为计数的世界献上容斥

Prepared by Heaven_

写在前面

- 来考虑一个简单的问题
- 1 ~ n 内有多少个自然数
- n 个
- 1 ~ n 内有多少个 2 的倍数
- $\lfloor n / 2 \rfloor$
- [l, r] 内有多少个 k 的倍数
- $\lfloor r / k \rfloor - \lfloor l / k \rfloor$
- 很好，你已经学会计数问题了~~，HDU 5581，请~~

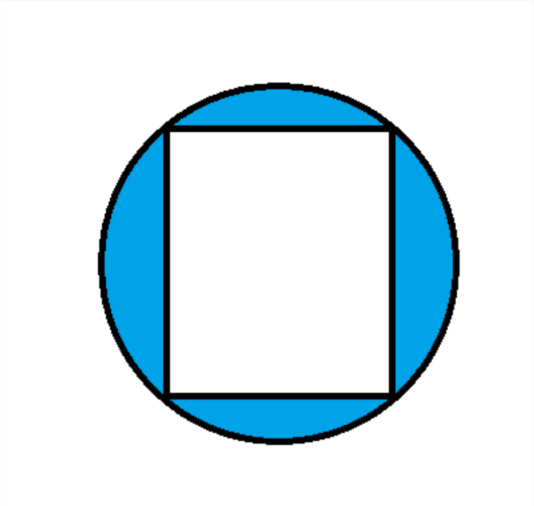
写在前面

- 计数类问题的两个基本原则
    - 不遗漏
    - 不重复

- 所以我们有3种解决计数问题的方式
    - 直接算
    - 广义求补（这个名字是我自己编的请不要外传）
    - 容斥

广义求补

- 先把原问题中本不包含的部分一起计算，最后再除去



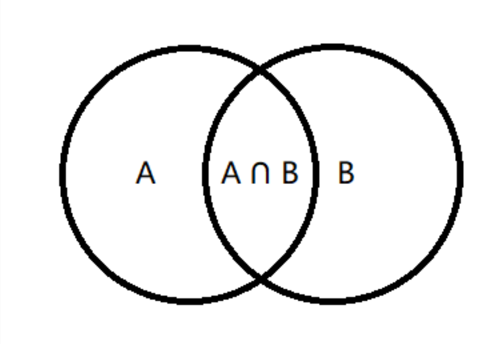
- 要求蓝色部分 4 个扇形的面积，我们可以先求圆的面积再减去中间正方形的面积

广义求补

- 监狱有连续编号为 1 ... n 的 n 个房间，每个房间关押一个犯人，有 m 种宗教，每个犯人可能信仰其中一种。如果相邻房间的犯人的宗教相同，就可能发生越狱，求有多少种状态可能发生越狱（bzoj 1008）
- 总共有 m^n 种情况
- 考虑不越狱，即相邻两个房间里的人信仰宗教不同
- 第一个人有 m 种选择，接下来每个人都有 m – 1 种选择
- 所以答案为：$\mathrm{m}^n - m(m-1)^{n-1}$
- 感性认知一下我们有理由相信是没有遗漏情况的
- 这不就是逆向思维么
- 某种意义上来说是的

容斥

- 先把原问题中重复的部分一起计算，最后再除去



两个集合的并

- A U B = A + B – A ∩ B
- 三个集合的并的容斥也能很好推出来
- 感性认知一下能猜出 n 个集合的容斥qwq

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{i,j:1\le i<j\le n} |A_i \cap A_j| + \sum_{i,j,k:1\le i<j<k\le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \ldots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \ldots \cap A_n|$$

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \times \sum_{1\le i_1<i_2<\ldots<i_k\le n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}|$$

务必认真看懂

容斥

- 归纳法证明（公式太难打了这是我从百度百科抄来的
- 当 n = 2 时，显然成立

假设 $n=s(s\ge 2,s\in N^+)$ 时结论成立，则当 $n=s+1$ 时，

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right|=\left|\bigcup_{i=1}^{s+1}A_i\right|=\left|\left(\bigcup_{i=1}^{s}A_i\right)\cup A_{s+1}\right|$$

$$=\left|\bigcup_{i=1}^{s}A_i\right|+|A_{s+1}|-\left|\left(\bigcup_{i=1}^{s}A_i\right)\cap A_{s+1}\right|$$

$$=\left|\bigcup_{i=1}^{s}A_i\right|+|A_{s+1}|-\left|\bigcup_{i=1}^{s}(A_i\cap A_{s+1})\right|$$

$$=\sum_{1\le i_1\le s+1}|A_i|+\sum_{k=2}^{s}(-1)^{k-1}\sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le s}\left|A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_{i_k}\right|+$$

$$\sum_{k=1}^{s-1}(-1)^{k}\sum_{1\le i_1<i_2\cdots<i_k\le s}\left|A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_{i_k}\cap A_{i_{s+1}}\right|+(-1)^s|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_s\cap A_{s+1}|$$

$$=\sum_{1\le i_1\le s+1}|A_i|+[\sum_{k=2}^{s}(-1)^{k-1}\sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le s}\left|A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_{i_k}\right|+$$

$$\sum_{k=2}^{s}(-1)^{k-1}\sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_{k-1}\le s}\left|A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_{k-1}\cap A_{s+1}\right|]+(-1)^s|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_{s+1}|$$

$$=\sum_{1\le i_1\le s+1}\left|A_{i_1}\right|+\sum_{k=2}^{s}(-1)^{k-1}\sum_{1\le i_1<i_2\cdots<i_k\le s+1}\left|A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_{i_k}\right|+(-1)^s|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_{s+1}|$$

$$=\sum_{k=1}^{s+1}(-1)^{k-1}\sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le s+1}\left|A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_{i_k}\right|$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n}\left|A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_{i_k}\right|$$

所以当 $n=s+1$ 时，结论仍成立。因此对任意 $n\in N^+,n\ge 2$，均可使所证等式成立。[1]

容斥

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{i,j:1\le i<j\le n} |A_i \cap A_j| + \sum_{i,j,k:1\le i<j<k\le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \ldots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \ldots \cap A_n|$$

- 等价性证明，对于任意一个存在 q 个集合中的元素 x，我们需要证明他正好被计算了一次

- 首先不在 Ai 集合中的元素，是不会出现在右边的算式中的（保证不会有额外元素被计算）

- 当 k = 1 时，x 被计算 q 次
- 当 k = 2 时，x 被减去 $\binom{q}{2}$
- 当 k = 3 时，x 被计算 $\binom{q}{3}$
- ……
- 当 k = q 时，x 被计算 or 减去 $\binom{q}{q}$，符号由 $(-1)^{q-1}$决定
- 当 k > q 时，x 不被考虑

容斥

- 所以我们有计算次数
$$T = \binom{q}{1} - \binom{q}{2} + \binom{q}{3} - \ldots + (-1)^{i-1}\binom{q}{i} + \ldots\ldots + (-1)^{q-1}\binom{q}{q}$$
- 我们会惊讶的发现，对于二项式定理，有
$$(1-x)^q = \binom{q}{0} - \binom{q}{1}x + \binom{q}{2}x^2 - \binom{q}{3}x^3 + \ldots\ldots + (-1)^q\binom{q}{q}x^q$$
- 当 x = 1 时，我们有 $-(1-x)^q + \binom{q}{0} = T$
- 即 T = 1
- 证毕

一个例题

容斥

- 对于集合 S = {1, 2, 3 ..., n} 的子集，有多少种选择方式可以让子集的交大小为 k ($n \le 10^6$)（bzoj 2839）
- 交集为 k，那么意味着每个集合内都要有这 k 个元素
- 于是我们可以先从 1 ~ n 中选出 k 个元素作为交集中含有的元素 $\binom{n}{k}$
- 然后我们考虑先把 k 个元素除去，剩下的 (n - k) 个元素的子集随便选，最后往选出的每个集合都塞进事先选择好的 k 个元素，这样能构造出交集大于等于 k 的情况（但是不能计数）
- 当我们选出的集合交集为空集的时候，构造出的就是交集等于 k 的情况

一个例题

容斥

- 我们来思考对于交集至少为 k 的构造方法为什么不能用来计数
- 对于 S = {1, 2, 3}，k = 2
- 如果我们先排除 {1, 2}，又选了 {3}，和先排除 {1, 3}，又选了 {2} 最终是相同的
- 那么我们考虑能不能用容斥把多余的部分解决
- 对于一个大小为 j 的集合，他在交集至少为 k 的集合中会被计算 $\binom{j}{k}$ 次

广义容斥

- 正如之前所说的，容斥也好，广义求补也好，首先先尝试修改计数的限制，使其变成更容易的计数问题
- 容斥的第二个证明方法，其实是在尝试证明对于一个元素，他的容斥系数最终为 1
- 那么我们考虑一个计数问题，我们可以尝试通过对限制的更改使其变成容易计算的计数问题，再通过配以正确的容斥系数，使得最后每个元素计算的次数和原问题一致

一个粒子

- 有多少种排列满足 $a_i \neq i$

广义容斥

to be continue

- 一些例题
- 广义容斥
- 容斥与 npc
- 子集卷积