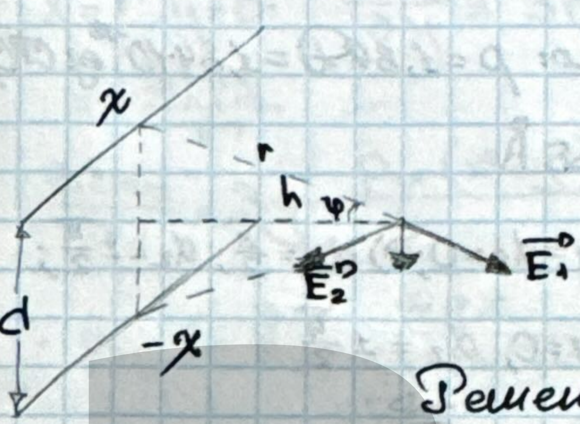
№1.14

1 неделя

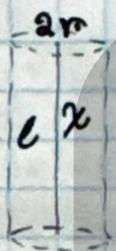


Дано: $d, \varkappa, h$

Найти: $\vec E$

Решение:

В силу симметрии $\vec E_1 = E_2$, $\vec E$ параллельно плоскости проводов.

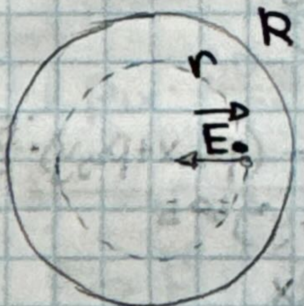


т. Гаусса: $4\pi \varkappa l = \Phi = 2\pi r l \cdot E_1 \Rightarrow E_1 = \frac{2\varkappa}{r}$

$\sin\varphi = \frac{\frac{1}{2}d}{r}$, $E = 2E_1 \sin\varphi = \frac{d}{r} \cdot \frac{2\varkappa}{r} = \frac{2\varkappa d}{h^2 + \frac{1}{4}d^2}$

$$\boxed{\text{Ответ: } E = \frac{8\varkappa d}{4h^2 + d^2}}$$

№1.21



Дано: E_0 – везде одинаково

Найти: $\rho(r)$

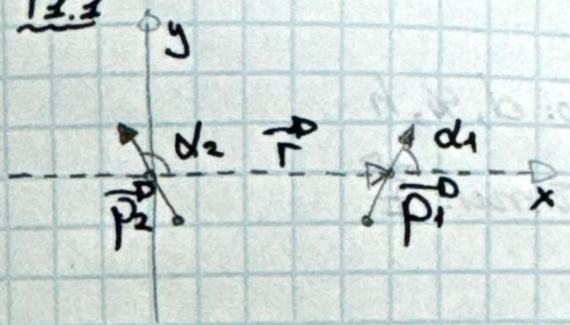
Решение:

т. Гаусса: $4\pi q(r) = 4\pi r^2 E_0$ (для любого $r < R$); $q(r) = E_0 r^2$

$\frac{dq}{dr} = 2E_0 r = 4\pi r^2 \rho(r)$; $\rho(r) = \frac{E_0}{2\pi r}$

$$\boxed{\text{Ответ: } \rho(r) = \frac{E_0}{2\pi r}}$$

Т1.1



Дано: $p = 1{,}84\,D = 1{,}84\cdot10^{-18}$ ед. СГС,

$r = 35$ Å

а) $\alpha_1=\alpha_2=0$; б) $\alpha_1=\frac{\pi}{2}$, $\alpha_2=\pm\frac{\pi}{2}$;

в) $\alpha_1=0$, $\alpha_2=\pm\frac{\pi}{2}$

Найти: $\vec F_1$, a_{max}

Решение:

$$\vec E_2=\frac{3(\vec p_2,\vec r)\vec r}{r^5}-\frac{\vec p_2}{r^3}$$

$$E_{2x}=\frac{3(p_{2x}x+p_{2y}y)x}{(x^2+y^2)^{5/2}}-\frac{p_{2x}}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

$$E_{2y}=\frac{3(p_{2x}x+p_{2y}y)y}{(x^2+y^2)^{5/2}}-\frac{p_{2y}}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

$$\frac{\partial E_{2x}}{\partial x}=3\frac{p_{2x}x+p_{2y}y}{(x^2+y^2)^{5/2}}+3x\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{p_{2x}x+p_{2y}y}{(x^2+y^2)^{5/2}}\right]-$$

$$-p_{2x}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot\frac{1}{(x^2+y^2)^{5/2}}\cdot 2x=$$

$$=3\frac{p_{2x}x+p_{2y}y}{(x^2+y^2)^{5/2}}+3x\cdot\frac{p_{2x}(x^2+y^2)^{5/2}-(p_{2x}x+p_{2y}y)\cdot\frac{5}{2}\cdot *}{(x^2+y^2)^{5}}$$

$$+3p_{2x}\cdot\frac{x}{(x^2+y^2)^{5/2}}\qquad *=(x^2+y^2)^{3/2}\cdot 2x$$

$x=r, y=0$: $$\frac{\partial E_{2x}}{\partial x}=3\frac{p_{2x}r}{r^5}+3r\cdot\frac{p_{2x}r^5-p_{2x}r\cdot\frac{5}{2}\cdot r^3\cdot 2r}{r^{10}}+$$

$$+3p_{2x}\cdot\frac{r}{r^5}=\frac{3p_{2x}}{r^4}+3p_{2x}\cdot\frac{-4}{r^4}+\frac{3p_{2x}}{r^4}=-\frac{6p_{2x}}{r^4}$$

$$\frac{\partial E_{2x}}{\partial y}=3x\cdot\frac{p_{2y}\cdot(x^2+y^2)^{5/2}-(p_{2x}x+p_{2y}y)\cdot\frac{5}{2}(x^2+y^2)^{3/2}\cdot 2y}{(x^2+y^2)^5}-$$

$$-p_{2x}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot\frac{1}{(x^2+y^2)^{5/2}}\cdot 2y$$

$x = r,\ y = 0$: $\dfrac{\partial E_{2x}}{\partial y} = 3r \cdot \dfrac{p_{2y} r^5 - p_{2x} \cdot r \cdot 0}{r^{10}} + 0 = \dfrac{3p_{2y}}{r^4}$

$$\frac{\partial E_{2y}}{\partial x} = 3y \cdot \frac{p_{2x}(x^2+y^2)^{5/2} - (p_{2x}x + p_{2y}y)\cdot \frac{5}{2}\cdot (x^2+y^2)^{3/2}\cdot 2x}{(x^2+y^2)^5} - p_{2y}\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot \frac{2x}{(x^2+y^2)^{5/2}}$$

$x = r,\ y = 0$: $\dfrac{\partial E_{2y}}{\partial x} = 3p_{2y} \cdot \dfrac{r}{r^5} = \dfrac{3p_{2y}}{r^4}$

$$\frac{\partial E_{2y}}{\partial y} = \cancel{3\cdot \frac{p_{2x}x + p_{2y}y}{(x^2+y^2)^{5/2}} + 3y \cdot \frac{p_{2y}\cdot(x^2+y^2)^{5/2} - (p_{2x}x + p_{2y}y)\cdot \frac{5}{2}(x^2+y^2)^{3/2}\cdot 2y}{(x^2+y^2)^5} - p_{2y}\left(-\frac{3}{2}\right)\frac{2y}{(x^2+y^2)^{5/2}}}$$

$$= 3\cdot \frac{p_{2x}x + p_{2y}y}{(x^2+y^2)^{5/2}} + 3y\cdot \frac{p_{2y}(x^2+y^2)^{5/2} - (p_{2x}x + p_{2y}y)\cdot \frac{5}{2}(x^2+y^2)^{3/2}\cdot 2y}{(x^2+y^2)^5} + p_{2y}\cdot \frac{3}{2}\cdot \frac{2y}{(x^2+y^2)^{5/2}}$$

$x = r,\ y = 0$: $3\,\dfrac{p_{2x} r}{r^5} = \dfrac{3p_{2x}}{r^4}$

$$\vec{F}_1 = (\vec{p}_1, \nabla)\vec{E} = \left\| \begin{matrix} p_{1x}\dfrac{\partial E_{2x}}{\partial x} + p_{1y}\dfrac{\partial E_{2x}}{\partial y} \\ p_{1x}\dfrac{\partial E_{2y}}{\partial x} + p_{1y}\dfrac{\partial E_{2y}}{\partial y} \end{matrix} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{matrix} -p_{1x}\cdot \dfrac{6p_{2x}}{r^4} + p_{1y}\cdot \dfrac{3p_{2y}}{r^4} \\ p_{1x}\cdot \dfrac{3p_{2y}}{r^4} + p_{1y}\cdot \dfrac{3p_{2x}}{r^4} \end{matrix} \right\| = \frac{3}{r^4} \left\| \begin{matrix} -2p_{1x}p_{2x} + p_{1y}p_{2y} \\ p_{1x}p_{2y} + p_{1y}p_{2x} \end{matrix} \right\|$$

а) $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$: $p_{1x} = p_{2x} = p,\ p_{1y} = p_{2y} = 0$

$$\vec{F} = \frac{3}{r^4}\left\| \begin{matrix} -2p^2 \\ 0 \end{matrix} \right\|$$

б) $\alpha_1 = \frac{\pi}{2},\ \alpha_2 = \pm\frac{\pi}{2}$: $p_{1x} = p_{2x} = 0,\ p_{1y} = p,\ p_{2y} = \pm p$

$$\vec{F} = \frac{3}{r^4}\left\| \begin{matrix} \pm p^2 \\ 0 \end{matrix} \right\|$$

в) $\alpha_1 = 0,\ \alpha_2 = \pm\frac{\pi}{2}$: $p_{1x} = p,\ p_{2x} = 0,\ p_{1y} = 0,\ p_{2y} = \pm p$

$$\vec{F} = \frac{3}{r^4}\left\| \begin{matrix} 0 \\ \pm p^2 \end{matrix} \right\|$$

$$\frac{3p^2}{r^4} = \frac{3\,(1{,}84\cdot10^{-18}\ \text{ед. СГС})^2}{(35\cdot10^{-8}\ \text{см})^4} \approx 6{,}8\cdot10^{-10}\ \text{дин}$$

При произвольных α_1 и α_2:

$p_{1x} = p\cos\alpha_1$, $p_{1y} = p\sin\alpha_1$, $p_{2x} = p\cos\alpha_2$, $p_{2y} = p\sin\alpha_2$

$$\vec{F}^D = \frac{3p^2}{r^4}\begin{Vmatrix} -2\cos\alpha_1\cos\alpha_2 + \sin\alpha_1\sin\alpha_2 \\ \cos\alpha_1\sin\alpha_2 + \sin\alpha_1\cos\alpha_2 \end{Vmatrix}$$

$|\vec{F}^D|$ - max при $\sqrt{(\sin\alpha_1\sin\alpha_2 - 2\cos\alpha_1\cos\alpha_2)^2 + (\cos\alpha_1\sin\alpha_2 + \sin\alpha_1\cos\alpha_2)^2} = A$

$$A^2 = \sin^2\alpha_1\sin^2\alpha_2 - 4\sin\alpha_1\cos\alpha_1\sin\alpha_2\cos\alpha_2 + 4\cos^2\alpha_1\cos^2\alpha_2 + \cos^2\alpha_1\sin^2\alpha_2 + 2\sin\alpha_1\cos\alpha_1\sin\alpha_2\cos\alpha_2 + \sin^2\alpha_1\cos^2\alpha_2 =$$

$$= \sin^2\alpha_1 - 2\sin\alpha_1\cos\alpha_1\sin\alpha_2\cos\alpha_2 + \cos^2\alpha_1(3\cos^2\alpha_2 + 1)$$

$$= 1 + 3\cos^2\alpha_1\cos^2\alpha_2 - 2\sin\alpha_1\sin\alpha_2\cos\alpha_1\cos\alpha_2 = \varphi(\alpha_1, \alpha_2)$$

$$\varphi'_{\alpha_1} = -3\cos^2\alpha_2\cdot 2\cos\alpha_1\sin\alpha_1 - 2\sin\alpha_2\cos\alpha_2(\cos^2\alpha_1 - \sin^2\alpha_1)$$

$$= 3\cdot\cancel{\frac{1+\cos2\alpha_2}{2}}\ \frac{\cos2\alpha_2 - 1}{2}\cdot\sin2\alpha_1 - \sin2\alpha_2\cdot\cos2\alpha_1 = 0$$

$$\varphi'_{\alpha_2} = -3\cos^2\alpha_1\cdot 2\cos\alpha_2\sin\alpha_2 - \sin2\alpha_1(\cos^2\alpha_2 - \sin^2\alpha_2) =$$

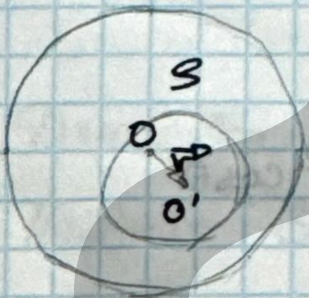
$$= -3\cdot\frac{\cos2\alpha_1 - 1}{2}\cdot\sin2\alpha_2 - \sin2\alpha_1\cos2\alpha_2 = 0$$

$$\begin{cases} -3(\cos2\alpha_1 - 1)\sin2\alpha_2 - 2\sin2\alpha_1\cos2\alpha_2 = 0 \\ -3\sin2\alpha_1(\cos2\alpha_2 - 1) - 2\cos2\alpha_1\sin2\alpha_2 = 0 \end{cases}$$

– максимум в $\alpha_1 = \alpha_2 = 0 \Rightarrow a_{max} \approx 4{,}6\cdot10^{14}\ \frac{м}{с^2}$

$$\boxed{\begin{aligned}&\text{Ответ: а) } F_{1x} = -13{,}6\cdot 10^{-10}\ \text{дин},\ F_{1y}=0\\ &\text{б) } F_{1x} = \pm 6{,}8\cdot 10^{-10}\ \text{дин},\ F_{y}=0\\ &\text{в) } F_{1x}=0,\ F_{1y}=\pm 6{,}8\cdot 10^{-10}\ \text{дин}.\\ &a_{max}\approx 4{,}6\cdot 10^{11}\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}\end{aligned}}$$

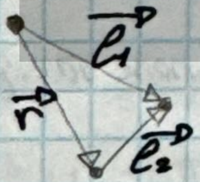
№1.22



Дано: ρ, полость с центром O', $\vec r$

Найти: $\vec E$ (в полости)

Решение:

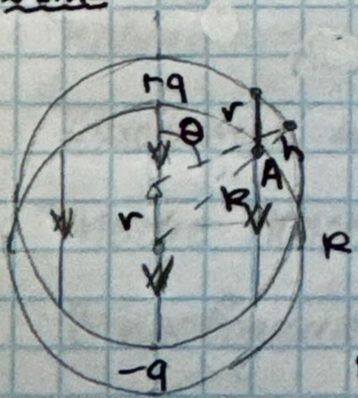


Рассмотрим полость как 2 шара с плотностями ρ и −ρ:

$$\vec E_{\Sigma} = \frac{4}{3}\pi\rho\cdot\vec l_1 + \frac{4}{3}\pi(-\rho)\vec l_2 = \frac{4}{3}\pi\rho\vec r.$$

$$\boxed{\text{Ответ: } \vec E = \frac{4}{3}\pi\rho\vec r \text{ (направлено вдоль OO')}}$$

№1.23



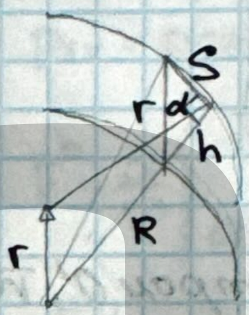
Дано: R, $\vec E_0$ - однородно

Найти: σ(θ), E - вне сферы

Решение:

Рассмотрим 2 шара с зарядами −q и +q, центры которых смещены на $\vec r$.

Для произвольной точки A: расстояние между поверхностями шаров: r



$r \ll R \Rightarrow$ можно считать, что α опирается на диаметр $\to \alpha \approx 90°$, тогда $h = r\cos\theta$

$$\begin{cases} \sigma(\theta)\cdot S = \rho \cdot S r\cos\theta \\ E_0 = \frac{4}{3}\pi\rho r \end{cases} \Rightarrow \sigma(\theta) = \frac{3E_0}{4\pi}\cos\theta$$

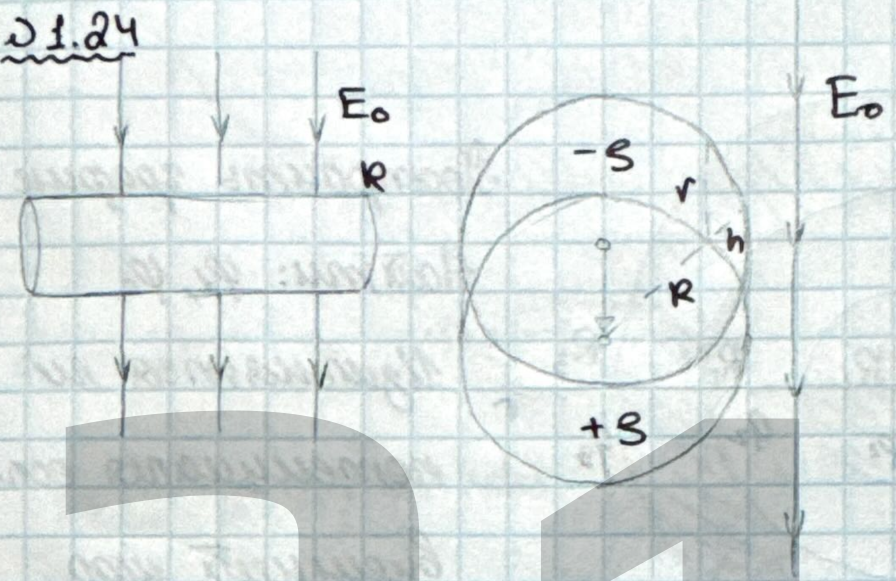
Снаружи поле сферы – поле электрического диполя с моментом (т.к. поле шаров - поле точ. зар.)

$$\vec{p} = q\vec{r} = \frac{4}{3}\pi R^3\rho\,\vec{r} = \frac{E_0}{r}\vec{r}\cdot R^3 = -\vec{E_0}R^3$$

Ответ: $\boxed{\sigma(\theta) = \frac{3E_0}{4\pi}\cos\theta}$, снаружи - поле электрического диполя с моментом $\boxed{\vec{p} = -\vec{E_0}R^3}$

№1.24

2 неделя



Дано: E_0, проводящая проволока

Найти: $\sigma(\theta)$

Решение:

Для однородно заряженного цилиндра т. Гаусса:

$$E(r)\cdot 2\pi r\cdot l = 4\pi\cdot \pi r^2 l\rho \Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = 2\pi\rho\vec{r}$$

~~Пусть заряды распределятся т~~

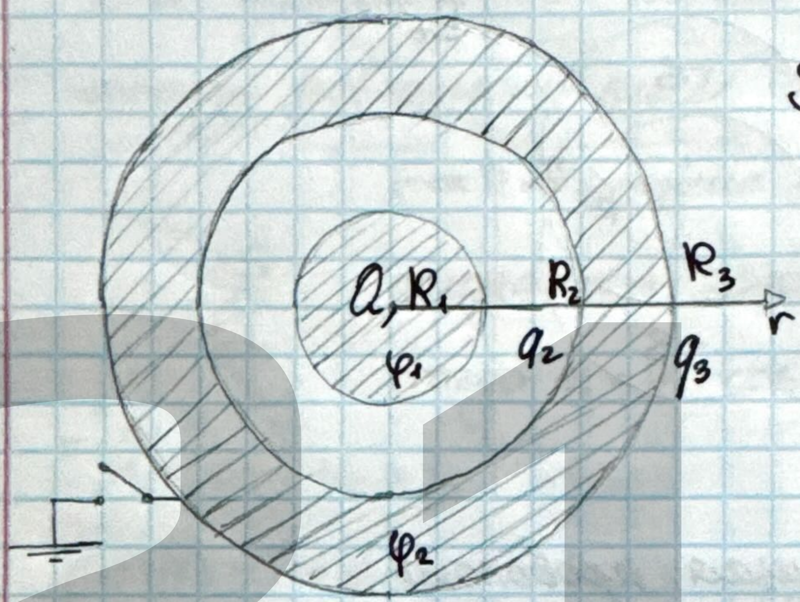
Рассмотрим 2 цилиндра, заряженных с плотностями ρ и $-\rho$, центры которых находятся на расстоянии $\vec{r}$. В произвольной точке полости: $\vec{E} = 2\pi(-\rho)\vec{l_1} + 2\pi\rho\vec{l_2} = -2\pi\rho\vec{r}$.

В проводнике поле 0 $\Rightarrow \vec{E} + \vec{E_0} = \vec{0} \Rightarrow \vec{E_0} = 2\pi\rho\vec{r}$

Аналогично предыдущей задаче: $\sigma = \frac{\rho\cdot Sh}{S} = \frac{E_0}{2\pi}\cos\theta$

Ответ: $\boxed{\sigma(\theta) = \frac{E_0}{2\pi}\cos\theta}$

№2.3



Построить график E(r)

Найти: φ_1, φ_2

Изменятся ли потенциалы если внешний шар заземлить?

Решение.

На поверхности R_2 индуцируется заряд q_2:

т. Гаусса для сферы R_0: $R_2 < R_0 < R_3$:

$\Phi = 0 = \left(\frac{Q}{R_0^2} + \frac{q_2}{R_0^2}\right) S = 0 \Rightarrow q_2 = -Q \Rightarrow$ На поверхности

R_3: $q_3 = Q$

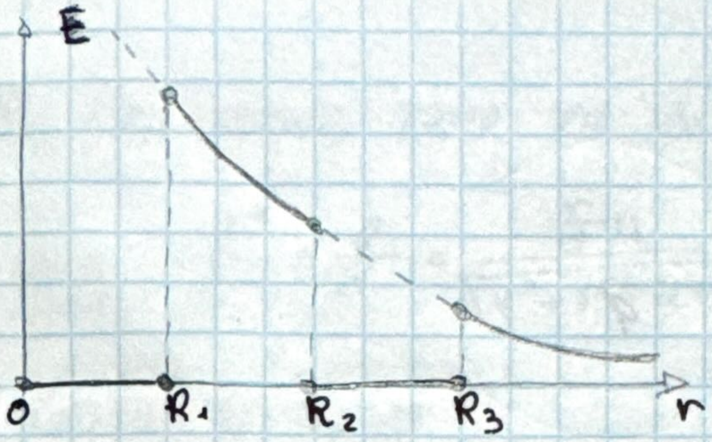
Пока $r > R_3$: $\vec{E}$ - поле точечных зарядов:

$$E = \frac{Q}{r^2} - \frac{Q}{r^2} + \frac{Q}{r^2} = \frac{Q}{r^2}$$

При $R_2 < r < R_3$: $E = 0$

При $R_1 < r < R_2$: $E = \frac{Q}{r^2}$

При $r < R_1$: $E = 0$



$$\varphi_{беск} - \varphi = -\int_0^{\infty} E(r)\,dr$$

Потенциал шара R_1: $\varphi_1 = \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q}{r^2}dr + \int_{R_3}^{+\infty} \frac{Q}{r^2}dr =$

$$= \frac{Q}{R_1} - \frac{Q}{R_2} + \frac{Q}{R_3} = Q\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right)$$

$$\varphi_2 = \int_{R_3}^{+\infty} \frac{Q}{r^2}dr = \frac{Q}{R_3}$$

Если внешний шар заземлить, то $\varphi_2' = 0$,

Аналогично $q_2' = -Q$, при этом

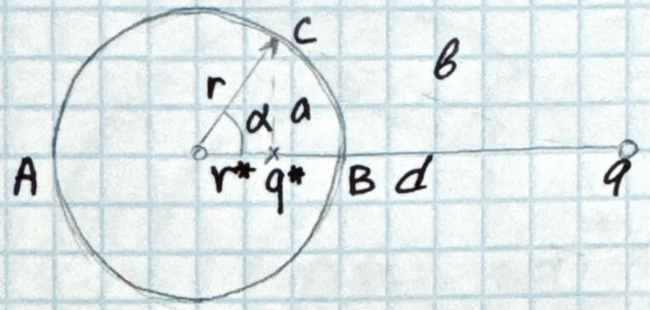
$\varphi_2' = \frac{Q}{r} - \frac{Q}{r} + \varphi_3 = 0 \Rightarrow \varphi_3 = 0$ (потенциал сферы R_3) $\Rightarrow$

$\Rightarrow q_3' = 0$, тогда поле при $r < R_3$ - такое же,

а при $r > R_3$: $E = 0 \Rightarrow \varphi_1' = \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q}{r^2}dr = -\frac{Q}{R_2} + \frac{Q}{R_1}$

Ответ: $$\boxed{\begin{gathered}\varphi_1 = Q\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right),\ \varphi_2 = \frac{Q}{R_3} \\ \varphi_1' = Q\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right),\ \varphi_2' = 0\end{gathered}}$$

№2.20



Дано: q; r; d; б) шар изолирован, $Q=0$; в) шар заземлён

Найти: F

Решение:

а) Пусть шар эквивалентен заряду q^* на расстоянии r^* от его центра

$$\varphi_A = \frac{q^*}{r+r^*} + \frac{q}{r+d} = 0 \qquad (1)$$

$$\varphi_B = \frac{q^*}{r-r^*} + \frac{q}{d-r} = 0 \qquad (2)$$

$(1) \Rightarrow q^* = -\frac{r+r^*}{r+d} q$. Подставляем в (2):

$$\frac{r+r^*}{r-r^*} \cdot \frac{1}{r+d} - \frac{1}{d-r} = 0$$

$$\frac{r+r^*}{r-r^*} = \frac{r+d}{d-r}$$

$$\cancel{rd} + r^*d - r^2 - \cancel{rr^*} = r^2 + \cancel{dr} - \cancel{rr^*} - dr^*$$

$$r^* = \frac{r^2}{d}, \quad q^* = -\frac{r+\frac{r^2}{d}}{r+d} q = \frac{r(r+d)}{d(r+d)} q = -\frac{r}{d} q$$

$$F = \frac{\frac{r}{d} q^2}{\left(d-\frac{r^2}{d}\right)^2} = \frac{rd\,q^2}{(d^2-r^2)^2}$$

~~δ)~~ Докажем, что $\forall\alpha: \varphi_C = 0$:

$$\varphi_C = \frac{q^*}{a} + \frac{q}{b} = \frac{-\frac{r}{d}q}{\sqrt{r^2 + r^{*2} - 2rr^*\cos\alpha}} + \frac{q}{\sqrt{r^2+d^2-2rd\cos\alpha}}$$

Найдём α: $\varphi_C = 0$:

$$\frac{r}{d}\sqrt{r^2+d^2-2rd\cos\alpha} = \sqrt{r^2 + \frac{r^4}{d^2} - 2\frac{r^3}{d}\cos\alpha} -$$

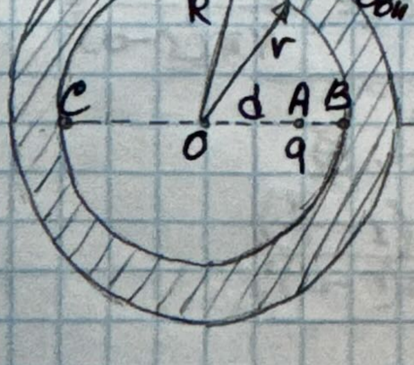
- верно при всех $\alpha \Rightarrow$ заземлённый шар эквивалентен заряду q^*.

б) Чтобы ~~поле~~ потенциал внутри шара оставался постоянным, можно лишь добавить заряд в центре шара, тогда $q_0 = -q^* = \frac{r}{d}q$

$$F = \frac{rdq^2}{(d^2-r^2)^2} - \frac{qq_0}{d^2} = \frac{rdq^2}{(d^2-r^2)^2} - \frac{rq^2}{d^3}.$$

Ответ: $\boxed{\text{а) } F = \frac{rdq^2}{(d^2-r^2)^2}, \text{ б) } F = \frac{rdq^2}{(d^2-r^2)^2} - \frac{rq^2}{d^3}}$

2.22



Дано: d, q

Найти: 1) $\sigma_{вн}$, 2) $\varphi_ш$, 3) σ_B, σ_C

Решение:

1) Рассмотрим сферу радиуса ~~R~~ немного больше R:

по т. Гаусса: $4\pi q = 4\pi\,\sigma_{вн}\cdot 4\pi R^2 \Rightarrow \sigma_{вн} = \dfrac{q}{4\pi R^2}$

2) Заряды на внутренней сфере распределятся так, чтобы внутри полости поля не было (следует из т. Гаусса) $\Rightarrow \varphi_{об} = \dfrac{4\pi R^2 \sigma_{вн}}{R} = \dfrac{q}{R}$

3) Найдём такой заряд q^*, чтобы ~~в~~ во всей ~~по~~ оболочке ~~заря~~ потенциал был одинаков и равен $\varphi_{об}$:

Пусть $OD = x$, тогда аналогично №2.20:

$$\left.\begin{aligned} q &= -\frac{r}{x}q^* \\ x &= \frac{r^2}{d} \end{aligned}\right| \Rightarrow x = \frac{r^2}{d},\ q^* = -\frac{r}{d}q$$

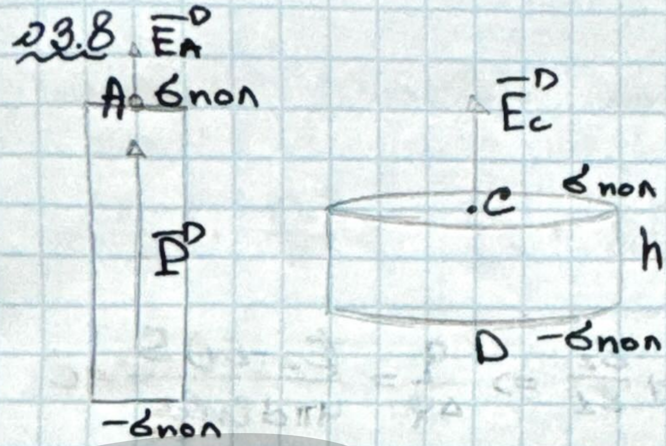
Тогда система эквивалентна зарядам q^*, q и сфере с радиусом R и зарядом q.

$$E_B = \frac{q}{(r-d)^2} + \frac{\frac{r}{d}q}{r^2(r-d)^2} = \frac{q}{(r-d)^2}\left(1+\frac{d}{r}\right) = 4\pi\sigma_B \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sigma_B = \frac{q\left(1+\frac{d}{r}\right)}{4\pi(r-d)^2}.$$ Аналогично $$\sigma_C = \frac{q\left(1-\frac{d}{r}\right)}{4\pi(r-d)^2}$$

Ответ:
$$\boxed{\begin{gathered} 1)\ \sigma_{вн} = \frac{q}{4\pi R^2};\quad 2)\ \varphi_{об} = \frac{q}{R};\\ 3)\ \sigma_B = \frac{q\left(1+\frac{d}{r}\right)}{4\pi(r-d)^2},\quad \sigma_C = \frac{q\left(1-\frac{d}{r}\right)}{4\pi(r-d)^2} \end{gathered}}$$

23.8



3 неделя

Дано: $E_A = 300\ \frac{В}{см}$,

$h = 2\cdot 10^{-2} D$

Найти: E_c

В 1-ом случае цилиндр длинный, $E_A = 2\pi\sigma_{пол}$

Во 2-ом случае E_c – поле плоскости с плотностью зарядов $\sigma_{пол}$ и диска с плотностью $-\sigma_{пол}$.

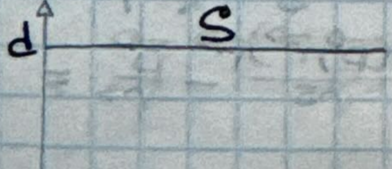
Из задачи 1.10:

$$E_c = 2\pi\sigma_{пол} - 2\pi\sigma_{пол}\left(1-\frac{h}{\sqrt{h^2+(D/2)^2}}\right) = \frac{4\pi\sigma_{пол} h}{\sqrt{4h^2+D^2}} =$$

$$= \cancel{\frac{2E_A h}{h\sqrt{4+\left(\frac{D}{h}\right)^2}}} \cancel{= \frac{E_A}{\sqrt{1+\left(\frac{D}{2h}\right)^2}}} \simeq \frac{2E_A h}{D} = 2\frac{h}{D}E_A = 12\frac{В}{см}$$

Ответ: $\boxed{E_c \simeq 2\frac{h}{D}E_A = 12\ \frac{В}{см}}$

23.26



Дано: $\varepsilon(0)=\varepsilon_1$, $\varepsilon(d)=\varepsilon_2$, d, S

ε – линейная

Найти: C.

$$\varepsilon(x) = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{d} x + \varepsilon_1$$

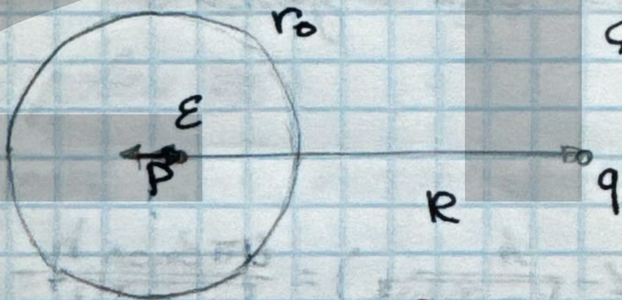
$$D = 4\pi\sigma_{ст} = \frac{4\pi q}{S}$$

$$E = \frac{D}{\varepsilon} = \frac{4\pi q}{S\left(\varepsilon_1 + \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{d} x\right)}$$

$$\Delta\varphi = \int_0^d E dx = \frac{4\pi q}{S \cdot \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{d}} \ln\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \Rightarrow \frac{q}{\Delta\varphi} = \frac{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) S}{4\pi d \ln\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} = C$$

Ответ: $\boxed{C = \frac{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) S}{4\pi d \ln\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}}$

№3.39



Дано: $R \gg r_0$, $\varepsilon - 1 \ll 1$, r_0, R, q

Найти: F

Решение:

Вектор поляризации $\vec{P} = \frac{1}{\frac{4}{3}\pi r_0^3} \vec{p}$

С другой стороны: $\vec{P} = \frac{1}{4\pi}(\varepsilon - 1)\vec{E}$

Тогда $\vec{p} = \frac{\varepsilon - 1}{3} r_0^3 \vec{E}$

$\vec{E}$ – поле заряда: $E = \frac{q}{R^2}$

Дипольный момент шара $p = \frac{\varepsilon - 1}{3} \frac{r_0^3}{R^2} q$

Поле, создаваемое диполем: $\vec{E} = \frac{3(\vec{p}, \vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3} \Rightarrow$

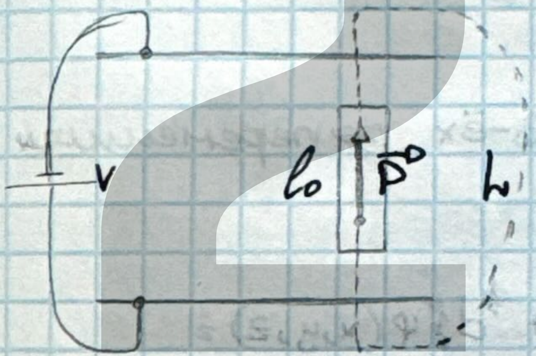
$$E = \frac{3pR^2}{R^5} - \frac{p}{R^5} = \frac{2p}{R^3}$$

На заряд действует сила $F = qE = \frac{2pq}{R^3} =$

$$= \frac{\varepsilon-1}{3}\cdot\frac{r_0^3}{R^2}\cdot q\cdot\frac{2q}{R^3} = 2\left(\frac{q}{R}\right)^2\left(\frac{r_0}{R}\right)^3\cdot\frac{\varepsilon-1}{3}$$

Ответ: $\boxed{F = 2\left(\frac{q}{R}\right)^2\left(\frac{r_0}{R}\right)^3\cdot\frac{\varepsilon-1}{3}}$

№3.77



Дано: $\vec P = const$, $V \neq 0$, l_0

Найти: $\oint_L \vec D d\vec l$

Решение:

$$\oint_L \vec E d\vec l = 0, \quad \oint_L \vec P d\vec l = Pl_0$$

$$\oint_L \vec D d\vec l = \oint_L \vec E d\vec l + 4\pi\oint_L \vec P d\vec l = 4\pi P l_0$$

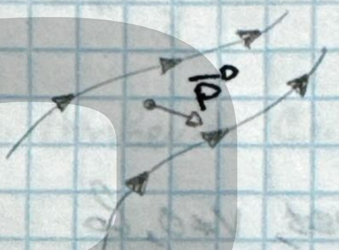
Ответ: $\boxed{\oint_L \vec D d\vec l = 4\pi P l_0.}$

4 неделя

№1.5

Вывести выражение для энергии диполя в поле $\vec{E}$ для:

а) жёсткого диполя с моментом $\vec{p}$



$W = -q\varphi(\vec{r}) + q\,\varphi(\vec{r}+\vec{l})$ – энергия двух точечных зарядов.

Ряд Тейлора для функции 3-ёх ~~р~~ переменных $\varphi(x,y,z)$:

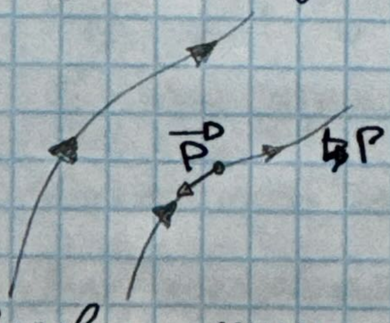
$$\varphi(x+l_x, y+l_y, z+l_z) = \varphi(x,y,z) + d\varphi(x,y,z) =$$

$$= \varphi(x,y,z) + \frac{\partial\varphi}{\partial x}l_x + \frac{\partial\varphi}{\partial y}l_y + \frac{\partial\varphi}{\partial z}l_z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi(\vec{r}+\vec{l}) = \varphi(\vec{r}) + (\nabla\varphi, \vec{l})$$

$$W = -q\varphi(\vec{r}) + q\varphi(\vec{r}) + q(\nabla\varphi, \vec{l}) = (-\vec{E}, q\vec{l}) = (-\vec{E}, \vec{p})$$

б) упругого диполя с поляризуемостью α: $\vec{p} = \alpha\vec{E}$



Энергия равна работе, которую необходимо совершить, чтобы „притащить" диполь из бесконечно

Силовые линии уходят на бесконечность, иначе было бы противоречие $\oint \vec{E}d\vec{l} = 0$

Тогда можно „тащить" диполь по силовой линии, проходящей через его конечное положение

$$\vec{F} = -\nabla W = \nabla(\vec{E}, \vec{p}) = (\nabla \vec{E}, \vec{p}) + (\vec{E}, \nabla \vec{p}) = (\vec{p}, \nabla)\vec{E} -$$

- сила, действующая на диполь во внешнем поле $\vec{E}$.

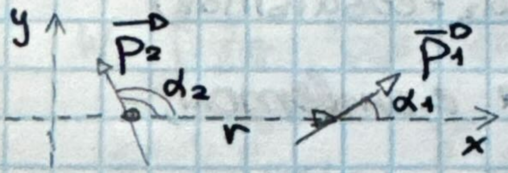
$$\delta A = -\vec{F} d\vec{l} \Rightarrow W = -\int\limits_{\Gamma} (\vec{p}, \nabla)\vec{E} d\vec{l} = -\alpha \int\limits_{0}^{E} E \frac{dE}{dl} dl =$$

$$= -\alpha \frac{E_0^2}{2}$$

$$W = -\frac{\alpha E^2}{2} = -\frac{1}{2}(\vec{p}, \vec{E})$$

Ответ: $\boxed{\text{а) } W = -(\vec{p}, \vec{E}); \text{ б) } W = -\frac{1}{2}(\vec{p}, \vec{E})}$

Т4.1



Дано: $|\vec{p}_1| = |\vec{p}_2| = p = 1{,}84$ Д,

$r = 35$ Å, α_1, α_2

Найти: W, F_x, F_y

Решение:

Поле, создаваемое $\vec{p}_2$: $\vec{E}_2 = \frac{3(\vec{p}_2, \vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}_2}{r^3}$

Энергия взаимодействия: $W = -(\vec{p}_1, \vec{E}_2) =$

$$= \frac{\vec{p}_1 \vec{p}_2}{r^3} - \frac{3(\vec{p}_1, \vec{r})(\vec{p}_2, \vec{r})}{r^5} = \frac{p^2 \cos(\alpha_2 - \alpha_1)}{r^3} - \frac{3p^2 \cos\alpha_1 \cos\alpha_2}{r^3} =$$

$$= \frac{p^2}{r^3}(\sin\alpha_1\sin\alpha_2 - 2\cos\alpha_1\cos\alpha_2)$$

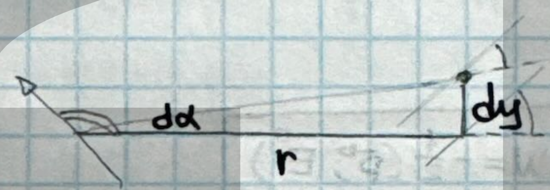
$$\vec F = -\nabla W \Rightarrow F_x = -\frac{\partial W}{\partial x} = -p^2(\sin\alpha_1\sin\alpha_2 - 2\cos\alpha_1\cos\alpha_2)\cdot$$

$$\cdot \frac{-3}{r^4}\cdot\frac{x}{r} = \frac{3p^2(\sin\alpha_1\sin\alpha_2 - 2\cos\alpha_1\cos\alpha_2)}{r^5}\cdot x$$

$$F_y = (\text{аналогично}) = \frac{3p^2(\sin\alpha_1\sin\alpha_2 - 2\cos\alpha_1\cos\alpha_2)}{r^5}\cdot y -$$

$$- \frac{p^2}{r^3}(\sin\alpha_1\sin\alpha_2 - 2\cos\alpha_1\cos\alpha_2)'_y$$

Слагаемое добавляется, так как α_1 и α_2 зависят от y-компоненты $\vec r$



$$d\alpha = \frac{dy}{r}$$

$$d\alpha_1 = d\alpha_2 = -d\alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha'_{1y} = \alpha'_{2y} = -\frac{1}{r}$$

Тогда $F_y = \frac{p^2}{r^4}(\sin\alpha_1\cos\alpha_2 + \cos\alpha_1\sin\alpha_2 + 2\sin\alpha_1\cos\alpha_2 + 2\cos\alpha_1\sin\alpha_2) = \frac{3p^2}{r^4}(\sin\alpha_1\cos\alpha_2 + \cos\alpha_1\sin\alpha_2)$

Проекции сил согласуются с ответом, полученном в П.1.1.

Ответ:

$$\boxed{\begin{aligned} W &= \frac{p^2}{r^3}(\sin\alpha_1\sin\alpha_2 - 2\cos\alpha_1\cos\alpha_2) \\ F_x &= \frac{3p^2}{r^4}(\sin\alpha_1\sin\alpha_2 - 2\cos\alpha_1\cos\alpha_2) \\ F_y &= \frac{3p^2}{r^4}(\sin\alpha_1\cos\alpha_2 + \cos\alpha_1\sin\alpha_2) \end{aligned}}$$

3.44

Дано: масса электрона определяется из $W = mc^2$, W - электростатическая энергия заряда электрона.

1) $\rho = const$; 2) $\sigma = const$

Найти: r_0

Решение:

$\omega = \frac{E^2}{8\pi}$; $W = \int\limits_{пр-во} \omega dV$

1) $E \cdot 4\pi r^2 = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho \cdot 4\pi \Rightarrow E = \frac{4}{3}\pi r \rho$ - внутри шара

$\frac{4}{3}\pi r_0^3 \rho = e \Rightarrow E = \frac{r}{r_0^3} e$

Снаружи: $E = \frac{e}{r^2}$

$W = \int\limits_0^{r_0} \frac{1}{8\pi} \cdot \frac{r^2 e^2}{r_0^6} \cdot 4\pi r^2 dr + \int\limits_{r_0}^{+\infty} \frac{1}{8\pi} \cdot \frac{e^2}{r^4} \cdot 4\pi r^2 dr =$

$= \frac{e^2}{2}\left(\frac{1}{r_0^6}\int\limits_0^{r_0} r^4 dr + \int\limits_{r_0}^{+\infty} \frac{dr}{r^2}\right) = \frac{e^2}{2}\left(\frac{1}{5r_0} + \frac{1}{r_0}\right) = \frac{3e^2}{5r_0}$

$mc^2 = \frac{3e^2}{5r_0} \Rightarrow r_0 = \frac{3e^2}{5mc^2} = \frac{3(4{,}8 \cdot 10^{-10} \text{ ед. СГС})^2}{5 \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-28} г \cdot (3 \cdot 10^{10} \frac{см}{с})^2} \approx$

$\approx 1{,}7 \cdot 10^{-13}$ см

2) Внутри $E = 0$, снаружи $E = \frac{e}{r^2}$

$W = \int\limits_{r_0}^{+\infty} \frac{1}{8\pi}\left(\frac{e}{r^2}\right)^2 \cdot 4\pi r^2 dr = \frac{e^2}{2r_0}$

$mc^2 = \frac{e^2}{2r_0} \Rightarrow r_0 = \frac{e^2}{2mc^2} = \frac{5}{6}$ (значение пункта 1) $\approx$

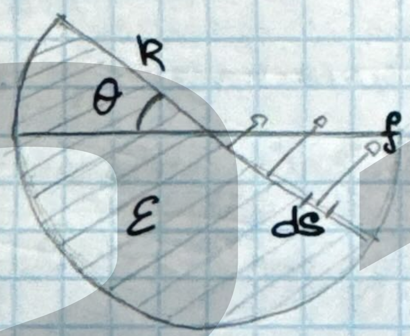
$\approx 1{,}4 \cdot 10^{-13}$ см.

Ответ: $\boxed{1)\ r_0 = \frac{3e^2}{5mc^2} \approx 1{,}7\cdot 10^{-13}\text{ см};\ 2)\ r_0 = \frac{e^2}{2mc^2} \approx 1{,}4\cdot 10^{-13}\text{ см}}$

№3.67

Дано: R, d, V, ε

Найти: M



Решение:

$$C_1 = \frac{\varepsilon S_1}{4\pi d} = \frac{1}{4\pi d}\cdot\frac{(\pi-\theta)R^2}{2}\varepsilon = \frac{(\pi-\theta)\varepsilon R^2}{8\pi d}$$

$$C_2 = \frac{S_2}{4\pi d} = \frac{\theta R^2}{8\pi d}$$

$$C = C_1 + C_2 = \frac{R^2}{8\pi d}\left((\pi-\theta)\varepsilon + \theta\right)$$

$$W = \frac{CV^2}{2} = \frac{R^2V^2}{16\pi d}\left(\pi\varepsilon - (\varepsilon-1)\theta\right)$$

Рассмотрим силы, действующие на единицу площади.

$$d\delta A = f\,dS\cdot r\,d\theta = dM\cdot d\theta$$

Суммируем: $\delta A = M\,d\theta$.

$$\delta A = dW \Rightarrow M = W'_\theta = -\frac{R^2V^2}{16\pi d}(\varepsilon-1)$$

Ответ: $\boxed{M = \frac{(\varepsilon-1)R^2V^2}{16\pi d}}$

03.88

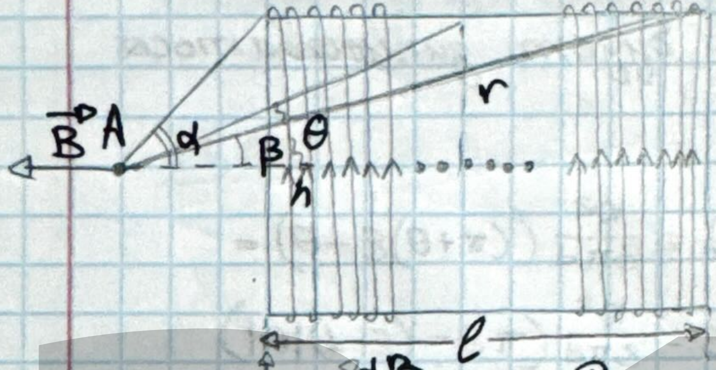
Если $\theta<0$, то ёмкость будет записываться иначе:

$$C=\frac{R^2}{8\pi d}\left((-\theta)+(\pi-(-\theta))\varepsilon\right)=\frac{R^2}{8\pi d}\left((\pi+\theta)\varepsilon-\theta\right)=$$

$$=\frac{R^2}{8\pi d}\left(\pi\varepsilon+(\varepsilon-1)\theta\right),\text{ т.е. } C=\frac{R^2}{8\pi d}\left(\pi\varepsilon-(\varepsilon-1)|\theta|\right)$$

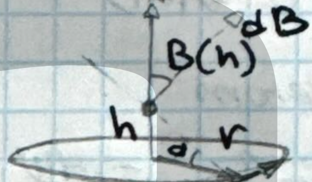
То есть C, а следовательно. W, имеют излом в точке $\theta=0$, а значит производная $\frac{dW}{d\theta}$ не существует.

5 неделя №5.5



Дано: α, β, I, N, l

Найти: B



Решение:

$$d\vec{B} = \frac{I}{c}\,\frac{[d\vec{l} \times \vec{R}]}{R^3}$$

$$dB = \frac{I\,dl \cdot R}{cR^3}$$

$$dB_{верт} = dB \cdot \cos\alpha = dB \cdot \frac{r}{R} = \frac{I\,dl\,r}{cR^3}$$

$$B = \int_0^{2\pi r} \frac{Ir\,dl}{cR^3} = \frac{2\pi r^2 I}{c(r^2+h^2)^{3/2}}$$ - поле витка с током

В точке А:

$$dB = \frac{2\pi r^2 I}{c(r^2+h^2)^{3/2}} \cdot \frac{N\,dh}{l} = \frac{2\pi r^2 I N}{cl} \cdot \frac{dh}{(r^2+h^2)^{3/2}} =$$

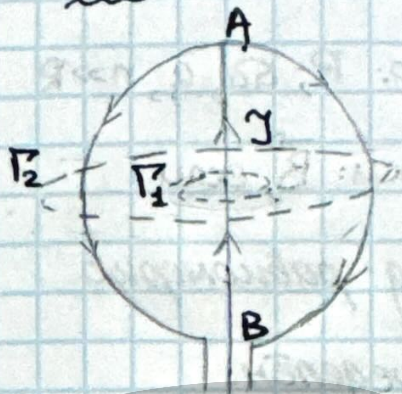
$$= \frac{2\pi I N}{cl\cancel{\xi}} \cdot \frac{d\xi}{(1+\xi^2)^{3/2}},$$ где $\xi = \frac{h}{r} = \cancel{t}ctg\,\theta$

$$dB = \frac{2\pi I N}{cl} \cdot \frac{\cancel{-}\,d\theta}{\sin^2\theta \cdot \frac{1}{\sin^3\theta}} = \frac{+2\pi I N}{cl} \cdot \sin\theta\,d\theta$$

$$B = \int_\beta^\alpha dB = \frac{2\pi I N}{cl}(\cos\beta - \cos\alpha)$$

Ответ: $B = \frac{2\pi I N}{cl}(\cos\beta - \cos\alpha)$

05.10



Дано: Ток I течёт по проводу от B к A, а затем по сфере от A к B

Найти: B_{in}, B_{out}

Рассмотрим контур Γ_1: полностью внутри сферы.

Теорема циркуляции: $B_{in} \cdot 2\pi r = \frac{4\pi}{c} I \Rightarrow B_{in} = \frac{2I}{cr}$

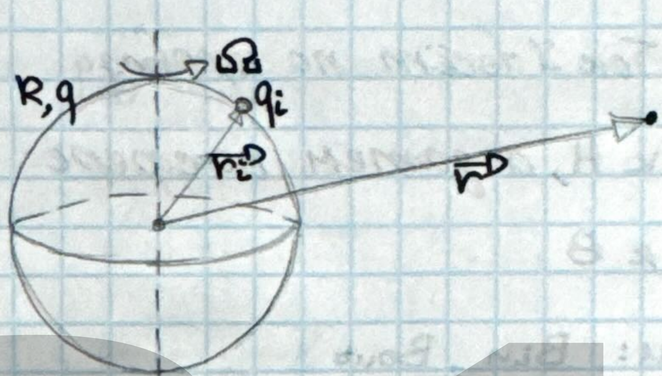
В силу симметрии $B_{in\tau} = const$ (по углам), $B_{in r} = 0$, т.к. иначе поток не нулевой, поэтому левая часть в уравнении записывается как $B_{in} \cdot 2\pi r$.

Аналогично для Γ_2 (вне сферы):

$B_{out} \cdot 2\pi r = \frac{4\pi}{c}(I - I) = 0 \Rightarrow B_{out} = 0$

Ответ: $\boxed{B_{in} = \frac{2I}{cr},\ B_{out} = 0}$

№5.17



Дано: $R, \Omega, q, r \gg R$

Найти: $\vec{B}$, если заряд равномерно распределён:

1) по поверхности

2) по объёму

Решение:

Магнитный момент системы зарядов:

$$\vec{m} = \frac{1}{2c}\sum q_i [\vec{r_i} \times \vec{v_i}] = \frac{q}{2cm}\sum m[\vec{r_i} \times \vec{v_i}] =$$

$$= \frac{q}{2cm}\vec{L}.$$

$\vec{L} = I\vec{\Omega}$, I - момент инерции

$$\vec{m} = \frac{qI}{2cm}\vec{\Omega}$$

1) заряд распределён по поверхности $\Rightarrow I = \frac{2}{3}mR^2$

Тогда $\vec{m} = \frac{q}{2cm}\cdot\frac{2}{3}mR^2\vec{\Omega} = \frac{qR^2}{3c}\vec{\Omega}$

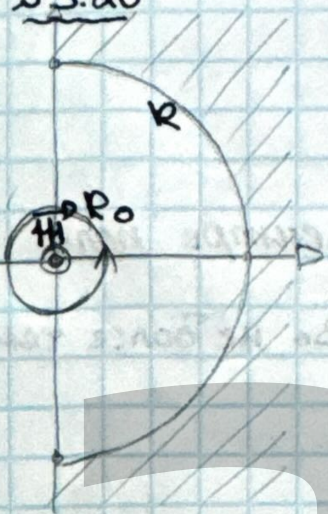
$$\vec{B} = \frac{3(\vec{m}\vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{m}}{r^3} = \frac{qR^2}{3cr^3}\left(\frac{3(\vec{\Omega}\vec{r})\vec{r}}{r^2} - \vec{\Omega}\right)$$

2) $I = \frac{2}{5}mR^2$, $\vec{m} = \frac{q}{2cm}\cdot\frac{2}{5}mR^2\vec{\Omega} = \frac{qR^2}{5c}\vec{\Omega}$

$$\vec{B} = \frac{qR^2}{5cr^3}\left(\frac{3(\vec{\Omega}\vec{r})\vec{r}}{r^2} - \vec{\Omega}\right)$$

Ответ: $\boxed{1)\ \vec{B} = \frac{qR^2}{3cr^3}\left(\frac{3(\vec{\Omega}\vec{r})\vec{r}}{r^2} - \vec{\Omega}\right)\quad 2)\ \vec{B} = \frac{qR^2}{5cr^3}\left(\frac{3(\vec{\Omega}\vec{r})\vec{r}}{r^2} - \vec{\Omega}\right)}$

№5.26



Дано: $R_0, I, R = 10R_0$

Найти: Φ - через заштрихованную часть плоскости

Решение:

Считаем, что $R \gg R_0$ $\left(\frac{R_0}{R} = 0{,}1\right)$, тогда поле $\vec{B}$ - есть поле магнитного диполя

$$\mathfrak{M} = \frac{IS}{c}$$

$$\vec{B} = \frac{3(\vec{\mathfrak{M}}\vec{r}^{\,0})\vec{r}^{\,0}}{r^5} - \frac{\vec{\mathfrak{M}}}{r^3} = -\frac{\vec{\mathfrak{M}}}{r^3}$$

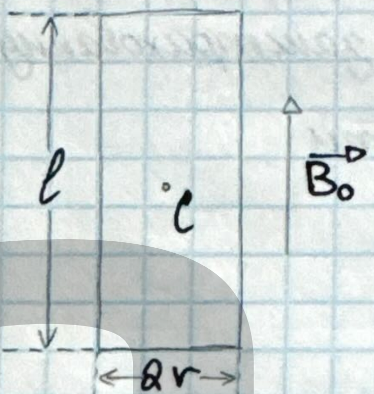
$$\Phi = \int_R^{+\infty} \frac{\mathfrak{M}}{r^3} \cdot \frac{1}{2} 2\pi r\, dr = \pi \mathfrak{M} \int_R^{+\infty} \frac{dr}{r^2} = \frac{\pi \mathfrak{M}}{R} = \frac{\pi^2 R_0^2 I}{c \cdot 10R_0} =$$

$$= \frac{\pi^2 R_0 I}{10c}$$

Ответ: $\boxed{\Phi = \frac{\pi^2 R_0 I}{10c}}$

6 неделя

№6.7



Дано: $r, B_0, \mu >> 1$

Найти: l_{min}: в центре поле отличается от μB_0 не более чем на 1%

Решение:

$$\vec{B} = \mu \vec{H} = \mu(\vec{B_0} - 4\pi \vec{I}) \Rightarrow 4\pi \vec{I} = \left(1 - \frac{1}{\mu}\right)\vec{B}$$

Из задачи 6.8: $B_{cj} \approx 2\pi I\left(2 - \frac{r^2}{(\frac{1}{2}l)^2}\right) = 4\pi I\left(1 - 2\frac{r^2}{l^2}\right)$

$$B_c = B_0 + 4\pi I\left(1 - 2\frac{r^2}{l^2}\right) = B_0 + \left(1 - \frac{1}{\mu}\right)\left(1 - 2\frac{r^2}{l^2}\right)B_c$$

$$\cancel{B_c \cdot 0 = B_0 - B_c}$$

$$B_c\left(1 - 1 + \frac{1}{\mu} + 2\frac{r^2}{l^2} - \frac{2r^2}{\mu l^2}\right) = B_0$$

$$B_c = \frac{\mu B_0}{1 + 2\mu\frac{r^2}{l^2} - 2\frac{r^2}{l^2}} = \frac{\mu B_0}{1 + 2\frac{r^2}{l^2}(\mu - 1)}$$

$$\frac{\mu B_0 - B_c}{\mu B_0} \leq 0{,}01$$

$$0{,}99 \leq \frac{1}{1 + 2\frac{r^2}{l^2}(\mu - 1)}$$

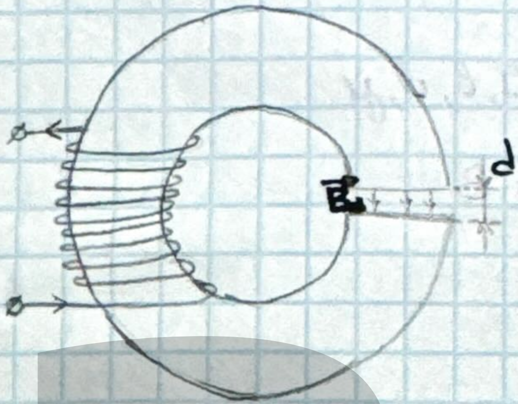
$$(1 - 0{,}01)\left(1 + 2\frac{r^2}{l^2}(\mu - 1)\right) \leq 1$$

$$-0{,}01 + 2\frac{r^2}{l^2}(\mu - 1) - 0{,}02\frac{r^2}{l^2}(\mu - 1) \leq 0$$

$$2\frac{r^2}{l^2}(\mu - 1) \leq 0{,}01 \qquad l^2 \geq 200 r^2(\mu - 1) \Rightarrow l \geq 10\sqrt{2}\, r\sqrt{\mu - 1}$$

Ответ: $\boxed{l_{min} = 10\sqrt{2}\, r\sqrt{\mu - 1}}$

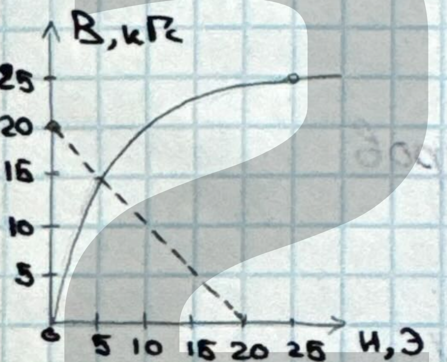
№6.17



Дано: $l = 1м$, $d = 1мм$,

$N = 1600$, $J = 1A$, $B(H)$

Найти: B_d



Решение:

В сердечнике $B_{кат} = \mu H_з$

в зазоре $B_{зазор} = H_{зазор}$

При этом из граничных условий

для поля B: $B_{зазор} = B_{кат} = \mu H_0$

$$\oint_l \vec{H} d\vec{l} = \frac{4\pi}{c} J_{от} \Rightarrow d\mu H_0 + lH_0 = \frac{4\pi}{c} JN \Rightarrow dB_0 + lH_0 = \frac{4\pi}{c} JN$$

– уравнение прямой $B = \frac{4\pi JN}{cd} - \frac{l}{d} H$

Пересечение с осью B: $\frac{4\pi JN}{cd} = 20{,}1 кГс$

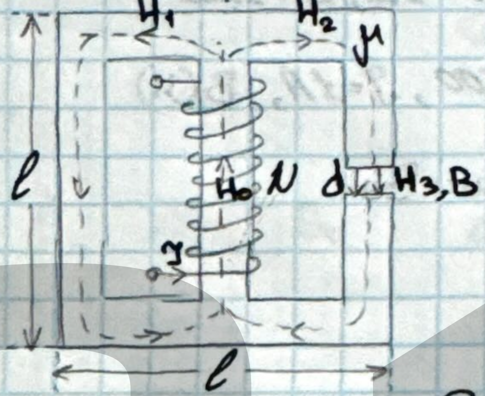
Угол наклона в масштабе данного графика:

$tg\alpha = \frac{1}{1000} \cdot \frac{l}{d} = 1$ $\left(\frac{1}{1000}, т.к. \frac{Э}{кГс} \right)$

Пересечение при $B \simeq 15 кГс$

Ответ: $\boxed{B \simeq 15 кГс}$

№6.12



Дано: N, I, l, d, μ

Найти: B

Решение:

Циркуляция для двух контуров

$$\begin{cases} H_0 l + 2\cdot\frac{1}{2} l H_1 + H_1 l = \frac{4\pi}{c} IN \\ H_0 l + H_2 l + H_2(l-d) + H_3 d = \frac{4\pi}{c} IN \end{cases}$$

Из граничных условий: $B_2 = B_3 \Rightarrow \mu H_2 = H_3$

Источников нет $\Rightarrow H_0 = H_1 + H_2$

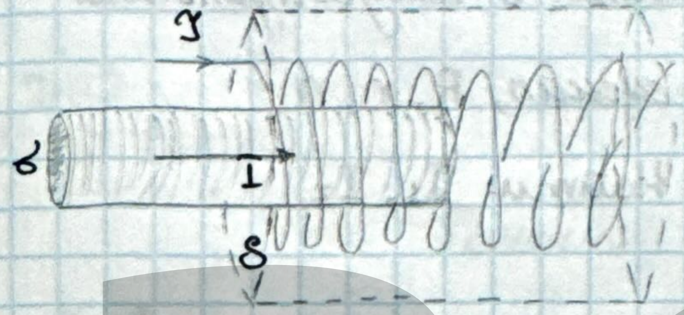
$$\begin{cases} 3\mu H_0 l - 2H_3 l = \frac{4\pi}{c} IN\mu \\ 3\mu H_0 l + 3H_3(2l - d + \mu d) = 3\cdot\frac{4\pi}{c} IN\mu \end{cases}$$

$$H_3(8l + (\mu-1)d) = \frac{8\pi IN\mu}{c}$$

$$H_3 = B = \frac{\pi\mu IN}{cl\left(1+\frac{3}{8}(\mu-1)\frac{d}{l}\right)}$$

Ответ: $\boxed{B = \frac{\pi\mu IN}{cl\left(1+\frac{3}{8}(\mu-1)\frac{d}{l}\right)}}$

об.52



Дано: n, J, I, ξ, σ

S - вдали от торцов магнита

Найти: $\oint\limits_S \vec{H} d\vec{S}$

Решение:

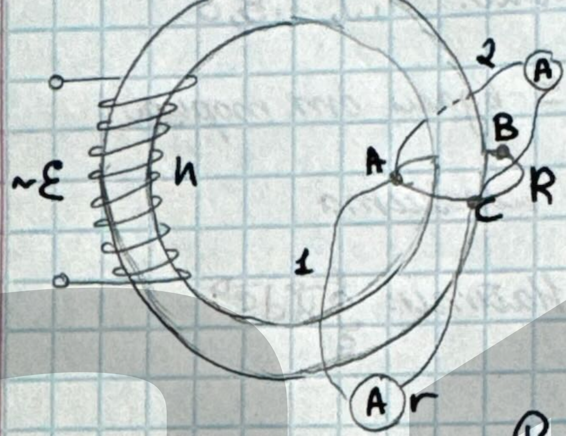
$$\oint\limits_S \vec{B} d\vec{S} = 0 \Rightarrow \oint\limits_S \vec{H} d\vec{S} = \oint\limits_S (\vec{H} - \vec{B}) d\vec{S} = -4\pi \oint\limits_S \vec{I}(\vec{r}) d\vec{S} =$$

$$= -4\pi I \sigma$$

Ответ: $\boxed{\oint\limits_S \vec{H} d\vec{S} = -4\pi I \sigma}$

7 неделя

№10.1



Дано: ε - синусоидальный сигнал, R, r, n

Найти: I_1, I_2

Решение:

1. Закон Кирхгофа для цепи слева:

$$\varepsilon - \frac{1}{c} S n \frac{dB}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{dB}{dt} = \frac{c\varepsilon}{Sn}$$

B в сердечнике сохраняется => в кольце:

$$\varepsilon_{ind} = \frac{1}{c} S \frac{dB}{dt} = \frac{1}{c} S \cdot \frac{c\varepsilon}{Sn} = \frac{\varepsilon}{n}$$

I_{AC} - ток проходящий через $\overset{\frown}{ABC}$, I_{CA} - через $\overset{\frown}{CA}$

Закон Кирхгофа для кольца:

$$I_{CA} \cdot \frac{1}{3}R + I_{AC} \cdot \frac{2}{3}R = \varepsilon_{ind} = \frac{\varepsilon}{n}$$

$$I_{CA} R + 2 I_{AC} R = \frac{3\varepsilon}{n}$$

1) $I_{AC} = I_{CA} + I_1$:

$$\begin{cases} 3 I_{CA} R + 2 I_1 R = \frac{3\varepsilon}{n} \\ I_1 r = \frac{1}{3} I_{CA} R \end{cases}$$

$$I_1 = \frac{3\varepsilon}{n(9r+2R)}$$

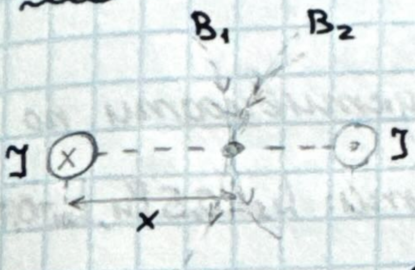
2) $I_{CA} = I_{AC} + I_2$:

$$\begin{cases} 3 I_{AC} R + 2 I_2 R = \frac{3\varepsilon}{n} \\ I_2 r = \frac{2}{3} I_{AC} R \end{cases}$$

$$I_2 = \frac{6\varepsilon}{n(9r+2R)}$$

Ответ: $\boxed{I_1 = \frac{3\varepsilon}{n(9r+2R)};\ I_2 = \frac{6\varepsilon}{n(9r+2R)}, \text{ разные направления}}$

№5.29



Дано: I, $-I$, $r = 2$ мм, $d = 2$ см

Найти: $\frac{L}{l}$

Решение:

Провода замыкаются на бесконечности, следовательно поток можно найти как

$\Phi = \int\limits_r^{d-r} B(x) \cdot l\,dx$ (поле в проводах не учитывается по условию)

$B_1 = \frac{2I}{cx}$, $B_2 = \frac{2I}{c(d-x)}$

$$B = B_1 + B_2 = \frac{2I}{c}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{d-x}\right)$$

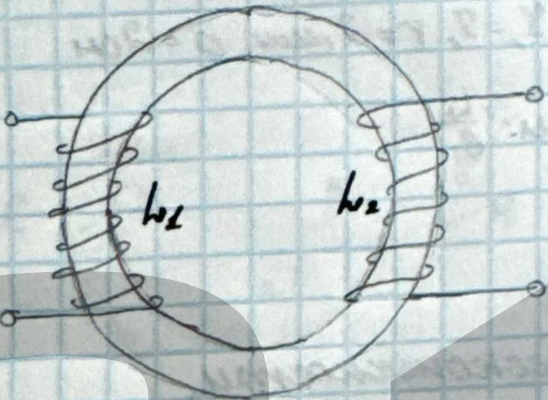
$$\Phi = \frac{2I}{c}\int\limits_r^{d-r}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{d-x}\right) l\,dx = \frac{2Il}{c}\ln\left|\frac{x}{d-x}\right|\Bigg|_r^{d-r} =$$

$$= \frac{2Il}{c}\left(\ln\frac{d-r}{r} - \ln\frac{r}{d-r}\right) = \frac{4Il}{c}\ln\frac{d-r}{r} \cancel{= \frac{2Il}{c}\ln\frac{d}{r}}$$

$$\Phi = \frac{1}{c}LI = \frac{4l}{c}\ln\left(\frac{d}{r} - 1\right) I \Rightarrow \frac{L}{l} = 4\ln\left(\frac{d}{r} - 1\right) \approx 8{,}8$$

Ответ: $\boxed{\frac{L}{l} = 4\ln\left(\frac{d}{r} - 1\right) \approx 8{,}8}$

№5.30



Дано: индуктивности по отдельности: $L_1 = 0{,}5$ Гн, $L_2 = 0{,}7$ Гн, $B = const$

Найти: взаимную индуктивность M

Решение:

$$\begin{cases} \Phi_1 = \frac{1}{c} L_1 I_1 + \frac{1}{c} M I_2 \\ \Phi_2 = \frac{1}{c} M I_1 + \frac{1}{c} L_2 I_2 \end{cases}$$

(по теореме $L_{12} = L_{21} = M$)

Так как во всём сердечнике B одинаково, то $\frac{\Phi_1}{N_1} = \frac{\Phi_2}{N_2}$

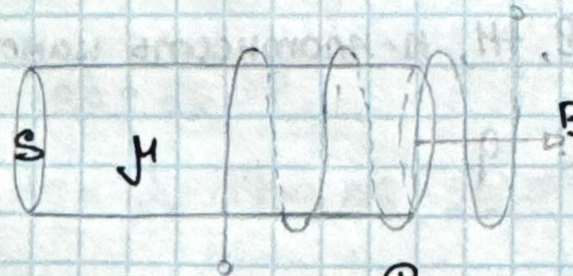
При $I_2 = 0$: $\frac{L_1}{N_1} = \frac{M}{N_2}$, следовательно $\frac{N_1}{N_2} = \frac{L_1}{M}$

При $I_1 = 0$: $\frac{M}{N_1} = \frac{L_2}{N_2}$, следовательно $\frac{N_1}{N_2} = \frac{M}{L_2}$

Таким образом, $\frac{M}{L_2} = \frac{L_1}{M}$ или $M = \sqrt{L_1 L_2} \approx 0{,}6$ Гн

Ответ: $\boxed{M = \sqrt{L_1 L_2} \approx 0{,}6 \text{ Гн}}$

№7.58



Дано: B, μ, S

Найти: F

Решение:

Плотность энергии магнитного поля:

$$w = \frac{B^2}{8\pi\mu} = \frac{H^2\mu}{8\pi}$$

При смещении стержня на dx энергия уменьшается на

$$dW = w(\mu=0)\,S\,dx - w(\mu=\mu)\,S\,dx = \cancel{\frac{B^2 S dx}{8\pi}\left(1-\frac{1}{\mu}\right)} =$$

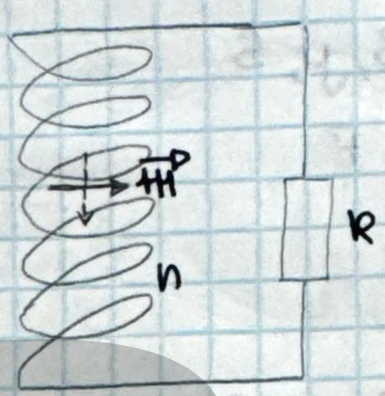
$$= \frac{H^2\mu S dx}{8\pi} - \frac{H^2 S dx}{8\pi} = \frac{H^2 S}{8\pi}(\mu-1)\,dx$$

$H = B$ (поле катушки вне стержня)

$$F = \frac{\partial W}{\partial x} = \frac{H^2 S}{8\pi}(\mu-1) = \frac{B^2 S}{8\pi}(\mu-1)$$

Ответ: $\boxed{F = \frac{B^2 S}{8\pi}(\mu-1)}$

№7.88



Дано: R, $\mathcal{M}$, n - плотность намотки

Найти: q

Решение:

$$\vec{B} = \frac{3(\vec{\mathcal{M}}, \vec{r})\vec{r}}{r^3} - \frac{\vec{\mathcal{M}}}{r^3}$$

В начале $\vec{\mathcal{M}} \perp \vec{r}$ и $\vec{B} = -\frac{\vec{\mathcal{M}}}{r^3}$ - параллельно плоскостям витков $\Rightarrow \Phi_{нач} = 0$

Найдём $\Phi_{коп}$ - поток диполя через катушку.

По теореме взаимности:

$$\begin{cases} c\Phi_{диполь} = L_{диполь} I_{диполь} + \underbrace{L_{взаим} I_{катушки}}_{\Phi_{к-д}} \\ c\Phi_{катушки} = \underbrace{L_{взаим} I_{диполь}}_{\Phi_{д-к}} + L_{катушки} I_{катушки} \end{cases}$$

Диполь эквивалентен контуру площадью S с током $I_{диполь}$: $\mathcal{M} = \frac{S I_{диполь}}{c}$

$$\Phi_{к-д} = B_{кат} S = \frac{4\pi}{c} I_{катушки} n S \Rightarrow L_{взаим} = \frac{4\pi n S}{c}$$

Тогда $\Phi_{д-к} = \frac{4\pi n S}{c} I_{диполь} = 4\pi n \mathcal{M}$

При повороте диполя в катушке возникает $\mathcal{E}_{инд}$

$$|\mathcal{E}_{ind}| = \mp\frac{1}{c}\frac{d\Phi}{dt} = IR$$

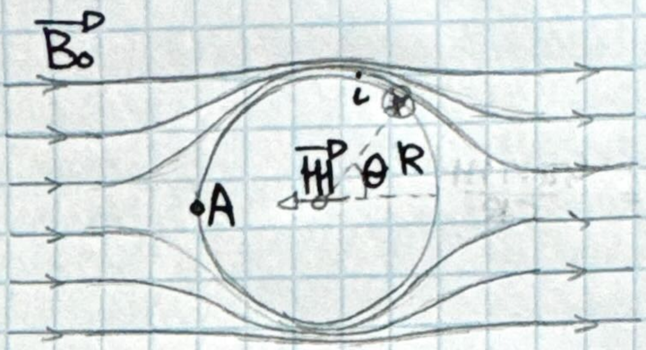
$$I\,dt = \frac{1}{cR}\,d\Phi$$

$$dq = \frac{1}{cR}\,d\Phi \Rightarrow \Delta q = \frac{1}{cR}\,\Delta\Phi = \frac{4\pi n M}{cR}$$

Ответ: $\boxed{\Delta q = \frac{4\pi n M}{cR}}$

8 неделя

№6.23



Дано: B_0, сверхпроводник, R

Найти: $\vec{B}$, i

Решение:

Внутри сверхпроводника $B=0$

Из граничных условий $B_n=0$, $\vec{B}$ касается шара.

Предположим, что подобно проводящему шару в электрическом поле $\vec{E}$, сверхпроводящий шар эквивалентен диполю $\vec{m}\uparrow\downarrow\vec{B}$

В точке A:

$$\vec{B_A} = \vec{B_0} + \frac{3(\vec{m},\vec{r_A})\vec{r_A}}{r_A^5} - \frac{\vec{m}}{r_A^3}$$

$B_{An} = B_0 - \frac{3m}{r_A^3} + \frac{m}{r_A^3} = 0 \Rightarrow m = \frac{1}{2}B_0 r^3$, векторно $\vec{m} = -\frac{1}{2}\vec{B_0}R^3$

Проверим, что везде $B_n = \frac{(\vec{B},\vec{r})}{r} = 0$:

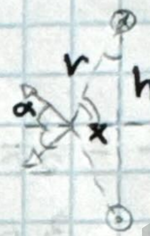
$$\vec{B_n} = \frac{1}{r}\left(\vec{B_0} - \frac{3}{2}\frac{(\vec{B_0},\vec{r})\vec{r}}{r^5} + \frac{1}{2}\vec{B_0}, \vec{r}\right) =$$

$$= \frac{1}{r}\left(\frac{3}{2}(\vec{B_0},\vec{r}) - \frac{3}{2}\frac{(\vec{B_0},\vec{r})r^2}{r^5}\right) = 0 \Rightarrow$$ граничные

условия выполнены, тогда поле вне шара:

Очевидно, что вблизи поверхности $B_n = 0$, то есть граничные условия верные и предположение верно.

$$B_\tau = \frac{2J}{cr}\cdot\cos\alpha\cdot 2 = $$



$$= \frac{4J}{cr}\cdot\frac{h}{r} = \frac{4Jh}{c(h^2+x^2)}$$

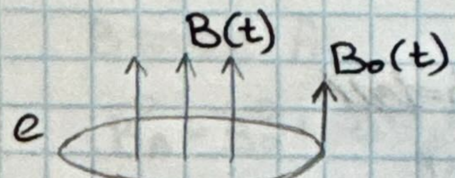
$$B_\tau - 0 = \frac{4\pi}{c} i(x) \Rightarrow$$

$$i(x) = \frac{Jh}{\pi\cancel{c}(h^2+x^2)}$$

$$f = \frac{2J}{c\cdot 2h}\cdot\frac{Jl}{l} = \frac{J^2}{ch} = \left(\frac{J}{c}\right)^2_h = \left(\frac{1\,ед.\,СГС}{}\right)^2_{1см} = 1\,\frac{дин}{см}$$

Ответ: $\boxed{i(x) = \frac{Jh}{\pi\cancel{c}(h^2+x^2)},\quad f = \frac{J^2}{ch} = 1\,\frac{дин}{см}}$

№8.30



Дано: $R = const$

Найти: $\frac{B_0(t)}{\overline{B}(t)}$

Решение:

$$\mathcal{E}_{инд} = \oint \vec{E}\,d\vec{l} = 2\pi R E = -\frac{1}{c}\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{1}{c}\pi R^2\dot{\overline{B}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E = \frac{R\dot{\overline{B}}}{2c}$$ — поле, ускоряющее электроны

$$m\dot{v} = \frac{Re\dot{\overline{B}}}{2c}$$

На электрон при этом действует сила:

$F = \frac{1}{c}evB_0$, направленная к центру, то есть

$$\frac{1}{c} e v B_0 = m\frac{v^2}{R} \Rightarrow R = \frac{mvc}{eB_0}$$

$$R = const \Rightarrow \dot{R} = 0 \Rightarrow \dot{v} B_0 = v \dot{B}_0$$

Подставляем $\dot{v} = \frac{Re\dot{\bar{B}}}{2mc}$ и $v = \frac{ReB_0}{mc}$

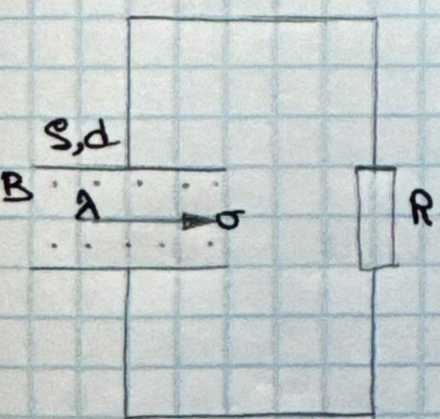
$$\frac{Re\dot{\bar{B}}}{2mc} B_0 = \frac{ReB_0}{mc}\dot{B}_0 \Rightarrow \dot{B}_0 = \frac{1}{2}\dot{\bar{B}}$$

Интегрируем, с учётом $B_0(0) = \bar{B}(0) = 0$:

$$\frac{B_0(t)}{\bar{B}(t)} = \frac{1}{2}$$

Ответ: $\boxed{\frac{B_0(t)}{\bar{B}(t)} = \frac{1}{2}}$

№8.69

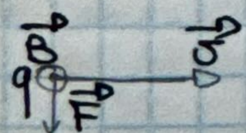


Дано: S, d, B, v, R, λ

Найти: N

Решение:

На ~~электрон~~ заряд, движущийся со скоростью v действует сила $F = \frac{qvB}{c}$.



$F = qE$, откуда $E = \frac{vB}{c}$, тогда $U = \frac{vBd}{c}$

Из закона Кирхгофа $U = I\left(\frac{d}{\lambda S} + R\right)$

Тогда $I = \frac{B\upsilon d}{c(\frac{d}{\lambda S} + R)}$, $N = I^2 R = \left[\frac{B\upsilon d}{c(\frac{d}{\lambda S} + R)}\right]^2 R$

Ответ: $\boxed{N = \left[\frac{B\upsilon d}{c(\frac{d}{\lambda S} + R)}\right]^2 R}$