§21

6(5) $\frac{5-2x}{x^2-5x+6} = \frac{5-2x}{(x-3)(x-2)} = \frac{A}{x-3}+\frac{B}{x-2} \to \begin{cases}A+B=-2\\ -2A-3B=5\end{cases} \to \begin{cases}A=-1\\ B=-1\end{cases}$

$= \frac{1}{3-x}+\frac{1}{2-x} = \frac13\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac x3\right)^n + \frac12\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac x2\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3^{n+1}}+\frac{1}{2^{n+1}}\right)x^n$

$\sqrt[n]{|c_n|} = \sqrt[n]{1/3^{n+1}+1/2^{n+1}} = \frac13\sqrt[n]{1/3+3^n/2^{n+1}} \xrightarrow{n\to\infty} \frac13\cdot\frac32 = \frac12 = \frac1R \Rightarrow R=2$

9(2) $\ln(12-x-x^2) = \ln((4+x)(3-x)) = \ln 12+\ln\left(1+\frac14 x\right)+\ln\left(1-\frac13 x\right) =$

$= \ln 12+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n4^{-n}}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(-x)^n3^{-n}}{n} = \ln 12+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}4^{-n}-3^{-n}}{n}x^n$, $R=3$

11(3) $\sin x\cos^2 x = \sin x\frac{1+\cos 2x}{2} = \frac12\sin x+\frac12\sin x\cos 2x = \frac12\sin x+\frac14(\sin 3x -$

$-\sin x) = \frac14\sin x+\frac14\sin 3x = \frac14\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\frac14\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(3x)^{2n+1}}{(2n+1)!} =$

$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(1+3^{2n+1})}{4(2n+1)!}x^{2n+1}$, $R=+\infty$ (т.к. у синуса $R=+\infty$)

19(4) $\frac{1}{\sqrt{x^2-4x+8}}$, $x_0=2$. $t=x-x_0 \to \frac{1}{\sqrt{4+t^2}} = \frac{1}{2\sqrt{1+(t/2)^2}} = \frac12+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{2^{3n+1}n!}t^{2n}$,

$R=2$, т.к. для сходимости $\frac{1}{2\sqrt{1+(t/2)^2}}$ необходимо $|t/2|<1$

25(1) $f(x)=\operatorname{arctg}\frac{1-x}{1+x}$. $f'(x) = \left(1+\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2\right)^{-1}\frac{-(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2} = \frac{-2}{2+2x^2} = \frac{-1}{1+x^2} =$

$= -\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}x^{2n}$

$f(x) = \int_0^x f'(x)dx = f(0)+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}x^{2n+1} = \frac\pi4+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}x^{2n+1}$, $R=1$, т.к. ряд

$f'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$ имеет такой же радиус сходимости.

30(2) $x\arccos\frac{x^2}{\sqrt{4+x^4}}$. $g(x)=\arccos\frac{x^2}{\sqrt{4+x^4}}$, $g'(x) = -\left(1-\left(\frac{x^4}{4+x^4}\right)\right)^{-1/2}\frac{2x\sqrt{4+x^4}-x^2\frac12\frac{4x^3}{\sqrt{4+x^4}}}{4+x^4} =$

$= -(4+x^4-x^4)^{-1/2}(2x(4+x^4)-x^2\cdot 2x^3)/(4+x^4) = -\frac{4x}{4+x^4} = -\frac{x}{1+(x^2/2)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{4^n}x^{4n+1}$

$\sqrt[4n+1]{|c_{4n+1}|} = \sqrt[4n+1]{4^{-n}} = 4^{\frac{-n}{4n+1}} \xrightarrow{n\to\infty} 4^{-1/4} = 1/R \Rightarrow R=\sqrt2$

g и g' имеют один и тот же R

$g(x) = \int_0^x g'(x)dx = g(0)+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{4^n}\frac{x^{4n+2}}{4n+2} = \frac\pi2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{4^n(4n+2)}x^{4n+2}$

$x\arccos\frac{x^2}{\sqrt{4+x^4}} = \frac\pi2 x+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{4^n(4n+2)}x^{4n+3}$, $R=\sqrt2$

55(1) $S(x) = x+\frac13x^3+\frac15x^5+\ldots+\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}+\ldots$

$S'(x) = 1 + x^2 + x^4 + \ldots + x^{2n} + \ldots = \frac{1}{1-x^2}$, $|x| < 1$

$S(x) = \int_0^x S'(x)\,dx = \int_0^x \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + S(0) = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$

<u>80.</u>

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Проверим, что $f(x)$ бесконечно дифф. в нуле и все произв. $=0$

База: $f'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{-1/x^2}}{x} = 0$

Предположение: $\exists f^{(n)}(0) = 0$

Шаг: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f^{(n)}(x) - f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\left(e^{-1/x^2}\right)^{(n)}}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\left(\frac{2}{x^3} e^{-1/x^2}\right)^{(n-1)}}{x} =$

$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x} \sum\limits_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^{k} \left(2x^{-3}\right)^{(n-1-k)} \left(e^{-1/x^2}\right)^{(k)} = 0$, т.к. экспонента падает быстрее любого многочлена.

Значит, ряд Маклорена для $f(x)$ существует и тождественно равен нулю. Но $f(x) \neq 0 \ \forall x \neq 0$ /ч.т.д.

<u>31(1)</u> $f(x) = \int_0^x e^{-t^2}dt$. $f'(x) = e^{-x^2} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^n}{n!}$. $R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}|n+1| = +\infty$

$f(x) = \int_0^x f'(x)\,dx = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(n!)} x^{2n+1} + f(0) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(n!)} x^{2n+1}$, $R = +\infty$, т.к. у f радиус сходимости такой же как у f'.

Т.3 §5

<u>2(2)</u> $u(x,y) = 3x^2y + y^3 - 12x - 15y + 3$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = 6xy - 12 = 0 \to y = \frac{2}{x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = 3x^2 + 3y^2 - 15 = 0 \to 3x^2 + \frac{12}{x^2} - 15 = 0 \to x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \to (\pm 1, \pm 2); (\pm 2, \pm 1) - \text{стац. точки} \end{cases}$$

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6y$; $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 6y$; $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = 6x \to H = \begin{Vmatrix} 6y & 6x \\ 6x & 6y \end{Vmatrix}$

в $(1,2)$ $H>0 \to \min$, $u(1,2) = -25$, в $(-1,-2)$ $H<0 \to \max$, $u(-1,-2) = 31$

в $(\pm 1, 2)$ H не явл. знакоопр. $\Rightarrow (\pm 1, 2)$ не явл. экстремумами

6(2) $u(x,y) = (x^2 - 2y^2)e^{x-y}$ $\quad -x^2e^{x-y} + 4ye^{x-y} + 2y^2e^{x-y}$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = e^{x-y}(x^2 + 2x - 2y^2) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} = e^{x-y}(-x^2 + 2y^2 - 4y) = 0 \end{cases} \to \begin{cases} x^2 + 2x - 2y^2 = 0 \\ -x^2 + 2y^2 - 4y = 0 \end{cases} \to \begin{cases} x = 2y \\ y(y+2) = 0 \end{cases} \to$$

$\to (0,0); (-4,-2)$ - стац. точки

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = (x^2 + 4x + 2 - 2y^2)e^{x-y}; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = (x^2 - 2y^2 + 8y - 4)e^{x-y}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = (-x^2 - 2x + 2y^2 - 4y)e^{x-y}$$

В $(0,0)$ $H = \begin{Vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{Vmatrix}$ - не явл. знакоопр. $\Rightarrow (0,0)$ не экстремум.

В $(-4,-2)$ $H = e^{-2}\begin{Vmatrix} -6 & 8 \\ 8 & -12 \end{Vmatrix} < 0 \Rightarrow (-4,-2)$ - max $\quad u(-4,-2) = 8e^{-2}$

9. $u(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = 4x^3 - 4x = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} = 4y^3 = 0 \end{cases} \to (\pm 1, 0); (0,0) \text{ - стац. точки}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 12x^2 - 4; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 12y^2; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = 0$$

в $(0,0)$ $H = \begin{Vmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix} \leq 0$, в $(\pm 1, 0)$ $H = \begin{Vmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix} \geq 0$. Т.е. достаточными условиями строгого экстремума пользоваться нельзя.

Заметим, что $u(x,y) = (x^2-1)^2 + y^4 - 1 \geq -1$, а $u(\pm 1, 0) = -1 \Rightarrow (\pm 1, 0)$ - точки минимума.

Рассмотрим $(0,0)$: Выберем $\left(\frac{1}{N}, \frac{1}{N}\right) \xrightarrow{N\to\infty} (0,0)$ и $\left(0, \frac{1}{N}\right) \xrightarrow{N\to\infty} (0,0)$

$u\left(\frac{1}{N}, \frac{1}{N}\right) = \frac{2}{N^2}\left(\frac{1}{N^2} - 1\right) < 0$; $u\left(0, \frac{1}{N}\right) = \frac{1}{N^4} > 0 \Rightarrow (0,0)$ - не явл. экстремумом

10. $u(x,y) = (y^2 - x)(y^2 - 2x)$

1) Ур-е связи: $y=\alpha x \to u(x,y)=u(x)=(\alpha^2x^2-x)(\alpha^2x^2-2x)=$
$=\alpha^4x^4-3\alpha^2x^3+2x^2$

$\frac{du}{dx}=4\alpha^4x^3-9\alpha^2x^2+4x$. $\frac{du}{dx}\Big|_{x=0}=0 \to (0,0)$ - критич. точка.

$\frac{d^2u}{dx^2}=12\alpha^4x^2-18\alpha^2x+4$. $\frac{d^2u}{dx^2}\Big|_{x=0}=4>0 \Rightarrow$ в $(0,0)$ min

2) Рассмотрим $u(x,y)$ вдоль параболы $x=\frac{3}{4}y^2$.
$u(x,y)=u(y)=\frac{1}{4}y^2\left(-\frac{1}{2}y^2\right)=-\frac{1}{8}y^2<0$, но $u(0,0)=0 \Rightarrow (0,0)$ не является минимумом $u(x,y)$.

<u>13(1)</u> $u(x;y;z)=x^2+y^2+(z+1)^2-xy+x$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}=2x-y+1=0 \\ \frac{\partial u}{\partial y}=2y-x=0 \\ \frac{\partial u}{\partial z}=2(z+1)=0 \end{cases} \longrightarrow \left(-\frac{2}{3};-\frac{1}{3};-1\right) \text{ - стац. точка}$$

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=2$; $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=2$; $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=2$; $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}=-1$; $\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}=\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial y}=0$;

$\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}=0$; $H=\begin{Vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{Vmatrix}>0 \Rightarrow \left(-\frac{2}{3};-\frac{1}{3};-1\right)$ - min.

$u\left(-\frac{2}{3};-\frac{1}{3};-1\right)=-\frac{1}{3}$

<u>Т.6.</u> $H\geqslant 0$

а) Да, может. Например, $f(x,y)=x^2+y^4$. $(0,0)$ - очевидно строгий минимум, а в $(0;0)$ $H=\begin{Vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}$ - полож. полуопр.

б) Нет, не может, т.к. если x^0 - строгий локальный максимум, то $0>f(x)-f(x^0)\sim\frac{1}{2}d^2f(x_0)=\frac{1}{2}\|x_1\ldots x_n\|H\begin{Vmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{Vmatrix}$, но по условию правая часть $\geqslant 0$ $\overset{\circ}{X}$!

в) Да, может. Например, $f(x,y)=x^2-y^4$. В точке $(0,0)$ $H=\begin{Vmatrix}2&0\\0&0\end{Vmatrix}$ - положительно полуопределена, но $(0,0)$ не явл. точкой локального экстремума, т.к. $f(\frac{1}{N},0)>0=f(0,0)$, а $f(0,\frac{1}{N})<0=f(0,0)$, причём $(\frac{1}{N},0)\xrightarrow{N\to\infty}(0,0)$, $(0,\frac{1}{N})\xrightarrow{N\to\infty}(0,0)$ => $(0,0)$ не явл. локальным экстремумом.