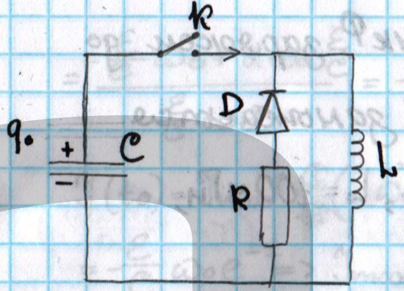
№9.27 | 10 неделя



Дано: K замыкают, когда ток максимален K размыкают,

q_0, C, R, L

Найти: Δq (через R)

Решение

После замыкания K ток через резистор не течёт

$$\frac{q}{C} + \ddot{q}L = 0 \Rightarrow q = A\sin\omega t + B\cos\omega t, \text{ где } \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$\left.\begin{aligned} q(0) &= B = q_0 \\ \dot{q}(0) &= A\omega = 0 \Rightarrow A = 0 \end{aligned}\right| \Rightarrow |\dot{q}_{max}| = q_0 \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

После размыкания K:

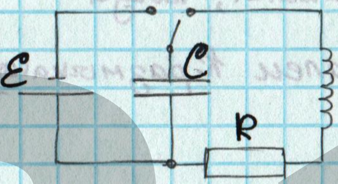
$$\dot{I}L + IR = 0 \Rightarrow I = Ae^{-\alpha t}: \quad \alpha = \frac{R}{L}, A = q_0\omega$$

$$I(t) = q_0\omega e^{-\frac{R}{L}t}$$

$$\Delta q = \int_0^{+\infty} I(t)dt = -q_0\omega \frac{L}{R} e^{-\frac{R}{L}t}\Big|_0^{\infty} = q_0\omega\frac{L}{R} = \frac{q_0}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

Ответ: $\boxed{\Delta q = \frac{q_0}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}}$

№9.36



Дано: $C=0{,}1$ мкФ, заряжен до $\mathcal{E}=1$ кВ, $t=0$: замыкается на LR-ветвь, $L=100$ мГн, $R=R_{кр}$

Найти: t_0 и I_{max}.

Решение:

$R=2\sqrt{\frac{L}{C}}$

$\ddot{q}+\frac{R}{\cancel{2}L}\dot{q}+\frac{1}{LC}q=0$

$\ddot{q}+2\frac{1}{\sqrt{LC}}\dot{q}+\frac{1}{LC}q=0$

$\lambda^2+2\omega_0\lambda+\omega_0^2=0$, где $\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}$

$\lambda=-\omega_0$ кратности 2

$q=Ae^{-\omega_0 t}+Bte^{-\omega_0 t}=(A+Bt)e^{-\omega_0 t}$

$q(0)=\frac{C\mathcal{E}}{\cancel{C}}=A$

$\dot{q}(0)=(-\omega_0 A+B)e^{-\omega_0\cdot 0}=0 \Rightarrow B=\omega_0\frac{\mathcal{E}}{C}$

$q(t)=\frac{C\mathcal{E}}{\cancel{C}}(1+\omega_0 t)e^{-\omega_0 t}$

$\dot{q}(t)=(-A\omega_0+B-Bt\omega_0)e^{-\omega_0 t}$

$\ddot{q}(t)=(A\omega_0^2-B\omega_0-B\omega_0+Bt\omega_0^2)e^{-\omega_0 t}$

I-максимально при $\dot{I}=\ddot{q}=0$;

$$A\omega_0^2 - 2B\omega_0 + Bt_0\omega_0^2 = 0 \Rightarrow t_0 = -\frac{A\omega_0 - 2B}{B\omega_0} =$$

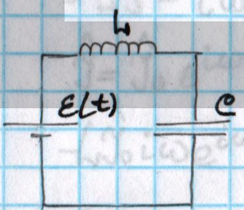
$$= \frac{-\frac{\mathcal{E}}{C}\omega_0 + 2\omega_0\frac{\mathcal{E}}{C}}{\frac{\mathcal{E}}{C}\omega_0^2} = \frac{1}{\omega_0} = \sqrt{LC} \Rightarrow t_0 \approx 10^{-4}\,c$$

$$I(t_0) = -I_{max} = \frac{\mathcal{E}}{C}\left(-\omega_0 + \omega_0 - \omega_0^2 \cdot \frac{1}{\omega_0}\right)e^{-\omega_0 \cdot \frac{1}{\omega_0}} =$$

$$= -\frac{\mathcal{E}}{C}\omega_0 e^{-1} \Rightarrow I_{max} = \frac{\mathcal{E}}{e}\sqrt{\frac{C}{L}} \approx 0{,}37A$$

<u>Ответ:</u> $\boxed{t_0 = \sqrt{LC} = 10^{-4}\,c,\ I_{max} = \frac{\mathcal{E}}{e}\sqrt{\frac{C}{L}} \approx 0{,}37A}$

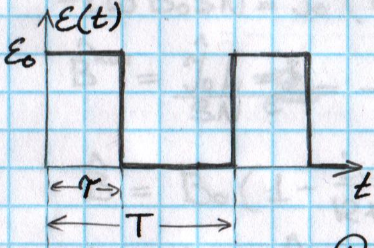
<u>№9.54</u>



Дано: $\nu_0 = 100$ Гц, $\tau = 0{,}02$ с,

$\mathcal{E}_0 = 5$ В, $\overline{V_C} = 2$ В

Найти: T, нарисовать $V_C(t)$



Решение:

$t \in [0;\tau]$:

$$\ddot{q}L + \frac{q}{C} = \mathcal{E}_0 \Rightarrow V_C(t) = \mathcal{E}_0 + A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t$$

$$V_C(0) = 0 = \mathcal{E}_0 + A \Rightarrow A = -\mathcal{E}_0$$

$$\dot{V}_C(0) = 0 = \omega_0 B \Rightarrow B = 0$$

$$\Rightarrow V_C(t) = \mathcal{E}_0(1 - \cos\omega_0 t)$$

В момент времени τ: $\omega_0\tau = 2\pi \cdot 100\,\text{Гц} \cdot 0{,}02\,\text{с} = 4\pi \Rightarrow$

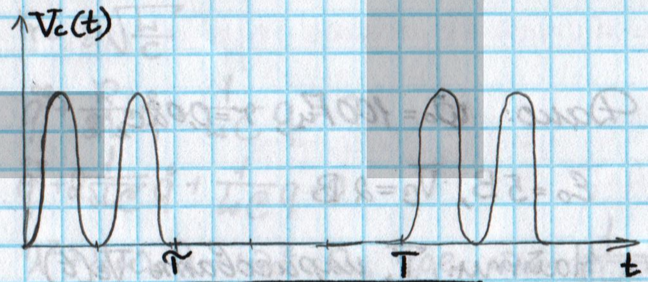
$\Rightarrow V_c(\varphi) = 0,\ \dot{V}_c(\tau) = 0 \Rightarrow$ дальше колебаний нет

Тогда при $t \in [\tau, T]$: $V_c = 0$

$$V_{cp} = \frac{1}{T}\int_0^T V_c(t)\,dt = \frac{1}{T}\left(\mathcal{E}_0\tau - \frac{\mathcal{E}_0}{\omega_0}\sin\omega_0\tau\right) = \frac{\mathcal{E}_0}{T}\left(\tau - \frac{\sin\omega_0\tau}{\omega_0}\right)$$

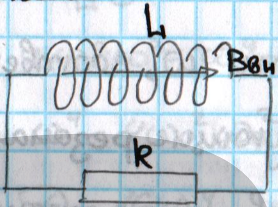
$$V_{cp} = \frac{\mathcal{E}_0\tau}{T} \Rightarrow T = \frac{\mathcal{E}_0\tau}{V_{cp}} = \frac{5}{2}\tau = 0{,}05\,\text{с}$$

График $V_c(t)$:



<u>Ответ</u>: $\boxed{T = \frac{\mathcal{E}_0}{V_{cp}}\tau = 0{,}05\,\text{с}}$

Т11.1



Дано: $B_{вн} = B_0 \cos\omega t$, $R = \omega L$

Найти: $B_{уст}$, φ

Решение:

$$\mathcal{E}_{ind} = -L\dot{J} - \frac{d\Phi_{вн}}{dt}$$

$$\Phi_{вн} = B_{вн} S N = B_0 S N \cos\omega t, \quad \hat{\Phi}_{вн} = B_0 S N e^{i\omega t}$$

$$-L\hat{\dot{J}} - \frac{d\hat{\Phi}_{вн}}{dt} = \hat{J} R$$

$$-L\hat{\dot{J}} - i\omega B_0 S N e^{i\omega t} = \hat{J} R$$

$$\hat{J} = \hat{J}_0 e^{i\omega t}$$

$$-L\hat{J}_0 i\omega e^{i\omega t} - i\omega B_0 S N e^{i\omega t} = \hat{J}_0 e^{i\omega t} R$$

$$-i\omega B_0 S N = \hat{J}_0 (R + i\omega L) \Rightarrow \hat{J}_0 = -\frac{i\omega B_0 S N}{R + i\omega L}$$

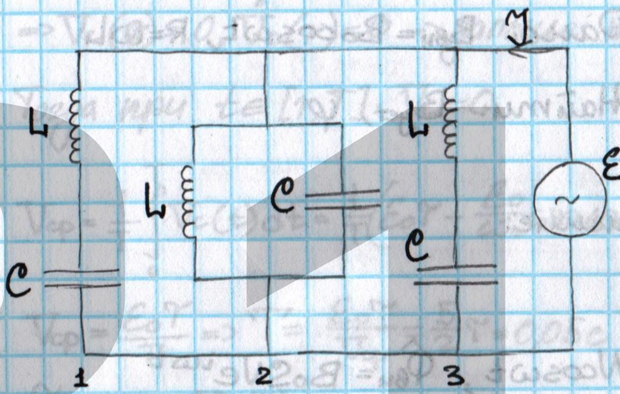
$$\hat{B}^{кат} = \frac{\hat{J}_0 L \cancel{e^{i\omega t}}}{SN} = -\frac{i\omega B_0 L}{R + i\omega L} e^{i\omega t}$$

$$\hat{B} = B_0 \left(1 - \frac{i\omega L}{R + i\omega L}\right) e^{i\omega t} = B_0 \frac{R}{R + i\omega L} e^{i\omega t}$$

$$R = \omega L \Rightarrow \hat{B} = B_0 \cdot \frac{1-i}{2} e^{i\omega t} \Rightarrow \{B_{уст}\} = B_0 \frac{\sqrt{2}}{2}, \ \varphi = \frac{\pi}{4}$$

Ответ: $\boxed{B_{уст} = \frac{1}{\sqrt{2}} B_0, \ \varphi = \frac{\pi}{4}}$

№ 10.25



Найти ω, соответствующие резонансу токов и напряжений. Изобразить график $\varphi(\omega)$ разности фаз между I и $\mathcal{E}$

Решение:

$$Z_1 = Z_L + Z_C = Z_3$$

$$Z_2 = \frac{Z_L Z_C}{Z_L + Z_C}$$

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3} = \frac{2}{Z_L + Z_C} + \frac{Z_L + Z_C}{Z_L Z_C} =$$

$$= \frac{2 Z_L Z_C + (Z_L + Z_C)^2}{Z_L Z_C (Z_L + Z_C)} = \frac{2\frac{L}{C} - \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}{\frac{L}{C} i \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} =$$

$$= \frac{4\frac{L}{C} - \omega^2 L^2 - \frac{1}{\omega^2 C^2}}{\frac{L}{C} i \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}$$

Резонанс напряжений, когда $Z \to 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Резонанс токов, когда $Z \to \infty \Rightarrow$

$$\Rightarrow 4\frac{L}{C} - \omega^2 L^2 - \frac{1}{\omega^2 C^2} = 0$$

$$4\frac{1}{LC} - \omega^2 - \frac{1}{\omega^2 C^2 L^2} = 0$$

$4\omega_0^2\omega^2 - \omega^4 - \omega_0^4 = 0$, где $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

$$\omega^4 - 4\omega_0^2\omega^2 + \omega_0^4 = 0$$

$$D = 16\omega_0^4 - 4\omega_0^4 = \left(2\sqrt{3}\,\omega_0^2\right)^2$$

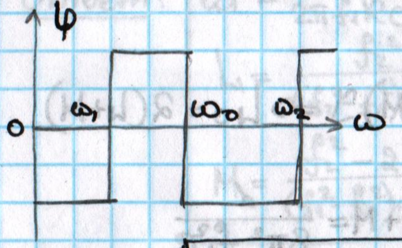
$$\omega^2 = \frac{4\omega_0^2 \pm 2\sqrt{3}\,\omega_0^2}{2} = \left(2 \pm \sqrt{3}\right)\omega_0^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega_{1,2} = \frac{\sqrt{2 \pm \sqrt{3}}}{\sqrt{LC}}$$

$$I = \frac{\mathcal{E}}{Z} = \frac{4\frac{L}{C} - \omega^2 L^2 - \frac{1}{\omega^2 C^2}}{\frac{L}{C}\, i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}\mathcal{E} = +i\cdot\frac{L^2 C}{\omega^2}\cdot\frac{(\omega-\omega_1)(\omega-\omega_2)}{\omega-\omega_0}\mathcal{E}$$

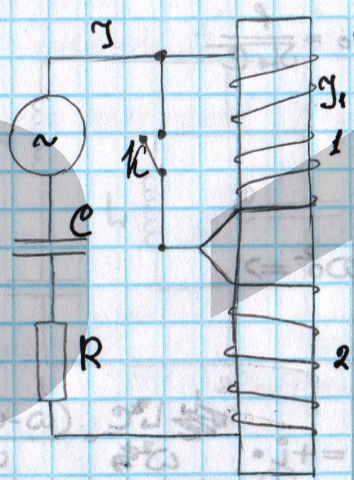
При $\omega = 0$: $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ (умножение на $-i\cdot c$, где $c > 0$)

Далее φ меняет знак и сохраняет модуль в ω_0, ω_1 и ω_2:



Ответ: $\boxed{\text{Резонанс напряжений: } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}},\ \text{резонанс токов: } \omega_{1,2} = \frac{\sqrt{2\pm\sqrt{3}}}{\sqrt{LC}}}$

№10.82



Дано: $C = 0{,}1$ мкФ, $R = 10$ Ом,

К разомкнут: $f_1 = 1780$ Гц, резонансная

К замкнут: $f_2 = 1990$ Гц

Найти: 1) Q_1, Q_2; 2) L и M

самоиндукции

Решение:

1) $Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{\sqrt{LC}}{RC} = \frac{1}{\omega_0 RC}$

$Q_1 = \frac{1}{2\pi f_1 RC} \simeq 90$, $Q_2 = \frac{1}{2\pi f_2 RC} \simeq 80$

2) К разомкнут:

$\Phi_{\Sigma} = \underbrace{(LI + MI)}_{1} + \underbrace{(LI + MI)}_{2} = 2(L+M)I \Rightarrow L_0 = 2(L+M)$

$2\pi f_1 = \frac{1}{\sqrt{L_0 C}} = \frac{1}{\sqrt{2C(L+M)}} \Rightarrow L + M = \frac{1}{8\pi^2 f_1^2 C}$

К замкнут:

$$\begin{cases} R\dot{q}_2 + \frac{q_2}{C} + L\ddot{q}_2 + \ddot{q}_1 M = \mathcal{E}_0 \cos\omega t & (1) \\ \ddot{q}_1 L + \ddot{q}_2 M = 0 & (2) \end{cases}$$

(2) $\Rightarrow \ddot{q}_1 = -\frac{M}{L}\ddot{q}_2$. Подставляем в (1):

$$R\dot{q}_2 + \frac{q_2}{C} + \left(L - \frac{M^2}{L}\right)\ddot{q}_2 = \mathcal{E}_0\cos\omega t$$

Резонанс при $(2\pi f_2)^2 = \cancel{\frac{1}{C\cdot\frac{L}{L^2-M^2}}}\ \frac{L}{C(L^2-M^2)} =$

$$= \frac{L}{C(L-M)\cdot\frac{1}{8\pi^2 f_1^2 C}} = \frac{L\cdot 8\pi^2 f_1^2}{L-M} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2L}{L-M} = \frac{f_2^2}{f_1^2} \Rightarrow 2Lf_1^2 = f_2^2\left(L - \frac{1}{8\pi^2 f_1^2 C} + L\right) =$$

$$= 2Lf_2^2 - f_2^2\cdot\frac{1}{8\pi^2 f_1^2 C}$$

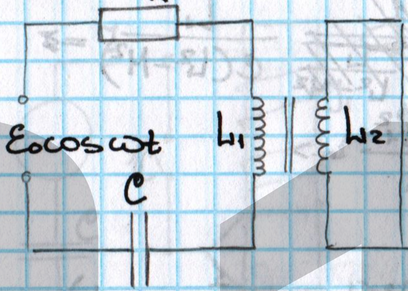
$$2L(f_1^2 - f_2^2) = -\frac{f_2^2}{8\pi^2 f_1^2 C} \Rightarrow L = \frac{f_2^2}{(f_2^2 - f_1^2)\cdot 16\pi^2 f_1^2 C} = 0{,}1\ \text{Гн}$$

$$M = \frac{1}{8\pi^2 f_1^2 C} - L = \frac{2f_2^2 - 2f_1^2 - f_2^2}{(f_1^2 - f_2^2)\cdot 16\pi^2 f_1^2 C} = -0{,}06\ \text{Гн}$$

Ответ:

$$\boxed{\begin{aligned} &Q_1 = \frac{1}{2\pi f_1 RC} \simeq 90,\quad Q_2 = \frac{1}{2\pi f_2 RC} \simeq 80 \\ &L = \frac{f_2^2}{(f_2^2 - f_1^2)\cdot 16\pi^2 f_1^2 C} = 0{,}1\ \text{Гн} \\ &M = \frac{f_2^2 - 2f_1^2}{(f_1^2 - f_2^2)\cdot 16\pi^2 f_1^2 C} = -0{,}06\ \text{Гн} \end{aligned}}$$

T11.2



Дано: $L_1 = 20$ мГн, $L_2 = 5$ мГн, $R = 5$ Ом, $C = 100$ мкФ, $\omega = 10^3\ \frac{\text{рад}}{\text{с}}$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$ - отставани тока от источника

Найти: M

Решение.

$$\Phi_1 = L_1 J_1 + M J_2$$

$$\Phi_2 = L_2 J_2 + M J_1$$

$$R\dot{q} + \frac{q}{C} + \dot{\Phi}_1 = \mathcal{E}_0\cos\omega t \quad (1)$$

$$\dot{\Phi}_2 = 0 \Rightarrow \dot{J}_2 = -\frac{M}{L_2}\dot{J}_1 \Rightarrow \dot{\Phi}_1 = \left(L_1 - \frac{M^2}{L_2}\right)\dot{J}_1 = \left(L_1 - \frac{M^2}{L_2}\right)\ddot{q}$$

$$\left(L_1 - \frac{M^2}{L_2}\right)\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{C} = \mathcal{E}_0\cos\omega t$$

$$\left(L_1 - \frac{M^2}{L_2}\right)\ddot{\hat{q}} + R\dot{\hat{q}} + \frac{\hat{q}}{C} = \mathcal{E}_0 e^{i\omega t}$$

Ищем $\hat{q}$ в виде $\hat{q} = Ae^{i\omega t}$

$$A\underbrace{\left(-\omega^2\left(L_1 - \frac{M^2}{L_2}\right) + i\omega R + \frac{1}{C}\right)}_{Z} = \mathcal{E}_0$$

$\hat{J} = Ai\omega e^{i\omega R}$ - отстаёт от $\mathcal{E}_0 e^{i\omega t}$ на $\varphi = \frac{\pi}{4}$

при $\operatorname{Re} Z = \operatorname{Im} Z$

$$-\omega R = \frac{1}{C} - \omega^2\left(L_1 - \frac{M^2}{L_2}\right) \Rightarrow M = \sqrt{\left(L_1 - \frac{R\omega + \frac{1}{C}}{\omega^2}\right)L_2} = 5\text{ мГ}$$

Ответ: $\boxed{M = \sqrt{\left(L_1 - \frac{R\omega + 1/C}{\omega^2}\right)L_2} = 5\text{ мГн}}$

№ 10.92

Дано: $r = 2\,Ом$, $V_c(\omega)$ (в задачнике стр. 122);

Найти: 1) L; 2) C; 3) δ; 4) Q; 5) $\mathcal{E}$; 6) R: критический режим колебаний;

Решение:

$$\frac{\hat{q}}{C} + \dot{\hat{q}}\,r + \ddot{\hat{q}}\,L = \mathcal{E}e^{i\omega t}$$

$$\hat{q} = Ae^{i\omega t}$$

$$A\left(1/c + i\omega r - \omega^2 L\right) = \mathcal{E} \Rightarrow A = \frac{\mathcal{E}}{\frac{1}{c} + i\omega r - \omega^2 L}$$

$$\hat{V}_c = \frac{\hat{q}}{c} = \frac{\mathcal{E}e^{i\omega t}}{1 + i\omega rc - \omega^2 Lc} = \frac{\mathcal{E}e^{i\omega t}}{\omega C\left(\frac{1}{\omega c} - \omega L + i\omega r\right)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_c(\omega) = \frac{\mathcal{E}}{\omega c\sqrt{r^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega c}\right)^2}}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 1000\,Гц \qquad (1)$$

$$V_c(\omega_0) = 100\,В = \frac{\mathcal{E}}{r\sqrt{\frac{c}{L}}} = \frac{\mathcal{E}}{r}\sqrt{\frac{L}{C}} \qquad (2)$$

Добротность Q определим по уровню $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (верно для напряжений при $Q \gg 1$):

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega\left(\frac{1}{\sqrt{2}}V_c(\omega_0)\right)} = \frac{1000\,Гц}{1010\,Гц - 990\,Гц} = 50$$

$$Q = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{L}{c}} = 50 \qquad (3)$$

$$(1)\cdot(3) \Rightarrow \frac{1}{rc} = 1000\,Гц \cdot 50 \Rightarrow c = \frac{1}{2\,Ом \cdot 1000\,Гц \cdot 50} = 10\,мкФ$$

$$\frac{(1)}{(2)} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \cdot r \cdot \sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{r}{L} = \frac{1000\text{ Гц}}{50} = 20\text{ Гц} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L = \frac{2\text{ Ом}}{20\text{ Гц}} = 100\text{ мГн}$$

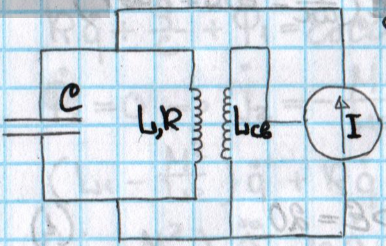
$$(2) \Rightarrow \mathcal{E} = \frac{100\text{ В}}{Q} = \frac{100\text{ В}}{50} = 2\text{ В}$$

$$\delta = \frac{r}{2L} = \frac{2\text{ Ом}}{2\cdot 100\text{ мГн}} = 10\text{ с}^{-1}$$

$$R_{кр} = 2\sqrt{\frac{L}{C}} = 2\sqrt{\frac{0{,}1\text{ Гн}}{10^{-5}\text{ Ф}}} = 2\cdot 10^2\text{ Ом} = 200\text{ Ом}$$

<u>Ответ:</u> $\boxed{L = 100\text{ мГн},\ C = 10\text{ мкФ},\ \delta = 10\text{ с}^{-1},\ Q = 50,}$ $\boxed{\mathcal{E} = 2\text{ В},\ R = 200\text{ Ом}}$

<u>T11.4</u>



Дано: $I = I_0 + S U_{св}$, $S = 2\ \frac{мА}{В}$,

$L = 10\text{ мГн}$, $C = 10\text{ нФ}$, $L_{св} = 0{,}01L$,

$I_{св} \ll I$

Найти: R_{max}: возможны автоколебания, M

Решение:

$\Phi_L = L I_L$, $\Phi_{св} = L_{св} I_{св} + M I_L \approx M I_L \Rightarrow$

$\Rightarrow U_{св} = M \dot{I}_L$, $U_L = L \dot{I}_L$

$$\frac{q}{C} = U_L + I_L R = L\dot{I}_L + R I_L \qquad (1)$$

$I = \dot{q} + I_L = I_0 + SM\dot{I}_L$ (2)

(1) $\Rightarrow q = CL\dot{I}_L + CRI_L$, подставляем в (2):

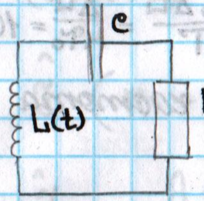
$CL\ddot{I}_L + CR\dot{I}_L + I_L = I_0 + SM\dot{I}_L$

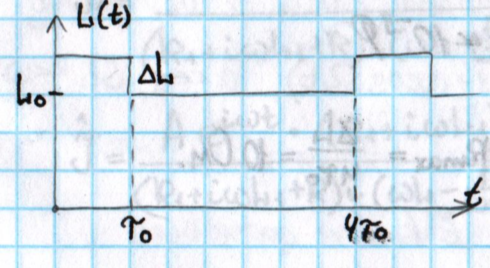
$\ddot{I}_L + \left(\frac{R}{L} - \frac{SM}{CL}\right)\dot{I}_L + \frac{I_L}{CL} = I_0$

Возбуждение колебаний возможно, когда $\gamma = \frac{1}{2}\left(\frac{R}{L} - \frac{SM}{CL}\right) < 0 \Rightarrow R_{max} = \frac{SM_{max}}{C} = \frac{S\sqrt{LL_{св}}}{C} = 200$ Ом (как видно $M = \sqrt{LL_{св}} = 1$ мГн

<u>Ответ:</u> $\boxed{R_{max} = \frac{S\sqrt{LL_{св}}}{C} = 200 \text{ Ом},\ M = \sqrt{LL_{св}} = 1 \text{ мГн}}$

<u>№11.35</u>





Дано: $L_0 = 4\cdot10^{-4}$ Гн, $\Delta L = 4\cdot10^{-5}$ Гн, $\tau_0 = 10^{-6}$ с

Найти: C, R_{max}

Решение:

В момент времени τ_0:

$$dW_L = d\left(\frac{\Phi^2}{2L}\right) = \frac{\Phi^2}{2} d\left(\frac{1}{L}\right) = -\frac{\Phi^2 dL}{2L^2} = -W_L \frac{dL}{L} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta W_L \approx W_L \frac{\Delta L}{L_0}$$ (поскольку $dL<0, \Delta L>0$)

Это энергия, приходящая в систему за счёт совершения работы по изменению поля в катушке.

За период $T = 4\tau_0$: $\Delta W_R = \frac{1}{2}\underbrace{T I^2}_{\text{средний ток}} R = T \frac{LI^2}{2} \cdot \frac{R}{L} \approx$

$\approx T W_L \frac{R}{L_0}$ – энергия, ушедшая в тепло

Колебания возбуждаются, если

$\Delta W_L \geqslant \Delta W_R \Rightarrow \frac{\Delta L}{L_0} \geqslant T \frac{R}{L_0} \Rightarrow R_{max} = \frac{\Delta L}{T} = \frac{\Delta L}{4\tau_0} = 10$

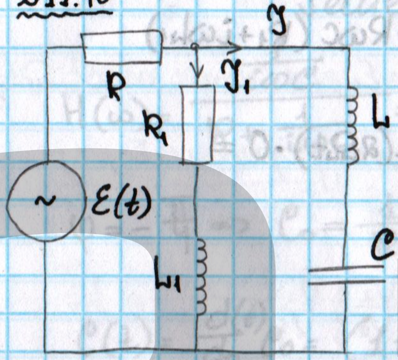
Колебания возбуждаются, если их частота равна собственной, то есть

$$\frac{2\pi}{4\tau_0} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow C = \frac{4\tau_0^2}{\pi^2 L} \approx 10^{-9} \text{Ф}$$

Ответ: $C = \frac{4\tau_0^2}{\pi^2 L} \approx 1$ нФ, $R_{max} = \frac{\Delta L}{4\tau_0} = 10$ Ом.

№11.10

12 неделя



Дано: $\mathcal{E}(t)=\mathcal{E}_0\cos^2\Omega t$, $\Omega^2=\frac{1}{4LC}$

Найти: J, J_1

Решение:

$$\mathcal{E}(t)=\mathcal{E}_0\cos^2\Omega t=\frac{\mathcal{E}_0}{2}+\frac{\mathcal{E}_0}{2}\cos 2\Omega t$$

$$\begin{cases}(\hat{J}+\hat{J}_1)R+\hat{J}_1R_1+\hat{J}_1\cdot i\omega L_1=Ae^{i\omega t} & (1)\\ \hat{J}_1(R_1+i\omega L_1)=\hat{J}\left(i\omega L+\frac{1}{i\omega C}\right) & (2)\end{cases}$$

$(2)\Rightarrow \hat{J}=\hat{J}_1\cdot\dfrac{R_1+i\omega L_1}{i(\omega L-\frac{1}{\omega C})}$, подставляем в (1).

$$\hat{J}_1\left(R_1+i\omega L_1+R+R\cdot\frac{R_1+i\omega L_1}{i(\omega L-\frac{1}{\omega C})}\right)=Ae^{i\omega t}$$

$$\hat{J}_1=\frac{Ae^{i\omega t}\cdot i(\omega L-\frac{1}{\omega C})}{(R_1+i\omega L_1+R)\,i(\omega L-\frac{1}{\omega C})+R(R_1+i\omega L_1)}$$

$$\hat{J}=\frac{Ae^{i\omega t}\cdot(R_1+i\omega L_1)}{(R_1+i\omega L_1+R)\,i(\omega L-\frac{1}{\omega C})+R(R_1+i\omega L_1)}$$

$$\hat{J}_1 = Ae^{i\omega t}\cdot\frac{i(\omega^2 LC-1)}{i(R_1+i\omega L_1+R)(\omega^2 LC-1)+R\omega C(R_1+i\omega L_1)}$$

$$J_1 = \frac{\mathcal{E}_0}{2}\cdot\frac{-i}{-i(R_1+R)} + \frac{\mathcal{E}_0}{2}\cos(2\Omega t)\cdot 0 =$$

$$= \frac{\mathcal{E}_0}{2(R_1+R)}$$

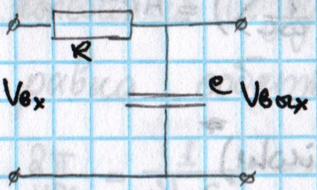
$$\hat{J} = Ae^{i\omega t}\cdot\frac{(R_1+i\omega L_1)\omega C}{i(R_1+i\omega L_1+R)(\omega^2 LC-1)+R\omega C(R_1+i\omega L_1)}$$

$$J = \frac{\mathcal{E}_0}{2}\cdot 0 + \frac{\mathcal{E}_0}{2}\cos 2\Omega t\cdot\frac{(R_1+2i\Omega L_1)\omega C}{0+R\omega C(R_1+2i\Omega L_1)} =$$

$$= \frac{\mathcal{E}_0}{2R}\cos 2\Omega t$$

<u>Ответ:</u> $\boxed{J_1 = \frac{\mathcal{E}_0}{2(R_1+R)},\ J = \frac{\mathcal{E}_0}{2R}\cos 2\Omega t}$

<u>№11.13</u>



Дано: $V_{вх} = V_0\cos\omega t$, сдвиг фаз между $V_{вых}$ и $V_{вх}$ $\varphi = -45^\circ$, $d = d_0(1 + a\cos\Omega t)$, $a \ll 1$, $\Omega \ll \omega$

Определить спектральный состав $V_{вых}$ и фазовые сдвиги

Решение:

$$H(\omega)=\frac{\frac{1}{i\omega C}}{R+\frac{1}{i\omega C}}=\frac{1}{1+i\omega CR}$$

$$\varphi=-\frac{\pi}{4} \Rightarrow C_0=\frac{1}{R\omega}\left(H(\omega)=\frac{1}{1+i}\right)$$

$$C(t)=\frac{d(t)}{d_0}C_0=(1+a\cos\Omega_1 t)\cdot\frac{1}{R\omega} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H(\omega)=\frac{1}{1+i+ai\cos\Omega_1 t}=\frac{1}{(1+i)\left(1+\frac{ai}{1+i}\cos\Omega_1 t\right)}\simeq$$

$$\simeq\frac{1}{1+i}\left(1-\frac{ai}{1+i}\cos\Omega_1 t\right)=\frac{1}{1+i}-\frac{a}{4}\left(e^{i\Omega_1 t}+e^{-i\Omega_1 t}\right)$$

$$V_{вых}=\frac{V_0}{1+i}\cos\omega t-\frac{a}{8}V_0\left(e^{i\Omega_1 t}+e^{-i\Omega_1 t}\right)\left(e^{i\omega t}+e^{-i\omega t}\right)=$$

$$=\frac{V_0}{1+i}\cos\omega t-\frac{aV_0}{4}\cos((\Omega_1+\omega)t)-$$

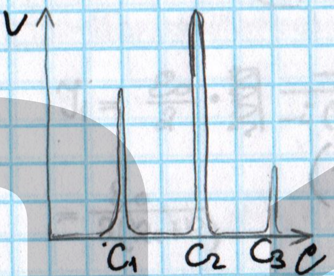
$$-\frac{aV_0}{4}\cos((\omega-\Omega_1)t)$$

<u>Ответ</u>: на частоте ω: $\frac{V_0}{\sqrt{2}}$

на частотах $\omega\pm\Omega_1$: $\frac{aV_0}{4}$ смещённые

на $\Delta\varphi=45^\circ$ по фазе

Т12.2

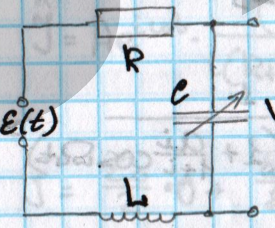


Дано: $\mathcal{E}(t)=\mathcal{E}_0\cos(\omega_0 t+m\cos\Omega t)$

контур высокодобротный,

$m=\frac{1}{9}$, $\Omega=\frac{4}{5}\omega_0$

Найти: $\frac{V_2}{V_1}$, $\frac{V_1}{V_3}$



Решение:

$$\mathcal{E}(t)=\mathcal{E}_0\left(\cos\omega_0 t\cos(m\cos\Omega t)-\sin\omega_0 t\sin(m\cos\Omega t)\right)$$

$$\approx \mathcal{E}_0\cos\omega_0 t-m\mathcal{E}_0\cdot\frac{1}{2}\left(\sin((\omega_0+\Omega)t)+\sin((\omega_0-\Omega)t)\right)$$

Контур высокодобротный, то есть на конденсаторе остаётся только резонансная частота с амплитудой гармоники умноженной на добротность:

$$V_1=\frac{m\mathcal{E}_0}{2}\cdot Q=\frac{m\mathcal{E}_0}{2}\frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C_1}},\quad \frac{1}{\sqrt{LC_1}}=\omega_0+\Omega \Rightarrow V_1=\frac{m\mathcal{E}_0}{2}\cdot\frac{1}{R}L(\omega_0+\Omega)$$

$$V_2=\mathcal{E}_0\cdot Q=\cancel{\frac{m\mathcal{E}_0}{2}}\mathcal{E}_0\sqrt{\frac{L}{C_2}},\quad \frac{1}{\sqrt{LC_2}}=\omega_0 \Rightarrow V_2=\mathcal{E}_0\cdot\frac{1}{R}L\omega_0$$

$$V_3 = \frac{m\varepsilon_0}{2}\frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C_3}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{LC_3}} = \omega_0 + \Omega_1$$

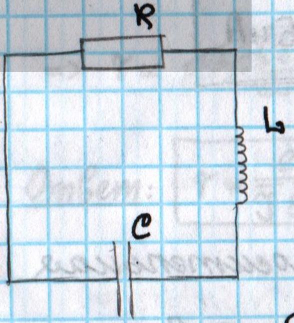
$$\Rightarrow V_3 = \frac{m\varepsilon_0}{2} RL(\omega_0 - \Omega_1)$$

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{\omega_0}{\frac{m}{2}(\omega_0 + \Omega_1)} = \frac{2\omega_0 \cdot 9}{\frac{9}{5}\omega_0} = 10$$

$$\frac{V_1}{V_3} = \frac{\omega_0 + \Omega_1}{\omega_0 - \Omega_1} = 9$$

Ответ: $\boxed{\frac{V_2}{V_1} = \frac{2\omega_0}{m(\omega_0 + \Omega_1)} = 10 \quad \frac{V_1}{V_3} = \frac{\omega_0 + \Omega_1}{\omega_0 - \Omega_1} = 9}$

Т12.3



Дано: $\nu_0 = 1$ кГц, $Q = 100$, $R = 1$ Ом,

$T = 300$ К

Найти: $\sqrt{\langle \delta U_C^2 \rangle}$, $\sqrt{\langle \delta I^2 \rangle}$

Решение:

$\langle W_L \rangle = \langle W_C \rangle = \frac{1}{2}kT$ (по теореме о равнораспределении),

Здесь степеням свободы колебательной системы отвечают параметры q и $\dot{q}$

Мощность теплообмена: $N = \langle I^2 R \rangle =$

$= \left\langle \frac{I^2 L}{2} \cdot \frac{2R}{L} \right\rangle = \langle W_L \rangle \cdot \frac{2R}{L} = kT \cdot \frac{R}{L}$

$$Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} \Rightarrow \sqrt{C} = \frac{\sqrt{L}}{QR}$$

$$\nu_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{QR}{2\pi L} \Rightarrow L = \frac{QR}{2\pi\nu_0}$$

Из равенства для N: $\langle\delta J^2\rangle = \frac{kT}{L} = \frac{2\pi\nu_0 kT}{QR}$

$\sqrt{\langle\delta J^2\rangle} \simeq 0{,}5$ нА

$$\langle W_C\rangle = \langle W_L\rangle \Rightarrow \left\langle\frac{C U_C^2}{2}\right\rangle = \left\langle\frac{L\,\delta J^2}{2}\right\rangle \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \langle\delta U_C^2\rangle = \frac{L}{C}\langle\delta I^2\rangle = Q^2R^2\cdot\frac{2\pi\nu_0 kT}{QR}, \quad \sqrt{\langle\delta U_C^2\rangle} \simeq 50\text{ нВ}$$

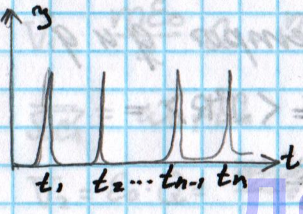
Ответ: $\boxed{\begin{aligned}&\sqrt{\langle\delta U_C^2\rangle} = \sqrt{2\pi\nu_0 kT\cdot QR} \simeq 50\text{ нВ}\\ &\sqrt{\langle\delta I^2\rangle} = \sqrt{2\pi\nu_0 kT\cdot\frac{1}{QR}} \simeq 0{,}5\text{ нА}\end{aligned}}$

Т12.4

Дано: $\bar{J} = 1{,}6$ мкА, $\varepsilon = 1\%$ (относительная флуктуация тока из-за дробового шума)

Найти: время измерения тока τ.

Решение:



$$J(t) = \sum_{n=1}^{N} e\,\delta(t-t_n)$$

$$\langle J\rangle_\tau = \frac{1}{\tau}\int_{t-\tau}^{t} J\,dt = \frac{\langle N_\tau\rangle e}{\tau} \Rightarrow \langle N_\tau\rangle = \frac{\langle J\rangle_\tau\,\tau}{e}$$

N_τ – число импульсов (электронов) прошедших за время τ через цепь

$$\mathcal{E} = \frac{e}{\tau}\sigma_{N_\tau}\cdot\frac{\tau}{e N_\tau} = \frac{\sigma_{N_\tau}}{N_\tau} =$$

$N_\tau = \sum\limits_{i=1}^{M} x_i$, где $x_i = 1$, если частица прошла цепь

$$\overline{N_\tau} = \sum_{i=1}^{M} \overline{x_i} = M\cdot p$$

$$\sigma_{N_\tau} = \sqrt{\overline{(N_\tau - \overline{N_\tau})^2}} = \sqrt{\overline{\left(\sum (x_i - p)\right)^2}} = \sqrt{\sum \overline{(x_i - p)^2}} =$$

$$= \sqrt{\sum \overline{x_i^2} - 2p\sum \overline{x_i} + Mp^2} = \sqrt{Mp - Mp^2} = \sqrt{Mp(1-p)} \approx$$

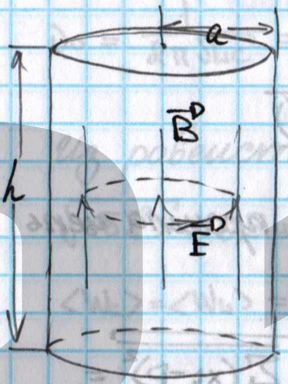
$$\approx \sqrt{Mp} = \sqrt{\overline{N_\tau}} \Rightarrow \mathcal{E} = \frac{1}{\sqrt{N_\tau}} = \sqrt{\frac{e}{\tau\langle J\rangle_\tau}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tau \approx \frac{e}{J\mathcal{E}^2} = 1\text{ нс}$$

<u>Ответ</u>: $\boxed{\tau \approx \frac{e}{J\mathcal{E}^2} = 1\text{ нс}}$

13 неделя

№ 12.22



Дано: $a = 1$ см, $h = 10$ см, $B = B_0 \cos\omega t$

$B_0 = 100$ Гс, $\nu = 50$ Гц, $\lambda = 5{,}14 \cdot 10^{17}$ с$^{-1}$

Найти: $\overline{Q}$

Решение:

$$\oint \vec{E} d\vec{l} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int \vec{B} d\vec{\Pi}$$

$$2\pi r E = \frac{1}{c} B_0 \omega \sin\omega t \cdot \pi r^2$$

$$E = \frac{B_0 \omega r}{2c} \sin\omega t$$

$$Q = \int_V \vec{j} \cdot \vec{E} dV = \lambda \int_V E^2 dV = \lambda \int_0^a E^2 \cdot 2\pi r h dr =$$

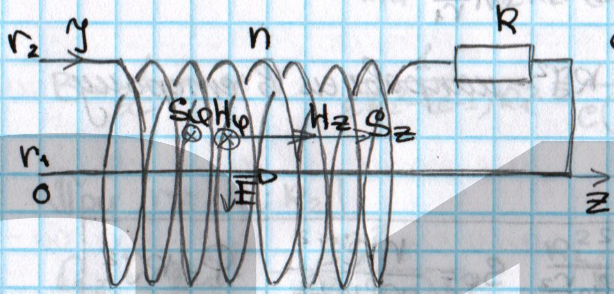
$$= \lambda \cdot 2\pi h \cdot \int_0^a \left(\frac{B_0 \omega r}{2c}\right)^2 r\, dr \overset{\sin^2\omega t}{} = \lambda 2\pi h \left(\frac{B_0\omega}{2c}\right)^2 \cdot \frac{a^4}{4} \sin^2\omega t =$$

$$= 2\lambda\pi h \cdot \left(\frac{B_0 \omega a^2}{4c}\right)^2 \cdot \frac{1 - \cos(2\omega t)}{2}$$

$$\overline{Q} = \frac{1}{T}\int_0^T Q dt = \lambda \pi h \left(\frac{B_0 \pi a^2 \nu}{2c}\right)^2 \approx 1{,}1 \cdot 10^6 \frac{\text{эрг}}{\text{с}}$$

Ответ: $\boxed{\overline{Q} = \pi\lambda h \left(\frac{B_0 \pi a^2 \nu}{2c}\right)^2 \approx 1{,}1 \cdot 10^6 \frac{\text{эрг}}{\text{с}}}$

№12.27



Дано: J, R, r_1, r_2, n

Найти: $S_z, S_\varphi, \Phi_{сек}$

Решение:

Поле в катушке:

$$H_z = \frac{4\pi}{c} nJ$$

Поле провода:

$$2\pi r H_\varphi = \frac{4\pi}{c} J \Rightarrow H_\varphi = \frac{2J}{cr}$$

$U = JR$ - разность потенциалов между катушкой и проводом

$$2\pi r l E = 4\pi æ l \Rightarrow E(r) = \frac{2æ}{r}$$

$$U = -\int_{r_2}^{r_1} \frac{2æ}{r} dr = 2æ \ln\frac{r_2}{r_1} \Rightarrow 2æ = \frac{U}{\ln\frac{r_2}{r_1}},$$ получаем

$$E = \frac{U}{r \ln\frac{r_2}{r_1}} = \frac{JR}{r \ln\frac{r_2}{r_1}}$$

$$S_\varphi = \frac{c}{4\pi} E H_z = \frac{c}{4\pi} \cdot \frac{4\pi}{c} nJ \cdot \frac{JR}{r \ln\frac{r_2}{r_1}} = \frac{nRJ^2}{r \ln\frac{r_2}{r_1}}$$

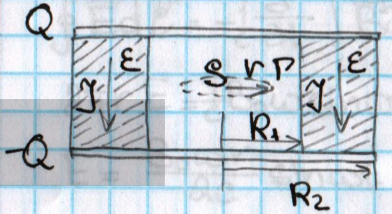
$$S_z = \frac{c}{4\pi} E H_\varphi = \frac{c}{4\pi} \cdot \frac{2J}{cr} \cdot \frac{JR}{r \ln\frac{r_2}{r_1}} = \frac{RJ^2}{2\pi r^2 \ln\frac{r_2}{r_1}}$$

$$\Phi_{сеч} = \int\limits_{сеч} S_z\, d\Pi = \int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{RJ^2}{2\pi r^2 \ln\frac{r_2}{r_1}} \cdot 2\pi r\, dr =$$

$$= \frac{RJ^2}{\ln\frac{r_2}{r_1}} \int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = RJ^2$$ – направлен в сторону резистора

Ответ: $\boxed{S_z = \frac{RJ^2}{2\pi r^2 \ln\frac{r_2}{r_1}} \quad S_\varphi = \frac{nRJ^2}{r\ln\frac{r_2}{r_1}} \quad \Phi = RJ^2}$

212.81



Дано: ε, J, R_1, R_2

Найти: $B(r)$

Решение:

При $r \in [0, R_1]$: Рассмотрим контур Γ:

$$\oint\limits_\Gamma \vec{H} d\vec{l} = \frac{4\pi}{c} \int\limits_S \vec{j} d\vec{S} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_S \vec{D} dt$$

$$B \cdot 2\pi r = \frac{1}{c} \cdot \pi r^2 \cdot \dot{D} \Rightarrow B = \frac{1}{2c} r\dot{D}$$

Конденсатор можно заменить на 2 параллельных, причём $\frac{Q_1}{C_0 \cdot \frac{\pi R_1^2}{\pi R_2^2}} = \frac{Q_2}{C_0 \cdot \frac{\pi R_2^2 - \pi R_1^2}{\pi R_2^2}\varepsilon} \Rightarrow$

$$\Rightarrow Q_2 = \varepsilon \frac{R_2^2 - R_1^2}{R_1^2} Q_1$$

$$Q_1 + Q_2 = Q \Rightarrow \left(\varepsilon \frac{R_2^2 - R_1^2}{R_1^2} + 1\right) Q_1 = Q \Rightarrow Q_1 = Q \cdot \frac{R_1^2}{\varepsilon R_2^2 - (\varepsilon - 1) R_1^2}$$

$$D = 4\pi\sigma_{1ст} = 4\pi\cdot\frac{1}{\pi R_1^2}\cdot Q\frac{R_1^2}{\varepsilon R_2^2-(\varepsilon-1)R_1^2}$$

$$B = \frac{1}{2c}r\cdot 4J\cdot\frac{1}{\varepsilon R_2^2-(\varepsilon-1)R_1^2} = \frac{2Jr}{c(\varepsilon R_2^2-(\varepsilon-1)R_1^2)}$$

При $r\in[R_1;R_2]$:

$$Q_2 = Q\cdot\frac{R_1^2}{\varepsilon R_2^2-(\varepsilon-1)R_1^2}\cdot\frac{R_2^2-R_1^2}{R_1^2}\cdot\varepsilon$$

$$\cancel{\sigma_{ст2} = 4Q\cdot\frac{1}{\pi(R_2^2-R_1^2)}\cdot\frac{R_2^2-R_1^2}{R_1^2(\varepsilon R_2^2-(\varepsilon-1)R_1^2)} = 4Q}$$

$$\sigma_{2ст} = \varepsilon Q\cdot\frac{R_2^2-R_1^2}{\varepsilon R_2^2-(\varepsilon-1)R_1^2}\cdot\frac{1}{\pi(R_2^2-R_1^2)} = \frac{\varepsilon Q}{\pi(\varepsilon R_2^2-(\varepsilon-1)R_1^2)}$$

В диэлектрике $\dot{D} = 4\pi\dot{\sigma}_{ст} = \frac{4\varepsilon J}{\varepsilon R_2^2-(\varepsilon-1)R_1^2}$

$$B\cdot 2\pi r = \frac{4\pi}{c}J\cdot\frac{\pi(r^2-R_1^2)}{\pi(R_2^2-R_1^2)} - \frac{1}{c}\cdot\left(\frac{4J\cdot\pi R_1^2}{\varepsilon R_2^2-(\varepsilon-1)R_1^2} + \right.$$

из-за того что $\dot{D}<0$

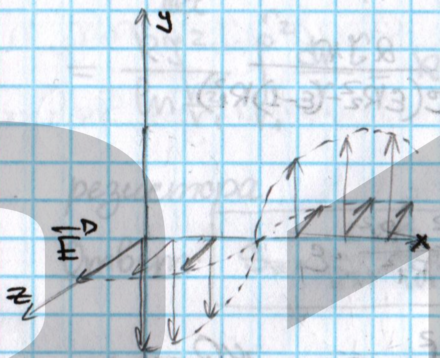
$$\left. + \frac{4\varepsilon J\cdot\pi(r^2-R_1^2)}{\varepsilon R_2^2-(\varepsilon-1)R_1^2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B = \frac{2J}{cr}\left(\frac{r^2-R_1^2}{R_2^2-R_1^2} - \frac{\varepsilon r^2-(\varepsilon-1)R_1^2}{\varepsilon R_2^2-(\varepsilon-1)R_2^2}\right)$$

Ответ: $B = \frac{2Jr}{c(\varepsilon R_2^2-(\varepsilon-1)R_1^2)}$ при $r\le R_1$

$B = \frac{2J}{cr}\left(\frac{r^2-R_1^2}{R_2^2-R_1^2} - \frac{\varepsilon r^2-(\varepsilon-1)R_1^2}{\varepsilon R_2^2-(\varepsilon-1)R_1^2}\right)$ при $R_1\le r\le R_2$

T13.1



Дано: плоские электромагнитные волны с одинаковой амплитудой и частотой — вдоль Ox и Oy. $\vec{E} \uparrow\uparrow Oz$

Найти: $\langle S \rangle$ — среднее по времени, плоскости, вдоль которых средний поток энергии максимален.

Решение:

Для волны, бегущей вдоль Ox:

$$\text{rot}\,\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{rot}\,\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \Rightarrow \text{rot}\,\vec{B} = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\frac{\partial E}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{1}{c}\dot{B}$$

$$\frac{\partial B}{\partial z} = 0, \quad -\frac{\partial B}{\partial x} = \frac{1}{c}\dot{E}$$

Решениями являются $E = f_1(\omega t - kx)$, $B = f_2(\omega t - kx)$,

где $k = \frac{\omega}{c}$. Из условия:

$$\vec{E}_1 = E_0 \vec{e}_z \cos(\omega t - kx)$$

$$\vec{B_1} = -B_0 \vec{e_y} \cos(\omega t - kx)$$

$$E_0 k = -\frac{1}{c}\cdot(-B_0\omega) \Rightarrow B_0 = \frac{kc}{\omega}E_0 = E_0$$

Аналогично для второй волны:

$$\vec{E_2} = E_0 \vec{e_z} \cos(\omega t - ky)$$

$$\vec{B_2} = E_0 \vec{e_x} \cos(\omega t - ky)$$

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi}\vec{E}\times\vec{B} = \frac{c}{4\pi}E_0^2\left(\cos(\omega t - ky) + \cos(\omega t - kx)\right)\cdot$$

$$\cdot\vec{e_z}\times\left[-\vec{e_y}\cos(\omega t - kx) + \vec{e_x}\cos(\omega t - ky)\right] =$$

$$= \frac{c}{4\pi}E_0^2\left[\vec{e_x}\cdot\left\{\cos^2(\omega t - kx) + \frac{1}{2}\left(\cos(2\omega t - kx - ky) + \cos(k(x-y))\right)\right\} +\right.$$

$$\left. + \vec{e_y}\cdot\left\{\cos^2(\omega t - ky) + \frac{1}{2}\left(\cos(2\omega t - kx - ky) + \cos(k(x-y))\right)\right\}\right] \Rightarrow$$

$$\langle\vec{S}\rangle = \frac{c}{4\pi}E_0^2(\vec{e_x}+\vec{e_y})\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(k(x-y))\right) =$$

$$= \frac{c}{4\pi}E_0^2\cos^2\left[\frac{k}{2}(x-y)\right](\vec{e_x}+\vec{e_y})$$

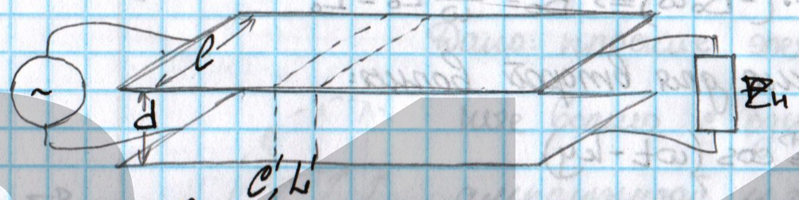
$$|\langle\vec{S}\rangle|_{max} = \frac{c}{4\pi}E_0^2\cdot\sqrt{2} \text{ при } \frac{k}{2}(x-y) = \frac{\pi}{\lambda}(x-y) = \pi m, m\in\mathbb{Z} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x - y = \lambda m$$

Ответ: $\langle\vec{S}\rangle_t = \frac{c}{4\pi}E_0^2\cos^2\left[\frac{k}{2}(x-y)\right](\vec{e_x}+\vec{e_y})$

$|\langle\vec{S}\rangle_t|_{max} = \sqrt{2}\cdot\frac{c}{4\pi}E_0^2$ при $x-y=\lambda m$, $m\in\mathbb{Z}$.

14 неделя №12.67



Дано: $l=10$ см, $d=1$ см

Найти: υ, $Z_н$: чисто бегущая волна

Решение:

$$C' = \frac{1}{4\pi}\frac{S}{d}\cdot\frac{1}{x} = \frac{lx}{4\pi d x} = \frac{l}{4\pi d}$$

$$\Phi = \frac{4\pi}{c}\cdot\frac{J}{l}\cdot xd = \frac{1}{c}L'x\cdot J \Rightarrow L' = \frac{4\pi d}{l}$$

Скорость волны: $\upsilon = \frac{c}{\sqrt{L'C'}} = c$

Коэффициент отражения:

$$\begin{cases} V_н = V_{пад} + V_{отр} \\ J_н = J_{пад} - J_{отр} \longrightarrow \frac{V_н}{Z_н} = \frac{V_{пад}}{R_w} - \frac{V_{отр}}{R_w} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r = \frac{Z_н - R_w}{Z_н + R_w}$$

Чисто бегущая волна, когда $r=0 \Rightarrow Z_н = R_w = \frac{1}{c}\sqrt{\frac{L'}{C'}} =$

$$= \frac{1}{c}\cdot\frac{4\pi d}{l} = \frac{4\pi}{c}\frac{d}{l}$$

Ответ: $\boxed{\upsilon = c,\ Z_н = R_w = \frac{4\pi}{c}\frac{d}{l} \approx 4{,}2\cdot 10^{-10}\ \frac{с}{см}}$

№12.48

Дано: $\lambda = 8$ мм, $N = 1$ Вт, $V = 0{,}2$ см^3; $Q = 10^3$, генератор настроен на основную моду резонатора

Найти: E_0

Решение:

$$E_x = E_{x0}\cos(k_x x)\sin(k_y y)\sin(k_z z)e^{i\omega t}$$

граничные условия ~~на~~ для плоскости $0xz$

граничные условия для плоскости $0xy$

Также из граничных условий для противоположных граней резонатора получаем

$k_y L_y = \pi m$, $k_z L_z = \pi n$, $m, n = 1, 2, \ldots$

Аналогичные выражения для E_y и E_z

Основная мода - $k_x = 0$, $k_y L_y = \pi$, $k_z L_z = \pi$:

$$E_x = E_0 \sin\left(\frac{\pi y}{L_y}\right)\sin\left(\frac{\pi z}{L_z}\right)e^{i\omega t}$$

$$W_{E\max} = \frac{\overline{E^2}}{8\pi}\cdot V, \quad W_{max} = W_{E\max} + W_{B\max} = 2W_{E\max} =$$

$$= \frac{V}{4\pi}\cdot E_0^2 \cdot \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{VE_0^2}{32\pi} \Rightarrow E_0^2 = \frac{32\pi}{V}W_{max}$$

Добротность: $Q = \frac{\omega W_{max}}{N} \Rightarrow W_{max} = \frac{QN}{\omega}$

Окончательно: $E_0 = \sqrt{\frac{32\pi QN}{V\omega}} = \sqrt{\frac{32\pi QN\lambda}{V\cdot 2\pi c}} = \sqrt{\frac{16QN\lambda}{Vc}}$

Ответ: $\boxed{E_0 = \sqrt{\frac{16QN\lambda}{Vc}} \approx 4{,}6 \text{ ед. СГС}}$

№14.1

Дано: $a \times a \times b$, $a > b$, $\nu_1 = 10$ ГГц, $\nu_2 = 11$ ГГц

Найти: ν_3

Решение:

$$\omega = c\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} = c\sqrt{\left(\frac{\pi}{a}n\right)^2 + \left(\frac{\pi}{a}n\right)^2 + \left(\frac{\pi}{b}l\right)^2}$$

$$\nu = \frac{c}{2}\sqrt{\left(\frac{n}{a}\right)^2 + \left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{l}{b}\right)^2}$$

ν_1 – при $n = m = 1$, $l = 0$: $\nu_1 = \frac{c\sqrt{2}}{2a}$ (1)

ν_2 – при $n = 2, m = 1, l = 0$ или $n = 1, m = 0, l = 1$:

$$\nu_2 = \frac{c}{2a}\sqrt{5} \text{ – неверно} \Rightarrow \nu_2 = \frac{c}{2a}\sqrt{\cancel{2}\,1 + \frac{a^2}{b^2}} \quad (2)$$

ν_3 – при $n = 1, m = 1, l = 1$ или $n = 2, m = 1, l = 0$

$n = m = l = 1$: $\nu_3 = \frac{c}{2a}\sqrt{2 + \frac{a^2}{b^2}}$

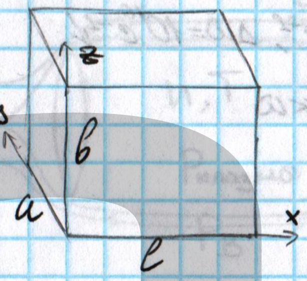
$$(2) \Rightarrow \nu_2 = \frac{\nu_1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{1 + \frac{a^2}{b^2}} \Rightarrow 1 + \frac{a^2}{b^2} = \frac{2\nu_2^2}{\nu_1^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \nu_3 = \frac{\nu_1}{\sqrt{2}}\sqrt{1 + \frac{2\nu_2^2}{\nu_1^2}} \simeq 13 \text{ ГГц}$$

$n = 2, m = 1, l = 0$: $\nu_3 = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\nu_1 \simeq 15$ ГГц – неверно, т.к. больше

Ответ: $\boxed{\nu_3 = \nu_1\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{\nu_2^2}{\nu_1^2}} \simeq 13 \text{ ГГц}}$

№12.53



Дано: $a<b<l$, после накопления плазмы $\omega_0 \to 2\omega_0$, изначально колебания на низшей моде

Найти: n_e

Решение:

$$\omega^2 = v^2(k_x^2+k_y^2+k_z^2) = v^2\left(\left(\frac{\pi}{l}m_x\right)^2+\left(\frac{\pi}{a}m_y\right)^2+\left(\frac{\pi}{b}m_z\right)^2\right)$$

Низшая мода колебаний, когда $m_x=m_z=1$, $m_y=0$

$$\omega^2 = \pi^2 v^2\left(\frac{1}{l^2}+\frac{1}{b^2}\right)$$

Изначально вакуум, $\varepsilon=1$, $v=\frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}=c$

В конце $v=\frac{c}{\sqrt{\varepsilon}}$

$$\begin{cases} \omega_0^2 = \pi^2 c^2\left(\frac{1}{l^2}+\frac{1}{b^2}\right) \\ 4\omega_0^2 = \pi^2\frac{c^2}{\varepsilon}\left(\frac{1}{l^2}+\frac{1}{b^2}\right) \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{4}=\varepsilon$$

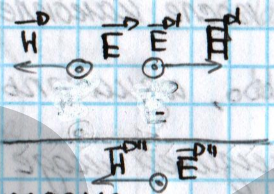
Для плазмы: $\varepsilon = 1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2} = 1-\frac{\omega_p^2}{4\omega_0^2}=\frac{1}{4} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{1}{4}\omega_p^2 = \frac{3}{4}\omega_0^2 \Rightarrow \omega_p^2 = 3\pi^2c^2\left(\frac{1}{l^2}+\frac{1}{b^2}\right)$$

$$\omega_p = \sqrt{\frac{4\pi n e^2}{m_e}} \Rightarrow n_e = \frac{m_e}{4\pi e^2}3\pi^2c^2\left(\frac{1}{l^2}+\frac{1}{b^2}\right) = \frac{3\pi m_e c^2}{4e^2}\left(\frac{1}{l^2}+\frac{1}{b^2}\right)$$

Ответ: $\boxed{n_e = \frac{3\pi m_e c^2}{4e^2}\left(\frac{1}{l^2}+\frac{1}{b^2}\right)}$

№12.96



Дано: $\omega = 10^{11}\,c^{-1}$, $\Delta\omega = 10^{10}\,c^{-1}\downarrow$, $\Delta r = 0{,}01\uparrow$, $\omega_p \ll \omega$

Найти: n_e

Решение:

$$\left.\begin{array}{l} E_{1\tau} = E_{2\tau} \\ H_{1\tau} = H_{2\tau} \end{array}\right| \Rightarrow \begin{cases} E_0 + E_0' = E_0'' \\ H_0 - H_0' = H_0'' \end{cases}$$

$H_0 = n_1 E_0$, $H_0' = n_1 E_0'$, $H_0'' = n_2 E_0''$, где $n = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}$

$$\begin{cases} E_0 + E_0' = E_0'' \\ n_1 (E_0 - E_0') = n_2 E_0'' \end{cases}$$

$$n_1 E (1 - r) = n_2 (1 + r) \Rightarrow r = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} = \frac{1 - \sqrt{\varepsilon}}{1 + \sqrt{\varepsilon}} =$$

$$= \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}{1 + \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}} \simeq \frac{1 - 1 + \frac{1}{2}\frac{\omega_p^2}{\omega^2}}{1 + 1 - \frac{1}{2}\frac{\omega_p^2}{\omega^2}} =$$

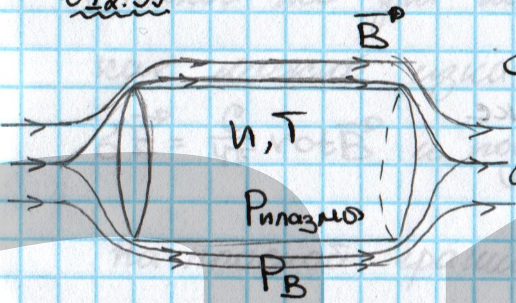
$$= \frac{\omega_p^2}{4\omega^2 \, \omega_p^2} \simeq \frac{\omega_p^2}{4\omega^2}$$

$$|dr| = \frac{\omega_p^2}{4\omega^3} \cdot 2 d\omega \Rightarrow \Delta r \simeq \frac{\omega_p^2 \Delta\omega}{\omega^3 \cdot 2} = \frac{\Delta\omega}{2\omega^3} \cdot \frac{4\pi n_e e^2}{m_e} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n_e \simeq \frac{m_e \Delta r \, \omega^3}{2\pi e^2 \Delta\omega} \simeq 6 \cdot 10^{11}\,см^{-3}$$

Ответ: $\boxed{n_e \simeq \frac{m_e \omega^3 \Delta r}{2\pi e^2 \Delta\omega} \simeq 6 \cdot 10^{11}\,см^{-3}}$

№12.59



Дано: $n = 10^{16}$ см$^{-3}$, $T = 10^8$ К, для удержания плазмы используется магнитное поле

Найти: B

Решение:

Давление поля $\vec{B}$ равно его объёмной энергии: $P_B = w = \frac{B^2}{8\pi}$

Давление плазмы - обычное газокинетическое давление $P_{плазмы} = n k_Б T$

Для удержания необходимо $P_B = P_{плазмы}$ =>

=> $B = \sqrt{8\pi n k_Б T} \approx 59 \cdot 10^3$ Гс

Ответ: $\boxed{B = \sqrt{8\pi n k_Б T} \approx 59 \cdot 10^3 \text{ Гс}}$

T15.3

Дано: $\sigma \sim 10^{14}\, c^{-1}$, $\tau = 1$ мкс

Найти: $D_м$, l

Решение:

$$\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\mathrm{rot}\,\vec{H} = \mathrm{rot}\,\vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}$$

$$\vec{j}_{см} = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{\varepsilon}{4\pi}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$\sigma \gg \varepsilon$ => можно пренебречь током смещения (для плазмы $\varepsilon = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$)

Тогда $\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\,\vec{E}) = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\mathrm{rot}\,\vec{B}) =$

$$= -\frac{1}{c}\cdot\frac{4\pi}{c}\frac{\partial \vec{j}}{\partial t} = -\frac{4\pi\sigma}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\,\vec{E}) = \nabla(\nabla, \vec{E}) - \nabla^2\vec{E} = \mathrm{grad}(\mathrm{div}\,\vec{E}) - \nabla^2\vec{E} =$$

$$= -\nabla^2\vec{E}$$

Получаем уравнение диффузии:

$$\nabla^2\vec{E} = \frac{4\pi\sigma}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Коэффициент диффузии $D_м \simeq \frac{c^2}{4\pi\sigma} \simeq 70\,\frac{м^2}{с}$

(такой же для магнитного поля, так как можно изначально было выразить $\sigma\vec{E} = \frac{c}{4\pi}\operatorname{rot}\vec{B}$ и подставить в 1-ое ур-ие)

На плоской границе диффузия происходит в одну сторону, поэтому $l \sim \sqrt{D_м \tau}$ =>

=> $l \sim 8$ мм

<u>Ответ:</u> $\boxed{D_м = \frac{c^2}{4\pi\sigma} \simeq 70\,\frac{м^2}{с},\ l \sim \sqrt{D_м \tau} \simeq 8\,мм}$