Teorie míry a integrálu

Kateřina Ševčíková, podle učebního textu profesora Jana Rataje

Poslední úprava: 14. října 2024

Obsah

Úvod

Připomenutí: Riemannův, Newtonův integrál, geometrický význam plochy pod grafem. (Riemannův integrál lze použít k výpočtu míry = integrálu, ale jen na uzavřeném intervalu a pro omezenou funkci.) ((

Ne všechny funkce jsou "integrovatelné", ne všechny množiny "měřitelné".
úplnost : Na prostoru Riemannovsky integrovatelných funkcí na intervalu I definujme skalární součin vztahem $\langle f,g\rangle := \int_I f\cdot g$. Indukovaný metrický prostor není úplný.

aditivita: V teorii pravděpodobnosti potřebujeme, aby pravděpodobnostní míra byla spočetně aditivní, tedy aby pro po dvou disjunktní náhodné jevy $A_1, A_2, ...$ platilo $Pr(\bigcup_i A_i) = \sum_i Pr(A_i)$. Toto by pro míru definovanou pomocí Riemannova integrálu neplatilo.

Obecná konstrukce: nejprve míra (množinová funkce), z ní je odvozen integrál (aproximace po částech konstantními funkcemi). Vlastnosti, které chceme po "míře":

1. $\mu(\emptyset) = 0, \mu(A) \geq 0\ \forall A$
2. $\mu(\bigcup_n A_n) = \sum_n \mu(A_n)$ pro po dvou disjunktní množiny $A_1, A_2, ...$

))

Banachův - Tarského paradox: u míry chceme moct rozdělit množinu na několik částí, každou posunout, zrotovat, tak ať jou stále disjunktní, a chceme mít staále stejnou míru. To ale vždy nefunguje, tento paradox ukazuje, že je možné rozdělit jednotkovou kouli v $\mathbb{R}^3$ na 5 částí, posunout je, a získat 2 stejné koule, tedy nezachováme míru. Tedy ne každá množina je měřitelná.

1 Základní pojmy teorie míry

Definice. Buď X libovolná neprázdná množina. Symbolem $\mathcal{P}(X) = \{A : A \subset X\}$ značíme potenční množinu množiny X, neboli systém všech podmnožin množiny X.

Definice. $A \subset \mathcal{P}(X)$ je σ-algebra na X, jestliže

(i) $\emptyset, X \in A$;

(ii) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow X \setminus A \in \mathcal{A}$

(iii) $A_i \in \mathcal{A}_i, i \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$

$A \subset \mathcal{P}(X) jealgebra, spluje-li(1),(2)a$
$(iii')A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in A.$
Pozn.: To sjednocení je sice nekonečný, ale můžeme to doplnit prázdnýma množinama, takže je povolený i konečný sjednocení.
Pozn.: Z tohoto plyne i uzavřenost na (konečné/) spočetné průniky, protože $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = X \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty}(X \setminus A_k)$
Pozn.: Algebra je uzavřená na konečné množinové operace (průnik, sjednocení, rozdíl), σ-algebra na spočetné množinové operace.

Příklad.
- $\{\emptyset, X\}$ - nejmenší σ-algebra na X
- $\mathcal{P}(X)$ - největší σ-algebra na X
- $A = \{\emptyset, \{1\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$ je σ-algebra na $X = \{1,2,3\}$.
- $A = \{A \subset X : A\ spoetnnebo\ X \setminus A\ spoetn\}$ je σ-algebra

Věta 1.1. *Existence nejmenší σ-algebry*

Důkaz. viz zápisky mobil □

Definice. borelovskou σ-algebrou

Definice. měřitelný prostor míra prostor s mírou

Věta 1.2. *Spojitost míry*

Důkaz. viz mobil. □

Definice. Nechť $a = (a_1, ..., a_n),\ b = (b_1, ..., b_n) \in \mathbb{R}^n$. Množina

$$W = \{x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : a_i < x_i < b_i\ \forall i \in \{1, ..., n\}\}$$

a také každou množinu, která vznikne záměnou libovolného znaménka $<$ za $\leq$, nazveme n-buňka . Objem n-buňky definujeme jako 0, je-li $W = \emptyset$ a jako $vol(W) = \prod_{i=1}^{n}(bi - ai)$, je-li $W \neq \emptyset$.

Věta 1.3. *Rozšíření elementárního objemu*
Existuje právě jedna míra $\mathcal{L}_n$ na $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ taková, že pro každou n-buňku W platí $\mathcal{L}_n(W) = vol(W)$.

Důkaz. Náznak: Lze ukázat, že je-li $G \in \mathbb{R}$ otevřená, pak existují po dvou disjunktní n-buňky takové, že $G = \bigcup_{i=1}^{\infty} W_i$. Definujeme $Z_n(G) = \sum_{i=1}^{\infty} vol(W_i)$. (nezáleží na volbě rozkladu). Dále pak $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ definujeme $Z_n(A) = inf\{Z_n(G) : G$ otevřená, $G \in \mathbb{R}^n, A \subset G\}$. □

Poznámka.

- Z konstrukce míry Z_n plyne, že je-li $A \subset \mathbb{R}^n$ borelovská a $\epsilon < 0$, potom existuje otrevřená množina $G \in \mathbb{R}^n takov, eA \subset GaZ_n(G \setminus A) < A$
- Míra Z_n je invariantní vůči posunutí - pro všechna $x \in \mathbb{R}^n$ a $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ platí $\mathcal{L}_n(x + A) = \mathcal{L}_n(A)$

Definice. Nechť $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou. Řekneme, že μ je úplná míra, jestliže platí: je-li $A \in \mathcal{A}$ splňující $\mu(A) = 0$ a $A^I \in A$, pak $A^I \in \mathcal{A}$.

Poznámka. V takovém případě nutně $\mu(A') = 0$

Věta 1.4. *Zúplnění míry (bez důkazu)*
Nechť $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou. Nechť $\mathcal{A}_0$ je systém všech množin $EsubsetX$, pro něž existují $A, B \in \mathcal{A}$ takové, že $A \subset E \subset Ba\mu(B \setminus A) = 0$. Potom $\mathcal{A}_0$ je σ-algebra obsahující $\mathcal{A}$. Definujeme $\mu_0(E) = \mu(A) \forall E \in \mathcal{A}_0$. Potom $\mu = \mu_0$ na $\mathcal{A}$ a $(X, \mathcal{A}_0, \mu_0)$ je prostor s úplnou mírou.

Definice. Prostor $(X, \mathcal{A}_0, \mu_0)$ z předchozí věty nazýváme zúplněním prostoru $(X, \mathcal{A}, \mu)$, $\mathcal{A}_0$ se nazývá zúplnění σ-algebry A vzhledem k míře μ a μ_0 se nazývá zúplnění míry μ.

Definice. Zúplnění σ-algebry $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ vzhledem i Z_n značíme $\mathcal{B}_0(\mathbb{R}^n)$ a nazýváme ji σ-algebrou lebesgueovsky měřitelných množin. Odpovídající zúplnění míry Z_n značíme opět Z_n a nazýváme je hldefLebesgueovou mírou.

1.1 Měřitelné funkce

Definice. Nechť $(X, \mathcal{A})$ je měřitelný prostor a (Y, τ) je metrický prostor. Řekneme, že zobrazení $f : X - > Y$ je měřitelné, jestliže $f^{-1} \in \mathcal{A}$ pro každou $V \subset Y$ otevřenou. Je-li navíc (X, ρ)metrický prostor a $\mathcal{A} = \mathcal{B}(X)$, pak F nazýváme borelovské.

Poznámka. Nechť $(X, \rho), (Y, \tau)$ jsou MP. Pak zobrazení $g : X \to Y$ je spojité právě tehdy, když $g^{-1}(V)$ je otevřená v X pro každou V otevřenou v Y. Tedy každé spojité zobrazení je borelovké.

Příklad. Nechť $(X, \mathcal{A})$ je měřitelný prostor, $A \subset X$. Potom charakteristická funkce množiny A je definovaná předpisem $\chi_A(x) = 1$, pokud $x \in A, 0$, pokud $x \notin A$ je měřitelné práve tehdy, když $A \in \mathcal{A}$

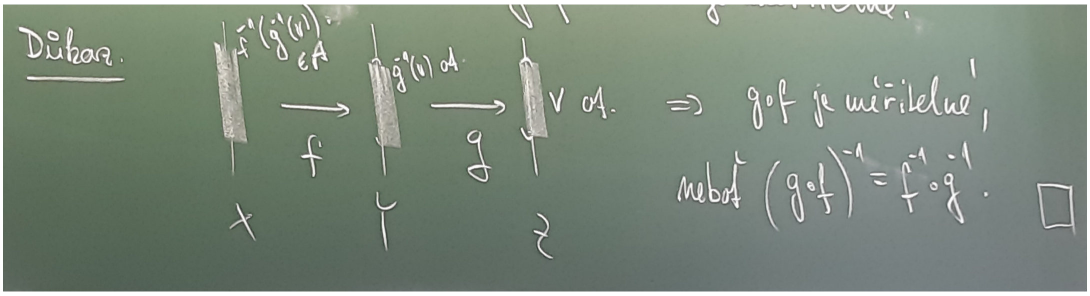
Důkaz. „$\Rightarrow$"Je-li χ_A měřitelná, pak $A = \chi_A^{-1}((1/2, 3/2))$ je vzor otevřené množiny, a tehdy $A \in \mathcal{A}$ „$\Leftarrow$"Nechť $A \in \mathcal{A}, A \subset \mathbb{R}$ otevřená. Pak $\chi_A^{-1} =$

- X, pokud 0, $1 \in B$,
- A, pokud $0 \notin B, 1 \in B$,
- $X \setminus A$, pokud $0 \in B,\ 1 \notin B$
- $\emptyset$, pokud $0, 1 \notin B$

Dle vlastností σ-algebry patří všechny tyto množiny do $\mathcal{A}$, a tedy χ_A je měřitelná. □

Věta 1.5. *Měřitelnost složení zobrazení Nechť $(Y, \tau), (Z, \sigma)$ jsou M.P. a $(X, \mathcal{A})$ je měřitelný prostor. Nechť $g : Y \to Z$ je spojité a $f : X \to Y$ je měřitelné. Potom $gof : X \to Z$ je měřitelné.*

Důkaz. obrázkem:


Důkaz.
f⁻¹(g⁻¹(V)) ∈ A
g⁻¹(V) ∈ A
V ∈ A
f
g
X
Y
Z
⇒ g∘f je měřitelné,
neboť (g∘f)⁻¹ = f⁻¹∘g⁻¹.

□