Векторные решетки

Северилов П. А.

Московский физико-технический институт

25 марта, 2020.

Определение

Определение

Векторная решётка (пространство Рисса) – упорядоченное векторное пространство, в котором структура порядка задана решеткой. Впервые описана Рисом в 1928 году

Определение

Решётка – частично упорядоченное множество, в котором всякая пара элементов x, y из E имеет верхнюю грань $\sup(x, y)$ и нижнюю грань $\inf(x, y)$.

Пример и применение

Пример

Пространство $\mathbb{R}^A$ всех (конечных числовых) функций, определенных на произвольном множестве A – пространство Рисса с отношением порядка $x(t) < y(t) \forall t \in A$. Действительно, $\forall$ числовые функции x, y, определенные на A, имеют верхнюю (нижнюю) грань: $t \to \sup(x(t), y(t))$ $(t \to \inf(x(t), y(t)))$

Применение

- Теория меры (важными результатами являются частные случаи результатов для пространств Рисса)
- Математическая экономика (Charalambos D. Aliprantis)

Несколько свойств

- Каждое пространство Рисса является частично упорядоченным векторным пространством, но не каждое частично упорядоченное векторное пространство является пространством Рисса.
- Каждый элемент x в пространстве Рисса E имеет уникальные положительные и отрицательные части $x^+ = \sup(x, 0), x^- = (-x)^+ = \sup(-x, 0)$.
- $|x| = \sup(x, -x) = x^+ + x^-, \; x = x^+ - x^-$.
- Каждое пространство Рисса является дистрибутивной решеткой и обладает свойством разложения Рисса: если $x, y_i \geq 0, x \leq \sum y_i$, то $\exists x_i \geq 0 : x = \sum x_i$ и $x_i \leq y_i \; \forall i$.

Порождение пространства Рисса

Пусть E – упорядоченное векторное пространство; множество P положительных элементов из E составляет выпуклый конус с вершиной 0 ($P + P \subset P$, $\lambda P \subset P$). Если в топологическом векторном пространстве E над $\mathbb{R}$ выпуклый конус с вершиной 0 таков, что $P \cup (-P) = \{0\}$, то известно, что отношение $y - x \in P$ есть отношение порядка ($x \leq y$).

Для того, чтобы определенная таким образом в E структура порядка определяла структуру пространства Рисса, необ. и дост., чтобы:

1. P порождало E, т.е. чтобы $\forall$ элемент $z \in E$ был представим в виде $y - x$, где $x, y \in P$
2. P таково, что $\forall$ 2 элемента из P имеют в P либо верхнюю грань, либо нижнюю

Подпространства

Произведение

Пусть $(E_i)_{i \in I}$ – семейство упорядоченных векторных пространств. Для того, чтобы пространство-произведение $E = \prod_{i \in I} E_i$ было пространством Рисса, необх. и дост., чтобы каждое из пространств E_i было пространством Рисса.

Подпространства

Определение

Пусть E – упорядоченное векторное пространство, а V, W – два его векторных подпрострнаства. Говорят, что E есть упорядоченная прямая сумма пространств V и W, если отображение $(x, y) \to x + y$ упорядоченного векторного пространства $V \times W$ на упорядоченное векторное пространство E есть изоморфизм.

Предложение

Для того, чтобы упорядоченное векторное пространство E было упорядочнной прямой суммой двух дополнительных подпространств V и W, необх. и дост., чтобы соотношения $x \in V, y \in W, x + y \geq 0$ влекли $x \geq 0, y \geq 0$

Идеалы

Определение

Векторное подпространство I пространства Рисса E называется идеалом, если для $f \in I$ и $g \in E$ имеем: $|g| \leq |f| \to g \in I$.

Пересечение произвольного набора идеалов является идеалом, что позволяет определить наименьший идеал, содержащий некоторое непустое подмножество A в E (называется идеалом, порожденным A). Идеал, порожденный синглетоном (множество с единственным элементом) – главный идеал.

Полосы

Определение

Полоса B в пространстве Рисса E – идеал с дополнительным свойством: $\forall f \in E : |f|$ является супремумом произвольного подмножества положительных элементов в $B \hookrightarrow f \in B$.

Пример

В пространстве $\mathbb{R}^A$ конечных числовых функций, определенных на множестве A, множество функций, равных 0 во всех точках некоторой части M множества A, есть полоса.

Теорема

Теорема Рисса

Пусть A – подмножество пространства Рисса E. Множество $A^{'}$ элементов, независимых со всеми элементами множества A, составляет полосу; полоса $A^{''}$ элементов, независимых со всеми элементами множества $A^{'}$, совпадает с полосой, порожденной множеством A, а E является упорядченной прямой суммой полос $A^{'}$ и $A^{''}$.