Д/З 10

№1. $R \subseteq \{1,2,3\}^2 = A^2$

а) $R = \{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(1,3),(3,2)\}$

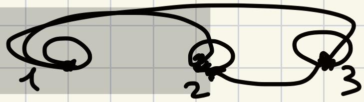
$\forall a \in A \hookrightarrow (a,a) \in R \Rightarrow R$ - рефлексивное

$(1,2) \in R$, но $(2,1) \notin R \Rightarrow R$ - несимметричное

$\forall \ a,b,c \hookrightarrow \left[\left((a,b) \in R \ \&\& \ (b,c) \in R\right) \Rightarrow \left((a,c) \in R\right)\right] \Rightarrow$

$\Rightarrow R$ - транзитивное

R - не отн. экв., т.к. R - несимметричное



б) $R = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$

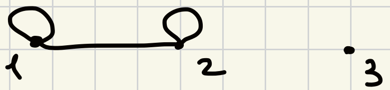
$(3,3) \notin R \Rightarrow R$ - нерефлексивное

$\forall a,b \in R \hookrightarrow \left[(a,b) \in R \ \&\& \ (b,a) \in R\right] \Rightarrow R$ - симметр.

$\forall \ a,b,c \hookrightarrow \left[\left((a,b) \in R \ \&\& \ (b,c) \in R\right) \Rightarrow \left((a,c) \in R\right)\right] \Rightarrow$

$\Rightarrow R$ - транзитивное

R - не отн. экв., т.к. R - нерефлекс.



№2. $\exists$ $xAy \equiv$ "x мать y" $xBy \equiv$ "x отец y"

Тогда $xA^{-1}y$ – x отпрыск матери y $xB^{-1}y$ – x отпрыск отца y. племянник – отпрыск отпрыска родителя. Т.е. "x племянник y" $\equiv xCy$, где

$$C = (A^{-1}\cup B^{-1})\circ(A^{-1}\cup B^{-1})\circ(A\cup B).$$

№3. $P_1, P_2 \subseteq A\times A$ транзитивны

1)] $A = \{1, 2, 3\}$

$P_1 = \{(1,1),(2,2),(3,3)\}$

$\overline{P_1} = \{(1,2),(2,1),(2,3),(3,2),(1,3),(3,1)\}$

$(1,2),(2,1) \in R$, но $(1,1) \notin R \Rightarrow$ нет

2) Если $\exists\ (a,b),(b,c) \in (P_1\cap P_2)$, т.е.

$[(a,b),(b,c)\in P_1\ \&\&\ (a,b),(b,c)\in P_2]$, т.е.

$[(a,c)\in P_1\ \&\&\ (a,c)\in P_2]$, т.е. $(a,c)\in(P_1\cap P_2) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ да.

3)] $A = \{1, 2, 3\}$

$P_1 = \{(1,2),(2,1),(1,1)\}$

$P_2 = \{(2,3),(3,2),(2,2)\}$

$(1,2),(2,3) \in (P_1\cup P_2)$, но $(1,3)\notin(P_1\cup P_2) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ нет

4) $\exists\ A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$P_1 = \{(2,3), (4,5)\}$

$P_2 = \{(1,2), (3,4)\}$

$P_1 \circ P_2 = \{(1,3), (3,5)\}$

$(1,5) \notin P_1 \circ P_2 \Rightarrow$ нет.

№4.

а) $\exists\ A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$

$P = (A \times A) \setminus \{(a_4, a_4), (a_5, a_5), (a_6, a_6)\}$ – симм. $\Rightarrow$ да

б) Убирая из $A \times A$ пары вида (a_i, a_i) мы должны убрать ещё пары вида (a_j, a_i) или (a_i, a_j), т.е. ещё хотя бы 5 пар $(1 \leq i, j \leq 6)$. Убирая из $A \times A$ пары вида (a_i, a_k) мы должны убрать все пары вида (a_i, a_j) или (a_j, a_k), т.е. также ещё хотя бы 5 пар $\Rightarrow |P| \neq 33$ ↯!

№5.

а) $(x, x) \in P \Rightarrow$ рефлекс.

$(x, y) \in P \Rightarrow (y, x) \in P \Rightarrow$ симм.

$[(x,y)\in P \,\&\&\, (y,z)\in P] \Rightarrow (x,z)\in P \Rightarrow$ экв.

б) $(12,13)\in Q$, $(13,33)\in Q$, но $(12,33)\notin Q \Rightarrow$

$\Rightarrow$ не транз. $\Rightarrow$ не экв.

в) рефлекс. , т.к. $S_x - S_x = 0$ – чёт.

симм. , т.к. $S_x - S_y \overset{2}{\equiv} S_y - S_x$

транз. , т.к. $S_x - S_y \overset{2}{\equiv} S_y - S_z \equiv 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow S_x - S_y - (S_z - S_y) = S_x - S_z \overset{2}{\equiv} 0 \Rightarrow$ экв.

№7. $\exists$ f – не биекция $\Rightarrow \exists\, x_1, x_2 : (x_1 \neq x_2) \,\&\&\, (f(x_1) =$
$= f(x_2) = \alpha) \Rightarrow f(g(\alpha)) = x_1 = x_2$ $\overset{o}{x}$! $\Rightarrow f$ – биекция.

№9. $f(f(x)) = f(y) = x \Rightarrow x = y$ или x и y – обособленная пара. Т.е. искомое кол-во – кол-во способов разбить A на пары и одиночные элементы. Кол-во способов выбрать n одиночных элементов – C_7^n. Кол-во способов выбрать $\frac{7-n}{2}$ пар из оставшихся: $C^2_{7-n}\cdot C^2_{7-n-2}\cdot$
$\cdot\ldots\cdot C^2_2 \cdot \frac{1}{(\frac{7-n}{2})!}$ ← кол-во способов их переставить.

Сворачивая получаем $\frac{(7-n)!}{2^{\frac{7-n}{2}}(\frac{7-n}{2})!}$, где $n \,\vdots\, 2$. Итог $(n=2k+1)$:

$$\sum_{k=0}^{3} C_7^{2k+1}\frac{(6-2k)!}{2^{3-k}(3-k)!} = 232$$