§14

№2(4)

$\exists n_0 : \forall n \hookrightarrow a_n = \frac{\cos(\pi/4n)}{\sqrt[5]{5n^5-1}} < \frac{1}{n}$ – р-ся $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ – расх-ся (по пр. срав.)

№5(6)

$a_n = \ln\frac{n^2+4}{n^2+3} = \ln\left(1+\frac{1}{n^2+3}\right) \overset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$ - сх-ся $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ - сх-ся

№8(3)

$\alpha = ? : \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сх-ся, $a_n = \left(n\,\mathrm{sh}(1/n) - \mathrm{ch}(1/n)\right)^{\alpha} \overset{n\to\infty}{\sim}$

$\sim \left(n\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{6}\frac{1}{n^3}\right) - \left(1 + \frac{1}{2}\frac{1}{n^2}\right)\right)^{\alpha} = \left(-\frac{1}{3n^2}\right)^{\alpha} \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ - сх-ся при $\alpha > 1/2$

№18(8)

$a_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2}; \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2n+2)!\,(n!)^2}{((n+1)!)^2\,(2n)!} = \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2} = \frac{4n^2+6n+2}{n^2+2n+1} \xrightarrow{n\to\infty} 4 > 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ по пр. Даламбера расх-ся

№19(6)

$a_n = \frac{(2n+1)!!}{3^n n!}; \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2n+3)!!\,3^n n!}{3^{n+1}(n+1)!\,(2n+1)!!} = \frac{2n+3}{3(n+1)} \xrightarrow{n\to\infty} 2/3 \Rightarrow$ по пр.

Даламбера сх-ся

№21(10,13)

10) $a_n = \left(n\sin\frac{1}{n}\right)^{n^3}; \quad \sqrt[n]{a_n} = \left(n\sin\frac{1}{n}\right)^{n^2} \overset{n\to\infty}{\sim} \left(1 - \frac{1}{6n^2}\right)^{n^2} \xrightarrow{n\to\infty} e^{-1/6} < 1 \Rightarrow$ по пр.

Коши сх-ся

13) $a_n = \frac{1}{3^n}\left(\frac{n+2}{n}\right)^{n^2}; \quad \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{3}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{n} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{e^2}{3} > 1 \Rightarrow$ по пр. Коши р-ся

№25(9)

$a_n = \frac{1}{n^{\alpha}\ln^{\beta} n}$

$\underline{\alpha < 0:}$ $a_n = \frac{n^{-\alpha}}{\ln^{\beta} n} \xrightarrow{n\to\infty} \infty \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ р-ся $\Rightarrow \alpha \geq 0$

$\underline{\alpha = 0:}$ $a_n = \frac{1}{\ln^{\beta} n} > \frac{1}{n}$ - р-ся $\overset{\text{пр. сравнения}}{\Rightarrow} \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ р-ся $\Rightarrow \alpha > 0$

$\alpha > 0$:

- $\alpha > 1$: $\alpha = 1+2\varepsilon,\ \varepsilon > 0 \to a_n = \frac{1}{n^{1+\varepsilon}(n^{\varepsilon}\ln^{\beta} n)}$. $n^{\varepsilon}\ln^{\beta} n \xrightarrow{n\to\infty} \infty \Rightarrow$

$\exists n_0 : \forall n \geq n_0\ n^{\varepsilon}\ln\beta > 1 \Rightarrow a_n < \frac{1}{n^{1+\varepsilon}}$ - сх-ся $\xRightarrow{\text{пр. сравнения}} \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ - сх-ся

- $\alpha = 1$: $a_n = \frac{1}{n\ln^{\beta} n}$; $f(x) = \frac{1}{x\ln^{\beta} x}$, $a_n = f(n)$

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^{\beta} x} = \left[\begin{array}{l} \beta = 1:\ \ln(\ln x)\Big|_2^{+\infty} = +\infty \\ \beta \neq 1:\ \ln^{-\beta+1} x/(-\beta+1)\Big|_2^{+\infty} < \infty \Leftrightarrow \underline{\beta > 1} \end{array}\right.$$

- $\alpha < 1$: $\alpha = 1-2\varepsilon,\ \varepsilon > 0 \to a_n = \frac{1}{n^{1-\varepsilon}(n^{-\varepsilon}\ln^{\beta} n)}$. $n^{-\varepsilon}\ln^{\beta} n \xrightarrow{n\to\infty} 0 \Rightarrow$

$\exists n_0 : \forall n \geq n_0\ n^{-\varepsilon}\ln\beta < 1 \Rightarrow a_n > \frac{1}{n^{1-\varepsilon}}$ - р-ся

Ответ: $\alpha > 1$ или $\alpha = 1$ и $\beta > 1$.

§15

№3(2)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\ln n}{\sqrt{n}} \qquad a_n = \frac{\ln n}{\sqrt{n}}.\ \lim_{n\to\infty} a_n = 0.\ f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}.\ f'(x) =$$

$$= \frac{\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x}}\ln x}{x} = \frac{2-\ln x}{2x\sqrt{x}}$$ $\to$ при $x > e^2$ $f'(x) < 0$, т.е. $\exists n_0 : \forall n \geq n_0$

$a_{n+1} \geq a_n \geq 0 \Rightarrow$ по пр. Дирихле сх-ся.

№4(4)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos^2 2n}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1+2\cos 4n}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + 2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos 4n}{\sqrt{n}}$$

$$\sum_{n=1}^{N} (-1)^n \cos 4n = \frac{1}{\cos 2}\sum_{n=1}^{N} (-1)^n \cos 4n \cos 2 = \frac{1}{2\cos 2}\sum_{n=1}^{N} (-1)^n (\cos(4n-2) + \cos(4n+2)) = \frac{1}{2\cos 2}\left(-\cos 2 + (-1)^N \cos(4N+2)\right)$$

Тогда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos 4n}{\sqrt{n}}$ сходится по пр. Дирихле для $(-1)^n \cos 4n$ и $\frac{1}{\sqrt{n}}$. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ - сх-ся по Лейбницу $\Rightarrow$ исходный ряд сходится.

№8(3,4)

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{\sqrt{n}+\sin n}$; $a_n=\frac{\sin n}{\sqrt{n}}\cdot\frac{1}{1+\frac{\sin n}{\sqrt{n}}}=\frac{\sin n}{\sqrt{n}}\left(1-\frac{\sin n}{\sqrt{n}}+R(n)\right)$,

$|R(n)|\leq c/n \quad \forall n\geq n_0$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Bigg(\underbrace{\frac{\sin n}{\sqrt{n}}}_{\substack{\text{сх-ся}\\ \text{по Дирихле}\\ \alpha_n=\sin n\\ \beta_n=\sqrt{n}}}-\underbrace{\frac{\sin^2 n}{n}}+\underbrace{\frac{\sin n}{\sqrt{n}}R(n)}_{\text{абс. сх-ся}}\Bigg)$$

абс. сх-ся: $\left|\frac{\sin n}{\sqrt{n}}R(n)\right|\leq\frac{C}{n^{3/2}}$ $\quad\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{C}{n^{3/2}}$ – сх-ся

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{n}=\frac{1}{2}\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}}_{=+\infty}-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\cos 2n$$

$\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{\sqrt{n}+\sin n}$ расх-ся

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{\sin n}{\sqrt[3]{n}}\right)$; $a_n=\frac{\sin n}{\sqrt[3]{n}}-\frac{\sin^3 n}{6n}+R(n)$, $|R(n)|\leq\frac{C}{n^{5/3}}$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Bigg(\underbrace{\frac{\sin n}{\sqrt[3]{n}}}_{\substack{\text{сх-ся}\\ \text{по Дирихле}\\ \alpha_n=\sin n\\ \beta_n=1/\sqrt[3]{n}}}-\underbrace{\frac{\sin^3 n}{6n}}+\underbrace{R(n)}_{\text{абс. сх-ся}}\Bigg)$$

абс. сх-ся: $|R(n)|\leq\frac{C}{n^{5/3}}$ $\quad\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{C}{n^{5/3}}$ – сх-ся + пр. срав.

$$\frac{1}{6n}\cdot\frac{\sin 3n+3\sin n}{4}=\frac{1}{24}\underbrace{\frac{\sin 3n}{n}}_{\substack{\text{сх-ся}\\ \text{по Дирихле}\\ \alpha_n=\sin 3n\\ \beta_n=1/n}}+\frac{1}{24}\underbrace{\frac{\sin n}{n}}_{\substack{\text{сх-ся}\\ \text{по Дирихле}\\ \alpha_n=\sin n\\ \beta_n=1/n}}$$

$\Downarrow$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{\sin n}{\sqrt[3]{n}}\right)$ сх-ся

№9(2)

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$; $a_n=\sin\left(\pi n\sqrt{1+1/n^2}\right)=\sin\left(\pi n\left(1+\frac{1}{2n^2}+R(n)\right)\right)$, где

$|R(n)|\leq\frac{c}{n^4}$. $a_n=\sin\left(\pi n+\frac{\pi}{2n}+\pi nR(n)\right)=(-1)^n\sin\left(\frac{\pi}{2n}+\tilde{R}(n)\right)$, $|\tilde{R}(n)|\leq\frac{c}{n^3}$

$$\sim\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{\pi}{2n}+\tilde{R}(n)\right)=\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\pi}{2n}}_{\substack{\text{сх-ся по}\\ \text{Лейбницу}}}+\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\tilde{R}(n)}_{\text{сх-ся абс.}}$$

Т.1.

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathbb{R}$ $\quad\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ – сх-ся а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ - сх-ся? Нет, контрпример: $a_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^3$ - сх-ся? Нет, контрпример: $a_n = \dfrac{\cos(\frac{2}{3}\pi n)}{\sqrt[3]{n}}$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ - сх-ся по Дирихле $\alpha_n = \cos(\frac{2}{3}\pi n)$ $\beta_n = 1/\sqrt[3]{n}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^3 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^3(\frac{2}{3}\pi n)}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi n + 3\cos\frac{2}{3}\pi n}{4n} = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n}}_{\text{расх-ся}} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3\cos\frac{2}{3}\pi n}{4n}}_{\text{сх-ся по Дирихле}}$$

Т.2.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ - сх-я, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ - сх-я абс. $\overset{?}{\Rightarrow}$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сх-ся

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ - сх-ся $\Rightarrow \exists C, n_0 : \forall n \geq n_0 \hookrightarrow a_n \leq C \Rightarrow \forall n \geq n_0$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n b_n| \leq$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n||b_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} c|b_n| = c\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|}_{\text{сх-ся по усл.}} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \text{ сх-ся абс.}$$

§17

5(3) $f_n(x)=\dfrac{\ln nx}{nx^2}$, $E=[1;+\infty)$

$x_0\ge 1$: $f_n(x_0)=\dfrac{\ln nx_0}{nx_0^2}\xrightarrow{n\to\infty}0$, т.е. $f_n\xrightarrow[E]{}0$ $\qquad \dfrac{\ln x}{x}<1\ \ \forall x\ge 1$

$$|f_n(x)-f(x)|=f_n(x)=\frac{\ln nx}{nx^2}\le\frac{\ln nx}{nx}=\frac{\ln n}{nx}+\frac{\ln x}{nx}\le\frac{\ln n}{n}+\frac{1}{n}<\varepsilon\ \ \forall n\ge N(\varepsilon)$$

$\Rightarrow f_n\underset{E}{\rightrightarrows}0$

8(2) $f_n(x)=\dfrac{nx^2}{1+2n+x}$, $E_1=[0;1]$, $E_2=[1;+\infty)$

$x_0\in E_1,\ x_0\in E_2$: $f_n(x_0)=\dfrac{x_0^2}{1/n+2+x_0/n}\xrightarrow{n\to\infty}\frac12 x^2$, т.е. $f_n\xrightarrow[E_i]{}\frac12x^2$

$$|f_n(x)-f(x)|=\left|\frac{nx^2}{1+2n+x}-\frac12x^2\right|=x^2\left|\frac{2n-(1+2n+x)}{2(1+2n+x)}\right|=\frac{x^2(1+x)}{2(1+2n+x)}\quad(*)$$

На E_1: $(*)\le\dfrac{1+x}{2(1+2n+x)}<\dfrac{1+1}{2(1+2n+0)}=\dfrac{1}{1+2n}<\varepsilon\Rightarrow f_n\underset{E_1}{\rightrightarrows}\frac12x^2$

На E_2: $\forall n\ \exists x_n=2n-1$: $|f_n(x_n)-f(x_n)|=\dfrac{(2n-1)^2\cdot 2n}{8n}\ge\dfrac18=\varepsilon_0\Rightarrow$

$\Rightarrow f_n\xrightarrow[E_2]{}\frac12x^2$ неравномерно

9(3) $f_n(x)=e^{-(x-n)^2}$, $E_1=[-2;2]$, $E_2=\mathbb{R}$

$x_0\in E_1,\ x_0\in E_2$: $f_n(x_0)=e^{-(x_0-n)^2}\xrightarrow{n\to\infty}0$, т.е. $f_n\xrightarrow[E_i]{}0$

$$|f_n(x)-f(x)|=f_n(x)=e^{-(x-n)^2}=e^{-x^2+2xn-n^2}\underset{\text{на } E_1}{\le}e^{2xn-n^2}\le e^{4n-n^2}<\varepsilon\Rightarrow f_n\underset{E_1}{\rightrightarrows}0$$

на E_2: $\forall n\ \exists x_n=n$: $f_n(x_n)=e^{-(n-n)^2}=1\Rightarrow f_n\xrightarrow[E_2]{}0$ неравномерно

10(1) $f_n(x)=n\,\mathrm{arctg}\dfrac{1}{nx}$, $E_1=(0;2)$, $E_2=(2;+\infty)$

$x_0\in E_1,\ x_0\in E_2$: $f_n(x_0)=n\,\mathrm{arctg}\dfrac{1}{nx_0}\overset{n\to\infty}{\sim}n\cdot\dfrac{1}{nx_0}=\dfrac{1}{x_0}$, т.е. $f_n\xrightarrow[E_i]{}\dfrac1x$

$|f_n(x)-f(x)|=\left|n\,\mathrm{arctg}\dfrac{1}{nx}-\dfrac1x\right|\circeq$

$\mathrm{arctg}\,t=t+R(t)$ при $|t|<\delta\to 0$, где $|R(t)|\le c\cdot t^3$, $c=\mathrm{const}$

$0<t:=\dfrac{1}{nx}\overset{\text{на } E_2}{<}\dfrac{1}{2n}=\delta\ \ \forall n\ge N\Rightarrow\mathrm{arctg}\dfrac{1}{nx}=\dfrac{1}{nx}+R_n(x)$, $|R_n(x)|\le c\cdot\dfrac{1}{(nx)^3}\le c\cdot\dfrac{1}{8n^3}$

$\circeq\left|\dfrac1x+nR_n(x)-\dfrac1x\right|\le\dfrac{c}{8\cdot n^2}<\varepsilon\Rightarrow f_n\underset{E_2}{\rightrightarrows}\dfrac1x$

на E_1: $\forall n\ \exists x_n = \frac{1}{n} : |f_n(x_n) - f(x)| = |n\,\mathrm{arctg}\,1 - n| = n(1-\frac{\pi}{4}) \geq 1-\frac{\pi}{4} = \varepsilon_0 \Rightarrow$

$\Rightarrow f_n \xrightarrow[E_1]{} \frac{1}{x}$ неравномерно

<u>11(5)</u> $f_n(x) = n^2x^2e^{-nx}$, $E_1=[0;+\infty)$, $E_2=[\delta;+\infty)$, $\delta>0$

$x_0\in E_1, x_0\in E_2$: $f_n(x_0) = n^2x_0^2e^{-nx_0} \xrightarrow{n\to\infty} 0$, т.е. $f_n \xrightarrow[E_i]{} 0$

$|f_n(x)-f(x)| = f_n(x) = n^2x^2e^{-nx} = \frac{n^2x^2}{e^{nx}} < \frac{n^2x^2}{1+nx+\frac{1}{2}(nx)^2+\frac{1}{6}(nx)^3} \overset{\text{на } E_2}{<} \frac{n^2x^2}{\frac{1}{6}(nx)^3} = \frac{6}{nx} <$

$< \frac{1}{n\delta} < \varepsilon \Rightarrow f_n \underset{E_2}{\rightrightarrows} 0$

на E_1: $\forall n\ \exists x_n = \frac{1}{n}$: $f_n(x_n) = e^{-1} = \varepsilon_0 \Rightarrow f_n \xrightarrow[E_1]{} 0$ неравномерно

<u>12(5)</u> $f_n(x) = \ln(x^2+1/n)$, $E_1=(0;+\infty)$, $E_2=(a;+\infty)$, $a>0$

$x_0\in E_1, x_0\in E_2$: $f_n(x_0) = \ln(x_0^2+1/n) \xrightarrow{n\to\infty} \ln x_0^2 = 2\ln x_0$, т.е. $f_n \xrightarrow[E_i]{} 2\ln x$

$|f_n(x)-f(x)| = |\ln(x^2+1/n) - 2\ln x| = |2\ln x + \ln(1+\frac{1}{nx^2}) - 2\ln x| = |\ln(1+\frac{1}{nx^2})| <$

$< \frac{1}{nx^2} \overset{\text{на } E_2}{<} \frac{1}{na^2} < \varepsilon \Rightarrow f_n \underset{E_2}{\rightrightarrows} 2\ln x$

на E_1: $\forall n\ \exists x_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$: $|f_n(x)-f(x)| = |\ln(1+\frac{1}{nx_n^2})| = \ln 2 = \varepsilon_0 \Rightarrow f_n \xrightarrow[E_1]{} 2\ln x$

неравномерно

<u>13(2)</u> $f_n(x) = \cos(\frac{\pi}{2}x^n)$, $E_1=(0;\alpha)$, $0<\alpha<1$, $E_2=(0;1)$

$x_0\in E_1, x_0\in E_2$: $f_n(x_0) = \cos(\frac{\pi}{2}x_0^n) \xrightarrow{n\to\infty} \cos 0 = 1$, т.е. $f_n \xrightarrow[E_i]{} 1$

$|f_n(x)-f(x)| = |\cos(\frac{\pi}{2}x^n) - 1| =$

$\cos t = 1 + R(t)$ при $|t|<\delta\to 0$, где $|R(t)| \leq ct^2$, $c=\mathrm{const}$

на E_1 $\frac{\pi}{2}x^n < \frac{\pi}{2}\alpha^n = \delta$.

$= |1+R_n(x)-1| = |R_n(x)| \leq c\cdot\frac{\pi}{2}x^{2n} < c\cdot\frac{\pi}{2}\alpha^{2n} < \varepsilon \Rightarrow f_n \underset{E_1}{\rightrightarrows} 1$

на E_2: $\forall n\ \exists x_n = (\frac{1}{2})^{1/n}$: $|f_n(x)-f(x)| = |\cos(\frac{\pi}{4}) - 1| = 1-\frac{\sqrt{2}}{2} = \varepsilon_0 \Rightarrow f_n \xrightarrow[E_2]{} 1$

неравномерно

<u>Т.3.</u> $E=[0;1]$

а) $f_n(x) = x^n - x^{n+1},\ n \in \mathbb{N}$

$x_0 \in E:\ f_n(x_0) = x_0^n - x_0^{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} 0$, т.е. $f_n \xrightarrow[E]{} 0$

$$\sup_{x\in E}|f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in E} f_n(x) = f_n(x_{max})$$

$x_{max}:\ f_n'(x_{max}) = n x_{max}^{n-1} - (n+1)x_{max}^n = 0 \overset{x_{max}\neq 0}{\Rightarrow} x_{max} = \frac{n}{n+1}$

$$f_n(x_{max}) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n\left(1 - \frac{n}{n+1}\right) = \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in E}|f_n(x) - f(x)| = \lim_{n\to\infty} f_n(x_{max}) = \lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = 0 \Leftrightarrow f_n \underset{E}{\rightrightarrows} 0$$

б) $f_n(x) = x^n - x^{2n},\ n \in \mathbb{N}$

$x_0 \in E:\ f_n(x_0) = x_0^n - x_0^{2n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$, т.е. $f_n \xrightarrow[E]{} 0$

$\forall n\ \exists x_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{1/n}:\ |f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} = \varepsilon_0 \Rightarrow f_n(x) \xrightarrow[E]{} 0$ неравномерно

$\boxed{\S 18}$

8(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{arctg} nx}{x^4 + n^3\sqrt{n}}$, $E = (-\infty; +\infty)$

$$|a_n(x)| = \left|\frac{\operatorname{arctg} nx}{x^4 + n^3\sqrt{n}}\right| \leq \frac{\pi/2}{x^4 + n^3\sqrt{n}} \leq \frac{\pi/2}{n^3\sqrt{n}} = \alpha_n$$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ сх-ся $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{arctg} nx}{x^4 + n^3\sqrt{n}}$ по пр. Вейерштрасса сх-ся равномерно на E

13(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{x^2+n^2}\right)^2$, $E = [0; +\infty)$

$\operatorname{arctg} t < t\ \forall t > 0 \Rightarrow |a_n(x)| = \left(\operatorname{arctg}\frac{x}{x^2+n^2}\right)^2 < \left(\frac{x}{x^2+n^2}\right)^2 = \frac{x^2}{x^4 + 2x^2n^2 + n^4} <$
$< \frac{x^2}{2n^2x^2} = \frac{1}{2n^2} = \alpha_n$. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ сх-ся $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{x^2+n^2}\right)^2$ по пр. Вейерштрасса сх-ся равномерно на E

20(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^n\sin\frac{x}{3^n}$, $E = [0; +\infty)$

$\exists\, \varepsilon_0 = 1\ \ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}:\ \forall n \geq n_0\ \ \exists\, x_n = 3^n\cdot\frac{\pi}{2} \in E:\ |a_n(x_n)| = 2^n \geq 1 = \varepsilon_0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ по критерию Коши $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^n\sin\frac{x}{3^n}$ не сх-ся равномерно.

$\sin t < t \ \forall t > 0 \Rightarrow |a_n(x_0)| = |2^n \sin \frac{x_0}{3^n}| < x_0 (\frac{2}{3})^n \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ сх-ся абсолютно. Итог: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{x}{3^n}$ сх-ся неравномерно.

<u>21(1)</u> $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+\sqrt{n}}$, $E = [0;+\infty)$

$\alpha_n(x) = \frac{1}{x+\sqrt{n}}$, $\beta_n(x) = (-1)^n$. $\{\alpha_n(x)\}$ монотонно стремится к нулю. Частичные суммы $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \beta_n(x)$ ограничены. Тогда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+\sqrt{n}}$ равномерно сх-ся по пр. Дирихле.

<u>22(1)</u> $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx \sin x}{\sqrt[3]{n+x}}$, $E = [0;+\infty)$

$\alpha_n(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{n+x}}$, $\beta_n(x) = \sin nx \sin x$. $\{\alpha_n(x)\}$ монотонно стремится к нулю. Частичные суммы $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \beta_n(x)$ ограничены, т.к.

$$\sum_{n=1}^{N} \sin nx \sin x = \sin x \sum_{n=1}^{N} \sin nx = \sin x \frac{1}{2\sin x/2} \sum_{n=1}^{N} 2 \sin\left(\frac{n+\frac{1}{2}+n-\frac{1}{2}}{2} x\right) \sin\left(\frac{n+\frac{1}{2}-n+\frac{1}{2}}{2}\right) = \frac{\sin x}{2\sin x/2} \sum_{n=1}^{N} \cos(n-\tfrac{1}{2})x - \cos(n+\tfrac{1}{2})x = \cos x/2 - \cos(N+1/2)x.$$

Тогда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx \sin x}{\sqrt[3]{n+x}}$ равномерно сх-ся по Дирихле.

по необх. усл. равн. сх

<u>29(4)</u> $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{x^2}{n^2}\right)$, $E_1 = [0;a]$, $a > 0$, $E_2 = [1;+\infty)$

$\ln(1+t) < t$, $\forall t > 0 \Rightarrow |a_n(x)| < \frac{x^2}{n^2} \underset{\text{на } E_1}{\le} \frac{a^2}{n^2} = \alpha_n$. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ сх-ся $\Rightarrow$ по пр. Вейерштрасса $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{x^2}{n^2}\right)$ равномерно сх-ся на E_1

на E_2: $\forall n \ \exists x_n = n \in E_2 : |a_n(x_n)| = \ln 2 = \varepsilon_0 \Rightarrow a_n \underset{E_2}{\not\rightrightarrows} 0 \Rightarrow$ по необх. условию равн. сх-ти $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{x^2}{n^2}\right)$ не явл. равномерно сходящимся на E_2.

$x_0 \in E_2$: $|a_n(x_0)| = \ln\left(1+\frac{x_0^2}{n^2}\right) < \frac{x_0^2}{n^2} \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{x^2}{n^2}\right)$ сх-ся неравномерно на E_2.

<u>29(7)</u> $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{nx^2}{1+n^{5/2}x^6}$, $E_1 = (0;1)$, $E_2 = (1;+\infty)$

$|a_n(x)| = \frac{nx^2}{1+n^{5/2}x^6} \le \frac{nx^2}{n^{5/2}x^6} \overset{E_2}{\le} \frac{nx^2}{n^{5/2}x^2} = \frac{1}{n^{3/2}} = \alpha_n$. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha^n$ сх-ся $\Rightarrow$ по пр. Вейерштрасся $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^2}{1+n^{5/2}x^6}$ сх-ся равномерно на E_2.

на E_1: $\forall n\ \exists x_n = n^{-5/12} \in E_1 : |a_n(x)| = \frac{1}{2} n^{1/6} = \varepsilon_0 \Rightarrow a_n \underset{E_1}{\not\rightrightarrows} 0 \Rightarrow$ по необх. условию равн. сх-ти $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^2}{1+n^{5/2}x^6}$ не явл. равномерно сходящимся на E_1.

$x_0 \in E_1$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx_0^2}{1+n^{5/2}x_0^6} = x_0^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1/n + n^{3/2}x_0^6}$ - сх-ся $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^2}{1+n^{5/2}x^6}$ сх-ся неравномерно на E_1.

<u>36(5)</u> $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{x^2-nx+n^2}$, $E_1 = (0;1)$, $E_2 = (1;+\infty)$

на E_1: для $n=1$ $\frac{x}{x^2-x+1} \leq \frac{1}{-1/4+1} = \frac{4}{3} = \alpha_1$. $\forall n>1\ |a_n(x)| = \frac{x}{x^2-nx+n^2} < \frac{1}{x^2-nx+n^2} < \frac{1}{-nx+n^2} < \frac{1}{-n+n^2} = \alpha_n$. $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ сх-ся $\Rightarrow$ по пр. Вейерштрасса $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{x^2-nx+n^2}$ сх-ся равномерно на E_1.

на E_2: $\exists\ \varepsilon_0 = \frac{1}{2} : \forall m \in \mathbb{N}\ \exists n \geq m\ \exists p = n\ \exists\ \tilde{x} = n \cdot \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{\tilde{x}}{\tilde{x}^2 - k\tilde{x} + k^2} \right| = \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k} > \frac{1}{n+p} + \ldots + \frac{1}{n+p} = \frac{p}{n+p} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2} = \varepsilon_0 \Rightarrow$ по кр. Коши $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{x^2-nx+n^2}$ не является равномерно сходящимся на E_2.

$x_0 \in E_2$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_0}{x_0^2 - nx_0 + n^2}$ - сх-ся $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{x^2-nx+n^2}$ сх-ся неравномерно на E_2.

<u>Т.4.</u> $E_1 = (0,1)$; $E_2 = (1,+\infty)$

а) $f_n(x) = x \sin \frac{1}{(xn)^2}$

$x_0 > 0$: $f_n(x) = x_0 \sin \frac{1}{(x_0 n)^2} < \frac{1}{x_0 n^2} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \Rightarrow f_n \xrightarrow[E_i]{n\to\infty} 0$

$\forall x > 0 \hookrightarrow \sin t \leq \sqrt{t}$. При $t \geq 1$ - очевидно, при $t<1$ $\sin \leq t < \sqrt{t} \Rightarrow$

$\Rightarrow f_n(x) \leq \frac{x}{xn} = \frac{1}{n} \Rightarrow f_n \underset{E_i}{\overset{n\to\infty}{\rightrightarrows}} 0$

на E_2: $f_n(x) < \frac{1}{xn^2} < \frac{1}{n^2} = \alpha_n$. $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ - сх-ся $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сх-ся равномерно на E_2.

на E_1: $\exists\ \varepsilon_0 = \sin \frac{1}{4} > 0\ \forall m \in \mathbb{N}\ \exists n \geq m\ \exists p = n\ \exists \tilde{x} = \frac{1}{n} : \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(\tilde{x}) \right| =$

$= \left|\sum\limits_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{n}\sin\frac{n^2}{k^2}\right| > n\cdot\frac{1}{n}\sin\frac{n^2}{(2n)^2} = \sin\frac{1}{4} = \varepsilon_0 \Rightarrow$ по кр. Коши $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ не сх-ся равномерно

$\forall x_0 \in E_1: \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x_0) < \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x_0 n^2}$ - сх-ся $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сх-ся неравномерно на E_1.

б) $f_n(x) = \dfrac{\sin\frac{xn}{x^2+n^2}}{1+\ln^2 n}$

$x_0>0: f_n(x_0) < \dfrac{1}{n\ln^2 n} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \Rightarrow f_n \xrightarrow[E_i]{n\to\infty} 0$

на E_1: $f_n(x) < \dfrac{\sin\frac{1\cdot n}{1+n^2}}{1+\ln^2 n} < \dfrac{1}{n\ln^2 n} \Rightarrow f_n \overset{n\to\infty}{\underset{E_1}{\rightrightarrows}} 0$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}$ сх-ся $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сх-ся равномерно на E_1.

на E_2: $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in E_2}|f_n(x)| = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1+\ln^2 n} = 0 \Rightarrow f_n \overset{n\to\infty}{\underset{E_2}{\rightrightarrows}} 0$

$\exists \varepsilon_0 = 1\ \forall m\in\mathbb{N}\ \exists n\geq m\ \exists p = 2\max\{n,n_0\}-n$, где $n_0: \dfrac{n_0}{1+\ln^2 n_0}\sin\frac{2}{5} > 1\ \exists \tilde{x} = n$:

$\left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} f_k(\tilde{x})\right| = \left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p}\dfrac{\sin\frac{nk}{n^2+k^2}}{1+\ln^2 n}\right| \geq p\,\dfrac{\sin\frac{2n\max\{n,n_0\}}{n^2+4n\max\{n,n_0\}}}{1+\ln^2 n}$ (*) $\qquad n\geq n_0$

Если $\max\{n,n_0\}=n$, то (*) $= n\dfrac{\sin\frac{2}{5}}{1+\ln^2 n} \geq n_0\dfrac{\sin\frac{2}{5}}{1+\ln^2 n_0} > 1 = \varepsilon_0$

т.к. $f(x) = x\dfrac{c}{1+\ln^2 x}$, $c>0$ возрастает, т.к. $f'(x) = c\dfrac{(1-\ln x)^2}{(1+\ln^2 x)^2} > 0$

Если $\max\{n,n_0\}=n_0$, то (*) $= (2n_0-n)\dfrac{\sin\frac{2nn_0}{n^2+4n_0^2}}{1+\ln^2 n} \geq n_0\dfrac{\sin\frac{2}{5}}{1+\ln^2 n_0} > 1 = \varepsilon_0$

т.к. $n_0\geq n$, то $2n_0-n\geq n_0$; $\sin\dfrac{2nn_0}{n^2+n_0^2} = \sin\dfrac{2\frac{n_0}{n}}{1+4(\frac{n_0}{n})^2} \geq \sin\dfrac{2}{5}$, т.к. $g(x) = \sin\dfrac{2x}{1+4x^2}$

убывает на $[1,+\infty)$ $\left(g'(x) = \dfrac{2(1+4x^2)-16x^2}{(1+4x^2)^2}\cos\dfrac{2x}{1+4x^2} = \underset{<0}{\dfrac{2-8x^2}{(1+4x^2)^2}}\underset{>0}{\cos}\dfrac{2x}{1+4x^2} < 0\right)$;

$\dfrac{1}{1+\ln^2 n} \geq \dfrac{1}{1+\ln^2 n_0}$, т.к. $\dfrac{1}{1+\ln^2 x}$ убывает

Итак, по кр. Коши $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ не сх-ся равномерно

$\forall x_0\in E_2: \sum\limits_{n-1}^{\infty} f_n(x_0) < \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}$ - сх-ся $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сх-ся неравномерно на E_2.

§19

4. $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos^2 nx}{n(n+1)}$ на $\mathbb{R}$

$|a_n(x)|=\dfrac{\cos^2 nx}{n(n+1)}\leq\dfrac{1}{n(n+1)}<\dfrac{1}{n^2}=\alpha_n.\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ - сх-ся $\Rightarrow$ по пр. Вейерштрасса $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos^2 nx}{n(n+1)}$ - сх-ся равномерно; $a_n(x)$ - непр. на $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $f(x)$ - непр. на $\mathbb{R}$

$$\int_0^{2\pi}f(x)dx=\int_0^{2\pi}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2 nx}{n(n+1)}\right)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{2\pi}\frac{\cos^2 nx}{n(n+1)}dx \ominus$$

$$\int_0^{2\pi}\cos^2 nx\,dx=\frac{1}{2}\left[\int_0^{2\pi}dx+\int_0^{2\pi}\cos 2nx\,dx\right]=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}dx=\pi$$

$$\ominus\ \pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\pi\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\pi$$

12. $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos nx}{n^3}$ на $\mathbb{R}$

1) $a_n(x)=\dfrac{\cos nx}{n^3}$ имеют непр. производные на $\mathbb{R}$

2) $a_n'(x)=-\dfrac{\sin nx}{n^2}.\ |a_n'(x)|<\dfrac{1}{n^2}=\alpha_n\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ - сх-ся $\Rightarrow$ по пр. Вейерштрасса $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n'(x)$ сх-ся равномерно на $\mathbb{R}$.

3) $x_0\in\mathbb{R}:\ |a_n(x_0)|<\dfrac{1}{n^3}\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos nx}{n^3}$ сх-ся на $\mathbb{R}$

1), 2), 3) $\Rightarrow$ $f(x)$ непр. дифференцируема на $\mathbb{R}$

14. $\zeta(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^x}$, $E=(1;+\infty)$

$|a_n(x)|<\dfrac{1}{n^{1+\varepsilon}}=\alpha_n.\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ сх-ся $\Rightarrow$ по пр. Вейерштрасса $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^x}$ сх-ся равномерно на E; $a_n(x)$ - непр. на E $\Rightarrow$ $\zeta(x)$ - непр. на E.

Докажем, что $\zeta(x)$ имеет производные любого порядка по индукции

База: 1) $a_n(x)$ имеют непр. производные на E.

2) $|a_n'(x)| = \left| -\frac{n^{-x}}{\ln n} \right| = \frac{1}{n^x \ln n} = \frac{1}{n^{1+\varepsilon}\ln n} = \alpha_n$. $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ сх-ся => по пр. Вейерштрасса $\sum_{n=1}^{\infty} a_n'(x)$ сх-ся равномерно на E.

3) Как было показано ранее $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ сх-ся на E.

1), 2), 3) => $\zeta(x)$ непр. дифференцируема на E.

Предположение: $\zeta^{(n)}(x)$ непр. дифференцируема на E.

Шаг: 1) $a_n^{(n)}(x) = \frac{1}{n^x \ln^n n}$ имеют непр. производные на E.

2) $|a_n'(x)| = \frac{1}{n^x \ln^{n+1} n} = \frac{1}{n^{1+\varepsilon}\ln^{n+1} n} = \alpha_n$. $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ сх-ся в силу того, что $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}$ сх-ся при $\alpha > 1$ $\forall \beta$ => по пр. Вейерштрасса $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(n+1)}(x)$ сх-ся равномерно на E.

3) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(n)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x \ln^n n}$ сх-ся по тем же соображениям, что и в 2)

1), 2), 3) => $\zeta^{(n+1)}(x)$ непр. дифференцируема на E.

Таким образом доказано, что $\zeta(x)$ имеет на E производные любого порядка.

<u>28.</u> Мотем. Пример: $f_n(x) = \frac{1}{n} D(x)$, $D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{R} \\ 0, & x \in \mathbb{I} \end{cases}$

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - 0| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \iff f_n \underset{\mathbb{R}}{\rightrightarrows} 0$$

§20

<u>1(4)</u> $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(z-2)^n}{4^{n+2}}$. $\sqrt[n]{|c_n|} = \sqrt[n]{\frac{n+1}{4^{n+2}}} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{4} = \frac{1}{R} \Rightarrow R = 4$

<u>3(1)</u> $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} z^n$. $\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = \left|\frac{(n!)^2}{(2n)!} \frac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2}\right| = \left|\frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)(n+1)}\right| \xrightarrow{n\to\infty} 4 = R$

<u>5(1)</u> $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n(1+i)^{3n}}{(n+1)(n+2)} z^n$. $\sqrt[n]{|c_n|} = \frac{2|1+i|^3}{\sqrt[n]{n+1}\sqrt[n]{n+2}} = \frac{2\sqrt{2}^3}{1\cdot 1} = \frac{1}{R} \Rightarrow R = \frac{1}{4\sqrt{2}}$

9(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^{n^2}}{n^n}$. $\sqrt[n^2]{|C_{n^2}|} = \sqrt[n^2]{n^{-n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1 = \frac{1}{R} \Rightarrow R = 1$

$I_R = (-3-R; -3+R) = (-4; -2)$

$x=-2$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$ - сх-ся абсолютно по пр. сравнения

$x=-4$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n^2}}{n^n}$ - сх-ся абсолютно как следует из случая $x=-2$.

T.5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2^n}}{n^3}$. $\sqrt[2^n]{|C_{2^n}|} = \sqrt[2^n]{\frac{1}{n^3}}$

$\sqrt[n]{\frac{1}{n^3}} < \sqrt[2^n]{\frac{1}{n^3}} \leq 1$. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^3}} = 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[2^n]{\frac{1}{n^3}} = 1 = \frac{1}{R} \Rightarrow R = 1$

§ 21

6(5) $\frac{5-2x}{x^2-5x+6} = \frac{5-2x}{(x-3)(x-2)} = \frac{A}{x-3}+\frac{B}{x-2} \to \begin{cases}A+B=-2\\ -2A-3B=5\end{cases} \to \begin{cases}A=-1\\ B=-1\end{cases}$

$= \frac{1}{3-x}+\frac{1}{2-x} = \frac13\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{3}\right)^n + \frac12\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3^{n+1}}+\frac{1}{2^{n+1}}\right)x^n$

$\sqrt[n]{|c_n|} = \sqrt[n]{1/3^{n+1}+1/2^{n+1}} = \frac13\sqrt[n]{1/3+3^n/2^{n+1}} \xrightarrow{n\to\infty} \frac13\cdot\frac32 = \frac12 = \frac1R \Rightarrow R=2$

9(2) $\ln(12-x-x^2) = \ln((4+x)(3-x)) = \ln 12 + \ln\left(1+\frac14 x\right)+\ln\left(1-\frac13 x\right) =$

$= \ln 12 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n 4^{-n}}{n} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(-x)^n 3^{-n}}{n} = \ln 12 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}4^{-n}-3^{-n}}{n}x^n$, $R=3$

11(3) $\sin x\cos^2 x = \sin x\,\frac{1+\cos 2x}{2} = \frac12\sin x+\frac12\sin x\cos 2x = \frac12\sin x + \frac14(\sin 3x -$

$- \sin x) = \frac14\sin x+\frac14\sin 3x = \frac14\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \frac14\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(3x)^{2n+1}}{(2n+1)!} =$

$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(1+3^{2n+1})}{4(2n+1)!}x^{2n+1}$, $R=+\infty$ (т.к. у синуса $R=+\infty$)

19(4) $\frac{1}{\sqrt{x^2-4x+8}}$, $x_0=2$. $t=x-x_0 \to \frac{1}{\sqrt{4+t^2}} = \frac{1}{2\sqrt{1+(t/2)^2}} = \frac12+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{2^{3n+1}n!}t^{2n}$,

$R=2$, т.к. для сходимости $\frac{1}{2\sqrt{1+(t/2)^2}}$ необходимо $|t/2|<1$

25(1) $f(x)=\operatorname{arctg}\frac{1-x}{1+x}$. $f'(x) = \left(1+\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2\right)^{-1}\frac{-(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2} = \frac{-2}{2+2x^2} = \frac{-1}{1+x^2} =$

$= -\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}x^{2n}$

$f(x) = \int_0^x f'(x)\,dx = f(0)+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}x^{2n+1} = \frac{\pi}{4}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}x^{2n+1}$, $R=1$, т.к. ряд

$f'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$ имеет такой же радиус сходимости.

30(2) $x\arccos\frac{x^2}{\sqrt{4+x^4}}$. $g(x)=\arccos\frac{x^2}{\sqrt{4+x^4}}$, $g'(x) = -\left(1-\left(\frac{x^4}{4+x^4}\right)\right)^{-1/2}\frac{2x\sqrt{4+x^4}-x^2\frac12\frac{4x^3}{\sqrt{4+x^4}}}{4+x^4} =$

$= -(4+x^4-x^4)^{-1/2}(2x(4+x^4)-x^2\cdot 2x^3)/(4+x^4) = -\frac{4x}{4+x^4} = -\frac{x}{1+(x^2/2)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{4^n}x^{4n+1}$

$\sqrt[4n+1]{|c_{4n+1}|} = \sqrt[4n+1]{4^{-n}} = 4^{\frac{-n}{4n+1}} \xrightarrow{n\to\infty} 4^{-1/4} = 1/R \Rightarrow R=\sqrt2$

g и g' имеют один и тот же R

$g(x) = \int_0^x g'(x)\,dx = g(0)+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{4^n}\frac{x^{4n+2}}{4n+2} = \frac{\pi}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{4^n(4n+2)}x^{4n+2}$

$x\arccos\frac{x^2}{\sqrt{4+x^4}} = \frac{\pi}{2}x+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{4^n(4n+2)}x^{4n+3}$, $R=\sqrt2$

55(1) $S(x) = x+\frac13x^3+\frac15x^5+\ldots+\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}+\ldots$

$$S'(x) = 1 + x^2 + x^4 + \dots + x^{2n} + \dots = \frac{1}{1-x^2}, \quad |x| < 1$$

$$S(x) = \int_0^x S'(x)\,dx = \int_0^x \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + S(0) = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$$

<u>80.</u>

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Проверим, что $f(x)$ бесконечно дифф. в нуле и все произв. $=0$

База: $f'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{-1/x^2}}{x} = 0$

Предположение: $\exists f^{(n)}(0) = 0$

Шаг: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f^{(n)}(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\left(e^{-1/x^2}\right)^{(n)}}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\left(\frac{2}{x^3} e^{-1/x^2}\right)^{(n-1)}}{x} =$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x} \sum\limits_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^{k} \left(2x^{-3}\right)^{(n-1-k)} \left(e^{-1/x^2}\right)^{(k)} = 0$, т.к. экспонента падает быстрее любого полинома.

Значит, ряд Маклорена для $f(x)$ существует и тождественно равен нулю. Но $f(x) \neq 0 \ \forall x \neq 0$ /ч.т.д.

<u>31(1)</u> $f(x) = \int_0^x e^{-t^2}dt$. $f'(x) = e^{-x^2} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-x^2)^n}{n!}$. $R = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{c_n}{c_{n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} |n+1| = +\infty$

$f(x) = \int_0^x f'(x)dx = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)(n!)} x^{2n+1} + f(0) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)(n!)} x^{2n+1}$, $R = +\infty$, т.к. у f радиус сходимости такой же как у f'.

Т.3 §5

<u>2(2)</u> $u(x,y) = 3x^2y + y^3 - 12x - 15y + 3$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = 6xy - 12 = 0 \to y = \dfrac{2}{x} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = 3x^2 + 3y^2 - 15 = 0 \to 3x^2 + \dfrac{12}{x^2} - 15 = 0 \to x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \to (\pm 1, \pm 2); (\pm 2, \pm 1) \end{cases}$$

– стац. точки

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6y; \ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 6y; \ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = 6x \to H = \left\| \begin{matrix} 6y & 6x \\ 6x & 6y \end{matrix} \right\|$$

в $(1,2)$ $H>0 \to \min$, $u(1,2) = -25$, в $(-1,-2)$ $H<0 \to \max$, $u(-1,-2) = 31$

в $(\pm1,2)$ H не явл. знакоопр. $\Rightarrow (\pm1,2)$ не явл. экстремумами

<u>6(2)</u> $u(x,y)=(x^2-2y^2)e^{x-y}$ $\quad -x^2e^{x-y}+4ye^{x-y}+2y^2e^{x-y}$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=e^{x-y}(x^2+2x-2y^2)=0\\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=e^{x-y}(-x^2+2y^2-4y)=0\end{cases}\to\begin{cases}x^2+2x-2y^2=0\\ -x^2+2y^2-4y=0\end{cases}\to\begin{cases}x=2y\\ y(y+2)=0\end{cases}\to$$

$\to (0,0);(-4,-2)$ - стац. точки

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=(x^2+4x+2-2y^2)e^{x-y};\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=(x^2-2y^2+8y-4)e^{x-y}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}=(-x^2-2x+2y^2-4y)e^{x-y}$$

В $(0,0)$ $H=\left\|\begin{matrix}2&0\\0&-4\end{matrix}\right\|$ - не явл. знакоопр. $\Rightarrow (0,0)$ не экстремум.

В $(-4,-2)$ $H=e^{-2}\left\|\begin{matrix}-6&8\\8&-12\end{matrix}\right\|<0 \Rightarrow (-4,-2)$ - max $\quad u(-4,-2)=8e^{-2}$

<u>9.</u> $u(x,y)=x^4+y^4-2x^2$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=4x^3-4x=0\\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=4y^3=0\end{cases}\to(\pm1,0);(0,0)\text{ - стац. точки}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=12x^2-4;\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=12y^2;\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}=0$$

в $(0,0)$ $H=\left\|\begin{matrix}-4&0\\0&0\end{matrix}\right\|\leq 0$, в $(\pm1,0)$ $H=\left\|\begin{matrix}8&0\\0&0\end{matrix}\right\|\geq 0$. Т.е. достаточными условиями строгого экстремума пользоваться нельзя.

Заметим, что $u(x,y)=(x^2-1)^2+y^4-1\geq -1$, а $u(\pm1,0)=-1 \Rightarrow (\pm1,0)$ - точки минимума.

Рассмотрим $(0,0)$: Выберем $\left(\frac{1}{N},\frac{1}{N}\right)\xrightarrow{N\to\infty}(0,0)$ и $\left(0,\frac{1}{N}\right)\xrightarrow{N\to\infty}(0,0)$

$u\left(\frac{1}{N},\frac{1}{N}\right)=\frac{2}{N^2}\left(\frac{1}{N^2}-1\right)<0;\ u\left(0,\frac{1}{N}\right)=\frac{1}{N^4}>0 \Rightarrow (0,0)$ - не явл. экстремумом

<u>10.</u> $u(x,y)=(y^2-x)(y^2-2x)$

1) Ур-е связи: $y=\alpha x \to u(x,y)=u(x)=(\alpha^2x^2-x)(\alpha^2x^2-2x)=$
$=\alpha^4x^4-3\alpha^2x^3+2x^2$

$\frac{du}{dx}=4\alpha^4x^3-9\alpha^2x^2+4x$. $\left.\frac{du}{dx}\right|_{x=0}=0 \to (0,0)$ - критич. точка.

$\frac{d^2u}{dx^2}=12\alpha^4x^2-18\alpha^2x+4$. $\left.\frac{d^2u}{dx^2}\right|_{x=0}=4>0 \Rightarrow$ в $(0,0)$ min

2) Рассмотрим $u(x,y)$ вдоль параболы $x=\frac{3}{4}y^2$.

$u(x,y)=u(y)=\frac{1}{4}y^2\left(-\frac{1}{2}y^2\right)=-\frac{1}{8}y^2<0$, но $u(0,0)=0 \Rightarrow (0,0)$ не является минимумом $u(x,y)$.

13(1) $u(x;y;z)=x^2+y^2+(z+1)^2-xy+x$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}=2x-y+1=0 \\ \frac{\partial u}{\partial y}=2y-x=0 \\ \frac{\partial u}{\partial z}=2(z+1)=0 \end{cases} \longrightarrow \left(-\frac{2}{3};-\frac{1}{3};-1\right) \text{ - стац. точка}$$

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=2$; $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=2$; $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=2$; $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}=-1$; $\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}=\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial y}=0$;

$\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}=0$; $H=\begin{Vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{Vmatrix}>0 \Rightarrow \left(-\frac{2}{3};-\frac{1}{3};-1\right)$ - min.

$u\left(-\frac{2}{3};-\frac{1}{3};-1\right)=-\frac{1}{3}$

Т.6. $H\geq 0$

а) Да, может. Например, $f(x,y)=x^2+y^4$. $(0,0)$ - очевидно строгий минимум, а в $(0;0)$ $H=\begin{Vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}$ - полож. полуопр.

б) Нет, не может, т.к. если x^0 - строгий локальный максимум, то $0>f(x)-f(x^0)\sim\frac{1}{2}d^2f(x_0)=\frac{1}{2}\|x_1\dots x_n\|H\begin{Vmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{Vmatrix}$, но по условию правая часть ≥ 0 $\overset{\circ}{X}$!

в) Да, может. Например, $f(x,y)=x^2-y^4$. В точке $(0,0)$ $H=\begin{Vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}$ - положительно полуопределена, но $(0,0)$ не явл. точкой локального экстремума, т.к. $f(\frac{1}{N},0)>0=f(0,0)$, а $f(0,\frac{1}{N})<0=$ $=f(0,0)$, причём $(\frac{1}{N},0)\xrightarrow{N\to\infty}(0,0)$, $(0,\frac{1}{N})\xrightarrow{N\to\infty}(0,0) \Rightarrow (0,0)$ не явл. локальным экстремумом.