№2(2,4)

2) $\int sh^3x\,dx = \int (ch^2x-1)\,d(chx) = \frac{1}{3}ch^3x - chx + C$

4) $\int \frac{dx}{sh^2x+ch^2x} = \int \frac{dx/ch^2x}{th^2x+1} = \int \frac{d(thx)}{th^2x+1} = arctg(thx)+C$

№3(1)

$$\int \frac{\sin 2x}{\cos^3 x}\,dx = 2\int \frac{\sin x\,dx}{\cos^2 x} = -2\int \frac{d(\cos x)}{\cos^2 x} = \frac{2}{\cos x} + C$$

№4(2)

$$\int \sin^3 x \cos^4 x\,dx = \int (\sin x \cos x)^3\,d(\sin x) = \int t^3(1-t^2)^{\frac{3}{2}}\,dt =$$

$$u=(1-t^2)^{\frac{3}{2}} \Rightarrow t=(1-u^{2/3})^{1/2} \Rightarrow dt = \frac{1}{2}(1-u^{2/3})^{-1/2}\left(-\frac{2}{3}u^{-1/3}\right)du$$

$$= \int (1-u^{2/3})^{3/2}\,u\left(-\frac{1}{3}\right)(1-u^{2/3})^{-1/2}\,u^{-1/3}\,du = -\frac{1}{3}\int (1-u^{2/3})\,u^{2/3}\,du =$$

$$= -\frac{1}{3}\left[\int u^{2/3}du - \int u^{4/3}du\right] = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{7}u^{7/3} - \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5}u^{5/3} + C =$$

$$= \frac{1}{7}(1-t^2)^{\frac{7}{2}} - \frac{1}{5}(1-t^2)^{5/2} + C = \frac{\cos^7 x}{7} - \frac{\cos^5 x}{5} + C$$

№9(1)

$$\int \frac{dx}{\cos^3 x} = \int \frac{d(\sin x)}{(1-\sin^2 x)^2} = \Big|_{t=\sin x}$$

$$\frac{1}{(1-t^2)^2} = \frac{A}{(1-t)} + \frac{B}{(1-t)^2} + \frac{C}{(1+t)} + \frac{D}{(1+t)^2}$$

$$1 = A(1-t)(1+t)^2 + B(1+t)^2 + C(1+t)(1-t)^2 + D(1-t)^2$$

$$\left.\begin{array}{l} t=1:\ 1=4B;\ t=-1:\ 1=4D \\ \text{Коэфф. при } t^3:\ 0=-A+C \\ \text{Коэфф. при } t^2:\ 0=-A+B-C+D \end{array}\right\} \Rightarrow A=B=C=D=\frac{1}{4}$$

$$= -\frac{1}{4}\ln|1-t| + \frac{1}{4}\frac{1}{1-t} + \frac{1}{4}\ln|1+t| - \frac{1}{4}\frac{1}{1+t} + C = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + \frac{1}{8}\frac{2t}{1-t^2} +$$

$$+ C = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right| + \frac{\sin x}{2\cos^2 x} + C$$

$$-\frac{1}{4}\ln|1+t| - \frac{3}{4}\frac{1}{1+t} + C = \frac{3}{4}\left(\frac{1+t-(1-t)}{(1-t^2)}\right) - \frac{1}{4}\ln|1-t^2| + C =$$

$$= \frac{3}{2}\frac{\sin x}{\cos^2 x} - \frac{1}{4}\ln\cos^2 x + C = \frac{3}{2}\frac{\sin x}{\cos^2 x} - \frac{1}{2}\ln|\cos x| + C$$

$$\frac{1}{(1-t^2)^2} = \frac{A}{1-t} + \frac{B}{(1-t)^2} + \frac{C}{1+t} + \frac{D}{(1+t)^2} \Rightarrow 1 = A(1+t)(1+t)^2 + B(1+t)^2 +$$

$$+C(1-t)(1-t)^2 + D(1-t)^2 = A(1+3t+3t^2+t^3) + B(1+2t+t^2) + C(1-3t+3t^2-t^3) +$$

$$+D(1-2t+t^2) = A+B+C+D+(3A+2B-3C-2D)t + (3A+B+3C+D)t^2 + (A-C)t^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A-C=0 \\ 3A+B+3C+D=0 \\ 3A+2B-3C-2D=0 \\ A+B+C+D=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-\frac{1}{4} \\ B=\frac{3}{4} \\ C=-\frac{1}{4} \\ D=\frac{3}{4} \end{cases} \qquad \frac{-1}{-2+1} \quad \frac{1}{1-t}$$

$$= -\frac{1}{4}\int\frac{dt}{1-t} + \frac{3}{4}\int\frac{dt}{(1-t)^2} - \frac{1}{4}\int\frac{dt}{1+t} + \frac{3}{4}\int\frac{dt}{(1+t)^2} = -\frac{1}{4}\ln|1-t| + \frac{3}{4}\frac{1}{1-t} -$$

N11(1)

$$\int\frac{\cos^3 x}{\sin^5 x}dx = \int\frac{\operatorname{ctg}^3 x}{\sin^2 x}dx = -\int\operatorname{ctg}^3 x\, d(\operatorname{ctg} x) = -\frac{\operatorname{ctg}^4 x}{4} + C$$

N15(2)

$$\int\frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}dx = \int\frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{1 + 2\sin x\cos x}dx = \frac{1}{2}\int\frac{\cos 2x\, d(2x)}{1+\sin 2x} =$$

$$= \frac{1}{2}\int\frac{d(\sin 2x)}{1+\sin 2x} = \frac{1}{2}\ln(1+\sin 2x) + C = \ln(\sin x + \cos x) + C$$

N15(5)

$$\int\frac{4\operatorname{ch}x - 3\operatorname{sh}x}{2\operatorname{ch}x - \operatorname{sh}x}dx =$$

$$4\operatorname{ch}x - 3\operatorname{sh}x = \alpha(2\operatorname{ch}x - \operatorname{sh}x) + \beta(2\operatorname{sh}x - \operatorname{ch}x)$$

$$\begin{matrix} 4 = 2\alpha - \beta \\ -3 = -\alpha + 2\beta \end{matrix} \Rightarrow 4\operatorname{ch}x - 3\operatorname{sh}x = \frac{5}{3}(2\operatorname{ch}x - \operatorname{sh}x) - \frac{2}{3}\frac{d}{dx}(2\operatorname{ch}x - \operatorname{sh}x)$$

$= \frac{5}{3}x - \frac{2}{3}\ln(2\operatorname{ch}x - \operatorname{sh}x) + C$

№21 (1,3)

1) $\int \frac{dx}{1+4\cos x} = \Big|_{t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}} \int \frac{dx}{1+4\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{1+t^2}{5-3t^2}\,\frac{2}{1+t^2}\,dt = \int\frac{2}{5-3t^2}\,dt =$

$= -\frac{2}{3}\int\frac{dt}{t^2-5/3} = -\frac{2}{3}\,\frac{\sqrt3}{2\sqrt5}\ln\left|\frac{t-\sqrt{5/3}}{t+\sqrt{5/3}}\right| + C = \frac{1}{\sqrt{15}}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\sqrt{\frac53}}{\operatorname{tg}\frac x2 - \sqrt{\frac53}}\right| + C$

3) $\int\frac{dx}{4-\sin x} = \Big|_{t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}} \int \frac{1}{4-\frac{2t}{1+t^2}}\,\frac{2}{1+t^2}\,dt = \int\frac{dt}{2t^2-t+2} = \int\frac{dt}{(\sqrt2 t - \frac{1}{2\sqrt2})^2+\frac{15}{8}} =$

$= \frac{2}{\sqrt{15}}\operatorname{arctg}\left(\frac{4t-1}{\sqrt{15}}\right)+C = \frac{2}{\sqrt{15}}\operatorname{arctg}\left(\frac{4\operatorname{tg}\frac x2 -1}{\sqrt{15}}\right)+C$

№171.

$\int x^2\arccos(2x)\,dx = \int\arccos(2x)\,d\left(\frac{x^3}{3}\right) = \frac{x^3}{3}\arccos(2x) -$

$-\int\frac{x^3}{3}\,d(\arccos(2x)) = \frac{x^3}{3}\arccos(2x) + \int\frac{x^3}{3}\,\frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx =$

$\int x^3(1-4x^2)^{-1/2}\,dx \boxed{=}$

$t=(1-4x^2)^{-1/2} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{t^2-1}}{2t} \Rightarrow dx = \frac{\frac{t}{\sqrt{t^2-1}}\cdot 2t - 2\sqrt{t^2-1}}{4t^2}\,dt = \frac{dt}{2t^2\sqrt{t^2-1}}$

$\boxed{=} \int\frac{(t^2-1)^{3/2}}{8t^3}\, t\, \frac{1}{2t^2\sqrt{t^2-1}}\,dt = \int\frac{t^2-1}{16t^4}\,dt = \int\frac{1}{16t^2}\,dt - \int\frac{1}{16t^4}\,dt =$

$= -\frac{1}{16t}+\frac{1}{48t^3}+C = -\frac{1}{16}(1-4x^2)^{1/2}+\frac{1}{48}(1-4x^2)^{3/2}$

$= \frac{x^3}{3}\arccos(2x) - \frac{1}{24}(1-4x^2)^{1/2}+\frac{1}{76}(1-4x^2)^{3/2}+C =$

$= \frac{x^3}{3}\arccos(2x) - \frac{1}{24}(1-4x^2)^{1/2}\left(1-\frac{1}{3}(1-4x^2)\right)+C =$

$$= \frac{x^3}{3}\arccos(2x) - \frac{1}{24}\sqrt{1-4x^2}\left(\frac{2}{3}+\frac{4}{3}x^2\right) + C =$$

$$= \frac{x^3}{3}\arccos(2x) - \frac{1}{36}\sqrt{1-4x^2}\,(1+2x^2) + C$$

№180

$$\int \frac{\arcsin x\, dx}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} \;(=)$$

$$\int (1-x^2)^{-\frac{3}{2}}\,dx = \Big|_{x=\sin t} \int \cos^{-3}t \cdot \cos t\,dt = \int \frac{dt}{\cos^2 t} = \operatorname{tg} t = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} = d\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$$

$$(=) \int \arcsin x\, d\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \arcsin x \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \cdot$$

$$\cdot\, d(\arcsin x) = \arcsin x \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \int \frac{x}{1-x^2}\,dx = \arcsin x \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} +$$

$$+ \frac{1}{2}\int \frac{d(-x^2)}{1-x^2} = \arcsin x \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2}\ln(1-x^2) + C$$

14. $G_i, i \in \mathbb{N}$ - произвольные открытые мн-ва в $\mathbb{R}^n$.

Д-ть, что $\bigcap_{i=1}^{m} G_i$ и $\bigcup_{i=1}^{\infty} G_i$ в $\mathbb{R}^n$ - открытые.

□ Рассм. произв. точку $x \in \bigcap_{i=1}^{m} G_i$. Т.к. $x \in G_i$, $i = 1,\dots m$, то, т.к. G_i, $i=1,\dots m$ - открытые, $\exists\, B_\varepsilon(x)$: $B_\varepsilon(x) \subset G_i$, $i = 1,\dots m \Rightarrow$

$\Rightarrow B_\varepsilon(x) \subset \bigcap_{i=1}^{m} G_i \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{m} G_i$ - открытое мн-во.

Рассм. произв. точку $x \in \bigcup_{i=1}^{\infty} G_i$. x лежит в одном из G_i, пусть в G_k, тогда, т.к. G_k - открытое $\exists\, B_\varepsilon(x)$: $B_\varepsilon(x) \subset G_k \Rightarrow B_\varepsilon(x) \subset G_k \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} G_i \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} G_i$ - открытое мн-во ■

15. Рассм. $G_n = \left(-\frac{1}{n}; \frac{1}{n}\right)$. $\bigcap_{i=1}^{\infty} G_n = \{0\}$, т.к. $\forall\, B_\varepsilon(0)\ \exists\, n > \frac{1}{\varepsilon}$:

$B_\varepsilon(0) \not\subset G_n \Rightarrow B_\varepsilon(0) \not\subset \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} G_n$, т.е. $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} G_n$ не явл. открытым, т.к. точка не явл. открытым мн-вом.

27. $F_i \subset \mathbb{R}^n$, $i \in \mathbb{N}$ - произв. замкнутые мн-ва. Д-ть, что мн-ва $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} F_i$ и $\bigcap\limits_{i=1}^{m} F_i$ - замкнутые

□ $R_n \setminus F_i$ - открытые $R_n \setminus \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} F_i = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} (R_n \setminus F_i)$ - открытое по задаче 14 $\Rightarrow \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} F_i$ - замкнутое.

$R_n \setminus \bigcap\limits_{i=1}^{m} F_i = \bigcup\limits_{i=1}^{m} (R_n \setminus F_i)$ - открытое по задаче 14 $\Rightarrow \bigcap\limits_{i=1}^{m} F_i$ - замкнутое ■

28. Рассм. $G_n = [\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}]$. $\forall x \geq 1$ и $x \leq 0$ $x \notin \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} G_n$.

$\forall x \in (0,1)\ \exists n: x \in \bigcup\limits_{i=1}^{n} G_n \Rightarrow \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} G_n = (0,1)$ - открытое, не замкнутое.

36. Доказать, что ∂E $\forall E \subset \mathbb{R}^n$ – замкнутое.

$\partial E = \overline{E} \setminus Int(E)$. $Int(E)$ не содержит точек прикосновения ∂E, т.к. $\forall x \in Int(E)\ \exists B_\varepsilon(x) \subset Int(E)$, а $\partial E \cap Int(E) = \varnothing$ при этом $\overline{E}$ содержит все точки прикосновения $\partial E \Rightarrow \partial E$ содержит все свои точки прикосновения $\Rightarrow$

$\Rightarrow \partial E$ - замкнуто ■

Т.2 $E = [1,2) \cup \{3\} \cup ((4,5] \cap \mathbb{Q}) \subset \mathbb{R}$

а) изолированные точки – $\{x \in E \mid \exists B_\varepsilon(x): B_\varepsilon(x) \cap E = \varnothing\} = \{3\}$

б) граничные точки – $\{x \in \mathbb{R} \mid \forall B_\varepsilon(x) \cap E \neq \varnothing$ и $B_\varepsilon(x) \cap (\mathbb{R} \setminus E) \neq \varnothing\} = \partial E = \{1,2,3\} \cup [4,5]$

в) внутренние точки – $\{x \in E \mid \exists B_\varepsilon(x) \subset E\} = (1,2) = Int(E)$

г) предельные точки - $\{x \in \mathbb{R} \mid \forall B_\varepsilon(x)\ (B_\varepsilon(x) \setminus \{x\}) \cap E \neq \varnothing\} =$
$= [1,2] \cup [4,5]$

д) точки прикосновения - $\{x \in \mathbb{R} \mid \forall B_\varepsilon(x) \cap E \neq \varnothing\} = [1,2] \cup \{3\} \cup$
$[4,5]$