ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ АКАДЕМИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

На правах рукописи
Диссертация допущена к защите
Зав.кафедрой

____

«___» __________ 2015 г.

ДИССЕРТАЦИЯ
НА СОИСКАНИЕ УЧЕНОЙ СТЕПЕНИ
МАГИСТРА

Перенормированное эффективное действие теории Янга–Миллса в однопетлевом приближении

Направление: 03.04.02 Физика

Выполнил студент __________ В. И. Честнов

Научный руководитель,
Акад., д.ф.-м.н. __________ Л. Д. Фаддеев

Рецензент
Доцент, PhD __________ И. Е. Шендерович

Санкт-Петербург
2015 г.

Реферат

Целью данной работы является вычисление однопетлевых поправок к эффективному действию в теории Янга–Миллса.

В результате предложен метод расчёта однопетлевого эффективного действия и приведён пример его использования.

Работа состоит из двух глав, введения, заключения и трёх приложений. Во введении в краткой форме излагаются основы теории Янга–Миллса, обсуждается актуальность проблемы. В главе 1 строится представление для однопетлевого эффективного действия в виде интеграла по траекториям. В главе 2 приводится пример применения полученного представления для случая медленно меняющегося калибровочного поля. В заключении подводятся итоги и описываются возможные направления дальнейших работ. В приложении A вычисляется интеграл Дьяконова–Петрова по траекториям на $SU(2)$ для постоянного поля с внешним источником, необходимый для построения теории возмущений. В приложении B доказывается связь калибровочного потенциала и тензора напряженности в калибровке Фока–Швингера. В приложении C приводится явное вычисление аргумента экспоненты в формуле Дьяконова–Петрова при параметризации элемента группы $SU(2)$ углами Эйлера.

Оглавление

Введение

Теория Янга–Миллса – это калибровочная теория поля, лежащая в основе Стандартной Модели элементарных частиц. Она обобщает квантовую электродинамику на случай неабелевой калибровочной группы. С её помощью строится квантовая хромодинамика (КХД) — теория сильных взаимодействий кварков и глюонов. Одним из главных открытых вопросов в КХД является описание квантовых эффектов в пределе низких энергий (инфракрасный режим). Известно, что в этой области существует конфайнмент — невозможность получения свободных кварков, так как на эксперименте наблюдают только составные состояния из нескольких кварков. Для объяснения этого эффекта была предложена модель дуального сверхпроводника (см. например, обзор [1]), необходимым элементом которой является наличие конденсата глюонной плотности. Однако механизм его получения из исходной теории до сих пор неизвестен. В этой работе мы исследуем эффективное действие теории Янга–Миллса, с помощью которого можно получить информацию о структуре глюонных вакуумных возбуждений. Возможно при этом получится доказать наличие конденсата и, как следствие, объяснить конфайнмент.

Квантовые теории поля, как правило, описываются с помощью лагранжианов. Лагранжиан Янга–Миллса имеет следующий вид:

$$\mathcal{L}_{\mathrm{YM}}[A] = -\frac{1}{4g^2}\, F^a_{\mu\nu} F^{a\mu\nu},$$

где $F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + f^{abc} A^b_\mu A^c_\nu$ — тензор напряжённости, f^{abc} — структурные константы калибровочной группы, d — размерность пространства, g — константа связи. Отличительной чертой случая $d = 4$ является тот факт, что константа связи g здесь безразмерна.

Квантование теории Янга–Миллса удобно проводить в формализме функционального интеграла. В этой работе мы будет исследовать однопетлевое эффективное действие $\mathcal{S}^{\text{eff}}$ — модифицированное действие теории, учитывающее квантовые поправки:

$$\exp\left\{i\mathcal{S}^{\text{eff}}[A]\right\} = \int \mathcal{D}a\, \exp\left\{i\int \mathrm{d}^4x\, \mathcal{L}_{\text{YM}}[A+a]\right\}.$$

С помощью этого объекта можно получить информацию о корреляторах, вакуумных средних от операторов и т. д. Термин «однопетлевое» означает, что учитываются только низшие квантовые поправки по постоянной Планка $\hbar$.

Однопетлевое эффективное действие в теории Янга–Миллса представляет собой разность логарифмов детерминантов двух операторов:

$$\mathcal{S}^1 = \frac{1}{2}\ln\det\left((-\nabla^2)^{ab} - 2if^{acb}F^c_{\mu\nu}\right) - \ln\det\left(-\nabla^2\right), \tag{1}$$

где $\nabla_\mu = \partial_\mu - iA_\mu$ — ковариантная производная. В этой формуле первый член соответствует вкладу калибровочного поля, второй — вкладу духов Фаддеева–Попова, которые вводятся в теорию в процессе фиксирования калибровки. Слагаемые в (1) сами по себе плохо определены и нуждаются в регуляризации. Именно из–за этого в квантовой теории Янга–Миллса появляется параметр, играющий роль массы (или размера), хотя классическая теория Янга–Миллса не содержит размерных констант связи и является масштабно–инвариантной. Это явление называется размерной трансмутацией. Для регуляризации логарифмов детерминантов в (1) обычно используют метод теплового ядра [2] (или, что тоже самое, метод собственного времени Фока [3]):

$$\mathcal{S}^1[A] = \int\limits_0^\infty \frac{\mathrm{d}t}{t} D(A,t),$$

где $D(A,t)$ — тепловое ядро. Если интересоваться только ультрафиолетовой расходимостью $t \to 0$, то для теплового ядра можно написать разложение Сили–деВитта по степеням t и получить такой результат:

$$D(A,t) = \frac{1}{g^2}\beta \int\limits_0^\infty \mathrm{d}^4x\, \mathrm{tr}\, F^2_{\mu\nu} + \mathcal{O}(t),$$

где $\beta = -\frac{11}{3}\frac{C_2(G)}{(4\pi)^2}g^2$ — бета–функция теории ($C_2(G)$ — нормировка оператора Казимира в присоединённом представлении). Интеграл по собственному времени регуляризуем так: $\int\limits_0^\infty \frac{\mathrm{d}t}{t} = 2\ln\frac{\Lambda}{m}$, где Λ — импульс обрезания, m — тот самый масштабный параметр теории. Всё это приведёт к следующему виду эффективного действия (в ультрафиолетовом пределе):

$$\mathcal{S}^{\text{eff}} = -\frac{1}{4g^2}\left(1 + \beta\ln\frac{\Lambda}{m}\right)\int \mathrm{d}^d x\, \mathrm{tr}\, F_{\mu\nu}^2. \tag{2}$$

Однако, разложение по степеням t непригодно для описания инфракрасного режима $t \to \infty$, так как каждый член такого ряда по отдельности будет расходиться. Поэтому в работе [4] было предложено представление теплового ядра в виде интеграла по траекториям. Мы вкратце изложим этот метод в главе 1. С его помощью было построено разложение эффективного действия (1) по производным тензора напряженности $F_{\mu\nu}$ для квантовой электродинамики. В этой работе мы продолжаем эту идею. В главе 2 мы покажем способ вычисления $\mathcal{S}^{\text{eff}}$ для специального случая ковариантно–постоянного поля, а также предложим метод построения градиентного разложения в случае неабелевой калибровочной группы $SU(2)$. В дальнейшем с помощью этих результатов можно будет рассматривать более сложные и неоднородные полевые конфигурации для нахождения вакуумных возбуждений глюонов для построения теории конфайнмента.

Глава 1

Тепловое ядро

В этой главе мы доказываем формулу (8), выражающую след теплового ядра K_M эллиптического оператора M через интеграл по петлям в $\mathbb{R}^4 \times SU(2)$.

1 След теплового ядра как функциональный интеграл

Этот раздел посвящён введению в метод теплового ядра K_M и доказательству его представления в виде интеграла по траекториям (5).

Для вычисления логарифма детерминанта оператора M удобно использовать метод собственного времени [3], который заключается в нахождении т.н. теплового ядра:

$$K_M(x, y; t) = \langle x | e^{-Mt} | y \rangle,$$

которое удовлетворяет «уравнению теплопроводности»:

$$\begin{aligned} &(\partial_t + M) K_M(x, y; t) = 0, \\ &K_M(x, y; t) = \delta(x - y). \end{aligned}$$

С помощью теплового ядра можно вычислить логарифм детерминанта оператора M:

$$\ln\det M - \ln\det M_0 = -\int\limits_0^\infty \frac{\mathrm{d}t}{t} \operatorname{tr}\left(e^{-Mt} - e^{-M_0 t}\right) = -\int\limits_0^\infty \frac{\mathrm{d}t}{t} \left(K_M(t) - K_{M_0}(t)\right). \quad (3)$$

Для эллиптического оператора $M = -\nabla^2 + B$ существует разложение Сили–

деВитта теплового ядра по степеням собственного времени t:

$$K_M(x,y;t) = \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} \sum_{n=0}^{\infty} a_M^n(x,y) t^n \tag{4}$$

При совпадающих точках $x = y$, разложение примет вид:

$$K_M(y,y;t) = \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} \left[1 - tB(y) - t^2 \left(\frac{1}{12} F_{\alpha\beta}(y) F_{\alpha\beta}(y) - \frac{1}{2} B^2(y) + \frac{1}{6} \nabla^2 B(y) \right) + \cdots \right]$$

Отсюда можно получить представление теплового ядра через интеграл по путям:

$$\begin{aligned} K_M(x,y;t) &= \int \mathrm{d}z_{n-1} \cdots \mathrm{d}z_1 \, \langle x | e^{-Mt/n} | z_{n-1} \rangle \langle z_{n-1} | \cdots | z_1 \rangle \langle z_1 | e^{-Mt/n} | y \rangle \\ &= \int\limits_{z(0)=y}^{z(t)=x} \mathcal{D}z(\tau) \; \mathcal{P} \exp \left\{ \int\limits_0^t \mathrm{d}\tau \; \left(-\frac{\dot{z}^2}{4} + iA_\mu(z) \dot{z}_\mu - B(z) \right) \right\}. \end{aligned} \tag{5}$$

Здесь возникает $\mathcal{P}$–экспонента, упорядочивающая входящие в неё матрицы вдоль пути $z(\tau)$: в разложении этой экспоненты в степенной ряд, в каждом слагаемом матрицы с бóльшим значением τ стоят слева от матриц с меньшим τ. Этот объект также известен как Вильсоновская линия или голономия связности. Важным свойством этого объекта является его зависимость от пути, вдоль которого производится интегрирование, что делает невозможным прямой расчёт интеграла (5).

2 Формула Дьяконова–Петрова

Для следа $\mathcal{P}$–экспоненты (т.е. петли Вильсона) Дьяконовым и Петровым была предложена следующая формула [5]:

$$\operatorname{tr} \mathcal{P} \exp \left(i \int\limits_0^t \mathrm{d}\tau \, A^J \right) = \int \mathcal{D}U \exp \left\{ iJ \int\limits_0^t \mathrm{d}\tau \operatorname{tr} \left[\sigma_3 \left(U^\dagger A U + i U^\dagger U \right) \right] \right\}, \tag{6}$$

где вводится вспомогательное поле $U(\tau) \in SU(2)$ на отрезке $[0,t]$, $A^J = A^J_\mu \dot{x}_\mu$, поле $A^J_\mu \in \mathfrak{su}(2)$ в представлении спина J, а в правой части $A = A_\mu \dot{x}_\mu$ предполагается в фундаментальном представлении. Оригинальное доказательство этой формулы в работе [5] основывается на регуляризации интеграла по $SU(2)$ кинетическим членом. В то же время в статье [6] для постоянного $A = A^3\frac{\sigma_3}{2}$ предлагается другая регуляризация, основываясь на которой можно доказать и исходную формулу (6) (см. также [4]). Используя параметризацию $U \in SU(2)$ углами Эйлера (ϕ, ψ, θ)

$$U = e^{-i\phi\sigma_3/2}e^{-i\theta\sigma_2/2}e^{-i\psi\sigma_3/2}, \tag{7}$$

можно показать, что вклад в интеграл будут давать только траектории с $\cos\theta = l/J$, где $l = -J \dots J$ [4], в отличие от фейнмановского континуального интеграла, в котором основной вклад несут непрерывные траектории. Таким образом, (6) даёт пример интеграла по траекториям, в котором мера сосредоточена на «дискретных» траекториях.

3 Обсуждение

Разложение Сили–деВитта (4) подходит, в основном, для исследования ультрафиолетового поведения $t \to 0$ интегралов в (3). В частности, относительно легко можно получить β–функцию теории Янга–Миллса (в согласии с [7, 8]). Однако, эта формула не подходит для интегрирования по собственному времени в (3), так как каждое слагаемое будет расходиться на верхнем (инфракрасном) пределе $t \to \infty$. Поэтому для изучения конечных поправок в однопетлевом эффективном действии (1) необходимо использовать представление (5). Объединяя этот результат с формулой Дьяконова–Петрова (6), получим:

$$K_M(t) = \int \mathcal{D}z\mathcal{D}U \exp\left\{\int\limits_0^t \mathrm{d}\tau \left(-\frac{\dot{z}^2}{4} + iJ\mathrm{tr}\,\sigma_3\left(U^\dagger A_\mu U \dot{z}_\mu + iU^\dagger BU + iU^\dagger \dot{U}\right)\right)\right\}, \tag{8}$$

где на переменные интегрирования наложены периодические граничные условия: $z(0) = z(t)$ и $U(0) = U(t)$, при этом $z(\tau) \in \mathbb{R}^4$, а $U(\tau) \in SU(2)$, а $M = -\nabla^2 + B$.

Формула (8) может быть отправной точкой для нахождения с конечных поправок в эффективном действии. При этом на поле A_μ необходимо накладывать некоторые условия, которые дадут возможность продвинуться в вычислении интеграла (8). Например, можно считать поле A_μ ковариантно–постоянным и получить уже известный результат [9] (см. также [4]). Однако, в этом случае вакуум, как уже отмечалось, будет неустойчивым. Альтернативой этому пути может быть использование переменных Фаддеева–Ниеми [10], с помощью которых можно рассматривать различные нетривиальные полевые конфигурации. В частности, интересно было бы написать разложение по производным плотности глюонного конденсата ρ (введённой в работе [10]). Но для этого сначала надо понять, как строится более простое разложение по производным тензора напряженности $F_{\mu\nu}$ (в случае $SU(2)$), так как это будет обобщением результата для ковариантно–постоянного поля и даст основу для дальнейших вычислений в более сложных анзацах.

Глава 2

Градиентное разложение

1 Введение

В этой главе исследуется частный случай формулы (8): мы будем строить разложение теплового ядра по производным тензора напряжённости $F_{\mu\nu}$, что соответствует неабелеву калибровочному полю медленно меняющейся амплитуды и обобщает результат для ковариантно–постоянного поля. Подобные разложения можно строить и для других полевых конфигураций (например, используя переменные Фаддеева–Ниеми), но рассматриваемый здесь случай является, по всей видимости, самым простым.

Итак, градиентное разложение теплового ядра можно получить в калибровке Фока–Швингера $(x-y)_\mu A_\mu(x) = 0$, так как в ней есть замечательная связь потенциала A_μ и напряженности поля $F_{\mu\nu}$ (также см. Приложение B):

$$A_\mu(x) = -\int\limits_0^1 \mathrm{d}z s_\nu z F_{\mu\nu}(y+sz) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(n+2)} s_\nu s_{\rho_1} \ldots s_{\rho_n} \partial_{\rho_1} \ldots \partial_{\rho_n} F_{\mu\nu}(y), \quad (9)$$

где $s = x - y$, а второе равенство получается интегрированием ряда Тейлора для тензора напряженности $F_{\mu\nu}$. Отметим, что в калибровке Фока–Швингера присутствует условие, фиксирующее калибровочное поле в точке $A_\mu(y) = 0$, поэтому в точке y можно заменить $\partial_\mu \to \nabla_\mu$ в разложении (9), что мы и будем предполагать далее.

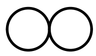
Теперь рассмотрим функциональный интеграл для теплового ядра оператора

$M = -\nabla^2$ (вклад духов в (1)), используя представление (8):

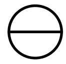
$$K_{-\nabla^2}(t) = \int\limits_{s(0)=s(t)=0} \mathcal{D}s\mathcal{D}U \exp\Bigg\{ \int\limits_0^t \mathrm{d}\tau \Bigg(-\frac{\dot{s}^2}{4} + iJ\mathrm{tr}\left[\sigma_3 \left(-\frac{1}{2}U^\dagger F_{\mu\nu}U\dot{s}_\mu s_\nu + iU^\dagger\dot{U}\right)\right] + iJ\mathrm{tr}\left[\sigma_3\left(-\frac{1}{3}U^\dagger\nabla_\rho F_{\mu\nu}U\dot{s}_\mu s_\nu s_\rho - \frac{1}{8}U^\dagger\nabla_{\rho_1}\nabla_{\rho_2}F_{\mu\nu}U\dot{s}_\mu s_\nu s_{\rho_1}s_{\rho_2} - \ldots\right)\right]\Bigg)\Bigg\}, \quad (10)$$

где все значения напряжённости и её производных $F_{\mu\nu} \equiv F_{\mu\nu}(y)$, $\nabla_\rho F_{\mu\nu} \equiv \nabla_\rho F_{\mu\nu}(y)$ берутся в точке y. Градиентное разложение теплового ядра получится из этой формулы, если написать обычный ряд теории возмущений по малым параметрам $\nabla_\rho F_{\mu\nu}$, $\nabla_{\rho_1}\nabla_{\rho_2}F_{\mu\nu}\ldots$ Нулевым приближением будет ковариантно–постоянное поле, а первыми поправками будут следующие 3 двухпетлевые вакуумные диаграммы (см. также [4] для абелева случая):

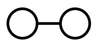
$$\Gamma_1^{-\nabla^2} = -\frac{i}{8}\nabla_{(\rho}\nabla_\sigma F_{\nu)\mu}\int \mathrm{d}\tau\, G_{\dot{\mu}\nu}G_{\rho\sigma} = \quad (11)$$



$$\Gamma_2^{-\nabla^2} = \frac{i}{18}\nabla_{(\rho}F_{\nu)\mu}\nabla_{(\rho'}F_{\nu')\mu'}\int \mathrm{d}\tau\mathrm{d}\tau'(2G_{\dot{\mu}\dot{\mu}'}G_{\nu\nu'}G_{\rho\rho'} + 4G_{\dot{\mu}\nu'}G_{\nu\dot{\mu}'}G_{\rho\rho'}) = \quad (12)$$



$$\Gamma_3^{-\nabla^2} = \frac{i}{18}\nabla_{(\rho}F_{\nu)\mu}\nabla_{(\rho'}F_{\nu')\mu'}\int \mathrm{d}\tau\mathrm{d}\tau'(G_{\dot{\mu}\dot{\mu}'}G_{\nu\rho}G_{\nu'\rho'} + 4G_{\dot{\mu}\nu'}G_{\nu\rho}G_{\dot{\rho}'\rho'} + 4G_{\nu\nu'}G_{\dot{\mu}\rho}G_{\dot{\mu}'\rho'}) = \quad (13)$$



где по индексам в круглых скобках производится симметризация. Стоит отметить, что термин «двухпетлевой» здесь относится только к нашему градиентному разложению, т.е. в двухпетлевых вакуумных диаграммах (11–13) собраны вклады с двумя производными поля. По константе Планка $\hbar$ мы всё также находимся в рамках одной петли.

В заключении приведём выражение для теплового ядра оператора $M = -\nabla^2\eta_{\mu\nu} + B_{\mu\nu}$ (вклад калибровочного поля), где $B^{ab}_{\mu\nu} = -2F^c_{\mu\nu}if^{acb}$ (присоединённое представление):

$$
\begin{aligned}
K_{-\nabla^2-2F_{\mu\nu}}(y,y;t) = & \int\limits_{s(0)=s(t)=0} \mathcal{D}s\mathcal{D}U \exp\Bigg\{ \int\limits_0^t \mathrm{d}\tau \Bigg(-\frac{\dot{s}^2}{4} + iJ\mathrm{tr}\left[\sigma_3\left(-\frac{1}{2}U^\dagger F_{\mu'\nu'}U\dot{s}_{\mu'}s_{\nu'} + iU^\dagger\dot{U}\right)\right] \\
& + iJ\mathrm{tr}\left[\sigma_3\left(-\frac{1}{3}U^\dagger\nabla_\rho F_{\mu'\nu'}U\dot{s}_{\mu'}s_{\nu'}s_\rho - \frac{1}{8}U^\dagger\nabla_{\rho_1}\nabla_{\rho_2}F_{\mu'\nu'}U\dot{s}_{\mu'}s_{\nu'}s_{\rho_1}s_{\rho_2} - \ldots\right)\right]\Bigg)\eta_{\mu\nu} \\
& + iJ\mathrm{tr}\left[\sigma_3\left(-2U^\dagger F_{\mu\nu}U - 2U^\dagger\nabla_\rho F_{\mu\nu}Us_\rho - \ldots\right)\right]\Bigg\}.
\end{aligned}
\tag{14}
$$

2 Ковариантно–постоянное поле

В этом разделе мы исследуем частный случай формулы (10) и доказываем формулу для эффективного действия (18).

Интеграл (10) можно вычилслить точно для ковариантно–постоянного поля [4], т.к. в этом случае интеграл будет гауссовым:

$$
K_{-\nabla^2}(t) = \int\limits_{s(0)=s(t)=0} \mathcal{D}s\mathcal{D}U \exp\left\{ \int\limits_0^t \mathrm{d}\tau \left(-\frac{\dot{s}^2}{4} + iJ\mathrm{tr}\left[\sigma_3\left(-\frac{1}{2}U^\dagger F_{\mu\nu}U\dot{s}_\mu s_\nu + iU^\dagger\dot{U}\right)\right]\right)\right\}.
$$

Интегрирование по $SU(2)$ даёт следующий результат [4]:

$$
K_{-\nabla^2}(t) = \sum_{l=-J}^{J} \int \mathcal{D}s \, \exp\left\{ \int\limits_0^t \mathrm{d}\tau \, \left(-\frac{\dot{s}^2}{4} - il\frac{1}{2}F_{\mu\nu}\dot{s}_\mu s_\nu \right)\right\}.
$$

Заметим, что выражение в экспоненте имеет вид действия частицы в однородном магнитном поле. Ковариантно–постоянное поле $F_{\mu\nu}$ можно привести к пфаффовой форме (с помощью ортогонального преобразования O) во всём пространстве так как:

$$
[F_{\mu\nu}, F_{\sigma\rho}] = 0. \tag{15}
$$

В итоге тензор напряжённости примет вид:

$$\hat{F} = O^T F_{\mu\nu} O = \begin{bmatrix} 0 & F_1 & & \\ -F_1 & 0 & & \\ & & 0 & F_2 \\ & & -F_2 & 0 \end{bmatrix} = \mathrm{diag}\left\{F_1 i\sigma_2, F_2 i\sigma_2\right\}. \tag{16}$$

Тогда интегралы по двум парам переменных s_μ разделяются и, используя результаты для заряженной частицы в магнитном поле, мы получим:

$$K_{-\nabla^2}(t) = \sum_{l=-J}^{J} (4\pi t)^{-d/2} \left(\mathrm{Det}\frac{\sin(lFt)}{lFt}\right)^{-1/2}, \tag{17}$$

где дробь внутри детерминанта понимается в смысле ряда.

Аналогично можно вычислить интеграл (14). Здесь слагаемое с $-2F_{\mu\nu}$ сразу интегрируется и мы получаем:

$$K_{-\nabla^2 - 2F_{\mu\nu}}(t) = K_{-\nabla^2}(t)\left(e^{-2iFt}\right)_{\mu\nu}.$$

Как уже отмечалось, в случае ковариантно–постоянного, компоненты тензора напряжённости коммутируют (15), поэтому их одновременно можно привести к диагональной форме (вообще говоря, к картановской подалгебре). Далее, ограничимся случаем $F_1 = F$, $F_2 = 0$ в (16), тогда собственные числа матрицы $2iF_{\mu\nu}$ будут $(\pm 2F, 0, 0)$, поэтому одно из них даст экспоненциальную расходимость при $t \to \infty$. Вклад нулевых собственных чисел сократится слагаемым духов. Тогда однопетлевая поправка к лагранжиану эффективного действия в случае ковариантно–постоянного фонового поля примет вид (см. также [11]):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^1 &= -\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}t}{t}\left(\frac{1}{2}\mathrm{tr}\, K_{-\nabla^2 - 2F_{\mu\nu}}(t) - K_{-\nabla^2}(t)\right) \\ &= -\frac{1}{16\pi^2}\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}t}{t^2}\frac{F}{\sin Ft}\frac{\left(e^{-2iFt} + e^{2iFt}\right)}{2} = -\frac{F^2}{16\pi^2}\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}t}{t^2}\frac{e^{-3it} + e^{it}}{1 - e^{-2it}}. \end{aligned}$$

Введём теперь ультрафиолетовое обрезание ϵ и выделим отдельно член e^{iFt}, после чего повернём контуры интегрирования $t \to -it$ и $t \to it$ и получим такое выражение для лагранжиана эффективного действия ковариантно–постоянного поля:

$$\mathcal{L}^1 = -\frac{1}{4g^2}F^2 - \frac{11}{6}\frac{F^2}{16\pi^2}\left(\ln\left(\frac{F}{\mu^2}\right) - c\right) + i\frac{F^2}{16\pi}, \tag{18}$$

где c– постоянная, зависящая от схемы регуляризации. Видно, что в эффективном действии появляется мнимая добавка, что интерпретируется как неустойчивость ковариантно–постоянного вакуума в однопетлевом приближении.

3 Вычисление Γ_1

Здесь мы получим первую поправку к результату (17) по производным тензора напряжённости $F_{\mu\nu}$. Это вычисление разбито на три подпункта. Сначала мы рассмотрим влияние интегрирования по калибровочной группе $\mathcal{D}U$, затем покажем, как вычислять пропагатор $G_{\mu\nu}$, который будет использоваться в последующем интегрировании по $\mathcal{D}s$.

3.1 Интегрирование по $SU(2)$

Рассмотрим теперь наиболее простой вклад (11) в градиентном разложении интеграла (10). Как и в случае ковариантно–постоянного поля, калибровочным преобразованием можно повернуть $\vec{F}_{\mu\nu}\cdot\vec{\sigma}$ в квадратичном по s_μ члене $U^\dagger\vec{F}_{\mu\nu}\cdot\vec{\sigma}U\dot{s}_\mu s_\nu$ до $F_{\mu\nu}\sigma_3$. При этом члены с производными, конечно, будут всё также иметь все три цветные компоненты. Для вспомогательного поля $U \in SU(2)$ мы выберем параметризацию углами Эйлера (7), тогда аргумент экспоненты в формуле Дьяконова–Петрова (6) будет таким:

$$\mathrm{tr}\left[\sigma_3\left(U^\dagger\vec{A}\cdot\frac{\vec{\sigma}}{2}U + iU^\dagger\dot{U}\right)\right] = \vec{A}\cdot\vec{n} + (\cos\theta - 1)\dot{\phi} + (\dot{\phi} + \dot{\psi}),$$

где $\vec{n} = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta)$ (см. Приложение C). Слагаемое с $\dot{\phi} + \dot{\psi}$ из–за периодических граничных условий $\phi(0) = \phi(t) + 2\pi n$ и $\psi(0) = \psi(t) + 2\pi m$ не даст вклада в интеграл и его можно опустить. После этого, выражение для $\Gamma_1^{-\nabla^2}$ (11)

станет таким:

$$\Gamma_1^{-\nabla^2} = \int\limits_{s(0)=s(t)=0} \mathcal{D}s\,\mathcal{D}\phi\,\mathcal{D}\cos\theta\exp\Bigg\{\int\limits_0^t \mathrm{d}\tau\Bigg(-\frac{\dot{s}^2}{4}+iJ\left(-\frac{1}{2}F_{\mu\nu}\dot{s}_\mu s_\nu\cos\theta+\dot{\phi}(\cos\theta-1)\right)\Bigg)\Bigg\}\times$$
$$\times\left(-\frac{i}{8}J\int\limits_0^t \mathrm{d}\xi\,\nabla_{\rho_1}\nabla_{\rho_2}\vec{F}_{\mu\nu}\cdot\vec{n}(\xi)\,\dot{s}_\mu s_\nu s_{\rho_1}s_{\rho_2}\right). \tag{19}$$

Здесь сначала необходимо взять интеграл по траекториям на $SU(2)$ (т.е. по переменным $\mathcal{D}\phi$ и $\mathcal{D}\cos\theta$), а только после этого по $\mathcal{D}s$. Отметим, что в интеграле (19) в предэкспоненциальном множителе содержится сумма компонент вектора $n(\vec{\xi})$ (в какой–то точке $\xi\in[0,t]$), которые содержат переменные интегрирования ϕ и $\cos\theta$. Результат для слагаемого общего вида такой (см. Приложение A):

$$\int\mathcal{D}\phi\,\mathcal{D}\cos\theta\,\exp\left\{iJ\int\limits_0^t \mathrm{d}\tau\,\dot{\phi}(\cos\theta-1)-h(\tau)\cos\theta\right\}\exp\{i\alpha\phi(\xi)\}\,g(\cos\theta(\xi))$$
$$=\sum_{l=-J}^{J} g\left(\frac{l-\alpha\theta(0)}{J}\right)\exp\left\{-i\int\limits_0^t \mathrm{d}\tau(l-\alpha\theta(\tau-\xi))h(\tau)\right\},$$

где $h(\tau)=\frac{1}{2}F_{\mu\nu}\dot{s}_\mu s_\nu$ (вообще говоря, $h(\tau)$ может зависеть и от $\cos\theta$), а $g(x)$– некоторая функция (нас будут интересовать только два случая: $g(x)=x$, что соответствует $\cos\theta$, и $g(x)=\sqrt{1-x^2}$ для $\sin\theta$). Этот интеграл обобщает формулу из статьи [6] (и работы [4]) на случай наличия предэкспоненциальных множителей в интеграле по траекториям по группе $SU(2)$. В итоге интегрирование по группе усложняет вид квадратичной части действия для переменной s_μ: если раньше гамильтониан $h(\tau)$ имел вид энергии частицы в постоянном магнитном поле $F_{\mu\nu}$, то теперь в этом магнитном поле появилась явная зависимость от времени τ в виде функции Хевисайда $\theta(\tau-\xi)$. Слагаемые с компонентами $\vec{n}(\xi)$ в (19) преобразуются так:

$$\cos\phi\sin\theta \qquad \longrightarrow \qquad \frac{1}{2}\sum_{\alpha=\pm1}\gamma_1(l,\alpha)\sqrt{1-\frac{(l-\alpha\theta(0))^2}{J^2}},$$

$$\sin\phi\sin\theta \qquad \longrightarrow \qquad \frac{1}{2i}\sum_{\alpha=\pm1}\alpha\gamma_1(l,\alpha)\sqrt{1-\frac{(l-\alpha\theta(0))^2}{J^2}},$$

$$\cos\theta \qquad \longrightarrow \qquad \gamma_1(l,0)\frac{l-\alpha\theta(0)}{J},$$

где в $\gamma_1(l,\alpha)$ собран весь результат интегрирования по $\mathcal{D}s$.

3.2 Функция Грина

Теперь рассмотрим, как изменится функция Грина по сравнению с абелевым случаем [4]. Для этого выберем собственное время мнимым, чтобы получить вещественное действие. Оператор квадратичной флуктуации в случае калибровочной группы $SU(2)$ выглядит так:

$$\Delta_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\delta_{\mu\nu}\partial_\tau^2 + (l-\alpha\theta(\tau-\xi))F_{\mu\nu}\partial_\tau.$$

Заметим, что $\Delta_{\mu\nu}$ явно зависит от времени τ (из–за функции Хевисайда $\theta(\tau-\xi)$) и описывает движение частицы в постоянном магнитном поле $F_{\mu\nu}$, которое испытывает скачок при $\tau=\xi$. Для нахождения функции Грина $G_{\mu\nu}(\tau,\tau')$ этого оператора (с нулевыми граничными условиями) необходимо рассматривать два случая ($\tau'>\xi$ и $\tau'<\xi$) и разбить интервал $\tau\in[0,t]$ на три промежутка точками $\tau=\tau'$ и $\tau=\xi$. На этих промежутках уравнение для функции Грина

$$\Delta_{\mu\nu}G(\tau,\tau')_{\nu\sigma} = \delta_{\mu\sigma}\delta(\tau-\tau') \tag{20}$$

становится однородным. Решив его на каждом из промежутков (учитывая нулевые граничные условия), мы получим набор констант (c_1,c_2,c_3,c_4) и с их помощью можно сшить полученные решения: сама функция Грина должна быть непрерывной, а первая производная испытывать скачки в точках $\tau=\tau'$ и $\tau=\xi$ (его величину можно найти проинтегрировав уравнение (20) по ϵ–окрестности точки разрыва). Условия на скачки выглядят так:

$$
\begin{gathered}
\partial_\tau G_{\mu\nu}(\tau'+0,\tau') - \partial_\tau G_{\mu\nu}(\tau'-0,\tau') = -2, \\
\partial_\tau G_{\mu\nu}(\xi+0,\tau') - \partial_\tau G_{\mu\nu}(\xi-0,\tau') = 2F_{\mu\sigma}(l'-l)G_{\sigma\nu}(\xi,\tau'),
\end{gathered}
\tag{21}
$$

где $l' = l - \alpha$. Например, при $\xi < \tau'$, скачок слагаемого с $F_{\mu\nu}$ (т.е. магнитного поля) приведёт к следующему разбиению интервала $[0,t]$:

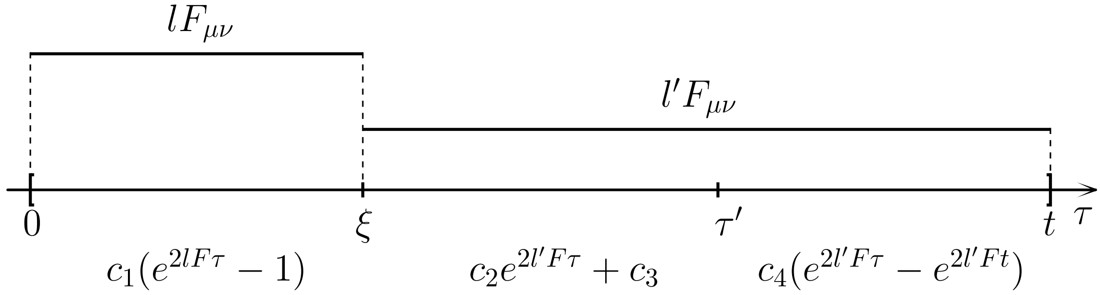


Рис. 2.1. Скачок магнитного поля и однородные решения уравнения (20)

Решение системы линейных уравнений на константы (c_1, c_2, c_3, c_4), полученной из (21) (и непрерывности функции Грина), удобно провести с помощью Wolfram Mathematica. В результате получим:

$$
\begin{gathered}
G_{\mu\nu}(\tau,\tau')\Big|_{\tau=\tau'=\xi} = \left(\frac{\left(-1+e^{2Fl\xi}\right)\left(e^{2Fl'\xi}-e^{2Fl't}\right)}{FD}\right)_{\mu\nu}, \\
\partial_\tau G_{\mu\nu}(\tau,\tau')\Big|_{\tau=\tau'=\xi} = \left(\frac{e^{2F(l\xi+l't)}l + e^{2Fl'\xi}l' - e^{2F(l+l')\xi}(l+l')}{D}\right)_{\mu\nu}, \\
D = -e^{2Fl'\xi}l + e^{2Fl't}(l-l') + e^{2F(l\xi+l't)}l',
\end{gathered}
\tag{22}
$$

где мы использовали симметричное определение:

$$
\partial_\tau G_{\mu\nu}(\tau,\tau')\Big|_{\tau=\tau'=\xi} = \frac{1}{2}\left(\partial_\tau G_{\mu\nu}(\tau,\tau')\Big|_{\tau\to\tau'+0} + \partial_\tau G_{\mu\nu}(\tau,\tau')\Big|_{\tau\to\tau'-0}\right).
$$

Это связано с тем, что в точке $\tau = \tau'$ производная функции Грина имеет скачок. Такая же ситуация могла бы произойти и при $\tau' \to \xi$, но оказывается, что $\partial_\tau G(\tau,\tau')\Big|_{\tau'=\xi+0} = \partial_\tau G(\tau,\tau')\Big|_{\tau'=\xi-0}$. Стоит отметить, что решение (22) совпадает с абелевым случаем [4], если положить $l = l'$ (т.е. $\alpha = 0$ в (20)).

3.3 Интегрирование по траекториям

Итак, зная вид пропагатора (22), можно завершить вычисление Γ_1. Интегрирование по $SU(2)$ сведётся к изменению $G_{\mu\nu}$ в зависимости от выбранного предэкспоненциального слагаемого в (19). Для каждого из этих слагаемых интеграл по $\mathcal{D}s$ даст (11), отличаться будет только сам пропагатор, который теперь будет зависеть не только от «проекции спина» l, но и от $\alpha = \pm 1$ и $\xi \in [0, t]$. Если собрать в $\gamma_1(l, \alpha)$ результат интегрирования по $\mathcal{D}s$, то (19) перепишется так:

$$\Gamma_1 = -\frac{i}{8} J \sum_{l=-J}^{J} \left[\nabla_{(\rho} \nabla_{\sigma} F^1_{\nu)\mu} \frac{1}{2} \sum_{\alpha=\pm 1} \gamma_1(l, \alpha) \sqrt{1 - \frac{(l - \alpha\theta(0))^2}{J^2}} \right.$$
$$+ \nabla_{(\rho} \nabla_{\sigma} F^2_{\nu)\mu} \frac{1}{2i} \sum_{\alpha=\pm 1} \alpha \gamma_1(l, \alpha) \sqrt{1 - \frac{(l - \alpha\theta(0))^2}{J^2}}$$
$$\left. + \nabla_{(\rho} \nabla_{\sigma} F^3_{\nu)\mu} \gamma_1(l, 0) \frac{l - \alpha\theta(0)}{J} \right].$$

Если выбрать $\theta(0) = 0$, то выражение для Γ_1 заметно упрощается в случае фундаментального представления $J = \frac{1}{2}$ и $l = \pm\frac{1}{2}$:

$$\Gamma_1 = -\frac{i}{8} \mathrm{tr} \left[\nabla_{(\rho} \nabla_{\sigma} F_{\nu)\mu} \left\{ F_2^{-1} \left(t \coth F_1 t \coth F_2 t - \frac{(F_1)^3 \coth F_1 t - (F_2)^3 \coth F_2 t}{F_1 F_2 ((F_1)^2 - (F_2)^2)} \right) \right\}^{\mu\nu}_{\rho\sigma} \right] \tag{23}$$

Матрицы $F_{1,2}$ действуют на $\mathbb{R} \otimes \mathbb{R}$ и равны $F \otimes \mathbb{1}$ и $\mathbb{1} \otimes F$ соответственно, причём индексы (μ, ν) относятся к первой матрице, а (σ, ρ) ко второй.

4 Результат

Итак, калибровочно–инвариантный результат для $\Gamma_1^{-\nabla^2}$ (в случае фундаментального представления $J = \frac{1}{2}$) даётся формулой (23). Итоговое выражение для градиентного разложения однопетлевого эффективного действия:

$$\mathcal{L}^1 = -\frac{1}{16\pi^2} \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}t}{t^2} \frac{F}{\sin Ft} \frac{\left(e^{-iFt} + e^{iFt}\right)}{2} \left(1 + \sum_{i=1}^{3} \left[\frac{1}{2} \mathrm{tr}\, \Gamma_i^{-\nabla^2 - 2iF_{\mu\nu}} - \Gamma_i^{-\nabla^2} \right] + \dots \right), \tag{24}$$

где множитель перед скобкой — результат для коваринатно–постоянного поля, а Γ_i^M — петлевая поправка для соответствующего оператора $M = -\nabla^2$, $-\nabla^2 - 2iF_{\mu\nu}$ (11–13) и tr подразумевается по лоренцевским значкам. Здесь надо иметь в виду, что интегрирование по калибровочной группе (см. раздел 2.3.1) изменит пропагатор $G_{\mu\nu}$ (см. раздел 2.3.2). Видимо, при пертурбативном учёте поправок от производных $F_{\mu\nu}$, их вклад в (24) будет степенным при $t \to \infty$. При этом расходимость (которая даёт мнимую часть в эффективном действии (18)) носит экспоненциальный характер. Поэтому имеет смысл подставлять в (5) более сложные полевые конфигурации, которые можно получить с помощью разложения Фаддеева–Ниеми [10]. Проблемой в этом подходе будет взять интеграл по $SU(2)$, аналогичный ковариантно–постоянному случаю (см. раздел 2.2). Вероятно, здесь можно будет продвинуться, используя приближение $\rho = \mathrm{Const}$ (см. [10]).

Заключение

В этой работе мы исследовали однопетлевое эффективное действие теории Янга–Миллса (1) с помощью метода теплового ядра (3). Для получения конечных (в инфракрасном пределе) вкладов в эффективное действие, предлагается представление для следа теплового ядра в виде интеграла по путям (8) (см. разделы 1.3 и 2.4, а также [4]).

В качестве примера применения формулы (8), был представлен способ получения градиентного разложения эффективного действия (24) по производным тензора напряжённости $F_{\mu\nu}$ (поле медленно меняющейся амплитуды) для калибровочной группы $SU(2)$. Низший порядок этого разложения (18) совпадает с известным результатом для ковариантно–постоянного поля [9] (полученным другим способом). Это вычисление — простейший пример разложений, которые можно получить из формулы (8). Отметим, что результат (24) хорошо определён в инфракрасной области — его можно интегрировать по собственному времени t.

Наши результаты теперь можно применить к исследованию вакуумных глюонных возбуждений. А именно доказать существование неоднородных, т.н. «солитонных» конфигураций поля, ведь в квантовой теории Янга–Миллса появляется размерный параметр, который мог бы характеризовать массу (размер) солитона. Эта идея принадлежит Фаддееву [13]. В его работе с Ниеми [10] рассматривается полная замена переменных для калибровочного поля $SU(2)$, которая должна упрощать описание теории в инфракрасной области. Согласно их программе, замену переменных необходимо проводить уже в эффективном действии (1). Возможным способом реализации этой идеи является использование представления (8) для теплового ядра и аналога градиентного разложения (24), но уже относительно новых переменных Фаддеева–Ниеми. Если при этом удастся доказать возникновение ненулевого вакуумного среднего $\langle\rho^2\rangle$, то это объяснит механизм возникновения глюонного конденсата и будет очень важным шагом на пути объяснения конфайнмента.

Приложение A

Интеграл по $su(2)$ с внешним источником

Здесь мы будем доказывать формулу:

$$\int \mathcal{D}\phi\mathcal{D}\cos\theta\, e^{iJ\int\limits_0^t \dot{\phi}(\cos\theta-1)-h(\tau)\cos\theta-j(\tau)\phi} = \sum_{l=-J}^{J} e^{-il\int\limits_0^t \mathrm{d}\tau\, h(\tau)-iJ\int\limits_0^t \mathrm{d}s\,\mathrm{d}\tau\, j(s)h(\tau)\theta(s-\tau)}. \quad (25)$$

Доказательство во многом аналогично [4]. По переменной ϕ подразумеваются граничные условия $\phi(0)=\phi(t)+2\pi n$ (по всем $n\in\mathbb{Z}$ необходимо просуммировать), а по переменной $\cos\theta$: $\cos\theta(0)=\cos\theta(t)$. Итак, напишем дискретизированную версию этого интеграла:

$$\begin{aligned} I_1 &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int\limits_{\phi(0)=\phi(t)+2\pi n} \mathcal{D}\phi\mathcal{D}\cos\theta \exp\left\{ iJ\int\limits_0^t \dot{\phi}(\cos\theta-1)-h(\tau)\cos\theta-j(\tau)\phi \right\} \\ &= J^N \int\limits_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi_N \int\limits_{-\infty}^{\infty} \prod_1^{N-1} \mathrm{d}\phi_k \int\limits_{-1}^{1} \prod_1^N \mathrm{d}\cos\theta_k\, e^{iJ\sum\limits_1^N \left[(\phi_k-\phi_{k-1})(\cos\theta_k-1)-\frac{t}{N}(h_k\cos\theta_k+j_k\phi_k)\right]} \\ &= J\int\limits_{-1}^{1} \prod_1^N \mathrm{d}\cos\theta_k \prod_1^{N-1} \delta\left(\cos\theta_k-\cos\theta_{k+1}-\frac{t}{N}j_k\right)\, e^{-iJ\sum\limits_{k=1}^N \frac{t}{N}h_k\cos\theta_k} \underbrace{\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{2\pi iJn(\cos\theta_N-1)}}_{\sum\limits_{m\in\mathbb{Z}}\delta(J(\cos\theta_N-1)-m)}, \end{aligned}$$

где в последней строке используется формула Пуассона. В процессе интегрирования по $\cos\theta_k$, возникает следующая свёртка тока $j(s)$ и гамильтониана $h(\tau)$:

$$\frac{t}{N}\left(h_1\cos\theta_1 + h_2\cos\theta_2 + \dots + h_N\cos\theta_N\right) \to \frac{t}{N}\left(h_1\left(\cos\theta_2 + \frac{t}{N}j_1\right) + h_2\cos\theta_2 + \dots\right)$$
$$\to \frac{t}{N}\left(\sum_{i=1}^{N} h_i\cos\theta_N + \frac{t}{N}h_1 j_1 + \frac{t}{N}(h_1+h_2)j_2 + \dots + \frac{t}{N}(h_1+h_2+\dots+h_{N-1})j_{N-1}\right)$$
$$\to \int\limits_0^t \mathrm{d}s \int\limits_0^s \mathrm{d}\tau\, j(s)h(\tau) + \cos\theta_N \int\limits_0^t \mathrm{d}\tau\, h(\tau) = \int\limits_0^t \mathrm{d}s\,\mathrm{d}\tau\, j(s)h(\tau)\theta(s-\tau) + \cos\theta_N \int\limits_0^t \mathrm{d}\tau\, h(\tau)$$

где первая строчка следует из интегрирования по $\cos\theta_1$, а вторая из интегрирования по всем $\cos\theta_k$, $k = 1\dots N-1$. Интеграл по ϕ_N будет константой:

$$\int\limits_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi_N \exp\left\{-\frac{iJt}{N}j_N\phi_N\right\} = \frac{N}{iJtj_N}\left(1 - \exp\left\{-\frac{2\pi iJt}{N}j_N\right\}\right) \xrightarrow{N\to\infty} 2\pi,$$

и поэтому не даст существенного вклада. И в итоге мы получим:

$$I_1 = \sum_{l=-J}^{J} \exp\left\{-il\int_0^t \mathrm{d}\tau\, h(\tau)\right\} \exp\left\{-iJ\int\limits_0^t \mathrm{d}s\,\mathrm{d}\tau\, j(s)h(\tau)\theta(s-\tau)\right\},$$

где $\theta(x)$– функция Хевисайда. Формула (25) доказана. Воспользуемся этим результатом для вычисления следующего интеграла:

$$I_2 = \int \mathcal{D}\phi\,\mathcal{D}\cos\theta\, \exp\left\{iJ\int\limits_0^t \mathrm{d}\tau\, \dot{\phi}(\cos\theta - 1) - h(\tau)\cos\theta\right\} \exp\left\{i\alpha\phi(\xi)\right\} g(\cos\theta(\xi)).$$

Чтобы взять этот интеграл, введём в аргумент экспоненты слагаемое с током $j(\tau)\phi$ и предэкспоненциальные множители с помощью вариационных производных по этому току $\frac{\delta}{\delta j(\xi)}$ (как при построении обычной теории возмущений):

$$
\begin{aligned}
I_2 &= e^{-i\alpha\frac{1}{iJ}\frac{\delta}{\delta j(\xi)}}\, g\left(-\frac{1}{iJ}\frac{\delta}{\delta h(\xi)}\right)\int \mathcal{D}\phi\,\mathcal{D}\cos\theta\, e^{iJ\int\limits_0^t \mathrm{d}\tau\,\dot{\phi}(\cos\theta-1)-h(\tau)\cos\theta-j(\tau)\phi}\Bigg|_{j=0} \\
&= e^{-i\alpha\frac{1}{iJ}\frac{\delta}{\delta j(\xi)}}\, g\left(-\frac{1}{iJ}\frac{\delta}{\delta h(\xi)}\right)\sum_{l=-J}^{J} e^{-il\int\limits_0^t \mathrm{d}\tau\, h(\tau)-iJ\int\limits_0^t \mathrm{d}\tau \mathrm{d}s\, h(\tau)j(s)\theta(\tau-s)}\Bigg|_{j=0} \\
&= \sum_{l=-J}^{J} e^{-i\alpha\frac{1}{iJ}\frac{\delta}{\delta j(\xi)}}\, g\left(\frac{l}{J}+\int\limits_0^t \mathrm{d}s\, j(s)\theta(\xi-s)\right) e^{-il\int\limits_0^t \mathrm{d}\tau\, h(\tau)-iJ\int\limits_0^t \mathrm{d}\tau \mathrm{d}s\, h(\tau)j(s)\theta(\tau-s)}\Bigg|_{j=0}.
\end{aligned}
$$

Что приводит к:

$$
\begin{aligned}
&\int \mathcal{D}\phi\,\mathcal{D}\cos\theta\,\exp\left\{iJ\int\limits_0^t \mathrm{d}\tau\,\dot{\phi}(\cos\theta-1)-h(\tau)\cos\theta\right\}\exp\left\{i\alpha\phi(\xi)\right\}g(\cos\theta(\xi)) \\
&= \sum_{l=-J}^{J} g\left(\frac{l-\alpha\theta(0)}{J}\right)\exp\left\{-i\int\limits_0^t \mathrm{d}\tau(l-\alpha\theta(\tau-\xi))h(\tau)\right\},
\end{aligned}
\tag{26}
$$

где $\alpha = \pm 1$, а $g(x)$ может быть любой (аналитической) функцией, но нас будут интересовать только два случая:

$$
g(x) = \begin{cases} x \\ \sqrt{1-x^2} \end{cases}
$$

В формуле (26) появляется $\theta(0)$– значение функции Хэвисайда в нуле (которое требует отдельного доопределения) и явная зависимость от собственного времени в показателе экспоненты в виде $\theta(\tau-\xi)$, что повлияет на вид функции Грина этой задачи.

Приложение B

Калибровка Фока–Швингера

Здесь мы будем доказывать совместность формулы, связывающей потенциал A_μ и тензор напряжённости $F_{\mu\nu}$ в калибровке Фока–Швингера $x_\mu A_\mu(x) = 0$

$$A_\mu = -\int\limits_0^1 \mathrm{d}t\, t x_\nu F_{\mu\nu}(tx) \tag{27}$$

и определения тензора напряжённости $F_{\mu\nu}$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig[A_\mu, A_\nu], \tag{28}$$

т.е. что подстановка (27) в (28) даст тот же тензор $F_{\mu\nu}$ (также см. [14]).

Для доказательства нам понадобятся тождества Бьянки:

$$\nabla_\alpha F_{\beta\gamma} + \text{цикл.} = 0, \tag{29}$$

где слева суммирование происходит по всем циклическим перестановка индексов (α, β, γ), а $\nabla_\alpha = \partial_\alpha - igA_\alpha$ — ковариантная производная. Заметим также, что из формулы (27) следует условие $x_\mu A_\mu(x) = 0$. Чтобы проследить за знаками в вычислениях, введём в формуле (27) коэффициент a:

$$A_\alpha = a \int\limits_0^1 \mathrm{d}t\, t x_\nu F_{\mu\nu}(tx).$$

Тогда в тензоре напряжённости (28) будут следующие слагаемые:

$$
\begin{aligned}
\partial_\mu A_\nu &= a \int_0^1 \mathrm{d}t\, t F_{\nu\mu}(tx) + t^2 x_\beta\, \partial_\mu F_{\nu\beta}(tx), \\
\partial_\nu A_\mu &= (\mu \leftrightarrow \nu), \\
[A_\mu, A_\nu] &= a^2 \int_0^1 \mathrm{d}t \int_0^1 \mathrm{d}s\, ts x_\alpha x_\beta [F_{\mu\alpha}(tx), F_{\nu\beta}(sx)] \\
&= a^2 \left(\int_0^1 \mathrm{d}t \int_0^t \mathrm{d}s + \int_0^1 \mathrm{d}t \int_t^1 \mathrm{d}s \right) ts x_\alpha x_\beta [F_{\mu\alpha}(tx), F_{\nu\beta}(sx)] \\
&= a^2 \int_0^1 \mathrm{d}t \int_0^t \mathrm{d}s\, ts\, x_\alpha x_\beta \left([F_{\mu\alpha}(tx), F_{\nu\beta}(sx)] + [F_{\mu\alpha}(sx), F_{\nu\beta}(tx)] \right).
\end{aligned}
$$

Теперь воспользуемся тождествами Бьянки (29):

$$
\begin{aligned}
\partial_\mu F_{\nu\beta}(tx) - \partial_\nu F_{\mu\beta}(tx) &= \partial_\mu F_{\nu\beta}(tx) + \partial_\nu F_{\beta\mu}(tx) \\
&= -\partial_\beta F_{\mu\nu}(tx) + ig[A_\mu, F_{\nu\beta}(tx)] + \text{цикл.} \\
&= -\partial_\beta F_{\mu\nu}(tx) + iga \int_0^1 \mathrm{d}s\, ts\, x_\alpha \left([F_{\mu\alpha}(stx), F_{\nu\beta}(tx)] + \text{цикл.} \right) \\
&= -\partial_\beta F_{\mu\nu}(tx) + \frac{iga}{t} \int_0^t \mathrm{d}s\, s\, x_\alpha \left([F_{\mu\alpha}(sx), F_{\nu\beta}(tx)] + \text{цикл.} \right),
\end{aligned}
$$

где в последнем равенстве мы заменили переменную интегрирования $s \to s/t$, а суммирование происходит по всем циклическим перестановкам индексов (μ, ν, β)

при фиксированном α. Соберём теперь вместе вклады в тензор напряжённости:

$$\begin{aligned}F_{\mu\nu} = \int\limits_0^1 \mathrm{d}t\ -2taF_{\mu\nu}(tx) - t^2 a x_\beta \partial_\beta F_{\mu\nu}(tx)\\
+ iga^2 \int\limits_0^1 \mathrm{d}t \int\limits_0^t \mathrm{d}s\, ts\, \underbrace{x_\alpha x_\beta}_{\text{симм.}} \Big([F_{\mu\alpha}(sx), F_{\nu\beta}(tx)] + [F_{\nu\alpha}(sx), F_{\beta\mu}(tx)]\\
+ [\underbrace{F_{\beta\alpha}(sx)}_{\text{антисимм.}}, F_{\mu\nu}(tx)] - \underbrace{[F_{\mu\alpha}(tx), F_{\nu\beta}(sx)]}_{[F_{\nu\alpha}(sx), F_{\beta\mu}(tx)]} - [F_{\mu\alpha}(sx), F_{\nu\beta}(tx)] \Big)\\
= -a \int\limits_0^1 \mathrm{d}t\, 2tF_{\mu\nu}(tx) + t^2 \underbrace{x_\beta \partial_\beta F_{\mu\nu}(tx)}_{\partial_t(F_{\mu\nu}(tx))} = -aF_{\mu\nu}(x),\end{aligned} \tag{30}$$

где использовалось:

$$\begin{aligned}x_\alpha x_\beta [F_{\mu\alpha}(tx), F_{\nu\beta}(sx)] = x_\alpha x_\beta [F_{\mu\beta}(tx), F_{\nu\alpha}(sx)] = -x_\alpha x_\beta [F_{\nu\alpha}(sx), F_{\mu\beta}(tx)]\\
= x_\alpha x_\beta [F_{\nu\alpha}(sx), F_{\beta\mu}(tx)].\end{aligned}$$

В итоге, положив $a = -1$, вычисление (30) доказывает совместимость (27) и (28).

Приложение C

Аргумент экспоненты в формуле Дьяконова–Петрова

В этом разделе мы докажем следующую формулу:

$$\mathrm{tr}\left[\sigma_3\left(U^\dagger\vec{A}\cdot\frac{\vec{\sigma}}{2}U+iU^\dagger\dot{U}\right)\right]=\vec{A}\cdot\vec{n}+(\cos\theta-1)\dot{\phi}+(\dot{\phi}+\dot{\psi}),\tag{31}$$

в которой используется параметризация элемента группы $U\in SU(2)$ углами Эйлера (ϕ,ψ,θ):

$$U=e^{-i\phi\sigma_3/2}e^{-i\theta\sigma_2/2}e^{-i\psi\sigma_3/2}.\tag{32}$$

Для доказательства воспользуемся формулой для σ–матриц:

$$\exp\left[-i\frac{\phi}{2}(\vec{n}\vec{\sigma})\right]=-i(\vec{n}\vec{\sigma})\sin\frac{\phi}{2}+\cos\frac{\phi}{2}.$$

Теперь подставим этот результат в (32):

$$\begin{aligned}U&=\left(\cos\frac{\phi}{2}-i\sigma_3\sin\frac{\phi}{2}\right)\left(\cos\frac{\theta}{2}-i\sigma_3\sin\frac{\theta}{2}\right)\left(\cos\frac{\psi}{2}-i\sigma_3\sin\frac{\psi}{2}\right)\\&=\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\phi+\psi}{2}-i\sigma_3\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\phi+\psi}{2}-i\sigma_2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\phi-\psi}{2}+i\sigma_1\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\phi-\psi}{2}\\&=\cos\frac{\theta}{2}\begin{bmatrix}\exp\left(-i\frac{\phi+\psi}{2}\right)&0\\0&\exp\left(i\frac{\phi+\psi}{2}\right)\end{bmatrix}-\sin\frac{\theta}{2}\begin{bmatrix}0&\exp\left(-i\frac{\phi-\psi}{2}\right)\\-\exp\left(i\frac{\phi-\psi}{2}\right)&0\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

В итоге:

$$U = \begin{bmatrix} \cos\frac{\theta}{2}\exp\left(-i\frac{\phi+\psi}{2}\right) & -\sin\frac{\theta}{2}\exp\left(-i\frac{\phi-\psi}{2}\right) \\ \sin\frac{\theta}{2}\exp\left(i\frac{\phi-\psi}{2}\right) & \cos\frac{\theta}{2}\exp\left(i\frac{\phi+\psi}{2}\right) \end{bmatrix}.$$

В этих обозначениях получаем:

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}\left[\sigma_3 U^\dagger \dot{U}\right] &= -i\left(\left(\dot{\phi}+\dot{\psi}\right)+\dot{\phi}\left(\cos\theta-1\right)\right), \\ \operatorname{tr}\left[\sigma_3 U^\dagger \frac{\sigma_1}{2} U\right] &= \sin\theta\cos\phi, \\ \operatorname{tr}\left[\sigma_3 U^\dagger \frac{\sigma_2}{2} U\right] &= \sin\theta\sin\phi, \\ \operatorname{tr}\left[\sigma_3 U^\dagger \frac{\sigma_3}{2} U\right] &= \cos\theta, \end{aligned}$$

что и доказывает исходную формулу (31).

Литература

1. *Ripka Georges.* Dual superconductor models of color confinement // *Lect.Notes Phys.* — 2004. — Vol. 639. — P. 1.

2. *Faddeev L. D.* A couple of methodological comments on the quantum Yang-Mills theory // *Theoretical and Mathematical Physics.* — 2014. — dec. — Vol. 181, no. 3. — Pp. 1638–1642.

3. *Фок В.А.* Собственное время в классической и квантовой механике // *Изв. Акад. Наук СССР (физ.).* — 1937. — Т. 4–5. — С. 551–568.

4. *Мнёв П.Н.* О функциональных детерминантах однопетлевого приближения метода фонового поля в калибровочных теориях. — 2005. `http://www.pdmi.ras.ru/~pmnev/diplom.win.pdf`.

5. *Diakonov D.I., Petrov V.Yu.* A formula for the Wilson loop // *Physics Letters B.* — 1989. — jun. — Vol. 224, no. 1-2. — Pp. 131–135.

6. *Alekseev A., Faddeev L., Shatashvili S.* Quantization of symplectic orbits of compact Lie groups by means of the functional integral // *Journal of Geometry and Physics.* — 1988. — jan. — Vol. 5, no. 3. — Pp. 391–406.

7. *Gross D. J., Wilczek F.* Asymptotically Free Gauge Theories. I // *Physical Review D.* — 1973. — nov. — Vol. 8. — Pp. 3633–3652.

8. *Politzer H. D.* Reliable Perturbative Results for Strong Interactions? // *Physical Review Letters.* — 1973. — jun. — Vol. 30. — Pp. 1346–1349.

9. *Savvidy G.K.* Infrared instability of the vacuum state of gauge theories and asymptotic freedom // *Physics Letters B.* — 1977. — nov. — Vol. 71, no. 1. — Pp. 133–134.

10. *Faddeev Ludvig, Niemi Antti J.* Spin-charge separation, conformal covariance and the Yang–Mills theory // *Nuclear Physics B.* — 2007. — jul. — Vol. 776, no. 1-2. — Pp. 38–65.

11. *Kennaway Kristian D.* Effective potentials and the vacuum structure of quantum field theories. — 2004. http://arxiv.org/abs/hep-th/0407084.

12. *Nielsen N.K., Olesen P.* An unstable Yang-Mills field mode // *Nuclear Physics B.* — 1978. — nov. — Vol. 144, no. 2-3. — Pp. 376–396.

13. *Faddeev L. D.* Knots as possible excitations of the quantum Yang–Mills fields // Statistical Physics, High Energy, Condensed Matter and Mathematical Physics - Proceedings of the Conference in Honor of C. N. Yang's 85th Birthday. — World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2008.

14. *Cronström C.* A simple and complete Lorentz-covariant gauge condition // *Physics Letters B.* — 1980. — feb. — Vol. 90, no. 3. — Pp. 267–269.