 3\vec{KM}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -3\overrightarrow{KP}+3\overrightarrow{KM} = \left(\frac{-3m}{m+1} - \frac{k}{k+1}\right)\overrightarrow{KP} + \left(\frac{m}{m+1} + \frac{3k}{k+1}\right)\overrightarrow{KM} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3 = \dfrac{-3m}{m+1} - \dfrac{k}{k+1} \\ 3 = \dfrac{m}{m+1} + \dfrac{3k}{k+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = \dfrac{-2m}{m+1} + \dfrac{2k}{k+1} \\ 3 = \dfrac{m}{m+1} + \dfrac{3k}{k+1} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{m}{m+1} = \dfrac{k}{k+1} \\ \dfrac{3}{4} = \dfrac{m}{m+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 3 \\ m = 3 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ X делит OP и AM как $\frac{3}{1}$ от вершины.

Аналогичные рассуждения проводим с остальными отрезками (CL, CQ). Получаем, что все они пересекаются с OP в одной точке, т.к. все они делятся как $\frac{3}{1}$ от вершины ■