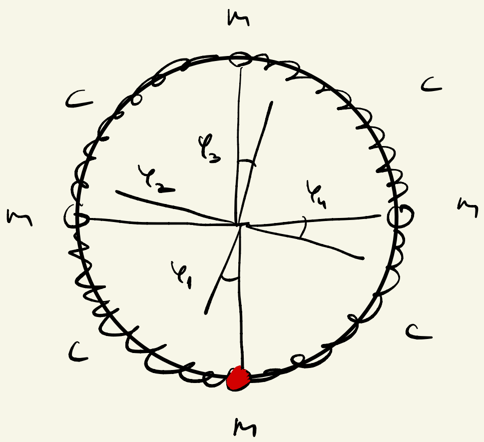

$$T = \frac{m\dot{\varphi}_1^2}{2}R^2 + \frac{m\dot{\varphi}_2^2}{2}R^2 + \frac{m\dot{\varphi}_3^2}{2} + \frac{m\dot{\varphi}_4^2}{2}$$

$$\Pi = \frac{cR^2}{2}(\varphi_2-\varphi_1)^2 + \frac{cR^2(\varphi_3-\varphi_2)^2}{2} + $$

$$+ \frac{c}{2}R^2(\varphi_4-\varphi_3)^2 + \frac{cR^2}{2}(\varphi_1-\varphi_4)^2$$

$$L = T - \Pi$$

диссипативная ф-я Рэлея:

$$\Phi = \frac{1}{2}\beta\dot{\varphi}_1^2R^2 \Rightarrow R_{\varphi_1} = \beta R^2\dot{\varphi}_1$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi_1} = -cR^2(\varphi_1-\varphi_2) - cR^2(\varphi_1-\varphi_4)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_1}\right) = m\ddot{\varphi}_1R^2$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi_2} = -cR^2(\varphi_2-\varphi_1) - cR^2(\varphi_2-\varphi_3)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_2}\right) = m\ddot{\varphi}_2R^2$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi_3} = -cR^2(\varphi_3-\varphi_2) - cR^2(\varphi_3-\varphi_4)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_3}\right) = m\ddot{\varphi}_3R^2$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi_4} = -cR^2(\varphi_4-\varphi_3) - cR^2(\varphi_4-\varphi_1)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_4}\right) = m\ddot{\varphi}_4R^2$$

Составим уравнение Лагранжа:

$$
\begin{cases}
m\ddot{\varphi}_1 R^2 + cR^2(\varphi_1-\varphi_2) + cR^2(\varphi_1-\varphi_4) + \beta R^2\dot{\varphi}_1 = 0\\
m\ddot{\varphi}_2 R^2 + cR^2(\varphi_2-\varphi_1) + cR^2(\varphi_2-\varphi_3) = 0\\
m\ddot{\varphi}_3 R^2 + cR^2(\varphi_3-\varphi_2) + cR^2(\varphi_3-\varphi_4) = 0\\
m\ddot{\varphi}_4 R^2 + cR^2(\varphi_4-\varphi_3) + cR^2(\varphi_4-\varphi_1) = 0
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
\ddot{\varphi}_1 + c/m(\varphi_1-\varphi_2) + c/m(\varphi_1-\varphi_4) + \beta/m\,\dot{\varphi}_1 = 0\\
\ddot{\varphi}_2 + c/m(\varphi_2-\varphi_1) + c/m(\varphi_2-\varphi_3) = 0\\
\ddot{\varphi}_3 + c/m(\varphi_3-\varphi_2) + c/m(\varphi_3-\varphi_4) = 0\\
\ddot{\varphi}_4 + c/m\cdot(\varphi_4-\varphi_3) + c/m\cdot(\varphi_4-\varphi_1) = 0
\end{cases}
$$

$$
\underbrace{\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&1\end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix}\varphi_1\\\varphi_2\\\varphi_3\\\varphi_4\end{pmatrix}^{\cdot\cdot} + \underbrace{\begin{pmatrix}\beta/m&&&\\&0&&\\&&0&\\&&&0\end{pmatrix}}_{B}\begin{pmatrix}\varphi_1\\\varphi_2\\\varphi_3\\\varphi_4\end{pmatrix}^{\cdot} + \underbrace{\frac{c}{m}\begin{pmatrix}2&-1&0&-1\\-1&2&-1&0\\0&-1&2&-1\\-1&0&-1&2\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}\varphi_1\\\varphi_2\\\varphi_3\\\varphi_4\end{pmatrix} = 0
$$

Пусть $\varphi = (\varphi_1\ \varphi_2\ \varphi_3\ \varphi_4)^T$

1) Изначально я хотел решать систему

$$A\ddot{\varphi} + B\dot{\varphi} + C = 0.$$

$$\varphi = u e^{\lambda t}$$

$$(A\lambda^2 + B\lambda + C)u e^{\lambda t} = 0 \Rightarrow \det(A\lambda^2 + B\lambda + C) = 0$$

Пусть $\beta/m = \hat{\beta}$; $c/m = \hat{c}$

$$
\begin{vmatrix}
\lambda^2+\hat{\beta}\lambda+2\hat{c} & -\hat{c} & 0 & -\hat{c}\\
-\hat{c} & \lambda^2+2\hat{c} & -\hat{c} & 0\\
0 & -\hat{c} & \lambda^2+2\hat{c} & -\hat{c}\\
-\hat{c} & 0 & -\hat{c} & 2\hat{c}+\lambda^2
\end{vmatrix} =
$$

$$= \lambda^8 + \hat{\beta}\lambda^7 + 8\hat{c}\lambda^6 + 6\hat{\beta}\hat{c}\lambda^5 + 20\hat{c}^2\lambda^4 + 10\beta\hat{c}^2\lambda^2 + 4\beta c^3\lambda =$$

$$= \lambda(\lambda^2+2\hat{c})\left(\hat{\beta}(2\hat{c}^2+4\hat{c}\lambda^2+\lambda^4) + 8\hat{c}^2\lambda + 6\hat{c}\lambda^3 + \lambda^5\right) = 0$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ll} \lambda = 0 & (1) \\ \lambda^2 + 2\hat{C} = 0 & (2) \\ \hat{\beta}\left(2\hat{C}^2 + 4\hat{C}\lambda^2 + \lambda^4\right) + 8\hat{C}^2\lambda + 6\hat{C}\lambda^3 + \lambda^5 = 0 & (3) \end{array}\right.$$

Решение (1) и (2) найти можно.
Но вот с (3) проблема — только при конкретных числах. Однако из него видно, что

- будет хотя бы 1 действительный корень, т.к. это уравнение нечетной степени
- этот корень будет отрицательным

Я посмотрел как ведет себя этот корень при $\hat{C} = 1$ и при различных $\hat{\beta}$.

2) Но решение $\det(A\lambda^2 + B\lambda + C) = 0$ не очень хорошо искалось в python + после этого собственные вектора могли и не найтись. Поэтому я решил поступить иначе:

Новая переменная $\psi = \dot{\varphi} \Rightarrow$ система перепишется

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = \psi \\ A\dot{\psi} + B\psi + C\varphi = 0 \end{cases}$$

Заметим, что $A = E$

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = \psi \\ \dot{\psi} = -C\varphi - B\psi \end{cases} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_4 \\ \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_4 \end{bmatrix}^{\boldsymbol{\cdot}}}_{\dot{q}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0_{4\times4} & E_{4\times4} \\ -C & -B \end{bmatrix}}_{D} \underbrace{\begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_4 \\ \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_4 \end{bmatrix}}_{q}$$

Значит мы свели уравнение к

$$\boxed{\dot{q} = Dq}$$

Оно отлично решается численными методами