С3 §7 №19

1 неделя

Док-ть: $\mu^*(X)=0 \to \mu(X)=0$, X-измеримо

$\triangleright$

$\forall k\in\mathbb{N} \longmapsto \mu(s_k(X))\geq 0$ & $\mu(S_k(X))\geq 0$

$\mu^*=\lim\limits_{k\to\infty}\mu(S_k(X)) \Rightarrow \mu^*(X)\geq 0$

Аналогично $\mu_*(X)\geq 0$

При этом $\mu_*(X)\leq\mu^*(X)$ и $\mu^*(X)=0$,

значит $\mu_*(X)=\mu^*(X)=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ (по определению) X измеримо по Жордану

и $\mu(X)=0$. $\triangleleft$

С3 §7 №22

$\{x^k\}$, $x^k\in\mathbb{R}^n$, $k\in\mathbb{N}$. Последовательность сходится

к точке из $\mathbb{R}^n$

Док-ть: $\mu(\{x^k\})=0$.

$\triangleright$ Рассмотрим некоторую квадратную окрестность

точки x_0: $U_\varepsilon(x_0)$.

При фиксированном ε вне этой окрестности

находится конечное число точек, обозначим

их множество за M.

Таким образом, $\{x^k\} \subseteq \dot{U}_\varepsilon(x_0) \cup M$

При $\varepsilon \to 0$: $\mu(U_\varepsilon(x_0) \cup M) = \mu(U_\varepsilon(x_0)) \to 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \mu^*(\{x^k\}) = 0.$

Как было показано в предыдущей задаче,

$\mu(\{x^k\}) = 0.$ $\triangleleft$

С3 §7 №40

Док-ть не измеримость по Жордану множества:

1) рациональных точек отрезка $[0;1]$ в $\mathbb{R}^1$

Докажем, что отрезок $[0;1]$ - граница множества

Рассмотрим $x \in [0,1]$, $X = [0;1] \cap \mathbb{Q}$

$\forall U_\varepsilon(x)$ $\exists$ $x_1 \in \mathbb{Q} \cap U_\varepsilon(x)$, $\exists x_2 \in \mathbb{I} \cap U_\varepsilon(x)$,

таким образом $\partial X = [0;1]$

$\mu(\partial X) = m([0;1]) = 1 \neq 0$

Отсюда X неизмеримо по критерию

2) точек квадрата $[0;1] \times [0;1]$, имеющих

рациональные координаты ($X = \{x\} = (x_1, x_2) \mid$

$x_1 \in [0;1] \cap \mathbb{Q}$, $x_2 \in [0;1] \cap \mathbb{Q}\}$)

Аналогично пункту 1: $\partial X = [0;1] \times [0;1]$

$\mu(\partial X) = \mu([0;1]\times[0;1]) = m([0;1]\times[0;1]) = 1 \neq 0$

$\mu(\partial X) \neq 0 \Rightarrow X$ неизмеримо по критерию.

3) $X = \{x = (x_1; x_2) \mid x_1 \in [0;1] \cap \mathbb{Q}, x_2 \in [0;1] \cap \mathbb{I}$ или $x_1 \in [0;1] \cap \mathbb{I}, x_2 \in [0;1] \cap \mathbb{Q}\}$

Док-во аналогично пунктам 1) и 2):

$\partial X = [0;1]\times[0;1] \Rightarrow \mu(\partial X) \neq 0 \Rightarrow X$ неизмеримо.

T1

$f(x;y) = \cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$, M - множество нулей f в круге R ($M = \{(x;y) \mid f(x;y) = 0,\ x^2+y^2 < R^2\}$)

Найдём нули f:

$f(x,y) = 0 \Rightarrow x^2+y^2 = \frac{1}{\pi(\frac{1}{2}+k)}$, $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ (т.к. $x^2+y^2>0$, $k \in \mathbb{N}$)

Обозначим $X_k = \{(x,y) \mid x^2+y^2 = \frac{1}{\pi(\frac{1}{2}+k)}\ \&\ x^2+y^2 < R^2\}$

$\mu(X_k) = 0$, т.к. X_k - окружность.

Очевидно, что $\lim\limits_{k\to\infty} X_k = \{(0;0)\}$

Рассмотрим $U_\varepsilon((0;0))$. За её пределами находится только конечное кол-во окружностей (такие $k \in \mathbb{N}$, которые удовлетворяют неравенствам

$\varepsilon^2 < \frac{1}{\pi(\frac{1}{2}+k)} < k^2$, обозначим множество за I)

Таким образом, $\mu^*(M) \leq \mu^*(U_\varepsilon((0;0)) \cup \{x \in X_k \mid k \in I\}) =$

$= \mu(U_\varepsilon((0;0))) + \mu(\{x \in X_k \mid k \in I\}) = \mu(U_\varepsilon((0;0)))$.

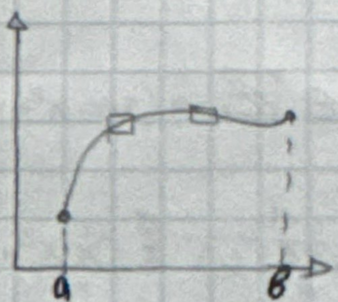
$\lim\limits_{\varepsilon \to 0} (U_\varepsilon((0;0))) = 0 \Rightarrow \mu^*(M) = 0$.

Как было показано, отсюда следует, что $\mu(M) = 0$, M измеримо по Жордану.

T2

Док-ть, что мера Жордана графика f-непрерывной на $[a;b]$ равна 0.

▷



Рассмотрим некоторый $\varepsilon_0 > 0$. По теореме Кантора f равномерно непрерывна на $[a;b]$. Т.е. $\exists \delta_0 > 0: \forall x_1, x_2 \in [a;b], |x_1 - x_2| < \delta_0 \mapsto |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon_0$.

Рассмотрим разбиение $\{\Delta i\}$ отрезка $[a;b]$, такое что $|\Delta i| < \delta_0$ $(i \in 1 \ldots n)$

Тогда график функции лежит в квадрате

$\Delta_i \times [\inf\limits_{\Delta_i} f; \sup\limits_{\Delta_i} f]$

Пусть M - график f. Тогда

$M \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} \Delta_i \times [\inf\limits_{\Delta_i} f; \sup\limits_{\Delta_i} f]$, отсюда

$\mu^*(M) \le \sum\limits_{i=1} |\Delta_i| \cdot (\sup\limits_{\Delta_i} f - \inf\limits_{\Delta_i} f) \le \sum\limits_{i=1}^{n} |\Delta_i| \cdot \varepsilon_0 =$
$= (b-a)\varepsilon_0.$

$\mu^*(M) \le (b-a)\varepsilon_0.$

В силу произвольности ε_0: $\mu^*(M)=0$, отсюда M-измеримо по Жордану, $\mu(M)=0$.

С2 §6 №7

Найти $\int\limits_a^b \frac{dx}{x}$ как предел интегральных сумм.

Обозначим $q=\sqrt[n]{\frac{b}{a}}$. $(q>1)$

Рассмотрим разбиение на отрезки

$\Delta_i = [aq^i; aq^{i+1}]$, $i \in \{0 \dots (n-1)\}$

$\sigma_* = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{aq^i(q-1)}{aq^{i+1}} = \sum\limits_{i=1}^{n} (1-\frac{1}{q}) = n(1-\sqrt[n]{\frac{a}{b}})$

$\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_* = \lim\limits_{n\to\infty} n(1-(\frac{a}{b})^{1/n}) = \lim\limits_{t\to\infty} \frac{1-(\frac{a}{b})^t}{t} = \lim\limits_{t\to\infty} \frac{1-1-\ln\frac{a}{b}t+o(t)}{t} =$

$= \ln\frac{b}{a}$. Аналогично. $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma^* = \ln\frac{b}{a}$.

$\sigma_* \le \sigma \le \sigma^*_*$. По теореме о двух милиционерах $\lim_{n\to\infty}\sigma = \ln\frac{b}{a}$, т.е. при некотором разбиении существует предел σ, равный $\ln\frac{b}{a}$, значит $\int_a^b \frac{dx}{x} = \ln\frac{b}{a}$.

С3 §6 №4 (2)

Вычислить $\int_0^{\pi/2} \sin x\,dx$ как предел интегральных сумм.

$\sin x$ - непрерывна на $[0;\frac{\pi}{2}]$ => можно выбирать любое разбиение $\mathbb{T}_n$ такое, что $|\mathbb{T}_n| \to 0$

Разобьём $[0;\frac{\pi}{2}]$ на n равных отрезков длиной $\frac{\pi}{2n}$, в качестве точек ξ_i будем выбирать $\frac{\pi}{2n}i$

$$\sigma_{\mathbb{T}_n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\pi}{2n}\sin\frac{\pi i}{2n} = \frac{\pi}{2n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{\pi i}{2n}.$$

Найдём $\sum_{i=1}^{n}\sin i\alpha$

Положим, что $\sum_{i=1}^{n}\sin i\alpha = \frac{\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}\sin\frac{n\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$

База: $\sum_{i=1}^{1}\sin i\alpha = \sin\alpha = \frac{\sin\frac{2\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$ - верно

Для $n+1$:

$$\sum_{i=1}^{n+1}\sin i\alpha = \frac{\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}\sin\frac{n\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} + \sin((n+1)\alpha) =$$

$$= \frac{\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}\sin\frac{n\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} + 2\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}\cos\frac{(n+1)\alpha}{2} =$$

$$= \frac{\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}\left[\sin\frac{n\alpha}{2} + 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{(n+1)\alpha}{2}\right] =$$

$$= \frac{\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} \cdot \sin\frac{(n+2)\alpha}{2} = \frac{\sin\frac{(n+2)\alpha}{2}\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ предположение верно.

Таким образом, $\sigma_{T_n} = \frac{\pi}{2n}\frac{\sin(n+1)\cdot\frac{\pi}{4n}\cdot\sin n\cdot\frac{\pi}{4n}}{\sin\frac{\pi}{4n}} =$

$$= \frac{\pi}{2n}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2n}\right)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sin\left(\frac{\pi}{4n}\right)}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_{T_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{4n}}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4n}\right) =$$

$$= 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 1.$$

Таким образом, $\int_0^{\pi/2}\sin x\,dx = 1$.

C2 §6 №22

Док-ть, что $f(x) = \mathrm{sign}(\sin\frac{\pi}{x})$ интегрируема на $[0;1]$

Рассмотрим произвольный $\varepsilon > 0$.

Пусть $k = \lfloor\frac{1}{\varepsilon}\rfloor$, $\delta = \frac{\varepsilon^2}{2}$.

Рассмотрим разбиение $\mathbb{T}=\{[0;\frac{1}{k+1}];[\frac{1}{k}-\frac{\delta}{2};\frac{1}{k}+\frac{\delta}{2}],$ $[\frac{1}{k-1}-\frac{\delta}{2};\frac{1}{k-1}+\frac{\delta}{2}];[\frac{1}{k-2}-\frac{\delta}{2};\frac{1}{k-2}+\frac{\delta}{2}];\ldots[\frac{1}{2}-\frac{\delta}{2};\frac{1}{2}+\frac{\delta}{2}],$ $[1-\delta;1]\}$, "остальные отрезки"$\}$

$\cancel{\sum_{i=1}^{k+1}\omega_i(f)<\Delta_i}$

Пусть n – кол-во отрезков в разбиении.

$\omega_1(f,\mathbb{T})=2$, т.к. на этом множестве бесконечно много чисел вида $\frac{1}{n}$, где $n\in\mathbb{N}$, в которых f меняет свой знак.

Аналогично для остальных отрезков, явно указанных в разбиении.

$\omega_\Delta(f,\mathbb{T})=0$ для всех отрезков кроме упомянутых.

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i(f,\mathbb{T})|\Delta i|\leq\sum_{i=1}^{k}\delta\cdot 2=2k\delta<2\frac{\delta}{2}=\varepsilon$$

Таким образом $\forall\varepsilon>0\ \exists\mathbb{T}:\sum_{i=1}^{n}\omega_i(f,\mathbb{T})|\Delta i|<\varepsilon$ $\Big|\Rightarrow$

f – ограничена на $[0;1]$

$\Rightarrow f$ – интегрируема на $[0;1]$.

С2 §6 №24

Док-ть, что $f = \begin{cases} 1, x \in \mathbb{Q} \\ 0, x \in \mathbb{I} \end{cases}$ на любом $[a;b]$

неинтегрируема по Риману.

~~Рассмотрим произвольное разбиение отрезка~~

~~$\mathbb{T} = \{\Delta_i \mid i \in \overline{1 \ldots n}\}$~~

Рассмотрим $\varepsilon = \frac{b-a}{2}$

Рассмотрим произвольное разбиение отрезка

$\mathbb{T} = \{\Delta_i \mid i \in \overline{1 \ldots n}\}$

$$\sigma_* = \sum_{i=1}^{n} |\Delta_i| \cdot \inf_{\Delta_i} f = 0$$

$$\sigma^* = \sum_{i=1}^{n} |\Delta_i| \cdot \sup_{\Delta_i} f = \sum_{i=1}^{n} |\Delta_i| = b-a$$

Таким образом $\forall \mathbb{T} \mapsto \sigma^* - \sigma_* = b-a > \frac{b-a}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow f$ неинтегрируема на любом отрезке $[a;b]$

(по критерию Дарбу)

С2 §6 №24

$|f(x)|$-интегрируема на отрезке

Будет ли интегрируема $f(x)$ на этом отрезке?

Воспользуемся критерием Дарбу:

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \mathbb{T} : |\sigma^* - \sigma_*| < \varepsilon$

Здесь $\sigma^* = \sum_{i=1}^{n} \sup_{\Delta_i}|f|\cdot|\Delta_i|$, $\sigma_* = \sum_{i=1}^{n} \inf_{\Delta_i}|f|\cdot|\Delta_i|$

Рассмотрим произвольный $\varepsilon>0$.

Из критерия Дарбу для $|f|$ находим разбиение $\mathbb{T}: |\sigma^*-\sigma_*|<\varepsilon$.

~~Добавление в $\mathbb{T}$ точек, в которых f меняет знак не меняет условие выполнения этого неравенства.~~

Для f: $|\sigma^{*\prime}-\sigma_*'| = \sum_{i=1}^{n}(\sup_{\Delta_i} f - \inf_{\Delta_i} f)\cdot|\Delta_i| <$

$< \sum_{i=1}^{n}(\sup_{\Delta_i}|f| - \inf_{\Delta_i}|f|)\,|\Delta_i| = |\sigma^*-\sigma_*| < \varepsilon$.

Таким образом $\forall \varepsilon>0\ \exists \mathbb{T}: |\sigma^*(f)-\sigma_*(f)|<\varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow f$ интегрируема на рассматриваемом отрезке по критерию Дарбу.

С2 §6 Д40

$|f(x)|$ - интегрируема по Риману на некотором отрезке.

Будет ли $f(x)$ интегрируема на этом отрезке?

Рассмотрим $f(x)=\begin{cases}1, x\in\mathbb{Q}\\ -1, x\in\mathbb{I}\end{cases}$.

$|f(x)|$ очевидно интегрируема на $[0;1]$ $(|f(x)|=1)$

Рассмотрим $\mathbb{T}=\{\Delta_i \mid i=\overline{1\ldots n}\}$

$$\sigma^*=\sum_{i=1}^{n}\sup_{\Delta_i} f\cdot|\Delta_i|=\sum_{i=1}^{n}|\Delta_i|=1$$

$$\sigma_*=\sum_{i=1}^{n}\inf_{\Delta_i} f\cdot|\Delta_i|=-1$$

Т.е. $\exists\varepsilon>0:\ \forall\mathbb{T}\mapsto|\sigma^*-\sigma_*|=2>\varepsilon\Rightarrow$

$\Rightarrow f$ неинтегрируема.

Таким образом из интегрируемости $|f(x)|$ не следует интегрируемость $f(x)$

C2 §6 D54 (4)

Найти производную $\frac{d}{dx}\int\limits_0^{x^2}\sqrt{1+t^2}\,dt$

$$F(x)=\int\limits_0^{x}\sqrt{1+t^2}\,dt,\quad F'(x)=\sqrt{1+x^2}$$

$$\int\limits_0^{x^2}\sqrt{1+t^2}\,dt=F(x^2)\Rightarrow\frac{d}{dx}\int\limits_0^{x^2}\sqrt{1+t^2}\,dt=2x\cdot F'(x^2)=$$

$$=2x\sqrt{1+x^4}$$

С2 §6 №93

Найти интеграл:

$$\int_0^1 \frac{dx}{e^x+e^{-x}} = \left\{ \begin{matrix} e^x = t \\ dx = \frac{dt}{t} \end{matrix} \right\} = \int_1^e \frac{dt}{t^2+1} = \operatorname{arctg} t \Big|_1^e =$$

$$= \operatorname{arctg} e - \frac{\pi}{4}.$$

С2 §6 №101

Найти интеграл:

$$\int_1^2 x \ln x \, dx = \left\{ \begin{matrix} u = \ln x \\ v = \frac{x^2}{2} \end{matrix} \right\} = \frac{x^2}{2} \ln x \Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{x^2}{2} \cdot \frac{dx}{x} =$$

$$= 2\ln 2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_1^2 = 2\ln 2 - \frac{3}{4}.$$

С2 §6 №117

Док-ть равенство: $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} \right) = \ln 2$, использовав интеграл $\int_1^2 \frac{dx}{x}$.

$\int_1^2 \frac{dx}{x}$ существует и равен $\ln 2$.

Отсюда $\forall T$: $\int_1^2 \frac{dx}{x} = \cancel{\sum} \lim\limits_{n\to\infty} \cancel{\frac{q_{i+1}-q_i}{\xi_i}} \sum_{i=1}^{n} \frac{q_{i+1}-q_i}{\xi_i}$.

Пусть $q_i = 1 + \frac{i}{n}$, $\cancel{q_{i+1}}$ $\xi_i = 1 + \frac{i}{n}$

Тогда $\ln 2 = \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{\frac{1}{n}}{1+\frac{i}{n}}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{n+i}$

Значит $\lim\limits_{n\to\infty}\cancel{\sum}\left(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\ldots+\dfrac{1}{2n}\right)=\ln 2.$

Сл §6 № 193

Найти интеграл:

$$\int_0^{100\pi}\sqrt{1-\cos 2x}\,dx = \int_0^{100\pi}\sqrt{1-1+2\sin^2 x} = \int_0^{100\pi}\sqrt{2}\,|\sin x|\,dx =$$

$$=\sqrt{2}\cdot 100\int_0^{\pi}\sin x\,dx = 100\sqrt{2}\cdot(-\cos x)\Big|_0^{\pi} = 200\sqrt{2}.$$

Сл §10 № 50 (3,4)

Док-ть неравенство:

3) $\dfrac{1}{3} < \displaystyle\int_0^1 3^{-x}\arccos x\,dx < 1$

$\dfrac{\arccos x}{3} < \dfrac{\arccos x}{3^x} < \arccos x$ при $x\in(0;1]$ =>

$$\Rightarrow \frac{1}{3}\int_0^1 \arccos x\,dx < \int_0^1 3^{-x}\arccos x\,dx < \int_0^1 \arccos x\,dx \quad (1)$$

Найдём $\displaystyle\int_0^1 \arccos x\,dx = x\arccos x\Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} =$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{d(x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = \left\{\begin{array}{l}\sqrt{1-x^2}=t\\ x^2=1-t^2\end{array}\right\} = -\frac{1}{2}\int_1^0\frac{2t\,dt}{t} = \frac{1}{2}\cdot 2\int_0^1 dt = 1.$$

Подставляя в (1): $\dfrac{1}{3} < \displaystyle\int_0^1 3^{-x}\arccos x\,dx < 1.$

Т3

а) f имеет первообразную на $[a;b]$. Верно ли что f интегрируема на $[a;b]$?

Рассмотрим $F(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ на $[0;1]$

$F'(x) = x^2 \cdot \left(-\frac{2}{x^3}\right)\cos\frac{1}{x^2} + 2x\sin\frac{1}{x^2} = 2x\sin\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2}$

при $x \neq 0$

$F'(0) = \lim\limits_{\Delta\to 0} \frac{\Delta^2 \sin\frac{1}{\Delta^2}}{\Delta} = \lim\limits_{\Delta\to 0} \Delta\cdot\sin\frac{1}{\Delta^2} = 0$

$f = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ 2x\sin\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2}, & x \neq 0. \end{cases}$

f имеет первообразную, однако f неинтегрируема на $[0;1]$, т.к. она неограничена.

б) f интегрируема на $[a;b]$ Верно ли, что F имеет первообразную на $[a;b]$.

$f(x) = \text{sign}(x)$ на $[-1;1]$

Несложно показать, что f интегрируема на $[-1;1]$

Пусть F - первообразная f. Тогда

$F = x + c$ на $(0;1)$ и $F = -x + c$ на $[-1;0)$.

F – непрерывна на [-1;1] =>

$$\lim_{x\to 0-0} F(x) = \lim_{x\to 0+0} F(x) = F(0) = C$$

Таким образом $F(x) = |x| + C$, однако она не дифференцируема в точке $x=0$ => f не имеет первообразной всюду на [-1;1]

в) f интегрируема на $[a;b]$ и имеет первообразную F на $[a;b]$. Док-ть: $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

Рассмотрим $F(x) = \int_c^x f(t)dt$

$F'(x) = f(x)$ => F – первообразная

$$\int_a^b f(t)dt = \int_c^b f(t)dt - \int_c^a f(t)dt = F(b) - F(a)$$

Тч

Док-ть: $\left|\int_a^b \frac{\sin x}{x}dx\right| \le \frac{2}{a}$

$$\left|\int_a^b \frac{\sin x}{x}dx\right| = \left|-\frac{\cos x}{x} + \int_a^b \frac{\cos x}{x^2}dx\right| \le \left|\frac{\cos b}{b} - \frac{\cos a}{a}\right| +$$

$$+ \left|\int_a^b \frac{\cos x}{x^2}dx\right| \le \frac{1}{b} + \frac{1}{a} + \int_a^b \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_a^b =$$

$$= \frac{2}{a}$$

2 неделя

С2 §7 № 4(5)

Найти площадь фигуры ограниченной кривыми:

$2y=x^2$, $2y \geq x^2$ (1)

$x^2+y^2=4y$ (2)

(1) - парабола, проходящая через (0;0)

(2) - окружность с центром (0;2) и радиусом 2.

Докажем, что на отрезке [-2;2] парабола лежит выше нижней дуги окружности:

$y_1=\frac{x^2}{2}$ - ордината точки параболы с абсциссой x.

$y_2=2-\sqrt{4-x^2}$ - ордината точки нижней дуги окружности с абсциссой x.

$y_1 \geq y_2$:

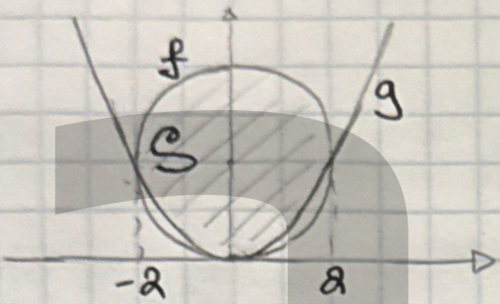
$\frac{x^2}{2} \geq 2-\sqrt{4-x^2}$

$\sqrt{4-x^2} \geq 2-\frac{x^2}{2}$

$4-x^2 \geq 4-2x^2+\frac{x^4}{4}$

$x^2 \le 4 \Rightarrow x \in [-2;2]$

В точках $(0;0)$, $(-2;2)$ и $(2;2)$ графики пересекаются.



Таким образом фигура имеет вид, как на рисунке

Искомая площадь $S=\int_{-2}^{2} f(x)dx - \int_{-2}^{2} g(x)dx$.

$f(x)=2+\sqrt{4-x^2}$ – верхняя дуга окружности

$g(x)=\frac{x^2}{2}$

$$S=\int_{-2}^{2} 2dx + \int_{-2}^{2} 2\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}dx - \int_{-2}^{2} \frac{x^2dx}{2} = 2(2+2)+$$

$$+2\cdot 2\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,dt - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_{-2}^{2} =$$

$$=8+4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt - \frac{1}{6}(8+8) = \frac{16}{3}+4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2t}{2}db =$$

$$=\frac{16}{3}+\int_{-\pi}^{\pi}(1+\cos t)dt = \frac{16}{3}+2\pi.$$

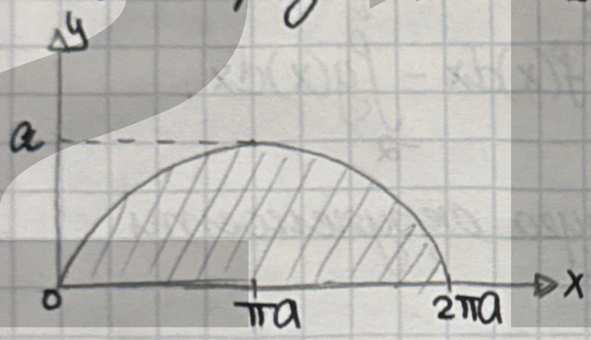
Ответ: $S=\frac{16}{3}+2\pi$

C2 §7 №26

Найти площадь фигуры, ограниченной аркой циклоиды

$$\begin{cases} x=a(t-\sin t) \\ y=a(1-\cos t) \end{cases}, \ 0\le t\le 2\pi,$$

на отрезке $[0;2\pi a]$



$$S=\int_0^{2\pi}y(t)\,x'(t)\,dt=\int_0^{2\pi}a^2(1-\cos t)^2dt=$$

$$=a^2\int_0^{2\pi}(1+\cos^2 t)\,dt-2a^2\int_0^{2\pi}\cos t\,dt=$$

$$=a^2\int_0^{2\pi}1+\frac{1+\cos 2t}{2}\,dt=\frac{a^2}{2}\left(6\pi+\frac{1}{2}\int_0^{4\pi}\cos t\,dt\right)=3\pi a^2.$$

C2 §7 №33 (3)

Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми, заданными в полярных координатах

$r=a(1+\cos\varphi)$

$$S=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}r^2d\varphi=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}a^2(1+\cos\varphi)d\varphi=\frac{1}{2}a^2\int_0^{2\pi}(1+\cos^2\varphi)d\varphi+$$

$$+2\cdot\frac{1}{2}a^2\int_0^{2\pi}\cos\varphi d\varphi=\frac{1}{2}a^2\left[2\pi+\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos 2\varphi\, d\varphi\right]=$$

$$=\frac{3a^2\pi}{2}+\frac{1}{4}a^2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{4\pi}\cos\varphi d\varphi=\frac{3}{2}\pi a^2.$$

С2 §7 069 (11)

Найти длину дуги кривой.

$y=\ln(1+\sin x)$, $|x|\le\frac{1}{2}$. $0\le x\le\frac{\pi}{2}$

$$l=\int_0^{\pi/2}\sqrt{1+\left(\frac{\cos x}{1+\sin x}\right)^2}\,dx=\int_0^{\pi/2}\sqrt{\frac{1+2\sin x+1}{1-\sin x}}\,dx=$$

$$=\sqrt{2}\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{\sqrt{1+\sin x}}=$$

$$=\sqrt{2}\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{\sqrt{1-\cos(\frac{\pi}{2}+x)}}=\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2})}=$$

$$=\left\{\begin{matrix}\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}=t\\ x=0\Rightarrow t=\frac{\pi}{4},\ x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=\frac{\pi}{2}\end{matrix}\right\}=2\int_{\pi/4}^{\pi/2}\frac{dt}{\sin t}=2\int_{\pi/4}^{\pi/2}\frac{dt}{\sin t}=$$

Рассмотрим $F(t)=\ln\left(\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right)$

$F'(t)=\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{t}{2}}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{t}{2}}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{\sin t}\Rightarrow F$ - первообразная $\frac{1}{\sin t}$

$= 2\ln\left(tg\frac{t}{2}\right)\Big|_{\pi/4}^{\pi/2} = 2\ln\left(tg\frac{\pi}{4}\right) - 2\ln\left(tg\frac{\pi}{8}\right) =$

$= 2\ln\left(ctg\frac{\pi}{8}\right) = 2\ln\left(\sqrt{\frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}}\right) = 2\ln\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}} =$

$= 2\ln(\sqrt{2}+1).$

С2 §7 272(3)

Найти длину дуги циклоиды:

$x = a(t - \sin t),\ y = a(1-\cos t),\ 0 \le t \le 2\pi$

$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,dt = \int_0^{2\pi} a\sqrt{(1-\cos t)^2 + \sin^2 t}\,dt =$

$= a\int_0^{2\pi} \sqrt{1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t}\,dt = \sqrt{2}a \cdot \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\sqrt{\frac{1-\cos t}{2}}\,dt$

$= 2a\int_0^{2\pi} \left|\sin\frac{t}{2}\right| dt = \left\{ \alpha = \frac{t}{2} \right\} = 2a\int_0^{\pi} \sin\alpha\, d\alpha \cdot 2 =$

$= 4a\int_0^{\pi} \sin t\,dt = 4a(-\cos t)\Big|_0^{\pi} = 8a.$

С2 §7 282(3)

Найти длину дуги кардиоиды:

$r = a(1-\cos\varphi)$

$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 + r'^2}\,d\varphi = \int_0^{2\pi} a\sqrt{(1-\cos\varphi)^2 + \sin^2\varphi}\,d\varphi.$

Этот интеграл такой же, как для длины дуги циклоида (С2 §7 №72 (3))

Ответ: $l=8a$.

С2 §8 №12 (1)

Найти: V^{OX}, V^{OY} - объёмы при вращении ~~прямой~~ кривой

$y=(x-a)(x-b)$, $y=0$, $b>a>0$

$$V^{ox}=\pi\int_a^b y^2\,dx=\pi\int_a^b (x-a)^2(x-b)^2\,dx=\left\{\begin{matrix} x-a=t \\ b-a=\Delta\end{matrix}\right\}=$$

$$=\pi\int_a^b (x^2-2ax+a^2)(x^2-2bx+b^2)\,dx=\pi\int_a^b (x^4-2bx^3+b^2x^2-2ax^3+$$

$$+4abx^2-2ab^2x+a^2x^2-2a^2bx+a^2b^2)\,dx=$$

$$=\int_a^b \pi(x^4-2(a+b)x^3+(b^2+4ab+a^2)x^2-2ab(a+b)x+a^2b^2)\,dx=$$

$$=\pi\left[\frac{b^5-a^5}{5}-2(a+b)(b^4-a^4)\frac{1}{4}+(a^2+4ab+b^2)(b^3-a^3)\frac{1}{3}-\right.$$

$$\left.-2ab(a+b)(b^2-a^2)\cdot\frac{1}{2}+a^2b^2(b-a)\right]=$$

$$=\pi(b-a)\left[\frac{1}{5}(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4)-\frac{1}{2}(a+b)(a^3+a^2b+ab^2+\right.$$

$$+b^3)$$

$$= \pi\int_0^\Delta t^2(t-\Delta)^2\,dt = \pi\int_0^\Delta (t^4 - 2\Delta t^3 + \Delta^2 t^2)\,dt =$$

$$= \pi\left[\frac{\Delta^5}{5} - 2\Delta\cdot\frac{\Delta^4}{4} + \Delta^2\cdot\frac{\Delta^3}{3}\right] = \pi\Delta^5\left[\frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right] =$$

$$= \frac{1}{30}\pi(b-a)^5$$

$$\cancel{\frac{1}{2}V^{oy} = \pi\int_0^{y_1} y^2\,dx = y^2 x\Big|_0^{y_1/2}}$$

$$V^{oy} = \pi\int_\alpha^\beta (x(t))^2\cdot y'(t)\,dt = \{x = t\} =$$

$$= \pi\int_a^b x^2(2x-(a+b))\,dx = \pi\int_a^b (2x^3-(a+b)x^2)\,dx =$$

$$= \pi\left[2\,\frac{b^4-a^4}{4} - (a+b)\cdot\frac{b^3-a^3}{3}\right] = \pi(b^2-a^2)\left(\frac{1}{2}(a^2+b^2) - \frac{1}{3}(a^2+ab+b^2)\right) = \frac{1}{6}\pi(b^2-a^2)(a-b)^2 = \frac{1}{6}\pi(a+b)(b-a)^3$$

С2 §8 №13(2)

Найти объём эллипсоида, образованного вращением $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ вокруг Oy:

$$V^{oy} = \pi\int_\alpha^\beta x^2(t)\,y'(t)\,dt$$

Параметрическое ур-ие эллипса:

$x = a\cos t$ $y = b\sin t$.

$$V^{Oy} = \pi\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} a^2\cos^2 t\cdot b\cos t\,dt = \pi a^2 b\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^3 t\,dt \ominus$$

$$\cos 3t = (2\cos^2 t - 1)\cos t - 2(1-\cos^2 t)\cos t =$$
$$= 4\cos^3 t - 3\cos t$$

$$\ominus\ \pi a^2 b\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{1}{4}(\cos 3t + 3\cos t)\,dt = \frac{\pi a^2 b}{4}\left[\frac{1}{3}\int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\cos t\,dt + 3\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos t\,dt\right] = \frac{\pi a^2 b}{4}\left[\frac{1}{3}\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\cdot 2 + 3\sin\frac{\pi}{2}\cdot 2\right] =$$
$$= \frac{\pi a^2 b}{2}\left[-\frac{1}{3} + 3\right] = \frac{4}{3}\pi a^2 b.$$

С2 §8 №82(4,5)

Найти площадь поверхности, образованной при вращении вокруг Oy.

~~2) $4x + 2\ln y = y^2,\ e^{-1}\le y\le e$~~

4) $3x = 4\cos y,\ -\frac{\pi}{2}\le y\le 0$

$$S = 2\pi\int\limits_{-\pi/2}^{0}|x(y)|\sqrt{1+(x'(y))^2}\,dy = 2\pi\int\limits_{-\pi/2}^{0}\frac{4}{3}\cos y\sqrt{1+\frac{16}{9}\sin^2 y}\,dy =$$

$$= \left\{\begin{matrix} t = -\frac{4}{3}\sin y \\ dt = -\frac{4}{3}\cos y\,dy\end{matrix}\right\} = -2\pi\int\limits_{\frac{4}{3}}^{0}\sqrt{1+t^2}\,dt = 2\pi\int\limits_{0}^{4/3}\sqrt{1+t^2}\,dt =$$

$$= \left\{\begin{matrix} t = \operatorname{sh}\alpha \\ dt = \operatorname{ch}\alpha\,d\alpha,\ 1+t^2 = \operatorname{ch}^2\alpha\end{matrix}\right\} = 2\pi\int\limits_{0}^{\operatorname{arsh}\frac{4}{3}}\operatorname{ch}^2\alpha\,d\alpha =$$

$$= \pi \int_0^{\operatorname{arcsh}\frac{4}{3}} (1+\operatorname{ch}2\alpha)\,d\alpha = \pi\left(\operatorname{arcsh}\frac{4}{3} + \frac{1}{2}\int_0^{2\operatorname{arcsh}\frac{4}{3}} \operatorname{ch}\alpha\, d\alpha\right) =$$

$$= \pi\left(\operatorname{arcsh}\frac{4}{3} + \frac{1}{2}\operatorname{sh}\left(2\operatorname{arcsh}\frac{4}{3}\right)\right) =$$

$$= \pi\left(\operatorname{arcsh}\frac{4}{3} + \operatorname{sh}\left(\operatorname{arcsh}\frac{4}{3}\right)\operatorname{ch}\left(\operatorname{arcsh}\frac{4}{3}\right)\right) =$$

$$= \pi\left(\operatorname{arcsh}\frac{4}{3} + \frac{4}{3}\sqrt{1+\frac{16}{9}}\right) = \frac{\pi}{9}\left(9\operatorname{arcsh}\frac{4}{3} + 20\right) =$$

Пусть $e^{\operatorname{arcsh}\frac{4}{3}} = t$, тогда

$$\frac{t-\frac{1}{t}}{2} = \frac{4}{3}$$

$$3t - \frac{3}{t} = 8$$

$$3t^2 - 8t - 3 = 0$$

$$D = 4\cdot 16 + 4\cdot 9 = 100$$

$$t = \frac{8 \pm 10}{6} = 3 \Rightarrow \operatorname{arcsh}\frac{4}{3} = \ln 3$$

$$= \frac{\pi}{9}(9\ln 3 + 20)$$

5) $y^2 = 2(x-1)$, $0 \le y \le 1$

$$S = 2\pi\int_0^1 |x(y)|\sqrt{1+(x'(y))^2}\,dy = 2\pi\int_0^1\left(\frac{1}{2}y^2+1\right)\sqrt{1+y^2}\,dy =$$

$$= \left\{ y = \operatorname{sh}t \right\} = 2\pi\int_0^{\operatorname{arcsh}1}\left(\frac{1}{2}\operatorname{sh}^2t+1\right)\operatorname{ch}t\cdot\operatorname{ch}t\,dt = 2\pi\int_0^{\operatorname{arcsh}1}\left(\frac{1}{2}\operatorname{sh}^2t+1\right)(\operatorname{sh}^2t+1)\,dt =$$

$$= \pi\int_0^{\operatorname{arcsh}1}(\operatorname{sh}^4t+3\operatorname{sh}^2t+2)\,dt = \pi\left[2\operatorname{arcsh}1 + \int_0^{\operatorname{arcsh}1}(\operatorname{sh}^4t+3\operatorname{sh}^2t)\,dt\right] =$$

$$= \left\{ ch2t = 2ch^2t - 1 = 2sh^2t + 1 \right\} = \pi \Big[2arcsh1 +$$

$$+ \int_0^{arcsh1} \frac{1}{4}(ch2t-1)^2 dt + \frac{3}{2}\int_0^{arcsh1}(ch2t-1)dt \Big] =$$

$$= \pi \Big[2arcsh1 + \frac{1}{4}\int_0^{arcsh1} ch^2 2t\,dt - \frac{1}{2}\int_0^{arcsh1} ch2t\,dt + \frac{1}{4}arcsh1 +$$

$$+ \frac{3}{2}\int_0^{arcsh1} ch2t\,dt - \frac{3}{2}arcsh1 \Big] = \pi \Big[\frac{3}{4}arcsh1 +$$

$$+ \frac{1}{8}\int_0^{arcsh1}(1+ch4t)dt + \frac{1}{2}\int_0^{2arcsh1} ch2t\,d(2t) \Big] =$$

$$= \pi \Big[\frac{7}{8}arcsh1 + \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{4}\int_0^{4arcsh1} ch4t\,d(4t) + \frac{1}{2}\cdot 2sh(arcsh1)\cdot$$

$$\cdot ch(arcsh1) \Big] = \frac{\pi}{8}\Big[7arcsh1 + \frac{1}{4}\cdot 2sh(2arcsh1)\cdot$$

$$\cdot ch(2arcsh1) + 8\sqrt{2} \Big] = \frac{\pi}{8}\Big[7arcsh1 + \sqrt{2}(2+1) + 8\sqrt{2} \Big] =$$

$$= \frac{\pi}{8}\left(7\ln(1+\sqrt{2}) + 11\sqrt{2}\right)$$

3 неделя

С2 §11 №57

Исследовать на сходимость:

$$\int_0^8 \frac{dx}{x^2+\sqrt[3]{x}} \sim \int_0^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \int_0^8 \frac{dx}{x^{1/3}} \Rightarrow$$ сходится ~~расходится~~ по теореме сравнения

С2 §11 №59

Исследовать на сходимость:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[5]{1-x^{10}}} = \left\{ x=\alpha+1 \right\} \approx \int_{-1}^0 \frac{d\alpha}{\sqrt[5]{1-1-10\alpha+\bar{o}(\alpha)}} \sim$$

$$\sim \int_{-1}^0 \frac{d\alpha}{(-10\alpha)^{1/5}} \Rightarrow$$ сходится по теореме сравнения.

С2 §11 №62

Исследовать на сходимость:

$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{\sqrt[3]{\sin x}}$. Интеграл неопределён ~~при *~~ в точках

$x=0, \pi, 2\pi \; (\sin x = 0)$

Сходимость этого интеграла равносильна

сходимости $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt[3]{\sin x}}$, т.к.

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{\sqrt[3]{\sin x}} = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt[3]{\sin x}} + \int\limits_{\pi/2}^{\pi} \frac{dx}{\sqrt[3]{\sin x}} + \int\limits_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt[3]{\sin x}} + \int\limits_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \frac{dx}{\sqrt[3]{\sin x}} =$$

$$= \int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt[3]{\sin x}} - \int\limits_{\pi/2}^{0} \frac{dx}{\sqrt[3]{\sin x}} + \int\limits_0^{\pi/2} \frac{-dx}{\sqrt[3]{\sin x}} + \int\limits_{\pi/2}^{0} \frac{-dx}{\sqrt[3]{\sin x}} =$$

$$= \int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt[3]{\sin x}} = \sim \int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{x^{1/3}}$$ => сходится по теореме сравнения

С2 § 11 № 73

Исследовать на сходимость:

$$\int\limits_0^{\pi} \frac{\ln \sin x}{\sqrt[3]{x}} dx \sim \int\limits_0^{\pi} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}} dx = \int\limits_0^{\pi} \frac{dx}{x^{1/3} \ln^{-1} x} =>$$

=> сходится по теореме сравнения.

С2 § 11 № 98

Определить α и β при которых сходится:

$$\int\limits_0^{\pi/2} \sin^{\alpha} x \cos^{\beta} x \, dx = \int\limits_0^{\pi/4} \sin^{\alpha} x \cos^{\beta} x \, dx + \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \sin^{\alpha} x \cos^{\beta} x \, dx \sim$$

$$\sim \int\limits_0^{\pi/4} x^{\alpha} dx + \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \left(\cancel{\quad} \frac{x^2}{2} \cos^{\beta} x \, dx = \int\limits_0^{\pi/4} x^{\alpha} dx - \int\limits_{\pi/4}^{0} \sin^{\beta} x \, dx \sim$$

$$\sim \int_0^{\pi/4} x^{\alpha} dx + \int_0^{\pi/4} x^{\beta} dx = \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{x^{-\alpha}} + \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{x^{-\beta}}$$

Сходится при $\begin{cases} -\alpha < 1 \\ -\beta < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha > -1 \\ \beta > -1 \end{cases}$

(по теореме сравнения)

С2 §12 №66

Исследовать на сходимость:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{1+x^7}} \sim \int_0^{+\infty} \frac{x\,dx}{x^{7/3}} = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^{4/3}} \Rightarrow$$ сходится по теореме сравнения.

С2 §12 №68

Исследовать на сходимость:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx = \int_0^1 \frac{\sin^2 x}{x} dx + \int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx$$

1) $\int_0^1 \frac{\sin^2 x}{x} dx \sim \int_0^1 \frac{x^2}{x} dx = \int_0^1 x\,dx \Rightarrow$ сходится по теореме сравнения.

2) $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx = \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \frac{1-\cos 2x}{x} dx = \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx - \int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{2x} dx$

$$\cancel{\int_1^x \sin^2 t\,dt = \int_1^x \frac{1-\cos 2t}{2}\,dt = \frac{1}{4}\int_2^{2x}(1-\cos t)\,dt =}$$

$$\cancel{= \frac{1}{4}(2x-2)}$$

$\int_1^{+\infty} \frac{1}{2x}\,dx$ – расходится

$\int_1^{x} \cos 2t\,dt$ – ограниченная

$\frac{1}{2x}$ – монотонна и стремится к 0 $\Rightarrow$

$\Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{2x}\,dx$ расходится по признаку Дирихле

Тогда и $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x}\,dx$ расходится

Отсюда $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x}\,dx$ расходится.

<u>С2 §12 о101</u>

Найти $\alpha > 0$, при которых сходится:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x^\alpha + e^x)}{\sqrt{x^3+x^5}}\,dx = \int_0^{1} \frac{\ln(x^\alpha + e^x)}{\sqrt{x^3+x^5}}\,dx + \int_1^{+\infty} \frac{\ln(x^\alpha + e^x)}{\sqrt{x^3+x^5}}\,dx$$

1) $$\int_0^{1} \frac{\ln(x^\alpha + e^x)}{\sqrt{x^3+x^5}}\,dx \sim \int_0^{1} \frac{\ln(x^\alpha + 1 + x + \bar{o}(x))}{\sqrt{x^3+\bar{o}(x^3)}}\,dx \sim$$

$$\sim \int_0^{1} \frac{x + x^\alpha + \cancel{\bar{o}(x)}}{x^{3/2}}\,dx \sim \int_0^{1} \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}-\min\{1,\alpha\}}} \sim$$

$\alpha \geq 1$: $\sim \int_0^1 \frac{dx}{x^{1/2}}$ – сходится по теореме сравнения

$\alpha < 1$: $\sim \int_0^1 \frac{dx}{x^{3/2-\alpha}}$ – сходится при $\frac{3}{2} - \alpha \leq 1$ по теореме сравнения.

Таким образом, $\int_0^1 \frac{\ln(x^\alpha + e^x)}{\sqrt{x^3+x^5}}dx$ сходится при $\cancel{\alpha \in \left(\frac{1}{2}; 1\right) \cup (1; +\infty)}$ $\alpha > \frac{1}{2}$

2) $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x^\alpha + e^x)}{\sqrt{x^3+x^5}}dx \sim \int_1^{+\infty} \frac{\ln(e^x)}{x^{5/2}}dx \sim \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{3/2}}$ – сходится по теореме сравнения

Ответ: сходится при $\alpha > \frac{1}{2}$.

С2 §12 №104

Определить при каких α и β сходится

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha \ln^\beta x} = \int_1^{2} \frac{dx}{x^\alpha \ln^\beta x} + \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha \ln^\beta x}$$

1) $\int_1^{2} \frac{dx}{x^\alpha \ln^\beta x} = \int_0^{1} \frac{dt}{(t+1)^\alpha \ln^\beta (1+t)} \sim \int_0^{1} \frac{dt}{t^\beta}$ => сходится при $\beta < 1$ по теореме сравнения

2) $\displaystyle\int_{2}^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}\ln^{\beta}x}$ сходится при $\left[\begin{array}{l} \alpha>1 \\ \alpha=1, \beta>1 \end{array}\right.$

(1-2) $\Rightarrow \displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}\ln^{\beta}x}$ сходится при $\begin{cases} \alpha>1 \\ \beta<1. \end{cases}$

4 неделя

Сл § 12 о115

Исследовать на абсолютную и условную сходимость.

$$\int_0^{+\infty} \sin x^2 dx = \left\{ \begin{array}{l} y = x^2 \\ dx = \frac{dy}{2\sqrt{y}} \end{array} \right\} = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\sin y}{\sqrt{y}} dy$$

1) $\int_0^x \sin y dy = -\cos x + 1$ – ограниченная

2) $\frac{1}{\sqrt{y}}$ – монотонно стремится к нулю $\Rightarrow$

$\to \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\sin y}{\sqrt{y}} dy$ сходится (по признаку Дирихле)

$$\int_0^{+\infty} |\sin x^2| dx \geq \int_0^{+\infty} \sin^2 x^2 dx = \left\{ \begin{array}{l} y = x^2 \\ dx = \frac{dy}{2\sqrt{y}} \end{array} \right\} = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 y}{\sqrt{y}} dy =$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{+\infty} \frac{dy}{\sqrt{y}} - \frac{1}{4}\int_0^{+\infty} \frac{\cos 2y}{\sqrt{y}} dy$$

1) $\int_0^{+\infty} \frac{dy}{\sqrt{y}}$ расходится по теореме сравнения

2) $\int_0^{+\infty} \frac{\cos 2y}{\sqrt{y}} dy$ сходится (из признака Дирихле, $\int_0^x \cos 2y dy$ – ограниченная, $\frac{1}{\sqrt{y}}$ монотонно стремится к нулю)

Таким образом, $\int\limits_0^{+\infty} |\sin x^2|\,dx$ расходится

Ответ: сходится условно.

Сд §12 №120

Исследовать на абсолютную и условную сходимость:

$$\int\limits_1^{+\infty} \sin\left(\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right)\frac{dx}{\sqrt{x}} =$$

При $x \to \infty$: $\frac{\sin x}{\sqrt{x}} \to 0$. Разложим $\sin\left(\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right)$ в ряд Тейлора в точке 0

$$\cancel{= \int\limits_0^{+\infty}\left(\frac{\sin x}{\sqrt{x}} + \bar{o}\left(\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right)\right)\frac{dx}{\sqrt{x}} \sim}$$

$$\cancel{\sim \int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx}$$

$$= \int\limits_0^{+\infty}\left(\frac{\sin x}{\sqrt{x}} + R_3\left(\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right)\right)\frac{dx}{\sqrt{x}}$$

$$\left|R_3\left(\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right)\right| = \left|\frac{f'''(\xi)\cdot\left(\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right)^3}{3!}\right| \le \left|\frac{1}{x^{3/2}}\right|$$

$\int\limits_0^{+\infty}\left|\frac{dx}{x^2}\right|$ сходится $\Rightarrow$ $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\left|R_3\left(\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right)\right|}{\sqrt{x}}\,dx$ также сходится $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \int \frac{R_3\left(\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right)dx}{\sqrt{x}}$$ сходится.

Таким образом, ~~условная~~ сходимость исходного интеграла равносильна сходимости интеграла

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$$

~~Его~~ $\cancel{\int_0^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx}$.

Его сходимость следует из признака Дирихле ($\int_0^x \sin t\,dt$ - ограниченная, $\frac{1}{x}$ - монотонно стремится к нулю)

$$\int_0^{+\infty} \left|\sin\left(\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right)\right| \frac{dx}{\sqrt{x}} \sim \int_0^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right| \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|\,dx}{x} \geq$$

$$\geq \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos 2x}{x}\,dx = \underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x}}_{\text{расходится}} - \underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x}\,dx}_{\text{сходится}} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ исходный интеграл не сходится абсолютно

Ответ: сходится условно

С2 §12 0121

Исследовать на абсолютную и условную сходимость:

$$\int\limits_0^{+\infty} x^2 \sin\left(\frac{\cos x^3}{x+1}\right) dx \ominus$$

При $x \to +\infty$: $\frac{\cos x^3}{x+1} \to 0$. Разложим $\sin\left(\frac{\cos x^3}{x+1}\right)$ в ряд Тейлора в точке 0:

$$\cancel{\ominus \int\limits_0^{+\infty} x^2\left(\frac{\cos x^3}{x+1} + R_3(x)\right) dx = \int\limits_0^{+\infty} x^2 \frac{\cos x^3}{x+1} dx + \int\limits_0^{+\infty} x^2 R_3(x) dx}$$

~~Здесь $R_3(x)$ – остаточный член в форме Лагранжа~~

$$\cancel{|x^2 R_3(x)| \leq x^2 \cdot \frac{|\cos x^3|^3}{(x+1)^3}}$$

$$\ominus \int\limits_0^{+\infty} x^2\left(\frac{\cos x^3}{x+1} - \frac{1}{6}\left(\frac{\cos x^3}{x+1}\right)^3 + R_5(x)\right) dx$$

$$\int\limits_0^{+\infty} x^2 |R_5(x)| \leq \int\limits_0^{+\infty} \frac{x^2 |\cos^5 x^3|}{(x+1)^5} \leq \int\limits_0^{+\infty} \frac{x^2}{(x+1)^5} \leq \int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{(x+1)^3} -$$

– сходится абсолютно.

Таким образом, сходимость исходного

интеграла равносильна сходимости:

$$\int_0^{+\infty} x^2\left(\frac{\cos x^3}{x+1}-\frac{1}{6}\cdot\frac{\cos^3 x^3}{(x+1)^3}\right)dx$$

1) $\int_0^{+\infty}\frac{x^2\cos x^3}{x+1}dx$

1.1) $\int_0^{x} t^2\cos t^3 dt = \frac{1}{3}\int_0^{x^3}\cos t^3 d(t^3)=\frac{1}{3}\sin x^3$ -

- ограниченная

1.2) $\frac{1}{x+1}$ - монотонно стремится к 0 при $x\to+\infty$

(1.1-1.2) => $\int_0^{+\infty}\frac{x^2\cos x^3}{x+1}dx$ сходится по признаку

Дирихле

2) $\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{6}\cdot\frac{\cos^3 x^3}{(x+1)^3}dx=\frac{1}{6}\int_0^{+\infty}\frac{x^2\cos x^3}{(x+1)^3}dx-\frac{1}{6}\int_0^{+\infty}\frac{x^2\cos x^3\sin^2 x^3}{(x+1)^3}dx$

2.1) $\int_0^{+\infty}\frac{x^2\cos x^3}{(x+1)^3}dx$ сходится аналогично пункту 1

2.2) $\int_0^{x} t^2\cos t^3\sin^2 t^3=\frac{1}{9}\sin^3 x^3$ - ограниченная

$\frac{1}{(x+1)^3}$ - монотонно стремится к 0 =>

=> $\int_0^{+\infty}\frac{x^2\cos x^3\sin^2 x^3}{(x+1)^3}dx$ сходится по признаку Дирихле

$(2.1-2.2) \Rightarrow \int\limits_0^{+\infty} \frac{x^2}{6} \cdot \frac{\cos^3 x^3}{(x+1)^3} dx$ сходится, как сумма 2-ух сходящихся.

$(1-2) \Rightarrow \int\limits_0^{+\infty} x^2 \sin\left(\frac{\cos x^3}{x+1}\right) dx$ сходится.

3) $$\int\limits_0^{+\infty} \left| x^2 \left(\frac{\cos x^3}{x+1} - \frac{1}{6} \frac{\cos^3 x^3}{(x+1)^3} \right) \right| dx = \int\limits_0^{+\infty} \frac{x^2}{x+1} |\cos x^3| \cdot \left(1 - \frac{1}{6} \left(\frac{\cos x^3}{x+1}\right)^2\right) dx \geq$$

$$\geq \int\limits_0^{+\infty} \frac{x^2 |\cos x^3|}{x+1} dx \geq \int\limits_0^{+\infty} \frac{x^2}{2(x+1)} \cos^2 x^3 = \int \frac{x^2(1+\cos 2x^3)}{2(x+1)} dx =$$

$$= \underbrace{\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^2}{2(x+1)} dx}_{\text{расходится}} + \underbrace{\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^2 \cos(2x^3) dx}{2(x+1)}}_{\text{сходимость доказывается аналогично пункту 1)}} \Rightarrow \underbrace{\int\limits_0^{+\infty} \left| x^2 \sin\left(\frac{\cos x^3}{x+1}\right) \right| dx}_{\text{расходится}}$$

Таким образом, $\int\limits_0^{+\infty} x^2 \sin\left(\frac{\cos x^3}{x+1}\right) dx$ сходится условно.

С2 §12 №136

Исследовать на абсолютную и условную сходимость при всех α:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\cos(1+2x)}{(\sqrt{x}-\ln x)^{\alpha}}\,dx$$

1) $\alpha \leq 0$:

Докажем расходимость с помощью критерия Коши:

~~Рассмотрим $\varepsilon=1$~~

Рассмотрим $\varepsilon = \frac{1}{4}$ и фиксированное b.

Выберем $b_1 = \frac{1}{2}(2\pi k - 1)$, $b_2 = \frac{1}{2}(2\pi k + \frac{\pi}{2} - 1)$, где $k \in \mathbb{Z}$, $b_1, b_2 > b$.

Заметим, что при $x \in [b_1; b_2]$: $\cos(1+2x) \geq 0$.

Начиная с некоторого x: $\frac{1}{(\sqrt{x}-\ln x)^{\alpha}} \geq 1$, т.к.

$(\sqrt{x} - \ln x)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}\left(1 - \frac{2}{\sqrt{x}}\right) \geq 0$ при $x \geq 4$ и

$\exists\, x = e^{10}$: $\sqrt{e^{10}} - \ln e^{10} = e^5 - 10 \geq 2^5 - 10 = 22$

То есть начиная с x_0: $\frac{1}{\sqrt{x} - \ln x} \leq 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{x} - \ln x}\right)^{\alpha} \geq 1$ (т.к. $\alpha \leq 0$)

Тогда

$$\left|\int_{b_1}^{b_2} \frac{\cos(1+2x)}{(\sqrt{x}-\ln x)^{\alpha}}\,dx\right| = \int_{b_1}^{b_2} \frac{\cos(1+2x)}{(\sqrt{x}-\ln x)^{\alpha}}\,dx \geq \int_{b_1}^{b_2} \cos(1+2x)\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\sin(1+2x)\Big|_{b_1}^{b_2} = \frac{1}{2} \geq \varepsilon$$

Таким образом при $\alpha \leq 0$ интеграл не сходится.

2) $\alpha \cancel{\geq} > 2$:

$$\int_1^{+\infty} \left|\frac{\cos(1+2x)}{(\sqrt{x}-\ln x)^{\alpha}}\right| dx \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{(\sqrt{x}-\ln x)^{\alpha}}\,dx \sim \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha/2}} -$$

– сходится абсолютно по теореме сравнения.

3) $0 < \alpha \leq \cancel{\ } 2$:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\cos(1+2x)}{(\sqrt{x}-\ln x)^{\alpha}}\,dx = \underbrace{\int_1^{4} \frac{\cos(1+2x)}{(\sqrt{x}-\ln x)^{\alpha}}\,dx}_{\text{сходится, т.к. подинтегральная функция непрерывна}} + \int_4^{+\infty} \frac{\cos(1+2x)}{(\sqrt{x}-\ln x)^{\alpha}}\,dx$$

$\int\limits_4^x \cos(1+2t)\,dt = \frac{1}{2}\sin(1+2x) - \frac{1}{2}\sin(9)$ —

— ограниченная

$\frac{1}{(\sqrt{x}-\ln x)^\alpha}$ — монотонно стремится к 0 $\Rightarrow$

(было доказано, что возрастает $\sqrt{x}-\ln x$)

Доказательство, что $\sqrt{x}-\ln x \to +\infty$ при $x \to +\infty$:

Рассмотрим $b>0$:

$\exists x_0 = e^{\min\{10, b\}}$,

при $x > x_0$:

$\sqrt{x}-\ln x > \sqrt{x_0}-\ln x_0 = e^{\min\{10;b\}/2} - \min\{10;b\} \geq$

$\geq 2^{\min\{10;b\}/2} - \min\{10;b\} \geq 0$

$\cancel{2^{\min\{10;b\}/2} \geq \min\{10;b\}}$

Таким образом, $\frac{1}{(\sqrt{x}-\ln x)^\alpha}$ ~~монотонно~~ $\to 0$

$\Rightarrow \int\limits_4^{+\infty} \frac{\cos(1+2x)}{(\sqrt{x}-\ln x)^\alpha}\,dx$ сходится $\Rightarrow$

$\Rightarrow \int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos(1+2x)}{(\sqrt{x}-\ln x)^\alpha}\,dx$ сходится

$$\int_1^{+\infty} \left|\frac{\cos(1+2x)}{(\sqrt{x}-\ln x)^{\alpha}}\right| dx \geq \int_1^{+\infty} \frac{\cos^2(1+2x)}{(\sqrt{x}-\ln x)^{\alpha}} dx \sim$$

$$\sim \int_1^{+\infty} \frac{\frac{1}{2}\left(1+\cos(2+4x)\right)}{x^{\alpha/2}} dx = \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{dx}{2x^{\alpha/2}}}_{I_1} + \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2+4x)}{2x^{\alpha/2}} dx}_{I_2}$$

I_1 расходится по теореме сравнения

I_2 сходится (док-во аналогично пункту 2) $\Big| \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{\cos(1+2x)}{(\sqrt{x}-\ln x)^{\alpha}} dx \text{ не сходится абсолютно}$$

Ответ: $\alpha \leq 0$ расходится

$0 < \alpha \leq 2$ сходится условно

$\alpha > 2$ сходится абсолютно.

С2 §12 №139

Исследовать на абсолютную и условную сходимость при всех α:

1) $\int_1^{+\infty} \frac{x^2 \cos x^3}{(3x-\operatorname{arctg} x)^{\alpha}} dx$

1) $\alpha \leq 0$.

Докажем, что расходится с помощью

критерия Коши:

Рассмотрим $\varepsilon = \frac{1}{3}$

Фиксируем произвольное $b>0$

Выберем $b_1=\sqrt[3]{2\pi k}$, $b_2=\sqrt[3]{2\pi k+\frac{\pi}{2}}$, где $k\in\mathbb{Z}$, такое что $b_1, b_2>b$

$$\left|\int_{b_1}^{b_2}\frac{x^2\cos x^3}{(3x-\mathrm{arctg}x)^\alpha}dx\right| = \int_{b_1}^{b_2}\frac{x^2\cos x^3}{(3x-\mathrm{arctg}x)^\alpha}dx \geqslant$$

$$\geqslant \int_{b_1}^{b_2} x^2\cos x^3 dx = \frac{1}{3}\sin x^3\Big|_{b_1}^{b_2} = \frac{1}{3} = \varepsilon.$$

Таким образом, $\int_1^{+\infty}\frac{x^2\cos x^3}{(3x-\mathrm{arctg}x)^\alpha}dx$ расходится

по критерию Коши

2) $\alpha>3$

$$\int_1^{+\infty}\left|\frac{x^2\cos x^3}{(3x-\mathrm{arctg}x)^\alpha}\right|dx \leqslant \int_1^{+\infty}\frac{dx}{3x^{\alpha-2}}$$ – сходится по теореме

сравнения

Т.е. интеграл сходится абсолютно

3) $0<\alpha\leqslant 3$:

$$\int_1^{+\infty}\left|\frac{x^2\cos x^3}{(3x-\mathrm{arctg}x)^\alpha}\right|dx \geqslant \int_1^{+\infty}\frac{x^2\cos^2 x^3}{(3x-\mathrm{arctg}x)^\alpha}dx = \int_1^{+\infty}\frac{x^2(1+\cos(2x^3))}{2(3x-\mathrm{arctg}x)^\alpha}dx$$

$$= \frac{1}{2}\underbrace{\int\limits_1^{+\infty}\frac{x^2\,dx}{(3x-\operatorname{arctg}x)^\alpha}}_{I_1} + \frac{1}{2}\underbrace{\int\limits_1^{+\infty}\frac{x^2\cos(2x^3)\,dx}{(3x-\operatorname{arctg}x)^\alpha}}_{I_2}$$

$I_1 \sim \frac{1}{2}\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{3^\alpha x^{\alpha-2}}$ – расходится по теореме сравнения

$\int\limits_1^{x} x^2\cos(2x^3)\,dx = \frac{1}{6}\sin(2x^3) - \frac{1}{6}\sin 2$ – ограничена

$\frac{1}{(3x-\operatorname{arctg}x)^\alpha}$ – монотонно стремится к 0 $\Rightarrow$

$\Rightarrow I_2$ сходится по признаку Дирихле

Таким образом интеграл не сходится абсолютно

Доказательство условной сходимости аналогично доказательству сходимости I_2.

Ответ: $\alpha \le 0$: расходится

$0 < \alpha \le 3$: сходится условно

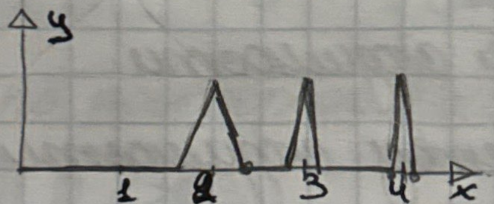
$\alpha > 3$: сходится абсолютно.

С2 §12 №227

$f(x)$, $x\in[0;+\infty)$ – непрерывная, $f(x)\geq 0$, $\int\limits_0^{+\infty} f(x)dx$ сходится.

Верно ли, что $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

Рассмотрим функцию f, линейно возрастающую от 0 до 1 на отрезках $[n-\frac{1}{n^2}; n]$, линейно убывающую на отрезках $[n; n+\frac{1}{n^2}]$ и равную нулю во всех остальных точках. Здесь $n\in\mathbb{N}\cap[2;+\infty)$



Докажем, что $\int\limits_0^{+\infty} f(x)dx$ сходится:

$$\int\limits_1^b f(x)dx = \sum_{n=1}^{N} \int\limits_{n-\frac{1}{n^2}}^{n+\frac{1}{n^2}} f(x)dx + r(b),\ N\in\mathbb{N}, N>b$$

Здесь $r(b)$ – площадь части треугольника, который попал только частично в отрезок $[0;b]$.

Площадь n-ого треугольника $S_n=\int\limits_{n-\frac{1}{n^2}}^{n+\frac{1}{n^2}} f(x)\,dx =$

$= 2\cdot\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{2}{n^2}=\frac{2}{n^2}.$

$$\int\limits_0^b f(x)\,dx = 2\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2}+r(b)$$

$\frac{2}{n^2}\to 0$ при $n\to\infty$

$r(b)<\frac{2}{n^2}$

Т.е. при $b\to\infty$: $r(b)\to 0$.

$$\int\limits_0^{+\infty} f(x)\,dx=\lim_{b\to+\infty}\int\limits_0^b f(x)\,dx = 2\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2}+\lim_{b\to\infty} r(b)=$$

$= 2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ – сходящийся ряд $\Rightarrow \int\limits_0^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится

При этом $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ очевидно не существует.

Ответ: не следует.

С2 §12 №185

Исследовать на абсолютную и условную сходимость:

1) $\int\limits_1^{+\infty}\cos(x^3-x)\,dx = \int\limits_1^{+\infty}\frac{3x^2-1}{3x^2-1}\cos(x^3-x)\,dx$

$\int\limits_1^{x}(3t^2-1)\cos(t^3-t)\,dt = \int\limits_0^{x^3-x}\cos(t^3-t)\,d(t^3-t) =$

$= \sin(x^3-x)$ – ограниченная

$\frac{1}{3x^2-1}$ монотонно стремится к 0 при $x\to+\infty$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \int\limits_1^{+\infty}\cos(x^3-x)\,dx$ сходится.

2) $\int\limits_1^{+\infty}|\cos(x^3-x)|\,dx \geq \int\limits_1^{+\infty}\cos^2(x^3-x)\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_1^{+\infty}(1+\cos(2x^3-2x))\,dx$

$= \underbrace{\frac{1}{2}\int\limits_1^{+\infty}dx}_{I_1} + \underbrace{\frac{1}{2}\int\limits_1^{+\infty}\cos(2x^3-2x)\,dx}_{I_2}$

I_1 очевидно расходится

I_2 сходится (док-во аналогично пункту 1)) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \int_1^{+\infty} \cos(x^3 - x)\,dx$ не сходится абсолютно

Ответ: сходится условно.

C2 §12 №232

Исследовать на сходимость: $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x\,dx}{\sqrt{x} - \sin x}$

Можно ли использовать признак Дирихле?

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x\,dx}{\sqrt{x} - \sin x} = \int_1^{+\infty} \frac{\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,dx}{1 - \frac{\sin x}{\sqrt{x}}} = \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\left(1 + \frac{\sin x}{\sqrt{x}} + \cancel{\frac{\sin^2 x}{x}} + r(x)\right)dx =$$

$$= \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,dx}_{I_1} + \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x}\,dx}_{I_2} + \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\, r(x)\,dx}_{I_3}$$

1) $\int_1^{x} \sin t\,dt$ – ограниченная

$\frac{1}{\sqrt{x}}$ – монотонно стремится к 0 $\Bigg| \Rightarrow$

$\Rightarrow I_1$ сходится по признаку Дирихле

2) $$\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x}\,dx = \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \frac{1 - \cos 2x}{x}\,dx = \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{1}{2x}\,dx}_{\text{расходится по теореме сравнения}} - \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x\,dx}{2x}}_{\text{сходится аналогично пункту 1)}}$$

I_2 расходится как сумма расходящегося и сходящегося.

3) Запишем $r(x)$ в форме Лагранджа:

$$|r(x)| = \left| \frac{f^{VI}(\xi) \cdot \frac{\sin^2 x}{x}}{6!} \right| \le \frac{\sin^2 x}{x}$$

Здесь $\xi \in (x; +\infty)$

$$\int_1^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{\sqrt{x}} r(x) \right| dx \le \int_1^{+\infty} \frac{|\sin^3 x|}{x^{3/2}} dx \le \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{3/2}} -$$

– сходится по теореме сравнения

I_3 сходится абсолютно $\Rightarrow I_3$ сходится

Таким образом исходный интеграл расходится как сумма двух сходящихся и расходящегося.

$(\sqrt{x} - \sin x)' = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \cos x \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x} - \sin x}$ не монотонна $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ нельзя применить признак Дирихле.

Сд §13 №1(3)

Найти S_n и S ряда:

$$\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{3^n}+\frac{1}{5^n}\right)$$

$$S_n=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{3^i}+\frac{1}{5^i}\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{3}\right)^i+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{5}\right)^i=\frac{\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)}{1-\frac{1}{3}}+\frac{\frac{1}{5}\left(1-\frac{1}{5^n}\right)}{1-\frac{1}{5}}=$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2\cdot 3^n}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4\cdot 5^n}=\frac{3}{4}-\frac{1}{2\cdot 3^n}-\frac{1}{4\cdot 5^n}.$$

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{3}{4}.$$

Сд §13 №4(2)

Найти S_n и S ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2+4n-3}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2-4}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+3)}=$$

$$=\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+3}\right)$$

$$S_n=\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2i-1}-\frac{1}{2i+3}\right)=\frac{1}{4}\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2i-1}-\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{2j+3}\right]=$$

$$=\left\{\begin{array}{l} j=i-2 \\ j=1\Rightarrow i=3,\ j=n\Rightarrow i=n+2\end{array}\right\}=\frac{1}{4}\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2i-1}-\sum_{i=3}^{n+2}\frac{1}{2i-1}\right]=$$

$$=\frac{1}{4}\left[1+\frac{1}{3}+\sum_{i=3}^{n}\frac{1}{2i-1}-\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3}-\sum_{i=3}^{n}\frac{1}{2i-1}\right]=$$

$$=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+3}\right)$$

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{3}.$$

C2 §13 № 10

Найти сумму ряда:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a^n\cos(n\alpha)$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a^n\sin(n\alpha)$

$\alpha, a \in \mathbb{R}$, $|a|<1$.

Рассмотрим $z_n = a^n(\cos(n\alpha)+i\sin(n\alpha)) =$

$= a^n e^{in\alpha} = (ae^{i\alpha})^n$

Если $\cancel{\sum\limits_{n=1}^{\infty}}$ сходится $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} a^n\cos(n\alpha) = \mathrm{Re}\left(\sum_{n=1}^{\infty} z_n\right),\ \sum_{n=1}^{\infty} a^n\sin(n\alpha) = \mathrm{Im}\left(\sum_{n=1}^{\infty} z_n\right)$$

$$\cancel{\Sigma}\ \sum_{n=1}^{\infty} z_n = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N} z_n = \lim_{N\to\infty}\frac{ae^{i\alpha}(1-(ae^{i\alpha})^N)}{1-ae^{i\alpha}} \ominus$$

$$\cancel{= \lim_{N\to\infty}\left[\frac{ae^{i\alpha}(1-(ae^{i\alpha})^N)(1+ae^{2i\alpha})}{1+a^2e^{2i\alpha}}\right]} =$$

$$\cancel{= \lim_{N\to\infty}\left[\frac{ae^{i\alpha}+a^2e^{2i\alpha}-a^{N+1}e^{(N+1)i\alpha}-a^{N+2}e^{(N+2)i\alpha}}{1+a^2e^{2i\alpha}}\right]} =$$

$$\cancel{= \frac{ae^{i\alpha}+a^2e^{2i\alpha}}{1+a^2e^{2i\alpha}}}$$

$$\ominus\ \frac{ae^{i\alpha}}{1-ae^{i\alpha}} = \frac{a(\cos\alpha+i\sin\alpha)}{1-a(\cos\alpha+i\sin\alpha)} = \frac{a(\cos\alpha+i\sin\alpha)}{(1-a\cos\alpha)-ia\sin\alpha} =$$

$$= \frac{a(\cos\alpha + i\sin\alpha)((1-a\cos\alpha) + ia\sin\alpha)}{(1-a\cos\alpha)^2 + a^2\sin^2\alpha} =$$

$$= \frac{(a\cos\alpha(1-a\cos\alpha) - a^2\sin^2\alpha) + (a^2\sin\alpha\cos\alpha + a(1-a\cos\alpha)\sin\alpha)i}{1+a^2-2a\cos\alpha}.$$

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a^n \cos n\alpha = \operatorname{Re}\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n = \frac{a\cos\alpha(1-a\cos\alpha) - a^2\sin^2\alpha}{1+a^2-2a\cos\alpha} =$

$$= \frac{a\cos\alpha - a^2}{a^2 - 2a\cos\alpha + 1}$$

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a^n \sin(n\alpha) = \operatorname{Im}\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n = \frac{a\sin\alpha(a\cos\alpha + 1 - a\cos\alpha)}{a^2 - 2a\cos\alpha + 1} =$

$$= \frac{a\sin\alpha}{a^2 - 2a\cos\alpha + 1}$$

211

СЛ §13 №11(5)

Доказать расходимость ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n$$

$a_n = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n = \cancel{\left(\frac{n+1-2}{n+1}\right)^n = \left(1 - \frac{2}{n+1}\right)^n}$

$\cancel{\frac{a_n}{a_{n+1}} = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n \cdot \left(\frac{n+2}{n}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{2}{n}\right)\left(\frac{(n+2)(n-1)}{n(n+1)}\right)^n =}$

$\cancel{= \left(1+\frac{2}{n}\right)\left(\frac{n^2+n-2}{n^2+n}\right)^n = \left(1+\frac{2}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n^2+n}\right)^n \leq 1 + \frac{2}{n}}$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left[\exp\left(\ln\left(\frac{n-1}{n+1}\right)\cdot n\right)\right] = \exp\left[\lim_{n\to\infty} n\ln\left(1 - \frac{2}{n+1}\right)\right] =$$

$$= \exp\left[\lim_{n\to\infty} n\left(-\frac{2}{n+1} + \bar{\bar{o}}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right] = e^{-2} \neq 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n$ не сходится, т.к. если бы он сходился, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

C2 §13 №13 (1)

Доказать сходимость: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n = \frac{\cos nx}{2^n}$

Рассмотрим произвольный $\varepsilon > 0$.

Выберем $N \in \mathbb{N}$: $N > \log_2 \frac{1}{\varepsilon} + 1$

Рассмотрим произвольные $n, p \in \mathbb{N}$, $n > N$

$$\left|\sum_{i=0}^{p} a_{n+i}\right| \leq \sum_{i=0}^{p}\left|\frac{\cos (n+i)x}{2^{n+i}}\right| \leq \sum_{i=0}^{p}\frac{1}{2^{n+i}} =$$

$$= \frac{1}{2^n}\left(1 + \sum_{i=1}^{p}\frac{1}{2^i}\right) = \frac{1}{2^n}\left(1 + \frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^p}\right)}{1-\frac{1}{2}}\right) =$$

$$= \frac{1}{2^n}\left(2 - \frac{1}{2^p}\right) \leq \frac{1}{2^{n-1}} < \frac{1}{2^{N-1}} < \frac{1}{2^{\log_2 \frac{1}{\varepsilon}}} = \varepsilon$$

Таким образом, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится по критерию Коши.

C2 §13 №14(1)

Доказать расходимость $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n = \frac{1}{2n+1}$

Выберем $\varepsilon = \frac{1}{4}$. Рассмотрим произвольной $N \in \mathbb{N}$.

Выберем $n \geqslant N : n = N$, $p \in \mathbb{N} : p = N+2$

Тогда $\left|\sum_{i=0}^{p} a_{n+i}\right| = \sum_{i=0}^{p} a_{n+i} \geqslant \frac{p}{2(n+p)+1} =$

$= \frac{N+2}{4N+5} > \frac{N+2}{4N+8} = \frac{1}{4} = \varepsilon$.

Таким образом $\exists \varepsilon > 0 : \forall N \in \mathbb{N} \ \exists n, p \in \mathbb{N} :$ $n \geqslant N, : \left|\sum_{i=0}^{p} a_{n+i}\right| > \varepsilon \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится по критерию Коши.

C2 §16 №4

$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ $(c_n = a_n - b_n)$

Можно ли утверждать, что $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ расходится, если:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, а $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится $\Rightarrow \exists \varepsilon_a > 0: \forall N \in \mathbb{N} \quad \exists n_a, p_a \in \mathbb{N}: n > N$

$\left|\sum\limits_{i=0}^{p} a_{n+i}\right| \geq \varepsilon_a$ (по критерию Коши) (1)

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0: \exists N_b \in \mathbb{N}: \forall n, p \in \mathbb{N}: n > N_b$

$\left|\sum\limits_{i=0}^{p} b_{n+i}\right| < \varepsilon$ (по критерию Коши) (2)

Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ сходится, тогда $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_c \in \mathbb{N}$: $\forall n, p \in \mathbb{N}: n > N_c \quad \left|\sum\limits_{i=0}^{p} c_{n+i}\right| < \varepsilon$ (по критерию Коши) (3)

Рассмотрим $\varepsilon = \varepsilon_a \cdot \frac{1}{2}$.

Из (2) и (3) найдём N_b и N_c, такие что

$\forall n > N_b, N_c, p \longmapsto \left|\sum\limits_{i=0}^{p} b_{n+i}\right| < \varepsilon$ и $\left|\sum\limits_{i=0}^{p} c_{n+i}\right| < \varepsilon$

Выберем $N = \max\{N_b, N_c\}$.

Из определения (1) для него найдём

$n_a, p_a \in \mathbb{N}: \left|\sum\limits_{i=0}^{p_a} a_{n_a+i}\right| \geq \varepsilon_a$

Так как $n_a > N$, то $n_a > N_b, N_c$, значит для n_a и p_a верно: $\left|\sum\limits_{i=0}^{p_a} b_{n_a+i}\right| < \varepsilon$ и $\left|\sum\limits_{i=0}^{p_a} c_{n_a+i}\right| < \varepsilon$.

При этом $a_n = b_n + c_n$, тогда $\left|\sum\limits_{i=0}^{p_a} a_{n_a+i}\right| = \left|\sum\limits_{i=0}^{p_a} b_{n_a+i} +\right.$

$+\sum_{i=0}^{p_a} c_{n_a+i}\Big| \le \Big|\sum_{i=0}^{p_a} b_{n_a+i}\Big| + \Big|\sum_{i=0}^{p_a} c_{n_a+i}\Big| < \varepsilon + \varepsilon = \varepsilon_a$, что

является противоречием. Предположение было неверно $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} c_n$ расходится

75

Является ли сходящимся $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, если $\forall p \in \mathbb{N}$ $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}+a_{n+2}+\dots+a_{n+p})=0$

Рассмотрим $a_n=\frac{1}{n}$. Рассмотрим произвольный $p\in\mathbb{N}$

$$\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}+a_{n+2}+\dots+a_{n+p}) = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{p}\frac{1}{n+i} =$$

$$= \sum_{i=1}^{p}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+i} = 0.$$

Однако ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ расходится ч.т.д.