Д/З 1.

№1. $x, y, z \in \mathbb{Z}$

$\neg(x=y)\wedge((y<x)\to(2z>x))\wedge((x<y)\to(x>2z))\equiv 1$

$z=7, y=16: \neg(x=16)\wedge((16<x)\to(14>x))\wedge((x<16)\to$
$\to(x>14))\equiv 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ 1) $\neg(x=16)\equiv 1 \Rightarrow x\neq 16$

2) $[(16<x)\to(14>x)\equiv 1] \Leftrightarrow [(16\geq x)\vee(14>x)\equiv$
$\equiv 1] \Leftrightarrow [16\geq x]$

3) $[(x<16)\to(x>14)\equiv 1] \Leftrightarrow [x\geq 16 \vee x>14 \equiv$
$\equiv 1]$

Из 1, 2, 3 $\Rightarrow 16>x>14 \Rightarrow \boxed{x=15}$

№2.

x	y	z	$\bar x \vee y \vee \bar z$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

$\overline{(x\bar y z)} = \bar x \vee y \vee \bar z$

№3. $1\oplus x_1\oplus x_2 = \bar x_1 \oplus x_2 = x_1 x_2 \vee \bar x_1 \bar x_2 =$
$= x_1 x_2 \vee x_1 \bar x_1 \vee x_2 \bar x_2 \vee \bar x_1 \bar x_2 = x_1(\bar x_1 \vee x_2) \vee$
$\vee \bar x_2(\bar x_1 \vee x_2) = (\bar x_1 \vee x_2)\wedge(\bar x_2 \vee x_1) =$
$= (x_1 \to x_2)\wedge(x_2\to x_1)$ ■

№4.

а) $x \wedge (y \to z) \overset{?}{=} (x \wedge y) \to (x \wedge z)$

x	y	z	$x \wedge (y \to z)$	$(x \wedge y) \to (x \wedge z)$
0	0	0	0	1
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	1	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	1	1	1

таблицы истинности не совп. => не выполняется.

б) $x \oplus (y \leftrightarrow z) \overset{?}{=} (x \oplus y) \leftrightarrow (x \oplus z)$

x	y	z	$x \oplus (y \leftrightarrow z)$	$(x \oplus y) \leftrightarrow (x \oplus z)$
0	0	0	1	1
0	0	1	0	0
0	1	0	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0
1	1	1	0	1

таблицы истинности не совп. => не выполн.

№5.

а) $x \to y \overset{?}{=} y \to x$

при $(x,y) = (0,1)$ л.ч. равна 1, правая 0 => нет.

б) $(x \to y) \to z \overset{?}{=} x \to (y \to z)$

x	y	z	$(x\to y)\to z$	$x\to(y\to z)$
0	0	0	0	1
0	0	1	1	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	1	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	1	1	1

№6. а) $f(x_1,x_2,x_3)=00111100$

x_1	x_2	x_3	$f(x_1,x_2,x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

$f(x_1,x_2,x_3)=\overline{x_1}x_2\overline{x_3}\vee\overline{x_1}x_2x_3\vee x_1\overline{x_2}\overline{x_3}+$

$+x_1\overline{x_2}x_3=\overline{x_1}x_2(\overline{x_3}\vee x_3)\vee x_1\overline{x_2}(\overline{x_3}\vee x_3)=$

$=\overline{x_1}x_2\vee x_1\overline{x_2}=x_1\oplus x_2 \Rightarrow x_1$ и x_2 — существ., x_3 — фиктивная

б) $g(x_1,x_2,x_3)=(x_1\to(x_1\vee x_2))\to x_3=$

$=(\overline{x_1}\vee x_1\vee x_2)\to x_3=(1\vee x_2)\to x_3=$

$=1\to x_3=x_3 \Rightarrow x_3$ — сущ.; x_1, x_2 — фиктив.

№7. Д-ть: $f(x_1,\ldots,x_n)=(x_1\vee f(0,\ldots,x_n))\wedge(\overline{x_1}\vee f(1,\ldots x_n))$

$f(1,\ldots x_n)=(1\vee f(0,\ldots,x_n))\wedge(0\vee f(1,\ldots x_n))=$

$=f(1,\ldots x_n)$

$f(0,\dots,x_n) = (0 \vee f(0,\dots,x_n)) \wedge (1 \vee f(1,\dots x_n)) =$
$= f(0,\dots x_n)$

при подстановке x_1 значения обоих частей совпадают =>
=> формула верна $\blacksquare$

8. $\alpha_i^{\alpha_i} = \begin{cases} 1, \alpha_i = 0 \\ 1, \alpha_i = 1 \end{cases}$, т.к. $0^0 = \bar{0} = 1$; $1^1 = 1$

Пусть входной набор: $\alpha_1, \alpha_2 \dots \bar{\alpha}_i \dots, \alpha_n$

$\bar{\alpha}_i^{\alpha_i} = \begin{cases} 0, \alpha_i = 0 \\ 0, \alpha_i = 1 \end{cases}$, т.к. $1^0 = \bar{1} = 0$; $\bar{1}^1 = 0$ =>

=> $f_\alpha(\alpha_1, \dots \bar{\alpha}_i, \dots \alpha_n) = 0 \ \forall i$ => при этом значение ф-ции не зависит от других параметров в данном случае =>
=> ни один $x_i \neq \bar{\alpha}_i$ => $\forall i \ x_i = \alpha_i$ =>
=> $f_\alpha(x_1, \dots x_n) = 1$ только при $(x_1, \dots x_n) = (\alpha_1, \dots \alpha_n)$ $\blacksquare$

9. Д-ть: $\bigvee\limits_{i,j \le n} (x_i \oplus x_j) = (x_1 \vee x_2 \dots \vee x_n) \wedge (\bar{x}_1 \vee \dots \bar{x}_n)$

Мат. индукция:

1) $(x_1 \oplus x_2) = x_1 \bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 x_2 = x_1 \bar{x}_1 \vee x_1 \bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 x_2 \vee x_2 \bar{x}_2 =$
$= x_1(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2) \vee x_2(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2) = (x_1 \vee x_2)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2)$

2) верно $\bigvee\limits_{i,j \le n} (x_i \oplus j) = (x_1 \vee \dots \vee x_n) \wedge (\bar{x}_1 \vee \dots \vee \bar{x}_n)$

3) $(x_1 \vee \ldots \vee x_n \vee x_{n+1}) \wedge (\overline{x_1} \vee \ldots \vee \overline{x_n} \vee \overline{x_{n+1}}) = (x_1 \vee \ldots \vee x_n) \wedge$
$\wedge (\overline{x_1} \vee \ldots \vee \overline{x_n}) \vee (x_1 \ldots \vee x_n) \wedge \overline{x_{n+1}} \vee x_{n+1} \wedge$
$\wedge (\overline{x_1} \vee \ldots \overline{x_n}) \vee x_{n+1} \overline{x_{n+1}} = \bigvee\limits_{i,j \le n} (x_i \oplus x_j) \vee$
$\vee (x_1 \overline{x_{n+1}} \vee \overline{x_1} x_{n+1}) \vee (x_2 \overline{x_{n+1}} \vee \overline{x_2} x_{n+1}) \vee$
$\vee \ldots (x_n \overline{x_{n+1}} \vee \overline{x_n} x_{n+1}) = \bigvee\limits_{i,j \le n} (x_i \oplus x_j) \vee$
$\vee (x_1 \oplus x_{n+1}) \vee (x_2 \oplus x_{n+1}) \vee \ldots (x_n \oplus x_{n+1}) =$
$= \bigvee\limits_{i,j \le n} (x_i \oplus x_j) \vee \bigvee\limits_{k \le n} (x_k \oplus x_{n+1}) =$
$= \bigvee\limits_{i,j \le n+1} (x_i \oplus x_j)$

10. Докажем, что $f(x) = \overline{x}$ нельзя выразить через $\vee$ и $\wedge$. Т.к. на входе только одна переменная возможные простые связки (те которые выполняются в первую очередь) это $x \vee x$; $x \wedge x$; $x \vee 0$; $x \vee 1$; $x \wedge 0$; $x \wedge 1$; Они эквивалентны соответсвенно x; x; x; 1; 0; x. После выполнения этих связок всевозможные простые связки опять попадут в этот список. Таким образом функция будет упрощаться до этих же значений и $f(x) = x$ или $f(x) = 0$ или $f(x) = 1$. Ни одна из них не совп. с $\overline{x} \Rightarrow$ $\Rightarrow$ нельзя ∎