§13

179(2) $y=|\sin x| = \operatorname{sgn}(\sin(x))\sin(x)$

$y' = \operatorname{sgn}'_{\sin x}\cdot \sin'(x)\sin x + \sin' x\operatorname{sgn}(\sin(x))$.

$\forall x: \sin x \neq 0 \quad \exists \operatorname{sgn}'_{\sin x} = 0 \Rightarrow \forall x: \sin x \neq 0 \mapsto \exists y'$ при

этом $\nexists y'$ в $x: \sin x = 0$, т.к. $\nexists \operatorname{sgn}'_{\sin x}$ в $x: \sin x = 0$.

197(5) $y = 2x^2 - x^4,\ 0 < x < 1,\ y = 3/4$

$\frac{dy}{dx} = 4x - 4x^3,\ 0<x<1 \Rightarrow \frac{dx}{dy} = x'_y = (4x-4x^3)^{-1},\ 0<x<1$

$x'(y_0) = (4x_0 - 4x_0^3)^{-1},\quad 0 < x_0 < 1$

$x_0: \quad 3/4 - 1 = -1 + 2x^2 - x^4$

$-1/4 = -(x^2-1)^2$

$\pm\frac{1}{2} = x^2 - 1$

$x^2 = \frac{1}{2};\ \frac{3}{2}$

$x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2};\ \pm\frac{\sqrt{6}}{2}.\ \pm\frac{\sqrt{6}}{2},\ -\frac{\sqrt{2}}{2}$ не вход. в $(0;1) \Rightarrow x_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$x'(3/4) = (2\sqrt{2} - \sqrt{2})^{-1} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

N201(3) $x = a\cos t,\ y = b\sin t,\ 0 < t < \pi \quad y'_x - ?$

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)^{-1} = b\cos t\,(-a\sin t)^{-1} = -\frac{b}{a}\operatorname{ctg} t$

N214(2) $d\left(\operatorname{arctg}\frac{\ln x}{x}\right) = \operatorname{arctg}'_{\frac{\ln x}{x}}\, d\left(\frac{\ln x}{x}\right) =$

$= \operatorname{arctg}'_{\frac{\ln x}{x}}\left(\frac{\ln x}{x}\right)'_x dx = \frac{1}{1+\frac{\ln^2 x}{x^2}}\,\frac{1-\ln x}{x^2}\,dx =$

$= \frac{1-\ln x}{x^2+\ln^2 x}\,dx$. В т. $x_1 = \frac{1}{e}$: $\frac{2}{e^{-2}+1}dx = \frac{2e^2}{1+e^2}dx$. В т. $x_2 = e$: 0.

№ 173. α - ? $y=\begin{cases}|x|^\alpha \sin(1/x), & x\ne 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ в т. $x=0$ 1) непр. 2) $\exists y'$ 3) $\exists$ непр. y'

1) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0) = 0$

$\lim\limits_{x\to 0} |x|^\alpha \sin(1/x) = 0$

$\alpha>0$: $|x|^\alpha$ - б.м., $\sin(\frac{1}{x})$ - огр. $\Rightarrow |x|^\alpha \sin(\frac{1}{x})$ - б.м.

$\alpha = 0$: $\nexists \lim\limits_{x\to 0} \sin(\frac{1}{x})$. $\square$ можно взять послед-ть Гейне $x'_n = \frac{1}{\pi n}$ и $x''_n = \frac{1}{\pi/2 + \pi n}$, $n\in\mathbb{N}$. $\lim\limits_{n\to\infty} f(x'_n) \ne \lim\limits_{n\to\infty} f(x''_n)$ $\blacksquare$

$\alpha<0$: $|x|^\alpha$ - б.б., берём те же послед-ти получаем, что $\nexists$.

2) $f'(0) = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{f(\Delta x)}{\Delta x} = \Big| \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ \Delta x := x}} \frac{f(x)}{x} = |x|^{\alpha-1}\cdot \operatorname{sgn}(x)\cdot$

$\cdot \sin(\frac{1}{x})$. Аналогично 1) при $\alpha := \alpha - 1 \Rightarrow \alpha - 1 > 0$

3) $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = f'(0) = 0$

$\forall x\ne 0 \mapsto f'(x) = \begin{cases}(x^\alpha \sin\frac{1}{x})' = \alpha x^{\alpha-1}\sin\frac{1}{x} - x^{\alpha-2}\cos\frac{1}{x}, & x>0\\ ((-x)^\alpha \sin\frac{1}{x})' = \alpha(-x)^{\alpha-1}\sin\frac{1}{x} - (-x)^{\alpha-2}\cos\frac{1}{x}, & x<0\end{cases}$

$\lim\limits_{x\to 0-0} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0-0} \alpha(-x)^{\alpha-1}\sin\frac{1}{x} - \lim\limits_{x\to 0+0} (-x)^{\alpha-2}\cos\frac{1}{x}$. т.к. для $\exists f'$ необходимо $\alpha>1$ (2) $\Rightarrow \alpha(-x)^{\alpha-1}\sin\frac{1}{x}$ - б.м. на огр. - б.м. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0+0} f'(x) = -\lim\limits_{x\to 0+0} (-x)^{\alpha-2}\cos\frac{1}{x} = 0 \Rightarrow \alpha > 2$ (аналогично (2))

Аналогично $\lim\limits_{x\to 0+0} f'(x) = 0 \Leftrightarrow \alpha > 2$.

1) $\alpha>0$; 2) $\alpha>1$; 3) $\alpha>2$.

№ 10(3) §14

$y^4 - 4x^4 - 6xy = 0$, $M(1;2)$

$4y^3y' - 16x^3 - 6y - 6xy' = 0$

в т. $M(1;2)$: $32y'(x_M) - 16 - 12 - 6y'(x_M) = 0$

$$26y'(x_M) = 28 \Rightarrow y'(x_M) = \frac{14}{13}$$

касат.: $y = y(x_M) + y'(x_M)(x - x_M) = 2 + \frac{14}{13}(x-1) = \frac{14}{13}x + \frac{12}{13}$

нормаль: $y = y(x_M) - \frac{1}{y'(x_M)}(x - x_M) = 2 - \frac{13}{14}(x-1) = -\frac{13}{14}x + \frac{41}{14}$

т.е. кас.: $14x - 13y + 12 = 0$, норм.: $13x + 14y - 41 = 0$

§15 №1(б) $y = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$, $y'' - ?$

$y' = \frac{f'}{f}$, $f = x + \sqrt{x^2+1}$, $f' = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$, $f'' = \frac{\sqrt{x^2+1} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = (x^2+1)^{-\frac{3}{2}}$

$$y'' = \frac{f''f - (f')^2}{f^2} = \frac{f''}{f} - \left(\frac{f'}{f}\right)^2 = \frac{(x^2+1)^{-3/2}}{x+(x^2+1)^{1/2}} - \left(\frac{1+x(x^2+1)^{-1/2}}{x+(x^2+1)^{1/2}}\right)^2 =$$

$$= \left((x^2+1)^{1/2} - x\right)(x^2+1)^{-3/2} - \frac{1 + 2x(x^2+1)^{-1/2} + x^2(x^2+1)^{-1}}{x^2 + 2x(x^2+1)^{1/2} + x^2+1} =$$

$$= \left((x^2+1)^{1/2} - x\right)(x^2+1)^{-3/2} - (x^2+1)^{-1}\frac{x^2+1+2x(x^2+1)^{1/2}+x^2}{x^2+2x(x^2+1)^{1/2}+x^2+1} =$$

$$= \left((x^2+1)^{1/2} - x\right)(x^2+1)^{-3/2} - (x^2+1)^{-1} = -x(x^2+1)^{-3/2}$$

№10(4) $y = \operatorname{arctg}\frac{2+x^2}{2-x^2}$, $x = 0$ $d^2y - ?$

$$y' = \frac{1}{1+\left(\frac{2+x^2}{2-x^2}\right)^2}\cdot\frac{2x(2-x^2)+2x(2+x^2)}{(2-x^2)^2} = \frac{8x}{(2-x^2)^2+(2+x^2)^2} =$$

$$= \frac{8x}{8+2x^2} = \frac{4x}{4+x^2}$$

$y'' = \frac{4(4+x^2) - 2x\cdot 4x}{(4+x^2)^2} = \frac{16-4x^2}{(4+x^2)^2}$ $y''(0) = 1 \Rightarrow d^2y = dx^2$

№13(г) $y = u(2+v)$ $\quad d^2y - ?$

$$y'' = 2u'' + (uv)'' = 2u'' + (u'v+v'u)' = 2u'' + u''v + 2u'v' + uv'' = \frac{d^2u}{dx^2}(2+v) + 2\frac{du\,dv}{d^2x} + u\frac{d^2v}{dx^2}$$

$$d^2y = y''dx^2 = d^2u(2+v) + 2du\,dv + u\,d^2v$$

№14(7) $x = \frac{e^t}{1+t}$, $y = (t-1)e^t$. $\frac{d^2y}{dx^2} - ?$

$$y'_x = y'_t t'_x = (e^t + (t-1)e^t)\frac{1}{x'_t} = te^t\frac{(1+t)^2}{e^t(1+t)-e^t} = (1+t)^2$$

$$y''_x = (y'_x)'_t t'_x = 2(1+t)\frac{(1+t)^2}{te^t} = \frac{2(1+t)^3}{te^t}$$

№22(и) d^2y в т. $(1;0)$ $\quad y = y(x)$

$$F(x,y) = 3(y-x+1) + \operatorname{arctg}(y/x) = 0$$

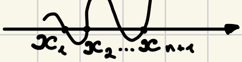
$$dF(x,y) = 3(dy-dx) + \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2} = \left(3+\frac{x}{x^2+y^2}\right)dy - \left(3+\frac{y}{x^2+y^2}\right)dx = 0 \Rightarrow dy = \frac{3x^2+3y^2+y}{3x^2+3y^2+x}dx.$$

В т. $(1,0)$ $3x^2+3y^2+y=3$, $3x^2+3y^2+x=4 \Rightarrow dy = \frac{3}{4}dx.$ в т. $(1,0)$

$$d^2y = d\left(\frac{3x^2+3y^2+y}{3x^2+3y^2+x}\right)dx = \frac{4(6x\,dx+6y\,dy+dy)-3(6x\,dx+6y\,dy+dx)}{16}dx =$$

$$= \frac{6x\,dx+6y\,dy+4dy-3dx}{16}dx = \frac{6\cdot 1dx+0+3dx-3dx}{16}dx = \frac{3}{8}dx^2$$

§16 №5. Мат. индукция: база - верна по Т. Ролля.
∃верно для $n-1$

шаг: 

применим Т. Ролля ко всем

(x_i, x_{i+1}), $1 \le i \le n$. Получим, что $\forall (x_i, x_{i+1}) \ \exists\, c_i \in$

$\in (x_i, x_{i+1}) : f'(c_i) = 0 \Rightarrow$ т.к. отрезков n штук

f' имеет $\geq n$ нулей. Т.к. f дифф n раз, то f'

дифф. $n-1$ раз $\Rightarrow$ по предположению индукции

$\exists \xi : (f')^{(n-1)}(\xi) = f^{(n)}(\xi) = 0$ $\blacksquare$

№15(4) Т. Лагранжа для $f = e^t$ на $(0; x-1)$ $(x > 1)$

$\exists \xi \in (0; x-1) : \dfrac{e^{x-1} - e^0}{x-1-0} = f'(\xi) = e^{\xi} > 1$, т.к. $\xi > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow e^{x-1} - 1 > x - 1 \Leftrightarrow e^{x-1} > x \Leftrightarrow e^x > ex$ $\blacksquare$

№19. $\exists$ $f'(x)$ огр., т.е. $\exists M : |f'(x)| < M$ $\forall x \in (a,b)$

Рассм f на $(a, \frac{a+b}{2})$, $(\frac{a+b}{2}, b)$. В $\frac{a+b}{2}$ f огр., т.к. f - дифф.

$\forall x \in (a, \frac{a+b}{2})$ по Т. Лагранжа для f на $(x, \frac{a+b}{2})$

$\exists \xi \in (a, \frac{a+b}{2}) : f'(\xi) = \dfrac{f(\frac{a+b}{2}) - f(x)}{\frac{a+b}{2} - x} \Rightarrow f(x) =$

$= f(\frac{a+b}{2}) - f'(\xi)(\frac{a+b}{2} - x)$.

Тогда $|f(x)| = |f(\frac{a+b}{2}) - f'(\xi)(\frac{a+b}{2} - x)| < |f(\frac{a+b}{2})| +$

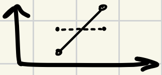
$+ |f'(\xi)(\frac{a+b}{2} - x)| < |f(\frac{a+b}{2})| + |f'(\xi)| \left(|\frac{a+b}{2}| + |x| \right) <$

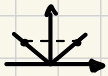
$< |f(\frac{a+b}{2})| + M(|\frac{a+b}{2}| + \max(|a|, |\frac{a+b}{2}|)) =$

$= C$, т.е. $\exists C : \forall x$ $|f(x)| < C \Rightarrow f(x)$ огр. на

$(a, \frac{a+b}{2})$. Аналогично док-во, что $f(x)$ огр. на $(\frac{a+b}{2}, b)$

$f(x)$ огр. в $\frac{a+b}{2} \Rightarrow f(x)$ огр. на (a,b) $\mathring{x}!$ $\Rightarrow f'$ неогр. на (a,b).

№33. а) если f прерывна на $[a, b]$, то возможна такая ситуация:  такой $\xi \nexists$.

б) нет, пример – $|x|$ на $[-1; 1]$  такой $\xi \nexists$

в) нет, пример x на $[0; 1]$ такой $\xi \nexists$

№30. Используем Т. Коши для $f(x)$ и $g(x) = \frac{1}{x}$ на отрезке $[1; 2]$: $\exists \xi \in (1; 2)$: $\dfrac{f(2) - f(1)}{\frac{1}{2} - \frac{1}{1}} = \dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$

$$f(2) - f(1) = -\frac{1}{2} f'(\xi) / \left(-\frac{1}{\xi^2}\right) = \frac{\xi^2}{2} f'(\xi) \quad \blacksquare$$

Т.1. Заметим, что $th'(f(x)) = \left(\dfrac{sh\, f(x)}{ch\, f(x)}\right)' =$

$$= \frac{ch^2 f(x) - sh^2 f(x)}{ch^2 f(x)} f'(x) = \frac{f'(x)}{ch^2 f(x)}$$

По Т. Лагранжа $\exists \xi \in (2024, 2028)$:

$$\frac{th(f(2028)) - th(f(2024))}{2028 - 2024} = th'(f(\xi))$$

$$th(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}} = 1 - \frac{2e^{-t}}{e^t + e^{-t}} = 1 - \frac{2}{e^{2t} + 1}$$

$\forall\, t_1, t_2 \quad th(t_1) - th(t_2) = 2\left(\dfrac{1}{e^{2t_2} + 1} - \dfrac{1}{e^{2t_1} + 1}\right) < 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\, \xi \in (2024, 2028): th'(f(\xi)) = \dfrac{th(f(2028)) - th(f(2024))}{4} <$

$< \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$. Т.е. $\exists\, \xi \in (2024, 2028)$: $th' f(\xi) =$

$$= \frac{f'(\xi)}{ch^2 f(\xi)} < \frac{1}{2} \Rightarrow f'(\xi) < \frac{ch^2 f(\xi)}{2} < ch^2 f(\xi) \quad \blacksquare$$