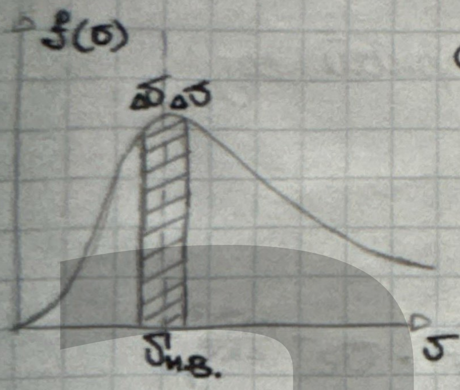
9 неделя

27.70



Дано: H_2, α – доля молекул, скорость которых отличается от наиболее вероятной на $\pm 3\ \frac{м}{с}$. $T_1 = 600\,K$, $T_2 = 400\,K$

Найти: $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$

Решение:

$$f(v) = 4\pi v^2 \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}}$$

$$f'(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \cdot \left(2v - v^2 \cdot \frac{mv}{kT}\right) e^{-\frac{mv^2}{kT}} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_{н.в.} = \sqrt{\frac{2kT}{m}} = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}};$$

При $T = T_1$ и $T = T_2$: $v_{н.в.} \gg \Delta v = 3\ \frac{м}{с} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \alpha \approx \sqrt{\frac{2RT}{\mu}} \cdot 2\Delta v$$

Таким образом, $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} \approx \sqrt{\frac{T_1}{T_2}} \approx 1{,}2$.

Ответ: $\boxed{\frac{\alpha_1}{\alpha_2} \approx \sqrt{\frac{T_1}{T_2}} \approx 1{,}2}$

27.16

Дано: электроны движутся в тонком поверхностном слое $\leftrightarrow$ двумерный газ.

Найти: $\alpha = \frac{\upsilon_{н.в.}}{\sqrt{\overline{\upsilon^2}}}$;

Решение:

$$f(\upsilon) = 2\pi\upsilon\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{2/2} \cdot e^{-\frac{m\upsilon^2}{2kT}} = \frac{m}{kT} \cdot \upsilon e^{-\frac{m\upsilon^2}{2kT}}.$$

$$f'(\upsilon) = \frac{m}{kT} e^{-\frac{m\upsilon^2}{2kT}}\left[1 - \frac{m\upsilon^2}{kT}\right].$$

$$f'(\upsilon_{н.в.}) = 0 \Rightarrow \upsilon_{н.в.} = \sqrt{\frac{kT}{m}};$$

$$\overline{\upsilon^2} = \int_0^{+\infty} \upsilon^2 f(\upsilon)\,d\upsilon = \frac{m}{kT}\int_0^{+\infty} \upsilon^3 e^{-\frac{m\upsilon^2}{2kT}} d\upsilon = \left\{ \xi = \frac{m\upsilon^2}{2kT} \right\} =$$

$$= \frac{m}{kT}\int_0^{+\infty}\left(\frac{2kT\xi}{m}\right)^{3/2} \cdot e^{-\xi} \cdot \sqrt{\frac{2kT}{m}}\,\frac{1}{2\sqrt{\xi}}\,d\xi =$$

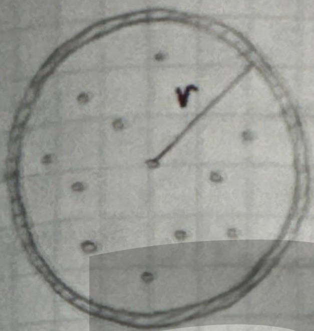
$$= \frac{2kT}{m}\int_0^{+\infty} \xi e^{-\xi} d\xi = -\frac{4kT}{m}\int \xi\, de^{-\xi} = -\frac{2kT}{m}\left[\xi e^{-\xi}\Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} e^{-\xi} d\xi\right].$$

$$= \frac{2kT}{m}\left(-e^{-\xi}\right)\Big|_0^{+\infty} = \frac{2kT}{m}.$$

$$\alpha = \frac{\upsilon_{н.в.}}{\sqrt{\overline{\upsilon^2}}} = \frac{\sqrt{\frac{kT}{m}}}{\sqrt{\frac{2kT}{m}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Ответ: $\boxed{\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}.}$

№7.53



Дано: $r = 1$ м, $E_{пор} = 1$ эВ, $\omega = 10^{-3}$ – вероятность реакции при ударе, $P_0 = 10$ атм, $\mu = 40\ \frac{г}{моль}$, $T = 1160$ К

Найти: $\frac{dM}{dt}$

Решение:

Распределение Максвелла по скоростям:

$$f(v) = 4\pi v^2 \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}}.$$

В единицу времени в стенку ударяется $dN = S j f(v) dv$ молекул со скоростью v. Из них $dN' = \omega dN$ вступает в реакцию.

Таким образом $\frac{dM}{dt} = \int\limits_{E_{пор}}^{+\infty} dN' \cdot m =$

$$= \int\limits_{v_{пор}}^{+\infty} \omega S \cdot \frac{1}{4} n v \cdot 4\pi v^2 \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} m\, dv =$$

$$= \omega S n \pi m \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \int\limits_{v_{пор}}^{+\infty} v^3 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv =$$

$$= \frac{1}{2} \omega S n \pi m \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \int\limits_{v_{пор}}^{+\infty} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv^2 = \left\{ \xi = \frac{mv^2}{2kT} \right\} =$$

$$= \frac{1}{2} \omega S n \pi m \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \int\limits_{\xi(v_{пор})}^{+\infty} \frac{2kT}{m} \xi \cdot e^{-\xi} \cdot \frac{2kT}{m} d\xi =$$

$$= \frac{1}{2}\omega S n \pi m \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \cdot \left(\frac{2kT}{m}\right)^{2} \int\limits_{\xi(v_{пор})}^{+\infty} \xi e^{-\xi} d\xi \ominus$$

$$\int\limits_{\xi(v_{пор})}^{+\infty} \xi e^{-\xi} d\xi = -\int\limits_{\xi(v_{пор})}^{+\infty} \xi d e^{-\xi} = -\xi e^{-\xi}\Big|_{\xi(v_{пор})}^{+\infty} + \int\limits_{\xi(v_{пор})}^{+\infty} e^{-\xi} d\xi =$$

$$= \xi(v_{пор}) e^{-\xi(v_{пор})} - e^{-\xi}\Big|_{\xi(v_{пор})}^{+\infty} = \left(\xi(v_{пор})+1\right) e^{-\xi(v_{пор})} =$$

$$= \left(\frac{m v_{пор}^2}{2kT}+1\right) e^{-\frac{m v_{пор}^2}{2kT}} = \left(\frac{E_{пор}}{kT}+1\right) e^{-\frac{E_{пор}}{kT}}$$

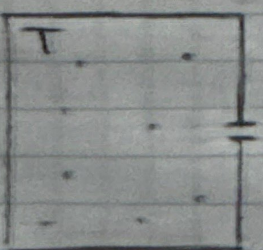
$$\ominus \frac{1}{2}\omega S \cdot \frac{P_0}{kT}\pi m \cdot \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \cdot \left(\frac{2kT}{m}\right)^{2} \left(\frac{E_{пор}}{kT}+1\right) e^{-\frac{E_{пор}}{kT}} =$$

$$= \omega S P_0 \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} \left(\frac{E_{пор}}{kT}+1\right) e^{-\frac{E_{пор}}{kT}} = 4\pi r^2 \omega P_0 \cdot \sqrt{\frac{\mu}{2\pi RT}} \cdot$$

$$\cdot \left(\frac{E_{пор}}{kT}+1\right) \exp\left(-\frac{E_{пор}}{kT}\right).$$

Ответ: $\boxed{\frac{dM}{dt} = 4\pi r^2 \omega P_0 \sqrt{\frac{\mu}{2\pi RT}} \cdot \left(\frac{E_{пор}}{kT}+1\right) \exp\left(-\frac{E_{пор}}{kT}\right) \qquad \frac{dM}{dt} \simeq 5{,}1\ \frac{г}{с}}$

27.67



Дано: T, m, скорость описывается распределением Максвелла

Найти: 1) $v_{out\ н.в.}$; 2) $\overline{|v_{out}|}$

Решение:

$$f(v) = 4\pi v^2 \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}}.$$

Поток через отверстие: $j = \frac{1}{4} n\bar{v}$

В единицу времени через отверстие вылетает

$$dj = \frac{1}{4} v\,dn = \frac{1}{4} v \cdot n\,\mathbb{P}(v) = \frac{1}{4} v\, n f(v)\, dv$$

Таким образом, функция распределения для вылетающих частиц:

$$\cancel{\varphi(v) = \frac{\frac{1}{4} n v f(v)}{\frac{1}{4} n\bar{v}} = dj} \quad \varphi(v)dv = \frac{dj}{j} = \frac{v f(v) dv}{\overline{|v|}} =$$

$$= \frac{v f(v) dv}{\sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}} = \sqrt{\frac{\pi m}{8kT}}\, v \cdot 4\pi v^2 \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv =$$

$$= 2\left(\frac{m}{2kT}\right)^2 v^3 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv, \quad \varphi(v) = 2\left(\frac{m}{2kT}\right)^2 v^3 e^{-\frac{mv^2}{2kT}}$$

$$\varphi'(v_{out\,н.в.}) = 0 \Rightarrow 3v^2_{out\,н.в.} - v^3 \cdot \frac{m v_{out\,н.в.}}{kT} = 0 \Rightarrow v_{out\,н.в.} = \sqrt{\frac{3kT}{m}};$$

$$\overline{|v_{out}|} = \int_0^{+\infty} \varphi(v) v\, dv = 2\left(\frac{m}{2kT}\right)^2 \int_0^{+\infty} v^4 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv$$

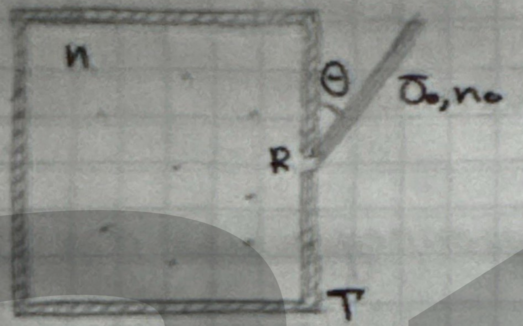
Из указания: $\int_0^{+\infty} v^{2\cdot 2} e^{-\frac{m}{2kT}v^2} dv = \frac{1}{2\left(\frac{m}{2kT}\right)^2} \cdot \frac{3!!}{2^2}\sqrt{\frac{\pi \cdot 2kT}{m}}$.

$$\overline{|v_{out}|} = \frac{3}{4}\sqrt{\frac{2\pi kT}{m}}$$

Ответ: $\boxed{v_{out\,н.в.} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}; \quad \langle |v_{out}| \rangle = \frac{3}{4}\sqrt{\frac{2\pi kT}{m}}}$

10 неделя

№7.81



Дано: $r = 1$ мм, $\theta = \frac{\pi}{6}$, $\upsilon_0 = 600\ \frac{м}{с}$, $n_0 = 10^{13}\ см^{-3}$, $T = 300$ К

Найти: n, N-мощность, подводимую к стенкам

Решение

За время dt в отверстие попадают частицы на расстоянии $\upsilon_0 dt$.

Объём, занимаемый этим цилиндром: $V = S \cdot h = S \cdot \upsilon_0 dt \sin\theta$.

Кол-во частиц: $dN = S \cdot n_0 \upsilon_0 dt \sin\theta$.

Поток: $j_{in} = \frac{1}{S}\frac{dN}{dt} = n_0 \upsilon_0 \sin\theta$.

Поток вылетающих частиц: $j_{out} = \frac{1}{4} n \bar{\upsilon} = \frac{1}{4} n \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$

$j_{in} = j_{out} \Rightarrow n = n_0 \upsilon_0 \sin\theta \sqrt{\frac{2\pi m}{kT}} = n_0 \upsilon_0 \sin\theta \sqrt{\frac{2\pi\mu}{RT}}$;

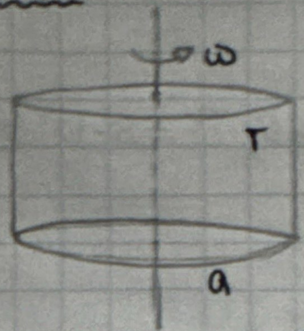
$\bar{\varepsilon}_{out} = 2kT$, $\varepsilon_{in} = \frac{m\upsilon_0^2}{2}$.

$N = \bar{\varepsilon}_{out} \cdot S \cdot j_{out} - \varepsilon_{in} S j_{in} = \left(2kT - \frac{m\upsilon_0^2}{2}\right) \pi r^2 \cdot n_0 \upsilon_0 \sin\theta =$

$= \pi r^2 n_0 \upsilon_0 \sin\theta \cdot 2kT \left(1 - \frac{\mu \upsilon_0^2}{4RT}\right)$

Ответ: $\boxed{n = n_0 \upsilon_0 \sin\theta \sqrt{\frac{2\pi\mu}{kT}} \approx 0{,}95 \cdot 10^{13}\ см^{-3}}$ $\boxed{N \approx 6{,}7 \cdot 10^{-5}\ Вт}$

28.25



Дано: $\mu = 40\,\frac{г}{моль}$, $a = 2{,}5\,см$, $\omega = 2\cdot 10^3\,с^{-1}$,

$T = 300°К$

Найти: $\langle \Delta C_V \rangle$

Решение:

$$\Delta C = \Delta\left(\frac{d\mathcal{E}}{dT}\right) = \frac{d(\Delta\mathcal{E})}{dT}$$

$$\langle \Delta C \rangle = \Delta \langle C \rangle = \frac{d(\Delta\langle\mathcal{E}\rangle)}{dT} = \frac{d(\langle\Delta\mathcal{E}\rangle)}{dT}$$

То есть достаточно найти среднее изменение энергии каждой частицы и его продифференцировать по температуре.

$$F = m\omega^2 r, \quad \Delta\mathcal{E} = -\frac{m\omega^2 r^2}{2}$$

$$f(r)\,dr = \frac{2\pi r h\,dr \cdot n_0 e^{\frac{m\omega^2 r^2}{2kT}}}{\int_0^a 2\pi r h\,dr\, n_0 e^{\frac{m\omega^2 r^2}{2kT}}} = \frac{r e^{\frac{m\omega^2 r^2}{2kT}}\,dr}{\int_0^a r e^{\frac{m\omega^2 r^2}{2kT}}\,dr}$$

$$\langle \Delta\mathcal{E} \rangle = -\frac{m\omega^2}{2}\,\frac{\int_0^a r^3 e^{\frac{m\omega^2 r^2}{2kT}}\,dr}{\int_0^a r e^{\frac{m\omega^2 r^2}{2kT}}\,dr} =$$

$$\frac{m\omega^2 r^2}{2kT} = \frac{\mu\omega^2 r^2}{2RT} \simeq 0{,}02 \ll 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow = -\frac{m\omega^2}{2}\,\frac{\int_0^a r^3\left(1 + \frac{m\omega^2 r^2}{2kT}\right)dr}{\int_0^a r\left(1 + \frac{m\omega^2 r^2}{2kT}\right)dr} = -\frac{m\omega^2}{2}\cdot\frac{\frac{a^4}{4} + \frac{m\omega^2}{2kT}\cdot\frac{a^6}{6}}{\frac{a^2}{2} + \frac{m\omega^2}{2kT}\cdot\frac{a^4}{4}} =$$

$$= -\frac{m\omega^2}{2}\cdot\frac{\frac{a^2}{2} + \frac{m\omega^2}{2kT}\cdot\frac{a^4}{3}}{1 + \frac{m\omega^2}{2kT}\cdot\frac{a^2}{2}} \simeq -\frac{m\omega^2}{2}\cdot a^2\left(\frac{1}{2} + \frac{m\omega^2 a^2}{6kT}\right)\left(1 - \frac{m\omega^2 a^2}{4kT}\right) \simeq$$

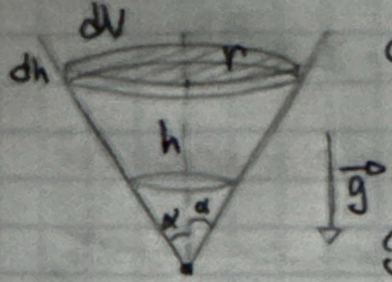
$$\simeq -\frac{m\omega^2 a^2}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{m\omega^2 a^2}{kT}\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right)\right) = -\frac{m\omega^2 a^2}{4} - \frac{m^2\omega^4 a^4}{48kT}$$

Отсюда $\langle \Delta C \rangle = \left(-\dfrac{m^2\omega^4 a^4}{48kT}\right)'_T = \dfrac{m^2\omega^4 a^4}{48kT^2} = \dfrac{\mu^2\omega^4 a^4}{48RT^2}$

$\langle \Delta C_0 \rangle = N_A \langle C \rangle = \dfrac{\mu^2\omega^4 a^4}{48RT^2}$

Ответ: $\boxed{\langle \Delta C_0 \rangle \simeq \dfrac{\mu^2\omega^4 a^4}{48RT^2} \approx 9{,}8 \cdot 10^{-4}\ \dfrac{\text{Дж}}{\text{К}\cdot\text{моль}}}$

17



Дано: $P(h=0)=P_0,\ \mu,\ T,\ g$

Найти: $\nu,\ h_{н.в}$

Решение:

$$dV = dh\cdot\pi r^2 = \pi h^2 tg^2\alpha\, dh.$$

В этом объёме содержится $d\nu = \dfrac{n(h)dV}{N_A}$ молей газа.

$$n(h) = n_0 e^{-\frac{mgh}{kT}} = \frac{P_0}{kT}e^{-\frac{\mu gh}{RT}}.$$

Таким образом: $d\nu = \dfrac{\pi P_0 tg^2\alpha}{RT} h^2 e^{-\cancel{mgh}\frac{\mu gh}{RT}} dh$

$$\nu = \int_0^{+\infty} d\nu = \frac{\pi P_0 tg^2\alpha}{RT}\int_0^{+\infty} h^2 e^{-\frac{\mu gh}{RT}}dh = \left\{\xi = \frac{\mu gh}{RT}\right\} =$$

$$= \frac{\pi P_0 tg^2\alpha}{RT}\cdot\left(\frac{RT}{\mu g}\right)^3\int_0^{+\infty}\xi^2 e^{-\xi}d\xi \ \circleddash$$

$$\int_0^{+\infty}\xi^2 e^{-\xi}d\xi = -\int_0^{+\infty}\xi^2 de^{-\xi} = -\xi^2 e^{-\xi}\Big|_0^{+\infty} + 2\int_0^{+\infty}\xi e^{-\xi}d\xi =$$

$$= \cancel{2} - 2\int_0^{+\infty}\xi\, de^{-\xi} = -2\left[\xi e^{-\xi}\Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} e^{-\xi}d\xi\right] = 2.$$

$$\circleddash\ \frac{2\pi P_0 tg^2\alpha (RT)^2}{(\mu g)^3}$$

$$f(h)dh = \frac{d\nu}{\nu} = \frac{\frac{\pi P_0 tg^2\alpha}{RT}h^2 e^{-\frac{\mu gh}{RT}}dh}{2\pi P_0 tg^2\alpha (RT)^2}\cdot(\mu g)^3 = const\cdot h^2 e^{-\frac{\mu gh}{RT}}dh$$

$$f'(h) = const\cdot e^{-\frac{\mu gh}{RT}}\left(2h - h^2\cdot\frac{\mu g}{RT}\right)$$

211

$f'(h_{н.в.}) = 0 \Rightarrow h_{н.в.} = \dfrac{2kT}{\mu g}.$

Ответ: $\boxed{\nu = \dfrac{2\pi P_0 \operatorname{tg}^3\alpha\,(kT)^2}{(\mu g)^3}, \quad h_{н.в.} = \dfrac{2kT}{\mu g}}$

11 неделя

T8

Дано: NO, $\Theta_{вр} \approx 3K$, $\Theta_{кол} \simeq 2{,}6\cdot 10^3 K$, $\mathcal{E}_{возб} - \mathcal{E}_{осн} = \mathcal{E} = 0{,}015 эВ$,

$\nu = 1$ моль, $V = const$, $T_1 = 50 K$, $T_2 = 300 K$

Найти: Q

Решение:

В диапазоне температур ~~$\Theta_{вр}$~~ вращательные степени свободы полностью возбуждены, а колебательные полностью заморожены.

Тогда $C_V = \frac{3+2}{2}\nu R = \frac{5}{2}\nu R$.

$$\overline{\mathcal{E}_{возб}} = \frac{\mathcal{E}\cdot e^{-\frac{\mathcal{E}}{kT}} + 0\cdot e^{-\frac{0}{kT}}}{e^{-\frac{\mathcal{E}}{kT}} + e^{-\frac{0}{kT}}} = \frac{\mathcal{E}}{1+e^{\frac{\mathcal{E}}{kT}}}$$

$$Q = C_V\Delta T + N_A\cdot\Delta\overline{\mathcal{E}_{возб}} = \frac{5}{2}\nu R(T_2-T_1) + N_A\mathcal{E}\left[\frac{1}{1+e^{\frac{\mathcal{E}}{kT_2}}} - \frac{1}{1+e^{\frac{\mathcal{E}}{kT_1}}}\right]$$

Ответ: $\boxed{Q = \frac{5}{2}\nu R(T_2-T_1) + N_A\mathcal{E}\left[\frac{1}{1+\exp\left(\frac{\mathcal{E}}{kT_2}\right)} - \frac{1}{1+\exp\left(\frac{\mathcal{E}}{kT_1}\right)}\right] \approx 5{,}7 кДж}$

№8.70

Дано: HD, $T_к = 22\,К$, $\Theta = \frac{\hbar^2}{2Ik} = 64\,К$

Найти: $C_{вр}$

Решение:

$\varepsilon_l = \frac{\hbar^2}{2I} l(l+1)$ – вращательная энергия на уровне l

$g_l = 2l+1$ – количество вырождений для уровня l.

$\Theta = \frac{\hbar^2}{2Ik} \Rightarrow \varepsilon_l = \Theta k l(l+1)$.

~~В оценим, какие~~

$$\bar{\varepsilon}_{вр} = \frac{\sum_{l=0}^{+\infty} g_l \varepsilon_l e^{-\frac{\varepsilon_l}{kT}}}{\sum_{l=0}^{+\infty} g_l e^{-\frac{\varepsilon_l}{kT}}}$$

$l=2$: $\frac{\varepsilon_l}{kT} = \frac{\Theta}{k} l(l+1) \simeq 17 \Rightarrow$ будем умножать элементы суммы на e^{-17}, можно не учитывать, отсюда

$$\bar{\varepsilon}_{вр} \simeq \frac{3 \cdot 2\Theta k \cdot e^{-\frac{2\Theta}{T}}}{1 + 3e^{-\frac{2\Theta}{kT}}} = 6\Theta k \cdot \frac{1}{3 + e^{\frac{2\Theta}{kT}}}.$$

$$C_{вр} \simeq 6\Theta k \cdot \left(-\frac{1}{(3+e^{\frac{2\Theta}{kT}})^2}\right) \cdot \left(-\frac{2\Theta}{T^2}\right) k = \frac{12\Theta^2}{T^2} \cdot \frac{e^{\frac{2\Theta}{T}}}{(3+e^{\frac{2\Theta}{T}})^2} k =$$

Ответ: $C_{вр} \simeq \boxed{\frac{12\Theta^2}{T^2} \cdot \frac{e^{\frac{2\Theta}{T}}}{(3+e^{\frac{2\Theta}{T}})^2} k \simeq 0{,}3k}$

№8.61

Дано: F_2, $\omega = 3{,}42 \cdot 10^{+13}\ c^{-1}$, $n = 0,1$ – уровни энергии, $T = 300K$

Найти: γ

Решение:

$$f(\varepsilon) = const \cdot e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}.$$

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f(\varepsilon_n)\cdot \varepsilon_n}{\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f(\varepsilon_n)} = \frac{\varepsilon_0 e^{-\frac{\varepsilon_0}{kT}} + \varepsilon_1 e^{-\frac{\varepsilon_1}{kT}}}{e^{-\frac{\varepsilon_0}{kT}} + e^{-\frac{\varepsilon_1}{kT}}}.$$

Энергия n-ого уровня: $\varepsilon_n = \hbar\omega\left(\frac{1}{2} + n\right)$

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\frac{1}{2}\hbar\omega e^{-\frac{1}{2}\frac{\hbar\omega}{kT}} + \frac{3}{2}\hbar\omega e^{-\frac{3}{2}\frac{\hbar\omega}{kT}}}{e^{-\frac{1}{2}\frac{\hbar\omega}{kT}} + e^{-\frac{3}{2}\frac{\hbar\omega}{kT}}} = \frac{1}{2}\hbar\omega\,\frac{1+3e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}}}{1+e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}}} =$$

$$= \frac{1}{2}\hbar\omega\left(3 - \frac{2}{1+e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}}}\right).$$

$$C_{кол} = \frac{d(N_A\bar{\varepsilon})}{dT} = N_A\cdot\frac{1}{2}\hbar\omega\cdot 2\cdot\frac{1}{\left(1+e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}}\right)^2}\cdot\frac{\hbar\omega}{kT^2}\cdot e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}} \simeq$$

$$\simeq R\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right)^2 e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}}.$$

$$\gamma = \frac{C_p + C_{кол}}{C_V + C_{кол}} = \frac{\frac{7}{2}R + R\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right)^2\exp\left(-\frac{\hbar\omega}{kT}\right)}{\frac{5}{2}R + R\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right)^2\exp\left(-\frac{\hbar\omega}{kT}\right)} = \frac{7 + 2\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right)^2\exp\left(-\frac{\hbar\omega}{kT}\right)}{5 + 2\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right)^2\exp\left(-\frac{\hbar\omega}{kT}\right)}$$

Ответ: $\boxed{\gamma \simeq \frac{7 + 2\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right)^2\exp\left(-\frac{\hbar\omega}{kT}\right)}{5 + 2\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right)^2\exp\left(-\frac{\hbar\omega}{kT}\right)} \simeq 1{,}38}$

№9.46

Дано: N частиц, $m=-1;0;1$, $\varepsilon=\varepsilon,0,\varepsilon$, $0<\varepsilon<<kT$

Найти: S

Решение:

$$\overline{\varepsilon}=\frac{\varepsilon e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}+0\cdot e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}+\varepsilon e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}}{e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}+e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}+e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}}=\frac{2}{2+e^{\frac{\varepsilon}{kT}}}\simeq\frac{2\varepsilon}{2+1+\frac{\varepsilon}{kT}}=$$

$$=\frac{2\varepsilon}{3+\frac{\varepsilon}{kT}}.$$

$$E=\frac{2N\varepsilon}{3+\frac{\varepsilon}{kT}}.$$

$$dE=2N\varepsilon\cdot\frac{-1}{\left(3+\frac{\varepsilon}{kT}\right)^2}\cdot\left(-\frac{\varepsilon}{kT^2}\right)dT\simeq\frac{2N\varepsilon^2}{9kT^2}dT$$

$$dS=\frac{dE}{T}=\frac{2N\varepsilon^2}{9kT^3}dT\rightarrow S=\text{const}+\frac{2N\varepsilon^2}{9k}\cdot\frac{1}{T^2}\cdot\frac{1}{-2}=$$

$$=\text{const}-\frac{N\varepsilon^2}{9kT^2}$$

Ответ: $\boxed{S=\text{const}-\frac{1}{9}\frac{N\varepsilon^2}{kT^2}}$

12 неделя

29.40

Дано: $S \sim 10^{-1}$ см^2, $P \sim 1$ мм рт.ст., $\tau \sim 10^{-3}$ с

Найти: $\frac{\Delta P}{P}$

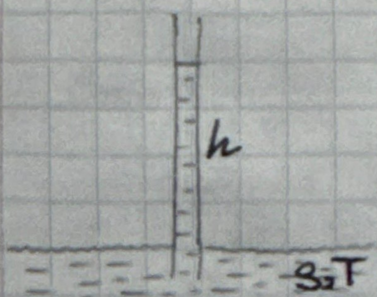
Решение:

За время τ на мембрану падает $N = \frac{1}{4} n\bar{v} \cdot S \cdot \tau$ частиц.

$$\frac{\Delta P}{P} = \frac{\sigma_N}{N} = \frac{\sqrt{N}}{N} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}\cdot\frac{P}{kT}\cdot\sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}\cdot S\cdot\tau}} = \sqrt[4]{\frac{2\pi\mu RT}{(PS\tau N_A)^2}}$$

Ответ: $\boxed{\frac{\Delta P}{P} = \sqrt[4]{\frac{2\pi\mu RT}{(PS\tau N_A)^2}} \sim 10^{-8}}$

29.31



Дано: σ, $\theta = 0$, ρ, T

Найти: $\frac{\sqrt{\overline{\Delta h^2}}}{h}$

Решение:

Пусть уровень жидкости изменился на Δh

$$\Delta E = (m+\Delta m)g\frac{h+\Delta h}{2} - mg\frac{h}{2} \approx \frac{1}{2}g\Delta(mh) =$$

$$= \frac{1}{2}g\Delta(\rho\pi r^2 h\cdot h) = \frac{1}{2}\rho g\pi r^2\Delta h^2$$

В системе 1 степень свободы => $\overline{\Delta E} = \frac{kT}{2}\cdot 1$

$$\overline{\Delta E} = \frac{1}{2}\rho g \pi r^2 \cdot \overline{\Delta h^2}$$

Таким образом: $\overline{\Delta h^2} = \frac{kT}{\rho g \pi r^2}$

$$h = \frac{2\sigma}{\rho g r}$$

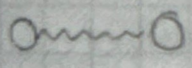
$$\frac{\sqrt{\overline{\Delta h^2}}}{h} = \sqrt{\frac{kT}{\rho g \pi}}\cdot\frac{1}{r}\cdot\frac{\rho g r}{2\sigma} = \sqrt{\frac{\rho g kT}{4\pi\sigma^2}},$$

Ответ: $\boxed{\frac{\sqrt{\overline{\Delta h^2}}}{h} = \sqrt{\frac{\rho g kT}{4\pi\sigma^2}}}$

29.35

~~Дано~~ Найти: $\frac{\sqrt{\langle\Delta\Pi^2\rangle}}{\langle\Pi\rangle}$ $\left(\frac{\sigma_\Pi}{\Pi}\right)$, П - колебательная потенциальная энергия двухатомного газа.

Решение:



$$\Pi = \frac{kx^2}{2}$$

1 степень свободы => $\overline{\Pi} = \frac{1}{2}k_\text{Б}T$.

$$\overline{\Pi^2} = \frac{\int_0^{+\infty}\Pi^2 e^{-\frac{\Pi}{k_\text{Б}T}}dx}{\int_0^{+\infty}e^{-\frac{\Pi}{kT}}dx} = \frac{k^2}{4}\,\frac{\int_0^{+\infty}x^4 e^{-\frac{k}{2k_\text{Б}T}x^2}dx}{\int_0^{+\infty}e^{-\frac{k}{2k_\text{Б}T}x^2}dx} = \frac{k^2}{4}\cdot\frac{\frac{1}{2\left(\frac{k}{2k_\text{Б}T}\right)^2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\sqrt{\frac{\pi\cdot 2k_\text{Б}T}{k}}}{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi\cdot 2k_\text{Б}T}{k}}} =$$

$$= \frac{k^2}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4k_\text{Б}^2T^2}{k^2} = \frac{3}{4}k_\text{Б}^2T^2.$$

$$\sigma_\Pi = \sqrt{D\Pi} = \sqrt{\overline{\Pi^2}-\overline{\Pi}^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}k_\text{Б}T.$$

Для 1 моля: $\sigma_{\Pi_0} = \sqrt{D(\cancel{N_A}\Pi)\cdot N_A} = \sqrt{N_A}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}k_\text{Б}T.$

$$\frac{\delta п}{п} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} kБT}{\frac{1}{2} kБT} = \sqrt{2}\ \text{г — для одной частицы}$$

$$\frac{\delta п_0}{п_0} = \frac{\sqrt{N_A} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} kБT}{N_A \cdot \frac{1}{2} kБT} = \sqrt{\frac{2}{N_A}} \simeq 1{,}8 \cdot 10^{-12}$$

Ответ: $\boxed{\begin{array}{ll} \text{для частицы:} & \frac{\delta п}{п} = \sqrt{2} \simeq 1{,}4 \\ \text{для моля:} & \frac{\delta п_0}{п_0} = \sqrt{\frac{2}{N_A}} \simeq 1{,}8 \cdot 10^{-12} \end{array}}$

13 неделя

О10.8

Дано: $V=2V_0$, $C=\frac{C_p}{2}$, одноатомный газ.

Найти: $\frac{z}{z_0}$ и $\frac{\lambda}{\lambda_0}$

Решение:

$$\frac{\lambda}{\lambda_0}=\frac{1}{n\sigma}\cdot n_0\sigma=\frac{n_0}{n}=\frac{N}{V_0}\cdot\frac{V}{N}=\frac{V}{V_0}=2.$$

$$C=\frac{dQ}{dT}=C_V+\frac{1}{\nu}p\frac{dV}{dT}=C_V+\frac{RT}{V}\frac{dV}{dT}=\frac{C_p}{2};$$

$$R\frac{dV}{V}\cdot\frac{T}{dT}=\frac{5}{4}R-\frac{3}{2}R=-\frac{1}{4}R.$$

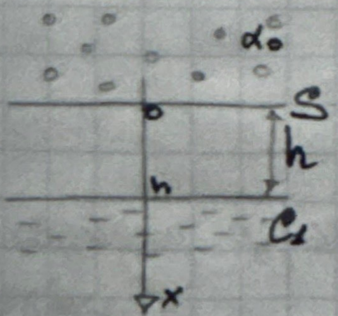
$$-4\frac{dV}{V}=\frac{dT}{T}\Rightarrow\frac{T}{T_0}=\left(\frac{V}{V_0}\right)^{-4}$$

$$\frac{z}{z_0}=\frac{\bar{v}}{\lambda}\cdot\frac{\lambda_0}{\bar{v}_0}=\sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}\cdot n\sigma\cdot\sqrt{\frac{\pi m}{8kT_0}}\cdot\frac{1}{n_0\sigma}=\frac{n}{n_0}\left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{1}{2}}=$$

$$=\frac{V_0}{V}\cdot\left(\frac{V}{V_0}\right)^{-2}=\left(\frac{V_0}{V}\right)^{3}=\frac{1}{8}$$

Ответ: $\boxed{\frac{\lambda}{\lambda_0}=2,\ \frac{z}{z_0}=\frac{1}{8}}$

T11



Дано: $E=470\ \frac{кДж}{моль}$, $W=1$ кВт, $\alpha_0=0{,}14$, $c_1=2\ \frac{моль}{м^3}$, $h=1$ мкм, $D=10^{-7}\ \frac{м^2}{с}$

Найти: S

Решение:

В секунду через барьер должно проходить $dN=\frac{W\cdot 1с}{E/N_A}$

молекул. Тогда поток должен быть равен:

$$J = \frac{W N_A}{E}.$$

Диффузия через барьер: $j = -D\frac{dn}{dx}$.

Так как h - мало: $j = -D\frac{C_1 \cdot N_A - \alpha_0 n}{h}$

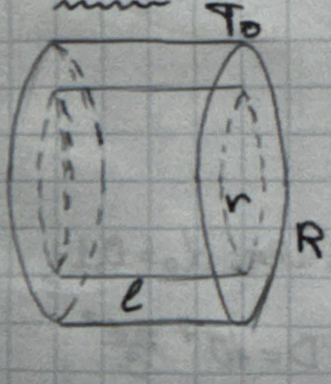
Поток через барьер: $J = Sj = DS \cdot \frac{\alpha_0 \cdot \frac{P_0}{kT} - C_1 N_A}{h}$

$$DS \cdot \frac{\alpha_0 \frac{P_0}{kT} - C_1 N_A}{h} = \frac{W N_A}{E};$$

$$DS \cdot \frac{\alpha_0 \cdot \frac{P_0}{kT} - C_1}{h} = \frac{W}{E};$$

$$\boxed{S = \frac{Wh}{E D\left(\frac{\alpha_0 P_0}{RT} - C_1\right)} \approx 58 м^2}$$

№10.16



Дано: $I = const, T_0$

Найти: $T(r)$

Решение:

Рассмотрим тонкостенный цилиндр радиуса r.

Мощность, выделяемая внутри него: $P = I^2 R = \frac{I^2 \rho l}{S} \cdot \frac{r^2}{R^2} = \frac{I^2 \rho l}{\pi R^4} r^2$

Поток: $j = -\varkappa \frac{dT}{dr}$, $J = -\varkappa \frac{dT}{dr} \cdot 2\pi r l$

$J = P \Rightarrow \frac{I^2 \rho l r^2}{\pi R^4} = -2\pi l r \varkappa \frac{dT}{dr}$;

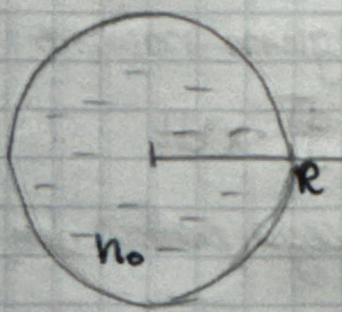
$dT = -\frac{I^2 \rho}{2\pi^2 \varkappa R^4} \cdot r\,dr \Rightarrow T = const - \frac{I^2 \rho r^2}{4\pi^2 \varkappa R^4}$ $\Rightarrow$

$T(R) = T_0 = const - \frac{I^2 \rho R^2}{4\pi^2 \varkappa R^4}$

$\Rightarrow T = \cancel{T_0 + \frac{I^2 \rho}{4\pi^2 \varkappa}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{R^2}\right)}\ T_0 + \frac{I^2 \rho}{4\pi^2 \varkappa R^4}(R^2 - r^2)$

Ответ: $\boxed{T = T_0 + \frac{I^2 \rho}{4\pi^2 \varkappa R^4}(R^2 - r^2)}$

№10.143



Дано: $R = 1$ см, $\lambda = 10^{-5}$ см

Найти: $\frac{J_{вак}}{J_{возд}}$

Решение:

В вакууме: $j = \frac{1}{4} n_0 \bar{v}$. Отсюда $J_{вак} = 4\pi r^2 \cdot \frac{1}{4} n_0 \bar{v}$.

В воздухе: $j = -\frac{1}{3}\lambda \bar{v} \cdot \frac{dn}{dr}$, $J_{возд} = -4\pi r^2 \cdot \frac{1}{3}\lambda \bar{v} \cdot \frac{dn}{dr}$

В стационарном режиме: $r^2 \frac{dn}{dr} = const$

$n = -\frac{C_1}{r} + C_2$

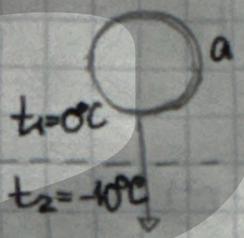
$r \to R$ (текущий радиус): $n = n_0$ $\Rightarrow n = \frac{n_0 R}{r}$

$r \to \infty$: $n \to 0$

Получаем: $\frac{J_{вак}}{J_{возд}} = \frac{-\frac{1}{4}n_0}{\frac{1}{3}\lambda} \cdot \frac{1}{\frac{dn}{dr}(R)} = -\frac{3}{4}\frac{n_0}{\lambda} \cdot \frac{1}{-\frac{n_0 R}{R^2}} = \frac{3}{4}\frac{R}{\lambda}.$

Ответ: $\boxed{\frac{J_{вак}}{J_{возд}} = \frac{3}{4}\frac{R}{\lambda} = 0{,}75 \cdot 10^{-5}}$

№10.25



Дано: $a = 0{,}2$ см, $t_1 = 0°C$, $t_2 = -10°C$,

$q = 335\ \frac{Дж}{г}$, $\chi = 0{,}022\ \frac{Вт}{К \cdot см}$

Найти: τ – время замерзания.

Решение:

$j = -\chi \frac{dT}{dx}$

За время dt проходит тепло

$Q = j \cdot 4\pi x^2 dt = -\chi \cdot 4\pi \frac{dT}{dx} \cdot x^2 dt$

Масса образованного льда равна dm,

тогда $Q = dm \cdot q = 4\pi r^2 dr \cdot q\rho$

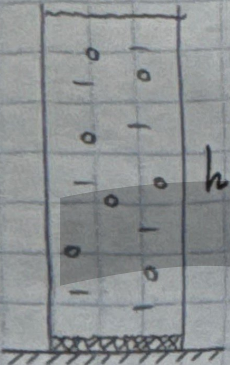
Получаем: $-\frac{\chi}{\rho q}\int_{T_1}^{T_2} dT\,dt = r^2 dr \cdot \int_a^r \frac{dx}{x^2}$

$-\frac{\chi}{\rho q}(T_2 - T_1)\int_0^\tau dt = \int_a^0 r^2\left(-\frac{1}{r} + \frac{1}{a}\right)dr \Rightarrow \tau = \frac{\rho q a^2}{6\chi(t_1 - t_2)} \approx 10с$

Ответ: $\boxed{\tau \approx \frac{\rho q a^2}{6\chi(t_1 - t_2)} \approx 10с}$

14 неделя

Т13



Дано: $h = 5\,см$, $\rho = 4\,\frac{г}{см^3}$, $T_0 = 300K$,

$\frac{n_{max}}{n_{min}} = 1{,}1$, $\eta = 10^{-3}\,Па \cdot с$

Найти: t

Решение:

1) Радиус частиц:

$$F = mg - \rho_0 g \frac{m}{\rho} = mg\left(1 - \frac{\rho_0}{\rho}\right)$$

$$U = mg\left(1 - \frac{\rho_0}{\rho}\right) \cdot x$$

$$n = n_0 e^{-\frac{U(x)}{kT}} = n_0 e^{\frac{\frac{\rho_0}{\rho} mgx - mgx}{kT}}$$

$$\frac{n_{max}}{n_{min}} = \frac{n(0)}{n(h)} = e^{\frac{mgh\left(1 - \frac{\rho_0}{\rho}\right)}{kT}}$$

$$\frac{mgh\left(1 - \frac{\rho_0}{\rho}\right)}{kT} = \ln \frac{n_{max}}{n_{min}}$$

$$m = \frac{kT \ln \frac{n_{max}}{n_{min}}}{gh\left(1 - \frac{\rho_0}{\rho}\right)} = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi} \frac{kT \ln \frac{n_{max}}{n_{min}}}{gh(\rho - \rho_0)}} \approx 4нм$$

2) Оценка времени

Частицы будут поглощаться при касании дна, при этом опускаться они будут из-за двух процессов: дрейф и диффузия.

Характерное время дрейфа:

$$t_{дрейф} \sim \frac{h}{v}; \quad 6\pi\eta v r = mg \Rightarrow v \sim \frac{mg}{6\pi\eta r}$$

$$t_{дрейф} \sim \frac{6\pi\eta r h}{mg} \sim 138 \text{ мес}$$

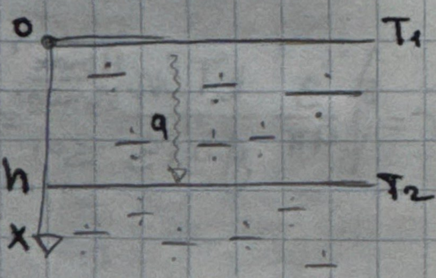
Характерное время диффузии:

$$\left.\begin{aligned} t_{дифф} &\approx \frac{h^2}{2D} \\ D = BkT &= \frac{kT}{6\pi\eta r} \end{aligned}\right| \Rightarrow t_{дифф} \sim \frac{3\pi\eta r h^2}{kT} \sim 9 \text{ мес.}$$

$$t_{дифф} \ll t_{дрейф} \Rightarrow t \sim t_{дифф}.$$

Ответ: $\boxed{t \sim t_{дифф} \sim \frac{3\pi\eta r h^2}{kT} \sim 9 \text{ мес}, \; r \approx 4 \text{ нм}}$

№10.30



Дано: $t \sim 120$ сут, $c \sim 10^6 \frac{Дж}{м^3 \cdot К}$,

$\varkappa \sim 1 \frac{Вт}{м \cdot К}$

Найти: h

Решение:

$$c\,dT \cdot S\,dx = \left(j(x+dx) - j(x)\right) S\,dt$$

$$c\,dT\,dx = dj \cdot S\,dt$$

$j = -\varkappa \frac{dT}{dx}$

$c \cancel{\rho} \frac{dT}{dt} = \frac{d}{dx}\left(-\varkappa \frac{dT}{dx}\right)$ - получили ур-ие теплопроводности

$\frac{dT}{dx} \simeq \frac{\Delta T}{h}, \quad \frac{dT}{dt} \simeq \frac{\Delta T}{t}$

$c \frac{\Delta T}{t} \simeq \frac{d}{dx}\left(-\varkappa \frac{\Delta T}{x}\right) = +\varkappa \frac{\Delta T}{h^2} \Rightarrow h \sim \sqrt{\frac{\varkappa t}{c}} \simeq 3 м$

Ответ: $\boxed{h \sim \sqrt{\frac{\varkappa t}{c}} \simeq 3 м}$

№10.54

Дано: Ar^{40}, $q=e$ (однозарядный ион), $E = 300 \frac{В}{см}$,

$\lambda = 10^{-5}$ см, $T \sim 300 K$

Найти: $v_{дрейф}$

Решение:

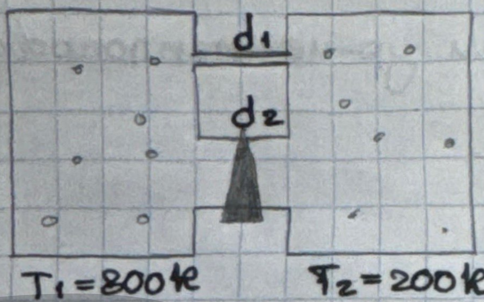
$D = \frac{1}{3}\lambda \bar{v} = BkT \Rightarrow B = \frac{\lambda}{3kT}\sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$

На аргон действует сила $F = qE$

$v = BF = \frac{\lambda q E}{3kT}\sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$;

Ответ: $\boxed{v = \frac{\lambda q E}{3kT}\sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} \sim 15 \frac{м}{с}}$

№10.77



Дано: $d_1 \ll \lambda \ll d_2$, $T_1 = 800K$, $T_2 = 200K$, $m_1 + m_2 = M$

Найти: в каком направлении будет течь газ?, $\Delta m = ?$

Решение:

До закрытия крана: $P_1 = P_2 \Rightarrow m_1 T_1 = m_2 T_2$

$m_1 + m_2 = M \Rightarrow m_1 + \frac{T_1}{T_2} m_1 = M \Rightarrow m_1 = \frac{T_2}{T_1+T_2} M$, $m_2 = \frac{T_1}{T_1+T_2} M$

После закрытия крана: $j = \frac{1}{4} n_1 \bar{v}_1 - \frac{1}{4} n_2 \bar{v}_2$ - поток вправо.

$$j_0 = \frac{1}{4} \frac{T_2 M}{\mu (T_1+T_2)} \cdot \sqrt{\frac{8RT_1}{\pi\mu}} - \frac{1}{4} \cdot \frac{T_1 M}{\mu(T_1+T_2)} \sqrt{\frac{8RT_2}{\pi\mu}} = \frac{M}{4\mu(T_1+T_2)} \sqrt{\frac{8RT_1T_2}{\pi\mu}} \cdot$$

$\cdot (\sqrt{T_2} - \sqrt{T_1}) < 0$, то есть газ течёт из „$T_2$" в „$T_1$".

Когда поток остановится: $j_1 = j_2$:

$\frac{1}{4} n_1 \bar{v}_1 = \frac{1}{4} n_2 \bar{v}_2 \Rightarrow n_1 \sqrt{T_1} = n_2 \sqrt{T_2} \Rightarrow m_1' \sqrt{T_1} = m_2' \sqrt{T_2}$

Получаем: $m_1' = \frac{\sqrt{T_2}}{\sqrt{T_1} + \sqrt{T_2}} M$

$\Delta m = m_1' - m_1 = \left(\frac{\sqrt{T_2}}{\sqrt{T_1}+\sqrt{T_2}} - \frac{T_2}{T_1+T_2} \right) M = \frac{2}{15} M$

Ответ: $\boxed{\text{из „}T_2\text{" в „}T_1\text{"}, \ \Delta m = \left(\frac{\sqrt{T_2}}{\sqrt{T_1}+\sqrt{T_2}} - \frac{T_2}{T_1+T_2} \right) M = \frac{2}{15} M}$