§12

115. Исследовать на абсолютную и условную сходимость интеграл $\int\limits_0^{+\infty}\sin x^2dx$

$$\int\limits_0^{+\infty}\sin x^2dx = \underbrace{\int\limits_0^{1}\sin x^2dx}_{I_1} + \underbrace{\int\limits_1^{+\infty}\sin x^2dx}_{I_2}$$

I_1 очевидно сходится

Рассмотрим I_2: $I_2 = \Big|_{t=x^2} \int\limits_1^{+\infty}\sin t\cdot\frac{1}{2\sqrt{t}}dt$

функция $\sin t$ непрерывна и имеет ограниченную первообразную на $[1,+\infty)$, функция $\frac{1}{2\sqrt{t}}$ непрерывно дифференцируема и монотонна на $[1,+\infty)$, причем $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{1}{2\sqrt{t}}=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow I_2$ сходится по признаку Дирихле.

Рассмотрим $\int\limits_0^{+\infty}|\sin x^2|dx > \int\limits_0^{+\infty}\sin^2x^2dx = \Big|_{t=x^2}\int\limits_0^{+\infty}\sin^2 t\frac{dt}{2\sqrt{t}} =$

$= \int\limits_0^{+\infty}\frac{1-\cos 2t}{4\sqrt{t}}dt = \underbrace{\int\limits_0^{+\infty}\frac{dt}{4\sqrt{t}}}_{I_1'} - \underbrace{\int\limits_0^{+\infty}\frac{\cos 2t\,dt}{4\sqrt{t}}}_{I_2'}$

I_1' очевидно расходится

Рассмотрим I_2':

функция $\cos 2t$ непрерывна и имеет ограниченную первообразную на $[1,+\infty)$, функция $\frac{1}{4\sqrt{t}}$ непрерывно дифференцируема и монотонна на $[1,+\infty)$, причем $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{1}{4\sqrt{t}}=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow I_2$ сходится по признаку Дирихле.

Итак, $\int\limits_0^{+\infty}\sin^2x^2dx$ расходится как сумма расходящегося и сходящегося $\Rightarrow \int\limits_0^{+\infty}|\sin x^2|dx$ расходится $\Rightarrow \int\limits_0^{+\infty}\sin x^2dx$ сходится условно.

120. Исследовать на абсолютную и условную сходимость интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \sin\left(\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right)\frac{dx}{\sqrt{x}}$

при $x\to+\infty$ $\sin\left(\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}} + R(x)$, причем при $x>1$ справедливо $|R(x)|/\sqrt{x} \le 1/(3!\,x\sqrt{x})\cdot 1/\sqrt{x} = \frac{1}{3!\,x^2} \Rightarrow \int\limits_1^{+\infty}\frac{R(x)}{\sqrt{x}}dx$ сходится абсолютно.

Рассмотрим $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$:

функция $\sin x$ непрерывна и имеет ограниченную первообразную на $[1,+\infty)$, функция $\frac{1}{x}$ непрерывно дифференцируема и монотонна на $[1,+\infty)$, причем $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \int\limits_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ сходится по признаку Дирихле.

Рассмотрим $\int\limits_1^{+\infty}\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx$:

$\left|\frac{\sin x}{x}\right| \geqslant \frac{\sin^2 x}{x}$. $\exists\, b\in(1,+\infty)$, $\exists\, n: \pi n > b$, $b_1=\pi n$, $b_2 = 2\pi n$. Тогда

$$\left|\int\limits_{b_1}^{b_2}\frac{\sin^2 x}{x}dx\right| = \int\limits_{\pi n}^{2\pi n}\frac{\sin^2 x}{x}dx \geqslant \frac{1}{2\pi n}\int\limits_{\pi n}^{2\pi n}\sin^2 x\,dx = \frac{1}{2\pi n}\int\limits_{\pi n}^{2\pi n}\frac{1-\cos 2x}{2}dx = \frac{1}{2\pi n}\cdot\frac{\pi n}{2} =$$

$= 1/4$. Итак, $\exists\, \varepsilon = 1/4: \forall\, b>1\ \exists\, b_1=\pi n>b$ и $b_2=2\pi n>b$, для которых

$\left|\int\limits_{b_1}^{b_2}\frac{\sin^2 x}{x}dx\right| \geqslant \varepsilon \Rightarrow \int\limits_1^{+\infty}\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx$ расходится $\Rightarrow \int\limits_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ сходится

условно $\Rightarrow \int\limits_1^{+\infty}\sin\left(\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right)\frac{dx}{\sqrt{x}}$ сходится условно.

121. Исследовать на абсолютную и условную сходимость интеграл $\int\limits_0^{+\infty} x^2\sin\left(\frac{\cos x^3}{x+1}\right)dx$

при $x\to+\infty$ $\sin\left(\frac{\cos x^3}{x+1}\right) = \frac{\cos x^3}{x+1} - \frac{\cos^3 x^3}{6(x+1)^3} + R(x)$, причем при $x>1$

справедливо $|R(x)|\cdot x^2 \le x^2/(5!(x+1)^5) \Rightarrow \int\limits_0^{+\infty} R(x)x^2$ сходится абсолютно

$\int\limits_0^{+\infty}\frac{x^2\cos x^3}{x+1}$ сходится по признаку Дирихле (функции $x^2\cos x^3$ и $1/(x+1)$)

$\int\limits_0^{+\infty}\frac{x^2\cos^3 x^3}{6(x+1)^3}$ сходится по признаку Дирихле (функции $x^2\cos^3 x^3$ и $1/6(x+1)^3$

$$\int\limits_0^{+\infty} x^2\left|\frac{\cos x^3}{x+1}-\frac{\cos^3 x^3}{6(x+1)^3}\right|dx \geqslant \int\limits_0^{+\infty}\frac{x^2|\cos x^3|}{x+1}dx \geqslant \int\limits_0^{+\infty}\frac{x^2}{x+1}\cos^2 x^3 =$$

$$=\underbrace{\int\limits_0^{+\infty}\frac{x^2}{2(x+1)}dx}_{\text{расходится}}+\int\limits_0^{+\infty}\frac{x^2\cos(2x^3)\,dx}{2(x+1)}$$ сходится по Дирихле (функции $x^2\cos(2x^3)$ и $1/2(x+1)$) =>

=> $\int\limits_0^{+\infty}x^2\sin\left(\frac{\cos x^3}{x+1}\right)dx$ сходится условно

<u>136.</u> Исследовать на абсолютную и условную сходимость при всех значениях параметра α интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\cos(1+2x)}{(\sqrt{x}-\ln x)^\alpha}dx$ " I

$f(x)=\frac{\cos(1+2x)}{(\sqrt{x}-\ln x)^\alpha}$

1) Найдём α, при которых I очевидно сх-ся абсолютно

$|f(x)|\leq\frac{1}{(\sqrt{x}-\ln x)^\alpha}\overset{x\to+\infty}{\sim}\frac{1}{(\sqrt{x})^\alpha}$ (т.к. $\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\to 0$ при $x\to+\infty$)

Отсюда I сх-ся абсолютно $\forall\ \alpha>2$

2) $\alpha\in(0,2]$: $f(x)=\underbrace{\cos(1+2x)}_{\text{имеет огр. первообр.}}\frac{1}{(\sqrt{x}-\ln x)^\alpha}$ при $x\to+\infty$ стремится к 0, $\exists x_0: \forall x>x_0$ монотонна =>

=> I сх-ся по Дирихле.

$|f(x)|\geqslant|\cos(1+2x)|$; $\sqrt{x}-\ln x\leq\sqrt{x}\quad\forall\ x\geq 1$

$$\int\limits_1^{+\infty}\frac{|\cos(1+2x)|}{x^{\alpha/2}}dx\geqslant\int\limits_1^{+\infty}\frac{\cos^2(1+2x)}{x^{\alpha/2}}dx=\frac{1}{2}\underbrace{\int\limits_1^{+\infty}\frac{\cos(1+2x)}{x^{\alpha/2}}dx}_{\text{сх-ся по Дирихле}}+\frac{1}{2}\underbrace{\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^{\alpha/2}}}_{\text{расходится}}$$

Вывод: при $\alpha\in(0,2]$ $\int\limits_1^{+\infty}f(x)dx$ сх-ся условно

3) $\alpha=0$: $\int\limits_1^{+\infty}\cos(1+2x)dx=\frac{1}{2}\sin(1+2x)\Big|_1^{+\infty}$ – не существует

4) $\alpha<0$: $\exists\, N: (\sqrt{x}-\ln x)^{-\alpha}\geq 1$ на $[c_1,c_2]$, где $c_1=(-\frac{\pi}{3}-1+2\pi N)\frac{1}{2}$, $c_2=(\pi/3-1+2\pi N)\frac{1}{2}$, тогда $\left|\int\limits_{c_1}^{c_2} f(x)dx\right| \geq \int\limits_{c_1}^{c_2}\frac{1}{2}dx=\frac{1}{2}(c_2-c_1)=\frac{\pi}{6}=:\varepsilon_0$

Вывод: при $\alpha\leq 0$ I расх-ся

139. Исследовать на абсолютную и условную сходимость при всех значениях параметра α интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{x^2\cos x^3}{(3x-\operatorname{arctg}x)^\alpha}dx=:I$

1) $\alpha\leq 0$ $\exists\, \varepsilon_0=\frac{1}{3}: \forall\, c>0\ \exists\, N: c_1,c_2>c: c_1=\sqrt[3]{2\pi N},\ c_2=\sqrt[3]{2\pi N+\pi/2}$

$$\left|\int\limits_{c_1}^{c_2}\frac{x^2\cos x^3}{(x-\operatorname{arctg}x)^\alpha}dx\right| \geq \int\limits_{c_1}^{c_2}x^2\cos x^3 dx=\frac{1}{3}\sin x^3\Big|_{c_1}^{c_2}=\frac{1}{3}=\varepsilon \Rightarrow I \text{ расх-ся}$$

2) $\alpha>3$ $\int\limits_1^{+\infty}\left|\frac{x^2\cos x^3}{(3x-\operatorname{arctg}x)^\alpha}\right|dx\leq\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^{\alpha-2}}$ - очевидно сх-ся $\Rightarrow I$ сх-ся абс.

3) $0<\alpha\leq 3$: $\int\limits_1^{+\infty}\left|\frac{x^2\cos x^3}{(3x-\operatorname{arctg}x)^\alpha}\right|dx\geq\int\limits_1^{+\infty}\frac{x^2\cos^2 x^3}{(3x-\operatorname{arctg}x)^\alpha}dx=\underbrace{\frac{1}{2}\int\limits_1^{+\infty}\frac{x^2dx}{(3x-\operatorname{arctg}x)^\alpha}}_{\text{расх-ся}}+$

$+\underbrace{\frac{1}{2}\int\limits_1^{+\infty}\frac{x^2\cos(2x^3)\,dx}{(3x-\operatorname{arctg}x)^\alpha}}_{\text{сх-ся по Дирихле (функции } x^2\cos(2x^3) \text{ и } (3x-\operatorname{arctg})^\alpha)}$

I сх-ся по Дирихле (функции $x^2\cos x^3$ и $(3x-\operatorname{arctg})^\alpha$)

Вывод: I сх-ся условно

227. Пусть $f(x)$, $x\in[0,+\infty)$ - непрерывная неотрицательная ф-ция, и пусть $\int\limits_0^{+\infty}f(x)dx$ сходится. Следует ли отсюда, что $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$?

Рассмотрим $f(x)=\sin(x^2)$

$$\int\limits_0^{+\infty}f(x)dx=\Big|_{t=x^2}\int\limits_0^{+\infty}\sin t\frac{dt}{2\sqrt{t}}=\underbrace{\int\limits_0^1\sin t\frac{dt}{2\sqrt{t}}}_{I_1}+\underbrace{\int\limits_1^{+\infty}\sin t\frac{dt}{2\sqrt{t}}}_{I_2}$$

при $t\to+0$ $\sin t\sim t$, а $\int\limits_0^1\frac{1}{2}\sqrt{t}dt$ сх-ся $\Rightarrow I_1$ сх-ся

I_2 сх-ся по Дирихле (ф-ции $\sin t$ и $\frac{1}{2\sqrt{t}}$)

$\Rightarrow \int\limits_0^{+\infty}f(x)dx$ - сх-ся, но $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \neq 0 \Rightarrow$ не следует

232. Исследовать на сходимость $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}-\sin x}\,dx$

$$\frac{\sin x}{\sqrt{x}-\sin x} = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,\frac{1}{1-(\sin x)/\sqrt{x}} = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\left(1+\frac{\sin x}{\sqrt{x}}+R'(x)\right) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}+\frac{\sin^2 x}{x}+R(x)$$

Т.к. $|R(x)| \leq 1/(x\sqrt{x})$, то $\int R(x)\,dx$ - сх-ся абсолютно

$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}$ - сх-ся по Дирихле (ф-ции $\sin x$ и $\frac{1}{\sqrt{x}}$)

$\int_1^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x}$ - расх-ся (см. задачу 120.)

Итак, $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x}-\sin x}\,dx$ расходится

§ 13

1(3) Найти n-ю частичную сумму S_n ряда и сумму S этого ряда

$$\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{3^n}+\frac{1}{5^n}\right)+\ldots=\left(\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{3^n}+\ldots\right)+$$
$$+\left(\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{5^n}+\ldots\right)$$

$$S_n = \frac{1}{3}\,\frac{3^{-n}-1}{3^{-1}-1}+\frac{1}{5}\,\frac{5^{-n}-1}{5^{-1}-1} = \frac{1-3^{-n}}{2}+\frac{1-5^{-n}}{4} = \frac{3}{4}-\frac{1}{2\cdot 3^n}-\frac{1}{4\cdot 5^n}$$

$$S = \frac{1}{2}+\frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

4(2) Найти n-ю частичную сумму S_n ряда и сумму S этого ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2+4n-3} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+3)(2n-1)} = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+3}\right] =$$

$$= \frac{1}{4}\left[1-\frac{1}{5}+\frac{1}{3}-\frac{1}{7}+\frac{1}{5}-\frac{1}{9}\cdots-\frac{1}{2n+1}+\cancel{\frac{1}{2n-1}}-\frac{1}{2n+3}\right]$$

$$S_n = \frac{1}{4}\left[4/3 - \left(\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+3}\right)\right] = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+3}\right)$$

$$S = \frac{1}{3}$$

<u>10.</u> Найти сумму ряда $a \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R}, |a| < 1$

$$\tilde{S} = \sum_{n=1}^{\infty} a^n e^{in\alpha} = -1 + \frac{1}{1-a^{i\alpha}} = \frac{a^{i\alpha}}{1-a^{i\alpha}} = \frac{a(\cos\alpha + i\sin\alpha)(1-a(\cos\alpha+i\sin\alpha))}{(1-a(\cos\alpha - i\sin\alpha))(1-a(\cos\alpha+i\sin\alpha))} =$$

$$= \frac{a(\cos\alpha - a\cos^2\alpha - ia\sin\alpha\cos\alpha + i\sin\alpha - ia\sin\alpha\cos\alpha - a\sin^2\alpha)}{(1-a\cos\alpha)^2 + a^2\sin^2\alpha} = \frac{a(\cos\alpha - a)}{1-2a\cos\alpha + a^2} +$$

$$+ i\frac{\sin\alpha}{1-2a\cos\alpha+a^2}$$

1) $\sum_{n=1}^{\infty} a^n \cos n\alpha = \operatorname{Re}\tilde{S} = \frac{a(\cos\alpha - a)}{1-2a\cos\alpha+a^2}$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} a^n \sin n\alpha = \operatorname{Im}\tilde{S} = \frac{\sin\alpha}{1-2a\cos\alpha+a^2}$

<u>11(5)</u> Доказать расходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1-\frac{2}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{2}}\right)^2\left(1-\frac{2}{n+1}\right)^{-1} =$$

$= e^{-2} \neq 0 \Rightarrow$ по необх. признаку сх-ти ряд расх-ся

<u>13(1)</u> Доказать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n,\ a_n = \frac{\cos nx}{2^n}$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon:\ \forall n \geq N_\varepsilon\ \forall p \in \mathbb{N}\ \left|\sum_{k=n+1}^{k+p} a_k\right| = \left|\frac{\cos(n+1)x}{2^{n+1}} + \ldots + \frac{\cos(n+p)x}{2^{n+p}}\right| <$$

$$< \frac{1}{2^{n+1}}\left[1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^p}\right] < \frac{1}{2^n} < \varepsilon$$

$\exists N_\varepsilon = \left\lceil \log_2\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right\rceil$, тогда критерий Коши сходимости ряда выполнен, а значит ряд сходится.

<u>14(1)</u> Доказать расходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, если

$$a_n = \frac{1}{2n+1}$$

$\exists \varepsilon_0 : \forall N \; \exists \; n \geqslant N \; \exists \; p \in \mathbb{N} : \left| \sum\limits_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| > \sum\limits_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{2k+2} = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{n+2} + \ldots +$
$+ \frac{1}{n+p+1}\Big) \geqslant \frac{1}{2} \frac{p}{n+p+1}$

$\exists \; \varepsilon_0, p, n : \quad \varepsilon_0 = \frac{1}{2} \frac{p}{n+p+1}$, тогда критерий Коши не выполнен, а значит ряд расходится.

§16

4. Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ есть разность рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$. Выяснить, можно ли утверждать, что этот ряд сходится, если:

1) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится;

2) оба этих ряда расходятся.

1) $\exists \varepsilon_0 : \forall N \; \exists \; n \geqslant N \; \exists \; p \in \mathbb{N} : \left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} a_k\right| \geqslant \varepsilon_0$

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N_\varepsilon \cdot \forall n \geqslant N \; \forall p \in \mathbb{N} \; \left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} b_k\right| < \varepsilon$

$\exists$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ сходится, тогда $\forall \varepsilon' > 0 \; \exists N'_\varepsilon : \forall n \geqslant N \; \forall p \in \mathbb{N}$

$\left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} c_k\right| = \left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} (a_k - b_k)\right| < \varepsilon$

$\exists \; \varepsilon' = \frac{\varepsilon_0}{2}, \; \varepsilon = \frac{\varepsilon_0}{2}$, тогда $\exists \; n = \max\{N_\varepsilon, N'_\varepsilon\} : \left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} (a_k - b_k)\right| \geqslant$
$\geqslant \left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} a_k\right| - \left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} b_k\right| \geqslant \varepsilon_0 - \varepsilon = \varepsilon_0 - \frac{\varepsilon_0}{2} = \frac{\varepsilon_0}{2} = \varepsilon'$?! $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ – расх-ся

2) $\exists \; a_n = b_n = 1/n \rightarrow c_n = 0 \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ – сх-ся $\Rightarrow$ нельзя это утв.

Т.5. Является ли сходящимся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, если $\forall p \in \mathbb{N}$ выполняется $\lim\limits_{n \to \infty} (a_{n+1} + \ldots + a_{n+p}) = 0$

Нет, например для $a_n = \frac{1}{n}$ $\forall p \in \mathbb{N} \; \lim\limits_{n\to\infty} (a_1 + \ldots + a_{n+p}) = 0$, но $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расх-ся.