Эйлеровы циклы в гиперграфах

Северилов Павел, 674 МФТИ

13 апреля 2020 г.

Доклад составлен на основе статьи "On tours that contain all edges of a hypergraph"by Zbigniew Lonc and Pawel Naroski

1 Определения

Гиперграф – пара $H = (V, E)$, где V – конечное множество и E – семейство каких-то подмножеств V. Элементы множества V называются **вершинами** H и элементы E – их ребра. Гиперграф называется **k-однородным**, если все его ребра имеют точно k элементов. Предполагаем $k \geq 2$ (2-однородный гиперграф – обычный граф).

Путь длины l в гиперграфе H – чередующаяся последовательность $(v_0, e_1, v_1, e_2, \ldots, v_{l-1}, e_l, v_l)$ вершин и ребер этого гиперграфа, удовлетворяющая:

1. ребра $e_1, e_2, \ldots, e_l$ попарно различны
2. $v_{i-1}, v_i \in e_i, i = 1, \ldots, l$
3. $v_{i-1} \neq v_i, i = 1, \ldots, l$

Путь называется **циклом**, если $v_0 = v_l$

k-однородный гиперграф H является **сильно связным**, если у него нет изолированных вершин и граф $G(H)$, множество вершин которого есть множество $E(H)$ ребер H и набор ребер состоит из пар $\{e, f\} \subseteq E(H)$ таких, что $|e \cap f| = k - 1$, связан. $G(H)$ называется **графом сильной связности** гиперграфа H.

Под **степенью** вершины v в гиперграфе H понимается число $d_H(v)$ ребер графа H, содержащее v ($d_H(v) = |\{e \in E(H) : v \in e\}|$). Множество вершин H нечетных (четных) степеней обозначается через $V_{odd}(H)$ ($V_{even}(H)$).

Обозначим $\mathcal{H}$ наименьший класс 3-равномерных гиперграфов такой, что

1. однореберный 3-однородный гиперграф принадлежит $\mathcal{H}$ и
2. если $H \in \mathcal{H}$ и f является 3-элементным множеством, таким что для некоторого $x \in f, x \notin V(H)$ и $f - \{x\}$ является подмножеством некоторого ребра в H, то гиперграф $H + f = (V(H) \cup \{x\}, E(H) \cup \{f\})$ принадлежит $\mathcal{H}$

Под **скелетом** $S(H)$ 3-однородного гиперграфа H понимается граф, множество ребер которого является $\{e \cap f : e, f \in E(H)$ и $|e \cap f| = 2\}$. **Сильная компонента** 3-однородного гиперграфа H – это гиперграф, ребра которого образуют компоненту в графе сильной связности $G(H)$. **Колесо** W_l ($l \geq 3$) – 3-однородный гиперграф, граф сильной связности которого является l-реберным циклом, и существует вершина, которая принадлежит всем ребрам W_l.

2 Основные результаты

Теорема 1. *Пусть $k > 2$. Задача определения наличия у данного k-однородного гиперграфа эйлерова цикла NP-полна.*

Теорема 2. *Пусть $k \geq 2$. Сильно связный k-однородный гиперграф H имеет эйлеров цикл тогда и только тогда, когда*

$$|V_{odd}(H)| \leqslant (k-2)|E(H)|$$

Теорема 3. *Пусть $k > 3$. Сильно связный k-однородный гиперграф H имеет эйлеров цикл тогда и только тогда, когда $|E(H)| \neq 1$.*

Теорема 4. *Пусть H – сильно связный 3-однородный гиперграф. Следующие утверждения эквивалентны*

- *H имеет цикл Эйлера,*
- *$|V_{odd}(H)| \leqslant |E(H)|$,*
- *$H \notin \mathcal{H}$ или H имеет вершину с четной степенью.*

Теорема 5. *Пусть $k \geq 3$. Каждый сильно связный k-однородный гиперграф имеет Эйлеров путь.*

Теорема 6. *Пусть H – 3-однородный гиперграф, скелет которого связный. Если каждая сильная компонента H не является ни членом H, имеющим все вершины нечетной степени, ни колесом, то H имеет цикл Эйлера.*

Теорема 7. *Задача определения того, имеет ли данный 3-однородный гиперграф со связным скелетом эйлеров цикл, является NP-полной.*

3 Некоторые идеи доказательств

Предложение 1. *Пусть H – k-однородный гиперграф, $k \geq 2$, и пусть $a, b \in V(H)$, $a \neq b$.*

1. *Если H имеет цикл Эйлера, то*

$$\sum_{v \in V(H)} \left\lfloor \frac{d(v)}{2} \right\rfloor \geqslant |E(H)|$$

2. *Если у H есть эйлеров ab-путь, то*

$$\left\lfloor \frac{d(a)+1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{d(b)+1}{2} \right\rfloor + \sum_{v \in V(H)-\{a,b\}} \left\lfloor \frac{d(v)}{2} \right\rfloor \geqslant |E(H)| + 1$$

3. *Первое неравнество эквивалетно $|V_{odd}(H)| \leqslant (k-2)|E(H)|$*

Доказательство Теоремы 2: Согласно Предложению 1 нам нужно показать только достаточность. Теорема 2 следует из Теоремы 4 при $k = 3$. По Теореме 3 для доказательства Теоремы 2 при $k > 3$ достаточно заметить, что однореберный k-однородный гиперграф не удовлетворяет условию $|V_{odd}(H)| \leqslant (k-2)|E(H)|$.

Доказательство Теоремы 3: Поскольку однореберные гиперграфы не имеют циклов Эйлера, нам нужно только доказать достаточность. Доказательство получается применением индукции к $|E(H)|$.

Доказательство Теоремы 4 гораздо сложнее: приведем основные моменты цепочки доказательства.

Порядок $e_1, \ldots, e_m$ множества ребер 3-однородного гиперграфа H называется **древовидным** порядком, если $\forall\ i > 1\ \exists j < i : |e_i \cap e_j| = 2$.

Лемма 1. *3-однородный гиперграф H имеет древовидное упорядочение множества ребер тогда и только тогда, когда H сильно связно.*

Лемма 2. *Пусть H – сильно связный 3-однородный гиперграф. Тогда $|V(H)| \leq |E(H)| + 2$.*

Лемма 3. *Пусть H – 3-однородный гиперграф. Тогда H сильно связный и удовлетворяет равенству $|V(H)| = |E(H)| + 2$ тогда и только тогда, когда $H \in \mathcal{H}$.*

Пусть H – 3-однородный гиперграф. 2-реберный подгиперграф H, индуцированный некоторыми ребрами uvx и uvy, является **подгиперграфом типа I**, если $d_H(x) = d_H(y) = 1$. 3-реберный подгиперграф H, индуцированный некоторыми ребрами uvz, uzx и vzy, – **подгиперграф типа II**, если $d_H(x) = d_H(y) = 1$ и $d_H(z) = 3$. 2-реберный подгиперграф H, индуцированный некоторыми ребрами uvt и vtx, является **подгиперграфом типа III**, если $d_H(x) = 1$ и $d_H(t) = 2$.

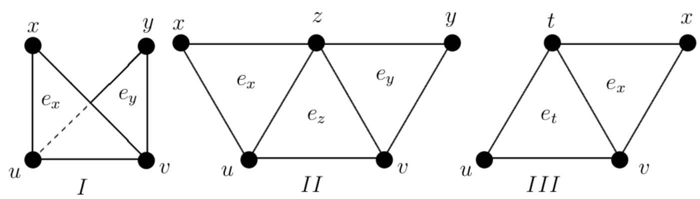

Рис. 1: Три типа подгиперграфов.

Лемма 4. *Каждый гиперграф $H \in \mathcal{H}$ с более чем одним ребром содержит подгиперграф типа I, II или III.*

Пусть $\mathcal{R}$ – наименьший класс 3-однородных гиперграфов, таких что

1. 2-реберный сильно связный 3-однородный гиперграф принадлежит $\mathcal{R}$ и

2. если $R \in \mathcal{R}$ и f 3-элементное множество такое, что для некоторого $x, y \in f, x \notin V(R), d_R(y) = 1$ и $f - \{x\}$ является подмножеством некоторого ребра в R, то гиперграф $R + f$ принадлежит $\mathcal{R}$.

Класс $\mathcal{R}$ является подклассом $\mathcal{H}$. Будем называть элементы $\mathcal{R}$ **лентами**.

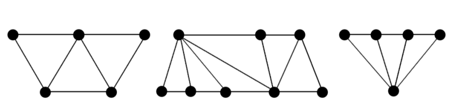

Рис. 2: Примеры лент

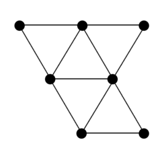

Рис. 3: Гиперграф из $\mathcal{H}$, не являющийся лентой.

Следующие две леммы описывают некоторые свойства лент.

Лемма 5. *Каждая лента имеет ровно две вершины степени 1 и хотя бы одну вершину четной степени.*

Лемма 6. *Пусть R – лента, a и b – ее концы (вершины степени 1).*

1. *В R нет эйлерова ab-пути, который проходит через каждую вершину R.*

2. *Для каждой вершины $v \neq a, b$ существует Эйлеров ab-путь в R, который проходит через каждую вершину R, кроме v.*

Будем говорить, что цикл Эйлера (или путь) гиперграфа $H \in \mathcal{H}$ **хороший**, если он проходит через все вершины H степеней, больших 1.

Лемма 7. *Пусть $H \in \mathcal{H}$.*

1. *Если у H есть вершина с четной степенью, то H имеет хороший цикл.*

2. *Если $a, b \in V(H), a \neq b$, не являются единственными двумя вершинами в H с четными степенями и H не является лентой с концами a и b, тогда в H есть хороший ab-путь.*

Следствие 7.1. *Пусть $H \in \mathcal{H}$. Следующие условия эквивалентны*

1. *H имеет хороший цикл*

2. *H имеет цикл Эйлера,*

3. *H имеет вершину с четной степенью.*

Следствие 7.2. *Пусть $H \in \mathcal{H}$ и $a, b \in V(H), a \neq b$. Следующие условия эквивалентны*

1. *существует хороший ab-путь в H,*

2. *в H есть эйлерова ab-путь, и H не является лентой с концами a и b,*

3. *a и b не являются единственными двумя вершинами в H с четными степенями, и H не является лентой с концами a и b.*

Пусть H – 3-однородный сильно связный гиперграф размера m. По Лемме 1 существует древовидное упорядочение $e1, \ldots, e_m$ множества ребер H. Для такого упорядоченного множества ребер H построим гиперграф $T(H) \in \mathcal{H}$. Ребра этого гиперграфа $\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_m$. Вершины гиперграфа $T(H)$ обозначаются через $u[i]$, где u – вершина H, а i – неотрицательное целое число.

Предложение 2. *Если H - сильно связный гиперграф, то*

1. *$T(H) \in \mathcal{H}$*

2. *$|E(T(H))| = |E(H)|$*

3. *$uvw \in E(H)$ если и только если $u\,[i_1]\,v\,[i_2]\,w\,[i_3] \in E(T(H))$, для некоторого $i_1, i_2, i_3 = 0, 1, \ldots$*

4. *если $\bar{P} = (v_0\,[i_0]\,, \bar{e}_1, v_1\,[i_1]\,, \bar{e}_2, v_2\,[i_2]\,, \ldots, v_{\ell-1}\,[i_{\ell-1}]\,, \bar{e}_\ell, v_\ell\,[i_\ell])$ – путь в $T(H)$, тогда $P = (v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, v_{\ell-1}, e_\ell, v_\ell)$ – путь в H*

Доказательство Теоремы 4 получается из Следствий 7.1, 7.2 и Предложения 2.