

№14.12(1,2) 1) Нет, т.к. не может быть элементов из одной строки/столбца (следует из формулы разложения определителя по  $i$ -ой строке).

2) да, т.к. элементы из разных строк и столбцов (также следует из формулы разложения определителя по  $i$ -ой строке)

2)  $a_{12} a_{21} a_{34} a_{45} a_{53} : N(2, 1, 4, 5, 3) = 3 \Rightarrow \text{минус}$   
 $a_{15} a_{23} a_{34} a_{41} a_{52} : N(5, 3, 4, 1, 2) = 4 + 2 + 2 = 8 \Rightarrow \text{минус}$

№14.21 (2, 9)

$$2) \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{1+3} (-1) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1$$

$$9) \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{1+4} (-1) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

№14.22 (2)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & 9 & 16 & 25 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 9 & 16 & 25 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 9 & 16 & 25 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 9 & 16 & 25 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 4 & 16 & 25 \end{vmatrix} -$$

$$- \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 9 & 16 & 25 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 4 & 16 & 25 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 9 & 16 & 25 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 4 & 16 & 25 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \\ 1 & 5 & 25 \end{vmatrix} -$$

$$- 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 16 \\ 1 & 5 & 25 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -7 \\ 1 & 4 & 16 \\ 1 & 5 & 25 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 0 & -2 & -12 \\ 1 & 4 & 16 \\ 1 & 5 & 25 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 16 \\ 1 & 25 \end{vmatrix} - 7 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} -$$

$$- 2 \left( 2 \begin{vmatrix} 1 & 16 \\ 1 & 25 \end{vmatrix} - 12 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \right) = 9 - 7 - 2(18 - 12) = -10$$

$$\sqrt{14.23(6, 9, 11, 18)}$$

$$6) \begin{vmatrix} 0 & \lambda_1 & & \\ & \ddots & & \\ \lambda_n & & 0 & \end{vmatrix} = (-1)^{N(n, n-1, \dots, 1)} a_{1n} a_{2n-1} \dots a_{n1} \ominus$$

$$N(n, n-1, \dots, 1) = n-1 + n-2 + \dots + 1 = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$\ominus (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \lambda_1 \dots \lambda_n$$

$$9) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \\ 1 & 0 & 0 & & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & & 0 & 1 \end{vmatrix} \ominus \text{добавим к первой строке} \\ \text{каждую из строк, умнож. на } -1:$$

$$\ominus \begin{vmatrix} -n+1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \\ 1 & 0 & 0 & & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-n+1) |E| = -n+1$$

$$11) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2(n-1)+1 & 2 & \dots & 2 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= (2n-1) \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = (2n-1) (-1)^{n-1} |E| = (2n-1) (-1)^{n-1}$$

$$(18) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

⊕ Вычтем из  $(n+1-i)$  строки  $i$ -ую строку  $i$ -го столбца  $i=1, \dots, k$

$$\begin{pmatrix} = \end{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-3) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} \dots =$$

$$= (-3)^k$$

$$\sqrt{14.24(3,5,7)}$$

$$3) \Delta_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & n+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1-n & n \end{vmatrix} = n \Delta_{n-1} - (1-n).$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & n+1 \end{vmatrix} = n \Delta_{n-1} + (n-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n-2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix} = n \Delta_{n-1} + (n-1).$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & \dots & 0 \\ 0 & & & n-2 \end{vmatrix} = n\Delta_{n-1} + (n-1)!$$

Докажем по индукции, что  $\Delta_n = n! \left(2 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right)$   $n \geq 2$

База:  $\Delta_2 = 2\left(2 + \frac{1}{2}\right) = 5$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 1 = 5 \quad - \text{Верно}$$

Шаг: 3 Верно для  $n-1$

$$\begin{aligned} \Delta_n &= n\Delta_{n-1} + (n-1)! = n(n-1)! \left(2 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-1}\right) = \\ &= (n-1)! \left(n\left(2 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-1}\right) + 1\right) = n! \left(2 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}\right) \blacksquare \end{aligned}$$

$$5) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix} = -(\Delta_{n-2} -$$

$$- \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & & & \end{vmatrix} = -\Delta_{n-2} + 0 = -\Delta_{n-2}$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \forall \text{ чет } n \quad \Delta_n = 0$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \Rightarrow \forall \text{ чет } n \quad \Delta_n = (-1)^{n/2}$$

$$7) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \dots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & \dots & \lambda_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \lambda_3^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} = P(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

$\Rightarrow$  Вычтем из  $i$ -ой

строки  $i-1$ -ую, умноженную на  $\lambda_1$ ,  $\forall i: 2 \leq i \leq n$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 - \lambda_1 & \lambda_2 - \lambda_1 & \lambda_3 - \lambda_1 & \dots & \lambda_n - \lambda_1 \\ \lambda_1^2 - \lambda_1^2 & \lambda_2(\lambda_2 - \lambda_1) & \lambda_3(\lambda_3 - \lambda_1) & \dots & \lambda_n(\lambda_n - \lambda_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{n-1} - \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-2}(\lambda_2 - \lambda_1) & \lambda_3^{n-2}(\lambda_3 - \lambda_1) & \dots & \lambda_n^{n-2}(\lambda_n - \lambda_1) \end{vmatrix} =$$

$$= (\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1) \dots (\lambda_n - \lambda_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & \lambda_2 & \lambda_3 & \dots & \lambda_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \lambda_2^{n-2} & \lambda_3^{n-2} & \dots & \lambda_n^{n-2} \end{vmatrix} =$$

$$= (\lambda_2 - \lambda_1) \dots (\lambda_n - \lambda_1) P(\lambda_2, \dots, \lambda_n) = \prod_{1 \leq k < i \leq n} (\lambda_i - \lambda_k)$$

Донатик