§7 Том 3

19. Д-ть, что если $\mu^*(X)=0 \Rightarrow X$-измеримо и $\mu(X)=0$

□ $\mu^*(X) \geq \mu_*(X) \Rightarrow \mu_*(X)=0 \Rightarrow \mu^*(X)=\mu_*(X) \Rightarrow X$ - измеримо и $\mu(X)=\mu_*(X)=\mu^*(X)=0$ ■

22. $X=\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ - послед. точек в $\mathbb{R}^n$: $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x_0$. Д-ть: $\mu(X)=0$

□ 1) $\mu_*(X)=0$, т.к. X счётно

2) Докажем, что $\forall \varepsilon\in(0,1) \hookrightarrow \mu^*(X)<\varepsilon$

$\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x_0 \Rightarrow \forall\varepsilon\in(0,1)\ \exists N: \forall k>N \hookrightarrow x_k\in B_{\varepsilon/2}(x_0) \Rightarrow$

$\Rightarrow X=\{x_k\}_{k=1}^{k=N} \cup (X\cap B_{\varepsilon/2}(x_0)) \Rightarrow \mu^*(X)=\overset{=0}{\mu^*(\{x_k\}_{k=1}^{N})}+$

$+\mu^*(X\cap B_{\varepsilon/2}(x_0)) = \mu^*(X\cap B_{\varepsilon/2}(x_0)) \leq \mu^*(B_{\varepsilon/2}(x_0)) \leq \mu^*(\underset{\text{n-мерный куб}}{Q_\varepsilon(x_0)}) = \varepsilon^n < \varepsilon\ (<1)$

Итак, $\forall\varepsilon\in(0,1)\hookrightarrow \mu^*(X)<\varepsilon \Rightarrow \mu^*(X)=0 \Rightarrow \mu_*(X)=\mu^*(X)=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \mu(X)=0$ ■

40. Доказать неизмеримость по Жордану множества:

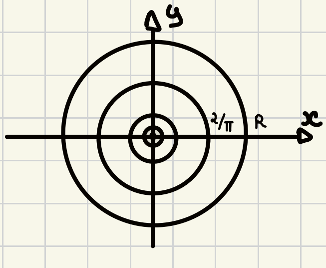
Критерий измеримости. X измеримо $\Leftrightarrow$ X огр. и $\mu(\partial X)=0$.

1) $X_1=\mathbb{Q}\cap[0,1]$. $\partial X_1=[0,1]$, $\mu(\partial X_1)>0 \Rightarrow$ не измеримо

2) $X_2=(\mathbb{Q}\cap[0,1])^2$. $\partial X_2=[0,1]^2$, $\mu(\partial X_2)>0 \Rightarrow$ не измеримо

3) $X_3=(\mathbb{Q}\cap[0,1])\times(\mathbb{I}\cap[0,1])$, $\partial X_3=[0,1]^2$, $\mu(\partial X_3)>0 \Rightarrow$ не измеримо.

T.1 Измеримо ли мн-во нулей функции $f(x,y)=\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$ в круге $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x^2+y^2<R^2\}$ радиуса $R>0$



$X=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x^2+y^2=\frac{1}{\pi/2+\pi n}<R^2\} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} C_{r_n}((0,0))$,

$C_{r_n}((0,0))$ - окр-ть с радиусом $r_n=\frac{1}{\pi/2+\pi n}$ и центром $(0,0)$

$\lim\limits_{n\to\infty} r_n=0 \Rightarrow \forall\varepsilon\in(0,1)\hookrightarrow \exists N: \forall n>N \hookrightarrow C_{r_n}((0,0))\subset Q_\varepsilon((0,0))$

$X = \{C_{m_n}((0,0))\}_{n=1}^{n=N} \cup (X \cap Q_\varepsilon((0,0)))$

$\mu^*(X) < 0 + \mu^*(Q_\varepsilon((0,0))) = \varepsilon^2 < \varepsilon \ (<1) \Rightarrow \mu^*(X) = 0 \Rightarrow X$-измеримо

§6

7. Найти $\int_a^b \frac{dx}{x}$, $0<a<b$, как предел интегральных сумм

Возьмём разбиение $\tau_n = \{x_k^n\}_{k=0}^{k=n}$: $x_k^n = a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{k}{n}}$, $k=0,1,\dots n$. В качестве ξ_i выберем x_k^n

Тогда $\int_a^b \frac{dx}{x} = \lim_{|\tau|\to 0}\sigma_\tau = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x_k = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n \frac{1}{a}\left(\frac{b}{a}\right)^{-\frac{k}{n}} a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{k-1}{n}} \cdot \left(\left(\frac{b}{a}\right)^{1/n} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a}{b}\right)^{1/n}\left(\left(\frac{b}{a}\right)^{1/n} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(1-\left(\frac{a}{b}\right)^{1/n}\right) =$

$= \lim_{t\to 0}\frac{1-\left(\frac{a}{b}\right)^t}{t} = \frac{d}{dt}\left(-\left(\frac{a}{b}\right)^t\right)\Big|_{t=0} = \ln\frac{b}{a}$

4(2) Вычислить $\int_0^{\pi/2}\sin x\,dx$ как предел интегральной суммы

Возьмём разбиение $\tau_n = \{x_n^k\}_{k=0}^{k=n}$: $x_k^n = \frac{\pi k}{2n}$, $k=0,1,\dots n$. В качестве ξ_i выберем x_k^n

Тогда $\int_0^{\pi/2}\sin x\,dx = \lim_{|\tau|\to 0}\sigma_\tau = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{\pi k}{2n}\right)\frac{\pi}{2n} =$

$\sum_{k=1}^n \sin(hk) = \frac{1}{2\sin h/2}\sum_{k=1}^n\left[\cos\left(hk-\frac{h}{2}\right) - \cos\left(hk+\frac{h}{2}\right)\right] = \frac{1}{2\sin h/2}\left[\cos\frac{h}{2} - \cos h(n+1/2)\right]$

$= \lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2n}\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{4n}}\left[\cos\frac{\pi}{4n} - \cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4n}\right)\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\cos\frac{\pi}{4n} + \sin\frac{\pi}{4n}\right] = 1$

24. Д-ть, что функция Дирихле $f(x) = \begin{cases} 1, & x\in\mathbb{Q} \\ 0, & x\in\mathbb{I}\end{cases}$ не интегрируема по Риману на любом $[a,b]$

□ $I_* = \sup_\tau \sum_{i=1}^{K_\tau}\inf_{[x_{i-1},x_i]} f(x)\Delta x_i = 0 \ne b-a = \inf_\tau \sum_{i=1}^{K_\tau}\sup_{[x_{i-1},x_i]} f(x)\Delta x_i = I^*$ ■

40. Нет, рассмотрим $f(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q}\\ -1, & x\in\mathbb{I}\end{cases}$. $\int_a^b |f(x)|\,dx = b-a$,

но $f(x)$ не интегрируема, т.к. $I_* = \sup\limits_{\tau} \sum\limits_{i=1}^{k_\tau} \inf\limits_{[x_{i-1},x_i]} f(x)\Delta x_i = 0 \neq$

$\neq b-a = \inf\limits_{\tau} \sum\limits_{i=1}^{k_\tau} \sup\limits_{[x_{i-1},x_i]} f(x)\Delta x_i = I^*$

54(4). Найти производную $\frac{d}{dx}\int_0^{x^2}\sqrt{1+t^2}\,dt =$

$I = \int\sqrt{1+t^2}\,dt = \int\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}dt + \int\frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}}dt \Rightarrow \int\frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}}dt = I - \int\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$

$I = t\sqrt{1+t^2} - \int t\,d(\sqrt{1+t^2}) = t\sqrt{1+t^2} - \int\frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}}dt = t\sqrt{1+t^2} - I + \int\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} \Rightarrow$

$\Rightarrow I = \frac{1}{2}t\sqrt{1+t^2} + \frac{1}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = \frac{1}{2}t\sqrt{1+t^2} + \frac{1}{2}\ln\left(t+\sqrt{1+t^2}\right) + C$

$= \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}x^2\sqrt{1+x^4} + \frac{1}{2}\ln\left(x^2+\sqrt{1+x^4}\right)\right) = x\sqrt{1+x^4} + \frac{x^5}{\sqrt{1+x^4}} + \frac{x+\frac{x^3}{\sqrt{1+x^4}}}{x^2+\sqrt{1+x^4}} =$

$= x\sqrt{1+x^4} + \frac{x}{\sqrt{1+x^4}}\left(x^4 + \frac{\sqrt{1+x^4}+x^2}{x^2+\sqrt{1+x^4}}\right) = 2x\sqrt{1+x^4}$

93. Найти интеграл $\int_0^1\frac{dx}{e^x+e^{-x}} =$

$\int\frac{dx}{e^x+e^{-x}} = \int\frac{e^x dx}{e^{2x}+1} = \int\frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{arctg} t + C = \operatorname{arctg}(e^x) + C$

$= \operatorname{arctg}(e^x)\Big|_0^1 = \operatorname{arctg} e - \operatorname{arctg} 1 = \operatorname{arctg} e - \frac{\pi}{4}$

101. Найти интеграл $\int_1^2 x\ln x\,dx =$

$\int x\ln x\,dx = \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{2}\cdot\int x^2 d(\ln x) = \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{4}x^2$

$= 2\ln 2 - \frac{3}{4}$

117. Доказать равенство $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} + \ldots \frac{1}{2n}\right) = \ln 2$, использовав интеграл $\int_1^2\frac{dx}{x}$

Возьмём разбиение $\tau_n = \{x_k^n\}_{k=1}^{k=n}$: $x_k^n = 1+\frac{k}{n} = \xi_k$, $k=1,\ldots n$.

$\int_1^2\frac{dx}{x} = \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1/n}{1+k/n} = \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$. $\int_1^2\frac{dx}{x} = \ln x\Big|_1^2 = \ln 2 \Rightarrow$ получаем искомое.

193. Найти интеграл $\int\limits_0^{100\pi}\sqrt{1-\cos 2x}\,dx =$

$$\int\sqrt{1-\cos 2x}\,dx = \int\sqrt{2\sin^2 x}\,dx = \sqrt{2}\int|\sin x|\,dx$$

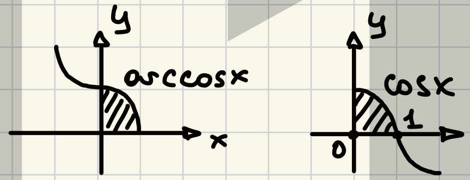
$$\int\limits_0^{2\pi}|\sin x|\,dx = 2\int\limits_0^{\pi}\sin x\,dx = 4$$

$$= 50\sqrt{2}\int\limits_0^{2\pi}|\sin x|\,dx = 200\sqrt{2}$$

§10

50(3,4) Доказать неравенство

3) $\frac{1}{3} < \int\limits_0^1 3^{-x}\arccos x\,dx < 1$



□ $\int\limits_0^1 \arccos x\,dx = \int\limits_0^1 \cos x\,dx = 1$

$$\frac{\arccos x}{3} < 3^{-x}\arccos x < \arccos x \quad \forall\, x \in (0,1)$$

$$\int\limits_0^1 \frac{\arccos x\,dx}{3} = \frac{1}{3} < \int\limits_0^1 3^{-x}\arccos x\,dx < 1 = \int\limits_0^1 \arccos x\,dx \quad \blacksquare$$

4) $\ln 2 < \int\limits_0^{3/4}\frac{2^x\,dx}{\sqrt{1+x^2}} < \frac{1}{\ln 2}$

□ $\int\limits_0^{3/4}\frac{2^x\,dx}{\sqrt{1+x^2}} > \int\limits_0^{3/4}\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\Big|_0^{3/4} = \ln\left(3/4 + 5/4\right) = \ln 2$

$$\int\limits_0^{3/4}\frac{2^x\,dx}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\ln 2}\int\limits_0^{3/4}\frac{d(2^x)}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\ln 2}\int\limits_1^{2^{3/4}}\frac{dt}{\sqrt{1+\frac{\ln^2 t}{\ln^2 2}}} < \frac{1}{\ln 2}\int\limits_1^{2^{3/4}}dt < \frac{1}{\ln 2}\int\limits_1^{2}dt = \frac{1}{\ln 2} \quad \blacksquare$$

Т.3. а) Функция f имеет первообразную F на $[a,b]$. Верно ли, что f интегрируема на отрезке $[a,b]$?

б) Функция f интегрируема на $[a,b]$. Верно ли, что f имеет первообразную на $[a,b]$?

в) f - интегрируема на $[a,b]$ и имеет первообразную F

на [a,b]. Доказать, что $\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$

а) ∃ на [0,1] $F(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x^2}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$

$F'(x)=2x\sin\frac{1}{x}-\frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2}$; $F'(0)=\lim\limits_{x\to+0}\frac{F(x)-F(0)}{x}=x\sin\frac{1}{x^2}=0$

$f(x)$ не ограничена на $[0,1]$ $\Rightarrow \nexists \int_0^1 f(x)dx \Rightarrow$ $\boxed{\text{нет}}$

б) ∃ на [-1,1] $f(x)=\begin{cases} 1, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$

$\exists \int_{-1}^{1} f(x)dx$, но $\nexists F(x) \Rightarrow$ $\boxed{\text{нет}}$.

в) □ $\tilde F(x)=\int_a^x f(t)dt$; $\tilde F'(x)=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\tilde F(t+\Delta t)-\tilde F(t)}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt}{\Delta t}=$

$=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{f(t)\Delta t+\bar{o}(\Delta t)}{\Delta t}=f(t) \Rightarrow \tilde F(x)=\int_a^x f(t)dt$ — первообразная f

Произвольная первообразная $F(x)=\tilde F(x)+C$. Заметим, что

$F(b)-F(a)=\tilde F(b)+C-\tilde F(a)-C=\tilde F(b)-\tilde F(a)=\int_a^b f(t)dt-\int_a^a f(t)dt=$

$=\int_a^b f(t)dt$ ■

T.4. Доказать, что $\left|\int_a^b \frac{\sin x}{x}dx\right| \leq \frac{2}{a}$, где $b>a>0$

□ $\left|\int_a^b \frac{\sin x}{x}dx\right| = \left|\int_a^b \frac{d(\cos x)}{x}\right| = \left|\frac{\cos x}{x}\Big|_a^b + \int_a^b \frac{\cos x\, dx}{x^2}\right| \leq \left|\frac{1}{b}+\frac{1}{a}+\right.$

$\left.+\int_a^b \frac{dx}{x^2}\right| = \left|\frac{1}{b}+\frac{1}{a}-\frac{1}{b}+\frac{1}{a}\right| = \frac{2}{a}$ ■