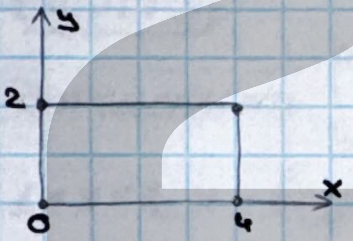
I. Криволинейные интегралы.

Формула Грина

§10 № 2 (3)

Γ – граница прямоугольника с вершинами (0;0), (4;0), (4;2), (0;2)

Вычислить $\int\limits_\Gamma xy\,ds$



$$x(s)=\begin{cases} s, & s\in[0;4] \\ 4, & s\in(4;6] \\ 10-s, & s\in(6;10] \\ 0, & s\in(10;12] \end{cases} \qquad y(s)=\begin{cases} 0, & s\in[0;4] \\ s-4, & s\in(4;6] \\ 2, & s\in(6;10] \\ 12-s, & s\in(10;12] \end{cases}$$

По определению: $\int\limits_\Gamma xy\,ds=\int\limits_0^4 s\cdot 0\,ds+\int\limits_4^6 4(s-4)\,ds+\int\limits_6^{10}(10-s)\cdot 2\,ds+$

$+\int\limits_{10}^{12} 0\cdot(12-s)\,ds= 4\left(\frac{s^2}{2}-4s\right)\Big|_4^6+2\left(10s-\frac{s^2}{2}\right)\Big|_6^{10}=$

$=4\cdot(18-24-8+16)+2(100-50-60+18)=8+16=24$

Ответ: 24.

§10.4

Вычислить $\int\limits_\Gamma x^2 ds$, где Γ - дуга окружности $x^2+y^2=a^2$, $y \geq 0$

$x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ t \in [0;\pi]$

$$\cancel{\int\limits_\Gamma x^2 ds = \int\limits_0^\pi a^2\cos^2 t\, dt = a^2\int\limits_0^\pi \frac{1+\cos 2t}{2}dt = \frac{a^2}{2}\left(\pi + \frac{1}{2}\sin 2t\Big|_0^\pi\right) = \frac{\pi a^2}{2}}$$

$$\int\limits_\Gamma x^2 ds = \int\limits_0^\pi a^2\cos^2 t\sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t}\, dt = a^3\int\limits_0^\pi \frac{1+\cos 2t}{2}dt =$$

$$= \frac{a^3}{2}\left(\pi + \frac{1}{2}\sin 2t\Big|_0^\pi\right) = \frac{\pi a^3}{2}$$

Ответ: $\frac{\pi a^3}{2}$

§10.10

Вычислить $\int\limits_\Gamma f(x,y)ds$, Γ - арка циклоиды

$x = a(t-\sin t),\ y = a(1-\cos t),\ 0 \leq t \leq 2\pi$

1) $f(x,y) = y$

$$\int\limits_\Gamma y\, ds = \int\limits_0^{2\pi} a(1-\cos t)\sqrt{a^2(1-\cos t)^2 + a^2\sin^2 t}\, dt = a^2\int\limits_0^{2\pi}(1-\cos t)\sqrt{2-2\cos t}\, dt =$$

$$= \sqrt{2}a^2\int\limits_0^{2\pi}(1-\cos t)^{3/2}dt = \sqrt{2}a^2\int\limits_0^{2\pi}\left(2\cdot\sin^2\frac{t}{2}\right)^{3/2}dt = \left\{\frac{t}{2} \to t\right\} =$$

$$= 8a^2\int\limits_0^{\pi}\sin^3 t\, dt = -8a^2\int\limits_0^\pi (1-\cos^2 t)(\cos t)'_t\, dt =$$

$$= -8a^2\left(\cos t - \frac{\cos^3 t}{3}\right)\Big|_0^\pi = -8a^2\left(-1+\frac{1}{3}-1+\frac{1}{3}\right) = \frac{32a^2}{3}$$

2) $f(x,y)=y^2$

$$\int_\Gamma y^2 ds = \ldots = \sqrt{2}a^3\int_0^{2\pi}\left(2\sin^2\frac{t}{2}\right)^{5/2}dt = 16a^3\int_0^{\pi}\sin^5 t\,dt =$$

$$= 16a^3\int_{-1}^{1}(1-\xi^2)^2 d\xi = 16a^3\left(2-2\cdot\frac{2}{3}+\frac{2}{5}\right) = \frac{256a^3}{15}$$

Ответ: 1) $\frac{32a^2}{3}$; 2) $\frac{256a^3}{15}$

§10 №19(2)

Вычислить $\int_\Gamma \left(x-\frac{1}{y}\right)dy$, Γ - дуга параболы $y=x^2$; $1\le x\le 2$, x - возрастает

$$\int_\Gamma Q(x,y)dy = \int_a^b Q(x,f(x))f'(x)dx, \text{ когда } y=f(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_\Gamma \left(x-\frac{1}{y}\right)dy = \int_1^2\left(x-\frac{1}{x^2}\right)\cdot 2x\cdot dx = 2\left(\frac{x^3}{3}-\ln x\right)\Big|_1^2 =$$

$$= \frac{2}{3}(7-3\ln 2)$$

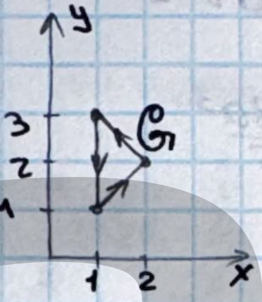
Ответ: $\frac{2}{3}(7-3\ln 2)$

§10 №30(1)

Вычислить $\int_\Gamma 2(x^2+y^2)dx+(x+y)^2dy$, Γ - граница треугольника с вершинами $(1;1)$, $(1;3)$, $(2;2)$

$P(x,y)=2(x^2+y^2)$, $Q(x,y)=(x+y)^2$

P и Q – гладкие $\Rightarrow$ применима формула Грина.



$$\int_\Gamma P dx + Q dy = \iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx dy =$$

$$\cancel{= 2\iint_G (2(x+y) - 2y) dx dy}$$

$$= \iint_G (2(x+y) - 4y) dx dy = \left|2\int_1^2 dx \int_x^{4-x} (x-y) dy\right| = \left|2\int_1^2 dx \left[x(4-x-x) - \frac{(4-x)^2}{2} + \frac{x^2}{2}\right]\right| = \left|2\int_1^2 (8x - 2x^2 - 8) dx\right| = \left|4\left(4\cdot\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - 4x\right)\Big|_1^2\right| = +\frac{4}{3}$$

Ответ: $\frac{4}{3}$

§10 №87 (4)

Найти массу, распределённую с линейной плотностью ρ по кривой Γ: $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$, $\rho = \sqrt[3]{y}$;

$$m = \int_\Gamma \rho(x,y) ds = \int_0^{\pi/2} \sqrt[3]{a\sin^3 t} \cdot \sqrt{(a\cdot 3\cos^2 t \sin t)^2 + (a\cdot 3\sin^2 t \cos t)^2} dt =$$

$$= 3a\sqrt[3]{a} \int_0^{\pi/2} \sin t \cdot \sin t \cos t \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} dt = 3a\sqrt[3]{a} \int_0^1 \xi^2 d\xi$$

(замена $\xi = \sin t$) $= 3a\sqrt[3]{a}\cdot\frac{1}{3} = a\sqrt[3]{a}$

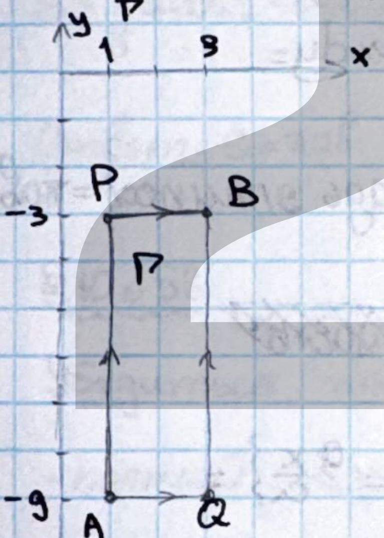
Ответ: $a\sqrt[3]{a}$

§10 №110 (1,2)

Найти работу поля $\vec{F}=\begin{Vmatrix} 4x-5y \\ 2x+y \end{Vmatrix}$ вдоль дуги AB кривой Г, где $A=\begin{Vmatrix} 1 \\ -9 \end{Vmatrix}$, $B=\begin{Vmatrix} 3 \\ -3 \end{Vmatrix}$

1) Г-ломаная APB, $P=\begin{Vmatrix} 1 \\ -3 \end{Vmatrix}$

$$A=\int_\Gamma (\vec{F}(\vec{r}), d\vec{r}) = \int_\Gamma (4x-5y)dx+(2x+y)dy =$$



$$=\int_{AP}(2x+y)dy+\int_{PB}(4x-5y)dx =$$

$$=\int_{-9}^{-3}(2+y)dy+\int_{1}^{3}(4x+15)dx = \left(2y+\frac{y^2}{2}\right)\Big|_{-9}^{-3} +$$

$$+\left(2x^2+15x\right)\Big|_{1}^{3} = 12+\frac{9}{2}-\frac{81}{2}+16+30=$$

$$=22$$

2) Г-ломаная AQB, $Q=\begin{Vmatrix} 3 \\ -9 \end{Vmatrix}$

$$A=\int_{1}^{3}(4x+5\cdot 9)dx+\int_{-9}^{-3}(6+y)dy=\left(2x^2+45x\right)\Big|_{1}^{3}+\left(6y+\frac{y^2}{2}\right)\Big|_{-9}^{-3}=$$

$$=16+90+36+\frac{9}{2}-\frac{81}{2}=106$$

Ответ: 1) 22; 2) 106.

§10 №46

$$\int\limits_{\Gamma}(2xy-y)dx+x^2dy,\quad \Gamma\text{-эллипс}\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

$P(x,y)=2xy-y,\ Q(x,y)=x^2$

P и Q – гладкие => применима формула Грина

$$\int\limits_{\Gamma}(2xy-y)dx+x^2dy=\iint\limits_{G}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=$$

$$=\iint\limits_{G}(2x-2x+1)dxdy=\iint\limits_{G}dxdy=\{\text{площадь эллипса}\}=\pi ab$$

$$\cancel{x=a\cos\varphi,\ y=b\sin\varphi,\ r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\iint\limits_{G}dxdy=\int\limits_{-a}^{a}dx\int\limits_{-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}dy=\frac{2b}{a}\int\limits_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}dx=\left\{\xi=\frac{x}{a}\right\}=$$

$$=2ab\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{1-\xi^2}\,d\xi=\{\xi=\sin\alpha\}=2ab\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2\alpha\,d\alpha=\pi ab$$

Ответ: πab.

§10 №101(б)

Найти S области, ограниченной кривой

$x=a\cos t,\ y=b\sin t,\ t\in[0;2\pi]$

$$S=\iint\limits_{G}dxdy=\iint\limits_{G}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

Выберем $Q = x$, $P = 0$, тогда $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1$

По формуле Грина:

$$S = \int_{\Gamma} P\,dx + Q\,dy = \int_{\Gamma} x\,dy$$

Γ − кривая $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, тогда

$$S = \int_0^{2\pi} a\cos t \cdot b\cos t\,dt = ab\int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt = \pi ab$$

Ответ: $S = \pi ab$

§10 № 58

Убедиться, что подынтегральное выражение − полный дифференциал. Γ_{AB} − кривая с началом в точке $A(2;-1)$ и концом в $B(1;0)$

$$\int_{\Gamma_{AB}} (x+y)dx + (x-y)dy$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = x + y \Rightarrow u = \frac{x^2}{2} + xy + C(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^2}{2} + xy + C(y)\right) = x + C'(y) = x - y \Rightarrow C(y) = -\frac{y^2}{2}$$

Тогда $(x+y)dx + (x-y)dy = du$, где $u = \frac{x^2}{2} + xy - \frac{y^2}{2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_{\Gamma_{AB}} (x+y)dx + (x-y)dy = \int_{\Gamma_{AB}} du = u(B) - u(A) = \left(\frac{1}{2}\right) - \left(2 - 2 - \frac{1}{2}\right) = 1$$

Ответ: 1

T1

Вычислить $\int\limits_{\gamma} \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2}$, γ - простая замкнутая гладкая кривая, не проходящая через $(0;0)$, ориентированная против часовой стрелки.

$P(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2}$; $Q(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$

$P, Q, \frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ - непрерывны во всех точках кроме $(0;0)$

Обозначим за G область, ограниченную γ.

Если $(0;0) \notin G$, то $\int\limits_{\Gamma} Pdx + Qdy =$ (по формуле Грина) $=$

$= \iint\limits_{G} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{x^2+y^2 - x\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial y} = -\frac{x^2+y^2 - y\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Тогда $\int\limits_{\Gamma} Pdx + Qdy = 0$

Если $(0;0) \in G$:

$\exists r_0: \forall r < r_0: \{x^2+y^2 \leq r^2\} \subset G$ (в силу того что γ - простая и гладкая)

Рассмотрим область между $\gamma_1 = \{x^2+y^2 = r^2\}$ и γ,

Из формулы Грина: $\int\limits_{\gamma \cup \gamma_1} Pdx + Qdy = 0 =$

$$=\int\limits_{\gamma} Pdx+Qdy+\int\limits_{\gamma_1} Pdx+Qdy$$, γ_1 обходится по часовой стрелке

$$\int\limits_{\gamma_1} Pdx+Qdy=\int\limits_{x^2+y^2=r^2}\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=\{x=r\cos\varphi,\ y=r\sin\varphi,\ \varphi\in[0;2\pi]\}=$$

$$=\int\limits_{0}^{-2\pi}\frac{r\cos\varphi\cdot r\cos\varphi d\varphi+r\sin\varphi\cdot r\sin\varphi d\varphi}{r^2}=-2\pi$$

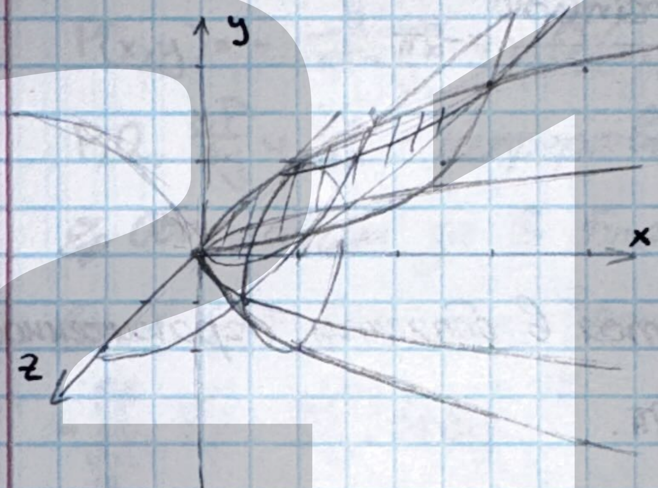
Тогда $\int\limits_{\gamma} Pdx+Qdy=2\pi$

<u>Ответ</u>: если $(0;0)$ находится в области, ограниченной кривой γ, то 0, иначе 2π.

II. Поверхностные интегралы

§9 №38

Найти площадь части конуса $x^2=y^2+z^2$, отсечённой поверхностью $ay=x^2$

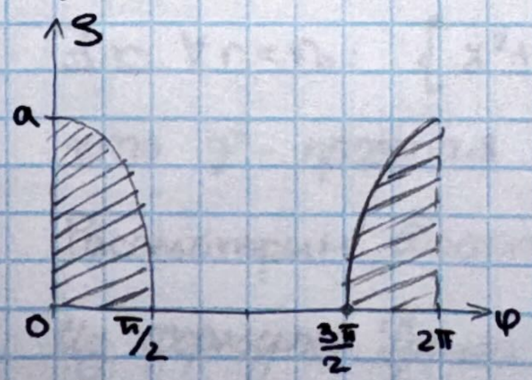


$x=\rho$, $y=\rho\cos\varphi$, $z=\rho\sin\varphi$, $r\in\mathbb{R}$, $\varphi\in[0;2\pi]$

Рассмотрим $x\geqslant 0$ (то есть $r\geqslant 0$)

$$\frac{1}{2}S=\iint\limits_G\left|\vec{r}\,'_\rho\times\vec{r}\,'_\varphi\right|d\rho\,d\varphi$$

Здесь G ограничена $a\cdot\rho\cos\varphi=\rho^2$, $\rho=a\cos\varphi$



$$\vec{r}'_\rho = \begin{Vmatrix} 1 \\ \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{Vmatrix}, \quad \vec{r}'_\varphi = \begin{Vmatrix} 0 \\ -\rho\sin\varphi \\ \rho\cos\varphi \end{Vmatrix}, \quad \vec{r}'_\rho \times \vec{r}'_\varphi = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & \cos\varphi & \sin\varphi \\ 0 & -\rho\sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} \rho \\ -\rho\cos\varphi \\ -\rho\sin\varphi \end{Vmatrix}$$

$|\vec{r}'_\rho \times \vec{r}'_\varphi| = \rho\sqrt{1+\cos^2\varphi+\sin^2\varphi} = \sqrt{2}\rho$, получаем:

$$\frac{1}{2}S = \iint\limits_{G} \sqrt{2}\rho\, d\rho\, d\varphi = 2\sqrt{2}\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{a\cos\varphi} \rho\, d\rho = 2\sqrt{2}\int_0^{\pi/2} \frac{a^2\cos^2\varphi}{2}\, d\varphi =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}a^2 \int_0^{\pi/2} (1+\cos 2\varphi)\, d\varphi = \frac{\sqrt{2}a^2}{2}\cdot\frac{\pi}{2} + \frac{\sqrt{2}a^2}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin 2\varphi\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\sqrt{2}a^2\pi}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = \frac{\sqrt{2}\pi a^2}{2}$$

<u>Ответ</u>: $S = \frac{\pi a^2}{\sqrt{2}}$

§9 №51

Найти площадь поверхности тора:

$x = (b + a\cos\psi)\cos\varphi$, $y = (b + a\cos\psi)\sin\varphi$, $z = a\sin\psi$

$0 < a \leq b$

$$\vec{r} = \begin{Vmatrix} x \\ y \\ z \end{Vmatrix}, \quad \vec{r}'_\varphi = \begin{Vmatrix} -(b+a\cos\psi)\sin\varphi \\ (b+a\cos\psi)\cos\varphi \\ 0 \end{Vmatrix}, \quad \vec{r}'_\psi = \begin{Vmatrix} -a\sin\psi\cos\varphi \\ -a\sin\psi\sin\varphi \\ a\cos\psi \end{Vmatrix}$$

$$\vec{r}'_\varphi \times \vec{r}'_\psi = \left\{ a(b+a\cos\psi) \right\} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ -\sin\psi\cos\varphi & -\sin\psi\sin\varphi & \cos\psi \end{vmatrix} =$$

$$= \left\| \begin{matrix} \cos^2\varphi \\ \sin\varphi\cos\psi \\ \sin\psi \end{matrix} \right\| \cdot a(b+a\cos\psi)$$

$$|\vec{r}\,'_\varphi \times \vec{r}\,'_\psi| = a(b+a\cos\psi)\sqrt{\cos^4\varphi + \sin^2\varphi\cos^2\varphi + \sin^2\psi} =$$

$$= a(b+a\cos\psi)\sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\psi}$$

$$= \left\| \begin{matrix} \cos\varphi\cos\psi \\ \sin\varphi\cos\psi \\ \sin\psi \end{matrix} \right\| a(b+a\cos\psi)$$

$$|\vec{r}\,'_\varphi \times \vec{r}\,'_\psi| = a(b+a\cos\psi)\cdot\sqrt{\cos^2\psi(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi)+\sin^2\psi} =$$

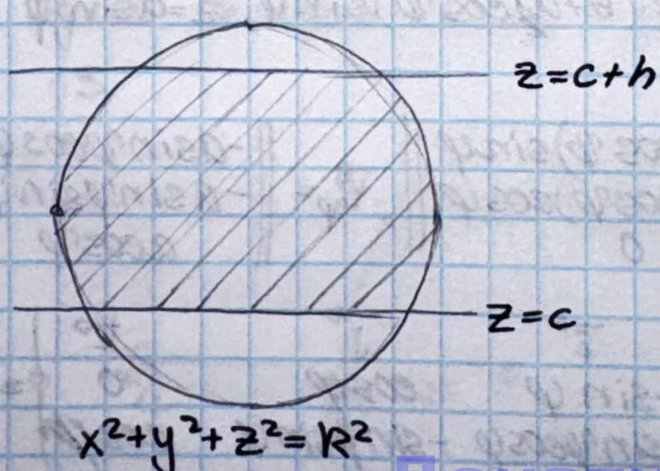
$$= a(b+a\cos\psi)$$

$$S = \iint_G |\vec{r}\,'_\varphi \times \vec{r}\,'_\psi|\, d\varphi\, d\psi, \quad G = \{0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le \psi \le 2\pi\} =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} a(b+a\cos\psi)\, d\psi = 2\pi a(b\cdot 2\pi) = 4\pi^2 ab$$

<u>Ответ:</u> $S = 4\pi^2 ab$

$\Sigma 2$



Найти S сферы, заключённую между $z=c$ и $z=c+h$

$$\vec{r} = \begin{Vmatrix} x \\ y \\ z \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} R\cos\varphi\cos\psi \\ R\cos\varphi\sin\psi \\ R\sin\varphi \end{Vmatrix}, \quad \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right], \ \psi \in [0; 2\pi]$$

Ограничение плоскостями:

$$\begin{cases} R\sin\varphi \geq c \\ R\sin\varphi \leq c+h \end{cases}, \text{ то есть } G_{\varphi\psi} = \left[\arcsin\frac{c}{R}; \arcsin\frac{c+h}{R}\right] \times [0; 2\pi]$$

$$\vec{r}'_\varphi = R \begin{Vmatrix} -\sin\varphi\cos\psi \\ -\sin\varphi\sin\psi \\ \cos\varphi \end{Vmatrix}, \quad \vec{r}'_\psi = R \begin{Vmatrix} -\cos\varphi\sin\psi \\ \cos\varphi\cos\psi \\ 0 \end{Vmatrix}$$

$$\frac{\vec{r}'_\varphi \times \vec{r}'_\psi}{R^2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\sin\varphi\cos\psi & -\sin\varphi\sin\psi & \cos\varphi \\ -\cos\varphi\sin\psi & \cos\varphi\cos\psi & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} -\cos^2\varphi\cos\psi \\ -\cos^2\varphi\sin\psi \\ -\sin\varphi\cos\varphi \end{Vmatrix} \Rightarrow |\vec{r}'_\varphi \times \vec{r}'_\psi| = R^2\sqrt{\cos^4\varphi + \sin^2\varphi\cos^2\varphi} = R^2\cos\varphi$$

$$S = \iint_G |\vec{r}'_\varphi \times \vec{r}'_\psi| \, d\varphi d\psi = R^2 \int_0^{2\pi} d\psi \int_{\arcsin\frac{c}{R}}^{\arcsin\frac{c+h}{R}} \cos\varphi \, d\varphi = R^2 \int_0^{2\pi} \frac{h}{R} d\psi = 2\pi hR$$

Ответ: $S = 2\pi hR$, зависит только от h и R при условии что обе плоскости пересекают сферу.

§11 № 1(1)

Вычислить $\iint\limits_S (x+y+z)dS$, S - часть $x+2y+4z=4$,

$x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$

$$\vec{r} = \begin{Vmatrix} x \\ y \\ z \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 4-2u-4v \\ u \\ v \end{Vmatrix}$$

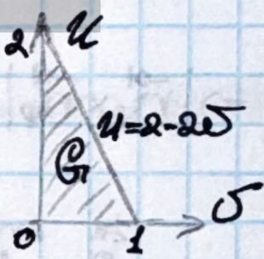
$$\vec{r}'_u = \begin{Vmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix}, \quad \vec{r}'_v = \begin{Vmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix} \quad \vec{r}'_u \times \vec{r}'_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 \\ +2 \\ 4 \end{Vmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v| = \sqrt{21}$$

$$\iint\limits_S (x+y+z)dS = (\text{по определению}) \iint\limits_G (x(u,v)+y(u,v)+z(u,v))$$

$$\cdot |\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v| du dv$$

$$G: \begin{cases} u \geq 0 \\ v \geq 0 \\ 4-2u-4v \geq 0 \end{cases} \Rightarrow$$



$$\iint\limits_S (x+y+z)dS = \iint\limits_G (u+v+4-2u-2v) \cdot \sqrt{21} du dv =$$

$$= \sqrt{21} \int_0^1 dv \int_0^{2-2v} (4-u-3v)du = \sqrt{21} \int_0^1 \left(4(2-2v) - \frac{(2-2v)^2}{2} - 3v(2-2v)\right)dv$$

$$= \sqrt{21} \int_0^1 (8-8v-2+4v-2v^2-6v+6v^2)dv = \sqrt{21} \int_0^1 (4v^2-10v+6)dv$$

$$= \sqrt{21}\left(4 \cdot \frac{1}{3} - 10 \cdot \frac{1}{2} + 6\right) = \frac{7\sqrt{21}}{3}$$

Ответ: $\frac{7\sqrt{21}}{3}$

§11 №18 (3)

Определить координаты центра масс однородных поверхностей:

$$z=\sqrt{x^2+y^2},\quad x^2+y^2\le x$$

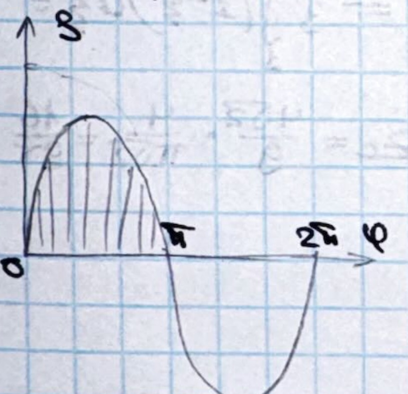
$$x_c=\frac{1}{m}\iint_S x\rho\,dS=\frac{\rho}{m}\iint_S x\,dS$$

$$m=\iint_S \rho\,dS=\rho\iint_S dS$$

$$\Rightarrow x_c=\frac{\iint_S x\,dS}{\iint_S dS}$$

$$\vec r=\begin{Vmatrix}x\\ y\\ z\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}\rho\sin\varphi\\ \rho\cos\varphi\\ \rho\end{Vmatrix}$$

G ограничена $\rho\ge 0$ и $\rho^2\le\rho\sin\varphi\Rightarrow\rho\le\sin\varphi$



$$\vec r\,'_\rho=\begin{Vmatrix}\sin\varphi\\ \cos\varphi\\ 1\end{Vmatrix},\quad \vec r\,'_\varphi=\rho\begin{Vmatrix}\cos\varphi\\ -\sin\varphi\\ 0\end{Vmatrix}$$

$$|\vec r\,'_\rho\times\vec r\,'_\varphi|=|\rho|\begin{vmatrix}\vec i & \vec j & \vec k\\ \sin\varphi & \cos\varphi & 1\\ \cos\varphi & -\sin\varphi & 0\end{vmatrix}=$$

$$=\rho\sqrt{\sin^2\varphi+\cos^2\varphi+(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi)^2}=\sqrt{2}\,\rho$$

$$\iint_S f(x,y,z)\,dS=\sqrt{2}\iint_G f(\rho\sin\varphi,\rho\cos\varphi,\rho)\cdot\rho\,d\rho\,d\varphi=$$

$$=\sqrt{2}\int_0^\pi d\varphi\int_0^{\sin\varphi} f(\rho\sin\varphi,\rho\cos\varphi,\rho)\rho\,d\rho$$

$$\iint_S dS=\sqrt{2}\int_0^\pi d\varphi\int_0^{\sin\varphi}\rho\,d\rho=\sqrt{2}\int_0^\pi\frac{\sin^2\varphi}{2}\,d\varphi=\frac{\sqrt{2}}{4}\int_0^\pi(1-\cos 2\varphi)\,d\varphi=\frac{\pi\sqrt{2}}{4}$$

$$\iint_S x\,dS = \sqrt{2}\int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{\sin\varphi} \rho^2 \sin\varphi\, d\rho = \sqrt{2}\int_0^{\pi} \sin\varphi \cdot \frac{\sin^3\varphi}{3}\, d\varphi =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{3}\int_0^{\pi}\left(\frac{1-\cos 2\varphi}{2}\right)^2 d\varphi = \frac{\sqrt{2}}{12}\int_0^{\pi}(1-\underbrace{2\cos 2\varphi}_{\int=0}+\cos^2 2\varphi)\,d\varphi =$$

$$= \frac{\pi\sqrt{2}}{12} + \frac{\sqrt{2}}{24}\int_0^{\pi} \frac{1+\cos 4\varphi}{2}\, d\varphi = \frac{\pi\sqrt{2}}{12} + \frac{\pi\sqrt{2}}{24} = \frac{3\sqrt{2}\pi}{24}$$

Тогда $x_c = \frac{3\sqrt{2}\pi}{24} \cdot \frac{4}{\pi\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$

$$\iint_S y\,dS = \sqrt{2}\int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{\sin\varphi} \rho^2 \cos\varphi\, d\rho = \sqrt{2}\int_0^{\pi} \cos\varphi \cdot \frac{\sin^3\varphi}{3}\, d\varphi =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{3}\cdot \frac{\sin^4\varphi}{4}\Big|_0^{\pi} = 0 \Rightarrow y_c = 0$$

$$\iint_S z\,dS = \sqrt{2}\int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{\sin\varphi} \rho^2 d\rho = \sqrt{2}\int_0^{\pi} \frac{\sin^3\varphi}{3}\, d\varphi = -\frac{\sqrt{2}}{3}\int_1^{-1}(1-\xi^2)\,d\xi =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{3}\left(\xi - \frac{\xi^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{1} = \frac{\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{4}{3} = \frac{4\sqrt{2}}{9} \Rightarrow z_c = \frac{4\sqrt{2}}{9}\cdot\frac{4}{\pi\sqrt{2}} = \frac{16}{9\pi}$$

Ответ: $x_c = \frac{1}{2},\ y_c = 0,\ z_c = \frac{16}{9\pi}$.

§11 №39

Вычислить:

$$\iint_S (y-z)\,dy\,dz + (z-x)\,dz\,dx + (x-y)\,dx\,dy$$

S - одна из сторон $x^2+y^2=z^2,\ 0<z\le H$

$P(x,y,z)=y-z,\quad Q(x,y,z)=z-x,\quad R(x,y,z)=x-y$

$$\vec{r} = \begin{Vmatrix} x \\ y \\ z \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \rho\cos\varphi \\ \rho\sin\varphi \\ \rho \end{Vmatrix}$$

$$\iint\limits_S \cancel{(y-z)}\, P\,dydz + Q\,dxdz + R\,dxdy = \pm\iint\limits_G \begin{vmatrix} P & Q & R \\ x'_\rho & y'_\rho & z'_\rho \\ x'_\varphi & y'_\varphi & z'_\varphi \end{vmatrix} d\rho d\varphi =$$

$$= \pm\iint\limits_G \begin{vmatrix} \sin\varphi-1 & 1-\cos\varphi & \cos\varphi-\sin\varphi \\ \cos\varphi & \sin\varphi & 1 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \end{vmatrix} \rho^2 d\rho d\varphi =$$

$$= \pm\iint\limits_G \Big((\sin\varphi-1)(-\cos\varphi) - (1-\cos\varphi)\sin\varphi + \cos\varphi-\sin\varphi \Big)\rho^2 d\rho d\varphi =$$

$$= 2\iint\limits_G (\cos\varphi-\sin\varphi)\rho^2 d\rho d\varphi \circleddash$$

Здесь $G=[0;2\pi]\times[0;H]$

$$\circleddash\, 2\int_0^{2\pi}(\cos\varphi-\sin\varphi)d\varphi \int_0^H \rho^2 d\rho = 0$$

<u>Ответ</u>: 0

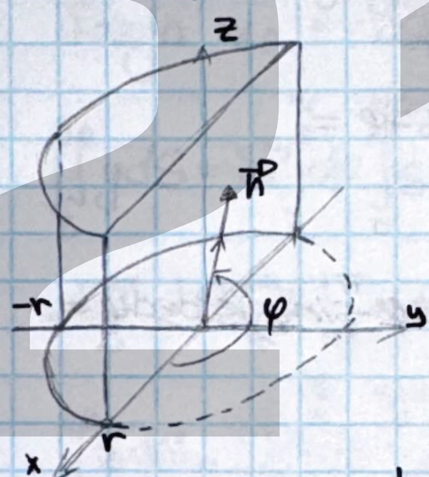
§11 2040

$\iint\limits_S yz^2\,dxdz$, S - внутренняя сторона $x^2+y^2=r^2$;

$y\le 0,\ 0\le z\le r$

$x=r\cos\varphi,\ \ y=r\sin\varphi,\ \ z=t$

$G=[\pi;2\pi]\times[0;r]$



Нормаль: $\vec n=\begin{vmatrix}\vec i & \vec j & \vec k\\ x'_\varphi & y'_\varphi & z'_\varphi\\ x'_t & y'_t & z'_t\end{vmatrix}=\left\|\begin{matrix}r\cos\varphi\\ r\sin\varphi\\ 0\end{matrix}\right\|$ - соответствует внешней стороне поверхности, тогда

$$\iint\limits_S yz^2dxdz=-\iint\limits_G\begin{vmatrix}0 & rt^2\sin\varphi & 0\\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}dt\,d\varphi=-r^2\iint\limits_G r^2t^2\sin^2\varphi\,dt\,d\varphi=$$

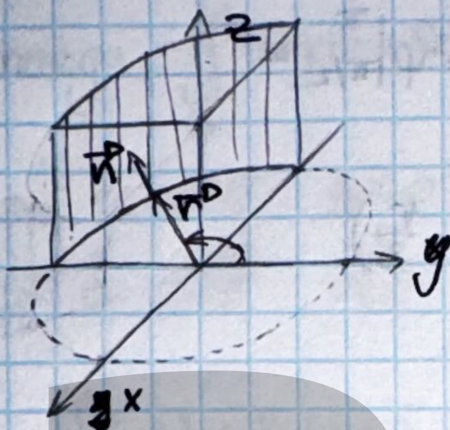
$$=-r^4\int\limits_{\pi}^{2\pi}\sin^2\varphi\,d\varphi\int\limits_0^r t^2dt=-\frac{r^5}{3}\cdot\int\limits_{\pi}^{2\pi}\frac{1-\cos 2\varphi}{2}d\varphi=-\frac{\pi r^5}{6}$$

Ответ: $-\frac{\pi r^5}{6}$.

§11 2041

Вычислить $\iint\limits_S yz\,dxdy+zx\,dydz+xy\,dzdx$

S - внешняя сторона $x^2+y^2=r^2;\ 0\le z\le H$



$$\vec{r} = \begin{Vmatrix} x \\ y \\ z \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ t \end{Vmatrix},$$

$$\varphi \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right],\ t \in [0; H]$$

$$G_{t\varphi} = \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right] \times [0; H]$$

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{Vmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ 0 \end{Vmatrix} = \vec{r} -$$

– нормаль соответствует внешней части цилиндра, тогда

$$\iint\limits_S P\,dydz + Q\,dxdz + R\,dxdy = \iint\limits_G \begin{vmatrix} P & Q & R \\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} dt\,d\varphi$$

Здесь $P = xz = rt\cos\varphi$, $Q = xy = r^2\cos\varphi\sin\varphi$

$R = yz = rt\sin\varphi$

$$= \iint\limits_G r^2 \begin{vmatrix} t\cos\varphi & r\cos\varphi\sin\varphi & t\sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} dt\,d\varphi =$$

$$= r^2 \iint (t\cos^2\varphi + r\cos\varphi\sin^2\varphi)\,dt\,d\varphi =$$

$$= r^2 \int\limits_{\pi/2}^{\pi} d\varphi \int\limits_0^H (t\cos^2\varphi + r\cos\varphi\sin^2\varphi)\,dt =$$

$$= r^2 \int\limits_{\pi/2}^{\pi} \left(\frac{H^2}{2}\cos^2\varphi + rH\cos\varphi\sin^2\varphi\right) d\varphi =$$

$$\frac{r^2H^2}{4}\int_{\pi/2}^{\pi}(1+\cos 2\varphi)\,d\varphi + r^3H\cdot\frac{1}{3}\sin^3\varphi\Big|_{\pi/2}^{\pi} =$$

$$= \frac{r^2H^2}{4}\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}r^3H = r^2H\left(\frac{\pi H}{8} - \frac{r}{3}\right)$$

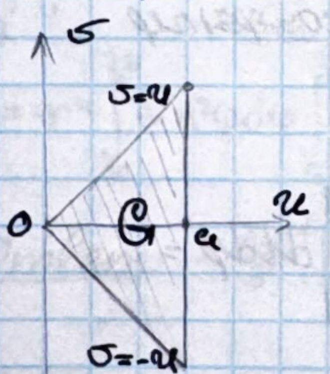
<u>Ответ</u>: $r^2H\left(\frac{\pi H}{8} - \frac{r}{3}\right)$

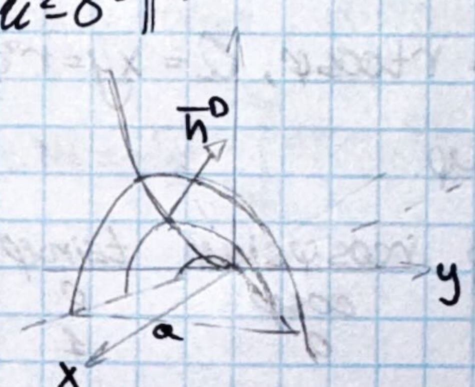
<u>§11 №43</u>

Вычислить $\iint\limits_S x\,dydz + y\,dzdx + z\,dxdy$

S - верхняя сторона $z = x^2 - y^2$, $|y| \le x \le a$

$$\vec{r} = \begin{Vmatrix} x \\ y \\ z \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} u \\ v \\ u^2 - v^2 \end{Vmatrix}, \quad |v| \le u \le a$$





$P = x = u$, $Q = y = v$, $R = z = u^2 - v^2$

$$\vec{n} = \vec{r}\,'_u \times \vec{r}\,'_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 2u \\ 0 & 1 & -2v \end{vmatrix} = \begin{Vmatrix} -2u \\ 2v \\ 1 \end{Vmatrix} \text{ - нормаль}$$

соответствует внешней стороне,

тогда $\iint\limits_S P\,dydz + Q\,dxdz + R\,dxdy = \iint\limits_G \begin{vmatrix} P & Q & R \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix} du\,dv =$

$$= \iint\limits_G \begin{vmatrix} u & v & u^2-v^2 \\ 1 & 0 & 2u \\ 0 & 1 & -2v \end{vmatrix} du\,dv = \iint\limits_G (-2u^2+2v^2+u^2-v^2)\,du\,dv =$$

$$= \iint\limits_G (v^2-u^2)\,du\,dv = \int_0^a du \int_{-u}^{u} (v^2-u^2)\,dv = \int_0^a \left(\frac{u^3}{3}\cdot 2 - u^2\cdot 2u\right) du =$$

$$= -\frac{4}{3}\int_0^a u^3\,du = -\frac{a^3}{3}$$

Ответ: $-\frac{a^3}{3}$.

§11 №45 (1,3)

Вычислить $\iint\limits_S z\,dxdy + (5x+y)\,dydz$, где S:

1) S — внешняя сторона $x^2+y^2 \le z^2$, $0 \le z \le 4$

По теореме Гаусса-Остроградского:

$$\iint\limits_S z\,dxdy + (5x+y)\,dydz = \iiint\limits_G \operatorname{div}\vec{a}\,dxdydz =$$

$$\vec{a} = \begin{Vmatrix} 5x+y \\ 0 \\ z \end{Vmatrix}, \quad \operatorname{div}\vec{a} = 5+1 = 6, \quad G - \{x^2+y^2 \le z^2,\ 0 \le z \le 4\}$$

$$= 6\iiint\limits_G dxdydz = 6\int_0^4 dz \underbrace{\iint\limits_{G(z)} dxdy}_{\text{площадь круга}} = 6\int_0^4 \pi z^2\,dz = 6\pi\cdot\frac{4^3}{3} = 128\pi$$

3) S - внешняя сторона границы области

$\{1 \le x^2+y^2+z^2<4\} = G$

Аналогично:

$$\iint_S z\,dxdy + (5x+y)\,dydz = 6\underbrace{\iiint_G dxdydz}_{\text{объём полого шара}} = 6\cdot\frac{4}{3}\pi(2^3-1^3) = 56\pi$$

<u>Ответ</u>: 1) 128π; 3) 56π.

§11 №46 (2)

Вычислить $\iint_S x^2dydz + y^2dzdx + z^2dxdy$

S - внешняя сторона $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \le \frac{z^2}{c^2}$, $0 \le z \le c$

$\vec{a} = \begin{Vmatrix} x^2 \\ y^2 \\ z^2 \end{Vmatrix}$, $div\,\vec{a} = 2x+2y+2z$

По теореме Гаусса-Остроградского:

$$\iint_S x^2dydz + y^2dzdx + z^2dxdy \overset{+I_1}{=} \iiint_G div\,\vec{a}\,dxdydz, \text{ где}$$

$G = \left\{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \le \frac{z^2}{c^2}, 0 \le z \le c\right\}$

Замена переменных:

$$\begin{cases} x = a\rho\cos\varphi \\ y = b\rho\sin\varphi \\ z = ct \end{cases}, \quad \rho > 0,\ \varphi = [0, 2\pi],\ t \in \mathbb{R}$$

$$I_1 = \iint_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \le 1,\ z=c} z^2dxdy =$$

Донатик

~~ориентацией, что и S.~~

~~$\vec{n}_{S_3}$ направлена в сторону уменьшения z, также, как нормаль к S, поэтому знаки совпадают: $\iint\limits_S \ldots = \frac{\pi u^4}{2}$~~

Задачи §11.46 (2) и §11.52(3) в конце.

§11.57 (2)

$G \subset \mathbb{R}^3$ - ограниченная область, $\partial G = S$ - гладкая, $\vec{n}$ - внешняя нормаль, $\vec{r} = (\xi - x)\vec{i} + (\eta - y)\vec{j} + (\zeta - z)\vec{k}$

Вычислить интеграл Гаусса:

$$I(x,y,z) = \iint\limits_S \frac{\cos(\widehat{\vec{r},\vec{n}})}{r^2}\,dS, \quad (x,y,z) \notin S$$

Если $(x,y,z) \notin G$, то $\iint\limits_S \frac{\cos(\widehat{\vec{r},\vec{n}})}{r^2}\,dS =$

$$= \iint\limits_S \frac{(\vec{r},\vec{n})}{r^3}\,dS = \iint\limits_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,dS =$$

$$\text{(по опр.)} = \iint\limits_S P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy,$$

здесь $\vec{n} = (\cos\alpha \ \cos\beta \ \cos\gamma)^T$, $P = \frac{\xi - x}{r^3}$, $Q = \frac{\eta - y}{r^3}$, $R = \frac{\zeta - z}{r^3}$.

По теореме Гаусса-Остроградского:

$$I(x,y,z) = \iiint\limits_G \left(\frac{\partial P}{\partial \xi} + \frac{\partial Q}{\partial \eta} + \frac{\partial R}{\partial \zeta}\right) d\xi\, d\eta\, d\zeta$$

$$\frac{\partial P}{\partial \xi} = \frac{r^3 - (\xi - x)\cdot 3r^2 \cdot \frac{2(\xi-x)}{2r}}{r^6} = \frac{r^4 - 3r^2(\xi-x)^2}{r^6} =$$

$$= \frac{r^2 - 3(\xi - x)^2}{r^4}$$

Аналогично: $\frac{\partial Q}{\partial \eta} = \frac{r^2 - 3(\eta - y)^2}{r^4}$, $\frac{\partial R}{\partial \zeta} = \frac{r^2 - 3(\zeta - z)^2}{r^4}$

Тогда $I(x,y,z) = \iiint\limits_G \frac{3r^2 - 3\left[(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2 + (\zeta-z)^2\right]}{r^4} d\xi d\eta d\zeta =$

$$= \iiint\limits_G \frac{3r^2 - 3r^2}{r^4} d\xi d\eta d\zeta = 0$$

Если $(x,y,z) \in G$, то теорема Гаусса-Остроградского неприменима

Разобьём G на $\tilde{G}$ и $\tilde{\tilde{G}} = G \setminus \tilde{G}$, где

$\tilde{G} = \{ \cancel{x,y,z} : (\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2 < r^2 \}_\varepsilon \subset G$

По доказанному ранее:

$$\iint\limits_{\partial \tilde{\tilde{G}}} \frac{\cos(\widehat{\vec{r}^0, \vec{n}^0})}{r^2} dS = 0$$

С другой стороны:

$$\iint\limits_{\partial \tilde{\tilde{G}}} \frac{\cos(\widehat{\vec{r}^0, \vec{n}^0})}{r^2} dS = \iint\limits_{\partial \tilde{G}} \frac{\cos(\widehat{\vec{r}^0, \vec{n}^0})}{r^2} dS + \iint\limits_{\partial G} \frac{\cos(\widehat{\vec{r}^0, \vec{n}^0})}{r^2} dS,$$

при этом $\partial \tilde{G}$ ориентирована так, что нормаль направлена внутрь шара,

$\partial G = S$ — нормаль направлена наружу

Параметризация для $\partial\tilde{G}$:

$\xi = x + \rho\cos\varphi\cos\psi$

$\eta = y + \rho\cos\varphi\sin\psi$

$\zeta = z + \rho\sin\varphi$

$\varphi \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$, $\psi \in [0; 2\pi]$

$$r = \sqrt{\rho^2\cos^2\varphi\cos^2\psi + \rho^2\cos^2\varphi\sin^2\psi + \rho^2\sin^2\varphi} = \rho$$

$$P = \frac{\rho\cos\varphi\cos\psi}{\rho^3} = \frac{1}{\rho^2}\cos\varphi\cos\psi$$

$$Q = \frac{\rho\cos\varphi\sin\psi}{\rho^3} = \frac{1}{\rho^2}\cos\varphi\sin\psi$$

$$R = \frac{\rho\sin\varphi}{\rho^3} = \frac{1}{\rho^2}\sin\varphi$$

$$\left(\left\|\begin{matrix}\xi\\ \eta\\ \zeta\end{matrix}\right\|\right)'_\varphi = \left\|\begin{matrix}-\rho\sin\varphi\cos\psi\\ -\rho\sin\varphi\sin\psi\\ \rho\cos\varphi\end{matrix}\right\|$$

$$\left(\left\|\begin{matrix}\xi\\ \eta\\ \zeta\end{matrix}\right\|\right)'_\psi = \left\|\begin{matrix}-\rho\cos\varphi\sin\psi\\ \rho\cos\varphi\cos\psi\\ 0\end{matrix}\right\|$$

$$\vec{n} = \rho^2\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -\sin\varphi\cos\psi & -\sin\varphi\sin\psi & \cos\varphi\\ -\cos\varphi\sin\psi & \cos\varphi\cos\psi & 0\end{vmatrix} = -\rho^2\left\|\begin{matrix}\cos^2\varphi\cos\psi\\ \cos^2\varphi\sin\psi\\ \sin\varphi\cos\varphi\end{matrix}\right\| =$$

$= -\rho^2\cos\varphi\left\|\begin{matrix}\cos\varphi\cos\psi\\ \cos\varphi\sin\psi\\ \sin\varphi\end{matrix}\right\|$ – нормаль направлена внутрь шара, что соответствует ориентации $\partial\tilde{G}$, тогда $\iint\limits_{\partial\tilde{G}}\ldots = \iint\limits_{G_{\varphi\psi}}\begin{vmatrix}P & Q & R\\ \xi'_\varphi & \eta'_\varphi & \zeta'_\varphi\\ \xi'_\psi & \eta'_\psi & \zeta'_\psi\end{vmatrix} d\varphi d\psi$, где

$G_{\varphi\psi} = [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \times [0, 2\pi]$

$$\begin{vmatrix} P & Q & R \\ \xi'_\varphi & \eta'_\varphi & \zeta'_\varphi \\ \xi'_\psi & \eta'_\psi & \zeta'_\psi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{\rho^2}\cos\varphi\cos\psi & \frac{1}{\rho^2}\cos\varphi\sin\psi & \frac{1}{\rho^2}\sin\varphi \\ -\rho\sin\varphi\cos\psi & -\rho\sin\varphi\sin\psi & \rho\cos\varphi \\ -\rho\cos\varphi\sin\psi & \rho\cos\varphi\cos\psi & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \cos\varphi\cos\psi\cdot(-\cos^2\varphi\cos\psi) - \cos\varphi\sin\psi\cdot\cos^2\varphi\sin\psi +$$

$$+ \sin^2\varphi\,(-\sin\varphi\cos\varphi) = -\cos^3\varphi\cos^2\psi - \cos^3\varphi\sin^2\psi -$$

$$- \sin^2\varphi\cos\varphi = -\cos^3\varphi - \sin^2\varphi\cos\varphi = -\cos\varphi$$

$$\iint\limits_{\partial G} \frac{\cos(\widehat{\vec r^0, \vec n^0})}{r^2}\,dS = -\iint\limits_{G_{\varphi\psi}} \cos\varphi\, d\varphi\, d\psi = -\int_0^{2\pi} d\psi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\varphi\, d\varphi =$$

$$= \cancel{-\pi\int_0^{2\pi} \cos\varphi\, d\varphi} - 2\pi\cdot 2 = -4\pi,$$

тогда $I(x,y,z) = \iint\limits_{\partial G} \frac{\cos(\widehat{\vec r^0, \vec n^0})}{r^2}\,dS = -\iint\limits_{\partial \tilde G} \frac{\cos(\widehat{\vec r^0, \vec n^0})}{r^2}\,dS = 4\pi$

<u>Ответ</u>: 0, если $(x,y,z) \notin G$ и 4π, если $(x,y,z) \in G$

<u>§11 063(2)</u>

Вычислить: $\int\limits_L \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2} + z\,dz$, L - окружность

$x^2+y^2+z^2 = R^2$, $x+y+z=0$

В данной задаче теорема Стокса неприменима, поскольку любая поверхность S, ограниченная кривой L будет пересекать Oz, в этой точке

$\cancel{\oint_L xdy-ydx}$ $\quad \vec a = \left\| \frac{-y}{x^2+y^2} \quad \frac{x}{x^2+y^2} \quad z \right\|^T$ не

является непрерывно дифференцируемой

$$\oint_L \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2} + zdz = \oint_L \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2} + \oint_L zdz =$$

Из задачи Т1: $\oint_L \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2} = 2\pi$ (с помощью параметризации $x = R\cos\varphi$, $y = R\sin\varphi$)

$\oint_L zdz = 0$, тогда $\oint_L \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2} + zdz = 2\pi$

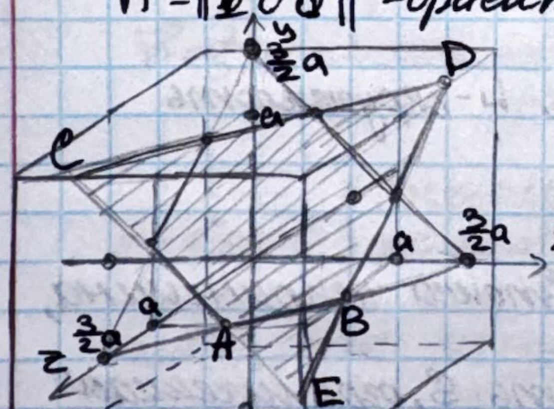
<u>Ответ</u>: 2π

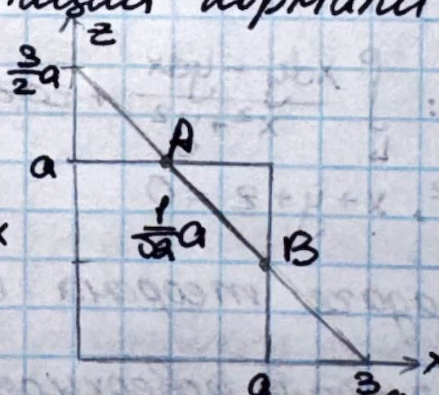
§11 064

Вычислить $\oint_L (y^2-z^2)dx + (z^2-x^2)dy + (x^2-y^2)dz$,

$L = \left\{ |x| \le a,\ |y| \le a,\ |z| \le a,\ x+y+z = \frac{3a}{2} \right\}$

$\vec n^0 = \| 1\ 0\ 0 \|^T$ – ориентация нормали





б) Сечение S - правильный шестиугольник

со стороной $\frac{1}{\sqrt{2}}a$, нормаль $\vec{n}_S^0 = \begin{Vmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{Vmatrix}$ - совпадает

с ориентацией L.

$$\vec{a}^0 = \begin{Vmatrix} y^2-z^2 \\ z^2-x^2 \\ x^2-y^2 \end{Vmatrix}$$

$$\operatorname{rot}\vec{b}^0 = \begin{vmatrix} \vec{i}^0 & \vec{j}^0 & \vec{k}^0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2-z^2 & z^2-x^2 & x^2-y^2 \end{vmatrix} = \begin{Vmatrix} -2y-2z \\ -2x-2z \\ -2x-2y \end{Vmatrix} = -2\begin{Vmatrix} y+z \\ x+z \\ x+y \end{Vmatrix}$$

По теореме Стокса:

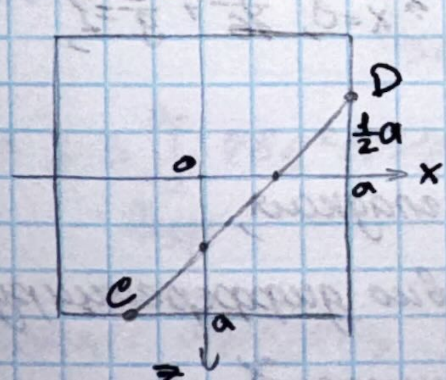
$$\int_L (y^2-z^2)dx + (z^2-x^2)dy + (x^2-y^2)dz = \int_L (\vec{b}^0, d\vec{r}^0) =$$

$$= \iint_S (\operatorname{rot}\vec{b}^0, \vec{n}^0)dS = -\frac{2}{\sqrt{3}}\iint_S (2x+2y+2z)dS =$$

$$= -\frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \frac{3a}{2} \cdot \iint_S dS = -\frac{6a}{\sqrt{3}}\mu S = -\frac{6a}{\sqrt{3}} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2 =$$

$=$

Сечение - правильный треугольник CDE



$CD = \frac{3a}{\sqrt{2}}$

нормаль $\vec{n}_S^0 = \begin{Vmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{Vmatrix}$ -

-совпадает с нормалью $\vec{n}^0$,

т.е. $\cos \widehat{\vec{n}_S^0, \vec{n}^0} > 0$

$\vec{b} = \begin{Vmatrix} y^2 - z^2 \\ z^2 - x^2 \\ x^2 - y^2 \end{Vmatrix}$, $\operatorname{rot}\vec{b} = -2\begin{Vmatrix} y+z \\ x+z \\ x+y \end{Vmatrix}$

По теореме Стокса:

$$\oint_L (\vec{b}, d\vec{r}) = \iint_S (\operatorname{rot}\vec{b}, \vec{n})\,dS = -\frac{4}{\sqrt{3}}\iint_S (x+y+z)\,dS =$$

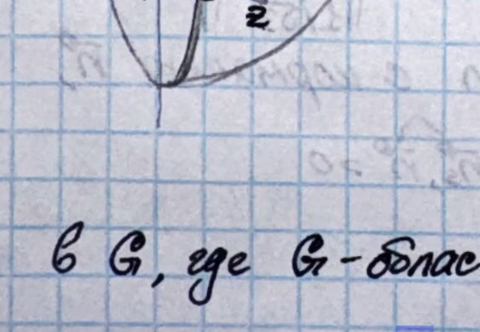
$$= -\frac{4}{\sqrt{3}}\cdot\frac{3a}{2}\cdot\iint_S dS = -\frac{6a}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{9a^2}{2} = \frac{-27a^3}{4}$$

Ответ: $-\frac{27a^3}{4}$

I3

Вычислить $\iint_S (\vec{a}, d\vec{S})$, где $\vec{a} = \begin{Vmatrix} 4x+3y \\ x+3y+z \\ 6x+2y+3z \end{Vmatrix}$

S - часть внешней стороны поверхности эллипсоида $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{9}=1$



Рассмотрим $\tilde{S} = S_1 \cup S$,

S_1 - эллипс $x=0$, $\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{9}=1$,

$\vec{n}_{S_1} \uparrow\downarrow \vec{e}_x$

$\tilde{S}$ - кусочно гладкая,

$\vec{a}$ - непрерывно дифференцируема в G, где G - область, ограниченная $\tilde{S}$

По теореме Гаусса-Остроградского:

$$\iint\limits_{\tilde{S}} (\vec{a}^0, d\vec{S}^0) = \iiint\limits_{G} \operatorname{div} \vec{a}^0 \, dxdydz = \iiint\limits_{G} (4+3+3)\, dxdydz =$$

$$= 10 \cdot \frac{1}{2} V_{эл} = 5 \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot 2 \cdot 4 \cdot 3 = 160\pi$$

С другой стороны:

$$\iint\limits_{\tilde{S}} (\vec{a}^0, d\vec{S}^0) = \iint\limits_{S} (\vec{a}^0, d\vec{S}^0) + \iint\limits_{S_1} (\vec{a}^0, d\vec{S}^0) = 160\pi$$

$$\iint\limits_{S_1} (\vec{a}^0, dS) = \left\{ \begin{array}{l} dx = 0 \\ x = 0 \end{array} \right\} = \iint\limits_{S_1} 3y\, dydz$$

$x = 0$
$y = 4\rho\cos\varphi$
$z = 3\rho\sin\varphi$,

$\rho \in [0,1]$, $\varphi \in [0;2\pi]$, $G_{\rho\varphi} = [0;1] \times [0;2\pi]$

$$3\iint y\, dydz = \pm 3 \iint\limits_{G_{\rho\varphi}} \begin{vmatrix} 4\rho\cos\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 4\cos\varphi & 3\sin\varphi \\ 0 & -4\rho\sin\varphi & 3\rho\cos\varphi \end{vmatrix} d\rho d\varphi =$$

$$= \pm 3 \iint\limits_{G_{\rho\varphi}} 48\rho^2\cos\varphi\, d\rho d\varphi = \pm 3 \cdot 48 \int_0^{2\pi} \cos\varphi\, d\varphi \int_0^1 \rho^2 d\rho = 0$$

Таким образом, $\iint\limits_{S} (\vec{a}^0, d\vec{S}^0) = 160\pi$

<u>Ответ</u>: 160π.

IV Элементы теории поля

§3 №44 (2)

Найти $\frac{\partial f}{\partial \vec{l}^0}$, $f = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$, $M\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\vec{l}^0$ - внешняя нормаль к $x^2+y^2=2x$ в M

$$\vec{n}^0 = \vec{r}_{O_1M} = \begin{Vmatrix} \frac{1}{2}-1 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{Vmatrix} = \vec{l}^0$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}^0} = (\vec{l}^0, \nabla) f = \left(-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial}{\partial y}\right)\operatorname{arctg}\frac{y}{x} =$$

$$= \frac{1}{2}\ \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} \cdot \left(-\ \frac{-y}{x^2} + \sqrt{3}\cdot\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{2(x^2+y^2)}\left(y + \sqrt{3}x\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}^0}(M) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 2\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{2}$

§3 №48 (3)

Найти $\max\left\{\frac{\partial f}{\partial \vec{l}^0}\right\}$: $f = \ln(xyz)$, $M(1; -2; -3)$

~~Максимальная~~ $\frac{\partial f}{\partial \vec{l}^0} = (\vec{l}^0, \nabla) f \equiv (\vec{l}^0, \nabla f) = (\vec{l}^0, \operatorname{grad} f) \leq$

$$\leq \left(\frac{\operatorname{grad} f}{|\operatorname{grad} f|}, \operatorname{grad} f\right) = |\operatorname{grad} f| = |\nabla f| \Rightarrow$$

$$\nabla f = \begin{Vmatrix} 1/x \\ 1/y \\ 1/z \end{Vmatrix},\quad \nabla f(M) = \begin{Vmatrix} 1 \\ -1/2 \\ -1/3 \end{Vmatrix} \Rightarrow |\nabla f| = \sqrt{1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9}} = \frac{7}{6}$$

Ответ: $\left(\frac{\partial f}{\partial \vec{l}^0}\right)_{max} = \frac{7}{6}$.

§12 №14

u и v – дифф. поля, $f(t;s)$ – дифф. функция

Док-ть: $\operatorname{grad} f(u;v) = \frac{\partial f}{\partial t}(u;v)\operatorname{grad}u + \frac{\partial f}{\partial s}(u;v)\operatorname{grad}v$

$$\operatorname{grad} f(u,v) = \nabla f(u;v) = \begin{Vmatrix} (\partial f/\partial t)(u;v)\cdot(\partial u/\partial x) + (\partial f/\partial s)(u;v)(\partial v/\partial x) \\ (\partial f/\partial t)(u;v)(\partial u/\partial y) + (\partial f/\partial s)(u;v)(\partial v/\partial y) \\ (\partial f/\partial t)(u;v)(\partial u/\partial z) + (\partial f/\partial s)(u;v)(\partial v/\partial z) \end{Vmatrix}$$

~~дифф.~~

замена переменных под знаком дифференциала

$$= \frac{\partial f}{\partial t}(u;v)\operatorname{grad}u + \frac{\partial f}{\partial s}(u;v)\operatorname{grad}v$$

§12 №19

$f(r)$ – дифф., $\vec r = x\vec i + y\vec j + z\vec k$, $|\vec r| = r$

Док-ть: $\nabla f(r) = f'(r)\cdot\frac{\vec r}{r}$

$$\nabla f(r) = \begin{Vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{Vmatrix} f(r) = \begin{Vmatrix} f'_r\cdot r'_x \\ f'_r\cdot r'_y \\ f'_r\cdot r'_z \end{Vmatrix} = f'(r)\begin{Vmatrix} (\sqrt{x^2+y^2+z^2})'_x \\ (\sqrt{x^2+y^2+z^2})'_y \\ (\sqrt{x^2+y^2+z^2})'_z \end{Vmatrix} =$$

$$= f'(r)\cdot\begin{Vmatrix} x/r \\ y/r \\ z/r \end{Vmatrix} = f'(r)\,\frac{\vec r}{r}$$

§12 №15 (2,3,4)

Найти $\operatorname{grad}u$ ($\vec r = x\vec i + y\vec j + z\vec k$, $r = |\vec r|$)

2) $u = \vec r^{\,2} = r^2$, $\operatorname{grad}u = \nabla u = u'(r)\cdot\frac{\vec r}{r} = 2\vec r$

3) $u = \frac{1}{r}$, $\operatorname{grad}u = \nabla u = u'(r)\cdot\frac{\vec r}{r} = -\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\vec r}{r} = -\frac{\vec r}{r^3}$

4) $u = \ln r$, $\operatorname{grad}u = \frac{1}{r}\cdot\frac{\vec r}{r} = \frac{\vec r}{r^2}$

Во всех пунктах используется §12 №19.

Ответ: 2) $2\vec{r}$; 3) $-\dfrac{\vec{r}}{r^3}$; 4) $\dfrac{\vec{r}}{r^2}$

§12 №37(2)

Проверить в координатной форме и с помощью ∇: $\operatorname{div}(u\vec{a}) = (\operatorname{grad} u, \vec{a}) + u \operatorname{div}\vec{a}$

u и $\vec{a}$ – дифф. скалярное и векторное поля

~~в~~ Координатная:

$$\operatorname{div}(u\vec{a}) = \frac{\partial u a_x}{\partial x} + \frac{\partial u a_y}{\partial z} + \frac{\partial u a_z}{\partial z} \cancel{= \left(a_x \frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial a_x}{\partial x}\right) + \ldots}$$

$$(\operatorname{grad} u, \vec{a}) = a_x \frac{\partial u}{\partial x} + a_y \frac{\partial u}{\partial y} + a_z \frac{\partial u}{\partial z}$$

$$u \operatorname{div}\vec{a} = u\left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}\right)$$

Равенство следует из $\dfrac{\partial u a_x}{\partial x} = u\dfrac{\partial a_x}{\partial x} + a_x \dfrac{\partial u}{\partial x}, \ldots$

$$\operatorname{div}(u\vec{a}) = (\nabla, u\vec{a}) = (\nabla u, \vec{a}) = (\operatorname{grad} u, \vec{a}) +$$
$$+ u(\nabla, \vec{a}) = (\operatorname{grad} u, \vec{a}) + u\operatorname{div}\vec{a}.$$

§12 №39

Выразить в координатной форме:

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} u) = (\nabla, \nabla u) = (\nabla, \nabla) u = \Delta u =$$
$$= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

Ответ: $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$.

§12 №40 (1)

Найти $\operatorname{div}(u \operatorname{grad} u) \cancel{= (\nabla, u\nabla u) = (\nabla u, \nabla u)}$

$= (\operatorname{grad} u)^2 + u \operatorname{div}(\operatorname{grad} u)$ (подставляем §12 №37)

§12 №41 (6,7,8)

$\vec r = x\vec i + y\vec j + z\vec k,\quad r = |\vec r|,\quad \vec c = const$

6) $\operatorname{div}(f(r)\vec c) = (\nabla, f(r)\vec c) = (\nabla f(r), \vec c)$

Из §12 №19: $\nabla f(r) = \frac{f'(r)}{r}\vec r$

$\operatorname{div}(f(r)\vec c) = \frac{f'(r)}{r}(\vec r, \vec c)$

7) $\operatorname{div}[\vec c \times \vec r] = (\nabla, \vec c, \vec r) = (\vec r, \nabla, \vec c) = (\vec r, \vec 0) = 0$

8) $\operatorname{div}[\vec r \times [\vec c \times \vec r]] = \operatorname{div}(\vec c r^2 - \vec r(\vec c, \vec r)) =$

$= \operatorname{div}(r^2\vec c) - \operatorname{div}((\vec c, \vec r)\vec r)$

Из пункта 6: $\operatorname{div}(r^2\vec c) = \frac{2r}{r}(\vec c, \vec r)$

Из задачи §12 №39(2): $\operatorname{div}((\vec c, \vec r)\vec r) =$

$= (\operatorname{grad}(\vec c, \vec r), \vec r) + (\vec c, \vec r)\operatorname{div}\vec r =$

$= \left(\left\| \begin{matrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{matrix} \right\| (c_x x + c_y y + c_z z), \vec r \right) + (\vec c, \vec r)\cdot 3 =$

$= 4(\vec c, \vec r)$

Тогда $\operatorname{div}[\vec r \times [\vec c \times \vec r]] = -2(\vec c, \vec r)$

Ответ: 6) $\frac{f'(r)}{r}(\vec r, \vec c)$; 7) 0; 8) $-2(\vec c, \vec r)$

§12 №49 (3,5,6)

Проверить в координатной форме и с использованием ∇:

3) $\mathrm{rot}(u\vec{a}) = u\,\mathrm{rot}\,\vec{a} + [\mathrm{grad}\,u, \vec{a}]$

В координатной:

$$\mathrm{rot}(u\vec{a}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ ua_x & ua_y & ua_z \end{vmatrix} = \cancel{a_z \frac{\partial u}{}}$$

$$= \left\| \begin{matrix} \frac{\partial a_z}{\partial y}\cdot u + a_z\cdot\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}u - a_y\frac{\partial u}{\partial z} \\ -\frac{\partial a_z}{\partial x}u - a_z\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial a_x}{\partial z}u + a_x\frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial a_y}{\partial x}u + a_y\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}u - a_x\frac{\partial u}{\partial y} \end{matrix} \right\| =$$

$$= u\left\| \begin{matrix} \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \\ -\frac{\partial a_z}{\partial x} + \frac{\partial a_x}{\partial z} \\ \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \end{matrix} \right\| + \left\| \begin{matrix} a_z\frac{\partial u}{\partial y} - a_y\frac{\partial u}{\partial z} \\ -a_z\frac{\partial u}{\partial x} + a_x\frac{\partial u}{\partial z} \\ a_y\frac{\partial u}{\partial x} - a_x\frac{\partial u}{\partial y} \end{matrix} \right\| =$$

$$= u\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = u\,\mathrm{rot}\,\vec{a} + [\mathrm{grad}\,u, \vec{a}]$$

С помощью ∇:

$$\mathrm{rot}(u\vec{a}) = [\nabla, u\vec{a}] = [\nabla_u, u\vec{a}] + [\nabla_{\vec{a}}, u\vec{a}] =$$

$$= [\nabla_u u, \vec{a}] + u[\nabla_{\vec{a}}, \vec{a}] = u\,\mathrm{rot}\,\vec{a} + [\mathrm{grad}\,u, \vec{a}]$$

5) $\mathrm{rot}[\vec{a}\times\vec{b}] = \vec{a}\,\mathrm{div}\,\vec{b} - \vec{b}\,\mathrm{div}\,\vec{a} + (\vec{b},\nabla)\vec{a} - (\vec{a},\nabla)\vec{b}$

В координатной:

$$\cancel{\mathrm{rot}[\vec{a}\times\vec{b}] = \left\| \frac{\partial}{\partial y}(a_x b_y - a_y b_x) - \frac{\partial}{\partial z}(\right.}$$

$$[\vec{a}\times\vec{b}] = \begin{Vmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ -a_x b_z + a_z b_y \\ a_x b_y - a_y b_x \end{Vmatrix}$$

$$\mathrm{rot}\,[\vec{a}\times\vec{b}] = \begin{Vmatrix} \frac{\partial}{\partial y}(a_x b_y - a_y b_x) - \frac{\partial}{\partial z}(-a_x b_z + a_z b_y) \\ -\frac{\partial}{\partial x}(a_x b_y - a_y b_x) + \frac{\partial}{\partial z}(a_y b_z - a_z b_y) \\ \frac{\partial}{\partial x}(-a_x b_z + a_z b_y) - \frac{\partial}{\partial y}(a_y b_z - a_z b_y) \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} \frac{\partial a_x}{\partial y} b_y + a_x \frac{\partial b_y}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial y} b_x - a_y \frac{\partial b_x}{\partial y} + \frac{\partial a_x}{\partial z} b_z + a_x \frac{\partial b_z}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial z} b_y - a_z \frac{\partial b_y}{\partial z} \\ -\frac{\partial a_x}{\partial x} b_y - a_x \frac{\partial b_y}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial x} b_x + a_y \frac{\partial b_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial z} b_z + a_y \frac{\partial b_z}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial z} b_y - a_z \frac{\partial b_y}{\partial z} \\ -\frac{\partial a_x}{\partial x} b_z - a_x \frac{\partial b_z}{\partial x} + \frac{\partial a_z}{\partial x} b_x + a_z \frac{\partial b_x}{\partial x} - \frac{\partial a_y}{\partial y} b_z - a_y \frac{\partial b_z}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial y} b_y + a_z \frac{\partial b_y}{\partial y} \end{Vmatrix}$$

$$\vec{a}\,\mathrm{div}\,\vec{b} - \vec{b}\,\mathrm{div}\,\vec{a} + (\vec{b},\nabla)\vec{a} - (\vec{a},\nabla)\vec{b}:$$

$$\vec{a}\,\mathrm{div}\,\vec{b} - (\vec{a},\nabla)\vec{b} = \begin{Vmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{Vmatrix} \left(\frac{\partial b_x}{\partial x} + \frac{\partial b_y}{\partial y} + \frac{\partial b_z}{\partial z}\right) -$$

$$- \begin{Vmatrix} a_x \frac{\partial b_x}{\partial x} + a_y \frac{\partial b_x}{\partial y} + a_z \frac{\partial b_x}{\partial z} \\ a_x \frac{\partial b_y}{\partial x} + a_y \frac{\partial b_y}{\partial y} + a_z \frac{\partial b_y}{\partial z} \\ a_x \frac{\partial b_z}{\partial x} + a_y \frac{\partial b_z}{\partial y} + a_z \frac{\partial b_z}{\partial z} \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} a_x \frac{\partial b_y}{\partial y} + a_x \frac{\partial b_z}{\partial z} - a_y \frac{\partial b_x}{\partial y} - a_z \frac{\partial b_x}{\partial z} \\ a_y \frac{\partial b_x}{\partial x} + a_y \frac{\partial b_z}{\partial z} - a_x \frac{\partial b_y}{\partial x} - a_z \frac{\partial b_y}{\partial z} \\ a_z \frac{\partial b_x}{\partial x} + a_y \frac{\partial b_y}{\partial y} - a_x \frac{\partial b_z}{\partial x} - a_y \frac{\partial b_z}{\partial y} \end{Vmatrix}$$

Для $\vec{b}\,\mathrm{div}\,\vec{a} - (\vec{b},\nabla)\vec{a}$: заменяется a_i на b_i

Видно, что координатные записи левой и правой части совпадают.

С помощью ∇:

$\operatorname{rot}[\vec a\times\vec b] = [\nabla,[\vec a,\vec b]] = [\nabla_a,[\vec a,\vec b]] + [\nabla_b,[\vec a,\vec b]] =$

$= \cancel{\ }(\nabla_b,\vec b)\vec a - \vec b(\nabla_a,\vec a) + \vec a(\nabla_b,\vec b) - \cancel{\ }(\nabla_b,\vec a)\vec b =$

$= \vec a(\nabla_b,\vec b) - \vec b(\nabla_a,\vec a) + (\vec b,\nabla_a)\vec a - (\vec a,\nabla_b)\vec b =$

$= \vec a\operatorname{div}\vec b - \vec b\operatorname{div}\vec a + (\vec b,\nabla)\vec a - (\vec a,\nabla)\vec b$

в) $\operatorname{div}[\vec a,\vec b] = (\vec b,\operatorname{rot}\vec a) - (\vec a,\operatorname{rot}\vec b)$

С помощью ∇ (в координатной записи нет смысла проверять, получается то же самое)(там это было:(((

$\operatorname{div}[\vec a,\vec b] = (\nabla,[\vec a,\vec b]) = (\nabla,\vec a,\vec b) =$

$= (\nabla_a,\vec a,\vec b) + (\nabla_b,\vec a,\vec b) = (\vec b,\nabla_a,\vec a) - (\vec a,\nabla_b,\vec b) =$

$= (\vec b,[\nabla_a,\vec a]) - (\vec a,[\nabla_b,\vec b]) = (\vec b,\operatorname{rot}\vec a) - (\vec a,\operatorname{rot}\vec b)$

§12 №54 (а)

Найти: $\operatorname{rot}[\vec r\times[\vec c\times\vec r]]$, $\vec r = \left\|\begin{matrix}x\\y\\z\end{matrix}\right\| \|\vec i\ \ \vec j\ \ \vec k\|$, $\vec c = const$

$\operatorname{rot}[\vec r\times[\vec c\times\vec r]] = [\nabla\times[\vec r\times[\vec c\times\vec r]]] =$

$= \vec r(\nabla,[\vec c\times\vec r]) - [\vec c\times\vec r](\nabla,\vec r) = -\vec r(\vec c,[\nabla\times\vec r]) -$

$- [\vec c\times\vec r]\operatorname{div}\vec r = 0 - 3[\vec c\times\vec r] = 3[\vec r\times\vec c]$

Ответ: $3[\vec r\times\vec c]$

§12 №62

Найти: $\operatorname{rot}(u(r)\vec{a}(r))$, $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$, $r=|\vec{r}|$

$$\operatorname{rot}(u\vec{a})=[\nabla,u\vec{a}]=[\nabla_u,u\vec{a}]+[\nabla_a,u\vec{a}]=$$

$$=[\nabla_u u,\vec{a}]+u[\nabla_a,\vec{a}]=[\operatorname{grad}u,\vec{a}]+u\operatorname{rot}\vec{a}$$

$$u=u(r)\Rightarrow \operatorname{grad}u=\frac{u'}{r}\vec{r}$$

$$\vec{a}=\vec{a}(r)\Rightarrow \operatorname{rot}\vec{a}=\left(\frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(-\frac{\partial a_z}{\partial x}+\frac{\partial a_x}{\partial z}\right)\vec{j}+$$

$$+\left(\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\vec{k}=\left(\frac{da_z}{dr}\cdot\frac{\partial r}{\partial y}-\frac{da_y}{dr}\cdot\frac{\partial r}{\partial z}\right)\vec{i}+$$

$$+\left(-\frac{da_z}{dr}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{da_x}{dr}\cdot\frac{\partial r}{\partial z}\right)\vec{j}+\left(\frac{da_y}{dr}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}-\frac{da_x}{dr}\cdot\frac{\partial r}{\partial y}\right)\vec{k}=$$

$$=\frac{1}{r}\left((a_z'y-a_y'z)\vec{i}+(-a_z'x+a_x'z)\vec{j}+(a_y'x-a_x'y)\vec{k}\right)=$$

$$=\frac{1}{r}\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\x&y&z\\a_x'&a_y'&a_z'\end{vmatrix}=\frac{1}{r}[\vec{r}\times\vec{a}']$$

Таким образом: $\operatorname{rot}(u\vec{a})=\frac{1}{r}u'[\vec{r},\vec{a}]+\frac{1}{r}u[\vec{r},\vec{a}']$

<u>Ответ</u>: $\frac{1}{r}\left(u'[\vec{r},\vec{a}]+u[\vec{r},\vec{a}']\right)$

§12 №68 (5)

Найти $\oiint\limits_S (\vec a, \vec n)\,dS$, $\vec a = f(r)\vec r$, S – внешняя сторона сферы $x^2+y^2+z^2=R^2$

$\vec n(\vec r) = \frac{\vec r}{R}$ – единичная нормаль к S в точке $\vec r = (x, y, z)^T$

$$\oiint\limits_S (\vec a, \vec n)\,dS = \oiint\limits_S f(r)\left(\vec r, \frac{\vec r}{R}\right) dS =$$

$|\vec r| = R$ в каждой точке S

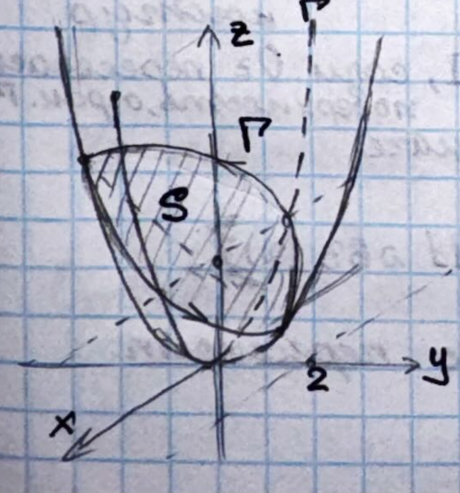
$$= f(R)\cdot R \oiint\limits_S dS = f(R)R\cdot 4\pi R^2 = 4\pi R^3 f(R)$$

§12 №94 (3)

$\vec a = \begin{Vmatrix} x^3 \\ y^3 \\ z^3 \end{Vmatrix}$, $\Gamma = \{z = x^2+y^2,\ z+y=2\}$

Г ориентировано по часовой стрелке при взгляде из начала координат

Найти: $\int\limits_\Gamma (\vec a, d\vec r)$



Ориентация контура показана на рисунке. Рассмотрим S – сечение $z \geq x^2+y^2$ плоскостью $y+z=2$, тогда $\Gamma = \partial S$

По правилу буравчика S нужно ориентировать в соответствии с направлением обхода Γ, тогда $\vec{n}$ должно иметь положительное направление вдоль Oz.

$$\vec{n} \uparrow\uparrow \vec{n}_{\text{плоскости}} = \begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{Vmatrix}$$

$$\operatorname{rot}\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ x^3 & y^3 & z^3 \end{vmatrix} = \vec{0}$$

По теореме Стокса:

$$\int_\Gamma (\vec{a}, d\vec{r}) = \iint_S (\operatorname{rot}\vec{a}, \vec{n}) dS = 0$$

<u>Ответ</u>: 0.

§12 №104 (1,2)

$$\vec{H} = 2I \frac{-y\vec{i} + x\vec{j}}{x^2+y^2}$$

Рассмотрим $\oint_\Gamma (\vec{H}, d\vec{r})$; Γ - некоторый замкнутый контур

$$\oint_\Gamma \vec{H}, d\vec{r} = 2I \oint_\Gamma \frac{x dy - y dx}{x^2+y^2} = \begin{cases} 4\pi I, \text{ если } Oz \text{ пересекает поверхность, огран. } \Gamma \\ 0, \text{ иначе} \end{cases}$$

(такой интеграл был в Т1 и §11 №63 (2)), если ~~точка~~ прямая $x=y=0$ не пересекает никакую поверхность, ограниченную Γ, то применима формула Стокса и интеграл равен 0, иначе рассматриваем $\tilde{\Gamma} = \Gamma \setminus \Gamma_1$, где $\Gamma_1 = \{x^2+y^2=\rho^2,\ z=0\}$ ~~для~~,

$$\int_{\tilde{\Gamma}} (\vec{H}, d\vec{r}) = \int_{\Gamma} (\vec{H}, d\vec{r}) \pm \int_{\Gamma_1} (\vec{H}, d\vec{r}) = 0$$

Для подсчёта $\int_{\Gamma_1} (\vec{H}, d\vec{r})$ параметризуем

Γ_1: $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, получаем $\int_{\Gamma} (\vec{H}, d\vec{r}) = 2\pi$

1) Является ли поле $\vec{H}$ потенциальным ~~если~~ в полупространстве $x>0$?

является, т.к. Oz не может прокалывать контур, лежащий в этом пространстве и $\forall$ замкнутого Γ: $\oint_{\Gamma} (\vec{H}, d\vec{r}) = 0$

2) Является ли поле $\vec{H}$ потенциальным в $\mathbb{R}^3 \setminus \{x=y=0\}$?

Не является, т.к. $\exists \Gamma = \{x^2+y^2=1,\ z=0\}$: $\oint_{\Gamma} (\vec{H}, d\vec{r}) = 4\delta]$

Ответ: 1) является; 2) не является.

§12 №112 (1)

Является ли поле $\vec{a} = \frac{\vec{r}}{r^3}$ потенциальным, соленоидальным? (соленоидальность для областей $r>0$ и $z>0$)

Потенциальность:

$$\operatorname{rot}\left(\frac{1}{r^3}\vec{r}\right) = \frac{1}{r^3}\operatorname{rot}\vec{r} + \left[\operatorname{grad}\frac{1}{r^3}, \vec{r}\right]$$

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{rot}\vec{r} = \vec{0} \\ &\operatorname{grad}\frac{1}{r^3} = -\frac{3}{r^4}\cdot\frac{\vec{r}}{r} \end{aligned}\right| \Rightarrow \operatorname{rot}\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right) = \operatorname{rot}\vec{a} = 0 \text{ –}$$

– в области $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0;0;0)\} \Rightarrow \vec{a}$ потенциально в $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0;0;0)\}$ (т.к. является поверхностно-односвязной)

Соленоидальность:

$\mathbb{R}^3 \setminus \{(0;0;0)\}$ не является объёмно односвязной областью: $\{\ \exists S_1 = \{x^2+y^2+z^2=1\}$, которая является границей $G_1 = \{x^2+y^2+z^2<1\}$, при этом $(0;0;0) \in G_1$

Докажем, что $\vec{a}$ не соленоидально в $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0;0;0)\} = \{r>0\}$.

Рассмотрим $S = \{x^2+y^2+z^2=1\}$

$$\oint\!\!\!\oint_S (\vec{a}, d\vec{S}) = \iint_S \frac{1}{r^3}\cdot(\vec{r},\vec{r})\,dS = \frac{1}{r}\oint\!\!\!\oint_S dS = 4\pi r^2\cdot\frac{1}{r} = 4\pi \neq 0 \Rightarrow$$

=> $\vec{a}$ - не соленоидально по определению.

$G=\{x>0\}$ - объёмно односвязная область

$$\operatorname{div}\vec{a} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r^3}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{r^3}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{r^3}\right) =$$

$$= \frac{r^3 - x\cdot 3r^2\cdot\frac{x}{r}}{r^6} + \frac{r^3 - y\cdot 3r^2\cdot\frac{y}{r}}{r^6} + \frac{r^3 - z\cdot 3r^2\frac{z}{r}}{r^6} =$$

$$= \frac{3r^2 - 3(x^2+y^2+z^2)}{r^5} = 0$$ => $\vec{a}$ соленоидально в $\{x>0\}$

Ответ: $\vec{a}$ потенциально в $\mathbb{R}^3\setminus\{(0;0;0)\}$,

$\vec{a}$ не соленоидально в $\mathbb{R}^3\setminus\{(0;0;0)\} = \{r>0\}$,

$\vec{a}$ соленоидально в $\{x>0\}$

§ 11 0115

Найти дифференцируемую $\Phi(r)$: $\vec{a} = \Phi(r)\vec{r}$ – соленоидальное поле. $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

$\operatorname{div}\vec{a} = 0$ - необходимое условие соленоидальности.

$$\operatorname{div}\vec{a} = \operatorname{div}(\Phi(r)\cdot\vec{r}) = (\operatorname{grad}\Phi, \vec{r}) + \Phi\operatorname{div}\vec{r} =$$

$$= \frac{1}{r}\Phi' r^2 + 3\Phi = \Phi' r + 3\Phi$$

$\operatorname{div}\vec{a} = 0$ => $\Phi' r + 3\Phi = 0$ => $\frac{d\Phi}{\Phi} = -3\frac{dr}{r}$ => $\ln|\Phi| = -3\ln|r| + c$ =>

=> $\Phi(r) = \frac{c}{r^3}$ - только поле сил Кулона и гравитационного притяжения может быть ~~потенциально~~ соленоидально.

При этом $\vec{a}$ не является соленоидальным в G если $(0;0;0) \in G$ (см. §12 №112(1)), но является соленоидальным в любой объёмно односвязной области, не содержащей начало координат.

Ответ: $\Phi(r) = \frac{c}{r^3}$

§12 №125

Доказать гармоничность $\vec{a} = \frac{\vec{r}}{r^2}$, $\vec{r} = \left\| \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \right\|$, $r = |\vec{r}|$

$\text{rot}\,\vec{a} = \cancel{[\ldots]} = \frac{1}{r^2}\text{rot}\,\vec{r} + [\text{grad}\,\frac{1}{r^2}, \vec{r}] = \vec{0}$ ~~⇒~~

~~G = R² \ {0;0} поверхностно односвязна~~

~~поверх~~

Рассмотрим $u(r) = \ln r$

$\text{grad}\,u = \frac{1}{r} \left\| \frac{\partial r}{\partial x} \;\; \frac{\partial r}{\partial y} \;\; \frac{\partial r}{\partial z} \right\| = \frac{\vec{r}}{r^2} = \vec{a} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ в любой $G \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ поверхностно-односвязная:

$\vec{a}$ - потенциально

~~rot~~ $\text{div}\,\vec{a} = (\text{grad}\,\frac{1}{r^2}, \vec{r}) + \frac{1}{r^2}\text{div}\,\vec{r} = -\frac{2}{r^3} \cdot \frac{(\vec{r}, \vec{r})}{r} + \frac{2}{r^2} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ в любой $G \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ объёмно-односвязная:

$\vec{a}$ - соленоидально.

При этом $\vec{a}$ не является соленоидальным, для $G = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$

Рассмотрим $S = \{x^2+y^2=1\}$

поток $\vec{a}$ через S: $\oint\limits_S (\vec{a}, \vec{n}) dS = \oint\limits_S \frac{(\vec{r}, \vec{r})}{r^2} dS = \oint\limits_S dS = 2\pi \neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \vec{a}$ не соленоидально.

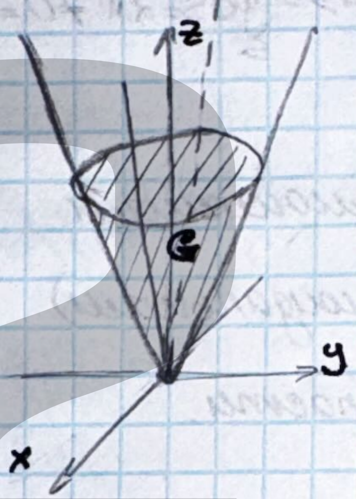
Таким образом $\vec{a}$ является гармоничным (то есть потенциальным и соленоидальным) в любой объёмно односвязной области.

(*) В двумерном случае поверхностная односвязность означает обычную односвязность, а объёмная, что $\forall$ контура $\Gamma \in S$: S'-область ограниченная Γ: $S' \subset S$ (то есть делаем так, чтобы в середине области не было точки $(0;0)$).

§11 №46 (2)

Вычислить $\iint\limits_S x^2dydz + y^2dzdx + z^2dxdy$

S - внешняя сторона $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \le \frac{z^2}{c^2}$ $\cancel{\le}$; $0 \le z \le c$



По теореме Гаусса-Остроградского:

$$\iint\limits_S (\vec{a}, d\vec{S}) = \iiint\limits_G \operatorname{div}\vec{a}\, dxdydz,$$

здесь $\vec{a} = \begin{Vmatrix} x^2 \\ y^2 \\ z^2 \end{Vmatrix}$

Замена координат:

$x = a\rho\cos\varphi$

$y = b\rho\sin\varphi$ $\qquad \rho > 0,\ \varphi \in [0;2\pi],\ t \in \mathbb{R}$

$z = ct$

$\tilde{G} = \{\rho^2 \le t^2,\ t \in [0;1]\} = \cancel{[0;2\pi]\times[0;1]}$

$= \{0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le t \le 1,\ 0 \le \rho \le t\}$

$\operatorname{div}\vec{a} = 2x + 2y + 2z = 2(a\rho\cos\varphi + b\rho\sin\varphi + ct)$

$$\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\varphi,t)}\right| = \begin{vmatrix} a\cos\varphi & b\sin\varphi & 0 \\ -a\rho\sin\varphi & b\rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = abc\cdot\rho$$

$$\iint\limits_S (\vec{a}, d\vec{S}) = 2\iiint\limits_{\widetilde{G}} (a\rho\cos\varphi + b\rho\sin\varphi + ct)abc\rho \cdot d\rho\, d\varphi\, dt =$$

$$= 2abc \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 dt \int_0^t (a\rho^2\cos\varphi + b\rho^2\sin\varphi + ct\rho)\,d\rho =$$

$$= 2abc \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \left(\frac{1}{3}a\cos\varphi + \frac{1}{3}b\sin\varphi + \frac{1}{2}c\right)t^3\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}abc \int_0^{2\pi} \left(\underbrace{\frac{1}{3}a\cos\varphi}_{0} + \underbrace{\frac{1}{3}b\sin\varphi}_{0} + \frac{1}{2}c\right)d\varphi = \frac{1}{4}abc^2\cdot 2\pi =$$

$$= \frac{\pi abc^2}{2}$$

Ответ: $\dfrac{\pi abc^2}{2}$

~~21~~ §11 №52 (3)

Вычислить $\iint\limits_S x^2dydz + y^2dzdx + z^2dxdy$, S – нижняя сторона $x^2+y^2=z^2$, $0 \le z \le H$

В §11 №46 (2): заменяем пределы по t на 0 и $\frac{H}{c}$, подставляем $a=b=c=1$:

$$\iint\limits_{S^*} x^2dydz + y^2dzdx + z^2dxdy = 2abc\cdot\frac{2\pi c}{2}\cdot\left(\frac{H}{c}\right)^4 = \frac{\pi H^4}{2}.$$

S^* = ~~дополненная~~ $S \cup S_1$, где $S_1 = \{x^2+y^2 \le H^2,\ z=H\}$ – ~~окружность~~, круг, дополняющий S до поверхности конуса $\{x^2+y^2 \le z^2,\ 0 \le z \le H\}$

$$\iint\limits_S (\vec{a}, d\vec{S}) + \iint\limits_{S_1} (\vec{a}, d\vec{S}) = \frac{\pi H^4}{2}$$

$$\iint\limits_{S_1} (\vec{a}, d\vec{S}) = \iint\limits_{S_1} z^2 dxdy = H^2 \iint\limits_{S_1} dxdy = H^2 \cdot \pi H^2 = \pi H^4$$

Отсюда $\iint\limits_S x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy = +\frac{\pi H^4}{2} - \pi H^4 = -\frac{\pi H^4}{2}$

<u>Ответ:</u> $-\frac{\pi H^4}{2}$.