8.3

$$y''+3y'+2y=0$$

$$\lambda^2+3\lambda+2=0$$

$\lambda=\{-2,-1\} \rightarrow$ общее решение $y=C_1e^{-2x}+C_2e^{-x}$,

C_1, C_2 - произвольные постоянные

8.12

$$y''-6y'+9=0$$

$$\lambda^2-6\lambda+9=0$$

$\lambda=3$ - корень кратности 2 $\Rightarrow$ $y=(C_1+C_2x)e^{3x}$

8.19

$$y'''-3y''+7y'-5y=0$$

$$\lambda^3-3\lambda^2+7\lambda-5=0$$

$$(\lambda-1)(\lambda^2-2\lambda+5)=0$$

$\lambda=1$ или $\lambda=\dfrac{2\pm\sqrt{4-20}}{2}=1\pm2i \Rightarrow$

$\Rightarrow y=e^x(C_1+C_2\cos 2x+C_3\sin 2x)$

8.35

$$y^{IV}+8y''+16y=0$$

$$\lambda^4+8\lambda^2+16=0$$

$$(\lambda^2+4)^2=0$$

$\lambda=\pm2i$ - корни кратности 2 $\Rightarrow$

$\Rightarrow y=(C_1+C_2x)\cos 2x+(C_3+C_4x)\sin 2x$

8.40

$$y''+2y'+y=x^2e^{-x}$$

Однородное: $\lambda^2+2\lambda+1=0 \rightarrow \lambda=-1$ - кратности 2 $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ решение однородного - $y_0(x) = (C_1 + C_2 x)e^{-x}$

Частное: ищем решение в виде $y_ч(x) = x^s Q_2 e^{ax}$

$\lambda = -1$ - корень $\Rightarrow$ s - его кратность, т.е. $s = 2$

$y_ч(x) = x^2(Ax^2 + Bx + C)e^{-x}$

$y_ч'(x) = e^{-x}\left(2x(Ax^2 + Bx + C) + x^2(2Ax + B) - x^2(Ax^2 + Bx + C)\right)$

$y_ч''(x) = e^{-x}\left(2(Ax^2 + Bx + C) + 4x(2Ax + B) + 2Ax^2 - 2x(Ax^2 + Bx + C) -\right.$

$\left.- x^2(2Ax + B) - 2x(Ax^2 + Bx + C) - x^2(2Ax + B) + x^2(Ax^2 + Bx + C)\right) =$

$= e^{-x}\left((x^2 - 4x + 2)(Ax^2 + Bx + C) + (4x - 2x^2)(2Ax + B) + 2Ax^2\right)$

Подставляя в уравнение:

$e^{-x}\Big(\big((x^2 - 4x + 2) + 2(2x - x^2) + x^2\big)(Ax^2 + Bx + C) + \big((4x - 2x^2) + 2x^2\big)\cdot$

$\cdot(2Ax + B) + 2Ax^2\Big) = x^2 e^{-x}$

$2(Ax^2 + Bx + C) + 4x(2Ax + B) + 2Ax^2 = x^2$

$(2A + 8A + 2A - 1)x^2 + (2B + 4B)x + 2C = 0$

$\begin{cases} 12A = 1 \\ 6B = 0 \\ 2C = 0 \end{cases} \to A = \frac{1}{12} \Rightarrow y_ч(x) = \frac{1}{12}x^4 e^{-x}$

Общее решение в виде $y(x) = y_0(x) + y_ч(x) \Rightarrow$

$\Rightarrow y(x) = (C_1 + C_2 x)e^{-x} + \frac{1}{12}x^4 e^{-x}$

8.43

$y'' - y = e^x \cos x$

Однородное: $\lambda^2 - 1 = 0 \to \lambda = \pm 1 \to y_0(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$

Частное: $y_ч(x) = x^s e^{ax}(A\cos x + B\sin x)$

$\lambda = 1 \pm i$ - не корни $\Rightarrow s = 0 \Rightarrow y_ч(x) = e^x(A\cos x + B\sin x)$

$y_ч'' = (e^x(A(\cos x - \sin x) + B(\sin x + \cos x)))' = e^x(A(\cos x - \sin x + (-\sin x - \cos x)) + B(\sin x + \cos x + (\cos x - \sin x))) = e^x(-2A\sin x + 2B\cos x)$

Подстовляя в ур-е:

$e^x(A(2\sin x - \cos x) + B(-2\cos x - \sin x)) = e^x\cos x$

$\sin x(2A - B) + \cos x(-A - 2B) = \cos x$

$\begin{cases} 2A - B = 0 \\ -A - 2B = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} B = 2A \\ A = -\frac{1}{5} \end{cases} \quad \begin{cases} B = -\frac{2}{5} \\ A = -\frac{1}{5} \end{cases} \Rightarrow y_ч(x) = -e^x\left(\frac{1}{5}\cos x + \frac{2}{5}\sin x\right)$

Общее решение: $y(x) = (C_1 - \frac{1}{5}\cos x - \frac{2}{5}\sin x)e^x + C_2e^{-x}$

8.71

$y'' + y = 2\sin x\sin 2x$

Однородное: $\lambda^2 + 1 = 0 \to y_o(x) = C_1\cos x + C_2\sin x$

Частное: $2\sin x\sin 2x = \cos x - \cos 3x$

для $\cos x$: $\lambda = \pm i$ - корни $\Rightarrow s = 1 \Rightarrow y_ч(x) = x(A\cos x + B\sin x)$

Подставляя в ур-е: $-2A\sin x + 2B\cos x = \cos x \Rightarrow A = 0, B = \frac{1}{2}$

для $\cos 3x$: $\lambda = \pm 3i$ - не корни $\Rightarrow s = 0 \Rightarrow y_ч(x) = A\cos 3x +$
$+ B\sin 3x$

Подставляе в ур-е: $-8A\cos 3x - 8B\sin 3x = \cos 3x \Rightarrow A = \frac{1}{8}, B = 0$

Общее решение: $y(x) = C_1\cos x + C_2\sin x + \frac{1}{2}x\sin x + \frac{1}{8}\cos 3x$

8.82

$y''' + y' = 4 + 10e^{2x}$

Однородное: $\lambda^3 + \lambda = 0 \to \lambda = 0, \lambda = \pm i = y_o = C_1 + C_2\cos x + C_2\sin x$

Частное:

для 4: $\lambda = 0$ - корень $\Rightarrow s = 1 \Rightarrow y_ч = Cx \Rightarrow y_ч = 4x$

для $10e^{2x}$: $\lambda=2$ - не корень $\Rightarrow s=0 \Rightarrow y_4 = Ce^{2x}$

Подставляя в ур-е: $(8C+2C)e^{2x}=10e^{2x} \to C=1$

Общее решение: $y(x)=C_1+C_2\cos x+C_3\sin x+4x+e^{2x}$

8.154

$$y''-3y'+2y=\frac{e^x}{1+e^x}$$

Однородное: $\lambda^2-3\lambda+2\lambda=0 \to \lambda=1, \lambda=2 \Rightarrow y_0(x)=C_1e^x+C_2e^{2x}$

Вариация: $\begin{cases} C_1'e^x+C_2'e^{2x}=0 \\ C_1'e^x+2C_2'e^{2x}=\frac{e^x}{1+e^x} \end{cases}$ $\begin{cases} C_2'=-C_1'e^{-x} \\ C_1'(e^x-2e^x)=\frac{e^x}{1+e^x} \end{cases}$

$C_1'=-\frac{1}{1+e^x} \to C_1=-\int\frac{1}{1+e^x}dx=-\int\frac{d(e^x)}{e^x+e^{2x}}=-\int\frac{dt}{t+t^2}=-\int\left[\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}\right]\cdot$

$\cdot dt=-\ln|t|+\ln|t+1|+\widetilde{C}_1=\ln|1+\frac{1}{t}|+\widetilde{C}_1=\ln(1+e^{-x})+\widetilde{C}_1$

$C_2'=\frac{e^{-x}}{1+e^x}dx \to C_2=-\int\frac{d(e^{-x})}{1+e^x}=-\int\frac{dt}{1+1/t}=-\int\frac{t\,dt}{t+1}=-\int\left[1-\frac{1}{1+t}\right]dt$

$=-t+\ln|1+t|+\widetilde{C}_2=-e^{-x}+\ln(1+e^{-x})+\widetilde{C}_2$

Общее: $(\ln(1+e^{-x})+\widetilde{C}_1)e^x+(-e^{-x}+\ln(1+e^{-x})+\widetilde{C}_2)e^{2x}$

8.160

$$y''-4y=(15-16x^2)\sqrt{x}$$

Однородное: $\lambda^2-4 \Rightarrow \lambda=\pm4 \Rightarrow y_0(x)=C_1e^{2x}+C_2e^{-2x}$

Вариация: $\begin{cases} C_1'e^{2x}+C_2'e^{-2x}=0 \\ 2C_1'e^{2x}-2C_2'e^{-2x}=(15-16x^2)\sqrt{x} \end{cases}$ $\begin{cases} C_2'=-C_1'e^{4x} \\ 4C_1'e^{2x}=(15-16x^2)\sqrt{x} \end{cases}$

$C_1'=(\frac{15}{4}-4x^2)\sqrt{x}\,e^{-2x}$

$J_n=\int x^ne^{-2x}dx=-\frac{1}{2}x^ne^{-2x}+\frac{n}{2}\int x^{n-1}e^{-2x}dx=-\frac{1}{2}x^ne^{-2x}+\frac{n}{2}J_{n-1}$

$C_1=\frac{15}{4}J_{1/2}-4J_{5/2}=\frac{15}{4}J_{1/2}-4\left(-\frac{1}{2}x^{5/2}e^{-2x}+\frac{5}{4}J_{3/2}\right)=$

$=\frac{15}{4}J_{1/2}-4\left(-\frac{1}{2}x^{5/2}e^{-2x}+\frac{5}{4}\left(-\frac{1}{2}x^{3/2}e^{-2x}+\frac{3}{4}J_{1/2}\right)\right)=2x^{5/2}e^{-2x}+\frac{5}{2}x^{3/2}e^{-2x}+$

$+\frac{15}{4}J_{1/2}-\frac{15}{4}J_{1/2}=2x^{5/2}e^{-2x}+\frac{5}{2}x^{3/2}e^{-2x}+\widetilde{C}_1=\frac{x^{3/2}e^{-2x}}{2}(5+4x)+\widetilde{C}_1$

$$C_2' = -\left(\frac{15}{4} - 4x^2\right)\sqrt{x}\,e^{2x}$$

$$J_n = \int x^n e^{2x}dx = \frac{1}{2}x^n e^{2x} - \frac{n}{2}J_{n-1}$$

$$C_2 = -\frac{15}{4}J_{1/2} + 4J_{5/2} = -\frac{15}{4}J_{1/2} + 4\left(\frac{1}{2}x^{5/2}e^{2x} - \frac{5}{4}J_{3/2}\right) = -\frac{15}{4}J_{1/2} + 2x^{5/2}e^{2x} - 5\left(\frac{1}{2}x^{3/2}e^{2x} - \frac{3}{4}J_{1/2}\right) = 2x^{5/2}e^{2x} - \frac{5}{2}x^{3/2}e^{2x} + \tilde{C}_2 = \frac{x^{3/2}e^{2x}}{2}(4x-5) + \tilde{C}_2$$

8.196

$$x^2y'' + xy' + y = 10x^2$$

$x>0 \rightarrow$ замена $x = e^t$ $\quad y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = y'_t e^{-t}$ $\quad y''_{xx} = (y'_x)'_x = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} =$

$= (y''_{tt}e^{-t} - y'_t e^{-t})e^{-t} = y''_{tt}e^{-2t} - y'_t e^{-2t}$

$$e^{2t}(y''_{tt} - y'_t)e^{-2t} + e^t(y'_t e^{-t}) + y = 10e^{2t}$$

$$y''_{tt} + y = 10e^{2t}$$

Однородное: $\lambda^2 + 1 = 0 \rightarrow \lambda = \pm i \Rightarrow y_0(t) = C_1\cos t + C_2\sin t$

Частное: $10e^{2t}$, $\lambda = 2$ - не корень $\Rightarrow s = 0 \Rightarrow y_ч = Ce^{2t}$

Подставляя: $(4C + C)e^{2t} = 10e^{2t} \rightarrow C = 2$

Общее реш.: $y = C_1\cos t + C_2\sin t + 2e^{2t} = C_1\cos(\ln x) + C_2\sin(\ln x) + 2x^2$

8.204

$$x^2y'' + 3xy' - 3y = -\frac{3}{x^2}$$

$x>0 \rightarrow$ замена $x = e^t$

$$(y''_{tt} - y'_t) + 3y'_t - 3y = -3e^{-2t}$$

$$y''_{tt} + 2y'_t - 3y = -3e^{-2t}$$

Однородное: $\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0 \rightarrow \lambda = 1, \lambda = -3 \rightarrow y_0(t) = C_1e^t + C_2e^{-3t}$

Частное: $-3e^{-2t}$ $\lambda = -2$ - не корень $\Rightarrow s = 0 \Rightarrow y_ч = Ce^{-2t}$

Подставляя: $4Ce^{-2t} - 4Ce^{-2t} - 3Ce^{-2t} = -3e^{-2t} \rightarrow C = 1$

Общее реш.: $y = C_1e^t + C_2e^{-3t} + e^{-2t} = C_1x + \frac{C_2}{x^3} + \frac{1}{x^2}$

613$^\varphi$

кратность 3 λ=1

$y_1 = x^2e^x \leftarrow \lambda = 1$ кратности 3 => харак. многочлен

$(\lambda-1)^3 = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 \to$ искомое $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$

616$^\varphi$

кратность 2 Reλ=1 Imλ=2 т.к. компл. корни парами

$y_1 = xe^x\cos 2x \leftarrow \lambda = 1 \pm 2i$ кратности 2 => харак. многочлен $\left(-\frac{b}{2a} = 1, \frac{b^2-4ac}{4a^2} = -4, a := 1 \Rightarrow b = -2, c = 5\right)$ $(\lambda^2 - 2\lambda + 5)^2 = \lambda^4 - 4\lambda^3 + 14\lambda^2 - 20\lambda + 25 \to$ искомое – $y^{IV} - 4y''' + 14y'' - 20y' + 25y = 0$

617$^\varphi$

$y_1 = xe^x, y_2 = e^{-x} \leftarrow \lambda = -1$

$\lambda = 1$ кратности 2

=> хар. многочлен $(\lambda-1)^2(\lambda+1)$

$\Rightarrow (\lambda^2 - 2\lambda + 1)(\lambda + 1) = \lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda + \lambda^2 - 2\lambda + 1 = \lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1 \Rightarrow$

=> искомое $y''' - y'' - y' + y = 0$

1.

$y'' + ay = \sin x$

однородное: $\lambda^2 + a = 0 \to \lambda = \pm\sqrt{-a}$

1) $a = 0 \to \lambda = 0$ - кратности 2 $\to y_0 = C_1 + C_2x$

2) $a < 0 \to \lambda = \pm\sqrt{-a} \in \mathbb{R} \to y_0 = C_1e^{\sqrt{-a}x} + C_2e^{-\sqrt{-a}x}$

3) $a > 0 \to \lambda = \pm\sqrt{-a} \in \mathbb{C} \to y_0 = C_1\cos\sqrt{a}x + C_2\sin\sqrt{a}x$

частное: $\sin x$ => ищем решение в виде $A\sin x + B\cos x$

1) $a = 0 \to -A\sin x - B\cos x = \sin x \Rightarrow A = -1, B = 0 \Rightarrow y_ч = -\sin x$

2) $a \neq 0$, $a \neq 1$ $\to -A\sin x - B\cos x + a(A\sin x + B\cos x) = \sin x \Rightarrow A = \frac{1}{a-1}, B = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow y_ч = \frac{1}{a-1}\sin x$

3) $a = 1 \to -A\sin x - B\cos x + A\sin x + B\cos x \equiv 0 \neq \sin x \Rightarrow$ при $a = 1$

решений нет

общее:

1) $a=0 \Rightarrow y = C_1 + C_2 x - \sin x$

2) $a<0 \Rightarrow y = C_1 e^{\sqrt{-a}x} + C_2 e^{-\sqrt{-a}x} + \frac{1}{a-1}\sin x$

3) $a=1 \Rightarrow$ решений нет

4) $\begin{matrix} a>0 \\ a\neq 1\end{matrix} \Rightarrow y = C_1 \cos\sqrt{a}x + C_2 \sin\sqrt{a}x + \frac{1}{a-1}\sin x$

а) При $a\neq 1$ $a=0$, $C_2:=0 \Rightarrow$ огр. решение

$a<0$, $C_1:=0, C_2:=0 \Rightarrow$ огр. решение $\Rightarrow$

$a>0$, $\forall C_1, C_2$ — огр. решение

$\Rightarrow \exists$ огр. решение при $a\neq 1$

б) При $a\neq 1$ $a=0$, $C_2:=0$, $\forall C_1 \Rightarrow$ период. решение

$a<0$, $C_1:=0$, $C_2:=0 \Leftrightarrow$ период. реш.

$a>0$, период $\sin x$ — 2π. Период $\sin\sqrt{a}x$ и $\cos\sqrt{a}x$ — $\frac{2\pi}{\sqrt{a}}$. При $\sqrt{a}\in\mathbb{Q}$, т.е. $\sqrt{a}=\frac{p}{q}$ период $2\pi pq$ — период и для $\sin\sqrt{a}x$ и для $\cos\sqrt{a}x$: $\sin(2\pi pq+x) = \sin x$, $\sin(\sqrt{a}(2\pi pq+x)) = \sin(\frac{p}{q}(2\pi pq+x)) = \sin(2\pi p^2+\sqrt{a}x) = \sin(\sqrt{a}x)$ (с $\cos\sqrt{a}x$ аналогично) $\Rightarrow$ если $\sqrt{a}\in\mathbb{Q}$, то $\exists\ \infty$ много период. решений ($\forall C_1, C_2$). Если $\sqrt{a}\in\mathbb{I}$, то решение не период. (доказывается от противного, приходя к противоречию, что $\exists p\in\mathbb{Z}, q\in\mathbb{Z}_+ : p/q\in\mathbb{I}$) $\Rightarrow$ при $\sqrt{a}\in\mathbb{I}$ $\exists!$ период. решение $C_1:=0, C_2:=0$.

Ответ: а) при $a\neq 1$ б) при $a<0$ и $a>0$: $a\neq 1$ и $\sqrt{a}\in \mathrm{I}$.

11.2.

$$\begin{cases}\dot{x}=10x-6y\\ \dot{y}=18x-11y\end{cases}\qquad A=\begin{pmatrix}10 & -6\\ 18 & -11\end{pmatrix}$$

$$\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix}10-\lambda & -6\\ 18 & -11-\lambda\end{vmatrix}=(10-\lambda)(-11-\lambda)+108=\lambda^2+\lambda-2=$$

$$=0\rightarrow\lambda=1;\ \lambda=-2$$

$$\lambda=1:\vec{h}_1:\left(\begin{array}{cc|c}9 & -6 & 0\\ 18 & -12 & 0\end{array}\right)\sim(3\ -2\,|\,0)\rightarrow\vec{h}_1=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$$

$$\lambda=2:\vec{h}_2:\left(\begin{array}{cc|c}12 & -6 & 0\\ 18 & -9 & 0\end{array}\right)\sim(2\ -1\,|\,0)\rightarrow\vec{h}_2=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

Общ. решение: $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=C_1e^{t}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}+C_2e^{-2t}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

11.8.

$$\begin{cases}\dot{x}=-5x-10y\\ \dot{y}=5x+5y\end{cases}\qquad A=\begin{pmatrix}-5 & -10\\ 5 & 5\end{pmatrix}$$

$$\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix}-5-\lambda & -10\\ 5 & 5-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-25+50=\lambda^2+25=0\rightarrow\lambda=\pm5i$$

$$\lambda=5i:\vec{h}_1:\left(\begin{array}{cc|c}-5-5i & -10 & 0\\ 5 & 5-5i & 0\end{array}\right)\sim(5\ \ 5-5i\,|\,0)\Rightarrow\vec{h}_1=\begin{pmatrix}i-1\\1\end{pmatrix}$$

$$\vec{h}_1e^{5it}=\begin{pmatrix}i-1\\1\end{pmatrix}e^{5it}=\begin{pmatrix}i-1\\1\end{pmatrix}(\cos5t+i\sin5t)=\begin{pmatrix}-\cos5t-\sin5t\\ \cos5t\end{pmatrix}+$$

$$+i\begin{pmatrix}\cos5t-\sin5t\\ \sin5t\end{pmatrix}$$

Общ. решение: $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=C_1\operatorname{Re}(\vec{h}_1e^{5it})+C_2\operatorname{Im}(\vec{h}_1e^{5it})=$

$$=C_1\begin{pmatrix}-\cos5t-\sin5t\\ \cos5t\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}\cos5t-\sin5t\\ \sin5t\end{pmatrix}$$

11.11

$$\begin{cases}\dot{x}=6x+y\\ \dot{y}=-16x-2y\end{cases}\qquad A=\begin{pmatrix}6 & 1\\ -16 & -2\end{pmatrix}$$

$$\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix}6-\lambda & 1\\ -16 & -2-\lambda\end{vmatrix}=-12-4\lambda+\lambda^2+16=(\lambda-2)^2=0\rightarrow\lambda=2\text{ - кр.2}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 1 & 0 \\ -16 & -4 & 0 \end{array}\right) \sim (4\ 1 \mid 0) \to \vec{h}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Ищем присоединённый вектор: $(A-\lambda E)\vec{h}_2 = \vec{h}_1$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 1 & -1 \\ -16 & -4 & 4 \end{array}\right) \sim (4\ 1 \mid -1) \to \underset{0}{\overset{}{4}}h_2^{(1)} + h_2^{(2)} = -1 \to \vec{h}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \vec{h}_1 e^t + C_2 (t\vec{h}_1 + \vec{h}_2) e^t = C_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} e^t +$$

$$+ C_2 \left(t \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right) e^t$$

11.18

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x + 2y - z \\ \dot{y} = -6x + 2y - 2z \\ \dot{z} = -6x - 2y - z \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ -6 & 2 & -2 \\ -6 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 2 & -1 \\ -6 & 2-\lambda & -2 \\ -6 & -2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -(2+\lambda)(-(2-\lambda)(1+\lambda) - 4) - 2(6 + 6\lambda - 12) -$$

$$-(12 + 6(2-\lambda)) = (4-\lambda^2)(1+\lambda) + 8 + 4\lambda - 12\lambda + 12 - 24 + 6\lambda = -\lambda^3 - \lambda^2 + 4\lambda +$$

$$+ 4 + 8 + 4\lambda - 12\lambda - 12 + 6\lambda = -\lambda^3 - \lambda^2 + 2\lambda = -\lambda(\lambda^2 + \lambda - 2) = -\lambda(\lambda - 1)$$

$$(\lambda + 2) = 0 \to \lambda = 0, \lambda = 1, \lambda = -2$$

$$\lambda = 0: \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & -1 & 0 \\ -6 & 2 & -2 & 0 \\ -6 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right) \underset{\text{II}-\text{III}}{\overset{\text{I}+\text{III}}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} -8 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \vec{h}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = 1: \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 2 & -1 & 0 \\ -6 & 1 & -2 & 0 \\ -6 & -2 & -2 & 0 \end{array}\right) \underset{\text{II}-\text{III}}{\overset{\text{I}+\text{III}}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} -9 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \vec{h}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = -2: \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & -1 & 0 \\ -6 & 4 & -2 & 0 \\ -6 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \underset{\text{II}-\text{III}}{\overset{\text{I}+\text{III}}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} -6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -3 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \vec{h}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 \vec{h}_1 + C_2 \vec{h}_2 e^t + C_3 \vec{h}_3 e^{-2t} = C_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} e^t + C_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-2t}$$

11.29

$$\begin{cases} \dot{x} = x+2y+3z \\ \dot{y} = 2x+4y+6z \\ \dot{z} = 3x+6y+9z \end{cases} \qquad A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 2 & 4-\lambda & 6 \\ 3 & 6 & 9-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(36-13\lambda+\lambda^2-36)-2(18-2\lambda-18)+$$

$$+3(12+3\lambda-12) = (1-\lambda)(\lambda-13)\lambda+4\lambda+9\lambda=(\lambda-13-\lambda^2+13\lambda)\lambda+13\lambda=$$

$$=(14-\lambda)\lambda^2 \to \lambda=0 \text{ кр-ти } 2,\ \lambda=14$$

$$\lambda=0: \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 6 & 0 \\ 3 & 6 & 9 & 0 \end{array}\right) \sim (1\ 2\ 3 \mid 0) \to \vec{h}_1=\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{h}_2=\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda=14: \left(\begin{array}{ccc|c} -13 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & -10 & 6 & 0 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{array}\right) \underset{3II-2III}{\overset{3I-III}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} -42 & 0 & 14 & 0 \\ 0 & -42 & 28 & 0 \end{array}\right) \to \vec{h}_3=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} e^{14t}$$

11.39

$$\begin{cases} \dot{x} = x-6y+3z \\ \dot{y} = -8x+6z \\ \dot{z} = 3x-12y+7z \end{cases} \qquad A=\begin{pmatrix} 1 & -6 & 3 \\ -8 & 0 & 6 \\ 3 & -12 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix} 1-\lambda & -6 & 3 \\ -8 & -\lambda & 6 \\ 3 & -12 & 7-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2-7\lambda+72)+6(8\lambda-56-18)+$$

$$+3(96+3\lambda) = -\lambda^3+7\lambda^2-72\lambda+\lambda^2-7\lambda+72+48\lambda-336-108+$$

$$+288+9\lambda=-\lambda^3+8\lambda^2-22\lambda-84=(\lambda+2)(-\lambda^2+10\lambda-42)=$$

$$=(\lambda+2)(\lambda-(5+\sqrt{17}i))(\lambda-(5-\sqrt{17}i))=0$$

$$\lambda=-2: \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -6 & 3 & 0 \\ -8 & 2 & 6 & 0 \\ 3 & -12 & 9 & 0 \end{array}\right) \underset{III-I}{\overset{2I-III}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & -6 & 6 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \vec{h}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda=5+\sqrt{17}i: \left(\begin{array}{ccc|c} -4-\sqrt{17}i & -6 & 3 & 0 \\ -8 & -5-\sqrt{17}i & 6 & 0 \\ 3 & -12 & 2-\sqrt{17}i & 0 \end{array}\right) \underset{3II+8III}{\overset{2I-III}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} -11-2\sqrt{17}i & 0 & 4+\sqrt{17}i & 0 \\ 0 & -111-3\sqrt{17}i & 34-8\sqrt{17}i & 0 \end{array}\right)$$

$$\frac{4+\sqrt{17}i}{-11-2\sqrt{17}i}=\frac{(4+\sqrt{17}i)(-11+2\sqrt{17}i)}{(-11-2\sqrt{17}i)(-11+2\sqrt{17}i)}=\frac{-26+\sqrt{17}i}{63}$$

$$\frac{34-8\sqrt{17}i}{-111-3\sqrt{17}i}=\frac{(34-8\sqrt{17}i)(-111+3\sqrt{17}i)}{(-111+3\sqrt{17}i)(-111-3\sqrt{17}i)}=\frac{-17+5\sqrt{17}i}{63}$$

$$\Rightarrow \vec{h}_2=\begin{pmatrix}26-\sqrt{17}i\\17-5\sqrt{17}i\\63\end{pmatrix}$$

$$\vec{h}_2e^{(5+\sqrt{17}i)t}=e^{5t}\left(\begin{pmatrix}26-\sqrt{17}i\\17-5\sqrt{17}i\\63\end{pmatrix}(\cos\sqrt{17}t+i\sin\sqrt{17}t)\right)=$$

$$=e^{5t}\left(\left(\begin{pmatrix}26\\17\\63\end{pmatrix}\cos\sqrt{17}t+\begin{pmatrix}\sqrt{17}\\5\sqrt{17}\\0\end{pmatrix}\sin\sqrt{17}t\right)+i\left(\begin{pmatrix}-\sqrt{17}\\-5\sqrt{17}\\0\end{pmatrix}\cos\sqrt{17}t+\begin{pmatrix}0\\0\\63\end{pmatrix}\sin\sqrt{17}t\right)\right)$$

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=C_1\vec{h}_1e^{-2t}+C_2\mathrm{Re}\left[\vec{h}_2e^{(5+17i)t}\right]e^{5t}+C_3\mathrm{Im}\left[\vec{h}_2e^{(5+17i)t}\right]e^{5t}=$$

$$=C_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}e^{-2t}+C_2\left(\begin{pmatrix}26\\17\\63\end{pmatrix}\cos\sqrt{17}t+\begin{pmatrix}\sqrt{17}\\5\sqrt{17}\\0\end{pmatrix}\sin\sqrt{17}t\right)e^{5t}+C_3\left(-\begin{pmatrix}\sqrt{17}\\5\sqrt{17}\\0\end{pmatrix}\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\cos\sqrt{17}t+\begin{pmatrix}0\\0\\63\end{pmatrix}\sin\sqrt{17}t\right)e^{5t}$$

11.56

$$\begin{cases}\dot{x}=4x-7y-z\\\dot{y}=2x-3y-z\\\dot{z}=-2x+2y+3z\end{cases}\qquad A=\begin{pmatrix}4&-7&-1\\2&-3&-1\\-2&2&3\end{pmatrix}$$

$$\det(A-\lambda E)=4\lambda^2+2-\lambda^3-5\lambda=(\lambda-1)^2(2-\lambda)$$

$$\lambda=1:\left(\begin{array}{ccc|c}3&-7&-1&0\\2&-4&-1&0\\-2&2&2&0\end{array}\right)\sim\begin{array}{c}2\mathrm{I}+7\mathrm{III}\\\mathrm{II}+\mathrm{III}\end{array}\left(\begin{array}{ccc|c}-8&0&12&0\\0&-2&1&0\end{array}\right)\to\vec{h}_1=\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}$$

Присоединённый: $(A-\lambda E)\vec{h}_2=\vec{h}_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}3&-7&-1&3\\2&-4&-1&1\\-2&2&2&2\end{array}\right)\sim\begin{array}{c}2\mathrm{I}+7\mathrm{III}\\\mathrm{II}+\mathrm{III}\end{array}\left(\begin{array}{ccc|c}-8&0&12&20\\0&-2&1&3\end{array}\right)\to\begin{cases}-8h_2^{(1)}+12h_2^{(3)}=20\\-2h_2^{(2)}+h_2^{(3)}=3\end{cases}\to$$

$$\to\vec{h}_2=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

$$\lambda=2:\left(\begin{array}{ccc|c}2&-7&-1&0\\2&-5&-1&0\\-2&2&1&0\end{array}\right)\sim\begin{array}{c}\mathrm{I}-\mathrm{II}+\mathrm{III}\\\mathrm{II}+\mathrm{III}\end{array}\left(\begin{array}{ccc|c}-2&0&1&0\\0&-3&0&0\end{array}\right)\to\vec{h}_3=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=C_1\vec{h}_1e^t+C_2(t\vec{h}_1+\vec{h}_2)e^t+C_3\vec{h}_3e^{2t}=C_1\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}e^t+$$

$$+C_2\left(t\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}\right)e^t+C_3\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}e^{2t}$$

11.74

$$\begin{cases}\dot{x}=2x-5y-8z\\ \dot{y}=7x-11y-17z\\ \dot{z}=-3x+4y+6z\end{cases}\qquad A=\begin{pmatrix}2&-5&-8\\7&-11&-17\\-3&4&6\end{pmatrix}$$

$$\det(A-\lambda E)=-(\lambda+1)^3=0\to\lambda=1 \text{ кр. } 3$$

$$\lambda=1:\ \left(\begin{array}{ccc|c}3&-5&-8&0\\7&-10&-17&0\\-3&4&7&0\end{array}\right)\underset{-\frac{1}{3}(\text{III}-4\text{I}')}{\overset{\substack{-\text{I}-\text{III}\\ \text{II}+10\text{I}'-7\text{III}'}}{\sim}}\left(\begin{array}{ccc|c}0&1&1&0\\0&0&0&0\\1&0&-1&0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-1&0\\0&1&1&0\end{array}\right)\to\vec{h}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

Присоединённый: $(A-\lambda E)\vec{h}_2=\vec{h}_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}3&-5&-8&1\\7&-10&-17&-1\\-3&4&7&1\end{array}\right)\underset{-\frac{1}{3}(\text{III}-4\text{I}')}{\overset{\substack{-\text{I}-\text{III}\\ \text{II}+10\text{I}'-7\text{III}'}}{\sim}}\left(\begin{array}{ccc|c}0&1&1&-2\\0&0&0&0\\1&0&-1&-3\end{array}\right)\sim\begin{array}{c}h_2^{(1)}\ h_2^{(2)}\ h_2^{(3)}\\ \left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-1&-3\\0&1&1&-2\end{array}\right)\end{array}\to\vec{h}_2=\begin{pmatrix}-3\\-2\\0\end{pmatrix}$$

Присоединённый: $(A-\lambda E)\vec{h}_3=\vec{h}_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}3&-5&-8&-3\\7&-10&-17&-2\\-3&4&7&0\end{array}\right)\underset{-\frac{1}{3}(\text{III}-4\text{I}')}{\overset{\substack{-\text{I}-\text{III}\\ \text{II}+10\text{I}'-7\text{III}'}}{\sim}}\left(\begin{array}{ccc|c}0&1&1&3\\0&0&0&0\\1&0&-1&4\end{array}\right)\sim\begin{array}{c}h_3^{(1)}\ h_3^{(2)}\ h_3^{(3)}\\ \left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-1&4\\0&1&1&3\end{array}\right)\end{array}\to\vec{h}_3=\begin{pmatrix}4\\3\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=C_1\vec{h}_1e^t+C_2(t\vec{h}_1+\vec{h}_2)e^t+C_3\left(\frac{t^2}{2}\vec{h}_1+t\vec{h}_2+\vec{h}_3\right)e^t=$$

$$=C_1\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}e^t+C_2\left(t\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3\\-2\\0\end{pmatrix}\right)e^t+C_3\left(\frac{t^2}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-3\\-2\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4\\3\\0\end{pmatrix}\right)e^t$$

11.88

$$\begin{cases}\dot{x}=9x-6y-2z\\ \dot{y}=18x-12y-3z\\ \dot{z}=18x-9y-6z\end{cases}\qquad A=\begin{pmatrix}9&-6&-2\\18&-12&-3\\18&-9&-6\end{pmatrix}$$

$$\det(A-\lambda E)=-(\lambda+3)^3$$

$$\lambda=-3:\ \left(\begin{array}{ccc|c}12&-6&-2&0\\18&-9&-3&0\\18&-9&-3&0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}6&-3&-1&0\end{array}\right)\to\vec{h}_1=\begin{pmatrix}3\\6\\0\end{pmatrix}\parallel\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix},\ \vec{h}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\6\end{pmatrix}$$

Присоединённый к $\alpha\vec{h}_1+\beta\vec{h}_2$:

$$(A-\lambda E)\vec{h}_3=\alpha\vec{h}_1+\beta\vec{h}_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}12&-6&-2&\alpha+\beta\\18&-9&-3&2\alpha\\18&-9&-3&6\beta\end{array}\right)\underset{2\text{III}-3\text{I}}{\overset{2\text{II}-3\text{I}}{\sim}}\left(\begin{array}{ccc|c}12&-6&-2&\alpha+\beta\\&0&&\alpha-3\beta\\&0&&9\beta-3\alpha\end{array}\right)\to\begin{cases}\alpha=3\beta\\9\beta=3\alpha\end{cases}\to\begin{cases}\alpha=3\\\beta=1\end{cases}$$

$$\Rightarrow 12h_3^{(1)}-6h_3^{(2)}-2h_3^{(3)}=\alpha+\beta=4\to\vec{h}_3:=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$\alpha\vec{h}_1+\beta\vec{h}_2=3\vec{h}_1+\vec{h}_2$

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=C_1\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}e^{-3t}+C_2\begin{pmatrix}1\\0\\6\end{pmatrix}e^{-3t}+C_3\left(\begin{pmatrix}4\\6\\6\end{pmatrix}t+\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)e^{-3t}$$

11.152

$$\begin{cases}\dot{x}=4x-y\\\dot{y}=x+2y+2e^{3t}\end{cases}\qquad A=\begin{pmatrix}4&-1\\1&2\end{pmatrix}$$

Однородное: $\det(A-\lambda E)=(\lambda-3)^2$

$\lambda=3$: $\left(\begin{array}{cc|c}1&-1&0\\1&-1&0\end{array}\right)\sim(1\ -1\,|\,0)\to\vec{h}_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

Присоединённый: $(A-\lambda E)\vec{h}_2=\vec{h}_1$

$$\left(\begin{array}{cc|c}1&-1&1\\1&-1&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cc|c}h_2^{(1)}&h_2^{(2)}:=0&\\1&-1&1\end{array}\right)\to\vec{h}_2=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x_0(t)\\y_0(t)\end{pmatrix}=C_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}e^{3t}+C_2\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}t+\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)e^{3t}$$

Частное: $\dot{\vec{x}}=A\vec{x}+\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}e^{3t}$, $\lambda=3$ – собс. знач. – резонанс $\Rightarrow$

ищем в виде $\vec{x}_ч(t)=\vec{Q}_{0+2}(t)e^{3t}=\begin{pmatrix}At^2+Bt+C\\Dt^2+Et+F\end{pmatrix}e^{3t}$

степень вектор-квазимногочлена $\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$ – 0-я

макс. длина жорд. цепочки – 2

Подставляя $\vec{x}_ч$ в $\dot{\vec{x}}=A\vec{x}+\vec{f}(t)=A\vec{x}+\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}e^{3t}$:

$$\begin{pmatrix}2At+B\\2Dt+E\end{pmatrix}e^{3t}+3\begin{pmatrix}At^2+Bt+C\\Dt^2+Et+F\end{pmatrix}e^{3t}=\begin{pmatrix}4&-1\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}At^2+Bt+C\\Dt^2+Et+F\end{pmatrix}e^{3t}+\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}e^{3t}$$

$$\begin{pmatrix}3At^2+(3B+2A)t+3C+B\\3Dt^2+(3E+2D)t+3F+E\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(4A-D)t^2+(4B-E)t+4C-F\\(A+2D)t^2+(B+2E)t+C+2F+2\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 3A=4A-D \\ 3B+2A=4B-E \\ 3C+B=4C-F \\ 3D=A+2D \\ 3E+2D=B+2E \\ 3F+E=C+2F+2 \end{cases} \quad \begin{cases} A=D \\ E=B-2A \\ F=C-B \\ D=A \\ B=E+2D \\ F+E=C+2 \end{cases} \quad \begin{cases} A=-1 \\ E-B=2 \\ F=C-B \\ C-B+E=C-2D=C+2 \to D=-1 \end{cases}$$

$$\vec{x}_4(t)=\begin{pmatrix} -t^2+Bt+C \\ -t^2+Et+F \end{pmatrix}e^{3t}$$

Пусть $E=0, F=0 \to B=-2+E=-2,\ C=F+B=-2 \to \vec{x}_4(t)=\begin{pmatrix} -t^2-2t-2 \\ -t^2 \end{pmatrix}e^{3t}$

Общее реш.: $\vec{x}_0(t)+\vec{x}_4(t)=C_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}e^{3t}+C_2\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}t+\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)e^{3t}-\begin{pmatrix}t^2+2t+2\\t^2\end{pmatrix}e^{3t}$

11.159

$$\begin{cases} \dot{x}=-3x-4y+4z+\sin t+\cos t \\ \dot{y}=3x+4y-5z-\sin t-\cos t \\ \dot{z}=x+y-2z \end{cases} \quad A=\begin{pmatrix} -3 & -4 & 4 \\ 3 & 4 & -5 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Однородное: $\det(A-\lambda E)=-(\lambda+1)^2(\lambda-1)$

$\lambda=1$: $\left(\begin{array}{ccc|c} -4 & -4 & 4 & 0 \\ 3 & 3 & -5 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim$

$\sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & z & y \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array} \sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & z & y \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array} \to \vec{h}_1=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\begin{array}{c} x \\ z \\ y \end{array} \to \vec{h}_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$

$\lambda=-1$: $\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -4 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & -5 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim$

$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \to \vec{h}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$

Присоединённый: $(A-\lambda E)\vec{h}_3=\vec{h}_2$

$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -4 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \to$

$\to \vec{h}_3=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

$$\vec{x}_0(t)=C_1\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}e^{t}+C_2\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}e^{-t}+C_3\left(\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}t+\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right)e^{-t}$$

$\lambda = i$ - не собс. значение => не резонанс => ищем решение в виде $\vec{x}_ч(t) = \vec{a}\sin t + \vec{b}\cos t$

Подставляя в $\dot{\vec{x}} = A\vec{x} + \vec{f}(t)$:

$$\vec{a}\cos t - \vec{b}\sin t = A\vec{a}\sin t + A\vec{b}\cos t + \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\cos t + \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\sin t$$

$$\begin{cases}\vec{a} = A\vec{b} + (1\ {-1}\ 0)^T\\ -\vec{b} = A\vec{a} + (1\ {-1}\ 0)^T\end{cases} \Rightarrow \vec{a} = -A\left(A\vec{a} + (1\ {-1}\ 0)^T\right) + (1\ {-1}\ 0)^T \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (E + A^2)\vec{a} = (E - A)(1\ {-1}\ 0)^T$$

$$\vec{a} = (E + A^2)^{-1}(E - A)(1\ {-1}\ 0)^T$$

$$(E-A)\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4 & 4 & -4\\ -3 & -3 & 5\\ -1 & -1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \vec{a} = \vec{0} \Rightarrow \vec{b} = \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{x}_ч(t) = \begin{pmatrix}-\cos t\\ \cos t\\ 0\end{pmatrix}$$

Общее реш.: $\vec{x}(t) = C_1\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}e^{t} + C_2\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}e^{-t} +$
$+ C_3\left(\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}t + \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right)e^{-t} + \begin{pmatrix}-\cos t\\ \cos t\\ 0\end{pmatrix}$

11.184

$$\begin{cases}\dot{x} = -2x + y + t\ln t\\ \dot{y} = -4x + 2y + 2t\ln t\end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix}-2 & 1\\ -4 & 2\end{pmatrix}$$

Однородное: $\det(A - \lambda E) = \lambda^2 \to \lambda = 0$ - кр. 2

$\lambda = 0$: $\left(\begin{array}{cc|c}-2 & 1 & 0\\ -4 & 2 & 0\end{array}\right) \sim (-2\ 1\ |\ 0) \to \vec{h}_1 = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

Присоединённый: $(A - \lambda E)\vec{h}_2 = \vec{h}_1$

$$\left(\begin{array}{cc|c}-2 & 1 & 1\\ -4 & 2 & 2\end{array}\right) \sim (-2\ 1\ |\ 1) \to \vec{h}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

$$\vec{x}_0(t) = C_1\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + C_2\left(t\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$$

Вариация постоянной:

$$\dot{C}_1\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+\dot{C}_2\left(t\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}t\ln t$$

$$\begin{cases}\dot{C}_1+t\dot{C}_2=t\ln t\\ 2\dot{C}_1+(2t+1)\dot{C}_2=2t\ln t\end{cases}\ \overset{\text{II}-2\text{I}}{\ }\begin{cases}\dot{C}_2=0\\ \dot{C}_1=t\ln t\end{cases}\ \begin{cases}C_2=\tilde{C}_2\\ C_1=\int t\ln t\,dt=\end{cases}$$

$$=\frac{t^2}{2}\ln t-\frac{1}{2}\int t\,dt=\frac{t^2}{2}\left(\ln t-\frac{1}{2}\right)+\tilde{C}_1$$

Общее реш.: $\vec{x}(t)=\left(\frac{t^2}{2}\left(\ln t-\frac{1}{2}\right)+\tilde{C}_1\right)\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+\tilde{C}_2\left(t\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$

11.118

$$\begin{cases}\dot{x}=x+2y\\ \dot{y}=2x+y\end{cases}\quad A=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}$$

$$\det(A-\lambda E)=(\lambda+1)(\lambda-3)$$

$$\lambda=-1:\left(\begin{array}{cc|c}2&2&0\\2&2&0\end{array}\right)\to\vec{h}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$

$$\lambda=3:\left(\begin{array}{cc|c}-2&2&0\\2&-2&0\end{array}\right)\to\vec{h}_2=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

$$S=\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix},\ S^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}$$

в базисе $\{\vec{h}_1,\vec{h}_2\}$: $A'=\begin{pmatrix}-1&0\\0&3\end{pmatrix}\to e^{A't}=\begin{pmatrix}e^{-t}&0\\0&e^{3t}\end{pmatrix}$

$$e^{At}=Se^{A't}S^{-1}=\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{-t}&0\\0&e^{3t}\end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}e^{-t}+e^{3t}&-e^{-t}+e^{3t}\\-e^{-t}+e^{3t}&e^{-t}+e^{3t}\end{pmatrix}$$

$$\vec{x}=e^{At}\vec{C}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}e^{-t}+e^{3t}&-e^{-t}+e^{3t}\\-e^{-t}+e^{3t}&e^{-t}+e^{3t}\end{pmatrix}\vec{C}$$

$$\vec{x}(0)=\begin{pmatrix}C_1\\C_2\end{pmatrix}\to\vec{C}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}C_1\\C_2\end{pmatrix}\to\vec{x}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}e^{-t}+e^{3t}&-e^{-t}+e^{3t}\\-e^{-t}+e^{3t}&e^{-t}+e^{3t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C_1\\C_2\end{pmatrix}$$

$$C_1=1,C_2=1\to\vec{x}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2e^{3t}\\2e^{3t}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}e^{3t}$$

11.122

$$\begin{cases}\dot{x}=3x+y\\ \dot{y}=-x+5y\end{cases}\quad A=\begin{pmatrix}3&1\\-1&5\end{pmatrix}$$

Гамильтон-Кели

$$\det(A-\lambda E)=(\lambda-4)^2\Rightarrow(A-4E)^2=0$$

$$e^{At}=e^{(A-4E)t+4Et}=e^{(A-4E)t}e^{4Et}\ (\text{т.к. } (A-4E) \text{ и } 4E \text{ коммутируют})$$

$$e^{4Et}=\begin{pmatrix} e^{4t} & 0 \\ 0 & e^{4t}\end{pmatrix}$$

$$e^{(A-4E)t}=E+(A-4E)t+\frac{(A-4E)^2}{2!}t^2\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(A-4E)^{k-2}}{k!/2!}t^{k-2}=E+(A-4E)t=$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1\end{pmatrix}t=\begin{pmatrix} 1-t & t \\ -t & 1+t\end{pmatrix}$$

$$e^{At}=\begin{pmatrix} 1-t & t \\ -t & 1+t\end{pmatrix}e^{4t}$$

$$\vec{x}(t)=e^{At}\vec{C}=\begin{pmatrix} 1-t & t \\ -t & 1+t\end{pmatrix}e^{4t}\vec{C}$$

$$\vec{x}(0)=\vec{C}=\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2\end{pmatrix}\rightarrow \vec{x}(t)=\begin{pmatrix} 1-t & t \\ -t & 1+t\end{pmatrix}e^{4t}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2\end{pmatrix}$$

$$C_1=1,\ C_2=1\rightarrow \vec{x}(t)=\begin{pmatrix} 1 \\ 1\end{pmatrix}e^{4t}$$

11.130

$$\begin{cases} \dot{x}=x+y \\ \dot{y}=-2x+3y\end{cases}\qquad A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3\end{pmatrix}$$

$$\det(A-\lambda E)=\lambda^2-4\lambda+5=(\lambda-(2+i))(\lambda-(2-i))$$

$$\lambda=2+i:\ \left(\begin{array}{cc|c} -1-i & 1 & 0 \\ -2 & 1-i & 0\end{array}\right)\sim(-1-i\ 1\,|\,0)\rightarrow \vec{h}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 1+i\end{pmatrix}$$

$$\lambda=2-i:\ \left(\begin{array}{cc|c} -1+i & 1 & 0 \\ -2 & 1+i & 0\end{array}\right)\sim(-1+i\ 1\,|\,0)\rightarrow \vec{h}_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 1-i\end{pmatrix}$$

$$S=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1+i & 1-i\end{pmatrix},\quad S^{-1}=\frac{1}{-2i}\begin{pmatrix} 1-i & -1 \\ -1-i & 1\end{pmatrix}$$

В базисе $\{\vec{h}_1,\vec{h}_2\}$ $A'=\begin{pmatrix} 2+i & 0 \\ 0 & 2-i\end{pmatrix}$ $e^{A't}=e^{2t}\begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it}\end{pmatrix}$

$$e^{A't}=Se^{At}S^{-1}=$$

$$Se^{At}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1+i & 1-i\end{pmatrix}e^{2t}\begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it}\end{pmatrix}=e^{2t}\begin{pmatrix} e^{it} & e^{-it} \\ (1+i)e^{it} & (1-i)e^{-it}\end{pmatrix}$$

$$Se^{At}S^{-1}=\frac{e^{2t}}{-2i}\begin{pmatrix} e^{it} & e^{-it} \\ (1+i)e^{it} & (1-i)e^{-it}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1-i & -1 \\ -1-i & 1\end{pmatrix}=$$

$$= \frac{e^{2t}}{-2i}\begin{pmatrix} e^{it}(1-i)-e^{-it}(1+i) & -e^{it}+e^{-it} \\ 2e^{it}-2e^{-it} & -(1+i)e^{it}+(1-i)e^{-it} \end{pmatrix} =$$

$$= e^{2t}\begin{pmatrix} \cos t-\sin t & \sin t \\ -2\sin t & \cos t+\sin t \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}(t) = e^{At}\vec{C} = e^{2t}\begin{pmatrix} \cos t-\sin t & \sin t \\ -2\sin t & \cos t+\sin t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$$

$$C_1=1,\ C_2=1 \to \vec{x} = e^{2t}\begin{pmatrix} \cos t \\ \cos t-\sin t \end{pmatrix}$$

2. $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$

в базисе $\{\vec{h}_j\}_1^5$: $A' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

а) собс. знач. $-\ \lambda=2$ - кр. 3, $\lambda=3$ - кр. 2

для $\lambda=2$: $\vec{h}_2$ - присоед. к $\vec{h}_1$, $\vec{h}_3$ - присоед. к $\vec{h}_2$

общ. решение $\vec{x} = C_1\vec{h}_1 e^{2t} + C_2(t\vec{h}_1+\vec{h}_2)e^{2t} + C_3\left(\frac{t^2}{2}\vec{h}_1+t\vec{h}_2+\vec{h}_3\right)e^{2t} +$
$+ C_4\vec{h}_4 e^{3t} + C_5\vec{h}_5 e^{3t}$

б) $A' = 2E_5 + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2E_5 + B$

коммутируют $\Rightarrow e^{A'} = e^{2E_5}e^{B}$

$$e^{B} = \left(\begin{array}{c|c} e^{C} & 0 \\ \hline 0 & e^{E_2} \end{array}\right),\quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ C^k = 0,\ k \geq 3 \Rightarrow e^{C} = E + C + \frac{1}{2}C^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$e^{E_2} = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix} \to e^{A'} = e^2\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e \end{pmatrix}$$

3. Д-ть: $\det e^A = e^{trA}$

Лемма 1: $tr(XY) = tr(YX)$

$\square$ $tr(XY) = \sum\limits_{i=1}^{n} (XY)_{ii} = \sum\limits_{i=1}^{n} \left(\sum\limits_{k=1}^{n} X_{ik} Y_{ki}\right) = \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\sum\limits_{i=1}^{n} Y_{ki} X_{ik}\right) = tr(YX)$ $\blacksquare$

Лемма 2: $\det e^A = \det e^{S^{-1}AS}$

$\square$ $e^{S^{-1}AS} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(S^{-1}AS)^k}{k!} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{S^{-1}ASS^{-1}AS\dots AS}{k!} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{S^{-1}A^kS}{k!} =$

$= S^{-1}\left(\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}\right) S = S^{-1}e^AS \to \det e^{S^{-1}AS} = \det S^{-1} \det e^A \det S = \det e^A$ $\blacksquare$

Д-во: Перейдём в Жорданов базис (матрица перехода-S)

В нём $\det e^{S^{-1}AS} = \det e^A$ (по Лемме 2) $= \prod\limits_{i=1}^{m} e^{\lambda_i}$ (λ_i - собс. знач.)

При этом $tr(S^{-1}AS) = \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i$

С другой стороны $tr(S^{-1}AS) = tr((S^{-1}A)S) = tr(S(S^{-1}A)) =$

$= tr((SS^{-1})A) = trA \Rightarrow e^{trA} = e^{\sum_{i=1}^{m}\lambda_i} = \prod\limits_{i=1}^{m} e^{\lambda_i}$

Таким образом, доказано $\det e^A = tre^A = \prod\limits_{i=1}^{m} e^{\lambda_i}$ $\blacksquare$

8.173

$y'' - y' - 2y = 3te^t$, $y(0) = y'(0) = 0$, $t \geq 0$

$\exists$ $y(t) \equiv 0$ при $t < 0$

$\mathcal{L}[y'' - y' - 2y] = \mathcal{L}[3te^t]$ $(*)$

$y(t) \doteqdot Y(p)$, $y'(t) \doteqdot pY(p) - y(+0) = pY(p)$, $y''(t) =$

$= p^2Y(p) - py(+0) - y'(+0) = p^2Y(p)$

$3te^t \doteqdot \frac{3}{(p-1)^2}$

$(*)$: $p^2Y(p) - pY(p) - 2Y(p) = \frac{3}{(p-1)^2} \to Y(p) = \frac{3}{(p-1)^2(p^2-p-2)}$

$$= \frac{3}{(p-1)^2(p+1)(p-2)} = 3\left[\frac{A}{(p-1)^2}+\frac{B}{p-1}+\frac{C}{p+1}+\frac{D}{p-2}\right] \to$$

$$A(p+1)(p-2)+B(p-1)(p+1)(p-2)+C(p-1)^2(p-2)+D(p-1)^2(p+1)=1$$

$$(B+C+D)p^3+(A-2B-4C-D)p^2+(-A-B+5C-D)p+(-2A+2B-2C+D)=1$$

$$\begin{cases} B+C+D=0 \\ A-2B-4C-D=0 \\ -A-B+5C-D=0 \\ -2A+2B-2C+D=1 \end{cases} \quad \begin{cases} A=-1/2 \\ B=-1/4 \\ C=-1/12 \\ D=1/3 \end{cases} \to Y(p)=\frac{-3/2}{(p-1)^2}+\frac{-1/4}{p-1}+\frac{-1/12}{p+1}+\frac{1/3}{p-2}$$

Из таблицы $t^n e^{\lambda t} \risingdotseq \frac{n!}{(p-\lambda)^{n+1}} \Rightarrow \frac{1}{(p-1)^2} \risingdotseq te^t,\ \frac{1}{p-1} = e^t,$ $\frac{1}{p+1} \risingdotseq e^{-t},\ \frac{1}{p-2} \risingdotseq e^{2t}$

$Y(p) \risingdotseq -\frac{3}{2}te^t - \frac{3}{4}e^t - \frac{1}{4}e^{-t} + e^{2t}$ - искомое

8.182

$$y''+4y=4(\cos 2t+\sin 2t),\ y(0)=0,\ y'(0)=1,\ t\geq 0$$

$$y \risingdotseq Y(p),\ y'' \risingdotseq p^2Y(p)-1 \quad (p^2+4)Y(p)-1=4$$

Из таблицы $e^{\lambda t}t\sin\omega t \risingdotseq \frac{2\omega(p-\lambda)}{((p-\lambda)^2+\omega^2)^2}$ $e^{\lambda t}t\cos\omega t \risingdotseq \frac{(p-\lambda)^2-\omega^2}{((p-\lambda)^2+\omega^2)^2}$

$$e^{\lambda t}\sin\omega t \risingdotseq \frac{\omega}{(p-\lambda)^2+\omega^2} \qquad e^{\lambda t}\cos\omega t \risingdotseq \frac{p-\lambda}{(p-\lambda)^2+\omega^2}$$

$$p^2Y(p)-1+4Y(p)=4\left(\frac{p}{p^2+4}+\frac{2}{p^2+4}\right)$$

$$Y(p)=\frac{p^2+4p+12}{(p^2+4)^2}=\frac{4p}{(p^2+4)^2}+\frac{2}{p^2+4}-\frac{p^2-4}{(p^2+4)^2} \risingdotseq$$

$$\risingdotseq t\sin 2t+\sin 2t - t\cos 2t = (1+t)\sin 2t - t\cos 2t$$

11.189

$$\begin{cases} \dot{x} = x + y + e^{2t} \\ \dot{y} = -2x + 4y + e^{2t} \end{cases} \quad x(0)=1,\ y(0)=2,\ t \geq 0$$

$$\begin{cases} pX(p) - x(+0) = X(p) + Y(p) + \dfrac{1}{p-2} \\ pY(p) - y(+0) = -2X(p) + 4Y(p) + \dfrac{1}{p-2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} Y(p) = pX(p) - 1 - X(p) - \dfrac{1}{p-2} \\ (p-4)\left(pX(p) - 1 - X(p) - \dfrac{1}{p-2}\right) = 2 - 2X(p) + \dfrac{1}{p-2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(p - 1 + \frac{2}{p-4}\right)X(p) - 1 - \frac{1}{p-2} = \frac{2}{p-4} + \frac{1}{(p-2)(p-4)}$$

$$\left(p - 1 + \frac{2}{p-4}\right)X(p) = \frac{(p-4)(p-2) + p - 4 + 2(p-2) + 1}{(p-2)(p-4)} = \frac{p^2 - 3p + 1}{(p-2)(p-4)}$$

$$X(p) = \frac{p^2 - 3p + 1}{(p-2)((p-1)(p-4)+2)} = \frac{p^2 - 3p + 1}{(p-2)^2(p-3)}$$

$$Y(p) = (p-1)X(p) - 1 - \frac{1}{p-2} = \frac{(p-1)(p^2-3p+1) - (p-2)^2(p-3) - (p-2)(p-3)}{(p-2)^2(p-3)} =$$

$$= \frac{2p^2 - 7p + 5}{(p-2)^2(p-3)}$$

Ищем $\mathcal{L}^{-1}[X(p)]$, $\mathcal{L}^{-1}[Y(p)]$ с помощью вычетов

$$\underset{\substack{p=3 \\ \text{кр.}1}}{\operatorname{Res}}(X(p)) = \lim_{p \to 3}\left[(p-3)X(p)e^{pt}\right] = e^{3t}$$

$$\underset{\substack{p=2 \\ \text{кр.}2}}{\operatorname{Res}}(X(p)) = \lim_{p \to 2}\left[\frac{d}{dp}\left((p-2)^2 X(p) e^{pt}\right)\right] = \lim_{p \to 2}\left[te^{pt}\frac{p^2-3p+1}{p-3} + \right.$$

$$\left. + e^{pt}\left(\frac{(2p-3)(p-3) - (p^2-3p+1)}{(p-3)^2}\right)\right] = te^{2t}$$

$18 - 21 + 5 = 2$

Тогда $X(p) \risingdotseq e^{3t} + te^{2t}$

$$\underset{\substack{p=3 \\ \text{кр.}1}}{\operatorname{Res}}(Y(p)) = \lim_{p \to 3}\left[(p-3)Y(p)e^{pt}\right] = 2e^{3t}$$

$$\underset{\substack{p=2 \\ \text{кр.}2}}{\operatorname{Res}}(Y(p)) = \lim_{p \to 2}\left[\frac{d}{dp}\left((p-2)^2 Y(p) e^{pt}\right)\right] = \lim_{p \to 2}\left[te^{pt}\frac{2p^2-7p+5}{p-3} + e^{pt}\right.$$

$$\cdot\,\frac{(4p-7)(p-3)-(2p^2-7p+5)}{(p-3)^2}\Bigg] = te^{2t}$$

Тогда $Y(p) \risingdotseq 2e^{3t}+2e^{2t}$

Искомый $\begin{pmatrix}x(t)\\ y(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}e^{3t}+te^{2t}\\ 2e^{3t}+te^{2t}\end{pmatrix}$

11.194

$$\begin{cases}\dot{x} = 4x+5y+4\\ \dot{y} = -4x-4y+4t\end{cases} \quad x(0)=0,\ y(0)=3,\ t\geqslant 0$$

$$\begin{cases} pX(p)-x(+0) = pX(p) = 4X(p)+5Y(p)+\frac{4}{p}\\ pY(p)-y(+0) = pY(p)-3 = -4X(p)-4Y(p)+\frac{4}{p^2}\end{cases}$$

$$\begin{cases} Y(p) = \frac{1}{5}\left((p-4)X(p)-\frac{4}{p}\right)\\ (p+4)\frac{1}{5}\left((p-4)X(p)-\frac{4}{p}\right)-3 = -4X(p)+\frac{4}{p^2}\end{cases}$$

$$(p^2-16)X(p)-\frac{4p+16}{p}-15 = -20X(p)+\frac{20}{p^2}$$

$$X(p)(p^2+4) = 19+\frac{16}{p}+\frac{20}{p^2}$$

$$X(p) = \frac{19}{p^2+4}+\frac{16}{p(p^2+4)}+\frac{20}{p^2(p^2+4)} = \frac{19p^2+16p+20}{p^2(p^2+4)}$$

$$Y(p) = \frac{1}{5}\left((p-4)\,\frac{19p^2+16p+20}{p^2(p^2+4)}-\frac{4}{p}\right) = \frac{1}{5p^2(p^2+4)}\Big(19p^3+16p^2+20p-$$

$$-76p^2-64p-80-4p^3-16p\Big) = \frac{3p^3-12p^2-12p-16}{p^2(p^2+4)}$$

$$\underset{\text{кр.2}}{\operatorname{Res}}_{p=0}\big(X(p)\big) = \lim_{p\to 0}\left[\frac{d}{dp}\left(p^2X(p)e^{pt}\right)\right] = \lim_{p\to 0}\Bigg[te^{pt}\,\frac{19p^2+16p+20}{p^2+4}+$$

$$+e^{pt}\,\frac{(38p+16)(p^2+4)-2p(19p^2+16p+20)}{(p^2+4)^2}\Bigg] = 5t+4$$

$$\underset{\text{кр.1}}{\operatorname{Res}}_{p=2i}\big(X(p)\big) = \lim_{p\to 2i}\left[(p-2i)X(p)e^{pt}\right] = \frac{-76+32i+20}{-4\cdot 4i} = \left(-\frac{7}{2}i-2\right)e^{2it}$$

$$\underset{\substack{\text{кр.1} \\ p=-2i}}{\mathrm{Res}}(X(p))=\lim_{p\to -2i}\left[(p+2i)X(p)e^{pt}\right]=\frac{-76-32i+20}{4\cdot 4i}=\left(\frac{7}{2}i-2\right)e^{-2it}$$

Тогда $X(p) \risingdotseq 4+5t+\left(-\frac{7}{2}i-2\right)(\cos 2t+i\sin 2t)+\left(\frac{7}{2}i-2\right)(\cos(-2t)+i\cdot$

$\cdot\sin(-2t))=4+5t-4\cos 2t+7\sin 2t$

$$\underset{\substack{\text{кр.2} \\ p=0}}{\mathrm{Res}}(Y(p))=\lim_{p\to 0}\left[\frac{d}{dp}\left(p^2Y(p)e^{pt}\right)\right]=\lim_{p\to 0}\left[te^{pt}\frac{3p^3-12p^2-12p-16}{p^2+4}+\right.$$

$$\left.+e^{pt}\frac{(9p^2-24p-12)(p^2+4)-2p(3p^3-12p^2-12p-16)}{(p^2+4)^2}\right]=-4t-3$$

$$\underset{\substack{\text{кр.1} \\ p=2i}}{\mathrm{Res}}(Y(p))=\lim_{p\to 2i}\left((p-2i)Y(p)e^{pt}\right)=\frac{-24i+48-24i-16}{-4\cdot 4i}=(3+2i)e^{2it}$$

$$\underset{\substack{\text{кр.1} \\ p=-2i}}{\mathrm{Res}}(Y(p))=\lim_{p\to -2i}\left((p+2i)Y(p)e^{pt}\right)=\frac{24i+48+24i-16}{4\cdot 4i}=(3-2i)e^{-2it}$$

Тогда $Y(p)\risingdotseq -3-4t+\left(\frac{9}{4}+2i\right)e^{2it}+\left(\frac{9}{4}-2i\right)e^{-2it}=$

$=-3-4t+(3+2i+3-2i)\cos 2t+(3i-2-3i-2)\sin 2t=-3-4t+6\cos 2t-$

$-4\sin 2t$

Искомый $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4+5t-4\cos 2t+7\sin 2t \\ -3-4t+6\cos 2t-4\sin 2t\end{pmatrix}$