Матроид Вамоса

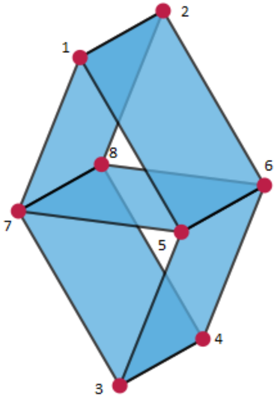
Северилов П. А.

Московский физико-технический институт

11 марта, 2020.

Задание матроида Вамоса

- Пусть $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$
- Зависимые множества: все подмножества E, в которых не менее пяти элементов, а также $\{1, 2, 5, 6\}$, $\{1, 2, 7, 8\}$, $\{3, 4, 5, 6\}$, $\{3, 4, 7, 8\}$, $\{5, 6, 7, 8\}$.



Напоминание

- Матроид – пара $\langle X, I \rangle$, где X — конечное множество, называемое носителем матроида, а I – некоторое множество подмножеств X, называемое семейством независимых множеств, т.е. $I \subset 2^X$. При этом должны выполняться следующие аксиомы:
  1. $\varnothing \in I$,если $A \in I$ и $B \subset A$, то $B \in I$
  2. если $A, B \in I$ и $|A| > |B|$, то $\exists x \in A \setminus B : B \cup \{x\} \in I$

Напоминание

- База матроида – максимальное по включению независимое множество.
- Рангом матроида называется мощность его баз.
- Цикл матроида – минимальное по включению зависимое множество.
- Тривиальный матроид – матроид $M = \langle X, I \rangle$ такой, что $I = \varnothing$. Ранг тривиального матроида равен нулю.

Теорема 1

Теорема 1

Заданная конструкция является матроидом.

Доказательство

Первая аксиома выполнена очевидно. Проверим, что если A и B независимые множества и $|B| = 3, |A| = 4$, то в A найдется такой элемент e, что $B \cup e$ – независимое множество. Когда $B \subset A$, это очевидно. В противном же случае множество $A \backslash B$ содержит по меньшей мере два различных элемента: e_1 и e_2. Тогда из множеств $B \cup e_1$ и $B \cup e_2$ хотя бы одно независимое, т.к. по условию нет двух зависимых множеств из четырех элементов, отличающихся одним элементом.

Теорема 2

Теорема 2

Матроид Вамоса не представим ни над каким полем.

Это значит, что не существует векторного пространства и системы из восьми векторов в нем, таких что матроид линейной независимости этих векторов изоморфен матроиду Вамоса.

Доказательство теоремы 2

Предположим, что $\exists$ изоморфный V векторный матроид $M = \langle E, J \rangle$, где $E = \{x_1, x_2, \ldots, x_8\}$, и $\forall i$ x_i соответствует элементу i матроида Вамоса.

$\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ – базис M (т.к. $\{1, 2, 3, 4\}$ – независимое множество в матроиде Вамоса). Координаты каждого вектора в этом базисе: $x_i = (a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, a_{i4})$.

Введем векторы $y_i = (a_{i1}, a_{i2}, 0, 0)$ и $z_i = (0, 0, a_{i3}, a_{i4})$, где $i = \overline{1, 8}$.

Доказательство теоремы 2

x_1, x_2, x_5, x_6 – линейно зависимы (соответствуют зависимому множеству в матроиде Вамоса):

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} a_{53} & a_{54} \\ a_{63} & a_{64} \end{vmatrix} = 0$$

то есть векторы z_5 и z_6 линейно зависимы

Доказательство теоремы 2

- Вектор z_5 ненулевой (иначе были бы ЛЗ векторы x_1, x_2, x_5, а у нас любые три вектора ЛНЗ).
- $\Rightarrow$ для некоторого скаляра (то есть элемента числового поля, над которым рассматривается линейное пространство) μ имеет место:

$$z_6 = \mu z_5$$

Точно так же из ЛЗ четвёрок векторов $\{x_1, x_2, x_7, x_8\}, \{x_3, x_4, x_5, x_6\}, \{x_3, x_4, x_7, x_8\}$ получаем соответственно равенства

$$z_8 = \beta z_7,\ \ y_6 = \lambda y_5,\ \ y_8 = \alpha y_7, \text{ где } \alpha, \beta, \lambda \text{ – скаляры.}$$

Доказательство теоремы 2

Используем линейную зависимость векторов x_5, x_6, x_7, x_8:

$$\begin{vmatrix} x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_5 + z_5 \\ y_6 + z_6 \\ y_7 + z_7 \\ y_8 + z_8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_5 + z_5 \\ \lambda y_5 + \mu z_5 \\ y_7 + z_7 \\ \alpha y_7 + \beta z_7 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} y_5 \\ \mu z_5 \\ y_7 \\ \beta z_7 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_5 \\ \mu z_5 \\ z_7 \\ \alpha y_7 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} z_5 \\ \lambda y_5 \\ y_7 \\ \beta z_7 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} z_5 \\ \lambda y_5 \\ z_7 \\ \alpha y_7 \end{vmatrix} =$$

Доказательство теоремы 2

$$\dots = \mu(\beta-\alpha)\begin{vmatrix} y_5 \\ z_5 \\ y_7 \\ z_7 \end{vmatrix} - \lambda(\beta-\alpha)\begin{vmatrix} y_5 \\ z_5 \\ y_7 \\ z_7 \end{vmatrix} =$$

$$= (\mu-\lambda)(\beta-\alpha)\begin{vmatrix} a_{51} & a_{52} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{53} & a_{54} \\ a_{71} & a_{72} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{73} & a_{74} \end{vmatrix} =$$

$$= (\mu-\lambda)(\beta-\alpha)\begin{vmatrix} a_{51} & a_{52} \\ a_{71} & a_{72} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_{53} & a_{54} \\ a_{73} & a_{74} \end{vmatrix} = 0$$

Доказательство теоремы 2

- $\mu \neq \lambda$ (иначе ЛЗ $x_5 = y_5 + z_5$ и $x_6 = \lambda y_5 + \mu z_5$)
- $\alpha \neq \beta$ (иначе ЛЗ x_7 и x_8)

Поэтому равен нулю один из определителей

$\begin{vmatrix} a_{51} & a_{52} \\ a_{71} & a_{72} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_{53} & a_{54} \\ a_{73} & a_{74} \end{vmatrix}$, например – первый из них.

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} \\ a_{71} & a_{72} & a_{73} & a_{74} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{51} & a_{52} \\ a_{71} & a_{72} \end{vmatrix} = 0,$$

т.е. векторы x_3, x_4, x_5, x_7 ЛЗ, что противоречит условию.

■