《计算机图形学》10 月报告

学号:181860117，姓名: 徐佳美
candyann77@163.com

2020 年 10 月 31 日

目录

摘要

该部分内容是放置摘要信息的。该部分内容是放置摘要信息的。该部分内容是放置摘要信息的。该部分内容是放置摘要信息的。该部分内容是放置摘要信息的。

1 综述

1.1 环境介绍

Ubuntu-18.04 64bit
Python-3.7.9
Numpy-1.19.2
Pillow-7.0.0
Pyqt-5.9.2

1.2 已完成功能

绘制直线，多边形，椭圆，曲线（部分）

1.3 可扩展功能

...

2 算法介绍

2.1 draw line

对于水平线，垂直线，对角线，可以直接得出结果而无需进行画线算法处理；

2.1.1 DDA 算法

采用增量思想，若设置步长为 1，对于点 x0,y0,x1,y1，则有：

$$y1 = kx1 + b = k(x0 + 1) + b = kx0 + k + b = y0 + k$$

这里的 k 即为图形的斜率, 即 x 每增加 1，y 增加 k。
但是当 k 比较大时，这样的画法会导致画布上的点比较稀疏。因此，当 k 的绝对值 >1 时，考虑将 x,y 反置，则有：

$$x1 = ty1 + b = t(y0 + 1) + b = ty0 + b + t = x0 + t$$

2.1.2 Bresenham 算法

每移动一个步长，在两个像素点中选择距离更近的一个；对中点画线法进行改进，考虑到光栅上是取整型点，$yk + 1 = yk + 1$; 因此可以不用计算两个像素点距离线段上点的具体

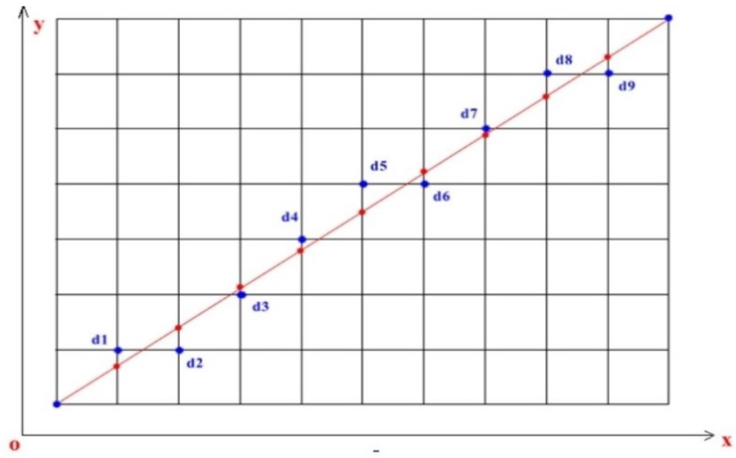


图 1: Bresenham 画直线图示

值，只要判断线段上的点是在格子中线的上方还是下方；这个算式包含很多小数计算，对决策参数进行变形，得到整数计算的 Bresenham 算法。

(1) 斜率在 0-1 之间的:

Pk 表示决策参数，Pk 每次加 k, 初始值为-0.5，因此只要与 0 比较，如果 > 0, 移动，y+1,Pk-1；

$$dx = x1 - x0 \quad dy = y1 - y0 \quad k = dy/dx$$
$$Pk = -0.5 \quad y = y0$$
$$Pk+ = k$$
$$if\ Pk > 0:$$
$$y+ = 1 \quad Pk- = 1$$

在递推的等式中，两边同时乘以 2*dx; dx 为正数，不影响符号的判断

$$Pk = -0.5 \times 2dx = -dx$$
$$2*dx*Pk = 2*dx*Pk + dy/dx \times 2dx = 2*dx*Pk + 2dy$$
$$Pk = Pk + 2dy$$

如果有移动，原来的 $Pk- = 1$ 变成 $Pk- = 2dx$;

(2) 斜率在-1 到 0 之间的按 x 递减方向看就和 0 到 1 的斜率一样；

合并（1）（2）

$$(y1 > y0)$$
$$dx = x1 - x0 \quad dy = y1 - y0 \quad k = dy/dx$$
$$if\ |k| < 1:$$
$$detay = dy << 1 \quad detax = dx << 1$$
$$Pk = -dx \quad y = y0$$
$$Pk+ = detay$$
$$if\ Pk > 0:$$
$$y+ = 1 \quad Pk- = detax$$

下面将算法拓展到全象限，根据二维平面区域间的对称性 当斜率绝对值 >1 时，将 x

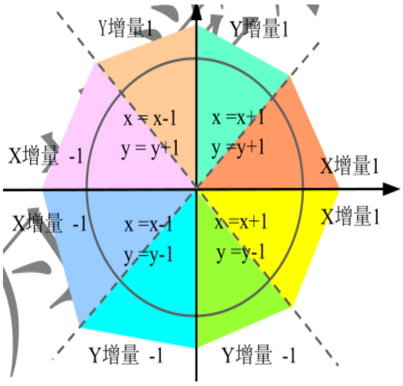


图 2: Bresenham 算法的通用性处理

和 y 的关系对调，新的算式如下

$$(x1 > x0)$$
$$dx = x1 - x0 \quad dy = y1 - y0 \quad k = dy/dx$$
$$if\ |k| > 1:$$
$$detay = dy << 1 \quad detax = dx << 1$$
$$Pk = -dy \quad x = x0$$
$$Pk+ = detax$$
$$if\ Pk > 0:$$
$$x+ = 1 \quad Pk- = detay$$

2.2 draw polygon

多边形是由多条直线围成的，对多边形的每一条边，调用绘制线段的算法即可

2.3 draw ellipse

2.3.1 中点画圆法

在画椭圆之前，先看椭圆的特例，圆的生成

首先圆具有很好的对称性，因此只要计算 x=0 到 x=y 之间的点。
用直线路径逼近圆路径，为了得到更连续的边界，将步长设置为 $\frac{1}{r}$，这样每个像素点大概为 1 个单位间隔；
对这个八分圆上的点进行离散化，沿 x 方向取单位步长，确定对应的 y 位置；每一步，我们首先得到候选的 y 位置；

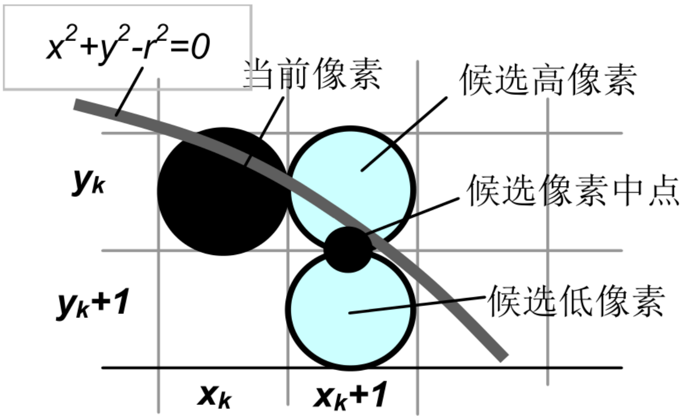


图 3: 中点圆算法的第 k+1 步候选像素

为了应用中点法，定义圆函数为：

$$f_{circle}(x,y) = x^2 + y^2 - r^2;$$

则任一点 (x,y) 的相对位置可以由圆函数的符号决定：

$$\begin{cases} f_{circle}(x,y) < 0 & \text{(x,y) 位于圆内;} \\ f_{circle}(x,y) = 0 & \text{(x,y) 位于圆上;} \\ f_{circle}(x,y) > 0 & \text{(x,y) 位于圆外;} \end{cases}$$

显然，在第一象限，y 是递减的，对于 (x_k, y_k), 我们有两个候选点, 即 (x_{k+1}, y_k) 和 $(x_{k+1}, y_k - 1)$，决策参数是圆函数在这两个候选点中间的值

$$p_k = f_{circle}(x_{k+1}, y_k - \frac{1}{2}) = (x_k + 1)^2 + (y_k - \frac{1}{2})^2 - r^2 \tag{1}$$

则不难得到，当 p_k<0 时，取高像素，$p_k >= 0$ 时，取低像素。
则到第 k+1 步时，如果是取高像素，中点为 $(x_{k+2}, y_k - \frac{1}{2})$ 如果是取低像素，则中点为 $(x_{k+2}, y_k - \frac{3}{2})$

化简决策参数为：

$$\begin{cases} p_{k+1} = P_k + 2x_k + 3 & p_k<0 \\ p_{k+1} = P_k + 2x_k - 2y_k + 5 & p_k \geq 0 \end{cases} \tag{2}$$

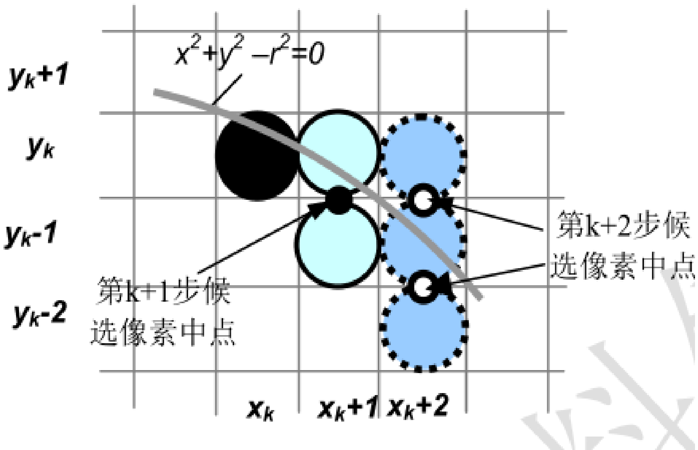


图 4: 中点圆算法的第 k+2 步候选像素

决策参数初始值 $p_0 = \frac{5}{4} - r$

对于点 (x,y), 它在八分圆中的其他七个对称点为：(y,x), $(-y,x)$, $(-x,y)$, $(-x,2r-y)$, $(y-2r,r-x)$, $(2r-y,r-x)$, $(x,2r-y)$

整合画圆的部分为：

1. 得到圆心和半径 $x_c,y_c),r$
2. 将圆心定为原点 (0,r)

$dx = x_c, dy = y_c - r$

3. 确定决策参数初始值
4. 按上述公式完成增量计算
5. 确定其他八分圆中的对称点
6. 将点移动到圆心为 (x_c,y_c) 的圆路径上
7. 重复 4-6，直到 $x \geq y$

2.3.2 中点画椭圆

接下来在画圆的基本思想上得到画椭圆的方法椭圆是四分对称，将椭圆中心作为坐标中心，在第一象限的一个四分区域，根据中点椭圆法又可以分成两个区域；

根据椭圆的定义化简点到椭圆中心的距离的平方，则有：

$f_eclipse(x,y) = r_y^2x^2 + r_x^2y^2 - r_x^2r_y^2$

则有：

$$\begin{cases} f_{eclipse}(x,y) < 0 & \text{(x,y) 位于椭圆内;} \\ f_{eclipse}(x,y) = 0 & \text{(x,y) 位于椭圆上;} \\ f_{eclipse}(x,y) > 0 & \text{(x,y) 位于椭圆外;} \end{cases}$$

假设 $r_x > r_y$ (1) 在区域 1 以 x 为单位步长，沿椭圆路径顺时针步进，初始点为 $(0,r_y)$ 假设前一步的位置为 (x_k,y_k), 则下一步两个候选像素点为 $(x_{k+1},y_k),(x_{k+1},y_k-1)$

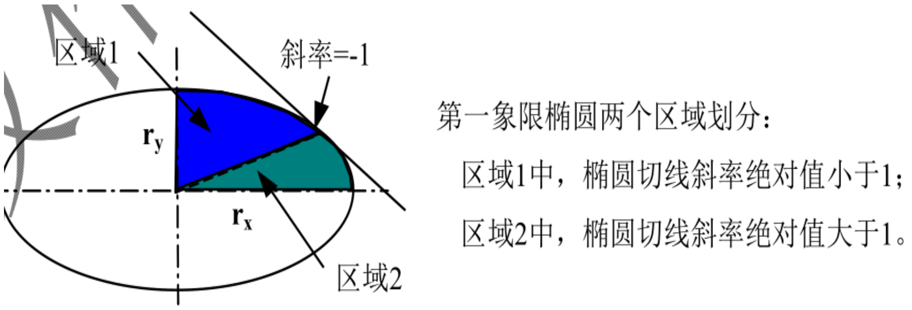


图 5: 第一象限椭圆区域划分

对两个像素点中间计算决策参数为：
$p1_k = f_{eclipse}(x_{k+1}, y_k - \frac{1}{2}) = r_y^2(x_k+1)^2 + r_x^2(y_k - \frac{1}{2})^2 - r_x^2 r_y^2$
如果 $p1_k$<0，中点位于椭圆内，则 y_k 更接近于椭圆边界；否则，取点 $y_k - 1$

$$\begin{cases} p1_{k+1} = p1_k + 2r_y^2 x_k + 3r_y^2 & \text{if } p_k < 0; \\ p1_{k+1} = p1_k + 2r_y^2 x_k - 2r_x^2 y_k + 3r_y^2 & \text{if } p_k \geq 0; \end{cases} \tag{3}$$

(2) 在区域 2 中，在-y 方向以单位步长取样
则两个候选像素点为 $(x_k, y_k - 1), (x_k + 1, y_k - 1)$
对两个候选点的中间计算决策参数为：
$p2_k = f_{eclipse}(x_k + \frac{1}{2}, y_k - 1) = r_y^2(x_k + \frac{1}{2})^2 + r_x^2(y_k - 1)^2 - r_x^2 r_y^2$
如果 $p2_k$<0，中点位于椭圆内，则 $x_k + 1$ 更接近于椭圆边界；否则，取点 x_k

$$\begin{cases} p1_{k+1} = p2_k - 2r_x^2 y_k + 3r_x^2 & \text{if } p_k \leq 0; \\ p2_{k+1} = p2_k + 2r_y^2 x_k - 2r_x^2 y_k + 2r_y^2 + 3r_x^2 & \text{if } p_k > 0; \end{cases} \tag{4}$$

$$p_0 = r_y^2 - r_x^2 r_y + \frac{r_x^2}{4} \tag{5}$$

(3) 假设求到的点为（x,y) 根据对称关系，在其他三个四分椭圆的坐标为 (-x,y),(-x,-y),(x,-y) 然后转回到以 (x_c, y_c) 为中心的椭圆

$$\begin{cases} x = x + x_c \\ y = y + y_c \end{cases} \tag{6}$$

综合 (1)(2)(3)，对于中心为 (x_c, y_c)，长短轴分别为 $r_x, r_y (r_y < r_x)$ 的椭圆，生成过程如下：
①输入中心 (x_c, y_c) r_x, r_y
② $(x_c, y_c) \Rightarrow (0,0)$, 第一个点为 $(0, r_y)$
③ 按公式计算 $p1_0$
④ 在区域 1 的每个 x_k 位置，从 k=0 开始，按公式计算决策参数，循环至 $2r_y^2 x \geq 2r_x^2 y$;
⑤ 使用区域 1 的最后一个点作为区域 2 的起始点 (x_0, y_0) 计算区域 2 的参数初始值
$p2_0 = r_y^2(x_0 + \frac{1}{2})^2 + r_x^2(y_0 - 1) - r_x^2$

⑥ 在区域 2 的每个 y_k 位置，从 k=0 开始，按公式计算决策参数，循环至 $(r_x, 0)$;
⑦确定其他对称点，平移到中心为 (x_c, y_c) 的椭圆轨迹上

2.4 draw curve

2.4.1 Bezier 算法

贝塞尔曲线是不规则曲线，由起始点，终止点，控制点组成，通过调整控制点，可以改变曲线的形状。

在实现时，需要在起点和终点之间构建插值多项式的混合函数，通常由 $n+1$ 个顶点定义一个 n 次多项式;

一阶贝塞尔曲线，也就是线段：

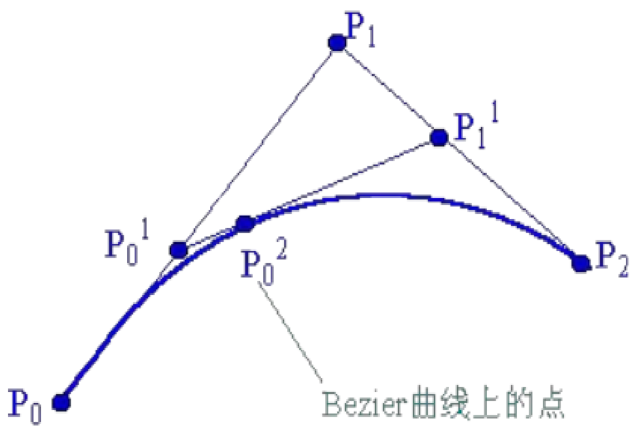
$$B(t) = P_0 + (P_1 - P_0)t = (1-t)P_0 + tP_1$$

二阶贝塞尔曲线（抛物线）：

设 P_0 P_{02} P_2 是一条抛物线上顺序三个不同的点。过 P_0 和 P_2 点的两切线交于 P_1 点，在点 P_{02} 的切线交 P_0P_1 和 P_2P_1 于 P_{01} 和 P_{11}，则如下比例成立

$$\frac{P_0P_{01}}{P_{01}P_1} = \frac{P_1P_{11}}{P_{11}P_2} = \frac{P_{01}P_{02}}{P_{02}P_{11}}$$

上述式子也称为抛去线的三切线定理



参考一阶的贝塞尔曲线，当 P0，P2 固定，引入参数 t，令上述比值为 t:(1-t)，即有：

$$\begin{cases} P_{01} = (1-t)P_0 + tP_1 & (1) \\ P_{11} = (1-t)P_1 + tP_2 & (2) \\ P_{02} = (1-t)P_{01} + tP_{11} & (3) \end{cases}$$

将（1）（2）式带入（3）式，$B(t) = (1-t)^2P_0 + 2t(1-t)P_1 + t^2P_2$ 递推到高阶: 给定这 $n+1$ 个点的位置，则贝塞尔参数曲线上各点的插值公式为:

$$B(t) = \sum_i^n P_i b_{i,n}(t)$$

其中，$b_{i,n}(t) = C_n^i t^i (1-t)^{n-i}, t \in [0,1]$

2.4.2 B-spline 曲线

贝塞尔曲线拼接复杂，修改需要整体修改，而 B 样条曲线是对贝塞尔曲线的补充；给定 n+1 个控制点，P0,P1, ..., Pn 以及一个节点向量 U = u0,u1, ..., um , p 次 B-样条曲线由这些控制点和节点向量 U 定义，其公式为：

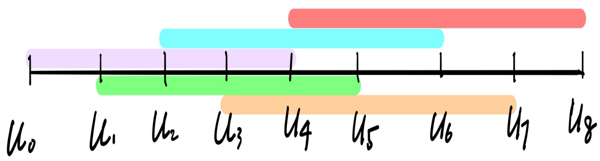
$$C(u) = \sum_{i=0}^{n} P_i N_{i,p}(u)$$

基函数定义如下：

$$N_{i,0}(u) = \begin{cases} 1 & \text{if } u_i \le u < u_{i+1} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$N_{i,p}(u) = \frac{u - u_i}{u_{i+p} - u_i} N_{i,p-1}(u) + \frac{u_{i+p+1} - u}{u_{i+p+1} - u_{i+1}} N_{i+1,p-1}(u)$$

B 样条曲线的定义域为 $u \in [U_{k-1}, U_{n+1}]$，设 U 为所有节点矢量的集合，节点表个数为 n + k + 1 个; 画坐标轴表示为：三次均匀 B 样条曲线，取 K=4，节点沿参数轴均匀等距



分布

2.5 translate

...

2.6 rotate

...

2.7 scale

...

2.8 clip

...

3 系统介绍

...

4 总结

...

参考文献

[1] Bresenham 画直线算法 _ 陈嘉怡的博客:https://blog.csdn.net/chenjiayi_yun/article/details/38601439

[2] latex 公式编辑器：https://www.latexlive.com

[3] 中点椭圆算法 https://www.cnblogs.com/clairvoyant/p/5540023.html

[4] 贝塞尔曲线总结 https://blog.csdn.net/tianhai110/article/details/2203572

[5] 贝塞尔曲线原理 https://www.jianshu.com/p/8f82db9556d2

[6] B 样条算法 _ 矢月:https://blog.csdn.net/weixin_44397852/article/details/108836781