# IV Кратные интегралы

## §8 Д23

Указать $f$, непрерывную на измеримом по Жордану $X$, но не интегрируемую на $X$.

Достаточное условие ~~непрерыв~~ интегрируемости:

Ограниченная на замкнутом измеримом множестве функция, у которой множество точек разрыва имеет меру 0 интегрируема на этом множестве.

Выберем множество $X$ незамкнутым, а $f$ неограниченной. Пусть $X=(0;1]\subset\mathbb{R}$, а $f=\frac{1}{x}$, тогда $X$-измеримо по Жордану, $f\in C(X)$

Критерий Коши интегрируемости:

$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall\tau_1,\tau_2\ \forall\theta_{\tau_1},\theta_{\tau_2}: (|\tau_1|<\delta, |\tau_2|<\delta \Rightarrow$
$\Rightarrow |\sigma_{\tau_1}-\sigma_{\tau_2}|<\varepsilon)$

Отрицание:

$\exists\varepsilon>0\ \forall\delta>0\ \exists\tau_1,\tau_2: \exists\theta_{\tau_1},\theta_{\tau_2}: (|\tau_1|,|\tau_2|<\delta\ \&\ |\sigma_{\tau_1}-\sigma_{\tau_2}|\geq\varepsilon)$

Рассмотрим (выберем) $\varepsilon = 1$.

Фиксируем произвольный $\delta > 0$.

При $\delta \geq \frac{1}{2}$:

Выберем $\tau_1 = \{[0;\frac{1}{2}], [\frac{1}{2};1]\} = \tau_2$

$\Theta_{\tau_1} = \{\frac{1}{4}; 1\}$, $\Theta_{\tau_2} = \{\frac{1}{16}; 1\}$

Тогда $|\tau_1|, |\tau_2| = \frac{1}{2} \leq \delta$

При этом $|\sigma_{\tau_1} - \sigma_{\tau_2}| = |(4 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2}) - (16 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2})| =$

$= 6 > 1 = \varepsilon$

При $\delta < \frac{1}{2}$:

Разобьём $[0;1]$ на отрезки $[0;\delta], \ldots [(k-1)\delta, k\delta]$, $[k\delta;1]$, при этом $k$ - такое что $(k+1)\delta \geq 1$.

Точки $\xi_{1i}$ и $\xi_{2i}$ при $i > 1$ выберем произвольно одинаково на соответствующих отрезках.

$\xi_{11} = \delta \quad \xi_{21} = \delta^2$

Тогда $|\tau_1|, |\tau_2| \leq \delta$, при этом

$|\sigma_{\tau_1} - \sigma_{\tau_2}| = \delta \left|\frac{1}{\delta} - \frac{1}{\delta^2}\right| = \frac{1}{\delta} - 1 > 1 = \varepsilon$

Таким образом, $f$ - неинтегрируема на $X$ (по критерию Коши)

§ 8.33

Указать $X: \mu X>0$ и $f$, определённую и неограниченную на $X$, но интегрируемую на $X$.

Пусть $X = [-1;0] \cup \left( \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \{\frac{1}{n}\} \right)$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -1 \le x \le 0 \\ n, & x = \frac{1}{n} \end{cases}$$

Тогда $X$-измеримо (т.к. $[-1;0]$-измеримо, $\mu([-1;0])=1$, $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\{\frac{1}{n}\}$-измеримо, $\mu(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\{\frac{1}{n}\})=0$),

$\mu X = 1$

$f$-неограничена на $X$.

Докажем интегрируемость по определению:

$\forall \varepsilon>0 \ \exists \delta>0 \ \forall \tau: |\tau|<\delta \ \exists \theta_\tau: |\sigma_\tau - I| < \varepsilon$

Фиксируем произвольный $\varepsilon>0$

Выберем $\delta = 4$ (в этом примере $\sigma_\tau = 0$ всегда)

Фиксируем произвольное разбиение $\tau$ мн-ва $X$.

Пусть $\tau_1$ - множество всех множеств разбиения $\tau$, которые целиком состоят из точек с $x>0$, $\tau_2$ - все остальное.

Выберем $\theta_\tau$: выбор $\xi$ на множествах из $\tau_1$ - неважен, на множествах из $\tau_2$ выберем $\xi: f(\xi)=0$

Тогда $\sigma_T = \sum\limits_{X_i\in T_1} f(\xi_i)\underbrace{\mu X_i}_{0} + \sum\limits_{X_i\in T_2} f(\xi_i)\mu X_i = 0 < \varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow$ $f$-интегрируема на $X$ и $\int\limits_X f(x)dx = 0$.

§8 №34

Указать мн-ва $X_1$ и $X_2$: $\mu X_1, \mu X_2 > 0$, $X_1 \cap X_2 = \varnothing$ и $f$, интегрируемую на $X_1$ и $X_2$, но неинтегрируемую на $X = X_1 \cup X_2$.

Рассмотрим свойство кратного интеграла:

$X_1, X_2$ - измеримые, $\mu(X_1 \cap X_2) = 0$, тогда для интегрируемости $f$ по $X = X_1 \cup X_2$ необходимо, а при ограниченности $f$ достаточно, чтобы $f$ была интегрируема на $X_1$ и на $X_2$.

Чтобы удовлетворить условию будем искать неограниченную $f$.

Пусть $X_1 = [-1;0]$, $X_2 = (0;1]$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in X_1 \\ \frac{1}{6x}, & x \in X_2. \end{cases}$$

1) Докажем интегрируемость на $X_2$

## §8.36 (1, 2)

1) Указать измеримое $X$ и $f$, такую, что $|f|$ интегрируема на $X$, а $f$ - неинтегрируема на $X$

Пусть $X=[0;1]$, $f(x) = \begin{cases} -1, & \text{~~при~~ если } x \text{ - иррациональное} \\ 1, & \text{если } x \text{ - рациональное} \end{cases}$

$|f(x)| \equiv 1$ - интегрируема

Рассмотрим некоторое разбиение $\tau$ мн-ва $X$.

В любом измеримом множестве есть как рациональные, так и иррациональные числа, тогда

$$\sum_{i=1}^{N} \omega(f, X_i)\,\mu X_i = \sum_{i=1}^{N} 2\cdot\mu X_i = 2 \not\to 0 \text{ при } |\tau| \to 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ функция не является интегрируемой по критерию Дарбу.

2) Указать $X: \mu X > 0$ и $f$ неограниченную и интегрируемую на $X$, такую что $|f|$ интегрируема на $X$ и $\left|\int\limits_X f(x)dx\right| \le \int\limits_X |f(x)|dx$

В задаче §8.33 приведён пример функции неограниченной и интегрируемой на $X$:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-1;0] \\ n, & x = \frac{1}{n} \end{cases}, \quad X = [-1;0] \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{n}\right\}\right), \quad \int\limits_X f(x)dx = 0$$



$f(x) \ge 0 \Rightarrow |f(x)| = f(x) \Rightarrow \int\limits_X |f(x)|dx = 0$ (подходит)

16

$f=f(x,y)$ – определена на $P=[a;b]\times[c;d]$

а) Верно ли, что если $f(x,y)$ интегрируема на $[c;d]$ ($y$ – переменная, $x$ – фиксирован) и $I(x)=\int\limits_c^d f(x,y)\,dy$ – интегрируема на $[a;b]$, то $f$ интегрируема на $P$?

Рассмотрим $f(x,y)=\frac{x-y}{(x+y)^3}$, $[a;b]=[c;d]=[0;1]$

(Доопределяем в $xy=0$ $f(x,y)=0$)

$$I(x)=\int\limits_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}\,dy=\{x+y=t,\ dy=dt\}=\int\limits_x^{1+x}\frac{2x-t}{t^3}\,dt=$$

$$=2x\frac{-1}{2t^2}+\frac{1}{t}\Big|_{0+x}^{1+x}=\frac{1}{x+y}-\frac{x}{(x+y)^2}\Big|_{y=0}^{y=1}=\frac{1}{(1+x)^2}$$

$f$ – интегрируема на $[0;1]$ как функция $y$,

$I$ – интегрируема на $[0;1]$

Если же взять повторный интеграл в другом порядке, то $I_1(y)=\frac{-1}{(1+y)^2}$

$$\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^1 f(x,y)\,dy=\int\limits_0^1\frac{dx}{(1+x)^2}$$

$$\int\limits_0^1 dy\int\limits_0^1 f(x,y)\,dx=-\int\limits_0^1\frac{dy}{(1+y)^2}$$

$\Rightarrow$ повторные интегралы не равны $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $f$ не интегрируема на $P$

б) Верно ли, что если $f$ интегрируема на $P$, то функция $f(x,y)$ интегрируема на $[c;d]$ как функция одной переменной $y$ при всех $x \in [a;b]$?

Рассмотрим $f(x,y) = \frac{1}{y}$, $[a;b] = \{0\}$, $[c;d] = [0;1]$

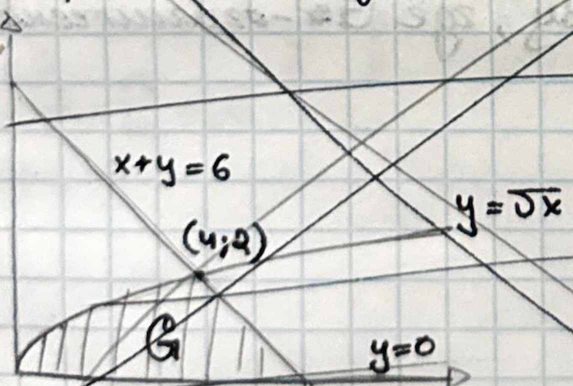
Тогда двойной интеграл существует и равен 0, так как при любом разбиении $\tau$ и выборе точек $\theta_\tau$: $\sigma_\tau = \sum_{i=1}^{N} f(\xi_i)\mu X_i =$
$= \sum_{i=1}^{N} f(\xi_i) \cdot 0 = 0$

При этом $\int_0^1 \frac{dy}{y}$ — расходится $\Rightarrow \frac{1}{y}$ не может быть ~~сходящимся~~ интегрируемой в смысле кратного интеграла Римана

<u>Ответ</u>: неверно в обоих пунктах.

~~§8 080(3)~~

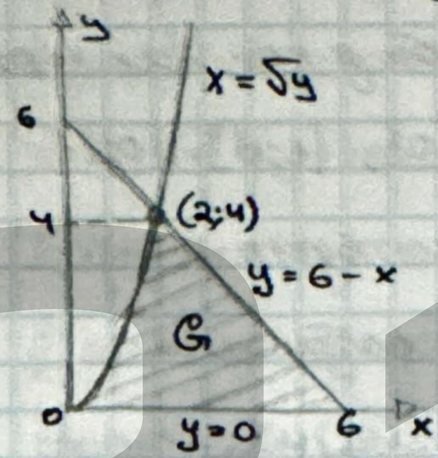
G ограничено $y = 0$, $y = \sqrt{x}$, $x + y = 6$




$$\iint_G f(x,y) = \int_0^2$$

## §8 №80(3)

G ограничено $y=0,\ x=\sqrt{y},\ x+y=6$




$$\iint\limits_G f(x,y)\,dx\,dy=\int_0^4 dy\int_{\sqrt{y}}^{6-y} f(x,y)\,dx=\int_0^6 dx\int_0^{\xi(x)} f(x,y)\,dy,$$

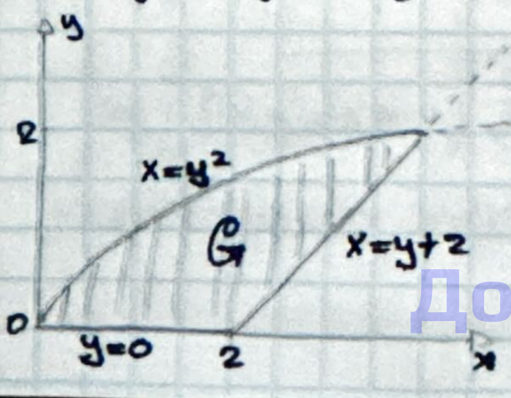
где $\xi(x)=\begin{cases}x^2 \text{ при } 0\le x\le 2\\ 6-x \text{ при } 2<x\le 6\end{cases}$

## §8 №82(4)

Записать повторный интеграл в виде двойного и нарисовать мн-во интегрирования.

$$\int_0^2 dy\int_{y^2}^{y+2} f(x,y)\,dx=\iint\limits_G f(x,y)\,dx\,dy,$$ где G – ограничено

$x=y^2,\ x=y+2$ и $y=0$



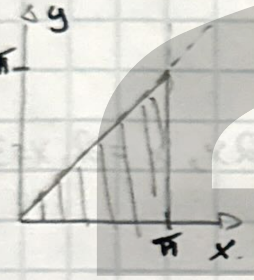
§8 №85(2)

Вычислить, поменяв порядок интегрирования.

$$\int_0^{\pi} dy \int_y^{\pi} \frac{\sin x}{x}\, dx$$

$f(x,y)=\frac{\sin x}{x}$ - ограничена

Множество, по которому происходит интегрирование: $G$:




Если доопределить $f(x,y)=0$ при $x=0$, то $G$ - компакт и $G$ - измеримо, а множество точек разрыва:

$\{0\}\times[0;\pi]\cap G=\{0\}$ - имеет меру 0,

тогда $\iint_G f(x,y)\,dx\,dy$ существует и равен повторным.

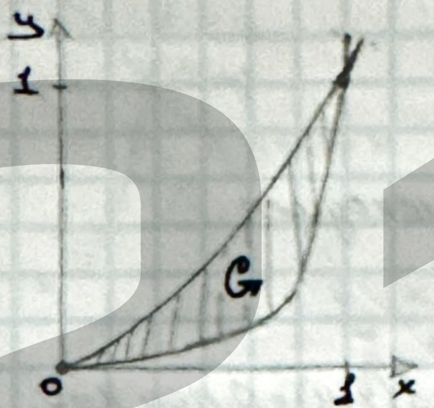
$$\int_0^{\pi} dy \int_y^{\pi} \frac{\sin x}{x}\, dx = \int_0^{\pi} dx \int_0^{x} \frac{\sin x}{x}\, dy = \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x}(x-0)\, dx = \int_0^{\pi} \sin x\, dx =$$

$$= -\cos x \Big|_0^{\pi} = 2.$$

§8 №90 (а, б)

Вычислить:

а) $\iint\limits_G \frac{y}{x^2}\,dx\,dy$, $G=\{0<x,\ x^3\le y\le x^2\}$

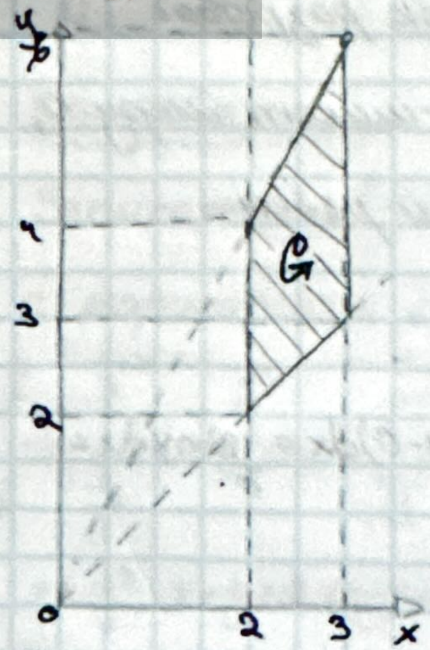


$$\iint\limits_G \frac{y}{x^2}dxdy=\int_0^1 dx\int_{x^3}^{x^2}\frac{y}{x^2}dy = -\int_0^1 \frac{x^6-x^4}{2x^2}dx =$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^1 (x^4-x^2)dx = -\frac{1}{2}\left(\frac{x^5}{5}-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 =$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\frac{-2}{15} = +\frac{1}{15}$$

б) $\iint\limits_G (x+2y)\,dx\,dy$, $G$ – ограничено $y=x,\ y=2x,\ x=2,\ x=3$



$$\iint\limits_G (x+2y)dxdy=\int_2^3 dx\int_x^{2x}(x+2y)dy =$$

$$=\int_2^3 dx\ (xy+y^2)\Big|_{y=x}^{y=2x} = \int_2^3 (x\cdot 2x+4x^2-x^2-x^2)dx$$

$$=\int_2^3 4x^2dx = \frac{4}{3}x^3\Big|_2^3 = \frac{4\cdot 27}{3}-\frac{4\cdot 8}{3} =$$

$$=\frac{4\cdot 19}{3}=\frac{76}{3}$$

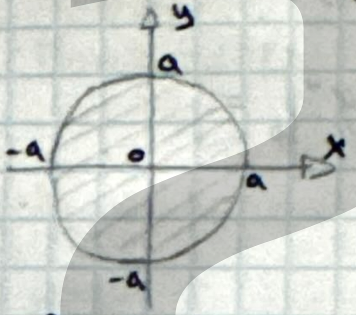
Ответ: а) $\frac{1}{15}$; б) $\frac{76}{3}$.

§8 №133 (1)

Заменить порядок интегрирования на $(z, y, x)$:

$$I=\int_{-a}^{a} dx \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} dy \int_{0}^{h} f(x,y,z)\,dz$$

Фиксируем $x = x_0 \in [-a;a]$, тогда $y$ меняется от $-\sqrt{a^2-x_0^2}$ до $\sqrt{a^2-x_0^2}$




Тогда при фиксированном $y$:

$x$ меняется от $-\sqrt{a^2-y^2}$ до $\sqrt{a^2-y^2}$

Фиксируем $y = y_0 \in [-a;a]$ (т.к. $\sqrt{a^2-x^2} \in [0;a]$),

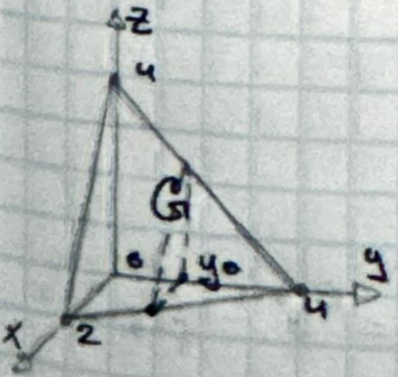
тогда $z$ меняется от $0$ до $h$ и $G_{yz} = [-a;a] \times [0;h] \Rightarrow$

$\Rightarrow$ при фиксированном $z$: $y$ меняется от $-a$ до $a$.

Ответ: $I=\int_{0}^{h} dz \int_{-a}^{a} dy \int_{-\sqrt{a^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y,z)\,dx$

§8 №139 (1)

Вычислить $\iiint\limits_G y\,dx\,dy\,dz$, если $G$ – пирамида, ограниченная $x=0, y=0, z=0$ и $2x+y+z=4$.

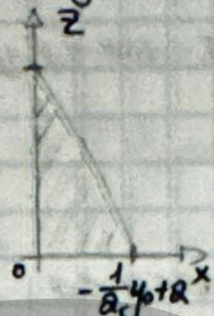



Фиксируем $y = y_0 \in [0;4]$, тогда

$x$ меняется от $0$ до $-\frac{1}{2}y_0+2$.

Фиксируем $x = x_0 \in [0; -\frac{1}{2}y_0+2]$.

Тогда $z$ меняется от $0$ до $4-y_0-2x_0$




$$\iiint\limits_{G_1} y\,dx\,dy\,dz = \int_0^4 dy \int_0^{2-\frac{1}{2}y} dx \int_0^{4-y-2x} y\,dz =$$

$$= \int_0^4 y\,dy \int_0^{2-\frac{1}{2}y} dx\,(4-y-2x) = \int_0^4 \left(4\left(2-\tfrac{1}{2}y\right) - y\left(2-\tfrac{1}{2}y\right) - \left(2-\tfrac{1}{2}y\right)^2\right) y\,dy = \int_0^4 \left(8-2y-2y+\tfrac{1}{2}y^2-4+2y-\tfrac{1}{4}y^2\right) y\,dy =$$

$$= \int_0^4 \left(4y-2y^2+\tfrac{1}{4}y^3\right)dy = 2y^2-\tfrac{2}{3}y^3+\tfrac{1}{16}y^4 \Big|_0^4 =$$

$$= 32 - \tfrac{2}{3}\cdot 64 + 16 = \tfrac{16}{3}$$

**Ответ:** $\frac{16}{3}$

§8 №175(3)

Вычислить интеграл по $Q_n = [0;a]^n$, $n \geq 2$:

$$\int\limits_{Q_n} \sum_{k=1}^{n} x_k^p\,dx, \quad p \geq 0$$

$$\int\limits_{Q_n} \sum_{k=1}^{n} x_k^p\,dx = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{Q_n} x_k^p\,dx;$$

$$\int\limits_{Q_n} x_k^p\,dx = \cancel{\int_0^a dx_1 \int_0^a} \int_0^a x_k^p\,dx_k \underbrace{\int_0^a dx_1 \ldots \int_0^a dx_n}_{\text{без } \int_0^a dx_k} =$$

$$= \int_0^a x_k^p\,dx_k \cdot \int_0^a dx_1 \ldots \int_0^a dx_{n-1}\cdot a = \ldots = \int_0^a a^{n-1} x_k^p\,dx_k = a^{n-1}\cdot \frac{x_k^{p+1}}{p+1}\Big|_0^a =$$

$$= a^{n-1}\cdot\frac{a^{p+1}}{p+1} = \frac{a^{n+p}}{p+1}$$

Тогда $\int\limits_{Q_n}\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^p\,dx = \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{a^{n+p}}{p+1} = \frac{na^{n+p}}{p+1}$

<u>Ответ:</u> $\frac{na^{n+p}}{p+1}$



## §8.176(1)

Вычислить $\int\limits_{П} dx$, где $П$-пирамида: $П=\{0\le x_n\le\ldots\le x_1\le a\}$

$x_1$ меняется от 0 до $a$. Фиксируем $x_1=x_1^0$, тогда $x_2$ меняется от 0 до $x_1$, ...

Фиксируем $x_k=x_k^0$, тогда $x_{k+1}$ меняется от 0 до $x_k^0$.

$$\int\limits_{П} dx = \int_0^a dx_1\int_0^{x_1}dx_2\ldots\int_0^{x_{n-1}}dx_n = \int_0^a dx_1\int_0^{x_1}dx_2\ldots\int_0^{x_{n-2}}x_{n-1}\,dx_{n-1} =$$

$$= \int_0^a dx_1\int_0^{x_1}dx_2\ldots\int_0^{x_{n-3}}\frac{x_{n-2}^2}{2}\,dx_{n-2} = \int_0^a dx_1\int_0^{x_1}dx_2\ldots\int_0^{x_{n-4}}\frac{x_{n-3}^3}{2\cdot 3}\,dx_{n-3} =$$

$$= \ldots = \frac{x_1^n}{n!}\Big|_0^a = \frac{a^n}{n!}$$

<u>Ответ:</u> $\frac{a^n}{n!}$

§8 №106 (2)

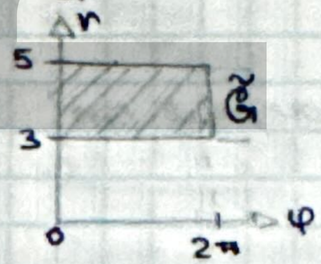
Вычислить, перейдя к полярным координатам:

$$\iint\limits_G \frac{dx\,dy}{x^2+y^2-1}, \quad \text{где } G=\{9\le x^2+y^2\le 25\}$$

$$\begin{cases} x=r\cos\varphi \\ y=r\sin\varphi \end{cases} \qquad \frac{D(x,y)}{D(r,\varphi)}=r$$

Замена переменных:

$$\iint\limits_G \frac{dx\,dy}{x^2+y^2-1}=\iint\limits_{\tilde G} \frac{r\,dr\,d\varphi}{r^2-1}, \text{ где } \tilde G=\{0\le\varphi<2\pi,\ 3\le r\le 5\}$$




Перейдём к повторному интегралу:

$$\iint\limits_{\tilde G} \frac{r\,dr\,d\varphi}{r^2-1}=\int_3^5 dr\int_0^{2\pi}\frac{r\,d\varphi}{r^2-1}=2\pi\int_3^5\frac{r\,dr}{r^2-1}=\pi\int_3^5\frac{2r\,dr}{r^2-1}=$$

$$=\pi\ln|r^2-1|\Big|_3^5=\pi\ln\frac{24}{8}=\pi\ln 3.$$

Ответ: $\pi\ln 3$

§8 №107(1)

Вычислить, перейдя к полярным координатам

$$\iint\limits_G \frac{y^2}{x^2+y^2}\,dx\,dy, \quad G=\{x^2+y^2\le ax\},\ a>0$$

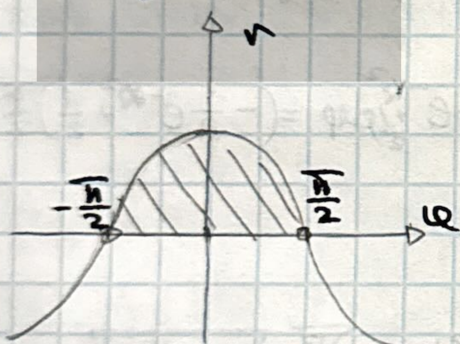
$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \qquad \frac{D(x,y)}{D(r,\varphi)} = r$$



Замена переменных:

$$\iint\limits_G \frac{y^2}{x^2+y^2}\,dx\,dy = \iint\limits_{\tilde G} \frac{r^2\sin^2\varphi}{r^2}\cdot r\,dr\,d\varphi = \iint\limits_{\tilde G} \sin^2\varphi\, r\,dr\,d\varphi$$

$$\tilde G = \{r^2 \le ar\cos\varphi\} = \{r \le a\cos\varphi\}$$




Т.к. $r\ge 0$, то имеет смысл только $\varphi\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

Перейдём к повторному интегралу:

$$\iint\limits_{\tilde G} r\sin^2\varphi\,dr\,d\varphi = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\sin^2\varphi\,d\varphi\int\limits_{0}^{a\cos\varphi} r\,dr = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\sin^2\varphi\cdot\frac{a^2\cos^2\varphi}{2}\,d\varphi =$$

$$= \frac{a^2}{8}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\sin^2 2\varphi\,d\varphi = \frac{a^2}{8}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{1-\cos4\varphi}{2}\,d\varphi =$$

$$= \frac{a^2}{16}\left(\varphi - \frac{1}{4}\sin4\varphi\right)\Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{a^2}{16}\cdot\pi = \frac{\pi a^2}{16}$$



Ответ: $\frac{\pi a^2}{16}$.

## §8 о110

1) Вычислить $\iint\limits_{G} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$, $G=\{x^2+y^2\le R^2, x\ge0, y\ge0\}$

Перейдём к полярным координатам:

$\begin{cases} x=r\cos\varphi \\ y=r\sin\varphi \end{cases}$ $\quad \dfrac{D(x,y)}{D(r,\varphi)}=r$

$\iint\limits_{G} e^{-(x^2+y^2)}dx\,dy=\iint\limits_{\tilde G} e^{-r^2}\cdot r\,dr\,d\varphi$, $\tilde G=\{r\le R, \sin\varphi\ge0, \cos\varphi\ge0\}=$

$=\{r\le R, \varphi\in[0;\pi], \varphi\in[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]\}=\{r\le R, 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}\}$

Перейдём к повторному интегралу:

$\iint\limits_{G} e^{-r^2}r\,dr\,d\varphi=\int\limits_0^{\pi/2}d\varphi\int\limits_0^{R} re^{-r^2}dr=\int\limits_0^{\pi/2}\left(-\frac{1}{2}e^{-R^2}+\frac{1}{2}\right)d\varphi=\left(-\frac{1}{2}e^{-R^2}+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}=$

$=\frac{\pi}{4}(1-e^{-R^2})$

2) Док-ть: $\frac{\sqrt{\pi}}{2}\sqrt{1-e^{-a^2}}<\int\limits_0^a e^{-x^2}dx<\frac{\sqrt{\pi}}{2}\sqrt{1-e^{-2a^2}}$

Пусть $I=\int\limits_0^a e^{-x^2}dx=\int\limits_0^a e^{-y^2}dy$

Тогда $I^2=\int\limits_0^a e^{-x^2}dx\cdot\int\limits_0^a e^{-y^2}dy=\int\limits_0^a dy\int\limits_0^a e^{-(x^2+y^2)}dx=$

$=\iint\limits_{G_a} e^{-(x^2+y^2)}dx\,dy$, где $G_a=[0;a]\times[0;a]$

~~$\{[0;a]\times[0;a]\}\subset\{x^2+y^2\le a^2, x\ge0, y\ge0\}\subset([0;2a$~~

$\{x^2+y^2\le a^2, x\ge0, y\ge0\}\subset([0;a]\times[0;a])\subset\{x^2+y^2\le 2a^2, x\ge0, y\ge0\}$,

, значение $f(x,y)=e^{-(x^2+y^2)}$ положительно во всех точках рассматриваемых множеств => (из 1-го пункта и пользуясь свойством:

$f \geq 0$ на $X$ и $X_1 \subset X \Rightarrow \int_{X_1} f(x)dx \leq \int_{X} f(x)dx$ ):
$\mu X_1 \leq \mu X$

$$\frac{\pi}{4}(1-e^{-a^2}) < I^2 < \frac{\pi}{4}(1-e^{-2a^2}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{\pi}}{2}\sqrt{1-e^{-a^2}} < I < \frac{\sqrt{\pi}}{2}\sqrt{1-e^{-2a^2}}$$

3) Вычислить $I=\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$

Рассмотрим $I(a)=\int_0^a e^{-x^2}dx$.

Как было показано в пункте 2:

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2}\sqrt{1-e^{-a^2}} < I(a) < \frac{\sqrt{\pi}}{2}\sqrt{1-e^{-2a^2}};$$

$$\lim_{a\to+\infty}\frac{\sqrt{\pi}}{2}\sqrt{1-e^{-a^2}} \leq \lim_{a\to+\infty} I(a) \leq \lim_{a\to+\infty}\frac{\sqrt{\pi}}{2}\sqrt{1-e^{-2a^2}};$$

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} \leq I \leq \frac{\sqrt{\pi}}{2} \Rightarrow \int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

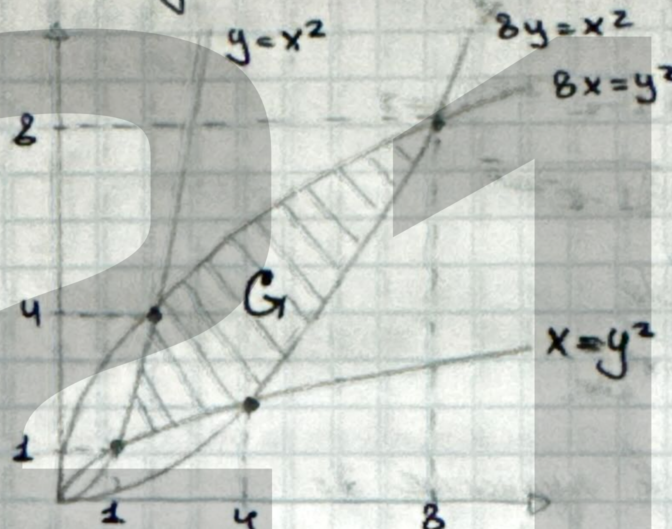
<u>Ответ</u>: 1) $\frac{\pi}{4}(1-e^{-R^2})$; 3) $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

## §8 №24(ч)

Вычислить $\iint\limits_G \frac{x}{y}\,dx\,dy$, G ограничено параболами

$y=x^2$, $8y=x^2$, $x=y^2$, $8x=y^2$

Нарисуем множество G:




Выполним замену $x=\sqrt[3]{u^2 v}$, $y=\sqrt[3]{u v^2}$,

тогда $y=x^2$ переходит в $u=1$, $8y=x^2$ в $u=8$,

$x=y^2$ в $v=1$, $8x=y^2$ в $v=8$

Тогда $\tilde{G}=[1;8]\times[1;8]$

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)}=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{v}{u}} & \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{u^2}{v^2}} \\ \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{v^2}{u^2}} & \frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{u}{v}} \end{vmatrix}=\frac{4}{9}-\frac{1}{9}=\frac{1}{3}.$$

$$\iint\limits_G \frac{x}{y}\,dx\,dy=\iint\limits_{\tilde{G}} \sqrt[3]{\frac{u}{v}}\cdot\frac{1}{3}\,du\,dv=\frac{1}{3}\int_1^8 \frac{dv}{v^{1/3}}\int_1^8 u^{1/3}\,du=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}\left(v^{2/3}\Big|_1^8\right)\cdot\frac{3}{4}\left(u^{4/3}\Big|_1^8\right)=\frac{3}{8}\cdot(4-1)(16-1)=\frac{135}{8}$$

**Ответ:** $\frac{135}{8}$

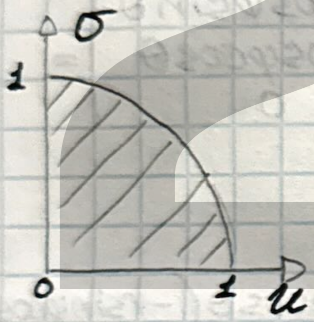
## §8 №125(4)

Вычислить $\iint\limits_G x\,dx\,dy$, $G=\left\{x>0,\ y>0,\ \left(\frac{x}{a}\right)^{2/3}+\left(\frac{y}{b}\right)^{2/3}<1\right\}$

Выполним замену $x=au^3$, $y=bv^3$;

$$\left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right| = \left|\begin{vmatrix}3au^2 & 0\\ 0 & 3bv^2\end{vmatrix}\right| = 9abu^2v^2$$

$$\tilde G=\{u>0,\ v>0,\ u^2+v^2<1\}$$




При фиксированном $v=v_0$: $u$ меняется от $0$ до $\sqrt{1-v_0^2}$

$$\iint\limits_{\tilde G} x\,dx\,dy = \int_0^1 dv\int_0^{\sqrt{1-v^2}} au^3\cdot 9abu^2v^2\,du\,dv =$$

$$= 9a^2b\int_0^1 v^2\,dv\int_0^{\sqrt{1-v^2}} u^5\,du = 9a^2b\int_0^1 v^2\cdot\frac{(1-v^2)^3}{6}\,dv =$$

$$= \frac{3}{2}a^2b\int_0^1 (v^2-3v^4+3v^6-v^8)\,dv = \frac{3}{2}a^2b\left(\frac{1}{3}-\frac{3}{5}+\frac{3}{7}-\frac{1}{9}\right) =$$

$$= \frac{8a^2b}{105}$$

Ответ: $\frac{8a^2b}{105}$

§8 №144 (3)

Вычислить, перейдя к сферическим координатам:

$$\iiint\limits_G (x^2+y^2-z^2)\,dx\,dy\,dz, \quad G=\{1\le x^2+y^2+z^2\le 4,\ x\ge 0,\ y\ge 0\}$$

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\cos\theta \\ y = r\cos\varphi\sin\theta \\ z = r\sin\varphi \end{cases}$$

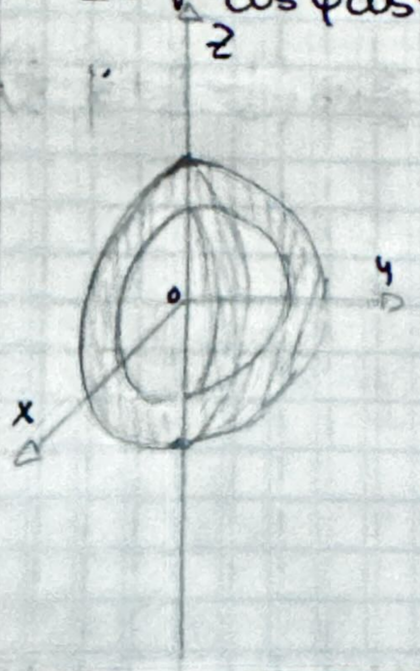
$$\frac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,\theta)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi\cos\theta & -r\sin\varphi\cos\theta & -r\cos\varphi\sin\theta \\ \cos\varphi\sin\theta & -r\sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\cos\theta \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \cos\varphi\cos\theta\,(-r^2\cos^2\varphi\cos\theta) + r\sin\varphi\cos\theta\,(-r\sin\varphi\cos\varphi\cos\theta)$$

$$-r\cos\varphi\sin\theta\,(r\cos^2\varphi\sin\theta + r\sin^2\varphi\sin\theta) =$$

$$= -r^2\cos^3\varphi\cos^2\theta - r^2\sin^2\varphi\cos\varphi\cos^2\theta - r^2\cos\varphi\sin^2\theta =$$

$$= -r^2\cos\varphi\cos^2\theta - r^2\cos\varphi\sin^2\theta = -r^2\cos\varphi$$




G – четверть полой сферы

$$\tilde{G} = \left\{1\le r\le 2,\ \varphi\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right],\ \theta\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]\right\}$$

$$\iiint\limits_{G}(x^2+y^2-z^2)\,dx\,dy\,dz=\cancel{\iiint\limits_{\tilde G}(r^2\cos^2\varphi-r^2\sin^2\varphi)\,dr\,d\varphi\,d\theta=}$$

$$\cancel{=\int_1^2 dr\int_{-\pi/2}^{\pi/2}d\varphi\int_0^{\pi/2}r^2\cos 2\varphi\,d\theta=\int_1^2 dr\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{\pi}{2}r^2\cos 2\varphi\,d\varphi=}$$

$$\cancel{=\frac{\pi}{2}\int_1^2 r^2dr\cdot\frac{1}{2}\sin 2\varphi\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}}$$

$$=\iiint\limits_{\tilde G}r^2(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)\cdot r^2\cos\varphi\,dr\,d\varphi\,d\theta=$$

$$=\int_1^2 dr\int_{-\pi/2}^{\pi/2}d\varphi\int_0^{\pi/2}r^4(2\cos^2\varphi-1)\cos\varphi\,d\theta=$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_1^2 r^4dr\int_{-1}^{1}(1-2\sin^2\varphi)\,d\sin\varphi=\frac{\pi}{2}\int_1^2 r^4dr\cdot\left(t-2\cdot\frac{1}{3}t^3\right)\Big|_{-1}^{1}=$$

$$=\frac{\pi}{2}\left(\frac{r^5}{5}\right)\Big|_1^2\cdot\left(1-\frac{2}{3}+1-\frac{2}{3}\right)=\frac{\pi}{3}\cdot\frac{32-1}{5}=\frac{31\pi}{15}$$

<u>Ответ:</u> $\frac{31\pi}{15}$

§8 №145 (2)

Свести интеграл к однократному:

$$\iiint\limits_G f\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) dx\,dy\,dz, \quad G = \{z^2 \le x^2+y^2,\ x^2+y^2+z^2 \le R^2\}$$

Перейдём к полярным координатам:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\cos\theta \\ y = r\cos\varphi\sin\theta \\ z = r\sin\varphi \end{cases}, \quad r \ge 0,\ \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right],\ \theta \in [-\pi; \pi]$$

$$\tilde{G} = \{r^2\sin^2\varphi \le r^2\cos^2\varphi\cos^2\theta + r^2\cos^2\varphi\sin^2\theta,\ r \le R\} =$$

$$= \{|\sin\varphi| \le |\cos\varphi|,\ 0 \le r \le R\} = \left\{\varphi \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right], \theta \in [-\pi; \pi],\ r \in [0; R]\right\}$$

$$\left|\frac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,\theta)}\right| = r^2\cos\varphi$$

$$\iiint\limits_G f\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) dx\,dy\,d\varphi = \iiint\limits_{\tilde{G}} f(\mathrm{tg}\,\varphi)\cdot r^2\cos\varphi\, dr\,d\varphi\,d\theta =$$

$$= \cancel{\int_0^R r^2 dr \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} f(\mathrm{tg}\,\varphi)\cos\varphi\, d\varphi \int_0^R r^2 dr \int_{-\pi}^{\pi} d\theta =$$

$$= 2\pi \cdot \frac{R^3}{3} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} f(\mathrm{tg}\,\varphi)\cos\varphi\, d\varphi$$

__Ответ:__ $\dfrac{2\pi R^3}{3}\displaystyle\int_{-\pi/4}^{\pi/4} f(\mathrm{tg}\,\varphi)\cos\varphi\, d\varphi.$

## §8 №146 (2)

Вычислить, перейдя к цилиндрическим координатам:

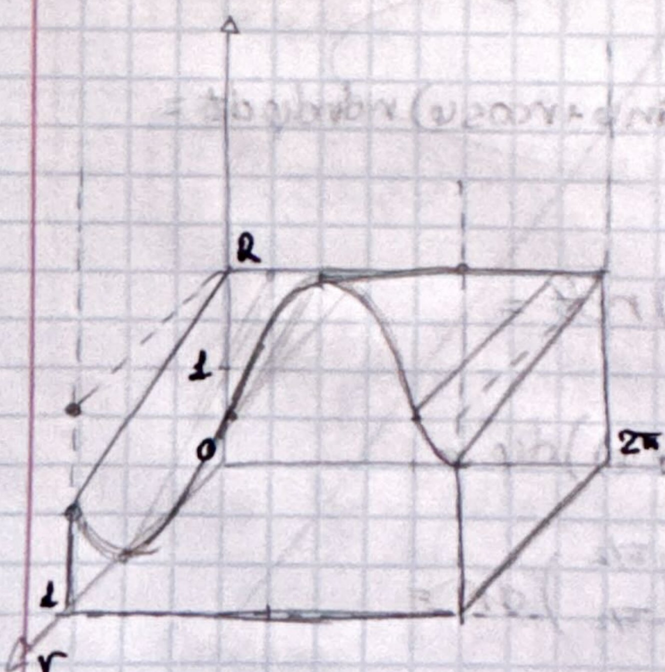
$$\iiint\limits_G (x+y+z)\,dx\,dy\,dz,\ G \text{ ограничено } x^2+y^2=1,\ z=0 \text{ и } x+y+z=2$$

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = t \end{cases}$$

$$\frac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,t)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$$

G ограничено $r=1$, $t=0$ и $t+r\cos\varphi+r\sin\varphi=2$

$$t=2-\sqrt{2}\,r\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)$$




Фиксируем некоторый $r\in[0;1]$: $\varphi$ меняется от 0 до $2\pi$.

Фиксируем некоторый $\varphi\in[0;2\pi]$: $t$ меняется от 0 до $2-\sqrt{2}\,r\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)$

$$\iiint\limits_G (x+y+z)\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_{\tilde G} (r\cos\varphi + r\sin\varphi + t)\,\cancel{2}\,r\,dr\,d\varphi\,dt =$$

$$= \int_0^1 dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2-\sqrt{2}r\sin(\varphi+\frac{\pi}{4})} (r\cos\varphi + r\sin\varphi + t)\,dt =$$

$$= \int_0^1 dr \int_0^{2\pi} d\varphi \left(\left(\sqrt{2}r\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)\right)\left(2-\sqrt{2}r\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)\right) + \frac{1}{2}\left(2-\sqrt{2}r\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)\right)^2\right) =$$

$$= \int_0^1 dr \int_0^{2\pi} \left(2\sqrt{2}r\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right) - 2r^2\sin^2\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right) + 2 - 2\sqrt{2}\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right) + \right.$$

$$\left. + r^2\sin^2\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)\right) d\varphi = \int_0^1 r\,dr \int_0^{2\pi} \left(2 - r^2 \frac{1-\cos(2\varphi+\frac{\pi}{2})}{2}\right) d\varphi =$$

$$= \int_0^1 r\,dr \left(4\pi - \frac{1}{2}r^2\cdot 2\pi - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin 2\varphi\,d\varphi\right) =$$

$$= \int_0^1 r\left(4\pi - \pi r^2 + \frac{1}{4}\cos 2\varphi\Big|_0^{2\pi}\right) dr =$$

$$= 4\pi\frac{1}{2} - \pi\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\cdot 0 = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$$

Ответ: $\frac{7\pi}{4}$.

§8 №197

Показать, что при ~~$x=a$~~$r\cos\varphi\cos\psi$, $y=br\cos\varphi\sin\psi$

~~$z=cr\sin$~~ $x=ar\cos\varphi\cos\psi$, $y=br\sin\varphi\cos\psi$, $z=cr\sin\varphi$:

якобиан отображения $J=abc\,r^2\cos\psi$

$$J=\frac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,\psi)}=\begin{vmatrix} a\cos\varphi\cos\psi & -ar\sin\varphi\cos\psi & -ar\cos\varphi\sin\psi \\ b\sin\varphi\cos\psi & br\cos\varphi\cos\psi & -br\sin\varphi\sin\psi \\ c\sin\psi & 0 & cr\cos\psi \end{vmatrix}=$$

$$=abc\Big[\cos\varphi\cos\psi\,(r^2\cos\varphi\cos^2\psi)+r\sin\varphi\cos\psi\,\cdot$$

$$\cdot\,(r\sin\varphi\cos^2\psi+r\sin\varphi\sin^2\psi)+r\cos\varphi\sin\psi\cdot r\cos\varphi\sin\psi\cos\psi\Big]$$

$$=abc\,r^2\left[\underline{\cos^2\varphi\cos^3\psi}+\sin^2\varphi\cos\psi+\underline{\cos^2\varphi\sin\psi\cos^2\psi}\right]=$$

$$=abc\,r^2\left[\cos^2\varphi\cos\psi+\sin^2\varphi\cos\psi\right]=abc\,r^2\cos\psi.$$

§8 №148 (1)

$G=\left\{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1\right\}$. Вычислить:

$$\iiint\limits_G\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)dx\,dy\,dz.$$

Выполним замену: $\begin{cases} x=ar\cos\varphi\cos\psi \\ y=br\sin\varphi\cos\psi \\ z=cr\sin\psi \end{cases}$

Как было показано в §8 №147: $\left|\frac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,\psi)}\right|=$

$=abc\,r^2\cos\psi$

$\tilde{G}=\{r^2\le 1\}=\{0\le r\le 1\}$

$\varphi$ меняется от $0$ до $2\pi$, $\psi$ меняется от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$.

$$\iiint\limits_G\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)dx\,dy\,dz=\iiint\limits_{\tilde{G}} r^2\cdot abc\,r^2\cos\psi\,dr\,d\varphi\,d\psi=$$

$$= abc\int_0^1 dr\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\psi\int_0^{2\pi} r^4\cos\psi\, d\varphi = 2\pi abc\int_0^1 dr\int_{-\pi/2}^{\pi/2} r^4\cos\psi\, d\psi =$$

$$= 2\pi abc\int_0^1 r^4\cdot 2\, dr = 4\pi abc\cdot\frac{1}{5}$$

Ответ: $\frac{4}{5}\pi abc$.

§8 №150 (8)

Вычислить $\iiint\limits_G z^2\,dx\,dy\,dz$, $G=\{x^2+y^2+z^2\le R^2,$

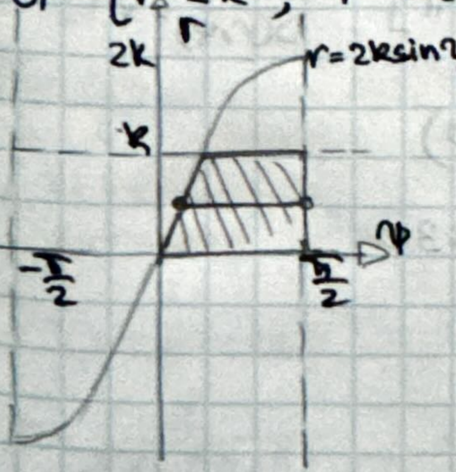
$x^2+y^2+z^2\le 2Rz\}$.

Перейдём к сферическим координатам:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\cos\psi \\ y = r\sin\varphi\cos\psi \\ z = r\sin\psi \end{cases} \qquad \left|\frac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,\psi)}\right| = r^2\cos\psi$$

$r\ge 0$, $\varphi\in[0;2\pi]$, $\psi\in[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$

$\tilde G=\{r^2\le R^2,\ r^2\le 2Rr\sin\psi\}=\{0\le r\le R,\ r\le 2R\sin\psi\}$




При фиксированном $r$:

$\psi$ меняется от $\arcsin\frac{r}{2R}$

до $\frac{\pi}{2}$

$$\iiint\limits_{G_1} z^2\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_{\tilde G_1} r^2\sin^2\psi\; r^2\cos\psi\; dr\,d\varphi\,d\psi =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{R} dr \int_{\arcsin\frac{r}{2R}}^{\pi/2} r^4\sin^2\psi\cos\psi\,d\psi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{R} r^4\cdot\left(\frac{\sin^3\psi}{3}\Big|_{\arcsin\frac{r}{2R}}^{\pi/2}\right)dr =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{R} \frac{1}{3} r^4\left(1-\frac{r^3}{8R^3}\right)dr = \int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{R^5}{5} - \frac{1}{3\cdot 8R^3}\cdot\frac{R^8}{8}\right)d\varphi =$$

$$= \frac{2\pi R^5}{3}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{64}\right) = \frac{59\pi R^5}{480}.$$

<u>Ответ</u>: $\frac{59\pi R^5}{480}$.

<u>§9 №6(б)</u>

Найти площадь области, ограниченной кривыми

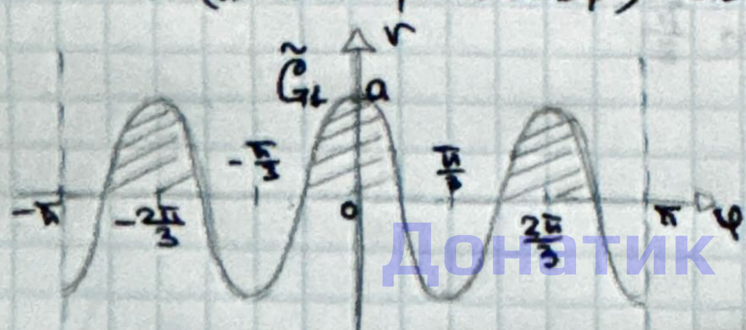
$(x^2+y^2)^2 = a(x^3-3xy^2),\ a>0$

Перейдём к полярным координатам:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases},\quad r\geq 0,\ \varphi\in[-\pi;\pi] \qquad \frac{D(x,y)}{D(r,\varphi)} = r$$

$$r^4 = ar\cos\varphi\cdot r^2(\cos^2\varphi - 3\sin^2\varphi)$$

$$r = a(4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi) = a\cos 3\varphi$$



Множество ограниченное данной кривой $G$ соответствует $G$, заштрихованному на рисунке.

~~На~~ $\cancel{\iint\limits_G 1\,dr\,d\varphi}$ В силу периодичности $\cos 3\varphi$ все 3 заштрихованные пика равны

$$S=\iint\limits_G 1\,dx\,dy=\iint\limits_{G'} r\,dr\,d\varphi=3\iint\limits_{G_1} r\,dr\,d\varphi=$$

$$=3\int\limits_{-\pi/6}^{\pi/6}d\varphi\int\limits_0^{a\cos 3\varphi} r\,dr=\frac{3a^2}{2}\int\limits_{-\pi/6}^{\pi/6}\cos^2 3\varphi\,d\varphi=\frac{3a^2}{4}\int\limits_{-\pi/6}^{\pi/6}(1+\cos 6\varphi)\,d\varphi=$$

$$=\frac{3a^2}{4}\cdot\frac{\pi}{3}=\frac{\pi a^2}{4}$$

Ответ: $\frac{\pi a^2}{4}$.

§ 908 (5)

Найти площадь области, ограниченной

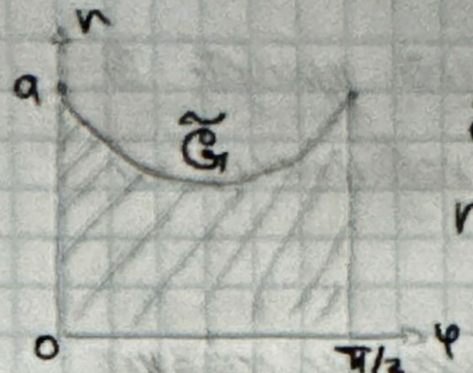
$$(x+y)^4=a^2(x^2+y^2),\quad x=0,\ y=0\quad (x>0,\ y>0)$$

Перейдём к полярным координатам:

$$\begin{cases} x=r\cos\varphi \\ y=r\sin\varphi \end{cases}\quad r\geq 0,\ \varphi\in[0,2\pi],\ \frac{D(x,y)}{D(r,\varphi)}=r$$

$$r^4(\sin\varphi+\cos\varphi)^4=a^2r^2$$

$$r=\frac{a}{2\sin^2(\varphi+\frac{\pi}{4})},\quad x>0,\ y>0\Rightarrow\varphi\in[0;\tfrac{\pi}{2}].$$




При фиксированном $\varphi$ $r$ меняется от $0$ до $\dfrac{a}{\sin^2(\varphi+\frac{\pi}{4})}$

$$S=\iint\limits_{G_1}dx\,dy=\iint\limits_{\tilde{G}_1}r\,dr\,d\varphi=\int\limits_0^{\pi/2}d\varphi\int\limits_0^{\frac{a}{\sin^2(\varphi+\frac{\pi}{4})}}r\,dr=$$

$$=\frac{a^2}{8}\int\limits_0^{\pi/2}\frac{d\varphi}{\sin^4(\varphi+\frac{\pi}{4})}=-\frac{a^2}{8}\int\frac{d\,ctg\,\xi}{\sin^2\xi}\Bigg|_{\pi/4}^{3\pi/4}=$$

$$=-\frac{a^2}{8}\int(1+ctg^2\xi)\,d\,ctg\,\xi\Bigg|_{\pi/4}^{3\pi/4}=$$

$$=-\frac{a^2}{8}\left(ctg\,\xi+\frac{1}{3}ctg^3\xi\right)=-\frac{a^2}{8}\left(-1-1-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\right)=\frac{a^2}{8}\cdot\frac{8}{3}=\frac{a^2}{3}.$$

Ответ: $\dfrac{a^2}{3}$.

§9 о10

Найти площадь фигуры, ограниченной

$(a_1x+b_1y+c_1)^2+(a_2x+b_2y+c_2)^2=1$, если $\Delta=a_1b_2-a_2b_1\neq0$

~~$u=a_1$~~ $u=a_1x+b_1y+c_1$, $\sigma=a_2x+b_2y+c_2$

$$\begin{Vmatrix}u-c_1\\ \sigma-c_2\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}a_1&b_1\\a_2&b_2\end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix}x\\y\end{Vmatrix}\rightarrow\begin{Vmatrix}x\\y\end{Vmatrix}=\frac{1}{\Delta}\begin{Vmatrix}b_2&-a_2\\-b_1&a_1\end{Vmatrix}\begin{Vmatrix}u-c_1\\ \sigma-c_2\end{Vmatrix}$$

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} +\frac{b_2}{\Delta} & -\frac{a_2}{\Delta} \\ -\frac{b_1}{\Delta} & \frac{a_1}{\Delta} \end{vmatrix} = \frac{1}{\Delta^2}(a_1b_2 - a_2b_1) = \frac{1}{\Delta}$$

$G$ - ~~область~~ фигура, ограниченная данной кривой.

$\tilde{G}$ - фигура, ограниченная $u^2+v^2=1$ - круг.

$$S = \iint\limits_{G} dx\,dy = \iint\limits_{\tilde{G}} \left|\frac{1}{\Delta}\right| du\,dv = \frac{1}{|\Delta|}\iint\limits_{\tilde{G}} du\,dv = \frac{1}{|\Delta|}\cdot$$

$\cdot$ {площадь окружности с радиусом 1} $= \frac{\pi}{|\Delta|}$

<u>Ответ</u>: $\frac{\pi}{|\Delta|}$

§ 9 № 13(6)

Найти объём тела, ограниченного поверхностями:

$y^2+z^2=x, \quad x=y$

Выполним замену координат на ~~сферические~~ цилиндрические:

$\cancel{x = r\cos\varphi\cos\psi}$ $\quad y = r\sin\varphi\cos\psi$

$\cancel{y = r\sin\varphi\cos\psi}$ $\quad z = r\cos\varphi\cos\psi \quad , \psi\in[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}], \varphi\in[0;2\pi]$

$\cancel{z = r\sin\psi}$ $\quad x = r\sin\psi$

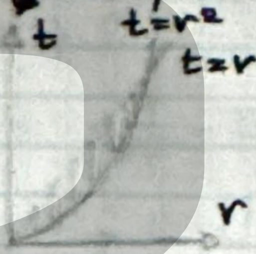
$\left|\frac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,\psi)}\right| = r^2\cos\psi$

$\tilde{G} = \{\sin\psi = \sin\varphi\cos\psi, \quad r^2\cos^2\psi = r\sin\psi\}$

$$\begin{cases} x = t \\ y = r\cos\varphi \\ z = r\sin\varphi \end{cases}$$

$$\frac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,t)} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \end{vmatrix} = r$$

$$\tilde{G}\begin{cases} r^2 = t \\ r\cos\varphi = t \end{cases}$$




$\varphi_0$ - фиксированное значение $\varphi$.

$$r^2 \le t \le r\cos\varphi_0, \quad \cos\varphi > 0 \Rightarrow \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$V = \iiint\limits_{G} 1\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_{\tilde{G}} r\,dr\,d\varphi\,dt =$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\cos\varphi} dr \int_{r^2}^{r\cos\varphi} r\,dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\cos\varphi} (r^2\cos\varphi - r^3)\,dr =$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\cos\varphi \cdot \frac{\cos^3\varphi}{3} - \frac{1}{4}\cos^4\varphi\right) d\varphi = \frac{1}{12}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4\varphi\,d\varphi =$$

$$= \frac{1}{48}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1+\cos 2\varphi)^2\,d\varphi = \frac{1}{48}\Bigg(\pi + 2\cdot\frac{1}{2}\sin 2\varphi\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} +$$

$$+ \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1+\cos 4\varphi}{2}\,d\varphi\Bigg) = \frac{1}{48}\left(\pi + \frac{1}{2}\pi + \frac{1}{8}\sin 4\varphi\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}\right) =$$

$$= \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{48}\pi = \frac{\pi}{32}$$

<u>Ответ:</u> $\frac{\pi}{32}$.

§9 №16 (1)

Найти объём, ограниченного $x^2+y^2+z^2=4$ и

$z=\sqrt{x^2+y^2}$ $\quad (z<\sqrt{x^2+y^2})$

Перейдём к сферическим координатам:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\cos\psi \\ y = r\sin\varphi\cos\psi \\ z = r\sin\psi. \end{cases} \qquad r \geq 0,\ \varphi \in [0; 2\pi],\ \psi \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\left|\frac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,\psi)}\right| = r^2\cos\psi$$

Тогда $\tilde{G}$ ограничено $r^2=4$ $(r=2)$ и $r\sin\psi = r\cos\psi$

$(\sin\psi < \cos\psi)$, $\psi \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{4}\right]$

На $\varphi$ условий нет $\Rightarrow \varphi \in [0; 2\pi]$

Таким образом $\tilde{G} = [0;2] \times [0;2\pi] \times \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{4}\right]$

$$V = \iiint\limits_{G} 1\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_{\tilde{G}} r^2\cos\psi\,dr\,d\varphi\,d\psi =$$

$$= \int_0^2 r^2dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\pi/2}^{\pi/4} \cos\psi\,d\psi = \int_0^2 r^2dr \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}+1\right)d\varphi =$$

$$= \left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\int_0^2 2\pi r^2dr = \pi(2+\sqrt{2}) \cdot \frac{8}{3} = \frac{8\pi}{3}(2+\sqrt{2})$$

Ответ: $\frac{8\pi}{3}(2+\sqrt{2})$

§9 №21

Найти объём параллепипипеда, ограниченного плоскостями:

$a_1x + b_1y + c_1z = \pm d_1$

$a_2x + b_2y + c_2z = \pm d_2$

$a_3x + b_3y + c_3z = \pm d_3$

$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$ , $A = \begin{Vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{Vmatrix}$

Замена: $\begin{cases} u = a_1x + b_1y + c_1z \\ v = a_2x + b_2y + c_2z \\ w = a_3x + b_3y + c_3z \end{cases}$

Т.к. $\Delta \neq 0$, то $x, y$ и $z$ однозначно выражаются через $u$ и $v$

Дифференцируем каждое ур-ие системы по $u$:

$$\begin{cases} 1 = a_1 \frac{\partial x}{\partial u} + b_1 \frac{\partial y}{\partial u} + c_1 \frac{\partial z}{\partial u} \\ 0 = \ldots \\ 0 = \ldots \end{cases}$$

$$\begin{Vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial u} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix} \Rightarrow \begin{Vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial u} \end{Vmatrix} = A^{-1} \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} (A^{-1})_{11} \\ (A^{-1})_{21} \\ (A^{-1})_{31} \end{Vmatrix}, \text{ тогда } \frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)} = \begin{vmatrix} (A^{-1})_{11} & (A^{-1})_{12} & (A^{-1})_{13} \\ (A^{-1})_{21} & (A^{-1})_{22} & (A^{-1})_{23} \\ (A^{-1})_{31} & (A^{-1})_{32} & (A^{-1})_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= \det A^{-1} = \frac{1}{\det A} = \cancel{\Delta}\ \frac{1}{4}$$

$\tilde{G}$ ограничено $u = \pm d_1$, $v = \pm d_2$, $w = \pm d_3$

$$V = \iiint\limits_{G} dx\,dy\,dz = \iiint\limits_{\tilde{G}} \frac{1}{|\Delta|}\, du\, dv\, dw = \frac{1}{|\Delta|} \cdot 2d_1 \cdot 2d_2 \cdot 2d_3 =$$

$$= \frac{8 d_1 d_2 d_3}{|\Delta|}$$

Ответ: $\dfrac{8 d_1 d_2 d_3}{|\Delta|}$

§ 9 № 63 (1)

Найти координаты центра масс $[0;a]^3$

с плотностью $\rho = \rho_0 (x+y+z)^2$

Масса тела: $M = \iiint\limits_{[0;a]^3} \rho\, dx\,dy\,dz = \int\limits_0^a dx \int\limits_0^a dy \int\limits_0^a \rho_0 (x+y+z)^2 dz =$

$$= \rho_0 \int\limits_0^a dx \int\limits_0^a dy \left[ (x+y)^2 \cdot a + 2(x+y) \cdot \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{3} \right] =$$

$$= \rho_0 \int\limits_0^a dx \int\limits_0^a \left( ax^2 + 2axy + ay^2 + a^2 x + a^2 y + \frac{1}{3} a^3 \right) dy =$$

$$= \rho_0 \int\limits_0^a \left( a^2 x^2 + 2ax \cdot \frac{a^2}{2} + a \cdot \frac{1}{3} a^3 + a^3 x + a^2 \cdot \frac{a^2}{2} + \frac{1}{3} a^4 \right) dx =$$

$$= \rho_0 \int\limits_0^a \left( a^2 x^2 + 2a^3 x + \frac{7}{6} a^4 \right) dx = \rho_0 \left( a^2 \cdot \frac{a^3}{3} + 2a^3 \cdot \frac{a^2}{2} + \frac{7}{6} a^5 \right) =$$

$$= \rho_0 a^5 \cdot \frac{2+6+7}{6} = \frac{15}{6} \rho_0 a^5$$

Координаты центра масс по оси $x$:

$$x_c = \frac{1}{M}\iiint\limits_{[0,a]^3} x\rho\, dx\,dy\,dz = \frac{1}{M}\int_0^a dx\int_0^a dy\int_0^a x\rho_0 (x+y+z)^2\, dz =$$

$$= \frac{\rho_0}{M}\int_0^a x\,dx\int_0^a dy\left[(x+y)^2 a + 2(x+y)\cdot\frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{3}\right] =$$

$$= \frac{\rho_0}{M}\int_0^a x\left(a^2x^2 + 2ax\frac{a^2}{2} + a\cdot\frac{a^3}{3} + a^3x + \cdot\frac{a^2}{2} + \frac{1}{3}a^4\right)dx =$$

$$= \frac{\rho_0}{M}\int_0^a \left(a^2x^3 + 2a^3x^2 + \frac{7}{6}a^4x\right)dx = \frac{\rho_0}{M}\left(a^2\cdot\frac{a^4}{4} + 2a^3\cdot\frac{a^3}{3} + \frac{7}{6}a^4\cdot\frac{a^2}{2}\right) = \frac{\rho_0}{M}a^6\cdot\frac{3+8+7}{12} = \frac{3}{2}a^6\cdot\frac{\rho_0}{M} =$$

$$= \frac{3}{2}a^6\cdot\frac{\rho_0}{\frac{15}{6}\rho_0 a^5} = a\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{5} = \frac{3}{5}a$$

В силу симметрии $y_c = z_c = x_c = \frac{3}{5}a$

<u>Ответ</u>: $x_c = y_c = z_c = \frac{3}{5}a$.