

The background is a digital illustration of a witch-like character with a large, dark, pointed hat featuring two circular emblems with 'X' marks. The character has long, dark hair and is wearing a dark purple dress with a brown belt. They are holding a long, thin, light-colored staff or wand. To the right, a glowing orange and yellow orb is visible. The background is a dark blue sky with swirling orange and red clouds, suggesting a sunset or sunrise. The entire image is framed by a black L-shaped border on the left and bottom.

为计数的世界献上容斥

Prepared by Heaven_

- 来考虑一个简单的问题
- $1 \sim n$ 内有多少个自然数
- n 个
- $1 \sim n$ 内有多少个 2 的倍数
- $\lfloor n / 2 \rfloor$
- $[l, r]$ 内有多少个 k 的倍数
- $\lfloor r / k \rfloor - \lfloor l / k \rfloor$
- 很好，你已经学会计数问题了，~~HDU 5581~~，请

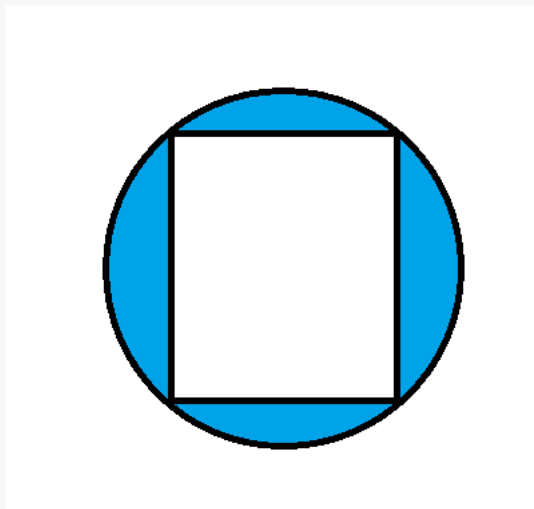


- 计数类问题的两个基本原则
 - 不遗漏
 - 不重复
- 所以我们有 3 种解决计数问题的方式
 - 直接算
 - 广义求补（这个名字是我自己编的请不要外传）
 - 容斥



广义求补

- 先把原问题中本不包含的部分一起计算，最后再除去



- 要求蓝色部分 4 个扇形的面积，我们可以先求圆的面积再减去中间正方形的面积



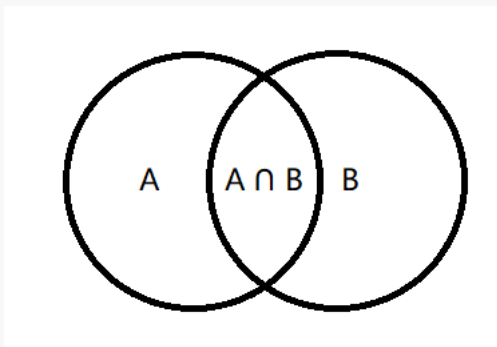
广义求补

- 监狱有连续编号为 $1 \dots n$ 的 n 个房间，每个房间关押一个犯人，有 m 种宗教，每个犯人可能信仰其中一种。如果相邻房间的犯人的宗教相同，就可能发生越狱，求有多少种状态可能发生越狱 (bzoj 1008)
- 总共有 m^n 种情况
- 考虑不越狱，即相邻两个房间里的人信仰宗教不同
- 第一个人有 m 种选择，接下来每个人都有 $m - 1$ 种选择
- 所以答案为： $m^n - m(m - 1)^{n-1}$
- 感性认知一下我们有理由相信是没有遗漏情况的
- 这不就是逆向思维么
- 某种意义上来说是的



容斥

- 先把原问题中重复的部分一起计算，最后再除去



两个集合的并

- $A \cup B = A + B - A \cap B$
- 三个集合的并的容斥也能很好推出来
- 感性认知一下能猜出 n 个集合的容斥qwq

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{i=1}^n |A_i| - \sum_{i,j:1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| + \sum_{i,j,k:1 \leq i < j < k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \dots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \dots \cap A_n|$$

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \times \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}|$$



务必认真看懂

- 归纳法证明（公式太难打了这是我从百度百科抄来的）
- 当 $n=2$ 时，显然成立

假设 $n=s (s \geq 2, s \in \mathbb{N}^+)$ 时结论成立，则当 $n=s+1$ 时，

$$\begin{aligned}
 \left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| &= \left| \bigcup_{i=1}^{s+1} A_i \right| = \left| \left(\bigcup_{i=1}^s A_i \right) \cup A_{s+1} \right| \\
 &= \left| \bigcup_{i=1}^s A_i \right| + |A_{s+1}| - \left| \left(\bigcup_{i=1}^s A_i \right) \cap A_{s+1} \right| \\
 &= \left| \bigcup_{i=1}^s A_i \right| + |A_{s+1}| - \left| \bigcup_{i=1}^s (A_i \cap A_{s+1}) \right| \\
 &= \sum_{1 \leq i_1 \leq s+1} |A_{i_1}| + \sum_{k=2}^s (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq s} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}| + \\
 &\quad \sum_{k=1}^{s-1} (-1)^k \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq s} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k} \cap A_{s+1}| + (-1)^s |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_s \cap A_{s+1}| \\
 &= \sum_{1 \leq i_1 \leq s+1} |A_{i_1}| + \left[\sum_{k=2}^s (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq s} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}| + \right. \\
 &\quad \left. \sum_{k=2}^s (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_{k-1} \leq s} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_{k-1}} \cap A_{s+1}| \right] + (-1)^s |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{s+1}| \\
 &= \sum_{1 \leq i_1 \leq s+1} |A_{i_1}| + \sum_{k=2}^s (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq s+1} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}| + (-1)^s |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{s+1}| \\
 &= \sum_{k=1}^{s+1} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq s+1} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}| \\
 &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}|
 \end{aligned}$$

所以当 $n=s+1$ 时，结论仍成立。因此对任意 $n \in \mathbb{N}^+, n \geq 2$ ，均可使所证等式成立。 [1]

容斥



容斥

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{i=1}^n |A_i| - \sum_{i,j:1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| + \sum_{i,j,k:1 \leq i < j < k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \dots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \dots \cap A_n|$$

- 等价性证明，对于任意一个存在 q 个集合中的元素 x ，我们需要证明他正好被计算了一次
- 首先不在 A_i 集合中的元素，是不会出现在右边的算式中的（保证不会有额外元素被计算）
- 当 $k = 1$ 时， x 被计算 q 次
- 当 $k = 2$ 时， x 被减去 $\binom{q}{2}$
- 当 $k = 3$ 时， x 被计算 $\binom{q}{3}$
-
- 当 $k = q$ 时， x 被计算 or 减去 $\binom{q}{q}$ ，符号由 $(-1)^{q-1}$ 决定
- 当 $k > q$ 时， x 不被考虑



- 所以我们有计算次数

$$T = \binom{q}{1} - \binom{q}{2} + \binom{q}{3} - \dots + (-1)^{i-1} \binom{q}{i} + \dots + (-1)^{q-1} \binom{q}{q}$$

- 我们会惊讶的发现，对于二项式定理，有

$$(1-x)^q = \binom{q}{0} - \binom{q}{1}x + \binom{q}{2}x^2 - \binom{q}{3}x^3 + \dots + (-1)^q \binom{q}{q}x^q$$

- 当 $x = 1$ 时，我们有 $-(1-x)^q + \binom{q}{0} = T$

- 即 $T = 1$

- 证毕



一个例题

容斥

- 对于集合 $S = \{1, 2, 3 \dots, n\}$ 的子集，有多少种选择方式可以让子集的交大小为 k ($n \leq 10^6$) (bzoj 2839)
- 交集为 k ，那么意味着每个集合内都要有这 k 个元素
- 于是我们可以先从 $1 \sim n$ 中选出 k 个元素作为交集中含有的元素 $\binom{n}{k}$
- 然后我们考虑先把 k 个元素除去，剩下的 $(n - k)$ 个元素的子集随便选，最后往选出的每个集合都塞进事先选择好的 k 个元素，这样能构造出交集 **大于等于** k 的情况 (**但是不能计数**)
- 当我们选出的集合交集为空集的时候，构造出的就是交集 **等于** k 的情况



一个例题

容斥

- 我们来思考对于交集至少为 k 的构造方法为什么不能用来计数
- 对于 $S = \{1, 2, 3\}$, $k = 2$
- 如果我们先排除 $\{1, 2\}$, 又选了 $\{3\}$, 和先排除 $\{1, 3\}$, 又选了 $\{2\}$ 最终是相同的
- 那么我们考虑能不能用容斥把多余的部分解决
- 对于一个大小为 j 的集合, 他在交集至少为 k 的集合中会被计算 $\binom{j}{k}$ 次



广义容斥

- 正如之前所说的，容斥也好，广义求补也好，首先先尝试修改计数的限制，使其变成更容易的计数问题
- 容斥的第二个证明方法，其实是在尝试证明对于一个元素，他的容斥系数最终为 1
- 那么我们考虑一个计数问题，我们可以尝试通过对限制的更改使其变成容易计算的计数问题，再通过配以正确的容斥系数，使得最后每个元素计算的次数和原问题一致



一个粒子

- 有多少种排列满足 $a_i \neq i$

广义容斥

to be continue

- 一些例题
- 广义容斥
- 容斥与 npc
- 子集卷积