§ 11

57. Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_0^8 \frac{dx}{x^2+\sqrt[3]{x}}$

$f(x) = \frac{1}{x^2+\sqrt[3]{x}} > 0$ на $(0, 8]$

$f(x) < \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = g(x)$ на $(0,8]$

$\int\limits_0^8 g(x)dx = \frac{3}{2}x^{2/3}\Big|_0^8 = 6 \Rightarrow \int\limits_0^8 g(x)dx$ сходится $\Bigg| \Rightarrow \int\limits_0^8 \frac{dx}{x^2+\sqrt[3]{x}}$ –

сходится по I признаку сравнения.

59. Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[5]{1-x^{10}}}$

$f(x) = \frac{1}{\sqrt[5]{1-x^{10}}} > 0$ на $[0,1)$

$f(x) < \frac{1}{\sqrt[5]{1-x}} = g(x)$ на $[0,1)$

$\int\limits_0^1 g(x)dx = \frac{5}{4}(1-x)^{4/5}\Big|_1^0 = \frac{5}{4} \Rightarrow \int\limits_0^1 g(x)dx$ сходится $\Bigg| \Rightarrow \int\limits_0^1 f(x)dx$ –

сходится по I признаку сравнения.

62. Исследовать на сходимость $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{\sqrt[3]{\sin x}}$

$\frac{1}{\sqrt[3]{\sin x}} \sim \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ при $x \to +0$; $\int\limits_0^{\pi} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$ сходится $\Rightarrow \int\limits_0^{\pi} \frac{dx}{\sqrt[3]{\sin x}}$ сходится $\Rightarrow$

$\frac{1}{\sqrt[3]{\sin x}} \sim \frac{1}{\sqrt[3]{2\pi - x}}$ при $x \to -2\pi$; $\int\limits_{\pi}^{2\pi} \frac{dx}{\sqrt[3]{2\pi - x}}$ сходится $\Rightarrow \int\limits_{\pi}^{2\pi} \frac{dx}{\sqrt[3]{\sin x}}$ сходится

$\Rightarrow \int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{\sqrt[3]{\sin x}} = \int\limits_0^{\pi} \frac{dx}{\sqrt[3]{\sin x}} + \int\limits_{\pi}^{2\pi} \frac{dx}{\sqrt[3]{\sin x}}$ сходится

73. Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_0^{\pi} \frac{\ln \sin x}{\sqrt[3]{x}}dx$

$\int\limits_0^{\pi} \frac{\ln \sin x}{\sqrt[3]{x}}dx = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{\ln \sin x}{\sqrt[3]{x}}dx + \int\limits_{\pi/2}^{\pi} \frac{\ln \sin x}{\sqrt[3]{x}}dx$

при $x \to \pi - 0$ $\exists\, t := \pi - x$, тогда $\int \frac{\ln \sin x}{\sqrt[3]{x}}dx \sim \int\limits_0^{\pi/2} \frac{\ln \sin t}{\sqrt[3]{\pi - t}}dt$ и

при $t \to +0$ $\frac{\ln \sin t}{\sqrt[3]{\pi - t}} \sim \frac{\ln t}{\sqrt[3]{\pi}} \Rightarrow \int\limits_0^{\pi/2} \frac{\ln \sin t}{\sqrt[3]{\pi - t}}dt$ сходится, т.к. $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\ln t}{\sqrt[3]{\pi}}dt$ сходится $\Rightarrow$

$\Rightarrow \int\limits_{\pi/2}^{\pi} \frac{\ln\sin x}{\sqrt[3]{x}}dx$ сходится

при $x \to +0$ $\frac{\ln\sin x}{\sqrt[3]{x}} \sim \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}} = \frac{-|\ln x|}{x^{1/3}}$ в окр-ти $+0$

Исследуем $\int\limits_0^{x_0} \frac{|\ln x|}{x^{1/3}}dx$ на сходимость: $\frac{|\ln x|}{x^{1/3}} = \frac{x^{1/3}|\ln x|}{x^{2/3}}$

при $x \to +0$ $x^{1/3}|\ln x| \to 0 \Rightarrow \exists x_0 : \forall x \in (0, x_0)$ $x^{1/3}|\ln x| < 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{|\ln x|}{x^{1/3}} < \frac{1}{x^{2/3}}$ $\forall x \in (0, x_0) \Rightarrow \frac{|\ln x|}{x^{1/3}}$ сходится по признаку сравнения I $\Rightarrow \int\limits_0^{\pi/2} \frac{\ln\sin x}{\sqrt[3]{x}}dx$ сходится $\Rightarrow \int\limits_0^{\pi} \frac{\ln\sin x}{\sqrt[3]{x}}dx$ сходится.

98. Определить при каких α, β сходится интеграл

$$\int\limits_0^{\pi/2} \sin^\alpha x \cos^\beta x\, dx = \int\limits_0^{\pi/4} \sin^\alpha x \cos^\beta x\, dx + \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \sin^\alpha x \cos^\beta x\, dx$$

при $x \to +0$ $\sin^\alpha x \cos^\beta x \sim x^\alpha \Rightarrow \int\limits_0^{\pi/4} \sin^\alpha x \cos^\beta x\, dx \sim \int\limits_0^{\pi/4} x^\alpha dx =$

$$= \left[\begin{array}{l} \alpha = -1, \ \ln x \Big|_0^{\pi/4} = +\infty \\ \alpha \neq -1, \ \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\Big|_0^{\pi/4} \end{array}\right. - \text{сущ.} \Leftrightarrow \alpha > -1$$

$\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \sin^\alpha x \cos^\beta x\, dx = \Big|_{t = \frac{\pi}{2} - x} \int\limits_0^{\pi/4} \cos^\alpha t \sin^\beta t\, dt \Rightarrow \beta > -1$ (аналогично первому)

Итог: $\alpha, \beta > -1$

§12

66. Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{1+x^7}}$

$\int\limits_0^{+\infty} \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{1+x^7}} = \underbrace{\int\limits_0^{1} \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{1+x^7}}}_{I_1} + \underbrace{\int\limits_1^{\infty} \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{1+x^7}}}_{I_2}$. I_1 очевидно сходится, а I_2 сходится,

т.к. $\frac{x}{\sqrt[3]{1+x^7}} < x^{-4/7}$ и $\int\limits_1^{+\infty} x^{-4/7}dx$ сходится $\Rightarrow \int\limits_0^{+\infty} \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{1+x^7}}$ сходится

68. Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x}dx$

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x}dx = \int\limits_0^{1} \frac{\sin^2 x}{x}dx + \int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x}dx$$

при $x \to 0$ $\frac{\sin^2 x}{x} \sim \frac{x^2}{x} = x \Rightarrow \int\limits_0^{1} \frac{\sin^2 x}{x}dx$ сходится

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x}dx = \int_1^{+\infty} \frac{1-\cos 2x}{2x}dx = \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{1}{2x}dx}_{I_1} - \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{2x}dx}_{I_2}$$

I_1 очевидно расходится.

Рассмотрим I_2: функция $\cos 2x$ непрерывна и имеет огр. первообразную на $[1,+\infty)$, функция $\frac{1}{2x}$ непрерывно дифференцируема и монотонна на $[1,+\infty)$, причем $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{2x} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ I_2 сходится по признаку Дирихле.

Итак, $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x}dx$ – разность расходящегося I_1 и сходящегося $I_2 \Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x}dx$ расходится $\Rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x}dx$ расходится.

101. Найти все неотрицательные значения параметра α, при которых сходится интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x^\alpha + e^x)}{\sqrt{x^3+x^5}}dx$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x^\alpha + e^x)}{\sqrt{x^3+x^5}}dx = \underbrace{\int_0^{1} \frac{\ln(x^\alpha + e^x)}{\sqrt{x^3+x^5}}dx}_{I_1} + \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x^\alpha + e^x)}{\sqrt{x^3+x^5}}dx}_{I_2}$$

Рассм. I_2: при $x \to +\infty$ $\frac{\ln(x^\alpha + e^x)}{\sqrt{x^3+x^5}} \sim \frac{\ln(e^x)}{x^5} = \frac{x}{x^5} = \frac{1}{x^4}$, $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^4}$ очевидно сходится $\Rightarrow$ I_2 сходится

Рассм. I_1: при $x \to +0$ $\frac{\ln(x^\alpha + e^x)}{\sqrt{x^3+x^5}} \sim \frac{\ln(x^\alpha+1)}{x^{3/2}\sqrt{1+x^2}} \sim \frac{x^\alpha}{x^{3/2}} = x^{\alpha - 3/2}$

Как известно $\int_0^1 \frac{dx}{x^\beta}$ сходится при $\beta < 1 \Rightarrow \int_0^1 x^{\alpha-3/2}dx$ сходится при $3/2 - \alpha < 1$ или $\alpha > 1/2$

104. Определить при каких α, β сходится интеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha \ln^\beta x} = \underbrace{\int_1^{2} \frac{dx}{x^\alpha \ln^\beta x}}_{I_1} + \underbrace{\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha \ln^\beta x}}_{I_2}$$

$$I_1 = \Big|_{x=t+1} \int_0^1 \frac{dt}{(1+t)^\alpha \ln^\beta(1+t)} \sim \int_0^1 \frac{dt}{t^\beta}$$ – сходится при $\beta < 1$

Рассм. I_2:

при $\alpha = 1$: $I_1 = \int\limits_2^{+\infty} \frac{d(\ln x)}{\ln^\beta x} \Rightarrow \beta > 1$ - не подходит

при $\alpha < 1$: $\exists\ \varepsilon = 1-\alpha,\ \varepsilon > 0.$ $\frac{1}{x^\alpha \ln^\beta x} = \frac{1}{x^{1-\varepsilon}\ln^\beta x} = \frac{x^{\varepsilon/2}}{\ln^\beta x}\,\frac{1}{x^{1-\varepsilon/2}}$

$\forall \beta$ при $x \to +\infty$ $x^{\varepsilon/2}/\ln^\beta x \to +\infty \Rightarrow \exists\ x_0 \geqslant 2 : \forall\ x > x_0 \hookrightarrow x^{\varepsilon/2}/\ln^\beta x > 1 \Rightarrow \forall\ x > x_0$ $\frac{1}{x^\alpha \ln^\beta x} = \frac{x^{\varepsilon/2}}{\ln^\beta x}\,\frac{1}{x^{1-\varepsilon/2}} > \frac{1}{x^{1-\varepsilon/2}}$.

Т.к. $\int\limits_{x_0}^{+\infty} \frac{dx}{x^{1-\varepsilon/2}}$ расходится, то $\int\limits_{x_0}^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha \ln^\beta x}$ расх-ся $\Rightarrow \int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha \ln^\beta x}$ расх-ся

при $\alpha > 1$: $\exists\ \varepsilon = \alpha - 1,\ \varepsilon > 0.$ $\frac{1}{x^\alpha \ln^\beta x} = \frac{1}{x^{1+\varepsilon}\ln^\beta x} = \frac{1}{x^{\varepsilon/2}\ln^\beta x}\,\frac{1}{x^{1+\varepsilon/2}}$

$\forall \beta$ при $x \to +\infty$ $\frac{1}{x^{\varepsilon/2}\ln^\beta x} \to 0 \Rightarrow \exists\ x_0 \geqslant 2 : \forall\ x > x_0 \hookrightarrow \frac{1}{x^{\varepsilon/2}\ln^\beta x} < 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall\ x > x_0$ $\frac{1}{x^\alpha \ln^\beta x} = \frac{1}{x^{\varepsilon/2}\ln^\beta x}\,\frac{1}{x^{1+\varepsilon/2}} < \frac{1}{x^{1+\varepsilon/2}}$.

Т.к. $\int\limits_{x_0}^{+\infty} \frac{dx}{x^{1+\varepsilon/2}}$ сходится, то $\int\limits_{x_0}^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha \ln^\beta x}$ сходится $\Rightarrow \int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha \ln^\beta x}$ сходится

Итак, $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha \ln^\beta x}$ при $\alpha > 1,\ \beta < 1$