

Teorie míry a integrálu

Kateřina Ševčíková, podle učebního textu profesora Jana Rataje

Poslední úprava: 14. října 2024

Obsah

1	Základní pojmy teorie míry	2
2	Měřitelné funkce	3

Úvod

Připomenutí: Riemannův, Newtonův integrál, geometrický význam plochy pod grafem. (Riemannův integrál lze použít k výpočtu míry = integrálu, ale jen na uzavřeném intervalu a pro omezenou funkci.)

((

Ne všechny funkce jsou "integrovatelné", ne všechny množiny "měřitelné".

úplnost : Na prostoru Riemannovsky integrovatelných funkcí na intervalu I definujeme skalární součin vztahem $\langle f, g \rangle := \int_I f \cdot g$. Indukovaný metrický prostor není úplný.

aditivita: V teorii pravděpodobnosti potřebujeme, aby pravděpodobnostní míra byla spočetně aditivní, tedy aby pro po dvou disjunktní náhodné jevy A_1, A_2, \dots platilo $Pr(\bigcup_i A_i) = \sum_i Pr(A_i)$. Toto by pro míru definovanou pomocí Riemannova integrálu neplatilo.

Obecná konstrukce: nejprve míra (množinová funkce), z ní je odvozen integrál (aproximace po částech konstantními funkcemi). Vlastnosti, které chceme po "míře":

1. $\mu(\emptyset) = 0, \mu(A) \geq 0 \forall A$
2. $\mu(\bigcup_n A_n) = \sum_n \mu(A_n)$ pro po dvou disjunktní množiny A_1, A_2, \dots

))

Banachův - Tarského paradox: u míry chceme moci rozdělit množinu na několik částí, každou posunout, zrotovat, tak ať jsou stále disjunktní, a chceme mít stále stejnou míru. To ale vždy nefunguje, tento paradox ukazuje, že je možné rozdělit jednotkovou kouli v \mathbb{R}^3 na 5 částí, posunout je, a získat 2 stejné koule, tedy nezachováme míru. Tedy ne každá množina je měřitelná.

1 Základní pojmy teorie míry

Definice. Buď X libovolná neprázdná množina. Symbolem $\mathcal{P}(X) = \{A : A \subset X\}$ značíme **potenční množinu** množiny X , neboli systém všech podmnožin množiny X .

Definice. $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ je **σ -algebra** na X , jestliže

- (i) $\emptyset, X \in \mathcal{A}$;
- (ii) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow X \setminus A \in \mathcal{A}$
- (iii) $A_i \in \mathcal{A}, i \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$

$\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ je algebra, splňuje – li(1), (2)a

(iii') $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$.

Pozn.: To sjednocení je sice nekonečné, ale můžeme to doplnit prázdnými množinami, takže je povolený i konečný sjednocení.

Pozn.: Z tohoto plyne i uzavřenost na (konečné/) spočetné průniky, protože $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = X \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} (X \setminus A_k)$

Pozn.: Algebra je uzavřená na konečné množinové operace (průnik, sjednocení, rozdíl), σ -algebra na spočetné množinové operace.

Příklad. • $\{\emptyset, X\}$ - nejmenší σ -algebra na X

- $\mathcal{P}(X)$ - největší σ -algebra na X
- $\mathcal{A} = \{\emptyset, \{1\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$ je σ -algebra na $X = \{1, 2, 3\}$.
- $\mathcal{A} = \{A \subset X : A \text{ spoetnnebo } X \setminus A \text{ spoetn}\}$ je σ -algebra

Věta 1.1. *Existence nejmenší σ -algebry*

Důkaz. viz zápisky mobil

□

Definice. borelovskou σ -algebrou

Definice. měřitelný prostor míra prostor s mírou

Věta 1.2. *Spojitosť míry*

Důkaz. viz mobil.

□

Definice. Necht $a = (a_1, \dots, a_n)$, $b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$. Množina

$$W = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : a_i < x_i < b_i \forall i \in \{1, \dots, n\}\}$$

a také každou množinu, která vznikne záměnou libovolného znaménka $<$ za \leq , nazveme **n-buňka**. Objem n-buňky definujeme jako 0, je-li $W = \emptyset$ a jako $\text{vol}(W) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i)$, je-li $W \neq \emptyset$.

Věta 1.3. *Rozšíření elementárního objemu*

Existuje právě jedna míra \mathcal{L}_n na $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ taková, že pro každou n-buňku W platí $\mathcal{L}_n(W) = \text{vol}(W)$.

Důkaz. Náznak: Lze ukázat, že je-li $G \in \mathbb{R}$ otevřená, pak existují po dvou disjunktní n-buňky takové, že $G = \bigcup_{i=1}^{\infty} W_i$. Definujeme $Z_n(G) = \sum_{i=1}^{\infty} \text{vol}(W_i)$. (nezáleží na volbě rozkladu). Dále pak $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ definujeme $Z_n(A) = \inf\{Z_n(G) : G \text{ otevřená}, G \in \mathbb{R}^n, A \subset G\}$. \square

Poznámka. • Z konstrukce míry Z_n plyne, že je-li $A \subset \mathbb{R}^n$ borelovská a $\epsilon < 0$, potom existuje otevřená množina $G \in \mathbb{R}^n$ taková, $A \subset G$ a $Z_n(G \setminus A) < \epsilon$.

- Míra Z_n je invariantní vůči posunutí - pro všechna $x \in \mathbb{R}^n$ a $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ platí $\mathcal{L}_n(x + A) = \mathcal{L}_n(A)$

Definice. Necht (X, \mathcal{A}, μ) je prostor s mírou. Řekneme, že μ je **úplná míra**, jestliže platí: je-li $A \in \mathcal{A}$ splňující $\mu(A) = 0$ a $A^I \in \mathcal{A}$, pak $A^I \in \mathcal{A}$.

Poznámka. V takovém případě nutně $\mu(A^I) = 0$

Věta 1.4. *Zúplnění míry (bez důkazu)*

Necht (X, \mathcal{A}, μ) je prostor s mírou. Necht \mathcal{A}_0 je systém všech množin $E \subset X$, pro něž existují $A, B \in \mathcal{A}$ takové, že $A \subset E \subset B$ a $\mu(B \setminus A) = 0$. Potom \mathcal{A}_0 je σ -algebra obsahující \mathcal{A} . Definujeme $\mu_0(E) = \mu(A) \forall E \in \mathcal{A}_0$. Potom $\mu = \mu_0$ na \mathcal{A} a $(X, \mathcal{A}_0, \mu_0)$ je prostor s úplnou mírou.

Definice. Prostor $(X, \mathcal{A}_0, \mu_0)$ z předchozí věty nazýváme zúplněním prostoru (X, \mathcal{A}, μ) , \mathcal{A}_0 se nazývá zúplnění σ -algebry \mathcal{A} vzhledem k míře μ a μ_0 se nazývá zúplnění míry μ .

Definice. Zúplnění σ -algebry $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ vzhledem k Z_n značíme $\mathcal{B}_0(\mathbb{R}^n)$ a nazýváme ji σ -algebrou **lebesgueovských měřitelných množin**. Odpovídající zúplnění míry Z_n značíme opět Z_n a nazýváme ji **lebesgueovou mírou**.

2 Měřitelné funkce

Definice. Necht (X, \mathcal{A}) je měřitelný prostor a (Y, τ) je metrický prostor. Řekneme, že zobrazení $f : X \rightarrow Y$ je **měřitelné**, jestliže $f^{-1}(V) \in \mathcal{A}$ pro každou $V \subset Y$ otevřenou. Je-li navíc (X, ρ) metrický prostor a $\mathcal{A} = \mathcal{B}(X)$, pak f nazýváme **borelovské**.

Poznámka. Necht $(X, \rho), (Y, \tau)$ jsou MP. Pak zobrazení $g : X \rightarrow Y$ je spojitě právě tehdy, když $g^{-1}(V)$ je otevřená v X pro každou V otevřenou v Y . Tedy každé spojitě zobrazení je borelovské.

Příklad. Necht (X, \mathcal{A}) je měřitelný prostor, $A \subset X$. Potom **charakteristická funkce** množiny A je definovaná předpisem $\chi_A(x) = 1$, pokud $x \in A$, 0, pokud $x \notin A$ je měřitelné právě tehdy, když $A \in \mathcal{A}$

Důkaz. „ \Rightarrow “ Je-li χ_A měřitelná, pak $A = \chi_A^{-1}((1/2, 3/2))$ je vzor otevřené množiny, a tedy $A \in \mathcal{A}$ „ \Leftarrow “ Necht $A \in \mathcal{A}$, $A \subset \mathbb{R}$ otevřená. Pak $\chi_A^{-1} =$

- X , pokud $0, 1 \in B$,
- A , pokud $0 \notin B, 1 \in B$,
- $X \setminus A$!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!

Dle vlastností σ -algebry patří všechny tyto množiny do \mathcal{A} , a tedy χ_A je měřitelná. \square

Věta 2.1. *Měřitelnost složení zobrazení* Necht $(Y, \tau), (Z, \sigma)$ jsou M.P. a (X, \mathcal{A}) je měřitelný prostor. Necht $g : Y \rightarrow Z$ je spojitě a $f : X \rightarrow Y$ je měřitelné. Potom $g \circ f : X \rightarrow Z$ je měřitelné.

Důkaz. obrázkem \square