Teorie míry a integrálu

Kateřina Ševčíková, podle učebního textu profesora Jana Rataje

Poslední úprava: 12. října 2024

Obsah

Úvod

Připomenutí: Riemannův, Newtonův integrál, geometrický význam plochy pod grafem. (Riemannův integrál lze použít k výpočtu míry = integrálu, ale jen na uzavřeném intervalu a pro omezenou funkci.) ((

Ne všechny funkce jsou "integrovatelné", ne všechny množiny "měřitelné". *úplnost* : Na prostoru Riemannovsky integrovatelných funkcí na intervalu I definujme skalární součin vztahem $\langle f, g\rangle := \int_I f \cdot g$. Indukovaný metrický prostor není úplný.

aditivita: V teorii pravděpodobnosti potřebujeme, aby pravděpodobnostní míra byla spočetně aditivní, tedy aby pro po dvou disjunktní náhodné jevy $A_1, A_2, ...$ platilo $Pr(\bigcup_i A_i) = \sum_i Pr(A_i)$. Toto by pro míru definovanou pomocí Riemannova integrálu neplatilo.

Obecná konstrukce: nejprve míra (množinová funkce), z ní je odvozen integrál (aproximace po částech konstantními funkcemi). Vlastnosti, které chceme po "míře":

1. $\mu(\emptyset) = 0, \mu(A) \geq 0 \ \forall A$
2. $\mu(\bigcup_n A_n) = \sum_n \mu(A_n)$ pro po dvou disjunktní množiny $A_1, A_2, ...$

))

Banachův - Tarského paradox: u míry chceme moct rozdělit množinu na několik částí, každou posunout, zrotovat, tak ať jou stále disjunktní, a chceme mít staále stejnou míru. To ale vždy nefunguje, tento paradox ukazuje, že je možné rozdělit jednotkovou kouli v $\mathbb{R}^3$ na 5 částí, posunout je, a získat 2 stejné koule, tedy nezachováme míru. Tedy ne každá množina je měřitelná.

1 Základní pojmy teorie míry

Věta 1.1. *Existence nejmenší σ-algebry*

Věta 1.2. *slkdjl*

Definice. Nechť $a = (a_1, ..., a_n), b = (b_1, ..., b_n) \in \mathbb{R}$. Množina $W = x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R} : a_i < x_i < b < iprovechnai \in 1, .$ a také kszdou množinu, která vznikne záměnou libovolného znaménka «"za «=", nazveme n-buňk. Objem n-buňky definujeme jako 0, je-li $W = \emptyset$ a jako $vol(W) = \prod_{.} ..$

Věta 1.3. *Rozšíření elementárního objemu Existuje*

Důkaz. Náznak: Lze ukázat, že je-li $G \in \mathbb{R}$ otevřená, pak existují po dvou disjunktní n-buňky takové, že $G = \bigcup_{i=1}^{\infty} W_i$. Definujeme $Z_n(G) = \sum_{i=1}^{\infty} vol(W_i)$. (nezáleží na volbě rozkladu). Dále pak $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ definujeme $Z_n(A) = inf\{Z_n(G) : G$ otevřená, $G \in \mathbb{R}^n, A \subset G\}$. □

Poznámka.
- *Z konstrukce míry Z_n plyne, že je-li $A \subset \mathbb{R}^n$ borelovská a $\epsilon < 0$, potom existuje otrevřená množina $G \in \mathbb{R}^n takov, eA \subset GaZ_n(G \setminus A) < A$*
- *Míra Z_n je invariantní vůči posunutí - pro všechna $x \in \mathbb{R}^n$ a $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ platí !!!!!!!!!*

Definice. Nechť $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou. Řekneme, že μ je úplná míra, jestliže platí: je-li $A \in \mathcal{A}$ splňující $\mu(A) = 0$ a $A^I \in A$, pak $A^I \in \mathcal{A}$.

Poznámka. *V takovém případě nutně $\mu(A^I) - 0$!!!!!!!!!!!!!!!!*

Věta 1.4. *Zúplnění míry (bez dk)*

Nechť $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou. Nechť $\mathcal{A}_0$ je systém všech množin $EsubsetX$, pro něž existují $A, B \in \mathcal{A}$ takové, že $A \subset E \subset Ba\mu(B \setminus A) = 0$. Potom $\mathcal{A}_0$ je σ-algebra obsahující $\mathcal{A}$. Definujeme $\mu_0(E) = \mu(A) \forall E \in \mathcal{A}_0$. Potom $\mu = \mu_0$ na $\mathcal{A}$ a $(X, \mathcal{A}_0, \mu_0)$ je prostor s úplnou mírou.

Definice. Prostor !!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!

Definice. Zúplnění σ-algebry $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ vzhledem i Z_n značíme $\mathcal{B}_0(\mathbb{R}^n)$ a nazýváme ji σ-algebrou lebesgueovsky měřitelných množin. Odpovídající zúplnění míry Z_n značíme opět Z_n a nazýváme je hldefLebesgueovou mírou.

2 Měřitelné funkce

Definice. Nechť $(X, \mathcal{A})$ je měřitelný prostor a (Y, τ) je metrický prostor. Řekneme, že zobrazení $f : X- > Y$ je měřitelné, jestliže $f^{-1} \in \mathcal{A}$ pro každou $V \subset Y$ otevřenou. Je-li navíc (X, ρ)metrický prostor a $\mathcal{A} = \mathcal{B}(X)$, pak F nazýváme hldefborelovské.

Poznámka. *Nechť $(X, \rho), (Y, \tau)$ jsou M.P.. Pak zobrazení $g : X- > Y$ je spojité práve tehdy když $g^{-1}(V)$ je otevřená v X pro každou V otevřenou v Y. Tedy každé spojité zobrazení je borelovké.*

Příklad. *Nechť $(X, \mathcal{A})$ je měřitelný prostor, $A \subset X$. Potom charakteristická funkce množiny A je definovaná předpisem $\S_A(x) = 1, pokudx \in A, 0, pokudx \notin A$ je měřitelné práve tehdy, když $A \in \mathcal{A}$*

Důkaz. „=¿"Je-li $\S_A$ měřitelná, pak $A = \S_A^{-1}((1/2, 3/2))$ je vzor otevřené množiny, a tehdy $A \in \mathcal{A}$ „¡="Nechť $A \in \mathcal{A}, A \subset \mathbb{R}$ otevřená. Pak $\S_A^{-1} =$

- X, pokud 0, $1 \in B$,
- A, pokud $0 \notin B, 1 \in B$,
- $X \setminus A$!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!

Dle vlastností σ-algebry patří všechny tyto množiny so $mathcal A$, a tedy $\S_A$ je měřitelná. □

Věta 2.1. *měřitelnost složení zobrazení Nechť $(Y, \tau), (Z, \sigma)$ jsou M.P. a $(X, \mathcal{A})$ je měřitelný prostor. Nechť $g : Y- > Z$ je spojité a $f : X- > Y$ je měřitelné. Potom $gof : X- > Z$ je měřitelné.*

Důkaz. obrázkem □

3 Funkce jedné reálné proměnné – derivace a Taylorův polynom

Derivace a Taylor.

4 Řady

Konvergence řad.

5 Primitivní funkce

Primitivní funkce, integrace.

6 Určitý integrál

Riemannův a Newtonův integrál.