

# Дифференциальный анализ фазовых пространств в задаче декодирования сигналов

Севериков Павел

Московский физико-технический институт  
Факультет управления и прикладной математики  
Кафедра интеллектуальных систем

Научный руководитель д.ф.-м.н. В. В. Стрижов

Москва,  
2021 г.

**Рассматривается задача** выбора оптимальной модели декодирования сигналов. Процесс декодирования заключается в восстановлении зависимости между двумя наборами данных.

**Проблема:** пространства исходных и целевых переменных обладают существенно избыточной размерностью.

**Гипотеза:** построение отображения из исходного пространства в целевое как отображения между бесконечномерными пространствами.

**Метод решения:** Предлагаются подходы нейронного оператора и нейронного Фурье оператора.

- *Li et al.* Fourier Neural Operator for Parametric Partial Differential Equations, // conference paper at ICLR 2021, 2020
- *Lu et al.* DeepONet: Learning nonlinear operators for identifying differential equations based on the universal approximation theorem of operators, // arXiv preprint arXiv:1910.03193, 2019
- *Kovachki et al.* Neural Operator: Learning Maps Between Function Spaces, //2021
- *Wen et al.* U-FNO – an enhanced Fourier neural operator based-deep learning model for multiphase flow // arXiv preprint arXiv:2109.03697, 2021

# Постановка задачи

- $\mathcal{X} = \mathcal{X}(D; \mathbb{R}^{d_x})$  и  $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}(D; \mathbb{R}^{d_y})$  – банаховы пространства функций на  $D \subset \mathbb{R}^x$
- $\Psi : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  – нелинейное отображение
- Последовательность наблюдений  $\{x_j, y_j\}_{j=1}^N$ , где  $y_j = \Psi(x_j)$
- Требуется построить аппроксимацию  $\Psi$

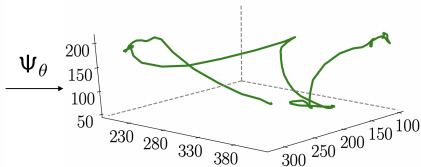
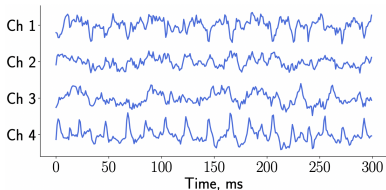
$$\Psi_\theta : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}, \quad \theta \in \Theta, \quad \Psi_{\theta^\dagger} \approx \Psi, \quad \theta^\dagger \in \Theta,$$

где  $\Theta$  – конечномерное пространство параметров

- Задача оптимизации

$$\min_{\theta \in \Theta} \mathbb{E}_x [C(\Psi_\theta(x), \Psi(x))],$$

где  $C : \mathcal{Y} \times \mathcal{Y} \rightarrow \mathbb{R}$  – функция ошибки



# Нейронный оператор

Итеративная структура решения:

$$x \mapsto v_0 \mapsto v_1 \mapsto \dots \mapsto v_K \mapsto y,$$

где  $v_j, j = 0, 1, \dots, K - 1$  - последовательность функций,  
 $v_0(p) = P(x(t))$ ,  $x(t) = Q(v_K(t))$ ,  $Q : \mathbb{R}^{d_v} \rightarrow \mathbb{R}^{d_y}$ ,  $P(\cdot)$ ,  $Q(\cdot)$  –  
полносвязные слои

## Определение 1 (Слой нейронного оператора)

$$v_{k+1}(t) := \sigma(Wv_k(t) + (\mathcal{K}(x; \varphi)v_k)(t)), \quad \forall t \in D,$$

где  $\mathcal{K}(x; \varphi)$  – ядерный интегральный оператор,  $W : \mathbb{R}^{d_v} \rightarrow \mathbb{R}^{d_v}$  –  
линейное преобразование,  $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  – нелинейная функция  
активации

## Определение 2 (Ядерный интегральный оператор)

$$(\mathcal{K}(x; \varphi)v_k)(t) := \int_D \kappa(t, q, x(t), x(q); \varphi)v_k(q) dq, \quad \forall p \in D,$$

где  $\kappa_\varphi : \mathbb{R}^{2(d+d_x)} \rightarrow \mathbb{R}^{d_v \times d_v}$  – нейросеть, параметризованная  $\varphi \in \Theta_{\mathcal{K}}$

# Нейронный Фурье оператор

## Определение 3 (Интегральный Фурье оператор)

Убирая зависимость от функции  $x$  и применяя теорему о свертке, получим:

$$(\mathcal{K}(\varphi)v_k)(t) = \mathcal{F}^{-1}(R_\varphi \cdot (\mathcal{F}v_k))(t) \quad \forall t \in D,$$

где  $R_\varphi = \mathcal{F}(\mathcal{K}_\varphi)$  – преобразование Фурье функции  $\mathcal{K} : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}^{d_v \times d_v}$  параметризованной  $\varphi \in \Theta_K$

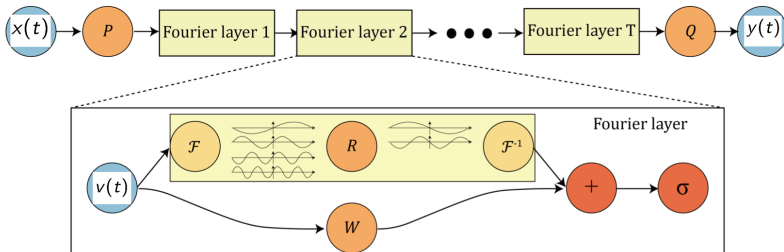


Рис. Структура нейронного Фурье оператора

# Понижение размерностей

## Гипотеза:

- 1 Понижение размерностей исходного и целевого пространств на основе методов PCA, PLS (отображения  $F_X, F_Y$  в размерность ниже, отображения в исходную размерность  $G_X, G_Y$ )
- 2 Построение отображения  $\chi$  между пространствами с размерностью ниже исходной

$$G_X \circ F_X \approx I_X$$

$$G_Y \circ F_Y \approx I_Y$$

$$G_Y \circ \chi \circ F_X \approx \Psi$$

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{X} & \xrightarrow{F_X} & \mathbb{R}^{d_X} & \xrightarrow{G_X} & \mathcal{X} \\ \Psi \downarrow & & \chi \downarrow & & \downarrow \Psi \\ \mathcal{Y} & \xrightarrow{F_Y} & \mathbb{R}^{d_Y} & \xrightarrow{G_Y} & \mathcal{Y} \end{array}$$

Рис. коммутативная диаграмма общей схемы декодирования при понижении исходного и целевого пространств  $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$

- Проведение экспериментов с применением FNO к декодированию сигналов EEG.
- Проведение экспериментов с применением FNO к декодированию сигналов EEG с понижением исходного и целевого пространств
- Сравнение с существующими подходами