



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

**САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ  
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ АКАДЕМИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ  
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК**

---

На правах рукописи

Диссертация допущена к защите

Зав.кафедрой

«\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2015 г.

**ДИССЕРТАЦИЯ  
НА СОИСКАНИЕ УЧЕНОЙ СТЕПЕНИ  
МАГИСТРА**

Перенормированное эффективное действие теории  
Янга–Миллса в однопетлевом приближении

Направление: 011200.68      Физика

Выполнил студент \_\_\_\_\_ В. И. Честнов

Научный руководитель,  
Акад., д.ф.-м.н. \_\_\_\_\_ Л. Д. Фаддеев

Рецензент  
Доцент, PhD \_\_\_\_\_ И. Е. Шендерович

Санкт-Петербург  
2015 г.

# Реферат

Целью данной работы является вычисление однопетлевых поправок к эффективному действию в теории Янга–Миллса.

В результате предложен метод расчёта однопетлевого эффективного действия и приведён пример его использования.

Работа состоит из двух глав, введения, заключения и трёх приложений. Во введении в краткой форме излагаются основы теории Янга–Миллса, обсуждается актуальность проблемы. В главе 1 строится представление для однопетлевого эффективного действия в виде интеграла по траекториям. В главе 2 приводится пример применения полученного представления для случая медленно меняющегося калибровочного поля. В заключении подводятся итоги и описываются возможные направления дальнейших работ. В приложении А вычисляется интеграл Дьяконова–Петрова по траекториям на  $SU(2)$  для постоянного поля с внешним источником, необходимый для построения теории возмущений. В приложении В доказывается связь калибровочного потенциала и тензора напряженности в калибровке Фока–Швингера. В приложении С приводится явное вычисление аргумента экспоненты в формуле Дьяконова–Петрова при параметризации элемента группы  $SU(2)$  углами Эйлера.

# Оглавление

Введение	4
<b>1 Тепловое ядро</b>	<b>7</b>
1.1 След теплового ядра как функциональный интеграл . . . . .	7
1.2 Формула Дьяконова–Петрова . . . . .	8
1.3 Обсуждение . . . . .	9
<b>2 Градиентное разложение</b>	<b>11</b>
2.1 Введение . . . . .	11
2.2 Ковариантно–постоянное поле . . . . .	13
2.3 Вычисление $\Gamma_1$ . . . . .	15
2.4 Результат . . . . .	19
<b>Заключение</b>	<b>21</b>
<b>А Интеграл по <math>SU(2)</math> с внешним источником</b>	<b>22</b>
<b>В Калибровка Фока–Швингера</b>	<b>25</b>
<b>С Аргумент экспоненты в формуле Дьяконова–Петрова</b>	<b>28</b>
<b>Литература</b>	<b>31</b>

# Введение

Теория Янга–Миллса – это калибровочная теория поля, лежащая в основе Стандартной Модели элементарных частиц. Она обобщает квантовую электродинамику на случай неабелевой калибровочной группы. С её помощью строится квантовая хромодинамика (КХД) — теория сильных взаимодействий кварков и глюонов. Одним из главных открытых вопросов в КХД является описание квантовых эффектов в пределе низких энергий (инфракрасный режим). Известно, что в этой области существует конфайнмент — невозможность получения свободных кварков, так как на эксперименте наблюдают только составные состояния из нескольких кварков. Для объяснения этого эффекта была предложена модель дуального сверхпроводника (см. например, обзор [1]), необходимым элементом которой является наличие конденсата глюонной плотности. Однако механизм его получения из исходной теории до сих пор неизвестен. В этой работе мы исследуем эффективное действие теории Янга–Миллса, с помощью которого можно получить информацию о структуре глюонных вакуумных возбуждений. Возможно при этом получится доказать наличие конденсата и, как следствие, объяснить конфайнмент.

Квантовые теории поля, как правило, описываются с помощью лагранжианов. Лагранжиан Янга–Миллса имеет следующий вид:

$$\mathcal{L}_{\text{YM}}[A] = -\frac{1}{4g^2} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu},$$

где  $F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c$  — тензор напряжённости,  $f^{abc}$  — структурные константы калибровочной группы,  $d$  — размерность пространства,  $g$  — константа связи. Отличительной чертой случая  $d = 4$  является тот факт, что константа связи  $g$  здесь безразмерна.

Квантование теории Янга–Миллса удобно проводить в формализме функционального интеграла. В этой работе мы будем исследовать однопетлевое эффектив-

ное действие  $\mathcal{S}^{\text{eff}}$  — модифицированное действие теории, учитывающее квантовые поправки:

$$\exp \{i\mathcal{S}^{\text{eff}}[A]\} = \int \mathcal{D}a \exp \left\{ i \int d^4x \mathcal{L}_{\text{YM}}[A + a] \right\}.$$

С помощью этого объекта можно получить информацию о корреляторах, вакуумных средних от операторов и т. д. Термин «однопетлевое» означает, что учитываются только низшие квантовые поправки по постоянной Планка  $\hbar$ .

Однопетлевое эффективное действие в теории Янга–Миллса представляет собой разность логарифмов детерминантов двух операторов:

$$\mathcal{S}^1 = \frac{1}{2} \ln \det \left( (-\nabla^2)^{ab} - 2if^{acb} F_{\mu\nu}^c \right) - \ln \det (-\nabla^2), \quad (1)$$

где  $\nabla_\mu = \partial_\mu - iA_\mu$  — ковариантная производная. В этой формуле первый член соответствует вкладу калибровочного поля, второй — вкладу духов Фаддеева–Попова, которые вводятся в теорию в процессе фиксирования калибровки. Слагаемые в (1) сами по себе плохо определены и нуждаются в регуляризации. Именно из-за этого в квантовой теории Янга–Миллса появляется параметр, играющий роль массы (или размера), хотя классическая теория Янга–Миллса не содержит размерных констант связи и является масштабно-инвариантной. Это явление называется размерной трансмутацией. Для регуляризации логарифмов детерминантов в (1) обычно используют метод теплового ядра [2] (или, что тоже самое, метод собственного времени Фока [3]):

$$\mathcal{S}^1[A] = \int_0^\infty \frac{dt}{t} D(A, t),$$

где  $D(A, t)$  — тепловое ядро. Если интересоваться только ультрафиолетовой расходимостью  $t \rightarrow 0$ , то для теплового ядра можно написать разложение Сили–деВитта по степеням  $t$  и получить такой результат:

$$D(A, t) = \frac{1}{g^2} \beta \int_0^\infty d^4x \operatorname{tr} F_{\mu\nu}^2 + \mathcal{O}(t),$$

где  $\beta = -\frac{11}{3} \frac{C_2(G)}{(4\pi)^2} g^2$  — бета-функция теории ( $C_2(G)$  — нормировка оператора Казимира в присоединённом представлении). Интеграл по собственному времени ре-

гуляризуем так:  $\int_0^\infty \frac{dt}{t} = 2 \ln \frac{\Lambda}{m}$ , где  $\Lambda$  — импульс обрезания,  $m$  — тот самый масштабный параметр теории. Всё это приведёт к следующему виду эффективного действия (в ультрафиолетовом пределе):

$$\mathcal{S}^{\text{eff}} = -\frac{1}{4g^2} \left( 1 + \beta \ln \frac{\Lambda}{m} \right) \int d^d x \operatorname{tr} F_{\mu\nu}^2. \quad (2)$$

Однако, разложение по степеням  $t$  непригодно для описания инфракрасного режима  $t \rightarrow \infty$ , так как каждый член такого ряда по отдельности будет расходиться. Поэтому в работе [4] было предложено представление теплового ядра в виде интеграла по траекториям. Мы вкратце изложим этот метод в главе 1. С его помощью было построено разложение эффективного действия (1) по производным тензора напряженности  $F_{\mu\nu}$  для квантовой электродинамики. В этой работе мы продолжаем эту идею. В главе 2 мы покажем способ вычисления  $\mathcal{S}^{\text{eff}}$  для специального случая ковариантно-постоянного поля, а также предложим метод построения градиентного разложения в случае неабелевой калибровочной группы  $SU(2)$ . В дальнейшем с помощью этих результатов можно будет рассматривать более сложные и неоднородные полевые конфигурации для нахождения вакуумных возбуждений глюонов для построения теории конфайнмента.

# Глава 1

## Тепловое ядро

В этой главе мы доказываем формулу (8), выражающую след теплового ядра  $K_M$  эллиптического оператора  $M$  через интеграл по петлям в  $\mathbb{R}^4 \times SU(2)$ .

### 1 След теплового ядра как функциональный интеграл

Этот раздел посвящён введению в метод теплового ядра  $K_M$  и доказательству его представления в виде интеграла по траекториям (5).

Для вычисления логарифма детерминанта оператора  $M$  удобно использовать метод собственного времени [3], который заключается в нахождении т.н. теплового ядра:

$$K_M(x, y; t) = \langle x | e^{-Mt} | y \rangle,$$

которое удовлетворяет «уравнению теплопроводности»:

$$\begin{aligned} (\partial_t + M)K_M(x, y; t) &= 0, \\ K_M(x, y; t) &= \delta(x - y). \end{aligned}$$

С помощью теплового ядра можно вычислить логарифм детерминанта оператора  $M$ :

$$\ln \det M - \ln \det M_0 = - \int_0^\infty \frac{dt}{t} \operatorname{tr} (e^{-Mt} - e^{-M_0 t}) = - \int_0^\infty \frac{dt}{t} (K_M(t) - K_{M_0}(t)). \quad (3)$$

Для эллиптического оператора  $M = -\nabla^2 + B$  существует разложение Сили–

деВитта теплового ядра по степеням собственного времени  $t$ :

$$K_M(x, y; t) = \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} \sum_{n=0}^{\infty} a_M^n(x, y) t^n \quad (4)$$

При совпадающих точках  $x = y$ , разложение примет вид:

$$K_M(y, y; t) = \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} \left[ 1 - tB(y) - t^2 \left( \frac{1}{12} F_{\alpha\beta}(y) F_{\alpha\beta}(y) - \frac{1}{2} B^2(y) + \frac{1}{6} \nabla^2 B(y) \right) + \dots \right]$$

Отсюда можно получить представление теплового ядра через интеграл по путям:

$$\begin{aligned} K_M(x, y; t) &= \int dz_{n-1} \dots dz_1 \langle x | e^{-Mt/n} | z_{n-1} \rangle \langle z_{n-1} | \dots | z_1 \rangle \langle z_1 | e^{-Mt/n} | y \rangle \\ &= \int_{z(0)=y}^{z(t)=x} \mathcal{D}z(\tau) \mathcal{P} \exp \left\{ \int_0^t d\tau \left( -\frac{\dot{z}^2}{4} + iA_\mu(z) \dot{z}_\mu - B(z) \right) \right\}. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь возникает  $\mathcal{P}$ -экспонента, упорядочивающая входящие в неё матрицы вдоль пути  $z(\tau)$ : в разложении этой экспоненты в степенной ряд, в каждом слагаемом матрицы с бóльшим значением  $\tau$  стоят слева от матриц с меньшим  $\tau$ . Этот объект также известен как Вильсоновская линия или голономия связности. Важным свойством этого объекта является его зависимость от пути, вдоль которого производится интегрирование, что делает невозможным прямой расчёт интеграла (5).

## 2 Формула Дьяконова–Петрова

Для следа  $\mathcal{P}$ -экспоненты (т.е. петли Вильсона) Дьяконовым и Петровым была предложена следующая формула [5]:

$$\text{tr} \mathcal{P} \exp \left( i \int_0^t d\tau A^J \right) = \int \mathcal{D}U \exp \left\{ iJ \int_0^t d\tau \text{tr} [\sigma_3 (U^\dagger A U + iU^\dagger U)] \right\}, \quad (6)$$

где вводится вспомогательное поле  $U(\tau) \in SU(2)$  на отрезке  $[0, t]$ ,  $A^J = A_\mu^J \dot{x}_\mu$ , поле  $A_\mu^J \in \mathfrak{su}(2)$  в представлении спина  $J$ , а в правой части  $A = A_\mu \dot{x}_\mu$  предполагается в фундаментальном представлении. Оригинальное доказательство этой формулы в работе [5] основывается на регуляризации интеграла по  $SU(2)$  кинети-



ческим членом. В то же время в статье [6] для постоянного  $A = A^3 \frac{\sigma_3}{2}$  предлагается другая регуляризация, основываясь на которой можно доказать и исходную формулу (6) (см. также [4]). Используя параметризацию  $U \in SU(2)$  углами Эйлера  $(\phi, \psi, \theta)$

$$U = e^{-i\phi\sigma_3/2} e^{-i\theta\sigma_2/2} e^{-i\psi\sigma_3/2}, \quad (7)$$

можно показать, что вклад в интеграл будут давать только траектории с  $\cos \theta = l/J$ , где  $l = -J \dots J$  [4], в отличие от фейнмановского континуального интеграла, в котором основной вклад несут непрерывные траектории. Таким образом, (6) даёт пример интеграла по траекториям, в котором мера сосредоточена на «дискретных» траекториях.

### 3 Обсуждение

Разложение Сили–деВитта (4) подходит, в основном, для исследования ультрафиолетового поведения  $t \rightarrow 0$  интегралов в (3). В частности, относительно легко можно получить  $\beta$ -функцию теории Янга–Миллса (в согласии с [7, 8]). Однако, эта формула не подходит для интегрирования по собственному времени в (3), так как каждое слагаемое будет расходиться на верхнем (инфракрасном) пределе  $t \rightarrow \infty$ . Поэтому для изучения конечных поправок в однопетлевом эффективном действии (1) необходимо использовать представление (5). Объединяя этот результат с формулой Дьяконова–Петрова (6), получим:

$$K_M(t) = \int \mathcal{D}z \mathcal{D}U \exp \left\{ \int_0^t d\tau \left( -\frac{\dot{z}^2}{4} + iJ \text{tr} \sigma_3 \left( U^\dagger A_\mu U \dot{z}_\mu + iU^\dagger B U + iU^\dagger \dot{U} \right) \right) \right\}, \quad (8)$$

где на переменные интегрирования наложены периодические граничные условия:  $z(0) = z(t)$  и  $U(0) = U(t)$ , при этом  $z(\tau) \in \mathbb{R}^4$ , а  $U(\tau) \in SU(2)$ , а  $M = -\nabla^2 + B$ .

Формула (8) может быть отправной точкой для нахождения с конечных поправок в эффективном действии. При этом на поле  $A_\mu$  необходимо накладывать некоторые условия, которые дадут возможность продвинуться в вычислении интеграла (8). Например, можно считать поле  $A_\mu$  ковариантно-постоянным и получить уже известный результат [9] (см. также [4]). Однако, в этом случае ваку-

ум, как уже отмечалось, будет неустойчивым. Альтернативой этому пути может быть использование переменных Фаддеева–Ниёми [10], с помощью которых можно рассматривать различные нетривиальные полевые конфигурации. В частности, интересно было бы написать разложение по производным плотности глюонного конденсата  $\rho$  (введённой в работе [10]). Но для этого сначала надо понять, как строится более простое разложение по производным тензора напряжённости  $F_{\mu\nu}$  (в случае  $SU(2)$ ), так как это будет обобщением результата для ковариантно–постоянного поля и даст основу для дальнейших вычислений в более сложных анзацах.

## Глава 2

# Градиентное разложение

### 1 Введение

В этой главе исследуется частный случай формулы (8): мы будем строить разложение теплового ядра по производным тензора напряжённости  $F_{\mu\nu}$ , что соответствует неабелеву калибровочному полю медленно меняющейся амплитуды и обобщает результат для ковариантно-постоянного поля. Подобные разложения можно строить и для других полевых конфигураций (например, используя переменные Фаддеева–Ниёми), но рассматриваемый здесь случай является, по всей видимости, самым простым.

Итак, градиентное разложение теплового ядра можно получить в калибровке Фока–Швингера  $(x - y)_\mu A_\mu(x) = 0$ , так как в ней есть замечательная связь потенциала  $A_\mu$  и напряженности поля  $F_{\mu\nu}$  (также см. Приложение B):

$$A_\mu(x) = - \int_0^1 dz s_\nu z F_{\mu\nu}(y + sz) = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(n+2)} s_\nu s_{\rho_1} \dots s_{\rho_n} \partial_{\rho_1} \dots \partial_{\rho_n} F_{\mu\nu}(y), \quad (9)$$

где  $s = x - y$ , а второе равенство получается интегрированием ряда Тейлора для тензора напряженности  $F_{\mu\nu}$ . Отметим, что в калибровке Фока–Швингера присутствует условие, фиксирующее калибровочное поле в точке  $A_\mu(y) = 0$ , поэтому в точке  $y$  можно заменить  $\partial_\mu \rightarrow \nabla_\mu$  в разложении (9), что мы и будем предполагать далее.

Теперь рассмотрим функциональный интеграл для теплового ядра оператора

$M = -\nabla^2$  (вклад духов в (1)), используя представление (8):

$$K_{-\nabla^2}(t) = \int_{s(0)=s(t)=0} \mathcal{D}s \mathcal{D}U \exp \left\{ \int_0^t d\tau \left( -\frac{\dot{s}^2}{4} + iJ \text{tr} \left[ \sigma_3 \left( -\frac{1}{2} U^\dagger F_{\mu\nu} U \dot{s}_\mu s_\nu + iU^\dagger \dot{U} \right) \right] \right. \right. \\ \left. \left. + iJ \text{tr} \left[ \sigma_3 \left( -\frac{1}{3} U^\dagger \nabla_\rho F_{\mu\nu} U \dot{s}_\mu s_\nu s_\rho - \frac{1}{8} U^\dagger \nabla_{\rho_1} \nabla_{\rho_2} F_{\mu\nu} U \dot{s}_\mu s_\nu s_{\rho_1} s_{\rho_2} - \dots \right) \right] \right) \right\}, \quad (10)$$

где все значения напряжённости и её производных  $F_{\mu\nu} \equiv F_{\mu\nu}(y)$ ,  $\nabla_\rho F_{\mu\nu} \equiv \nabla_\rho F_{\mu\nu}(y)$  берутся в точке  $y$ . Градиентное разложение теплового ядра получится из этой формулы, если написать обычный ряд теории возмущений по малым параметрам  $\nabla_\rho F_{\mu\nu}$ ,  $\nabla_{\rho_1} \nabla_{\rho_2} F_{\mu\nu} \dots$ . Нулевым приближением будет ковариантно-постоянное поле, а первыми поправками будут следующие 3 двухпетлевые вакуумные диаграммы (см. также [4] для абелева случая):

$$\Gamma_1^{-\nabla^2} = -\frac{i}{8} \nabla_{(\rho} \nabla_{\sigma} F_{\nu)\mu} \int d\tau G_{\dot{\mu}\nu} G_{\rho\sigma} = \bigcirc \bigcirc \quad (11)$$

$$\Gamma_2^{-\nabla^2} = \frac{i}{18} \nabla_{(\rho} F_{\nu)\mu} \nabla_{(\rho'} F_{\nu')\mu'} \int d\tau d\tau' (2G_{\dot{\mu}\dot{\mu}'} G_{\nu\nu'} G_{\rho\rho'} + 4G_{\dot{\mu}\nu'} G_{\nu\dot{\mu}'} G_{\rho\rho'}) = \bigoplus \quad (12)$$

$$\Gamma_3^{-\nabla^2} = \frac{i}{18} \nabla_{(\rho} F_{\nu)\mu} \nabla_{(\rho'} F_{\nu')\mu'} \int d\tau d\tau' (G_{\dot{\mu}\dot{\mu}'} G_{\nu\rho} G_{\nu'\rho'} + 4G_{\dot{\mu}\nu'} G_{\nu\rho} G_{\dot{\rho}'\rho'} + 4G_{\nu\nu'} G_{\dot{\mu}\rho} G_{\dot{\mu}'\rho'}) = \bigcirc \text{---} \bigcirc \quad (13)$$

где по индексам в круглых скобках производится симметризация. Стоит отметить, что термин «двухпетлевой» здесь относится только к нашему градиентному разложению, т.е. в двухпетлевых вакуумных диаграммах (11–13) собраны вклады с двумя производными поля. По константе Планка  $\hbar$  мы всё также находимся в рамках одной петли.

В заключении приведём выражение для теплового ядра оператора  $M = -\nabla^2 \eta_{\mu\nu} + B_{\mu\nu}$  (вклад калибровочного поля), где  $B_{\mu\nu}^{ab} = -2F_{\mu\nu}^c i f^{acb}$  (присоеди-

нённое представление):

$$\begin{aligned}
K_{-\nabla^2-2F_{\mu\nu}}(y, y; t) = & \int_{s(0)=s(t)=0} \mathcal{D}s \mathcal{D}U \exp \left\{ \int_0^t d\tau \left( -\frac{\dot{s}^2}{4} + iJ \text{tr} \left[ \sigma_3 \left( -\frac{1}{2} U^\dagger F_{\mu'\nu'} U \dot{s}_{\mu'} s_{\nu'} + iU^\dagger \dot{U} \right) \right] \right. \right. \\
& + iJ \text{tr} \left[ \sigma_3 \left( -\frac{1}{3} U^\dagger \nabla_\rho F_{\mu'\nu'} U \dot{s}_{\mu'} s_{\nu'} s_\rho - \frac{1}{8} U^\dagger \nabla_{\rho_1} \nabla_{\rho_2} F_{\mu'\nu'} U \dot{s}_{\mu'} s_{\nu'} s_{\rho_1} s_{\rho_2} - \dots \right) \right] \Bigg) \eta_{\mu\nu} \\
& \left. + iJ \text{tr} \left[ \sigma_3 \left( -2U^\dagger F_{\mu\nu} U - 2U^\dagger \nabla_\rho F_{\mu\nu} U s_\rho - \dots \right) \right] \right\}.
\end{aligned} \tag{14}$$

## 2 Ковариантно–постоянное поле

В этом разделе мы исследуем частный случай формулы (10) и доказываем формулу для эффективного действия (18).

Интеграл (10) можно вычислить точно для ковариантно–постоянного поля [4], т.к. в этом случае интеграл будет гауссовым:

$$K_{-\nabla^2}(t) = \int_{s(0)=s(t)=0} \mathcal{D}s \mathcal{D}U \exp \left\{ \int_0^t d\tau \left( -\frac{\dot{s}^2}{4} + iJ \text{tr} \left[ \sigma_3 \left( -\frac{1}{2} U^\dagger F_{\mu\nu} U \dot{s}_\mu s_\nu + iU^\dagger \dot{U} \right) \right] \right) \right\}.$$

Интегрирование по  $SU(2)$  даёт следующий результат [4]:

$$K_{-\nabla^2}(t) = \sum_{l=-J}^J \int \mathcal{D}s \exp \left\{ \int_0^t d\tau \left( -\frac{\dot{s}^2}{4} - il \frac{1}{2} F_{\mu\nu} \dot{s}_\mu s_\nu \right) \right\}.$$

Заметим, что выражение в экспоненте имеет вид действия частицы в однородном магнитном поле. Ковариантно–постоянное поле  $F_{\mu\nu}$  можно привести к пфаффовей форме (с помощью ортогонального преобразования  $O$ ) во всём пространстве так как:

$$[F_{\mu\nu}, F_{\sigma\rho}] = 0. \tag{15}$$

В итоге тензор напряжённости примет вид:

$$\hat{F} = O^T F_{\mu\nu} O = \begin{bmatrix} 0 & F_1 & & \\ -F_1 & 0 & & \\ & & 0 & F_2 \\ & & -F_2 & 0 \end{bmatrix} = \text{diag} \{F_1 i\sigma_2, F_2 i\sigma_2\}. \quad (16)$$

Тогда интегралы по двум парам переменных  $s_\mu$  разделяются и, используя результаты для заряженной частицы в магнитном поле, мы получим:

$$K_{-\nabla^2}(t) = \sum_{l=-J}^J (4\pi t)^{-d/2} \left( \text{Det} \frac{\sin(lFt)}{lFt} \right)^{-1/2}, \quad (17)$$

где дробь внутри детерминанта понимается в смысле ряда.

Аналогично можно вычислить интеграл (14). Здесь слагаемое с  $-2F_{\mu\nu}$  сразу интегрируется и мы получаем:

$$K_{-\nabla^2-2F_{\mu\nu}}(t) = K_{-\nabla^2}(t) (e^{-2iFt})_{\mu\nu}.$$

Как уже отмечалось, в случае ковариантно-постоянного, компоненты тензора напряжённости коммутируют (15), поэтому их одновременно можно привести к диагональной форме (вообще говоря, к картановской подалгебре). Далее, ограничимся случаем  $F_1 = F$ ,  $F_2 = 0$  в (16), тогда собственные числа матрицы  $2iF_{\mu\nu}$  будут  $(\pm 2F, 0, 0)$ , поэтому одно из них даст экспоненциальную расходимость при  $t \rightarrow \infty$ . Вклад нулевых собственных чисел сократится слагаемым духов. Тогда однопетлевая поправка к лагранжиану эффективного действия в случае ковариантно-постоянного фонового поля примет вид (см. также [11]):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^1 &= - \int_0^\infty \frac{dt}{t} \left( \frac{1}{2} \text{tr} K_{-\nabla^2-2F_{\mu\nu}}(t) - K_{-\nabla^2}(t) \right) \\ &= - \frac{1}{16\pi^2} \int_0^\infty \frac{dt}{t^2} \frac{F}{\sin Ft} \frac{(e^{-2iFt} + e^{2iFt})}{2} = - \frac{F^2}{16\pi^2} \int_0^\infty \frac{dt}{t^2} \frac{e^{-3it} + e^{it}}{1 - e^{-2it}}. \end{aligned}$$

Введём теперь ультрафиолетовое обрезание  $\epsilon$  и выделим отдельно член  $e^{iFt}$ , после чего повернём контуры интегрирования  $t \rightarrow -it$  и  $t \rightarrow it$  и получим такое

выражение для лагранжиана эффективного действия ковариантно–постоянного поля:

$$\mathcal{L}^1 = -\frac{1}{4g^2}F^2 - \frac{11}{6} \frac{F^2}{16\pi^2} \left( \ln \left( \frac{F}{\mu^2} \right) - c \right) + i \frac{F^2}{16\pi}, \quad (18)$$

где  $c$ – постоянная, зависящая от схемы регуляризации. Видно, что в эффективном действии появляется мнимая добавка, что интерпретируется как неустойчивость ковариантно–постоянного вакуума в однопетлевом приближении.

## 3 Вычисление $\Gamma_1$

Здесь мы получим первую поправку к результату (17) по производным тензора напряжённости  $F_{\mu\nu}$ . Это вычисление разбито на три подпункта. Сначала мы рассмотрим влияние интегрирования по калибровочной группе  $\mathcal{D}U$ , затем покажем, как вычислять пропагатор  $G_{\mu\nu}$ , который будет использоваться в последующем интегрировании по  $\mathcal{D}s$ .

### 3.1 Интегрирование по $SU(2)$

Рассмотрим теперь наиболее простой вклад (11) в градиентном разложении интеграла (10). Как и в случае ковариантно–постоянного поля, калибровочным преобразованием можно повернуть  $\vec{F}_{\mu\nu} \cdot \vec{\sigma}$  в квадратичном по  $s_\mu$  члене  $U^\dagger \vec{F}_{\mu\nu} \cdot \vec{\sigma} U \dot{s}_\mu s_\nu$  до  $F_{\mu\nu} \sigma_3$ . При этом члены с производными, конечно, будут всё также иметь все три цветные компоненты. Для вспомогательного поля  $U \in SU(2)$  мы выберем параметризацию углами Эйлера (7), тогда аргумент экспоненты в формуле Дьяконова–Петрова (6) будет таким:

$$\text{tr} \left[ \sigma_3 \left( U^\dagger \vec{A} \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2} U + i U^\dagger \dot{U} \right) \right] = \vec{A} \cdot \vec{n} + (\cos \theta - 1) \dot{\phi} + (\dot{\phi} + \dot{\psi}),$$

где  $\vec{n} = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$  (см. Приложение C). Слагаемое с  $\dot{\phi} + \dot{\psi}$  из-за периодических граничных условий  $\phi(0) = \phi(t) + 2\pi n$  и  $\psi(0) = \psi(t) + 2\pi m$  не даст вклада в интеграл и его можно опустить. После этого, выражение для  $\Gamma_1^{-\nabla^2}$  (11)

станет таким:

$$\Gamma_1^{-\nabla^2} = \int_{s(0)=s(t)=0} \mathcal{D}s \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\cos\theta \exp \left\{ \int_0^t d\tau \left( -\frac{\dot{s}^2}{4} + iJ \left( -\frac{1}{2} F_{\mu\nu} \dot{s}_\mu s_\nu \cos\theta + \dot{\phi}(\cos\theta - 1) \right) \right) \right\} \times$$

$$\times \left( -\frac{i}{8} J \int_0^t d\xi \nabla_{\rho_1} \nabla_{\rho_2} \vec{F}_{\mu\nu} \cdot \vec{n}(\xi) \dot{s}_\mu s_\nu s_{\rho_1} s_{\rho_2} \right). \quad (19)$$

Здесь сначала необходимо взять интеграл по траекториям на  $SU(2)$  (т.е. по переменным  $\mathcal{D}\phi$  и  $\mathcal{D}\cos\theta$ ), а только после этого по  $\mathcal{D}s$ . Отметим, что в интеграле (19) в предэкспоненциальном множителе содержится сумма компонент вектора  $\vec{n}(\xi)$  (в какой-то точке  $\xi \in [0, t]$ ), которые содержат переменные интегрирования  $\phi$  и  $\cos\theta$ . Результат для слагаемого общего вида такой (см. Приложение А):

$$\int \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\cos\theta \exp \left\{ iJ \int_0^t d\tau \dot{\phi}(\cos\theta - 1) - h(\tau) \cos\theta \right\} \exp \{ i\alpha\phi(\xi) \} g(\cos\theta(\xi))$$

$$= \sum_{l=-J}^J g\left(\frac{l - \alpha\theta(0)}{J}\right) \exp \left\{ -i \int_0^t d\tau (l - \alpha\theta(\tau - \xi)) h(\tau) \right\},$$

где  $h(\tau) = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} \dot{s}_\mu s_\nu$  (вообще говоря,  $h(\tau)$  может зависеть и от  $\cos\theta$ ), а  $g(x)$  — некоторая функция (нас будут интересовать только два случая:  $g(x) = x$ , что соответствует  $\cos\theta$ , и  $g(x) = \sqrt{1-x^2}$  для  $\sin\theta$ ). Этот интеграл обобщает формулу из статьи [6] (и работы [4]) на случай наличия предэкспоненциальных множителей в интеграле по траекториям по группе  $SU(2)$ . В итоге интегрирование по группе усложняет вид квадратичной части действия для переменной  $s_\mu$ : если раньше гамильтониан  $h(\tau)$  имел вид энергии частицы в постоянном магнитном поле  $F_{\mu\nu}$ , то теперь в этом магнитном поле появилась явная зависимость от времени  $\tau$  в виде функции Хевисайда  $\theta(\tau - \xi)$ . Слагаемые с компонентами  $\vec{n}(\xi)$  в (19) преобразуются



так:

$$\begin{aligned}
\cos \phi \sin \theta &\longrightarrow \frac{1}{2} \sum_{\alpha=\pm 1} \gamma_1(l, \alpha) \sqrt{1 - \frac{(l - \alpha\theta(0))^2}{J^2}}, \\
\sin \phi \sin \theta &\longrightarrow \frac{1}{2i} \sum_{\alpha=\pm 1} \alpha \gamma_1(l, \alpha) \sqrt{1 - \frac{(l - \alpha\theta(0))^2}{J^2}}, \\
\cos \theta &\longrightarrow \gamma_1(l, 0) \frac{l - \alpha\theta(0)}{J},
\end{aligned}$$

где в  $\gamma_1(l, \alpha)$  собран весь результат интегрирования по  $\mathcal{D}s$ .

### 3.2 Функция Грина

Теперь рассмотрим, как изменится функция Грина по сравнению с абелевым случаем [4]. Для этого выберем собственное время мнимым, чтобы получить вещественное действие. Оператор квадратичной флуктуации в случае калибровочной группы  $SU(2)$  выглядит так:

$$\Delta_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \delta_{\mu\nu} \partial_\tau^2 + (l - \alpha\theta(\tau - \xi)) F_{\mu\nu} \partial_\tau.$$

Заметим, что  $\Delta_{\mu\nu}$  явно зависит от времени  $\tau$  (из-за функции Хевисайда  $\theta(\tau - \xi)$ ) и описывает движение частицы в постоянном магнитном поле  $F_{\mu\nu}$ , которое испытывает скачок при  $\tau = \xi$ . Для нахождения функции Грина  $G_{\mu\nu}(\tau, \tau')$  этого оператора (с нулевыми граничными условиями) необходимо рассматривать два случая ( $\tau' > \xi$  и  $\tau' < \xi$ ) и разбить интервал  $\tau \in [0, t]$  на три промежутка точками  $\tau = \tau'$  и  $\tau = \xi$ . На этих промежутках уравнение для функции Грина

$$\Delta_{\mu\nu} G(\tau, \tau')_{\nu\sigma} = \delta_{\mu\sigma} \delta(\tau - \tau') \quad (20)$$

становится однородным. Решив его на каждом из промежутков (учитывая нулевые граничные условия), мы получим набор констант  $(c_1, c_2, c_3, c_4)$  и с их помощью можно сшить полученные решения: сама функция Грина должна быть непрерывной, а первая производная испытывать скачки в точках  $\tau = \tau'$  и  $\tau = \xi$  (его величину можно найти проинтегрировав уравнение (20) по  $\epsilon$ -окрестности точки

разрыва). Условия на скачки выглядят так:

$$\begin{aligned} \partial_\tau G_{\mu\nu}(\tau' + 0, \tau') - \partial_\tau G_{\mu\nu}(\tau' - 0, \tau') &= -2, \\ \partial_\tau G_{\mu\nu}(\xi + 0, \tau') - \partial_\tau G_{\mu\nu}(\xi - 0, \tau') &= 2F_{\mu\sigma}(l' - l)G_{\sigma\nu}(\xi, \tau'), \end{aligned} \quad (21)$$

где  $l' = l - \alpha$ . Например, при  $\xi < \tau'$ , скачок слагаемого с  $F_{\mu\nu}$  (т.е. магнитного поля) приведёт к следующему разбиению интервала  $[0, t]$ :

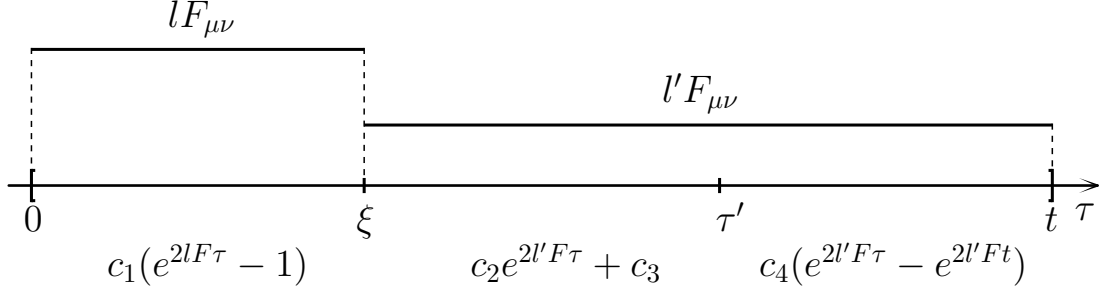


Рис. 2.1. Скачок магнитного поля и однородные решения уравнения (20)

Решение системы линейных уравнений на константы  $(c_1, c_2, c_3, c_4)$ , полученной из (21) (и непрерывности функции Грина), удобно провести с помощью WOLFRAM MATHEMATICA. В результате получим:

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu}(\tau, \tau') \Big|_{\tau=\tau'=\xi} &= \left( \frac{(-1 + e^{2Fl\xi})(e^{2Fl'\xi} - e^{2Fl't})}{FD} \right)_{\mu\nu}, \\ \partial_\tau G_{\mu\nu}(\tau, \tau') \Big|_{\tau=\tau'=\xi} &= \left( \frac{e^{2F(l\xi+l't)}l + e^{2Fl'\xi}l' - e^{2F(l+l')\xi}(l+l')}{D} \right)_{\mu\nu}, \\ D &= -e^{2Fl'\xi}l + e^{2Fl't}(l - l') + e^{2F(l\xi+l't)}l', \end{aligned} \quad (22)$$

где мы использовали симметричное определение:

$$\partial_\tau G_{\mu\nu}(\tau, \tau') \Big|_{\tau=\tau'=\xi} = \frac{1}{2} \left( \partial_\tau G_{\mu\nu}(\tau, \tau') \Big|_{\tau \rightarrow \tau' + 0} + \partial_\tau G_{\mu\nu}(\tau, \tau') \Big|_{\tau \rightarrow \tau' - 0} \right).$$

Это связано с тем, что в точке  $\tau = \tau'$  производная функции Грина имеет скачок. Такая же ситуация могла бы произойти и при  $\tau' \rightarrow \xi$ , но оказывается, что  $\partial_\tau G(\tau, \tau') \Big|_{\tau'=\xi+0} = \partial_\tau G(\tau, \tau') \Big|_{\tau'=\xi-0}$ . Стоит отметить, что решение (22) совпадает с абелевым случаем [4], если положить  $l = l'$  (т.е.  $\alpha = 0$  в (20)).

### 3.3 Интегрирование по траекториям

Итак, зная вид пропагатора (22), можно завершить вычисление  $\Gamma_1$ . Интегрирование по  $SU(2)$  сведётся к изменению  $G_{\mu\nu}$  в зависимости от выбранного предэкспоненциального слагаемого в (19). Для каждого из этих слагаемых интеграл по  $\mathcal{D}s$  даст (11), отличаться будет только сам пропагатор, который теперь будет зависеть не только от «проекции спина»  $l$ , но и от  $\alpha = \pm 1$  и  $\xi \in [0, t]$ . Если собрать в  $\gamma_1(l, \alpha)$  результат интегрирования по  $\mathcal{D}s$ , то (19) перепишется так:

$$\begin{aligned} \Gamma_1 = -\frac{i}{8}J \sum_{l=-J}^J & \left[ \nabla_{(\rho} \nabla_{\sigma} F_{\nu)\mu}^1 \frac{1}{2} \sum_{\alpha=\pm 1} \gamma_1(l, \alpha) \sqrt{1 - \frac{(l - \alpha\theta(0))^2}{J^2}} \right. \\ & + \nabla_{(\rho} \nabla_{\sigma} F_{\nu)\mu}^2 \frac{1}{2i} \sum_{\alpha=\pm 1} \alpha \gamma_1(l, \alpha) \sqrt{1 - \frac{(l - \alpha\theta(0))^2}{J^2}} \\ & \left. + \nabla_{(\rho} \nabla_{\sigma} F_{\nu)\mu}^3 \gamma_1(l, 0) \frac{l - \alpha\theta(0)}{J} \right]. \end{aligned}$$

Если выбрать  $\theta(0) = 0$ , то выражение для  $\Gamma_1$  заметно упрощается в случае фундаментального представления  $J = \frac{1}{2}$  и  $l = \pm \frac{1}{2}$ :

$$\Gamma_1 = -\frac{i}{8} \text{tr} \left[ \nabla_{(\rho} \nabla_{\sigma} F_{\nu)\mu} \left\{ F_2^{-1} \left( t \coth F_1 t \coth F_2 t - \frac{(F_1)^3 \coth F_1 t - (F_2)^3 \coth F_2 t}{F_1 F_2 ((F_1)^2 - (F_2)^2)} \right) \right\}^{\mu\nu}_{\rho\sigma} \right] \quad (23)$$

Матрицы  $F_{1,2}$  действуют на  $\mathbb{R} \otimes \mathbb{R}$  и равны  $F \otimes \mathbb{1}$  и  $\mathbb{1} \otimes F$  соответственно, причём индексы  $(\mu, \nu)$  относятся к первой матрице, а  $(\sigma, \rho)$  ко второй.

## 4 Результат

Итак, калибровочно-инвариантный результат для  $\Gamma_1^{-\nabla^2}$  (в случае фундаментального представления  $J = \frac{1}{2}$ ) даётся формулой (23). Итоговое выражение для градиентного разложения однопетлевого эффективного действия:

$$\mathcal{L}^1 = -\frac{1}{16\pi^2} \int_0^\infty \frac{dt}{t^2} \frac{F}{\sin Ft} \frac{(e^{-iFt} + e^{iFt})}{2} \left( 1 + \sum_{i=1}^3 \left[ \frac{1}{2} \text{tr} \Gamma_i^{-\nabla^2 - 2iF_{\mu\nu}} - \Gamma_i^{-\nabla^2} \right] + \dots \right), \quad (24)$$

где множитель перед скобкой — результат для ковариантно-постоянного поля, а  $\Gamma_i^M$  — петлевая поправка для соответствующего оператора  $M = -\nabla^2, -\nabla^2 - 2iF_{\mu\nu}$  (11–13) и  $\text{tr}$  подразумевается по лоренцевским значкам. Здесь надо иметь в виду, что интегрирование по калибровочной группе (см. раздел 2.3.1) изменит пропагатор  $G_{\mu\nu}$  (см. раздел 2.3.2). Видимо, при пертурбативном учёте поправок от производных  $F_{\mu\nu}$ , их вклад в (24) будет степенным при  $t \rightarrow \infty$ . При этом расходимость (которая даёт мнимую часть в эффективном действии (18)) носит экспоненциальный характер. Поэтому имеет смысл подставлять в (5) более сложные полевые конфигурации, которые можно получить с помощью разложения Фаддеева–Ниёми [10]. Проблемой в этом подходе будет взять интеграл по  $SU(2)$ , аналогичный ковариантно-постоянному случаю (см. раздел 2.2). Вероятно, здесь можно будет продвинуться, используя приближение  $\rho = \text{Const}$  (см. [10]).

# Заключение

В этой работе мы исследовали однопетлевое эффективное действие теории Янга–Миллса (1) с помощью метода теплового ядра (3). Для получения конечных (в инфракрасном пределе) вкладов в эффективное действие, предлагается представление для следа теплового ядра в виде интеграла по путям (8) (см. разделы 1.3 и 2.4, а также [4]).

В качестве примера применения формулы (8), был представлен способ получения градиентного разложения эффективного действия (24) по производным тензора напряжённости  $F_{\mu\nu}$  (поле медленно меняющейся амплитуды) для калибровочной группы  $SU(2)$ . Низший порядок этого разложения (18) совпадает с известным результатом для ковариантно-постоянного поля [9] (полученным другим способом). Это вычисление — простейший пример разложений, которые можно получить из формулы (8). Отметим, что результат (24) хорошо определён в инфракрасной области — его можно интегрировать по собственному времени  $t$ .

Наши результаты теперь можно применить к исследованию вакуумных глюонных возбуждений. А именно доказать существование неоднородных, т.н. «солитонных» конфигураций поля, ведь в квантовой теории Янга–Миллса появляется размерный параметр, который мог бы характеризовать массу (размер) солитона. Эта идея принадлежит Фаддееву [13]. В его работе с Ниemi [10] рассматривается полная замена переменных для калибровочного поля  $SU(2)$ , которая должна упрощать описание теории в инфракрасной области. Согласно их программе, замену переменных необходимо проводить уже в эффективном действии (1). Возможным способом реализации этой идеи является использование представления (8) для теплового ядра и аналога градиентного разложения (24), но уже относительно новых переменных Фаддеева–Ниemi. Если при этом удастся доказать возникновение ненулевого вакуумного среднего  $\langle\rho^2\rangle$ , то это объяснит механизм возникновения глюонного конденсата и будет очень важным шагом на пути объяснения конфайнмента.

# Приложение А

## Интеграл по $SU(2)$ с внешним источником

Здесь мы будем доказывать формулу:

$$\int \mathcal{D}\phi \mathcal{D} \cos \theta e^{iJ \int_0^t \dot{\phi}(\cos \theta - 1) - h(\tau) \cos \theta - j(\tau) \phi} = \sum_{l=-J}^J e^{-il \int_0^t d\tau h(\tau) - iJ \int_0^t ds d\tau j(s) h(\tau) \theta(s-\tau)}. \quad (25)$$

Доказательство во многом аналогично [4]. По переменной  $\phi$  подразумеваются граничные условия  $\phi(0) = \phi(t) + 2\pi n$  (по всем  $n \in \mathbb{Z}$  необходимо просуммировать), а по переменной  $\cos \theta$ :  $\cos \theta(0) = \cos \theta(t)$ . Итак, напомним дискретизированную версию этого интеграла:

$$\begin{aligned} I_1 &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_{\phi(0)=\phi(t)+2\pi n} \mathcal{D}\phi \mathcal{D} \cos \theta \exp \left\{ iJ \int_0^t \dot{\phi}(\cos \theta - 1) - h(\tau) \cos \theta - j(\tau) \phi \right\} \\ &= J^N \int_0^{2\pi} d\phi_N \int_{-\infty}^{\infty} \prod_1^{N-1} d\phi_k \int_{-1}^1 \prod_1^N d \cos \theta_k e^{iJ \sum_1^N [(\phi_k - \phi_{k-1})(\cos \theta_k - 1) - \frac{t}{N} (h_k \cos \theta_k + j_k \phi_k)]} \\ &= J \int_{-1}^1 \prod_1^N d \cos \theta_k \prod_1^{N-1} \delta \left( \cos \theta_k - \cos \theta_{k+1} - \frac{t}{N} j_k \right) e^{-iJ \sum_{k=1}^N \frac{t}{N} h_k \cos \theta_k} \underbrace{\sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{2\pi i J n (\cos \theta_N - 1)}}_{\sum_{m \in \mathbb{Z}} \delta(J(\cos \theta_N - 1) - m)}, \end{aligned}$$

где в последней строке используется формула Пуассона. В процессе интегрирования по  $\cos \theta_k$ , возникает следующая свёртка тока  $j(s)$  и гамильтониана  $h(\tau)$ :

$$\begin{aligned} \frac{t}{N} (h_1 \cos \theta_1 + h_2 \cos \theta_2 + \dots + h_N \cos \theta_N) &\rightarrow \frac{t}{N} \left( h_1 \left( \cos \theta_2 + \frac{t}{N} j_1 \right) + h_2 \cos \theta_2 + \dots \right) \\ &\rightarrow \frac{t}{N} \left( \sum_{i=1}^N h_i \cos \theta_N + \frac{t}{N} h_1 j_1 + \frac{t}{N} (h_1 + h_2) j_2 + \dots + \frac{t}{N} (h_1 + h_2 + \dots + h_{N-1}) j_{N-1} \right) \\ &\rightarrow \int_0^t ds \int_0^s d\tau j(s) h(\tau) + \cos \theta_N \int_0^t d\tau h(\tau) = \int_0^t ds d\tau j(s) h(\tau) \theta(s - \tau) + \cos \theta_N \int_0^t d\tau h(\tau) \end{aligned}$$

где первая строчка следует из интегрирования по  $\cos \theta_1$ , а вторая из интегрирования по всем  $\cos \theta_k$ ,  $k = 1 \dots N - 1$ . Интеграл по  $\phi_N$  будет константой:

$$\int_0^{2\pi} d\phi_N \exp \left\{ -\frac{iJt}{N} j_N \phi_N \right\} = \frac{N}{iJt j_N} \left( 1 - \exp \left\{ -\frac{2\pi iJt}{N} j_N \right\} \right) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 2\pi,$$

и поэтому не даст существенного вклада. И в итоге мы получим:

$$I_1 = \sum_{l=-J}^J \exp \left\{ -il \int_0^t d\tau h(\tau) \right\} \exp \left\{ -iJ \int_0^t ds d\tau j(s) h(\tau) \theta(s - \tau) \right\},$$

где  $\theta(x)$ — функция Хевисайда. Формула (25) доказана. Воспользуемся этим результатом для вычисления следующего интеграла:

$$I_2 = \int \mathcal{D}\phi \mathcal{D} \cos \theta \exp \left\{ iJ \int_0^t d\tau \dot{\phi} (\cos \theta - 1) - h(\tau) \cos \theta \right\} \exp \{ i\alpha \phi(\xi) \} g(\cos \theta(\xi)).$$

Чтобы взять этот интеграл, введём в аргумент экспоненты слагаемое с током  $j(\tau)\phi$  и предэкспоненциальные множители с помощью вариационных производ-

ных по этому току  $\frac{\delta}{\delta j(\xi)}$  (как при построении обычной теории возмущений):

$$\begin{aligned}
I_2 &= e^{-i\alpha \frac{1}{iJ} \frac{\delta}{\delta j(\xi)}} g\left(-\frac{1}{iJ} \frac{\delta}{\delta h(\xi)}\right) \int \mathcal{D}\phi \mathcal{D} \cos \theta e^{iJ \int_0^t d\tau \dot{\phi}(\cos \theta - 1) - h(\tau) \cos \theta - j(\tau) \phi} \Big|_{j=0} \\
&= e^{-i\alpha \frac{1}{iJ} \frac{\delta}{\delta j(\xi)}} g\left(-\frac{1}{iJ} \frac{\delta}{\delta h(\xi)}\right) \sum_{l=-J}^J e^{-il \int_0^t d\tau h(\tau) - iJ \int_0^t d\tau ds h(\tau) j(s) \theta(\tau - s)} \Big|_{j=0} \\
&= \sum_{l=-J}^J e^{-i\alpha \frac{1}{iJ} \frac{\delta}{\delta j(\xi)}} g\left(\frac{l}{J} + \int_0^t ds j(s) \theta(\xi - s)\right) e^{-il \int_0^t d\tau h(\tau) - iJ \int_0^t d\tau ds h(\tau) j(s) \theta(\tau - s)} \Big|_{j=0}.
\end{aligned}$$

Что приводит к:

$$\begin{aligned}
&\int \mathcal{D}\phi \mathcal{D} \cos \theta \exp \left\{ iJ \int_0^t d\tau \dot{\phi}(\cos \theta - 1) - h(\tau) \cos \theta \right\} \exp \{i\alpha \phi(\xi)\} g(\cos \theta(\xi)) \\
&= \sum_{l=-J}^J g\left(\frac{l - \alpha \theta(0)}{J}\right) \exp \left\{ -i \int_0^t d\tau (l - \alpha \theta(\tau - \xi)) h(\tau) \right\},
\end{aligned} \tag{26}$$

где  $\alpha = \pm 1$ , а  $g(x)$  может быть любой (аналитической) функцией, но нас будут интересовать только два случая:

$$g(x) = \begin{cases} x \\ \sqrt{1 - x^2} \end{cases}$$

В формуле (26) появляется  $\theta(0)$ – значение функции Хэвисайда в нуле (которое требует отдельного доопределения) и явная зависимость от собственного времени в показателе экспоненты в виде  $\theta(\tau - \xi)$ , что повлияет на вид функции Грина этой задачи.



## Приложение В

# Калибровка Фока–Швингера

Здесь мы будем доказывать совместность формулы, связывающей потенциал  $A_\mu$  и тензор напряжённости  $F_{\mu\nu}$  в калибровке Фока–Швингера  $x_\mu A_\mu(x) = 0$

$$A_\mu = - \int_0^1 dt \, t x_\nu F_{\mu\nu}(tx) \quad (27)$$

и определения тензора напряжённости  $F_{\mu\nu}$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig[A_\mu, A_\nu], \quad (28)$$

т.е. что подстановка (27) в (28) даст тот же тензор  $F_{\mu\nu}$  (также см. [14]).

Для доказательства нам понадобятся тождества Бьянки:

$$\nabla_\alpha F_{\beta\gamma} + \text{цикл.} = 0, \quad (29)$$

где слева суммирование происходит по всем циклическим перестановкам индексов  $(\alpha, \beta, \gamma)$ , а  $\nabla_\alpha = \partial_\alpha - igA_\alpha$  — ковариантная производная. Заметим также, что из формулы (27) следует условие  $x_\mu A_\mu(x) = 0$ . Чтобы проследить за знаками в вычислениях, введём в формуле (27) коэффициент  $a$ :

$$A_\alpha = a \int_0^1 dt \, t x_\nu F_{\mu\nu}(tx).$$

Тогда в тензоре напряжённости (28) будут следующие слагаемые:

$$\begin{aligned}
\partial_\mu A_\nu &= a \int_0^1 dt t F_{\nu\mu}(tx) + t^2 x_\beta \partial_\mu F_{\nu\beta}(tx), \\
\partial_\nu A_\mu &= (\mu \leftrightarrow \nu), \\
[A_\mu, A_\nu] &= a^2 \int_0^1 dt \int_0^1 ds ts x_\alpha x_\beta [F_{\mu\alpha}(tx), F_{\nu\beta}(sx)] \\
&= a^2 \left( \int_0^1 dt \int_0^t ds + \int_0^1 dt \int_t^1 ds \right) ts x_\alpha x_\beta [F_{\mu\alpha}(tx), F_{\nu\beta}(sx)] \\
&= a^2 \int_0^1 dt \int_0^t ds ts x_\alpha x_\beta ([F_{\mu\alpha}(tx), F_{\nu\beta}(sx)] + [F_{\mu\alpha}(sx), F_{\nu\beta}(tx)]).
\end{aligned}$$

Теперь воспользуемся тождествами Бьянки (29):

$$\begin{aligned}
\partial_\mu F_{\nu\beta}(tx) - \partial_\nu F_{\mu\beta}(tx) &= \partial_\mu F_{\nu\beta}(tx) + \partial_\nu F_{\beta\mu}(tx) \\
&= -\partial_\beta F_{\mu\nu}(tx) + ig[A_\mu, F_{\nu\beta}(tx)] + \text{цикл.} \\
&= -\partial_\beta F_{\mu\nu}(tx) + iga \int_0^1 ds ts x_\alpha ([F_{\mu\alpha}(stx), F_{\nu\beta}(tx)] + \text{цикл.}) \\
&= -\partial_\beta F_{\mu\nu}(tx) + \frac{iga}{t} \int_0^t ds s x_\alpha ([F_{\mu\alpha}(sx), F_{\nu\beta}(tx)] + \text{цикл.}),
\end{aligned}$$

где в последнем равенстве мы заменили переменную интегрирования  $s \rightarrow s/t$ , а суммирование происходит по всем циклическим перестановкам индексов  $(\mu, \nu, \beta)$

при фиксированном  $\alpha$ . Соберём теперь вместе вклады в тензор напряжённости:

$$\begin{aligned}
F_{\mu\nu} &= \int_0^1 dt \left( -2taF_{\mu\nu}(tx) - t^2 \underbrace{x_\alpha x_\beta}_{\text{СИММ.}} \partial_\beta F_{\mu\nu}(tx) \right. \\
&\quad + i g a^2 \int_0^1 dt \int_0^t ds \left( [F_{\mu\alpha}(sx), F_{\nu\beta}(tx)] + [F_{\nu\alpha}(sx), F_{\beta\mu}(tx)] \right. \\
&\quad \left. \left. + \underbrace{[F_{\beta\alpha}(sx), F_{\mu\nu}(tx)]}_{\text{АНТИСИММ.}} - \underbrace{[F_{\mu\alpha}(tx), F_{\nu\beta}(sx)]}_{[F_{\nu\alpha}(sx), F_{\beta\mu}(tx)]} - [F_{\mu\alpha}(sx), F_{\nu\beta}(tx)] \right) \right) \\
&= -a \int_0^1 dt \left( 2tF_{\mu\nu}(tx) + t^2 \underbrace{x_\beta \partial_\beta F_{\mu\nu}(tx)}_{\partial_t(F_{\mu\nu}(tx))} \right) = -aF_{\mu\nu}(x),
\end{aligned} \tag{30}$$

где использовалось:

$$\begin{aligned}
x_\alpha x_\beta [F_{\mu\alpha}(tx), F_{\nu\beta}(sx)] &= x_\alpha x_\beta [F_{\mu\beta}(tx), F_{\nu\alpha}(sx)] = -x_\alpha x_\beta [F_{\nu\alpha}(sx), F_{\mu\beta}(tx)] \\
&= x_\alpha x_\beta [F_{\nu\alpha}(sx), F_{\beta\mu}(tx)].
\end{aligned}$$

В итоге, положив  $a = -1$ , вычисление (30) доказывает совместимость (27) и (28).

## Приложение С

# Аргумент экспоненты в формуле Дьяконова–Петрова

В этом разделе мы докажем следующую формулу:

$$\mathrm{tr} \left[ \sigma_3 \left( U^\dagger \vec{A} \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2} U + i U^\dagger \dot{U} \right) \right] = \vec{A} \cdot \vec{n} + (\cos \theta - 1) \dot{\phi} + (\dot{\phi} + \dot{\psi}), \quad (31)$$

в которой используется параметризация элемента группы  $U \in SU(2)$  углами Эйлера  $(\phi, \psi, \theta)$ :

$$U = e^{-i\phi\sigma_3/2} e^{-i\theta\sigma_2/2} e^{-i\psi\sigma_3/2}. \quad (32)$$

Для доказательства воспользуемся формулой для  $\sigma$ -матриц:

$$\exp \left[ -i \frac{\phi}{2} (\vec{n} \vec{\sigma}) \right] = -i (\vec{n} \vec{\sigma}) \sin \frac{\phi}{2} + \cos \frac{\phi}{2}.$$

Теперь подставим этот результат в (32):

$$\begin{aligned} U &= \left( \cos \frac{\phi}{2} - i \sigma_3 \sin \frac{\phi}{2} \right) \left( \cos \frac{\theta}{2} - i \sigma_3 \sin \frac{\theta}{2} \right) \left( \cos \frac{\psi}{2} - i \sigma_3 \sin \frac{\psi}{2} \right) \\ &= \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\phi + \psi}{2} - i \sigma_3 \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\phi + \psi}{2} - i \sigma_2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\phi - \psi}{2} + i \sigma_1 \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\phi - \psi}{2} \\ &= \cos \frac{\theta}{2} \begin{bmatrix} \exp \left( -i \frac{\phi + \psi}{2} \right) & 0 \\ 0 & \exp \left( i \frac{\phi + \psi}{2} \right) \end{bmatrix} - \sin \frac{\theta}{2} \begin{bmatrix} 0 & \exp \left( -i \frac{\phi - \psi}{2} \right) \\ -\exp \left( i \frac{\phi - \psi}{2} \right) & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

В итоге:

$$U = \begin{bmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \exp \left( -i \frac{\phi + \psi}{2} \right) & -\sin \frac{\theta}{2} \exp \left( -i \frac{\phi - \psi}{2} \right) \\ \sin \frac{\theta}{2} \exp \left( i \frac{\phi - \psi}{2} \right) & \cos \frac{\theta}{2} \exp \left( i \frac{\phi + \psi}{2} \right) \end{bmatrix}.$$

В этих обозначениях получаем:

$$\begin{aligned} \text{tr} \left[ \sigma_3 U^\dagger \dot{U} \right] &= -i \left( \left( \dot{\phi} + \dot{\psi} \right) + \dot{\phi} (\cos \theta - 1) \right), \\ \text{tr} \left[ \sigma_3 U^\dagger \frac{\sigma_1}{2} U \right] &= \sin \theta \cos \phi, \\ \text{tr} \left[ \sigma_3 U^\dagger \frac{\sigma_2}{2} U \right] &= \sin \theta \sin \phi, \\ \text{tr} \left[ \sigma_3 U^\dagger \frac{\sigma_3}{2} U \right] &= \cos \theta, \end{aligned}$$

что и доказывает исходную формулу (31).

# Литература

1. *Ripka Georges*. Dual superconductor models of color confinement // *Lect.Notes Phys.* — 2004. — Vol. 639. — P. 1.
2. *Faddeev L. D.* A couple of methodological comments on the quantum Yang-Mills theory // *Theoretical and Mathematical Physics.* — 2014. — dec. — Vol. 181, no. 3. — Pp. 1638–1642.
3. *Фок В.А.* Собственное время в классической и квантовой механике // *Изв. Акад. Наук СССР (физ.)*. — 1937. — Т. 4–5. — С. 551–568.
4. *Мнёв П.Н.* О функциональных детерминантах однопетлевого приближения метода фонового поля в калибровочных теориях. — 2005. <http://www.pdmi.ras.ru/~pmnev/diplom.win.pdf>.
5. *Diakonov D.I., Petrov V.Yu.* A formula for the Wilson loop // *Physics Letters B.* — 1989. — jun. — Vol. 224, no. 1-2. — Pp. 131–135.
6. *Alekseev A., Faddeev L., Shatashvili S.* Quantization of symplectic orbits of compact Lie groups by means of the functional integral // *Journal of Geometry and Physics.* — 1988. — jan. — Vol. 5, no. 3. — Pp. 391–406.
7. *Gross D. J., Wilczek F.* Asymptotically Free Gauge Theories. I // *Physical Review D.* — 1973. — nov. — Vol. 8. — Pp. 3633–3652.
8. *Politzer H. D.* Reliable Perturbative Results for Strong Interactions? // *Physical Review Letters.* — 1973. — jun. — Vol. 30. — Pp. 1346–1349.
9. *Savvidy G.K.* Infrared instability of the vacuum state of gauge theories and asymptotic freedom // *Physics Letters B.* — 1977. — nov. — Vol. 71, no. 1. — Pp. 133–134.

10. *Faddeev Ludvig, Niemi Antti J.* Spin-charge separation, conformal covariance and the Yang–Mills theory // *Nuclear Physics B*. — 2007. — jul. — Vol. 776, no. 1-2. — Pp. 38–65.
11. *Kennaway Kristian D.* Effective potentials and the vacuum structure of quantum field theories. — 2004. <http://arxiv.org/abs/hep-th/0407084>.
12. *Nielsen N.K., Olesen P.* An unstable Yang-Mills field mode // *Nuclear Physics B*. — 1978. — nov. — Vol. 144, no. 2-3. — Pp. 376–396.
13. *Faddeev L. D.* Knots as possible excitations of the quantum Yang–Mills fields // Statistical Physics, High Energy, Condensed Matter and Mathematical Physics - Proceedings of the Conference in Honor of C. N. Yang’s 85th Birthday. — World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2008.
14. *Cronström C.* A simple and complete Lorentz-covariant gauge condition // *Physics Letters B*. — 1980. — feb. — Vol. 90, no. 3. — Pp. 267–269.