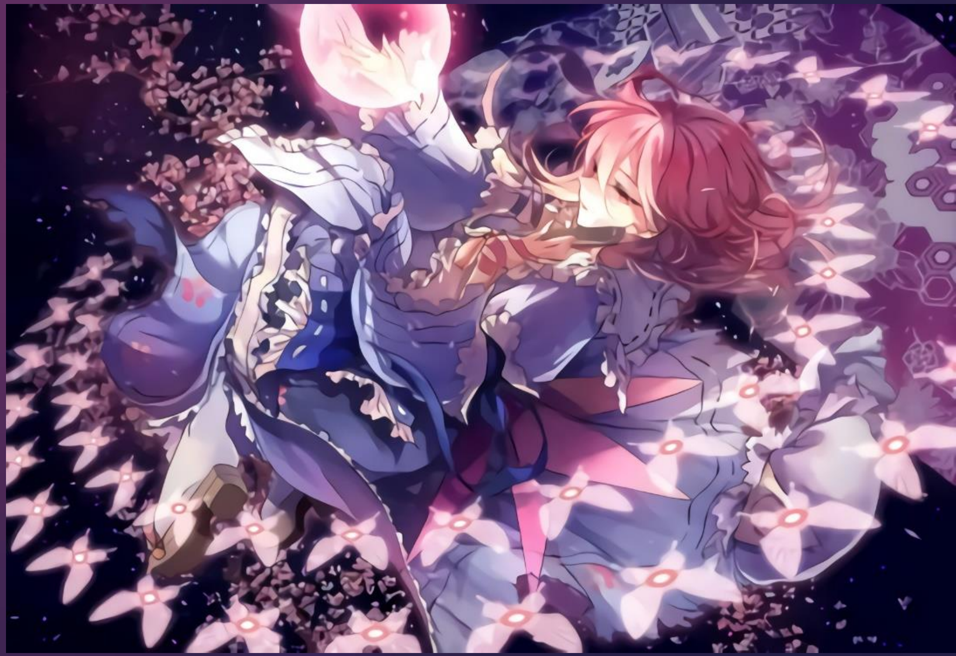
你以为你会矩阵快速幂

不好意思 我们不能提供快乐儿童餐给您

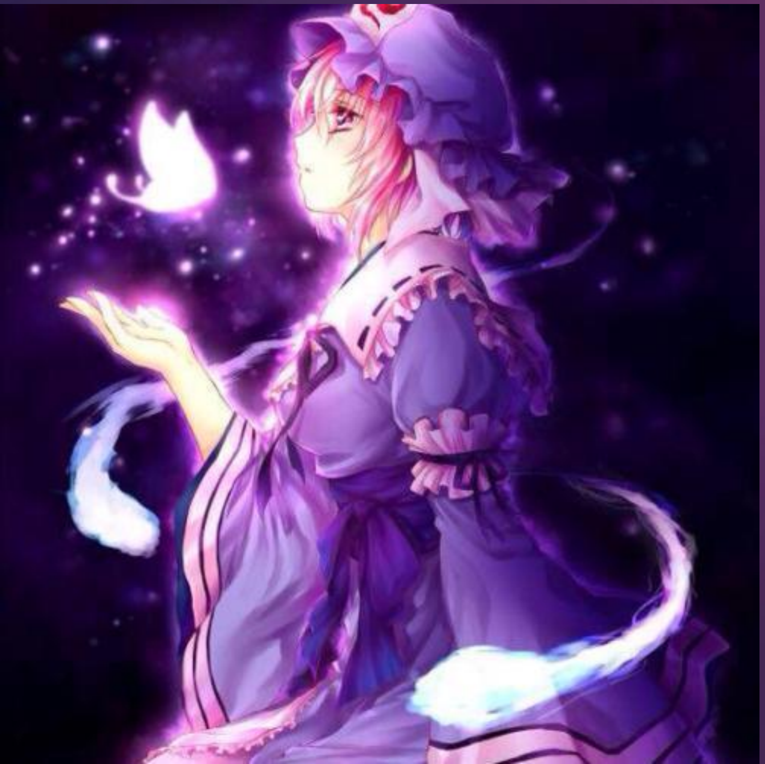


从斐波那契数列开始谈起

对于斐波那契数列，有

- $Fic(0) = 0$
- $Fic(1) = 1$
- $Fic(n) = Fic(n-1) + Fic(n-2)$，$(n \geq 2)$

- 那么很显然我们能有一个 $O(n)$ 的递推

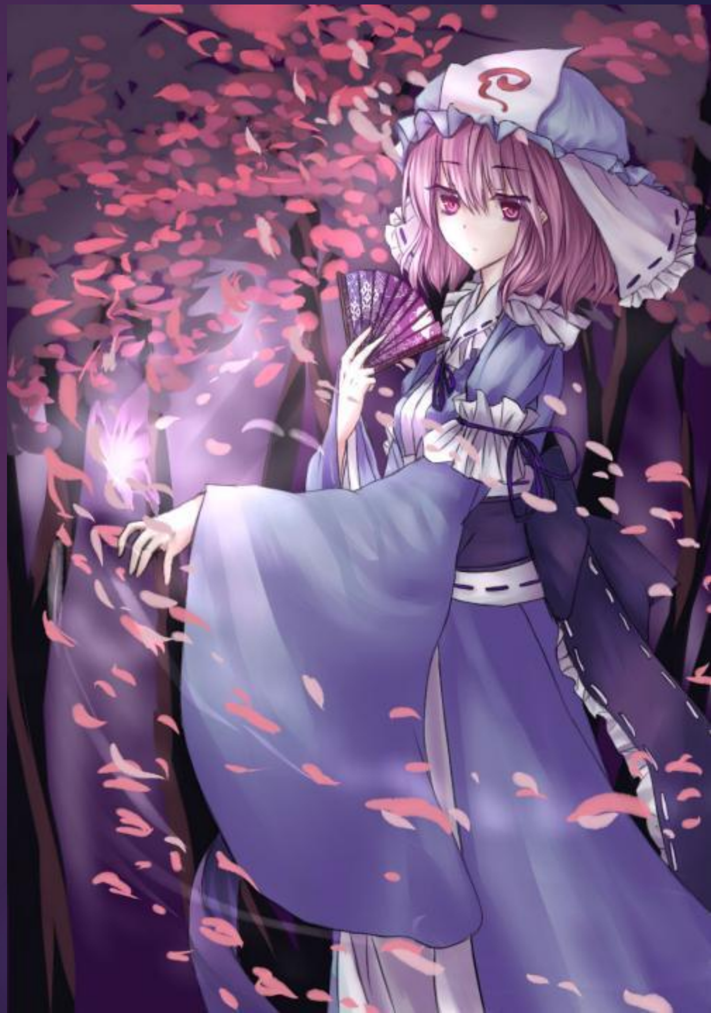


通项公式

- $O(n)$ 的递推航神不喜欢
- 让我们来上 $O(1)$ 的

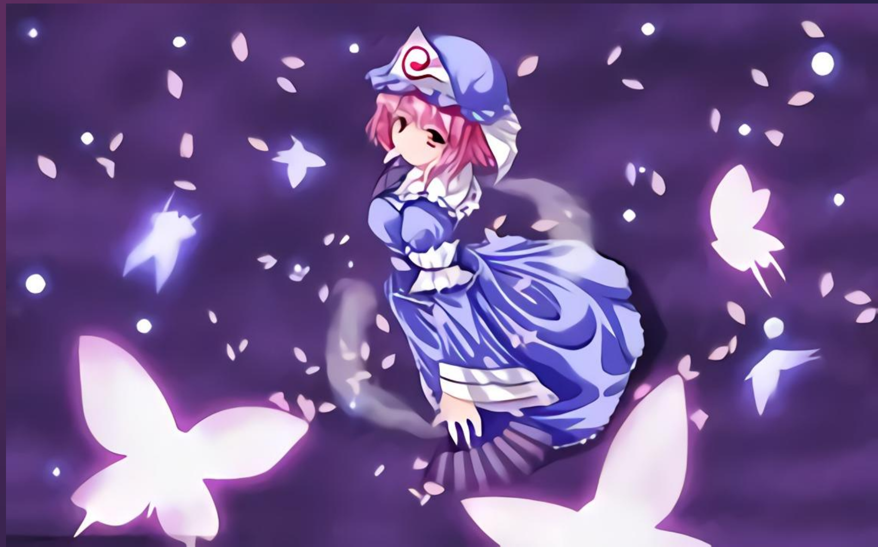
$$Fic_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

- 航神很喜欢



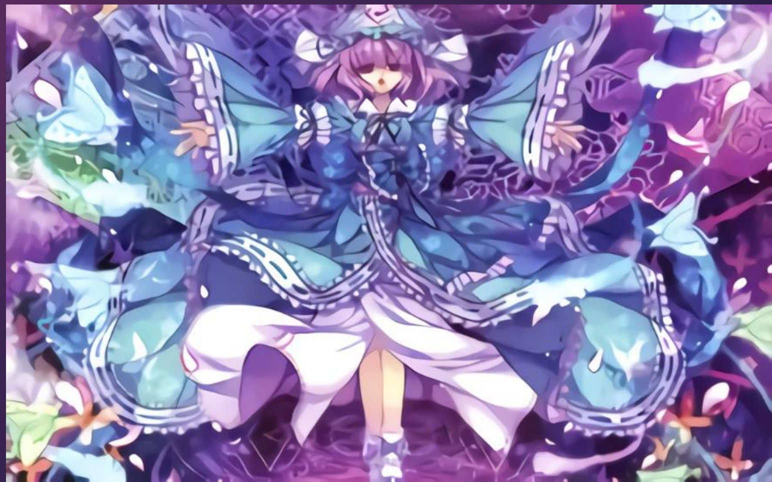
证明

- 对于 $Fic(n) = Fic(n-1) + Fic(n-2)$
- 我们转换成 $Fic(n+1) - c \cdot Fic(\mathrm{n}) = d \cdot (Fic(n) - c \cdot Fic(n-1))$ 的形式
- 那么显然有$\begin{cases} \mathrm{cd} = -1 \\ c + d = 1 \end{cases}$
- 解得 $\begin{cases} \mathrm{c}_1 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \\ d_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \end{cases}$ $\begin{cases} \mathrm{c}_2 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \\ d_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$



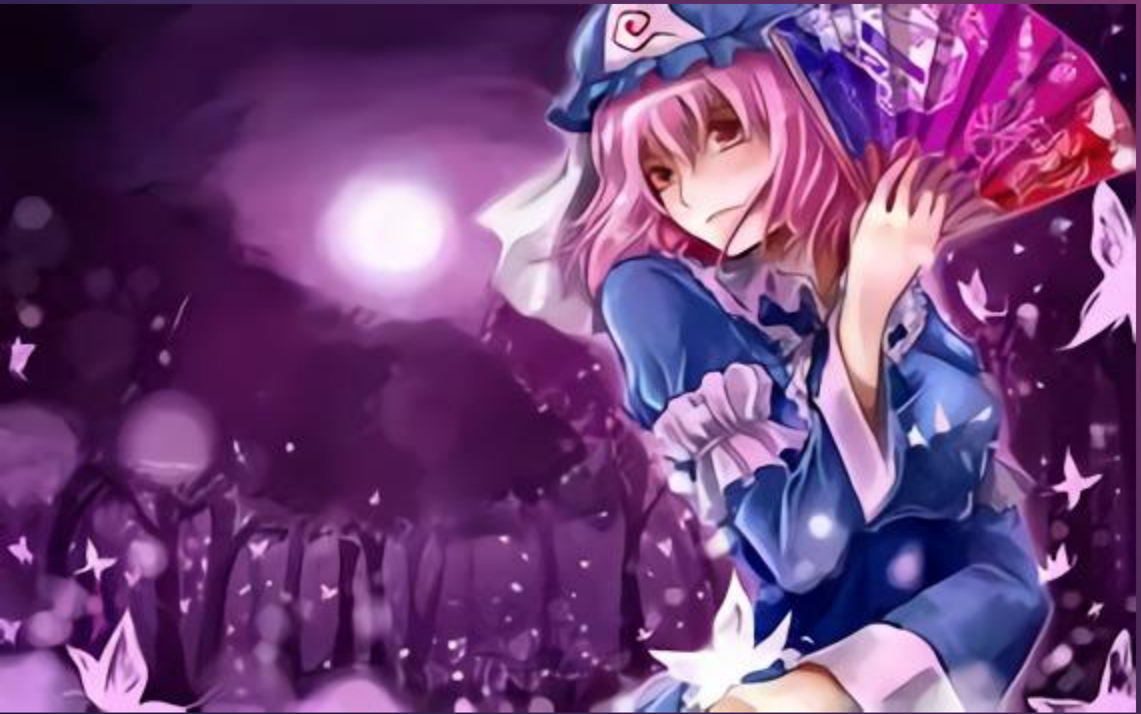
合并

- 将第一种情况带入有 $Fic_n - c_1 Fic_n = (Fic_2 - c_1 Fic_1) d_1^{n-1} = (1 - c_1 Fic_n) d_1^{n-1} = d_1 d_1^{n-1} = d_1^n$
- 同理第二种情况带入 $Fic_n - c_2 Fic_n = d_2^n = c_1^n = Fic_n - d_1 Fic_n$
- 这样我们有 $\begin{cases} Fic_{n+1} - c_1 Fic_n = d_1^n \\ Fic_{n+1} - d_1 Fic_n = c_1^n \end{cases}$
- 上下相减有 $(d_1 - c_1) Fic_n = d_1^n - c_1^n$
- 带入具体值则得出 $Fic_n = \dfrac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$



缺陷

- 看起来有浮点数
- 但是最后答案会是整数= =!
- 但是精度问题还是会影响到计算
- 所以竞赛中比较少用到

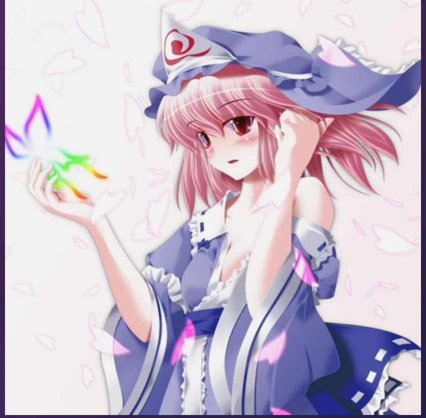


前置技能 —— 快速幂取模

都 8102 年了应该没人不知道
$(a * b) \% mod = (a \% mod * b \% mod) \% mod$ 吧？

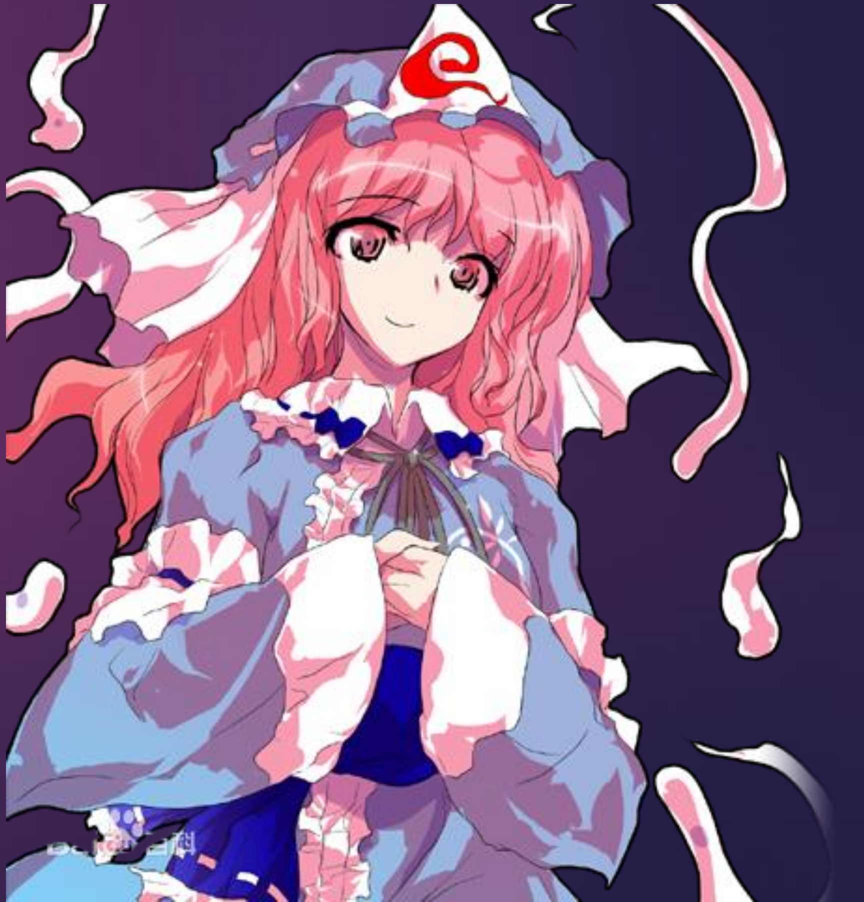
```
LL quickmod(LL a, LL b, LL MOD)
{
    LL ans = 1;
    while(b){
        if(b & 1){
            ans = (ans * a) % MOD;
        }
        b >>= 1;
        a = a * a % MOD;
    }

    return ans % MOD;
}
```

- 如何计算 3^{11}？
- 我会 for 循环！　时间复杂度 $O(n)$
- 我会快速幂！　时间复杂度 $O(\log)$
- 我们来把 11 二进制分解 得到 1011
- 从右往左数第 i 位如果是 1 表示 $3^{2^{i-1}}$ 需要计算在内
- 而 3^1，3^2，3^4 …… 可以不断通过自身平方得到
- 矩阵快速幂就是对矩阵快速进行幂次运算



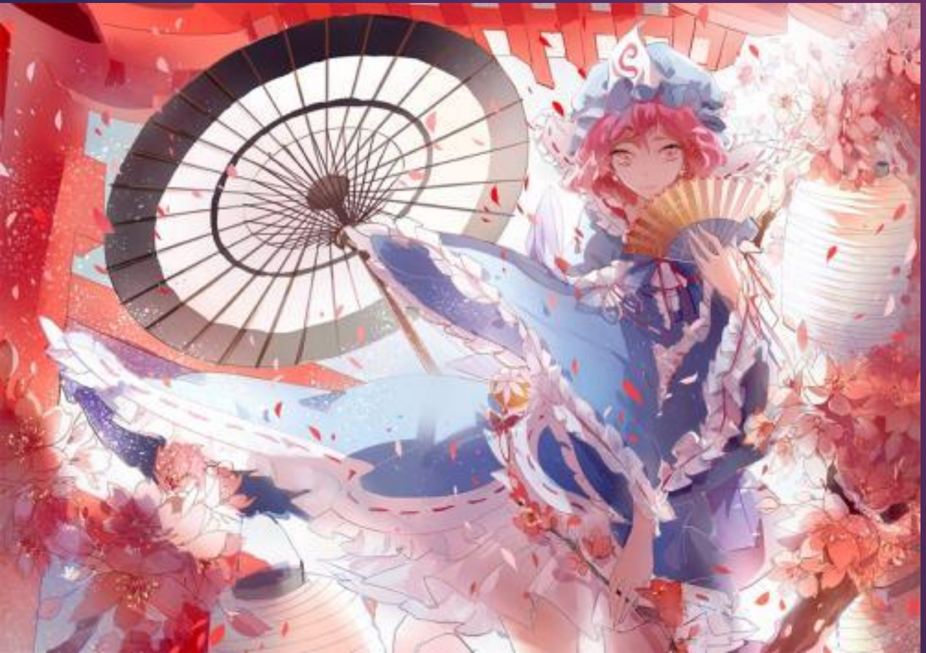
回到斐波那契额数列

- 对于 $Fic(n) = Fic(n-1) + Fic(n-2)$
- 将右边两项忽略系数当作列向量
- 我们有 $X_{n-1} = \begin{Bmatrix} Fic_{n-1} \\ Fic_{n-2} \end{Bmatrix}$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
- 很容易得出 $X_n = \begin{Bmatrix} Fic_n \\ Fic_{n-1} \end{Bmatrix}$
- 现在的任务就是找到一个系数矩阵 A，使得 $AX_{n-1} = X_n$，且 A 需与 n 无关。有 $A^{n-1}X_1 = X_n$
- 于是可以利用矩阵快速幂计算出 X_n
- 时间复杂度 $O(log)$



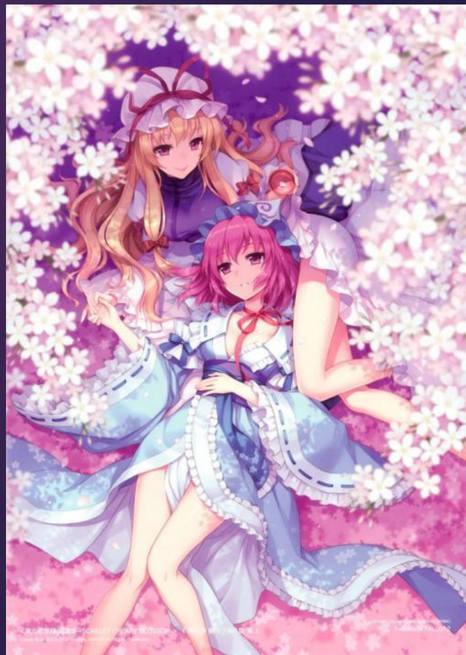
轻微扩展

- 对于 $dp(n) = a\,dp(n-1) + b\,dp(n-2)$
- 我们有理由相信，有 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
- 那么 $dp(n) = a\,dp(n-1) + b\,dp(n-2) + c$?
- $\begin{pmatrix} dp_n \\ dp_{n-1} \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dp_{n-1} \\ dp_{n-2} \\ c \end{pmatrix}$!



中度扩展

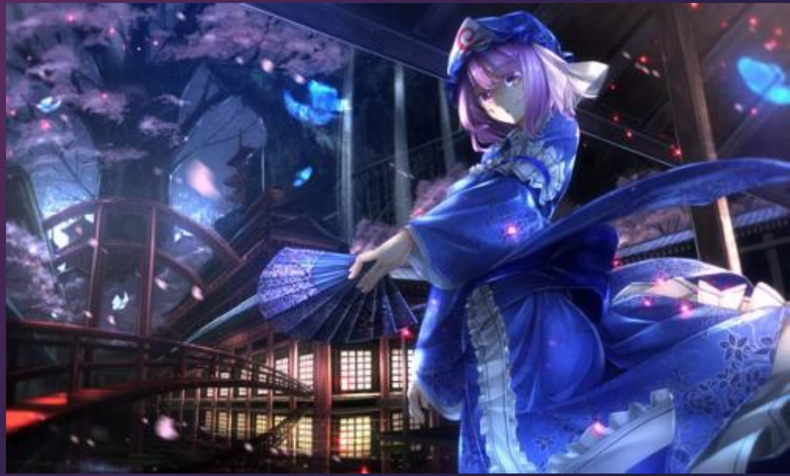
- 计算 $S_n = \sum_{\mathrm{i}}^{\mathrm{n}} i^k$
- 显然有 $S_{\mathrm{n}} = \mathrm{n}^k + S_{n-1}$
- 仿造一下斐波那契数列我们有 $X_{\mathrm{n-1}} = \begin{Bmatrix} \mathrm{n}^k \\ S_{n-1} \end{Bmatrix}$ $X_{\mathrm{n}} = \begin{Bmatrix} (n+1)^k \\ S_n \end{Bmatrix}$
- 所以可以推出 $A = \begin{pmatrix} (\frac{n+1}{n})^{\mathrm{k}} & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
- 但是 A 需要都是常数，当前的形式不太行



二项式展开！

$$
\begin{aligned}
S_{\mathrm{n}} &= \mathrm{n}^k + S_{n-1} \\
&= (n-1+1)^k + S_{n-1} \\
&= \binom{k}{0}(n-1)^k + \binom{k}{1}(n-1)^{k-1} + \ldots\ldots + \binom{k}{\mathrm{k}} + S_{n-1}
\end{aligned}
$$

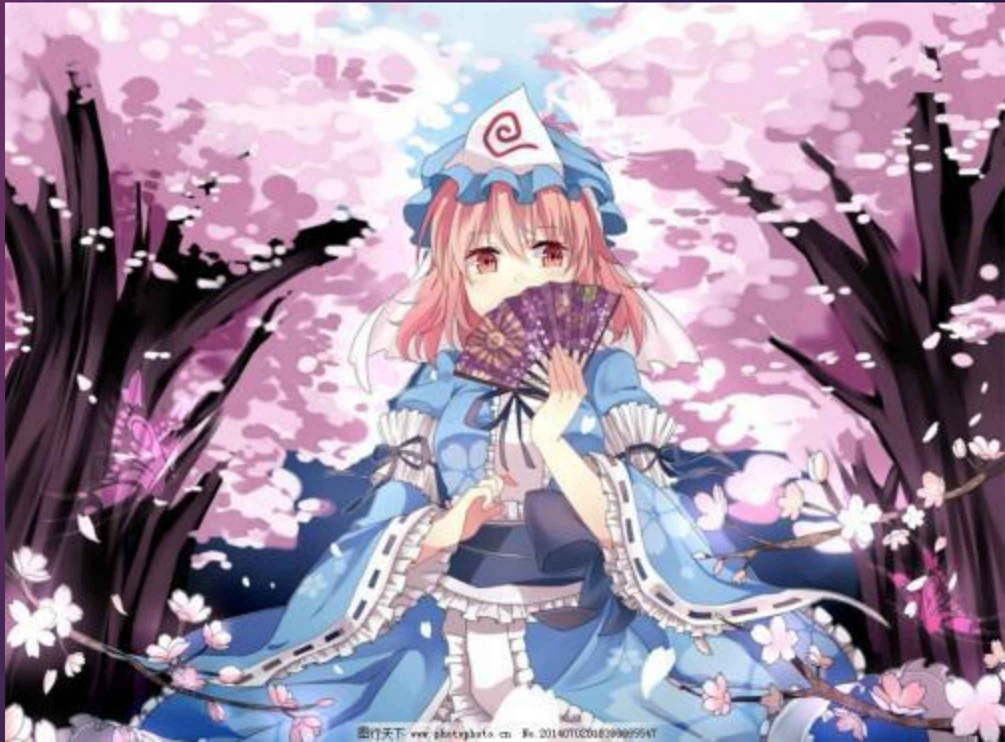
令 $X_{\mathrm{n}-1} = \begin{Bmatrix} (n-1)^k \\ (n-1)^{k-1} \\ \vdots \\ (n-1)^0 \\ S_{n-1} \end{Bmatrix}$　有 $X_{\mathrm{n}} = \begin{Bmatrix} \mathrm{n}^k \\ \mathrm{n}^{k-1} \\ \vdots \\ n^0 \\ S_n \end{Bmatrix}$



又又又是矩阵

$$A = \begin{pmatrix} \binom{k}{0} & \binom{k}{1} & \cdots & \binom{k}{k} & 0 \\ 0 & \binom{k-1}{0} & \cdots & \binom{k-1}{k-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \binom{0}{0} & 0 \\ \binom{k}{0} & \binom{k}{1} & \cdots & \binom{k}{k} & 1 \end{pmatrix}$$

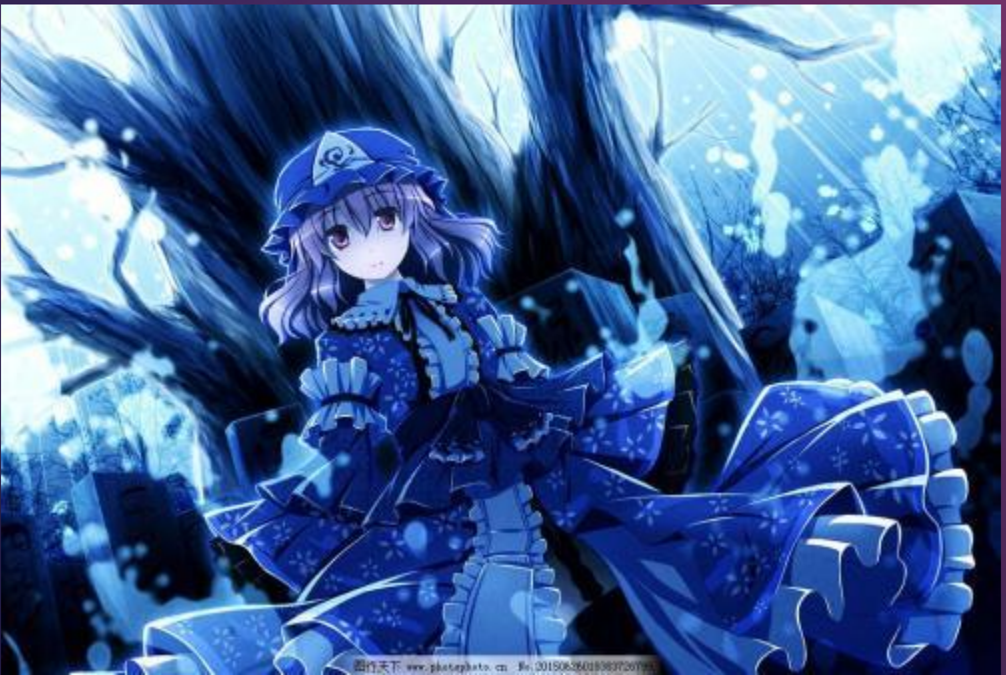
- 所以有 $A^{\mathrm{n}-1}X_1 = X_n$
- 且 $X_1 = \{1\ 1\ \ldots\ 1\}^T$



重度扩展

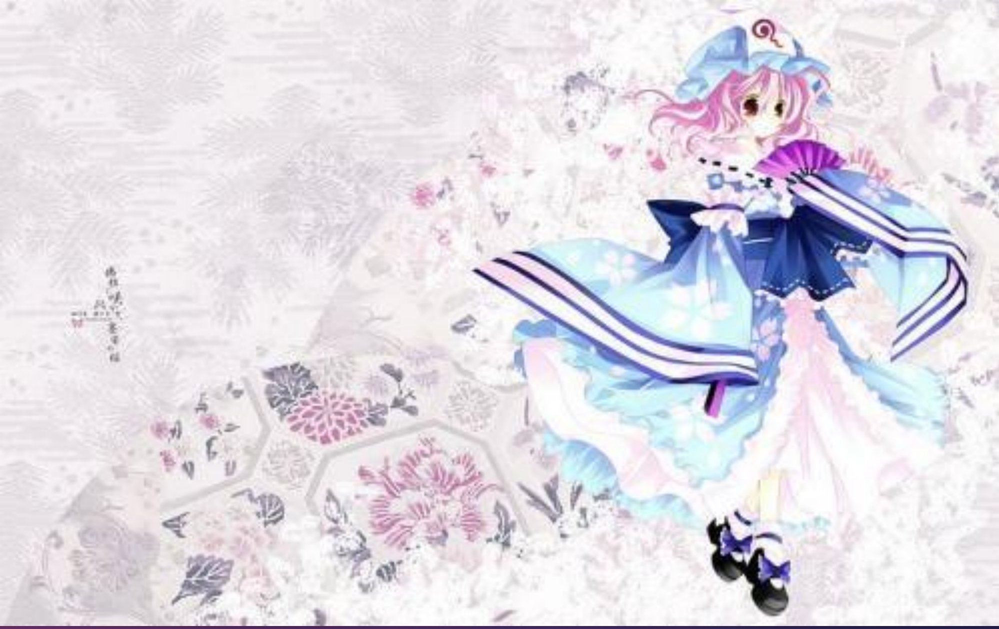
- $dp_1 = a$
- $dp_2 = b$
- $dp_n = 2\,dp_{n-2} + dp_{n-1} + n^4$

- ~~转移矩阵留给读者自己思考~~



$$\begin{pmatrix} dp_n \\ dp_{n-1} \\ n^4 \\ n^3 \\ n^2 \\ n \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dp_{n-1} \\ dp_{n-2} \\ (n-1)^4 \\ (n-1)^3 \\ (n-1)^2 \\ (n-1) \\ 1 \end{pmatrix}$$

脱发扩展



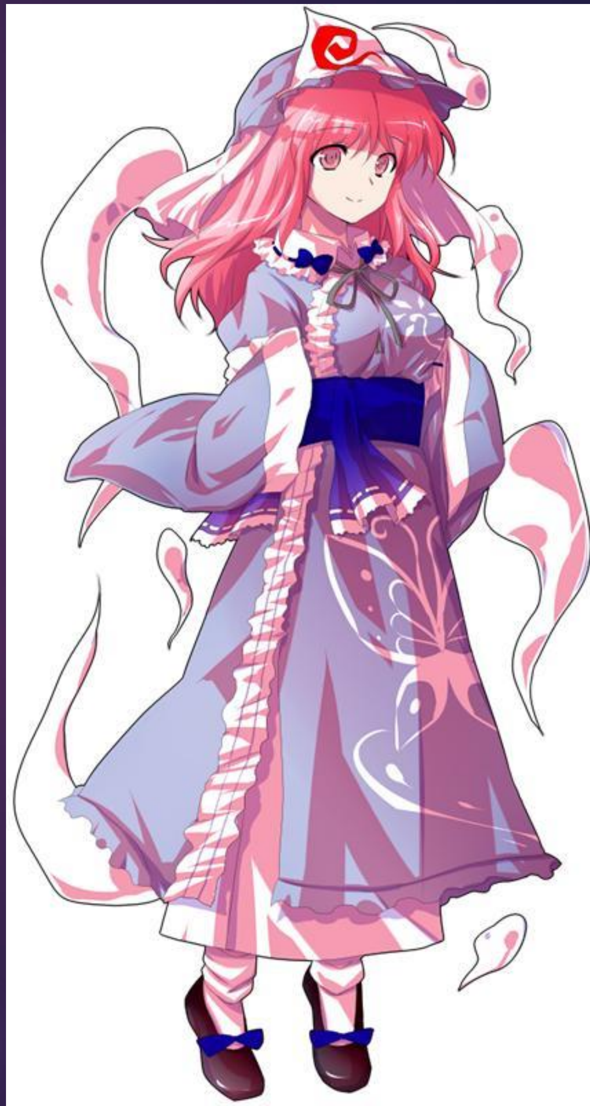
- 计算 $S_n = \sum_{\mathrm{i}}^{\mathrm{n}} (ai + b)^k$
- ~~和之前一毛一样，我们很容易发现~~

$$
\begin{aligned}
S_{\mathrm{n}} &= (an + b)^k + S_{n-1} \\
&= [a(n-1) + (a+b)]^k + S_{n-1} \\
&= \binom{k}{0} a^k (n-1)^k + \binom{k}{1} a^{k-1} (a+b)(n-1)^{k-1} + \dots\dots + \binom{k}{\mathrm{k}} (a+b)^k + S_{n-1}
\end{aligned}
$$

其实也没那么脱发

$$X_{n-1} = \begin{Bmatrix} (n-1)^k \\ (n-1)^{k-1} \\ \vdots \\ (n-1)^0 \\ S_{n-1} \end{Bmatrix} \qquad X_n = \begin{Bmatrix} n^k \\ n^{k-1} \\ \vdots \\ n^0 \\ S_n \end{Bmatrix}$$

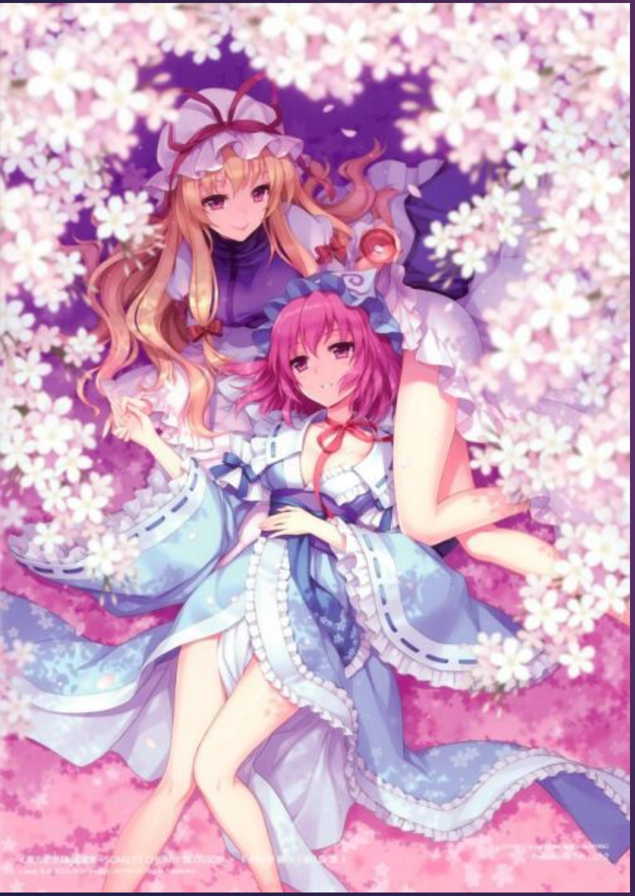
$$A = \begin{Bmatrix} C_k^0 & C_k^1 & \cdots & C_k^k & 0 \\ 0 & C_{k-1}^0 & \cdots & C_{k-1}^{k-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & C_0^0 & 0 \\ C_k^0 a^k & C_k^1 a^{k-1}(a+b) & \cdots & C_k^k (a+b)^k & 1 \end{Bmatrix}$$



致死扩展

- 计算 $S_n = \sum_{\mathrm{i}}^{\mathrm{n}} \mathrm{i}^k k^i$
- 这个我会了！

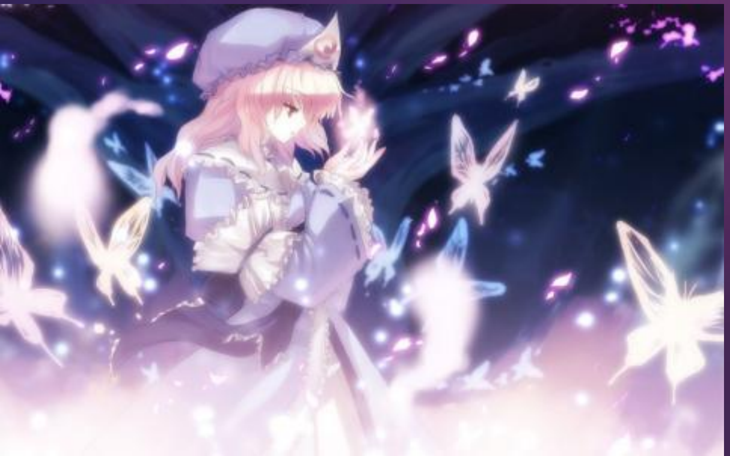
$$S_{\mathrm{n}} = \mathrm{n}^k k^n + S_{n-1}$$
$$= (n-1+1)^k k^{(n-1)+1} + S_{n-1}$$
$$= \binom{k}{0}(n-1)^k k^{(n-1)+1} + \binom{k}{1} a^{k-1} n - 1)^{k-1} k^{(n-1)+1} + \dots$$
$$\dots + \binom{k}{\mathrm{k}} k^{(n-1)+1} + S_{n-1}$$



其实都是套路

$$X_{n-1} = \begin{Bmatrix} (n-1)^k k^{(n-1)+1} \\ (n-1)^{k-1} k^{(n-1)+1} \\ \vdots \\ (n-1)^0 k^{(n-1)+1} \\ S_{n-1} \end{Bmatrix} \qquad X_n = \begin{Bmatrix} n^k k^{n+1} \\ n^{k-1} k^{n+1} \\ \vdots \\ n^0 k^{n+1} \\ S_n \end{Bmatrix}$$

只是相差了一个系数 k 而已



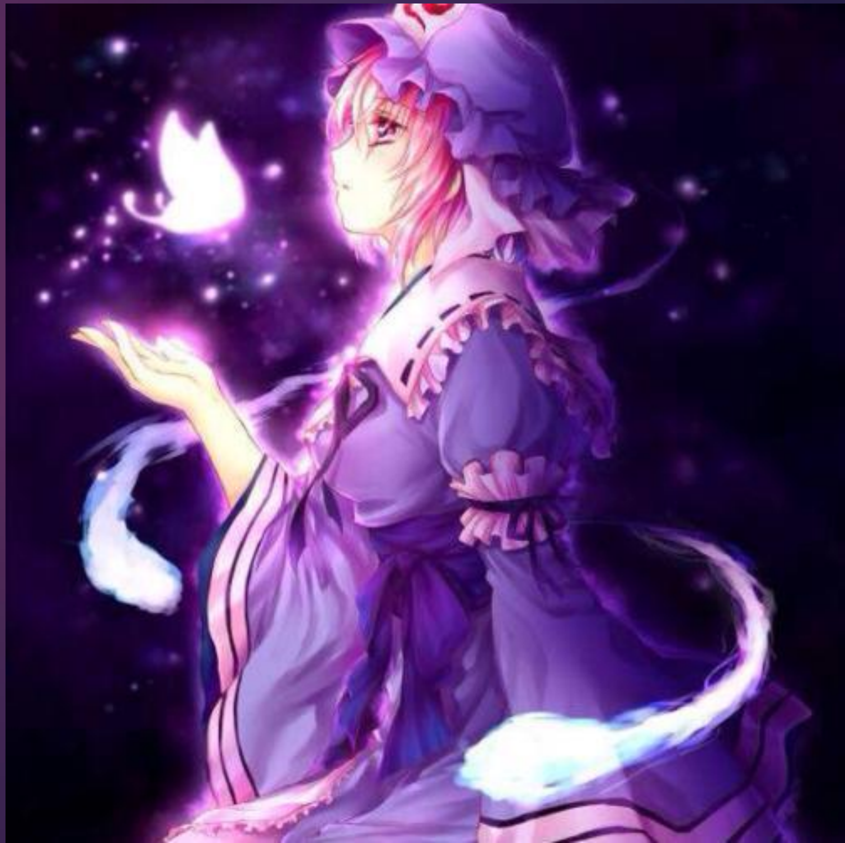
$$A = \begin{Bmatrix} C_k^0 & C_k^1 & \cdots & C_k^k & 0 \\ 0 & C_{k-1}^0 & \cdots & C_{k-1}^{k-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & C_0^0 & 0 \\ C_k^0 a^k & C_k^1 a^{k-1}(a+b) & \cdots & C_k^k (a+b)^k & 1 \end{Bmatrix}$$

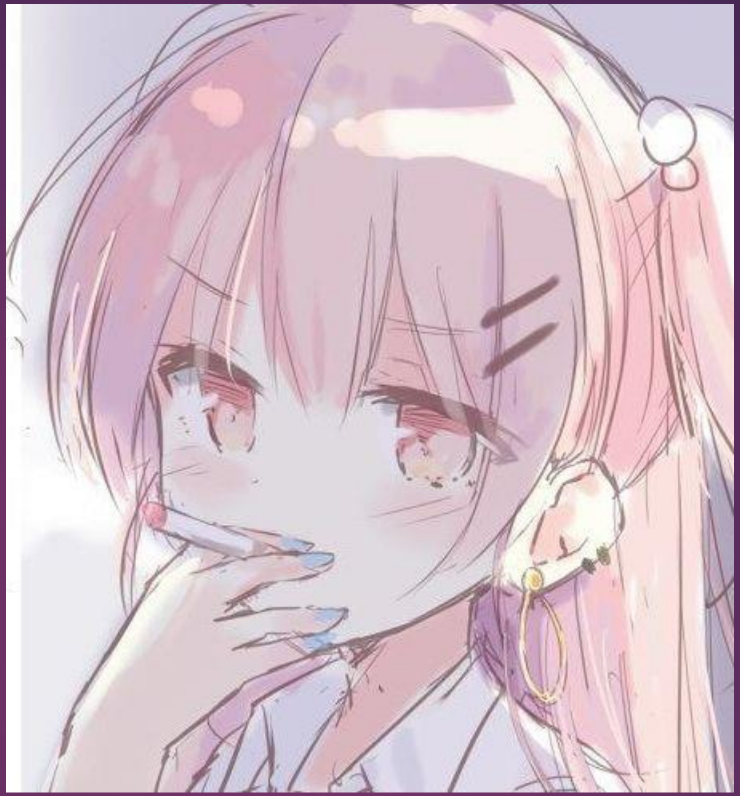
意想不到的扩展

- 给你一个 n 点 m 边的带权有向图，每条边的边权均为 1
- 求第 k 小的路径的长度
- $1 \le n \le 40$，$1 \le m \le 1000$, $1 \le k \le 10^{18}$
- 路径非简单路径，即可以一个点反复走qwq

- 如果每条边的边权为 1，2，3中的一种呢？

- 如果你会第二个问题，可以向大奶牛索要奖励





以上

因为您已经不是儿童了而且你也不快乐