№21.1 Ω - все матрицы $n \times n$; A - симм. $n \times n$; B - кососим. $n \times n$.

$\dim \Omega = n^2$; $\dim A = \frac{1}{2}(n^2 - n) + n$; $\dim B = \frac{1}{2}(n^2 - n)$

эл. по диагонали

$A \cap B = \{\vec{0}\} \Rightarrow A + B = A \oplus B$

$\dim(A \oplus B) = \dim A + \dim B = n^2 - n + n = n^2 = \dim \Omega \Rightarrow \Omega = A \oplus B$ ∎

№21.3(1) Ω - все столбцы высотой n

$A = \left\{ \vec{x} \in \Omega \mid \sum x_i = 0 \right\}$ $B = \left\{ \vec{x} \in \Omega \mid x_i = x_j \; \forall \; i, j = \overline{1,...n} \right\}$

$\dim \Omega = n$; $\dim B = 1$. Докажем, что $\dim A = n-1$:

1) $\dim A < \dim \Omega = n$, т.к. $A \subset \Omega$ и среди Ω есть $\vec{x} \notin A$

$\dim A \geq n-1$, т.к. $\mathrm{rg}\|\mathcal{A}\| = n-1$, где $\mathcal{A} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & & \\ & -1 & 1 & -1 \\ & & -1 & 1 \end{Vmatrix} \sim$

$\sim \begin{Vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & - & - & \\ 0 & & 1 & -1 \\ & & 1 & -1 \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{Vmatrix}$ - составлена из $\vec{x} \in A$.

т.е. $\mathrm{rg}\|\mathcal{A}\| = n-1 \leq \dim A < n = \dim \Omega \Rightarrow \dim A = n-1$

$A \cap B = \{\vec{0}\} \Rightarrow A + B = A \oplus B$; $\dim(A \oplus B) = \dim A + \dim B = n-1+1 = n =$

$= \dim \Omega \Rightarrow \Omega = A \oplus B$ ∎

№21.6(4) $\vec{x} = \|1 \; 4 \; 1\|^T$; $\vec{a}_1 = \|1 \; 1 \; 1\|^T$; $\vec{a}_2 = \|-3 \; 2 \; 0\|^T$; $\vec{a}_3 = \|-2 \; 3 \; 1\|$

$\vec{b}_1 = \|2 \; 0 \; -1\|^T$

$\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$; $\vec{x}_1 \in P$, $\vec{x}_2 \in Q$ $\vec{x}_1 = ?$

$\vec{x}_1 = \sum\limits_{i=1}^{\dim P} d_i \vec{\xi}_i$; $\{\vec{\xi}_i\}$ - базис P $\vec{x}_2 = \beta \vec{b}_1$

$\|\vec{a}_1 \; \vec{a}_2 \; \vec{a}_3\| = \begin{Vmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 1 & -3 & -3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \overset{III-I}{\sim} \begin{Vmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \overset{III-II}{\Rightarrow} \vec{\xi}_1 = \|1 \; 1 \; 1\|^T \; \vec{\xi}_2 = \|-3 \; 2 \; 0\|^T$

$\vec{x}_1 + \vec{x}_2 = \vec{x} \Rightarrow d_1 \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Vmatrix} + d_2 \begin{Vmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{Vmatrix} + \beta \begin{Vmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{Vmatrix} \Leftrightarrow \begin{Vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \beta \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{Vmatrix}$

$$\left\|\begin{matrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{matrix}\right\| \underset{\substack{II-I \\ III-I}}{\sim} \left\|\begin{matrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 5 & -2 \\ 0 & 3 & -3 \end{matrix}\right\| \underset{5III-3II}{\sim} \left\|\begin{matrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & -9 \end{matrix}\right\| - \text{невырожденная, т.е.}$$

$P \cap Q = \|\vec{0}\|$, т.е. понятие проекции определено.

$$\left\|\begin{matrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \beta \end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{matrix}\right\|^{-1} \left\|\begin{matrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{matrix}\right\| \textcircled{=}$$

$$\left\|\begin{matrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{matrix}\right.\left|\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right\| \sim \left\|\begin{matrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & -9 \end{matrix}\right.\left|\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 5 \end{matrix}\right\| \sim \left\|\begin{matrix} 5 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & -9 \end{matrix}\right.\left|\begin{matrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 5 \end{matrix}\right\| \sim$$

$$\sim \left\|\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right.\left|\begin{matrix} 2/9 & 1/3 & 4/9 \\ -1/9 & 1/3 & -2/9 \\ 2/9 & 1/3 & -5/9 \end{matrix}\right\|$$

$$\textcircled{=} \left\|\begin{matrix} 2/9 & 1/3 & 4/9 \\ -1/9 & 1/3 & -2/9 \\ 2/9 & 1/3 & -5/9 \end{matrix}\right\| \left\|\begin{matrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{matrix}\right\| \Rightarrow \alpha_1 = 2; \ \alpha_2 = 1 \Rightarrow \text{искомый } \vec{x_1} =$$

$$= 2\vec{\xi_1} + \vec{\xi_2} = \left\|\begin{matrix} 2 & -3 \\ 2 & +2 \\ 2 & +0 \end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{matrix}\right\|$$

21.7 (6,7)

6) $\vec{a_1} = \|1\ 2\ 3\|^{\top}$ $\vec{a_2} = \|4\ 3\ 1\|^{\top}$ $\vec{a_3} = \|2\ -1\ -5\|^{\top}$ $- P$

$\vec{b_1} = \|1\ 1\ 1\|^{\top}$ $\vec{b_2} = \|-3\ 2\ 0\|^{\top}$ $\vec{b_3} = \|-2\ 3\ 1\|^{\top}$ $- Q$

$$\left\|\begin{matrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & -5 \end{matrix}\right.\left|\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{matrix}\right\| \sim \left\|\begin{matrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & -11 & -11 \end{matrix}\right.\left|\begin{matrix} x_1 \\ x_2 - 2x_1 \\ x_3 - 3x_1 \end{matrix}\right\| \sim \left\|\begin{matrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}\right.\left|\begin{matrix} x_1 \\ x_2 - 2x_1 \\ 7x_1 - 11x_2 + 5x_3 \end{matrix}\right\| \Rightarrow$$

$\Rightarrow P$ задаётся $7x_1 - 11x_2 + 5x_3 = 0$ $\|7\ -11\ 5\|$

$$\left\|\begin{matrix} 1 & -3 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{matrix}\right.\left|\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{matrix}\right\| \sim \left\|\begin{matrix} 0 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{matrix}\right.\left|\begin{matrix} x_1 - x_3 \\ x_2 - x_3 \\ x_3 \end{matrix}\right\| \sim \left\|\begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{matrix}\right.\left|\begin{matrix} 2(x_1 - x_3) + 3(x_2 - x_3) \\ x_2 - x_3 \\ x_3 \end{matrix}\right\| \Rightarrow$$

$\Rightarrow Q$ задаётся $2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 0$ $\|2\ 3\ -5\|$

$$P \cap Q - \left\|\begin{matrix} 7 & -11 & 5 \\ 2 & 3 & -5 \end{matrix}\right\| \underset{7II-2I}{\sim} \left\|\begin{matrix} 7 & -11 & 5 \\ 0 & 43 & -45 \end{matrix}\right\| \underset{\substack{43I+11II \\ 7II}}{\sim} \left\|\begin{matrix} 301 & 0 & -280 \\ 0 & 301 & -315 \end{matrix}\right\| \Rightarrow$$

$$\Phi = \left\| \begin{matrix} 280 \\ 315 \\ 301 \end{matrix} \right\| \sim \left\| \begin{matrix} 40 \\ 45 \\ 43 \end{matrix} \right\| \Rightarrow \dim(P \cap Q) = 1, \text{ базис} - \| 40\ 45\ 43 \|^T$$

$$\dim(P+Q) = \dim P + \dim Q - \dim(P \cap Q) = 2+2-1 = 3, \text{ базис} - \left\|\begin{matrix}1\\0\\0\end{matrix}\right\|, \left\|\begin{matrix}0\\1\\0\end{matrix}\right\|, \left\|\begin{matrix}0\\0\\1\end{matrix}\right\|$$

7) $\vec{a_1} = \| 1\ 2\ 1\ 3 \|^T$; $\vec{a_2} = \| -1\ 8\ -6\ 5 \|^T$; $\vec{a_3} = \| 0\ 10\ -5\ 8 \|^T$ — P

$\vec{b_1} = \| 1\ 4\ -1\ 5 \|^T$; $\vec{b_2} = \| 3\ -2\ 6\ 3 \|^T$; $\vec{b_3} = \| 4\ 2\ 5\ 8 \|^T$ — Q

$$\left\| \begin{matrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 8 & 10 \\ 1 & -6 & -5 \\ 3 & 5 & 8 \end{matrix} \right\| \overset{\text{I+I}}{\sim} \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 10 & 10 \\ 1 & -5 & -5 \\ 3 & 8 & 8 \end{matrix} \right\| \Rightarrow \text{базис в } P - \| 1\ 2\ 1\ 3 \|^T,\ \| 0\ 10\ -5\ 8 \|^T$$

$$\left\| \begin{matrix} 1 & 3 & 4 \\ 4 & -2 & 2 \\ -1 & 6 & 5 \\ 5 & 3 & 8 \end{matrix} \right\| \overset{\text{I+I}}{\sim} \left\| \begin{matrix} 1 & 4 & 4 \\ 4 & 2 & 2 \\ -1 & 5 & 5 \\ 5 & 8 & 8 \end{matrix} \right\| \Rightarrow \text{базис в } Q - \| 1\ 4\ -1\ 5 \|^T,\ \| 3\ -2\ 6\ 3 \|^T$$

$$\left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 10 & 4 & -2 \\ 1 & -5 & -1 & 6 \\ 3 & 8 & 5 & 3 \end{matrix} \right\| \overset{\substack{\text{II}-2\text{I}\\ \text{III}-\text{I}\\ \text{IV}-3\text{I}}}{\sim} \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 10 & 2 & -8 \\ 0 & -5 & -2 & 3 \\ 0 & 8 & 2 & -6 \end{matrix} \right\| \overset{\substack{2\text{III}+\text{II}\\ 5\text{IV}-4\text{II}}}{\sim} \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 10 & 2 & -8 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{matrix} \right\| \sim$$

$$\overset{\substack{2\text{I}+\text{III}\\ \text{II}+\text{IV}\\ \text{IV}+\text{III}}}{\sim} \left\| \begin{matrix} 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 10 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \right\| \overset{\substack{\text{I}/2\\ \text{II}/10\\ -\text{III}/2}}{\sim} \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{matrix} \right\| \Rightarrow \overline{\Phi} = \left\| \begin{matrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{matrix} \right\| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \dim(P \cap Q) = 1, \text{ базис} - 2\left\|\begin{matrix}1\\2\\1\\3\end{matrix}\right\| - \left\|\begin{matrix}0\\10\\-5\\8\end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix}3\\-2\\6\\3\end{matrix}\right\| - \left\|\begin{matrix}1\\4\\-1\\5\end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix}-2\\-6\\7\\-2\end{matrix}\right\|$$

$$\dim(P+Q) = \dim P + \dim Q - \dim(P \cap Q) = 2+2-1 = 3$$

$$\left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 10 & 4 & -2 \\ 1 & -5 & -1 & 6 \\ 3 & 8 & 5 & 3 \end{matrix} \right\| \overset{\substack{\text{II}-\text{I}\ \text{III}-3\text{I}}}{\sim} \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 10 & 2 & -8 \\ 1 & -5 & -2 & 3 \\ 3 & 8 & 2 & -6 \end{matrix} \right\| \overset{\text{II}+\text{III}}{\sim} \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & -8 \\ 1 & -2 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & 2 & 6 \end{matrix} \right\| \Rightarrow \left\|\begin{matrix}1\\2\\1\\3\end{matrix}\right\|, \left\|\begin{matrix}0\\2\\-2\\2\end{matrix}\right\|, \left\|\begin{matrix}0\\-8\\3\\6\end{matrix}\right\| - \text{базис}$$

л.н.з.

$P+Q$

21.9 $\vec{a_1} = \| 1\ 2\ 0\ 1 \|^T$; $\vec{a_2} = \| 1\ 1\ 1\ 0 \|^T$; $\vec{a_3} = \| 0\ 1\ -1\ 1 \|^T$ — P

$\vec{b_1} = \| 1\ 0\ 1\ 0 \|^T$; $\vec{b_2} = \| 1\ 3\ 0\ 1 \|^T$; $\vec{b_3} = \| 0\ 3\ -1\ 1 \|^T$ — Q

$$\left\| \begin{matrix} 1 & 1 & 0 & x_1 \\ 2 & 1 & 1 & x_2 \\ 0 & 1 & -1 & x_3 \\ 1 & 0 & 1 & x_4 \end{matrix} \right\| \sim \left\| \begin{matrix} 1 & 1 & 0 & x_1 \\ 2 & 1 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & 0 & x_3+x_2-2x_1 \\ 0 & 0 & 0 & x_4+x_3-x_1 \end{matrix} \right\| \Rightarrow P \text{ задаёт } \left\| \begin{matrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{matrix} \right\|$$

$$\left\|\begin{matrix}1&1&0\\0&3&3\\1&0&-1\\0&1&1\end{matrix}\right|\begin{matrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{matrix}\right\| \sim \left\|\begin{matrix}1&1&0\\0&3&3\\0&0&0\\0&0&0\end{matrix}\right|\begin{matrix}x_1\\x_2\\3x_3+x_2-3x_1\\x_4+x_3-x_1\end{matrix}\right\| \Rightarrow Q \text{ задаём } \left\|\begin{matrix}-3&1&3&0\\-1&0&1&1\end{matrix}\right\|$$

$$P\cap Q - \left\|\begin{matrix}-2&1&1&0\\-3&1&3&0\\-1&0&1&1\end{matrix}\right\| \underset{\substack{I-2III\\II-3III}}{\sim} \left\|\begin{matrix}0&1&-1&-2\\0&1&0&-3\\-1&0&1&1\end{matrix}\right\| \underset{I-II}{\sim} \left\|\begin{matrix}0&0&-1&1\\0&1&0&-3\\-1&0&1&1\end{matrix}\right\| \sim \left\|\begin{matrix}1&0&-1&-1\\0&1&0&-3\\0&0&1&-1\end{matrix}\right\| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overline{\Phi} = \left\|\begin{matrix}1\\3\\1\\1\end{matrix}\right\| - \text{базис } P\cap Q \quad \dim(P\cap Q) = 1$$

$$\dim(P\cup Q) = \dim P + \dim Q - \dim P\cap Q = 3$$

$$P\cup Q - \left\|\begin{matrix}1&1&0\\2&1&1\\0&1&-1\\1&0&1\end{matrix}\right|\begin{matrix}1&1&0\\0&3&3\\1&0&-1\\0&1&1\end{matrix}\right\| \underset{IV+III-I}{\sim} \left\|\begin{matrix}1&1&0\\2&1&1\\0&1&-1\\0&0&0\end{matrix}\right|\begin{matrix}1&1&0\\0&3&3\\1&0&-1\\0&0&0\end{matrix}\right\| \nearrow \quad \text{базис } P\cup Q - \vec{a_2}, \vec{a_3}, \vec{b_1}$$

$$\underset{\vec{a_1}\,\vec{a_2}\,\vec{a_3}\quad\vec{b_1}\,\vec{b_2}\,\vec{b_3}}{} \qquad \underset{\text{л.и.з.}}{\uparrow\uparrow\uparrow}$$

$\begin{matrix}P \subseteq Q\\Q \subseteq P\end{matrix}$ - доказать

21.12(2) $\dim(P+Q) = 1 + \dim(P\cap Q) \Rightarrow$

$\Box \; \dim(P+Q) = \dim P + \dim Q - \dim(P\cap Q) = 1 + \dim(P\cap Q) \Rightarrow$

$\Rightarrow \dim(P\cap Q) = \frac{1}{2}(\dim P + \dim Q - 1)$

$\dim(P\cap Q) \le \dim P \Rightarrow \dim Q - 1 \le \dim P$

Если $P \ne Q$, то $\dim(P\cap Q) < \dim P \Rightarrow \dim Q - 1 < \dim P \Rightarrow$

$\Rightarrow \dim Q - 1 \le \dim P - 1 \Rightarrow \dim Q \le \dim P$ (✱)

С другой стороны $\dim(P\cap Q) \le \dim Q$

Если $Q \ne P$, то $\dim(P\cap Q) < \dim Q \Rightarrow \dim P - 1 < \dim Q \Rightarrow$

$\Rightarrow \dim P \le \dim Q - 1 \Rightarrow \dim P \le \dim Q$ (✱✱)

(✱),(✱✱) $\Rightarrow \dim P = \dim Q$, но $\dim(P\cap Q) = \frac{1}{2}(2\dim P - 1) \notin \mathbb{N}_0 \; \overset{\circ}{X}!$

$\Rightarrow Q \subseteq P$ или $P \subseteq Q$ ∎

21.13 $\forall P \subset \mathcal{L} \; \exists Q \subset \mathcal{L}: P \oplus Q = \mathcal{L}$

$\Box \; \supset \dim \mathcal{L} = n; \dim P = k, \{P_i\}_{i=1}^{i=k} - \text{базис } P$

Построим Q как линейную оболочку векторов $\{q_i\}_{i=1}^{i=n-k}$ дополняющих $\{p_i\}_{i=1}^{i=k}$ до базиса в L. Тогда $P+Q=L$, т.к. любой вектор из L раскладывается по $p_1,\ldots p_k, q_1,\ldots q_{n-k}$ как по базису в L. $P\cap Q=\{\vec{0}\}$, т.к. если $\exists\,\vec{x}\neq\vec{0}: \vec{x}=\alpha_1\vec{p}_1+\ldots+\alpha_n\vec{p}_n=\beta_1\vec{q}_1+\ldots+\beta_{n-k}\vec{q}_{n-k} \Rightarrow \alpha_1\vec{p}_1+\ldots\alpha_n\vec{p}_k-\beta_1\vec{q}_1-\ldots\beta_{n-k}\vec{q}_{n-k}=\vec{0}$. нетривиальная л.к. — противоречие, т.к. $p_1,\ldots p_k, q_1,\ldots q_{n-k}$ по построению - базис в $L \Rightarrow P+Q=P\oplus Q=L$ ∎