№23.6(3) $\varphi(\vec{x}) = \vec{x} - (\vec{x}, \vec{n})\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|^2}$

$\forall \vec{x}, \vec{y}:\ \varphi(\vec{x}+\vec{y}) = \vec{x}+\vec{y}-(\vec{x}+\vec{y}, \vec{n})\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|^2} = \vec{x}-(\vec{x},\vec{n})\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|^2}+\vec{y}-(\vec{y},\vec{n})\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|^2} =$

$= \varphi(x)+\varphi(y)$

$\forall \vec{x}, \alpha \quad \varphi(\alpha\vec{x}) = \alpha\vec{x} - (\alpha\vec{x}, \vec{n})\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|^2} = \alpha\varphi(\vec{x})$ $\Bigg|$ $\Rightarrow \varphi(\vec{x})$ - линейное

$\varphi(\vec{x})$ - проекция $\vec{x}$ на подпространство

№23.9(3)

$$\varphi(\vec{x}) = \vec{x} - \frac{(\vec{x},\vec{n})}{|\vec{n}|^2}\vec{n} \overset{\text{в ОНБ}}{=} \vec{x} - \frac{(\vec{x}, \|1\,1\,1\|^T)}{3}\|1\,1\,1\|^T \overset{\text{в ОНБ}}{=} \|x\,y\,z\|^T -$$

$$- \frac{1}{3}(x+y+z)\|1\,1\,1\|^T = \frac{1}{3}\begin{Vmatrix} 2x-y-z \\ 2y-x-z \\ 2z-x-y \end{Vmatrix} = \mathcal{A}\begin{Vmatrix} x \\ y \\ z \end{Vmatrix} \qquad \mathcal{A} = \|\alpha_{ij}\|$$

$$\begin{cases} 2x-y-z = 3\alpha_{11}x+3\alpha_{12}y+3\alpha_{13}z \\ 2y-x-z = 3\alpha_{21}x+3\alpha_{22}y+3\alpha_{23}z \\ 2z-x-y = 3\alpha_{31}x+3\alpha_{32}y+3\alpha_{33}z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{Vmatrix} 2-3\alpha_{11} & -1-3\alpha_{12} & -1-3\alpha_{13} \\ -1-3\alpha_{21} & 2-3\alpha_{22} & -1-3\alpha_{23} \\ -1-3\alpha_{31} & -1-3\alpha_{32} & 2-3\alpha_{33} \end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} x \\ y \\ z \end{Vmatrix} = 0$$

$\forall \|x\,y\,z\|^T \Rightarrow \alpha_{ii} = \frac{2}{3},\ \alpha_{ij} = -\frac{1}{3} \Rightarrow$ искомая $\mathcal{A} = \frac{1}{3}\begin{Vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{Vmatrix}$

№23.15 $\mathcal{L} = \mathcal{L}' \oplus \mathcal{L}''$ представление единственно, т.к. $\mathcal{L} = \mathcal{L}'\oplus\mathcal{L}''$

1) $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{L}$; $\vec{x}', \vec{y}' \in \mathcal{L}'$; $\vec{x}'', \vec{y}'' \in \mathcal{L}''$; $\vec{x} = \vec{x}'+\vec{x}''$; $\vec{y} = \vec{y}'+\vec{y}''$

$\varphi(\vec{x})+\varphi(\vec{y}) = \varphi(\vec{x}'+\vec{x}'')+\varphi(\vec{y}'+\vec{y}'') = \vec{x}'+\vec{y}' = \varphi(\vec{x}'+\vec{x}''+\vec{y}'+\vec{y}'') = \varphi(\vec{x}+\vec{y})$

$\varphi(\alpha\vec{x}) = \varphi(\alpha\vec{x}'+\alpha\vec{x}'') = \alpha\vec{x}' = \alpha\varphi(\vec{x}'+\vec{x}'') = \alpha\varphi(\vec{x})$

$\varphi(\vec{x}) = 0$, если $\vec{x} \in \mathcal{L}'' \Rightarrow \operatorname{Ker}\varphi = \mathcal{L}''$. $\operatorname{Im}\varphi = \mathcal{L}'$

$\exists\ \{\vec{e}\,'_i\}_{i=1}^{i=\dim\mathcal{L}'}$ - базис в $\mathcal{L}'$; $\{\vec{e}\,''_i\}_{i=1}^{i=\dim\mathcal{L}''}$ - базис в $\mathcal{L}''$.

Тогда $\varphi(\vec{e}\,'_i) = \vec{e}\,'_i$; $\varphi(\vec{e}\,''_i) = \vec{0} \Rightarrow$ искомая $\mathcal{A} = \left\|\begin{array}{c|c} E & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right\| \begin{array}{l} \updownarrow \dim\mathcal{L}' \\ \updownarrow \dim\mathcal{L}'' \end{array}$

2) Если $\varphi: \mathcal{L} \to \mathcal{L}'$ $\operatorname{Ker}\varphi = \mathcal{L}''$; $\operatorname{Im}\varphi = \mathcal{L}'$;

$\mathcal{A} = \|\underbrace{E \,\vdots\, O}_{\dim\mathcal{L}}\| \updownarrow \dim\mathcal{L}'$

№23.28(3)

φ в $\vec{e}$: $A = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$ $\quad \ker\varphi = \{\vec{x} \mid A\vec{x} = 0\}$

$$\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \sim^{\text{I}-\text{II}-\text{III}} \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \sim^{-\text{II}}_{\text{I}+\text{II}} \overset{(*)}{\begin{Vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{Vmatrix}} \Rightarrow \Phi = \begin{Vmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{Vmatrix} \Rightarrow \ker\varphi \text{ - лин.}$$

оболочка $\|1\ -1\ 1\|^T$. $\ker\varphi \neq \{\vec{0}\} \Rightarrow \varphi$ не инъективное $\Rightarrow \varphi$ не изоморфизм.

$\operatorname{Im}\varphi = \{\vec{y} \mid \vec{y} = A\vec{x}\}$. $\exists\, \vec{y} = \|h_1\ h_2\ h_3\|^T$

Найти $\operatorname{Im}\varphi$ - выяснить при каких h_i $\vec{y} = A\vec{x}$ - совместна.

Т. Кронекера-Капелли: $\operatorname{rg}\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 1 & h_1 \\ 1 & 1 & 0 & h_2 \\ -1 & 0 & 1 & h_3 \end{Vmatrix} = \operatorname{rg}\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & h_1-h_2-h_3 \\ 1 & 1 & 0 & h_2 \\ -1 & 0 & 1 & h_3 \end{Vmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow h_1 - h_2 - h_3 = 0 \Rightarrow \Phi = \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} \Rightarrow \operatorname{Im}\varphi$ - лин. оболочка $\begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix}, \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix}$

№23.29(3) $P \to Q$

$$A = \begin{Vmatrix} -2 & 6 & -4 \\ 1 & -3 & 2 \\ 7 & -21 & 14 \\ -3 & 9 & -6 \end{Vmatrix} \sim \begin{matrix} \\ 2\text{II}+\text{I} \\ \text{III}-7\text{II} \\ \text{IV}+3\text{II} \end{matrix} \begin{Vmatrix} -2 & 6 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \Rightarrow \Phi = \begin{Vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} \Rightarrow \ker\varphi \text{ -}$$

лин. оболочка $\|3\ 1\ 0\|^T$ и $\|-2\ 0\ 1\|^T$. $\ker\varphi \neq \{\vec{0}\} \Rightarrow \varphi$ не инъек.

$\operatorname{Im}\varphi = \{\vec{y} \mid \vec{y} = A\vec{x}\}$, $\exists\, \vec{y} = \|h_1\ h_2\ h_3\ h_4\|^T$

$$\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \end{Vmatrix} = 0, \quad \begin{array}{cccc} \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \\ \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \end{array} \sim \begin{matrix} 7\text{I}+2\text{II} \\ -\text{II} \\ 7\text{III}+3\text{II} \end{matrix} \begin{array}{c} \begin{Vmatrix} 7 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 7 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 7 & 3 \end{Vmatrix} \\ \begin{matrix} 1 & 2 & 4 & 3 \end{matrix} \end{array}$$

$$\tilde{\Phi} = \begin{array}{cc} \begin{Vmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \\ 7 \end{Vmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 3 \end{matrix} \end{array} \Rightarrow \Phi = \begin{Vmatrix} -2 \\ 1 \\ 7 \\ -3 \end{Vmatrix} \Rightarrow \operatorname{Im}\varphi \text{ - лин. оболочка } \|-2\ 1\ 7\ -3\|^T$$

Т.к. $\operatorname{Im}\varphi \neq Q \Rightarrow \varphi$ не сюръективно

№23.35

$\varphi(\vec{x}+\vec{y}) : \|x_1+y_1 \quad x_2+y_2 \quad x_3+y_3\|^T \longrightarrow \left\|\begin{matrix} x_2+y_2 & x_3+y_3 \\ -x_3-y_3 & x_1+y_1 \end{matrix}\right\| =$

$= \left\|\begin{matrix} x_2 & x_3 \\ -x_3 & x_1 \end{matrix}\right\| + \left\|\begin{matrix} y_2 & y_3 \\ -y_3 & y_1 \end{matrix}\right\| = \varphi(\vec{x}) + \varphi(\vec{y})$

$\varphi(\lambda\vec{x}) : \|\lambda x_1 \quad \lambda x_2 \quad \lambda x_3\|^T \longrightarrow \left\|\begin{matrix} \lambda x_2 & \lambda x_3 \\ -\lambda x_3 & \lambda x_1 \end{matrix}\right\| = \lambda \left\|\begin{matrix} x_2 & x_3 \\ -x_3 & x_1 \end{matrix}\right\| = \lambda\varphi(\vec{x})$

Т.е. φ – линейное

Сопоставим $\left\|\begin{matrix} x_2 & x_3 \\ -x_3 & x_1 \end{matrix}\right\| - \left\|\begin{matrix} x_2 \\ -x_3 \\ x_3 \\ x_1 \end{matrix}\right\|$ => очев., что $\operatorname{Ker}\varphi =$

$= \{\vec{x} \mid \varphi(\vec{x}) = \vec{0}\} = \{\vec{0}\}$ => φ – инъективное

$\vec{e}_1 = \|1\ 0\ 0\|^T; \ \vec{e}_2 = \|0\ 1\ 0\|^T; \ \vec{e}_3 = \|0\ 0\ 1\|^T$

$f_1 = \left\|\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}\right\|; \ f_2 = \left\|\begin{matrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix}\right\|; \ f_3 = \left\|\begin{matrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{matrix}\right\|; \ f_4 = \left\|\begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}\right\|$

$\varphi(\vec{e}_1) = \left\|\begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}\right\| = f_4; \ \varphi(\vec{e}_2) = \left\|\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}\right\| = f_1; \ \varphi(\vec{e}_3) = \left\|\begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix}\right\| = f_2 - f_3$

$$\mathcal{A} = \left\|\begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{matrix}\right\|$$

23.40 (1а, 1б) $\vec{x} \in P^{(m)}$

1) $D(\vec{x}) = \frac{d}{dt}\left(\sum_{k=0}^{m} \alpha_k t^k\right) = \sum_{k=0}^{m-1} k\alpha_k t^{k-1} \in P^{(m)}$

$D(\vec{x}) = \sum_{k=0}^{m-1} k\alpha_k t^{k-1} \equiv 0$ – верно только для многочленов $\vec{x}$ нулевой степени.

а) $\varphi(t^k) = kt^{k-1}$ => $\mathcal{A} = \left\|\begin{matrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ & & & m-1 & 0 \\ & & & 0 & m \\ 0 & 0 & \dots & & 0 \end{matrix}\right\|$

б) $\varphi\left(\frac{t^k}{k!}\right) = \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}$ => $\mathcal{A} = \left\|\begin{matrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & 1 & \ddots & \vdots \\ & & & & 1 \\ 0 & & \dots & & 0 \end{matrix}\right\|$

23.57 (1,3)

1) $A = \left\|\begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{matrix}\right\|, \ B = \left\|\begin{matrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -6 & 6 \end{matrix}\right\|$

$B = SA$ => S - единств. и равно BA^{-1}, если $\exists A^{-1}$

а) $\|B|A\| = \left\|\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -6 & 6 & 1 & -3 & 3 \end{array}\right\| \sim \begin{array}{c} \scriptstyle \mathrm{I}-\mathrm{III}-\mathrm{II} \quad \mathrm{II}+\mathrm{III} \\ \left\|\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 6 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right\| \end{array} \sim \begin{array}{c} \scriptstyle \mathrm{II}-\mathrm{III}+3\mathrm{I} \quad \mathrm{III}-3\mathrm{I} \\ \left\|\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 5 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right\| \end{array} \sim$

$\sim \begin{array}{c} \scriptstyle \mathrm{II} \quad \mathrm{III} \quad \mathrm{I} \\ \left\|\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 5 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right\| \end{array} = \|BA^{-1}|E\| = \|S|E\|$

$\left\|\begin{matrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{matrix}\right\|$ - матрица лин. преобр. $\mathcal{L}$, переводящее $\vec{a}_i$ в $\vec{b}_i$ в станд. базисе

б) $\mathcal{A}' = S^{-1}_{e\to e'} \mathcal{A} S_{e\to e'}$. $\mathcal{A} = S$ (из (а)) $\mathcal{A}'$ - $\vec{a}_i - \vec{b}_i$ в базисе $\vec{a}_i$

$A = S_{e\to e'} \left\|\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right\| \Rightarrow S_{e\to e'} = A$

A^{-1}: (те же эл. преобр., что и в вычислении $\|B|A\|$)

$\left\|\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right\| \sim \begin{array}{c} \scriptstyle \mathrm{I}-\mathrm{III}-\mathrm{II} \quad \mathrm{II}+\mathrm{III} \\ \left\|\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{matrix}\right\| \end{array} \sim \begin{array}{c} \scriptstyle \mathrm{II}-\mathrm{III}+3\mathrm{I} \quad \mathrm{III}-3\mathrm{I} \\ \left\|\begin{matrix} 1 & 3 & -3 \\ -1 & -2 & 3 \\ -1 & -3 & 4 \end{matrix}\right\| \end{array} \sim \begin{array}{c} \scriptstyle \mathrm{II} \quad \mathrm{III} \quad \mathrm{I} \\ \left\|\begin{matrix} 3 & -3 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \\ -3 & 4 & -1 \end{matrix}\right\| \end{array} = S^{-1}_{e\to e'}$

$\mathcal{A}' = \left\|\begin{matrix} 3 & -3 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \\ -3 & 4 & -1 \end{matrix}\right\| \left\|\begin{matrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{matrix}\right\| \left\|\begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} 3 & -3 & 1 \\ -4 & 6 & -2 \\ -6 & 8 & -2 \end{matrix}\right\| \left\|\begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{matrix}\right\|$

$\left\|\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{matrix}\right\|$ - матрица лин. преобр. $\mathcal{L}$, переводящее $\vec{a}_i$ в $\vec{b}_i$ в базисе $\vec{a}_i$

№23.57(3)

$A = \left\|\begin{matrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{matrix}\right\|, \quad B = \left\|\begin{matrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & -2 & -1 \end{matrix}\right\|$

а) $\|B|A\| = \left\|\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -2 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right\| \sim \begin{array}{c} \scriptstyle \mathrm{II}+\mathrm{I}+\mathrm{III} \\ \left\|\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right\| \end{array} \sim \begin{array}{c} \scriptstyle \mathrm{I}-2\mathrm{II} \quad \mathrm{III}+2\mathrm{II} \\ \left\|\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & -3 & -7 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right\| \end{array} \sim$

$\sim \begin{array}{c} \scriptstyle \mathrm{III} \quad \mathrm{I} \\ \left\|\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -7 & -3 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right\| \end{array}$. $\left\|\begin{matrix} -1 & -1 & 2 \\ -5 & -1 & 2 \\ -7 & -3 & 6 \end{matrix}\right\|$ - матрица лин. преобр. $\mathcal{L}$: $\vec{a}_i - \vec{b}_i$ в $\vec{e}$

б) $\mathcal{A}' = S^{-1}_{e\to e'}\,\mathcal{A}\,S_{e\to e'} = A^{-1}\mathcal{A}A$

$$A^{-1}:\ \begin{Vmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{Vmatrix} \sim \overset{\mathrm{II}+\mathrm{I}+\mathrm{III}}{\begin{Vmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&1&1\end{Vmatrix}} \sim \overset{\mathrm{I}-2\mathrm{II}\quad \mathrm{II}+2\mathrm{II}}{\begin{Vmatrix}-1&1&2\\-2&1&2\\-2&1&3\end{Vmatrix}} \sim \overset{\mathrm{III}\quad \mathrm{I}}{\begin{Vmatrix}2&1&-1\\2&1&-2\\3&1&-2\end{Vmatrix}}$$

$$\mathcal{A}' = \begin{Vmatrix}2&1&-1\\2&1&-2\\3&1&-2\end{Vmatrix}\begin{Vmatrix}-1&-1&2\\-5&-1&2\\-7&-3&6\end{Vmatrix}\begin{Vmatrix}0&-1&1\\2&1&-2\\1&-1&0\end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix}0&0&0\\7&3&-6\\6&2&-4\end{Vmatrix}\begin{Vmatrix}0&-1&1\\2&1&-2\\1&-1&0\end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix}0&0&0\\0&2&1\\0&0&2\end{Vmatrix}$$

$\begin{Vmatrix}0&0&0\\0&2&1\\0&0&2\end{Vmatrix}$ - матрица лин. преобр. $\mathcal{L}: \vec{a}_i \to \vec{b}_i$ в базисе $\vec{a}_i$

23.70(1,3)

1) $$\|\vec{e}_1 \dots \vec{e}_j \dots \vec{e}_i \dots \vec{e}_n\| = \|\vec{e}_1 \dots \vec{e}_i \dots \vec{e}_j \dots \vec{e}_n\| \overbrace{\begin{array}{c|ccc|c} & 1 \ddots & & & \\ & & 0 & 1 & i \\ & & 1 & \ddots 1 & j \\ \hline & & i & j & \end{array}}^{S}$$

$\mathcal{A}' = S^{-1}AS = SAS$

Т.е. $\mathcal{A}'$ – $\mathcal{A}$, у которой поменяли i, j столбец и i, j строку.

3) $$\|\vec{e}_1 \dots \vec{e}_i + \vec{e}_j \dots \vec{e}_n\| = \|\vec{e}_1 \dots \vec{e}_i \dots \vec{e}_n\| \overbrace{\begin{array}{c|ccc|c} & 1 \ddots & & O & \\ & & 1 & & i \\ & O & 1 & 1 \ddots 1 & j \\ \hline & & i & j & \end{array}}^{S}$$

$$S^{-1} = \begin{array}{|ccc|c} 1 \ddots & & O & \\ & 1 & & i \\ O & -1 & 1 \ddots 1 & j \\ \hline & i & j & \end{array}$$

$\Rightarrow \mathcal{A}' = S^{-1}\mathcal{A}S$ - $\mathcal{A}$, у которой сложили i-ый и j-ый столбец, затем вычли из i-ой строки j-ую строку.