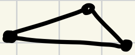
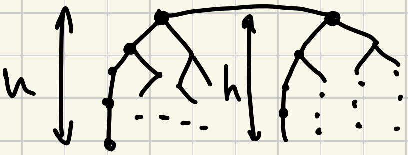
2/3 5

№1. Нет. Контрпример 

№2. Т.к. любое дерево 2-раскрашиваемое, раскрасим это дерево в два цвета и возьмём множество вершин одного цвета. По опр. правильной раскраски это мн-во независимо.

№3. Подвесим дерево за одну из вершин степени 1. Тогда из условия, что вершины степени 1 – 3, следует, что у подвешенного дерева есть только два листа => у дерева есть только одно разветвление, т.е. вершина степени 3. Ответ: 1.

№4. Нет. Докажем это. Выберем две вершины, которые мы соединим ребром. Подвесим оба дерева за них. Диаметр деревьев это их высота. Но после соединения высота



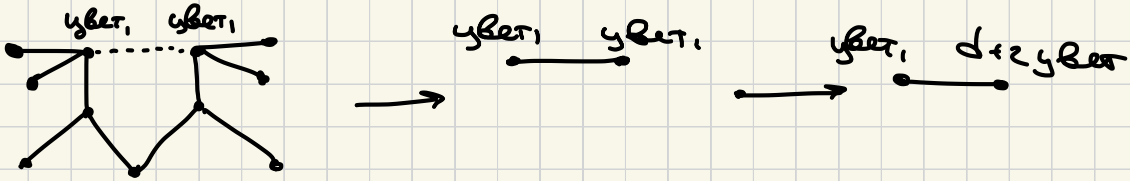
полученного дерева увеличится на один => $d_{\text{новый}} = d+1 \neq d$ ■.

№5. По индукции:

1) База: 1 вершина — выполняется

2) Шаг: $\exists$ для d верно

В графе у которого степени $\leq d+1$ уберём у каждой вершины степени $d+1$ одно ребро. Такой граф можно покрасить в силу предположения индукции в $d+1$ цвет. Рассмотрим теперь граф на вершинах $d+1$ степени в изначальном графе и удалённых рёбрах. Этот граф состоит из пар вершин, соединённых рёбрами. Если пара покрашена в один цвет, то покрасим одну из вершин в $d+2$ цвет ■



№6. В не 2-раскрашиваемом графе есть цикл нечётной длины => мин. не 2-раскрашив-

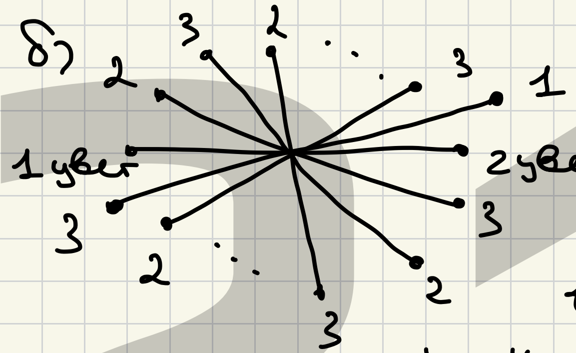
Восьмой граф — нечётный граф цикл =>
=> мин. не 2-раскр. граф на 1000 вершинах нечётный граф цикл на 999 вершинах и одна изолированная вершина ■

№7. Докажем, что в связном графе есть вершина, после удаления которой, связность не теряется. Если граф дерево, то можно удалить какой-нибудь лист. Если нет, то уберём все рёбра, мешающие быть графу деревом. Удалим вершину, не теряя связности. Вернём все рёбра, которые можно вернуть. Т.к. при добавлении рёбер связность не уйдём, то мы доказали утв. => можно убрать 1 вершину, потом ещё и ещё, т.е. убрали три вершины, связность не потерялась.

№8. а) Т.к. в не 2-раскрашиваемом графе

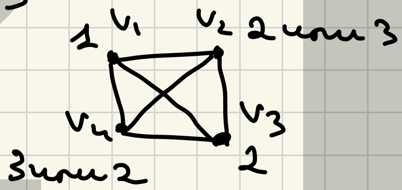
есть граф нечётной длины => у графа в условии n — нечётно.

б)



2 цвет — такая раскраска сработает для любого $n > 2$.

В $n = 2$:



Покрасим v_1 и v_3 в разные и v_2 и v_4 в разные, тогда в v_2, v_3, v_4 2 различных, причём v_2 и v_4 — различные => v_3 имеет один цвет с v_2 или v_4 => при $n=2$ нельзя.