به نام خدا

مرحله ۲ - ۱۴۰۲ - روز ۲ تشریحی

محسن هاشمی

سوال ۱ واضح است که ~~فرد~~ فرد ۱ باید انتخاب شود، چون تنها کسی که درجعبه ۱ را باز می‌کند فرد ۱ است. پس از اتمام حرکات فرد ۱ می‌دانیم تمام جعبه‌ها باز اند پس هر جعبه باید فرد بار دیگر تغییر حالت دهد. $f(n)$ را تعریف می‌کنیم تعداد عوامل اول n. فرض می‌کنیم جواب مسئله در تعدادی "مرحله" انجام می‌شود که در هر مرحله افرادی با $f(n)$ برابر انتخاب می‌شوند (جز ۱) و عملیات خود را انجام می‌دهند، و این گروه‌های افراد را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم. حالا می‌خواهیم به کمک استقرا ثابت کنیم در مرحله i ام، حتما باید افرادی

با $f(n)=i$ که توان هر عدد اول در تجزیه آن‌ها ۰ یا ۱ است را انتخاب کنیم.

شرط ①

پایه ← در مرحله اول، افرادی با $f(n)=1$ همان اعداد اول هستند و واضح است که باید انتخاب شوند چون جز ۱ و خود آن اعداد هیچ فردی آنها را تغییر وضعیت نخواهد داد.

فرض ← تا مرحله i ام، تمام افراد با $f(n)=1, 2, \dots, i$ که شرط ① را دارند انتخاب شده اند.

حکم ← در مرحله $i+1$ ام باید افراد دارای شرط ① با $f(n)=i+1$ انتخاب شوند.

اثبات ← اگر همه‌ی اعداد با $f(n)=i+1$ را در نظر بگیریم، در هر یک از مراحل قبلی مثل j که $j < i+1$، به تعداد $\binom{i+1}{j}$ بار تغییر وضعیت داده شده اند. پس در مجموع تعداد تغییر وضعیت‌های هر یک برابر است با: $1+\sum_{j=1}^{i}\binom{i+1}{j} = 2^{i+1}-2+1 = 2^{i+1}-1$ که عددی فرد است پس باید حداقل یک بار دیگر تغییر وضعیت دهد، درحالی که برای جعبه‌ها با شرط ① به ازای هر کس تنها ۱ فرد وجود دارد که هنوز انتخاب نشده و آن را تغییر وضعیت می‌دهد. پس همین افراد باید حتما انتخاب شوند و همه‌ی $f(n)=i+1$ ها سبز می‌شوند.

پس این حل برای هر تعداد جعبه و نفر به همین صورت یکتا خواهد بود.